T.C.

RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

σ-SINIRLI YAKLAŞIK BİRİM ELEMANLI f-CEBİRLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

FATİH ORDU

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. RUŞEN YILMAZ

TEZ JÜRİLERİ

DOÇ. DR. NECATİ ÖZDEMİR

DOÇ. DR. KADİR KUTLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

<u>RİZE-2017</u>

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

σ-SINIRLI YAKLAŞIK BİRİM ELEMANLI f-CEBİRLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

Doç. Dr. Ruşen YILMAZ danışmanlığında, Fatih ORDU tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafından 29/06/2017 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**Unvan Adı Soyadı**	**İmzası**
Başkan	: Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR	
Üye	: Doç. Dr. Kadir KUTLU	K. Kut
Üye	: Doç. Dr. Ruşen YILMAZ	

Doç. Dr. Ferhat KALAYCI
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans öğrenimim boyunca ve tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve bilimsel desteğini büyük bir sabır içerisinde tüm imkânlarıyla sunan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ruşen YILMAZ'a, Matematik öğrenimim ve eğitimimde katkısı olan tüm hocalarıma, yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen yol arkadaşlarım Engin YEŞİLBAŞ ve Özkan KÖSA'ya, bu zorlu süreçte her zaman yanımda olan eşim Beyza ORDU'ya ve çalışmalarım boyunca maddi ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme saygı ve sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Fatih ORDU

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan σ -Sınırlı Yaklaşık Birim Elemanlı f -cebirlerinin Bazı Özellikleri başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 26/07/2017

Fatih ORDU

***Uyarı**: Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.*

ÖZET

σ-SINIRLI YAKLAŞIK BİRİM ELEMANLI f-CEBİRLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

Fatih ORDU

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Doç. Dr. Ruşen YILMAZ

Bu çalışmada Riesz cebirleri ve bu cebirlerin en önemli sınıflarından olan f-cebirlerinin temel özellikleri araştırılarak herhangi bir σ-sınırlı yaklaşık birimli$f$-cebirlerinin karakterizasyonu için yeter ve gerek koşullar araştırılmıştır.

Çalışma dört bölümden oluşmaktadır: Birinci bölümde, temel tanım ve teoremler verilerek Riesz uzaylarının temel özellikleri ve bu uzaylar üzerinde tanımlanan çeşitli dönüşümler, Riesz cebirleri ve temel özellikleri ile bazı önemli sınıflar tanımlanarak bu sınıflar incelenmiştir. İkinci bölümde, Jamel Jaber in *"f-algebras with σ-bounded approximate unit"* (Jaber, 2014) çalışması esas alınarak özellikle çalışmamızın temelini teşkil eden f-cebir sınıfı detaylı bir şekilde incelenip bu cebir sınıfının σ-sınırlı yaklaşık birimli olması durumunda ne gibi özelliklere sahip olduğu işlenmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde, bu çalışmadan elde edilen sonuçlar verilmiştir. Son bölümde ise σ-sınırlı yaklaşık birim elamana sahip f-cebirleri için önerilerde bulunulmuştur.

2017, 34 sayfa

Anahtar Kelime: Riesz cebiri, f-cebiri, σ-sınırlı yaklaşık birim.

ABSTRACT

SOME PROPERTIES OF f-ALGEBRAS WITH A σ-BOUNDED APPROXIMATE UNIT ELEMENT

Fatih ORDU

Recep Tayyip Erdoğan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ruşen YILMAZ

In this work, the main properties of Riesz algebras and f- algebras which are the most important classes of these algebras are investigated and a necessary and sufficient condition for a characterization of f- algebras with a σ-bounded approximate unit are examined.

The study consists of four parts: In first part, given by the basic definitions and theorems, main properties of Riesz spaces and various transformations defined on these spaces, Riesz algebras and the main properties of that and also some important classes are defined and examined. In the second part, based on Jamel Jaber's study entitled "f- algebras with a σ- bounded approximate unit" (Jaber, 2014), especially investigating the class of f-algebra, which constitutes the basis of the our study, in details, the characteristics of this algebra class with a σ- bounded approximate unit are examined. In the third part of the study, the results obtained in this study were given. In the last part, some proposals were made for f-algebras with a σ-bounded approximate unit element.

2017, 34 pages

Keywords: Riesz algebras, f-algebra, σ-bounded approximate unit element.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

E^+	E Sıralı Vektör Uzayının Pozitif Konisi
E'	E Riesz Uzayının Birinci Sıralı Duali
E''	E Riesz Uzayının İkinci Sıralı Duali
$(E')'_n$	E Riesz Uzayının Sıralı Sürekli İkinci Duali
E^*	E Riesz Uzayının Norm Duali
$\sigma(A)$	A Riesz Uzayının A'' deki Görüntüsü
$\downarrow$	Aşağı Yönlü
$[\,,]$	Sıralı Aralık
B_A	A da Tüm Tam Sınırlı Elemanların Kümesi
$O(A)$	A nın Otomorfizmalarının Kümesi
σ-syb	σ-Sınırlı Yaklaşık Birimli

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Riesz uzayı veya vektör latisi adını, Fragyes Riesz'in 1928 yılındaki *"Sur la decompositon des operations fonctionelles lineaires"* (Riesz, 1928) adlı eserinden almıştır. Riesz cebirlerinin ilk tanımının genel olarak ne zaman yapıldığını kesin olarak söyleyebilmek kolay değildir. Birkhoff'un çalışmaları 1950 yılında, Cambridge'de düzenlenen Uluslararası Matematik Kongresini işaret etmektedir. Latis sıralı gruplarının gelişimi, Riesz uzayının gelişimine benzerdir. Riesz uzayları analizcilerin ilgisini çekerken, latis sıralı gruplarının cebirciler tarafından araştırıldığı görülmüştür.

f-cebir teorisi ilerleyen yıllarda Lüxemburg tarafından Arkansas ders notlarında ve 1982'de Pagter'in doktora tez çalışmasında ele alınmıştır. f-cebirleri alanındaki başka bir çalışma, vektör latislerinde Seçme Aksiyomlarını kullanmaksızın, Riesz uzayları teorisinde birçok temel sonucu ispatlamak için bir program geliştirilmesini düşünen Zaanen tarafından başlatılmıştır. Bu çalışmaları Huijsmans (Huijsmans, 1991) güncelleştirmiştir. Huijsmans'ın çalışmalarından sonra çok fazla gelişme oldu ve (Huijsmans, 1991)'de gündeme gelen bazı problemler çözüldü. Öte yandan (Huijsmans, 1991)'de ideal teori, Riesz homomorfizması ve cebir homomorfizması arasındaki bağlantılar ve f-cebirlerinin gösterimi gibi konular eksikti. Bu nedenle Boulabiar, Buskes ve Triki, Huijsmans'ın Riesz cebirleri ve f-cebirleri üzerindeki araştırma çalışması (Huijsmans, 1991)'i güncelleştirip genelleştirerek 2003'te ortak bir araştırma çalışmasını yayınladılar (Buskes, Boulabiar ve Triki, 2003). Ayrıca, Riesz uzayları ve f-cebirleri özellikleri üzerine daha fazla bilgi için W. Filter'in araştırma çalışması (Filter, 1994) ile C. B. Huijmans, F. Beukers ve B. de Pagter'in (Huijsmans, Beukers ve Pagter 1983), C. B. Huijmans ve B. de Pagter'in (Huijsmans ve Pagter, 1982) ve (Huijsmans and Pagter, 1984) makaleleri okuyucunun başvurabileceği temel kaynaklardan bazılarıdır.

Söz konusu çalışmada (Aliprantis ve Burkinshow, 1985), (Aliprantis ve Burkinshow, 2006), (Birkhoff, 1987), (Zaanen, 1983) standart kitapları ve (Huijsmans, 1991), (Huijsmans and Pagter, 1984), (Buskes, Boulabiar and Triki, 2003), (Boulabiar and Jaber, 2011), (Jaber, 2014) makaleleri ile (Pagter, 1981) ve (Yılmaz, 2001) Ph.D. tezleri temel kaynak olarak alınmaktadır.

1.2. Riesz Uzayları

Tanım 1.2.1. E bir gerçel vektör uzayı ve " $\leq$ " E üzerinde kısmi sıralama bağıntısı olsun. Bu durumda

1) $\forall x, y, z \in E$ için $x \leq y$ iken $x + z \leq y + z$

2) $\forall x, y \in E$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ için $x \leq y$ iken $\alpha x \leq \alpha y$

koşullarını sağlayan $(E, \leq)$ ikilisine *sıralı vektör uzayı* denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Tanım 1.2.2. E bir sıralı vektör uzayı olsun. Bu durumda $E^+ = \{x \in E: 0 \leq x\}$ kümesine E nin *pozitif konisi*, E^+ nın elemanlarına da E nin *pozitif elemanları* denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Tanım 1.2.3. E bir sıralı vektör uzayı ve $\emptyset \neq A \subset E$ olsun. Eğer

1) $\forall a \in A$ için $\exists u \in A$ öyle ki $a \leq u$

2) $\forall a \in A$ için $\exists v \in A$ öyle ki $a \leq v$ iken $u \leq v$

özellikleri sağlanırsa A kümesine *supremuma sahiptir* denir ve $u =$sup$A$ şeklinde yazılır.

Tanım 1.2.4. E bir kısmi sıralı vektör uzayı olmak koşuluyla. $\forall x, y \in E$ için $\{x, y\}$ kümesinin infimumu (supremumu) mevcutsa, yani

inf$\{x, y\}: = x \wedge y \in E$ (sup$\{x, y\}: = x \vee y \in E$)

ise E'ye *Riesz uzayı* veya *latis vektör uzayı* kısaca l-$uzayı$ denir.

Tanım 1.2.5. E bir Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere,

1) $x^+ = x \vee 0$ elemanına x in *pozitif kısmı*,

2) $x^- = (-x) \vee 0$ elemanına x in *negatif kısmı*,

3) $|x| = x \vee (-x)$ elemanına x in *modülü (mutlak değeri)* denir.

Teorem 1.2.6. E bir Riesz uzayı $x, y, z \in E$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

1) $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ (üçgen eşitsizliği).

2) $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$ ve $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|$ (Birkhoff eşitsizlikleri).

3) Eğer $x, y, z \in E^+$ ise $x \wedge (y + z) \leq (x \wedge y) + (x \wedge z)$ (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Tanım 1.2.7. E bir Riesz uzayı olsun. E deki sıralama bağıntısıyla $V \subset E$ bir vektör (lineer) alt uzayı olsun. $\forall x, y \in V$ için $x \vee y, x \wedge y \in V$ ise V ye E nin bir *Riesz alt uzayı* ya da *alt vektör latisi* denir. (Burada E bir Riesz uzayı olduğundan x ve y nin supremumu var olup E nin elemanıdır). Kısaca V alt vektör uzayı E den indirgenen sıralama bağıntısına göre kendi kendine bir Riesz uzayıdır.

Tanım 1.2.8. Eğer $\forall a, b \in E$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $0 \leq na \leq b$ iken $a = 0$ sağlanıyorsa E Riesz uzayına *Archimedeandir* denir.

Tanım 1.2.9. E bir Riesz uzayı ve $A \subset E$ olsun.

1) $\forall x, y \in A$ için $x \vee y, x \wedge y \in E$ ise A ya E nin *Riesz alt uzayı* denir.

2) Eğer $y \in E$ olmak üzere $x \in A$ ve $|y| \leq |x|$ olduğunda $y \in A$ sağlanıyorsa A ya *solid* denir.

3) A bir solid lineer alt uzay ise A ya E de bir *ideal* veya *sıralı ideal* denir.

4) A bir ideal ve $\forall B \subset A$ için sup$B \in E$ olması durumunda sup $B \in A$ sağlanıyorsa A ya bir *band* denir.

Teorem 1.2.10. Bir Riesz uzayında

1) Her band bir idealdir.

2) Her ideal bir Riesz alt uzayıdır.

Tanım 1.2.11. E bir Riesz uzayı ve $x, y \in E$ olsun. Eğer $|x| \wedge |y| = 0$ ise x *ile* y *birbirine diktir* denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2.12. Bir Riesz uzayının boştan farklı ve üstten sınırlı her alt kümesinin supremumu veya boştan farklı ve alttan sınırlı her alt kümesinin infimumu varsa bu uzaya bir *Dedekind tam Riesz uzayı* denir.

Tanım 1.2.13. E bir Riesz uzayı ve $F \subseteq E$ olsun. F hem üstten hem de alttan sınırlıysa yani sıralı aralık içinde kalıyorsa F ye bir *sıralı sınırlı alt küme* denir.

Tanım 1.2.14. E bir Riesz uzayı ve $\{f_n : n = 1,2,3, \cdots\} \subset E$ bir dizi olsun. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ için, $n \leq m$ iken $f_n \geq f_m$ ise $\{f_n\}$ dizisi *monoton azalandır* denir ve $f_n \downarrow$ şeklinde gösterilir. Ayrıca eğer $f_n \downarrow$ ve $f = inf f_n \in E$ ise $f_n \downarrow f$ dir.

1.3. Dönüşümler ve Riesz Homomorfizması

Tanım 1.3.1. E ve F iki vektör uzayı ve $T: E \to F$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in E$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

1) $T(x + y) = T(x) + T(y)$

2) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

koşullarını sağlarsa T ye bir *lineer dönüşüm* veya *lineer operatör* denir. $T(x)$ yerine, kısaca, Tx de yazılabilir.

Tanım 1.3.2. E ve F iki Riesz uzayı olmak üzere E den F ye tanımlanan bütün lineer dönüşümlerin kümesi $L(E, F)$ ile gösterilir, yani

$L(E, F) \coloneqq \{T: E \to F$ lineer dönüşüm$\}$.

Operatörlerin toplam ve skaler çarpımına göre, yani

1) $\forall T_1, T_2 \in L(E, F)$ için $T_1 + T_2 \in L(E, F)$

2) $\forall T \in L(E, F)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha T \in L(E, F)$

olduğundan $L(E, F)$ bir vektör uzayıdır.

Üstelik $\forall T, S \in L(E, F)$ için $S \leq T \Leftrightarrow 0 \leq T - S$ şeklinde tanımlanan "$\leq$" sıralama bağıntısına göre $L(E, F)$ bir sıralı vektör uzaydır.

Tanım 1.3.3. E ve F iki sıralı reel vektör uzayı ve $T: E \to F$ bir lineer dönüşüm olsun. $\forall 0 \leq x \in E$ için $0 \leq Tx \in F$ sağlanıyorsa (yani $x \in E^+$ için $Tx \in F^+$) T operatörüne bir *pozitif lineer operatör* veya *pozitif operatör* denir ve $T \geq 0$ veya $0 \leq T$ şeklinde gösterilir.

$T: E \to F$ lineer dönüşümü pozitifse,

$x \leq y \Longrightarrow 0 \leq x - y \Longrightarrow 0 \leq T(x - y) \Longrightarrow Tx \leq Ty.$

Tanım 1.3.4. E, F iki Riesz uzayı ve $T: E \to F$ bir operatör olmak üzere, $\forall x, y \in E$ için

$$T(x \vee y) = Tx \vee Ty$$

sağlanıyorsa T'ye bir *Riesz homomorfizması* denir.

Her Riesz homomorfizması pozitiftir. Gerçekten; T Riesz homomorfizması ve $0 \leq x \in E^+$olmak üzere,

$$Tx = T(x \vee 0) = Tx \vee T0 = Tx \vee 0 = (Tx)^+ \geq 0.$$

Teorem 1.3.5. E, F iki Riesz uzayı ve $T: E \to F$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

1) T Riesz homomorfizmasıdır.

2) $\forall x, y \in E$ için $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty$.

3) $\forall x, y \in E$ ve $x \wedge y = 0$ ise $Tx \wedge Ty = 0$.

4) $\forall x \in E$, $|Tx| = T(|x|)$.

5) $\forall x \in E$, $T(x^+) = (Tx)^+$.

6) $\forall x \in E$, $T(x^-) = (Tx)^-$ (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Tanım 1.3.6. E, F iki Riesz uzayı ve $T: E \to F$ bir operatör olsun. Eğer T, E nin her sıralı sınırlı alt kümesini F nin sıralı sınırlı alt kümesine resmediyorsa T operatörüne bir *sıralı sınırlı operatör* denir ve bütün sıralı sınırlı operatörlerin oluşturduğu vektör uzayı $L_b(E, F)$ ile gösterilir. O halde

$$L_b(E, F) := \{T \in L(E, F): T \text{ sıralı sınırlı operatör}\}.$$

$T \in L_b(E,F)$ iki pozitif operatörünün farkı şeklinde yazılabiliyorsa T ye bir *regüler (düzenli) operatör* denir. Bütün regüler operatörlerin uzayı $L_r(E,F)$ ile gösterilir. Başka bir ifade ile,

$T \in L_r(E,F) \Leftrightarrow \exists T_1, T_2 : E \to F$ pozitif operatör: $T = T_1 - T_2$.

Kolayca görülüyor ki, her pozitif operatör sıralı sınırlıdır. Sonuç olarak

$L_r(E,F) \subset L_b(E,F) \subset L(E,F)$.

F nin bir Dedekind tam Riesz uzayı olması durumunda $L_r(E,F) = L_b(E,F)$ olup $L_b(E,F)$ bir Riesz uzayıdır (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Teorem 1.3.7. E, F iki Riesz uzayı olmak üzere, $T \in L(E,F)$ için $|T| = (-T) \vee T$ mevcut ise $|T|$ ye T nin *modülü* denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Teorem 1.3.8. E, F iki Riesz uzayı olmak üzere, eğer $T: E \to F$ dönüşümü pozitifse $\forall x \in E$ için $|Tx| \leq T|x|$ dir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Teorem 1.3.9. (Kantorovich). E ve F iki Archimedean Riesz uzayı olsun. $T: E^+ \to F^+$ toplamsal, yani $\forall x, y \in E^+$ için

$T(x+y) = T(x) + T(y)$

ise tek olarak yine T ile gösterilen $T: E \to F$ pozitif genişlemesi mevcut olup $\forall x \in E$ için $T(x) = T(x^+) - T(x^-)$ sağlanır (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Teorem 1.3.10. (Riesz-Kantorovich) E bir Riesz uzayı ve F bir Dedekind tam Riesz uzayı ise sıralı vektör uzayı $L_b(E,F)$ bir Dedekind tam Riesz uzayıdır. Bu durumda $T, S \in L_b(E,F)$ ve $x \in E^+$ için

$|T|(x) = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$

$(S \vee T)(x) = \sup\{S(y) + T(z): y, z \in E^+ \text{ ve } y + z = x\}$

$(S \wedge T)(x) = \inf\{S(y) + T(z): y, z \in E^+ \text{ ve } y + z = x\}$

(Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Tanım 1.3.11. E, F iki Riesz uzayı olmak üzere

i. $\{x_\alpha\} \subset E$ bir ağ olsun. $P_\alpha \downarrow 0$ ve $|x - x_\alpha| \leq P_\alpha$ olacak şekilde $\exists\{P_\alpha\} \subset E$ ağı varsa $\{x_\alpha\}$ ağına $x \in E$ noktasına *sıralı yakınsaktır* denir $x_\alpha \overset{s}{\rightarrow} x$ şeklinde gösterilir.

ii. $T: E \rightarrow F$ operatörüne Edeki $x_\alpha \overset{s}{\rightarrow} x$ şeklindeki $\forall(x_\alpha) \subset E$ için Fde $Tx_\alpha \overset{s}{\rightarrow} Tx$ sağlanıyorsa T ye bir *sıralı sürekli operatör* denir. Bütün sıralı sürekli operatörlerin kümesi $L_n(E, F)$ ile gösterilir. O halde,

$L_n(E, F) \coloneqq \{T \in L_b(E, F): T \text{ sıralı süreklidir}\}.$

Ayrıca,$T \in L_n(E, F) \Leftrightarrow E$ de $x_\alpha \downarrow 0$ ise Fde $Tx_\alpha \downarrow 0$ (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Tanım 1.3.12. E bir Riesz uzayı olsun.

1) E üzerindeki tüm sıralı sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayına E nin *birinci sıralı duali* denir ve E' ile gösterilir, yani

$E' \coloneqq \{f | f: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ bir lineer sıralı sınırlı fonksiyoneldir}\} = L_b(E, \mathbb{R}),$

yani $f \in E' \Leftrightarrow \forall A \subset E$ sıralı alt kümesi ve $\forall a \in A$ için $\exists M > 0: |f(a)| \leq M.$

2) E' üzerindeki tüm sıralı sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayına E nin *ikinci sıralı duali* denir ve E'' ile gösterilir. Burada E'', E' nın sıralı sınırlı dual uzayıdır.

$E'' \coloneqq \{F | F: E' \rightarrow \mathbb{R} \text{ bir sıralı sınırlı lineer fonksiyoneldir}\}$

E bir Riesz uzayı ise E' de bir Riesz uzayıdır. Ayrıca, E nin sıralı sürekli ikinci duali $(E')'_n$ ile gösterilir. Buna göre,

$(E')'_n \coloneqq \{f \in E'' | F: E \to \mathbb{R}$ bir sıralı sürekli lineer fonksiyoneldir$\}$.

3) E üzerindeki tüm norm sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayına E nın *norm duali* denir ve E^* ile gösterilir, yani

$E^* \coloneqq \{f | f: E \to \mathbb{R}$ bir lineer norm sürekli ($\Leftrightarrow$ norm sınırlı) fonksiyoneldir$\}$.

Her lineer norm sürekli fonksiyonel sıralı sınırlı, yani $E^* \subset E'$ dır (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Tanım 1.3.13. $T: E \to E$, Riesz uzayında bir dönüşüm olmak üzere, E nin herhangi bir B bandı için $T(B) \subseteq B$ oluyorsa T dönüşümüne $band\ koruyandır$ denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Teorem 1.3.14. Bir Archimedean Riesz uzayında $T: E \to E$ dönüşümü için aşağıdaki durumlar eşdeğerdir.

1) T band koruyandır.

2) $x \perp y$ ise $Tx \perp y$ (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

1.4. Riesz Cebirleri

A bir Riesz uzayı olmak üzere A' bir Dedekind tam (böylece Archimedean) Riesz uzayıdır. $\forall x \in A$ için $x'' \in A''$ olup ve $\forall f \in A'$ için $x''(f) = f(x)$ olmak üzere

$\sigma(x) = x''$

şeklinde tanımlanan $\sigma: A \to A''$ dönüşümü bir Riesz homomorfizmasıdır. Bununla birlikte A', A nın noktalarını ayırıyorsa, yani

$\forall x \in A \ni x \neq 0$ için $\exists f \in A': f(x) \neq 0$

ise σ dönüşümü bire-birdir ve bu durumda A, A'' nin Riesz alt uzayı olan $\sigma(A)$ ile özdeş olur. A' Dedekind tam olduğundan A'' Dedekind tam Riesz uzayı olduğu açıktır (Zaanen,1983).

Tanım 1.4.1. A bir Riesz uzayı olsun. Eğer, A bir birleşmeli cebir ve $\forall 0 \leq x, y \in A$ için $0 \leq x \cdot y \in A$ ise A ya bir *Riesz cebiri (sıralı latis cebir* veya kısaca *l-cebiri)* denir.

Tanım 1.4.2. A bir Riesz cebiri olsun. $x \in A$ için $\exists m \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}: x^m = 0$ ise x e nilpotent eleman, $\exists k \in \mathbb{N}: x^k = 0 \Rightarrow x = 0$ özelliği sağlanırsa A ya *yarı-asal* denir.

Tanım 1.4.3. A bir Riesz cebiri $x, y \in A$ ve $x \wedge y = 0$ olmak üzere,

1) $\forall 0 \leq z \in A$ için $xz \wedge y = 0 = zx \wedge y$ ise A ya bir *f-cebiri*,

2) $xy = 0$ ise A ya bir *hemen hemen f-cebiri*,

3) $\forall 0 \leq z \in A$ için $xz \wedge yz = 0$ ve $zx \wedge zy = 0$ ise A ya bir *d-cebir* denir.

f-cebirleri ilk olarak 1950 yılında Nakano tarafından yarı–normal l-cebiri olarak tanımlanmıştır (Nakano, 1950) ve makalede cebirin σ-Dedekind tam olduğu kabul edilmiştir. 1953'te bu özellik Amemiya tarafından kaldırılmıştır (Amemiya, 1953).Bu çalışmada bu cebir sınıflarının tanımları Birkoff ve Pierce'nin 1956'daki bir makalesinde tanımlamış olduğu şekliyle göz önüne alınacaktır (Birkoff ve Pierce, 1956). Hemen hemen f-cebirleri Birkhoff tarafından 1967'de tanımlanmıştır (Birkhoff, 1967) ve Banach hemen hemen f-cebirleri Scheffold tarafından genişçe çalışılmıştır (Scheffold, 1981). d-cebirleri Kudlacek tarafından 1962'de tanımlanmıştır (Kudlacek, 1962).

Aşağıdaki sonuç tanımdan hemen görülür.

Teorem 1.4.4. **1)** Her f-cebiri hemen hemen f-cebiridir.

2) Her f-cebiri d-cebiridir.

Teorem 1.4.5. A bir f-cebiri ise aşağıdakiler sağlanır. $\forall x, y \in A$ için

1) $\forall z \in A^+$ için $z(x \wedge y) = zx \wedge zy$ ve $z(x \vee y) = zx \vee zy$.

2) $\forall z \in A^+$ için $(x \wedge y)z = xz \wedge yz$ ve $(x \vee y)z = xz \vee yz$.

3) $x \perp y$ ise $\forall z \in A$ için $zx \perp y$ ve $xz \perp y$.

4) $x \perp y$ ise $xy = 0$

5) $\forall x \in A, x^2 \geq 0$

6) $\forall x, y \in A^+$ için $x^2 \vee y^2 \geq xy \vee yx$ ve $x^2 \wedge y^2 \leq xy \wedge yx$.

7) $\forall x, y \in A^+$ için $x^2 \wedge y^2 = (x \wedge y)^2$ ve $x^2 \vee y^2 = (x \vee y)^2$ (Huijsmans, 1991).

Teorem 1.4.6. A bir Archimedean f-cebri olsun. Bu durumda

1) Eğer A bir e birim elemanına sahipse $e \geq 0$.

2) $a^2 = 0$ ise $\forall b \in A$ için $a.b = 0$.

3) A bir birim elemana sahipse yarı-asaldır (Huijsmans, 1991).

Teorem 1.4.7. A yarı-asal Riesz cebiri olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

1) A bir f-cebridir.

2) A bir d-cebridir.

3) A bir hemen hemen f-cebridir (Huijsmans, 1991).

Özellikle, her birim elemanlı Archimedean f -cebri yarı-asal olduğundan yukarıdaki sonuç birimli Riesz cebirleri için de doğrudur.

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe A, bir Archimedean Riesz cebiri ve daha önce açıklandığı gibi, A' ve A'' uzayları sırasıyla, A nın birinci sıralı duali ve ikinci sıralı duali olarak dikkate alınacaktır.

Tanım 1.4.8. A'' de *birinci ve ikinci Arens çarpımları* olarak adlandırılan çarpma işlemleri üç adımda sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$\forall x, y \in A, \forall f \in A'$ ve $\forall F, G \in A''$ için

1) $(f \cdot x)(y) = f(xy)$, $\quad f \cdot x \in A'$

$(G \cdot f)(x) = G(f \cdot x)$, $\quad G \cdot f \in A'$

$(F \cdot G)(f) = F(G \cdot f)$, $\quad F \cdot G \in A''$

2) $(x \circ f)(y) = f(yx)$, $\quad f \circ x \in A'$

$(f \circ G)(x) = G(x \circ f)$, $\quad G \circ f \in A'$

$(F \circ G)(f) = G(f \circ F)$, $\quad F \circ G \in A''$

Bu tezde birinci Arens çarpımı ile çalışılacaktır. Benzer işlemler ikinci Arens çarpımı ile de yapılabilir. Yukarıdaki eşitliklerden aşağıdaki eşitsizlikler kolaylıkla elde edilir.

$|f\cdot x| \leq |f|\cdot|x|\,, \qquad f\cdot x \in A'$

$|F\cdot f| \leq |F|\cdot|f|\,, \quad F\cdot f \in A'$

$|F\cdot G| \leq |F|\cdot|G|\,, \quad F\cdot G \in A''.$

Bu son eşitsizlikten $\forall 0 \leq F, G \in A''$ için $0 \leq F\cdot G \in A''$ sağlandığından A'' bidual uzayının birinci (benzer şekilde, ikinci) Arens çarpımına göre bir Riesz cebiri olduğu anlaşılır. Ayrıca A nın bir hemen hemen f-cebiri (sırasıyla, f-cebiri) olması durumunda A'' uzayının Arens çarpımlarına göre bir Dedekind tam hemen hemen f-cebiridir (sırasıyla , f-cebiridir) (Bernau ve Huijsmans, 1995).

A değişmeli Riesz cebiri ise, $\forall x \in A$ ve $f \in A'$ için $x''\cdot f = f\cdot x$ dir. Gerçekten, $\forall y \in A$ için

$$(x''\cdot f)(y) = x''(f\cdot y) = (f\cdot y)(x) = f(yx) = f(xy) = (f\cdot x)(y)$$

ve ayrıca $\forall x \in A$ ve $F \in A''$ için $x''\cdot F = F\cdot x''$. Çünkü $\forall f \in A'$ için

$$(x''\cdot F)(f) = x''(F\cdot f) = (F\cdot f)(x) = F(f\cdot x) = F(x''\cdot f) = (F\cdot x'')(f).$$

Tanım 1.4.9. R halka ve $I \subset R$ olmak üzere, $\forall r \in R$ ve $a \in I$ için $ra, ar \in I$ oluyorsa I halka idealidir.

Tanım 1.4.10. A bir Riesz uzayı olsun. Eğer $x, y \in A$ için $|x| \wedge |y| = 0$ iken $|\pi(x)| \wedge |y| = 0$ ise $\pi \in L_b(A)$ operatörüne bir *otomorfizma* denir. A nın otomorfizmalarının kümesi $O(A)$ ile gösterilir.

Teorem 1.4.11. A bir Archimedean Riesz uzayı ise $O(A)$ birim elemanlı bir f-cebridir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Teorem 1.4.12. Bir Archimedean Riesz uzayında her otomorfizma sıralı süreklidir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Tanım 1.4.13. A ve B iki Riesz uzayı ve $T: A \to B$ olsun. ve T dönüşümünün adjointi (veya tranpozesi) $T': B' \to A'$, $\forall a \in A, f \in B'$ için $T'(f)(x) = f(T(x))$ olarak tanımlanır (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Teorem 1.4.14(Wickstead). A bir Riesz uzayı ve A', A nın noktalarını ayırsın (yani, $\forall 0 \neq a \in A$ için $f(x) \neq 0$ olacak şekilde bir $f \in A'$). Bu durumda sıralı sınırlı $T \in O(A)$ ancak ve ancak $T' \in O(A')$ (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu çalışmada σ-sınırlı yaklaşık birim elemana sahip f-cebirlerinin sınıfını içeren tüm birimli f-cebirlerinin sınıfı incelenecektir. Özel olarak bir A f-cebrinin, σ-sınırlı yaklaşık birime sahip olması için gerek ve yeter şart, A'' sıralı bidualinin birimli f-cebri olmasıdır.

2.1. σ-Sınırlı Yaklaşık Birimli Riesz Cebirleri

Tanım 2.1.1.

i. A bir Riesz cebiri olsun. $\forall x \in A$ için $x^2 \leq x$ ise x pozitif elemanına *tamamen sınırlıdır* denir. A da tüm tamamen sınırlı elemanların kümesi B_A ile gösterilir. Başka bir ifade ile

$$B_A \coloneqq \{x \in A : x^2 \leq x\}.$$

ii. $\forall\, 0 \leq f \in A'$ için $\{f(x) : x \in B_A\}$ kümesi $\mathbb{R}$ de sınırlı ise A Riesz cebiri *σ-sınırlı yaklaşık birime sahiptir* denir ve kısaca σ-syb olarak gösterilir.

Örnek 2.1.2. A, e birim elemanlı f-cebri ise,

$$B_A = \{x \in A : 0 \leq x \leq e\}$$

dir. $x \in B_A$ seçilsin.

$$0 \leq (x - x \wedge \mathrm{e})^2 = x^2 - 2\big(x(x \wedge e)\big) + (x \wedge e)^2$$

$$= x^2 - 2(x^2 \wedge x) + x^2 \wedge e$$

$$\leq x^2 \wedge e - x^2$$

$$\leq x^2 - x^2 = 0.$$

Birim elemanlı her cebir yarı-asaldır. O halde $x^2 = 0$ ise $x = 0$ olduğundan eşitsizlikten

$x - x \wedge e = 0 \Rightarrow x = x \wedge e$

$\Rightarrow 0 \leq x \leq e$

$\Rightarrow x \in \{x \in A: 0 \leq x \leq e\}$ (1)

$x \in \{x \in A: 0 \leq x \leq e\}$ olsun. Buna göre $0 \leq x \leq e$ eşitsizliği $x \geq 0$ ile çarpılırsa,

$0 \leq x^2 \leq x \Rightarrow \{x \in A: 0 \leq x \leq e\} \subset B_A$ (2)

(1) ve (2) den $\{x \in A: 0 \leq x \leq e\} = B_A$ elde edilir. Ayrıca, A bir σ-sınırlı yaklaşık birime sahiptir. Gerçekten $\{f(x): 0 \leq x \leq e\} = B_A$ olsun. f lineer olduğundan $0 \leq f(x) \leq f(e)$ olur.

Öte yandan $e - x \geq 0 \Rightarrow f(e - x) \geq 0$

$\Rightarrow f(e) - f(x) \geq 0.$

$\Rightarrow f(e) \geq f(x)$ elde edilir.

Lemma 2.1.3. A, σ-sınırlı yaklaşık birim elemanlı bir Riesz cebiri olsun. Eğer $x \in A^+$ nilpotent elemansa $x = 0$ dır; başka bir ifade ile A, yarı-asaldır.

İspat: $0 \leq x, A$ da bir nilpotent eleman olsun. Buna göre bir $k \in \mathbb{N}$ için $x^k = 0$ dır. Şimdi bir $n \in \mathbb{N}$ sabiti alınırsa, açıkça $nx^{k-1} \in B_A$ dır. Buradan,

$M_f \coloneqq \sup\{f(x): x \in B_A\}$

olmak üzere $\forall 0 \leq f \in A'$ için

$0 \leq n.f(x^{k-1}) \leq M_f$.

$\Rightarrow f(x^{k-1}) = 0$.

$\Rightarrow x^{k-1} = 0$.

Bu işlem $k-2$ defa tekrarlanırsa $x = 0$ elde edilir. Böylelikle A, yarı-asaldır.

Buradan her yarı-asal hemen hemen f-cebiri (veya d-cebri) bir f-cebiridir (Bernau, S.J. ve Huijsmans, C.B. , 1990). Gerçekten;

$a, b \in A^+$ ise $a \wedge b = 0$

$\forall c, d \in A^+$ için

$0 \leq d(ca \wedge b) = dca \wedge db \leq [(d \vee dc)a] \wedge [(d \vee dc)b] = (d \vee dc)(a \wedge b) = 0.$

$\Rightarrow d(ca \wedge b) = 0$

Buradan $d = ca \wedge b$ olarak alınırsasun. $(ca \wedge b)^2 = 0$ olup A yarı-asal olduğundan $ca \wedge b = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $ac \wedge b = 0$ olduğu görülür. Böylelikle A bir f-cebiridir. Bu sonuç ve Lemma 2.1.3 ten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.4. σ-syb elemanına sahip bir hemen hemen f-cebri veya d-cebri doğal olarak bir f-cebridir.

A, σ-syb elemanına sahip bir f-cebri olmak üzere, Lemma 2.1.3 e göre $A, O(A)$ içine bir f-alt cebiri ve halka ideali olarak gömülebilirdir. $O(A)$, I birim elemanlı f-cebri olduğundan Örnek 2.1.2 den dolayı B_A aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$B_A \coloneqq \{a \in A: 0 \leq a.b \leq b\ , \forall b \in A^+\} = [0, I] \cap A$

Uyarı 2.1.5. Bir yarı-asal f-cebirinin σ-syb elemanlı olması gerekmez. Gerçekten;

$$A = l_1 = \{(a_n) \subset \mathbb{R}: \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\}$$

olsun. Dizilerdeki doğal işlemler ve sıralama bağıntısına göre A bir yarı-asal f-cebri olup

$$B_A = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A: 0 \leq a_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

dir. Ayrıca $A' = {l_1}' = l_\infty$ (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985) . O halde

$$f = (1,1,1,\cdots) \in l_\infty = A'$$

ve her bir $n = 1,2,\cdots$ için

$$e_n = \left(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n-tane}, 0, \cdots\right) \in B_A$$

tanımlanırsa $\forall n = 1,2,\cdots$ için $f(e_n) = n$ olduğundan A σ-syb elemanına sahip değildir.

Tanım 2.1.6. A bir Riesz uzayı ve $\{x_n\} \subset A$ olsun. Eğer bir $x \in A^+$ ve $\lambda_n \downarrow 0$ koşulunu sağlayan bir $\{\lambda_n\}$ reel sayı dizisi mevcut öyle ki $\lambda_n x \downarrow 0$, ve $m, n = 1,2,\cdots$ olmak üzere $m \geq n$ için $|x_n - x_m| \leq \lambda_n x$ sağlanıyorsa bu $\{x_n\}$ dizisine *kısmen düzgün Cauchy* denir. Eğer A daki her kısmen düzgün (relatively uniformly) Cauchy dizisi yakınsak (sıralı limiti varsa) ise A Riesz uzayına *kısmen düzgün tamdır* denir.

Her bir Riesz uzayı, Riesz izomorfileri hariç, bir tek kısmen düzgün tamlamaya sahiptir (Quinn, 1975). A bir Riesz uzayı ise kısmen düzgün tamlaması A^{ru} ile gösterilir. Eğer A, bir f-cebiri ise A^{ru} uzayı da bir düzgün tam f-cebiridir (Jaber, 2014).

$$\forall\, 0 \leq f \in A' \text{ ve } \forall 0 \leq x \in A \text{ için } f_A(x) = \sup\{f(y): 0 \leq y \leq x \text{ ve } y \in A\} \quad (1)$$

olarak tanımlanan $f_A \in A^{ru}, f$ nin A ya kısıtlanışı olarak ifade edilir. Dolayısıyla (Jaber, 2014) de yer alan ifade aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 2.1.7. A bir Riesz cebiri olsun. A' ve $(A^{ru})'$ izomorfik Riesz uzaylarıdır. Ayrıca A''ve $(A^{ru})''$ izomorfik f-cebirleridir.

İspat: $\forall f \in (A^{ru})'$ için f nin A ya kısıtlanışı f_A ile tanımlansın. $\forall f \in (A^{ru})'$ için $T(f) = f_A$ olarak tanımlanan $T: (A^{ru})' \to A'$ dönüşümü bire-bir örtendir. Üstelik T bir Riesz homomorfizmasıdır. Gerçekten $f \in (A^{ru})'$ ve $x \in A'$ ise

$$(f_A)^+(x) = \sup\{f(y): 0 \leq y \leq x, y \in A\}$$

$$\leq \sup\{f(y): 0 \leq y \leq x, y \in A^{ru}\} = f^+(x) = (f^+)_A(x).$$

Öte yandan $0 \leq y \leq x, y \in A^{ru}$ olduğundan

$$f(y) = \sup\{f(z): 0 \leq z \leq y: z \in A\} \leq (f_A)^+(x)$$

ve böylece $(f^+)_A(x) \leq (f_A)^+(x)$. Buradan $T(f^+) = T(f)^+$, dolayısıyla T Riesz homomorfizmasıdır.

İspatın ikinci kısmı için $\forall\ F \in A''$ ve $\forall f \in (A^{ru})'$ için, $\Phi(F)(f) \coloneqq F(f_A)$ olacak şekilde $\Phi: A'' \to (A^{ru})''$ dönüşümü tanımlanırsa Φ, T nin adjointi olduğundan bir Riesz homomorfizmasıdır. Ayrıca Φ, bir cebir homomorfizması olduğundan Φ cebir izomorfizmasıdır. Buradan A''ve $(A^{ru})''$ izomorfik f-cebirleri olduğu ispatlanır.

Lemma 2.1.8. A bir f-cebri olsun. A nın bir $\sigma - syb$ elemanına sahip olması için gerek ve yeter şart A^{ru} nun bir σ-syb elemanına sahip olmasıdır. Buna göre $\forall 0 \leq f \in A'$ için

$$\sup\{f(x): x \in B_A\} = \sup\{f_A(x): x \in B_{A^{ru}}\}. \qquad (2)$$

İspat: σ-syb tanımına göre$A$nın bir σ-syb elemanına sahip olması için $\{f(x): x \in B_A\}$ kümesinin sınırlı olması gereklidir. Benzer şeyler A^{ru} için de söylenebilir. O halde lemmanın ispatı için (2) eşitliğini ispatlamak yeterlidir. Buna göre, $0 \leq f \in A'$ ve $0 \leq x \in B_A$ ise $f(x) = f_A(x)$ ve $x \in B_{A^{ru}}$ olduğundan

$$f(x) = f_A(x) \leq \sup\{f_A(x): x \in B_{A^{ru}}\}$$

olur. Böylece supremum tanımından,

$$\sup\{f(x): x \in B_A\} \leq \sup\{f_A(x): x \in B_{A^{ru}}\}. \qquad \text{(a)}$$

Öte yandan $x \in B_{A^{ru}}$ ve her $y \in [0, x] \cap A$, $y \in B_A$ için (1) eşitliğine göre,

$$f_A(x) = f(x) \leq \sup\{f(y): y \in B_A\}$$

olup supremum tanımından,

$$\sup\{f_A(x): x \in B_{A^{ru}}\} \leq \sup\{f(y): y \in B_A\}$$

$$\sup\{f_A(x): x \in B_{A^{ru}}\} \leq \sup\{f(x): x \in B_A\}. \qquad \text{(b)}$$

(a) ve (b) den

$$\sup\{f(x): x \in B_A\} = \sup\{f_A(x): x \in B_{A^{ru}}\}$$

elde edilir.

2.2. $\boldsymbol{\sigma}$-Sınırlı Yaklaşık Birimli $\boldsymbol{f}$ -Cebirlerinin Karakterizasyonu

Huijsman ve Pagter, bir A f-cebrinin, σ-sınırlı yaklaşık birim elemana sahip olması durumunda, eğer A yarı-asal ise $(A')_n{}'$ uzayının da bir birim elemana sahip olduğunu gösterdiler (Huijsman ve Pagter, 1984). Ayrıca A, Stone koşulunu sağladığında ise bu ifadenin tersinin de doğru olduğunu ispatladılar ($\forall a \in A^+$için $a \wedge I \in A^+$ özelliğine sahip bir A Archimedean yarı-asal f-cebirine *Stone koşulunu sağlar* denir) (Huijsmans ve De Pagter, 1984). Bu sonucun bir genellemesi olarak, bu bölümde J. Jaber'in (Jaber, 2014) çalışmasını inceleyip herhangi bir ek şarta gerek olmaksızın σ-sınırlı yaklaşık birim elemanlı bir Archimedean f-cebirinin karakterizasyonu için gerek ve yeter koşullar araştırılacaktır.

Teorem 2.2.1. A bir f-cebiri olsun. A'' birim elemanlı bir f-cebiridir $\Leftrightarrow$ A, σ-sınırlı yaklaşık birim elemanlıdır. Ayrıca, $\forall 0 \leq f \in A'$ için $E(f) = \sup\{f(a): a \in B_A\}$ şeklinde tanımlanan E fonksiyoneli A'' uzayının birim elemandır.

İspat: $\Longrightarrow$: E, A''nın birim elemanı ve $0 \leq f \in A'$olsun.$\forall 0 \leq x \in A$ ve $\forall a \in B_A$ için $ax \leq x$ olduğundan

$f(ax) \leq f(x)$

$(f \cdot a)(x) \leq f(x)$

$f \cdot a \leq f,$

böylece $E(f \cdot a) \leq E(f)$, yani $(E \cdot f)(a) \leq E(f)$ elde edilir.

Diğer taraftan A'', E birim elemanlı bir f-cebiri olduğundan $E \cdot f = f$ (Boulabiar ve Jaber, 2011). O halde $f(a) \leq E(f)$ ve dolayısıyla $\sup\{f(a): a \in B_A\}$ mevcuttur. Bu da A nın σ-sınırlı yaklaşık birim elemana sahip olduğunu verir.

$\Longleftarrow$: Lemma 2.1.8 den A kısmen düzgün tam kabul edilebileceğinden $E: (A')^+ \to \mathbb{R}^+$fonksiyoneli $\forall f \in (A')^+$ için

$E(f) = \sup\{f(a): a \in B_A\}$

şeklinde tanımlanabilir. $\forall f, g \in (A')^+$için

$\sup\{(f+g)(a): a \in B_A\} \leq \sup\{f(a): a \in B_A\} + \sup\{g(a): a \in B_A\}$

ve böylece $E(f+g) \leq E(f) + E(g)$ olur.

Öte yandan $a, b \in B_A$ için $a \vee b \in B_A$ olduğundan $\forall f, g \in (A')^+$ için

$f(a) + g(b) \leq f(a \vee b) + g(a \vee b) = (f+g)(a \vee b) \leq E(f+g)$.

Buradan $f(a) \leq E(f+g) - g(b)$ bulunur ve supremuma geçilirse $\forall b \in B_A$ için,

$E(f) \leq E(f+g) - g(b)$, yani $E(f) + g(b) \leq E(f+g)$ olur.

Tekrar supremum alınarak $\forall f, g \in (A')^+$ için $E(f) + E(g) \leq E(f+g)$ elde edilir.

Dolayısıyla $\forall f, g \in (A')^+$ için $E(f) + E(g) = E(f+g)$ olur. Kantorovich Teoremi'ne göre E, A'' da yine E ile gösterilen tek bir pozitif elemana genişler. Şimdi bu şekilde elde edilen E nin A'' nin bir birim elemanı olduğunu göstereceğiz.

$f \in (A')^+$ ve $x \in A^+$ keyfi olsun. A, $O(A)$ in bir f-alt cebiri olarak göz önüne alınabileceğinden $I, O(A)$ nın birim elemanı olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$(I - nx) \cdot (I - nx)^+ \geq 0$

sağlanır. Dolayısıyla $(I - nx) \cdot (I - I \wedge nx) \geq 0$ eşitsizliği ortaya çıkar. Buradan

$0 \leq nx - nx \wedge n^2x^2 \leq I$

olur. Bu ise $nx - nx \wedge n^2x^2 \in B_A$ demektir. Buradan A bir σ-syb elemana sahip olduğundan, $\forall n = 1, 2, 3, \cdots$ için

$0 \leq f(nx - nx \wedge n^2x^2) = nf(x) - nf\big(x(I \wedge nx)\big) \leq E(f)$

elde edilir. A kısmen düzgün tam (bu yüzden Stone Koşulu'nu sağlar) olduğundan $I \wedge nx \in B_A$ olur. Buna göre, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$f\big(x(I \wedge nx)\big) = f \cdot x(I \wedge nx) \leq E(f \cdot x)$$

sağlanır. Sonuç olarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$0 \leq n\Big(f(x) - E\big(f(x)\big)\Big) \leq E(f)$$

$$f(x) = E\big(f(x)\big)$$

$$f = E \cdot f$$

elde edilir. $\forall F \in A''$ ve $f \in A'$ için $(F \cdot E)(f) = F(E \cdot f) = F(f)$ olduğundan $E \cdot F = F \cdot E = F$ olup E birim elemandır.

Tanım 2.2.2. A bir yarı-asal f -cebri olmak üzere $\forall b \in A^+$ ve $\forall f \in (A')^+$ için $f(b) = \sup_\tau f(a_\tau b)$ olacak şekilde A da yukarı yönlendirilmiş bir $\{a_\tau\}$ ağı varsa A ya bir *zayıf yaklaşık birime sahiptir* denir.

Uyarı 2.2.3. Her $\sigma\text{-}syb$ elemanına sahip f-cebiri, bir zayıf yaklaşık birime sahiptir. Gerçekten; eğer A, $\sigma\text{-}syb$ elemanına sahip bir f-cebiri ise Teorem 2.2.1 in ispatından $\forall 0 \leq x \in A$ ve $0 \leq f \in A'$ için

$$f(x) = E(f \cdot x) = \sup\{f(a \cdot x) \colon a \in B_A\}$$

olduğu görülür. Bu ise A nın bir zayıf yaklaşık birime sahip olması demektir.

Örneğin, Uyarı 2.1.5 te verilen A f-cebiri bir zayıf yaklaşık birime sahiptir.

Yukarıdaki uyarının tersi genel olarak doğru değildir, yani zayıf yaklaşık birime sahip bir f-cebirinin bir σ-syb elemanına sahip olması gerekmez (Jaber, 2014).

A yarı asal bir$f$-cebiri olsun. A nın tüm sınırlı elemanlarının kümesi Y,

$Y = \{a \in A: \exists n_a \in \mathbb{N} \ \ni \forall b \in A$ için $|a \cdot b| \leq n_a|b|\}$

olarak alınırsa Y, A nın bir f-altcebiri olup A yarı-asal olduğundan

$Y = \{a \in A: \exists n_a \in \mathbb{N} \ \ni |a| \leq n_a I, I \in O(A)\}$

olur. Genel olarak, A ve Y aynı özelliklere sahip olduğundan, (örneğin bakınız (Triki, 2000)) aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 2.2.4. A yarı asal bir f-cebiri olmak üzere, Y'' birim elemanlı ise A$''$ da birim elemanlıdır.

İspat: $0 \leq f \in A'$ olsun ve $f|_Y$ f nin Y ye kısıtlanışını göstersin. Eğer Y'' birim elemana sahip ise Teorem2.2.1e göre Y, σ-syb elemanına sahip olduğundan

$f|_Y(a) \leq \sup\{f|_Y(a): a \in B_Y\}$

olur. Diğer taraftan $B_A = B_Y$ olduğundan,

$f(a) = f|_Y(a) \leq \sup\{f|_Y(a): a \in B_A\}$.

Böylelikle A, σ-syb elemanına sahiptir. Bu ise Teorem 2.2.1e göre A'' nin birim elemana sahip olması demektir.

Uyarı 2.2.5. Yukarıdaki teoremin tersinin sağlanıp sağlanmadığı bilinmemektedir.

Şimdi $A = Y$ olsun. $\forall a \in A$ için

$\|a\| := \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : |a| \leq \lambda I\}$

olarak tanımlanan ve M-normu olarak bilinen $\|.\|$ normunu göz önüne alalım. Bu durumda $(A, \|.\|)$bir normlu Riesz cebiridir. Buna göre A^*, A nın norm duali olmak üzere, aşağıdaki teoremde $\sigma\text{-}syb$ elemanına sahip f-cebirlerinin başka bir karakterizasyonu verilebilir.

Teorem 2.2.6. A sınırlı elemanların bir f-cebri olsun. Bu durumda A $\sigma\text{-}syb$ elemanına sahiptir $\Leftrightarrow$ $A^* = A'$ sağlanır.

İspat: $\Longrightarrow$: Açıkça her norm sürekli lineer fonksiyonel sıralı sınırlı olduğundan $A^* \subset A'$ dır. Şimdi A $\sigma\text{-}syb$ elemanına sahip olsun. $A' \subset A^*$kapsamının doğruluğuna dair $\forall 0 < f \in A'$ için $f \in A^*$olduğunu göstermek yeterlidir. Bu ise A nın $\sigma\text{-}syb$ elemanına sahip ve dolayısıyla $\{f(x) : x \in B_A\}$ kümesinin sınırlı olmasından açıktır. Dolayısıyla $A' \subset A^*$ ve böylece $A^* = A'$ elde edilir.

$\Longleftarrow$: $0 \leq f \in A' = A^*$ olsun. Buradan $\forall x \in B_A$ için $\|x\| \leq 1$ ise $f \in A^*$ olduğundan $|f(x)| \leq \|f\|$. Dolayısıyla $\{f(x) : x \in B_A\}$ kümesi sınırlıdır. Bu ise A nın $\sigma\text{-}syb$ elemanına sahip olması demektir.

2.3. σ-Sınırlı Yaklaşık Birimli f-cebirlerinin Latis ve Cebirsel Özellikleri

Bu bölümde σ - syb elemanlı f-cebirlerinin bazı latis ve cebirsel özelliklerini inceleyeceğiz. İlk olarak aşağıdaki tanımı hatırlayarak başlayalım.

Tanım 2.3.1. A bir Archimedean Riesz uzayı olsun. A dan herhangi bir Archimedean Riesz uzayına tanımlı her pozitif lineer dönüşüm sıralı sürekli ise *A sıralı süreklilik özelliğine sahiptir* denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

A sıralı süreklilik özelliğine sahipse $\mathrm{A}' = \mathrm{A}'_{\mathrm{n}}$ dir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985).

Teorem 2.3.2. Herhangi birim elemanlı bir A Archimedean f-cebrinin A' sıralı duali, sıralı süreklilik özelliğine sahiptir (Huijsman ve Pagter, 1984).

Yukarıdaki teoremin $\sigma\text{-}syb$ elemanlı herhangi bir f-cebiri için de doğru olduğu Jaber tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir (Jaber, 2014).

Teorem 2.3.3. $\sigma\text{-}syb$ elemanlı bir A f-cebirinin A' sıralı duali sıralı süreklilik özelliğine sahiptir.

İspat: M bir Archimedean Riesz uzayı ve $T: A' \to M$ bir pozitif dönüşüm olsun. Bu durumda T nin sıralı sürekli olduğu gösterilmelidir.

$(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset A'$ öyle ki $f_\alpha \downarrow 0$ olsun. $\forall\pi \in O(A)$ için $g_\alpha: O(A) \to \mathbb{R}$ dönüşümü, E Teorem 2.2.1 de verildiği gibi A'' uzayının birim elemanı olmak üzere

$$g_\alpha(\pi) = E(f_\alpha \circ \pi)$$

şeklinde tanımlanırsa g_α, $O(A)$ üzerinde bir lineer fonksiyonel, yani $g_\alpha \in O(A')$ dir. Bunun için ilk olarak $\forall\pi, \pi' \in O(A)$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall x \in A$ için,

$$(f_\alpha \circ (\lambda\pi + \pi'))(x) = f_\alpha(\lambda\pi + \pi')(x) = f_\alpha\big(\lambda\pi x + \pi'(x)\big) = \lambda f_\alpha(\pi x) + f_\alpha\big(\pi'(x)\big)$$

$$= \lambda(f_\alpha \circ \pi)(x) + (f_\alpha \circ \pi')(x) = (\lambda f_\alpha \circ \pi + f_\alpha \circ \pi')(x)$$

eşitlik $\forall x \in A$ için doğru olduğundan

$$f_\alpha \circ (\lambda\pi + \pi') = \lambda f_\alpha \circ \pi + f_\alpha \circ \pi'$$

elde edilir. Şimdi g_α nın lineer fonksiyonel olduğunu gösterelim.

$$g_\alpha(\lambda\pi + \pi') = E(f_\alpha \circ (\lambda\pi + \pi') = E(\lambda(f_\alpha \circ \pi) + f_\alpha \circ \pi') = \lambda E(f_\alpha \circ \pi) + E(f_\alpha \circ \pi')$$

$= \lambda g_\alpha(\pi) + g_\alpha(\pi')$.

Ayrıca g_α, f_α nın $O(A)'$ uzayına bir genişlemesidir. Öte yandan $\forall 0 \leq \pi \in O(A)$ için $f_\alpha \downarrow 0$ olduğunda $f_\alpha \circ \pi \downarrow 0$ (çünkü otomorfizmalar sıralı süreklidir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985) ve dolayısıyla E sıralı sürekli olduğundan $\forall 0 \leq \pi \in O(A)$ için $g_\alpha(\pi) \downarrow 0$ dır. Bu ise $O(A)'$ de $g_\alpha \downarrow 0$ olduğunu gösterir. h_A, h nin A ya kısıtlanışını göstermek üzere,

$$T_1: O(A)' \to M$$

$$h \longmapsto T(h_A)$$

şeklinde bir T_1 dönüşümü tanımlanabilir. $O(A)$ birimli bir f -cebiri ve T_1 pozitif olduğundan Teorem 2.3.2 den dolayı T_1 sıralı süreklidir. Böylece $T(f_\alpha) = T_1(g_\alpha) \downarrow 0$ elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Örnek 2.3.4. $1 < p < \infty$ olmak üzere,

$$A = l_p = \left\{\{x_n\} \subset \mathbb{R}: \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\}$$

koordinatsal işlemlere göre bir f-cebiri olup $A' = l_q$ dur (burada $1 < q < \infty$ sayısı, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ özelliğini sağlar) (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985). $A' = l_q$ sıralı süreklilik özelliğine sahip fakat, $A'' = \left(l_q\right)' = l_p$ birim elemana sahip olmadığından, $A = l_p$ σ-syb elemanına sahip değildir (Jaber, 2014).

2.4 σ-Sınırlı Yaklaşık Birimli f-cebirlerinin Halka İdeali

Bu alt bölümde σ-syb elemanlı bir A f-cebirinin, A'' de bir halka ideali olması için gerek ve yeter koşul incelenecektir. Bu koşul, $O(A)$ ile $O(A')$ arasında ilginç bir ilişki ortaya çıkaracaktır. Hatırlanacağı gibi $T: A \to A$ dönüşümü bir otomorfizmadır ancak ve ancak adjointi $T': A' \to A'$ bir otomorfizmadır(Teorem 1.4.14). Üstelik, $\forall \pi \in O(A)$ için

$\rho(\pi) = \pi'$ (burada $\pi' \in O(A')$) şeklinde tanımlanan $\rho: O(A) \to O(A')$ dönüşümü bir birebir, örten, latis ve cebir homomorfizmasıdır.

Lemma 2.4.1. A bir f-cebri olsun.

1) $\forall F \in A''$ için $f \in A'$ olmak üzere $L_F(f) = F.f$ şeklinde tanımlanan L_F dönüşümü A' nin bir otomorfizması, yani $L_F \in O(A')$ olur.

2) $\forall T \in O(A')$ ve $f \in A'$ için $x \in A$ olmak üzere $T(f \cdot x) = T(f) \cdot x$ dir.

İspat: 1) $\forall G \in A''$ için $L'_F(G) = G \cdot F$ olarak tanımlanırsa $L'_F \in O(A'')$ olduğu açıktır. Gerçekten, A'' de $G \perp H$ ise A'' bir f-cebiri olduğundan $\forall F \in A''$ için $F \cdot G \perp H$, yani $L'_F(G) \perp H$. Teorem 1.4.14 den $L_F \in O(A')$ elde edilir.

2) $x \in A$ olsun. $\forall f \in A'$ için $L_{x''}(f) = x'' \cdot f = f \cdot x$ olur. $T, L_{x''} \in O(A')$ ve $O(A')$ uzayı bileşke işlemine göre f-cebiri olduğundan

$$T \circ L_{x''} = L_{x''} \circ T$$

olur. Dolayısıyla $\forall f \in A'$ için

$$(T \circ L_{x''})(f) = T\big(L_{x''}(f)\big) = T(x'' \cdot f) = T(f \cdot x)$$

$$L_{x''} \circ T(f) = L_{x''}\big(T(f)\big) = x'' \cdot T(f) = T(f) \cdot x$$

sağlandığından $T(f \cdot x) = T(f) \cdot x$ elde edilir.

Teorem 2.4.2. A bir Archimedean f-cebiri ve $\rho: O(A) \to O(A')$ dönüşümü yukarıda tanımlandığı gibi olsun.

1) ρ örten (böylece $O(A)$ ve $O(A')$ izomorfik f-cebirleridir) ise A, A''de halka idealidir.

2) Eğer $A,\ \sigma\text{-}syb$ elemanına sahip ise ρ örtendir $\Leftrightarrow$ A, A''de halka idealidir.

İspat: 1) ρ örten olsun. $\forall F \in A''$ ve $\forall x \in A$ için $F \cdot x'' \in A$ olduğu gösterilmelidir. Lemma 2.3.4 e göre $L_F \in O(A')$ olup ve ρ örten olduğundan $\forall f \in A'$ için $\pi'(f) = L_F(f)$ olacak şekilde $\pi \in O(A)$ vardır. Buna göre $\forall x \in A$ için

$$(\pi(x))''(f) = f\big(\pi(x)\big) = \big(\pi'(f)\big)(x) = \big(L_F(f)\big)(x) = F \cdot (f \cdot x) = F \cdot (x'' \cdot f)$$

$$= (F \cdot x'')(f).$$

Bu eşitlik $\forall f \in A'$ için doğru olduğundan $F \cdot x''=(\pi(x))'' \in A$ elde edilir.

2) $A,\ \sigma\text{-}syb$ elemanlı bir f-cebiri olsun.

$\Rightarrow$: 1) den açıktır.

$\Leftarrow$: A, A" de bir halka ideali ve $T \in O(A')$ keyfi olsun. E, A'' nin birim elemanı olmak üzere $\forall f \in A'$ için $F(f) = E(T(f))$ olarak tanımlana $F: A' \to \mathbb{R}$ lineer ve sıralı sınırlıdır, yani $F \in A''$ dir. $A,\ A''$ de bir halka ideali olduğundan $\forall x \in A$ için $\pi_F(x)'' = F \cdot x''$ şeklinde tanımlanan $\pi_F: A \to A$ dönüşümü A da bir otomorfizma, yani $\pi_F \in O(A)$ dır. Gerçekten; $f \in A'$ olsun. $\forall x \in A$ için

$$\rho(\pi_F)(f)(x) = \pi'_F(f)(x) = f\big(\pi_F(x)\big) = \pi_F(x)''(f) = (F \cdot x'')(f) = F(x'' \cdot f)$$

$$= F(f \cdot x) = E\big(T(f \cdot x)\big) = E(T(f) \cdot x) = T(f)(x).$$

Böylece $\forall f \in A'$ için $\rho(\pi_F)(f) = T(f)$ olduğundan $\rho(\pi_F) = T$. Dolayısıyla ρ örtendir.

Sonuç 2.4.3. A birimli bir f-cebiri olsun. $O(A)$ ve $O(A')$ izomorfiktir$\Leftrightarrow$ $A = A''$

3. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tezde genel olarak Jaber'in 2014 yılında basılan "f-algebras with a σ-approximate unit" çalışması incelenerek Riesz cebirleri ve f-cebirlerinin temel özellikleri ile herhangi bir σ-sınırlı yaklaşık birim elemanlı f-cebirinin karakterizasyonu için gerek ve yeter koşullar araştırıldı. Yapılan bu araştırmalar sonucunda aşağıdaki sonuçlara ulaşıldı:

$\mathbf{1}$) σ-syb elemanına sahip bir hemen hemen f-cebri veya d-cebri otomatik olarak bir f-cebridir.

$\mathbf{2}$) A bir Riesz cebiri olsun. A' ve $(A^{ru})'$ izomorfik Riesz uzaylarıdır. Ayrıca A'' ve $(A^{ru})''$ izomorfik f-cebirleridir.

$\mathbf{3}$) A bir f-cebiri olsun. A'' birim elemanlı bir f-cebiridir $\Leftrightarrow$ A, σ-sınırlı yaklaşık birim elemanlıdır.

$\mathbf{4}$) σ-syb elemanlı bir A f-cebirinin A' sıralı duali sıralı süreklilik özelliğine sahiptir.

4. ÖNERİLER

Bu çalışmada Riesz cebirleri ve bu cebirlerin en önemli sınıflarından olan f-cebirlerinin temel özellikleri araştırılarak herhangi bir σ-sınırlı yaklaşık birim elemanlı f-cebirinin karakterizasyonu için yeterli ve gerekli koşullar verilmiştir.

Burada σ-sınırlı yaklaşık birim elemanlı f-cebirleri için elde edilen sonuçlar diğer Riesz cebir sınıfları için de araştırılabilir. Bu tezde tanımları verilen hemen hemen f-cebir ve d-cebiri sınıfları dışında son zamanlarda tanımlanan önemli cebir sınıfları mevcuttur. Bunlardan bazıları, r-cebirleri (r-algebras) (Yılmaz, 2011) veya yarı-hemen hemen f-cebirleri (Yılmaz, 2014), yarı f-cebirleri (Boulabiar ve Hadded, 2003), genelleştirilmiş f-cebirleri (Chil, 2009) olarak verilebilir.

KAYNAKLAR

Aliprantis, C. D. and Burkinshow, O., 1985. Positive Operators. Academic Press, Orlando, FL.

Aliprantis, C. D. and Burkinshow, O., 2006. Positif Operators Springer, Dardrecth.

Amemiya, I.,1953. A general spectral theory in semi-ordered linear spaces, Journal of the Faculty of Science, Hokkaido University. Series I, 12, 111-156. MR 15,137.

Bernau, S. J. and Huijsmans, C. D., 1990. Almost f-algebras and d-algebras, Mathematical Proceedings Cambridge Philosophical Society, 1017, 287-308.

Bernau, S. J. and Huijsmans, C. D., 1995. The order bidual of almost $\boldsymbol{f}$-algebras and $\boldsymbol{d}$-algebras, Transactions of the American Mathematical Society, 347, 4259-4275.

Beukers, Huijsmans, C. B. and de Pagter, B., 1983. Unital embedding and complexification of f-algebras, Mathematische Zeitschrift, 183, 131–144.

Birkhoff, G., 1967. Lattice Theory. American Mathematical Society Colloquium Publication, 25, Providence, RI. MR 37 2638.

Birkhoff, G. and Pierce, R. S., 1956. Lattice-ordered rings, Anais da Academia Brasileira de Ci'encias, 28, 41- 69.

Boulabiar, K. and Jaber, J., 2011. The order bidual of f-algebras revisited, Positivity, 15, 271–279.

Boulabiar, K. and Hadded, F., 2003. A class of lattice ordered algebras, Algebra Universalis, 50, 305-323.

Buskes, G., Boulabiar, K. and Triki, A., 2003. Some recent trends and advance in certain lattice ordered algebras, Contemporary Mathematics, 328, 99-133.

Chil, E., 2009. Generalized almost f-algebras, The Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin,16(2), 223-234.

De Pagter, B., 1981. f-algebras and orthomorphisms. Ph.D. Thesis, University of Leidin.

Ercan, Z. and Wickstead, A. W., 1996. Banach lattices of continuous Banach lattices-valued functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 198, 121-136.

Filter, W., 1994. Representations of Archimedean Riesz spaces- A survey. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 24, 771-851.

Huijsmans, C. B., 1991. Lattice ordered algebras and f-algebras: A survey. Studies in Ekonomic Theory 2, Positive Operators, Riesz Spaces and Economics (C. D. Aliptantis, K. C. Border and W. A. J. Luxasemburg, eds.) Spinger, Berlin, 151- 169.

Huijsmans, C. and De Pagter, B., 1982. Ideal theory in f-algebras, Transactions of the American Mathematical Society, 269:225-245.

Huijsmans, C. and De Pagter, B., 1984. Subalgebras and riesz subspaces of an f-algebra. Proceedings of the London Mathematical Society. 48(3), 161-174.

Huijsmans, C. D., 1989. The order bidual of lattice ordered algebras II, Journal of Operator Theory, 22, 277-290.

Kudlacek, V., 1962. On some types of l-rings, Sborni Vysokeho Uceni Techn Brne, 1-2, 179-181.

Jaber, J., 2014. f-algebras with a σ-approximate unit. Positivity, 18, 161-170.

Luxasemburg, W. A. J. and Zaanen, A. C., 1971. Riesz Spaces I. North-Holland, Amsterdam-London.

Meyer-Nieberg, P., 1991. Banach Lattices. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

Nakano,H., 1950. Modulared Semi-Ordered Linear Spaces, Maruzen, Tokyo, MR 12, 420

Quinn, J., 1975. Intermediate Riesz spaces, Pacific Journal of Mathematics. 56, 255-263.

Schaefer, H. H., 1974. Banach Lattices and Positive Operators. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York.

Scheffold, E., 1981. FF-Banachverbandsalgebren, Mathematische Zeitschrift, 177, 193-205.

Triki, A., 2000. Stable f–algebras, Algebra Universalis, 44, 65–86.

Yılmaz, R., 2001. On lattice ordered algebras. Ph.D. Thesis, University of Wales.

Yılmaz, R., 2011. The bidual of r-algebras, Ukrainian Mathematical Journal, 63 (5), 713-717.

Yılmaz, R., 2014. Notes on lattice ordered algebras, Serdica Mathematical Journal, 40 (3- 4), 319-328.

Zaanen, A. C., 1983. Riesz Spaces II. North Holland, Amsterdam-New York-Oxford.

ÖZGEÇMİŞ

Fatih ORDU, 1986 yılında Kırşehir'de doğdu. İlk ve orta öğretimini Kırşehir'de tamamladı. 2004 yılında başladığı Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği lisans eğitimini 2009 yılında başarıyla tamamladı. 2010 yılında ilk görev yeri, Ordu Korgan Lisesi'ne matematik öğretmeni olarak atandı. 2011 yılında Çanakkale Bozcaada'da vatani görevini ifa etti. Aynı yıl Trabzon Of Anadolu İmam Hatip Lisesi'ne tayin oldu. 3 yıl bu okulda çalıştıktan sonra son görev yeri olan Of Anadolu Lisesi'ne geçti ve hala matematik öğretmenliği görevini sürdürmektedir. 2014'de Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda başladığı Yüksek Lisans öğrenimine halen devam etmektedir. Evli ve 1 çocuk babasıdır.