T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIRLI KISMEN SIRALI KÜMELER ÜZERİNDE ÜÇGENSEL NORMLARIN DİREKT ÇARPIMI VE CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

İLKNUR GENÇ

TEZ DANIŞMANI
DR. ÖĞR. ÜYESİ M. AKİF İNCE
TEZ JÜRİLERİ
DOÇ. DR. M. NESİBE KESİCİOĞLU
DR. ÖĞR. ÜYESİ ÜMİT ERTUĞRUL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİZE-2018

T.C.

RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIRLI KISMEN SIRALI KÜMELER ÜZERİNDE ÜÇGENSEL NORMLARIN DİREKT ÇARPIMI VE CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

Dr. Öğr. Üyesi M. Akif İNCE danışmanlığında, İlknur GENÇ tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafından 11/06/2018 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**Unvanı Adı Soyadı**	**İmzası**
Başkan	: Dr. Öğr. Üyesi M. Akif İNCE	
Üye	: Doç. Dr. M. Nesibe KESİCİOĞLU	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Ümit ERTUĞRUL	

Doç. Dr. Ferhat KALAYCI

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Sınırlı Kısmen Sıralı Kümeler Üzerinde Üçgensel Normların Direkt Çarpımı ve Cebirsel Özellikleri' ni incelemek amacı ile Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı' nda yüksek lisans tezi olarak yapılmıştır.

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanmasına kadar olan süreçte önerileri, yardımları ve destekleri ile bana önemli katkılarda bulunan danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi M. Akif İNCE' ye en içten dileklerimle saygı ve şükranlarımı sunuyorum.

Aynı zamanda bu tez aşamasında değerli görüş ve tavsiyeleri ile katkıda bulunan tez izleme jüri üyesi hocalarım, Sayın Dr. Öğr. Üyesi M. Akif İNCE, Sayın Doç. Dr. M. Nesibe KESİCİOĞLU, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ümit ERTUĞRUL'a teşekkürü bir borç bilirim. Yine yüksek lisans öğrenim sürecinde bana katkı sağlayan Matematik bölümündeki tüm değerli hocalarıma teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve her daim yanımda olan sevgili eşim Murat GENÇ' e teşekkür ederim.

İlknur GENÇ

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan ‘‘Sınırlı Kısmen Sıralı Kümeler Üzerinde Üçgensel Normların Direkt Çarpımı ve Cebirsel Özellikleri’’ başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 11/06/2018

İlknur GENÇ

Uyarı: *Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.*

ÖZET

SINIRLI KISMEN SIRALI KÜMELER ÜZERİNDE ÜÇGENSEL NORMLARIN DİREKT ÇARPIMI VE CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

İlknur GENÇ

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi M. Akif İNCE

Bu çalışmada, üçgensel normların sonlu zincirler, çarpım kafesleri, reel birim aralık ve sınırlı kısmen sıralı kümeler üzerindeki özellikleri incelenmiştir. İdempotent elemanlar, sıfır bölenler ve nilpotent elemanlar kümesinin bir t-normla ve birbirleriyle olan ilişkileri ortaya konmuştur. T-normların Arşimedyan özelliği, özellikle köşegen eşitsizlikle olan ilişkisiyle ele alınmıştır. Çalışmanın ana konusu çarpım kısmen sıralı kümeleri üzerindeki t-normların direkt çarpımıdır. Sıfır bölensiz t-normların direkt çarpımının da yine sıfır bölensiz olduğu gösterilir. Arşimedyan özelliğinin daha zayıf bir versiyonu ortaya konmuş ve böyle pseudo-arşimedyan t-normların direkt çarpımının da yine pseudo-arşimedyan olduğu gösterilmiştir. Sıfır bölenler kümesinin tanımında olduğu gibi kısaltma kuralının bir genelleştirilmesi verilmiştir. Kısaltma özelliğini sağlayan t-normların direkt çarpımının da yine kısaltma özelliğini sağladığı görülmüştür. Bir çarpım kafesi üzerindeki t-normların direkt çarpımı bazı özel morfizma davranışı gösteren t-normlar olarak karakterize edilirler. Sonuç olarak, birim reel kare durumundaki dönüşümler, bir otomorfizma mantığıyla direkt çarpım yapısını korurlar.

2018, 43 sayfa

Anahtar Kelimeler: Pseudo Arşimedyan Özelliği, Direkt Çarpım, Nilpotent Eleman, Kısmen Sıralı Küme, Üçgensel Norm.

ABSTRACT

DIRECT PRODUCT AND ALGEBRAIC PROPERTIES OF TRINGULAR NORMS ON BOUNDED PARTIALLY ORDERED SETS

İlknur GENÇ

Recep Tayyip Erdoğan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Asst. Prof. Dr. M. Akif İNCE

In this study, triangular norms are studied in the general setting of bounded partially ordered sets, with accent on finite chains, product lattices and the real unit square. The sets of idempotent elements, zero divisors and nilpotent elements associated to a t-norm are introduced and related to each other. The Archimedean property of t-norms is discussed, in particular its intercourse to the diagonal inequality. The main subject of the study is the direct product of t-norms on product posets. It is shown that the direct product of t-norms without zero divisors is again a t-norm without zero divisors. A ineffective version of the Archimedean property is presented and it is shown that the direct product of such pseudo-Archimedean t-norms is again pseudo-Archimedean. A generalization of the cancellation law is put forward, in the same logic as the definition of the set of zero divisors. It is shown that the direct product of cancellative t-norms is again cancellative. Direct products of t-norms on a product lattice are characterized as t-norms with partial mappings that show some particular morphism conduct. Finally, it is shown that in the case of the real unit square, transformations by means of an automorphism safe guard the direct product formation.

2018, 43 pages

Keywords: Pseudo Archimedean Property, Direct Product, Nilpotent Element, Partially Ordered Set, Tringular Norm.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\cap$	Arakesit İşlemi
$\cup$	Birleşim İşlemi
$\subseteq$	Kümeler Arasındaki Alt Küme Bağıntısı
$A \times B$	A ve B Kümelerinin Kartezyen Çarpımı
$\varnothing$	Boş Küme
$\vartheta(X)$	X 'in Üst Sınırlarının Kümesi
$\ell(X)$	X 'in Alt Sınırlarının Kümesi
$\sup X$	X 'in Üst Sınırlarının En Küçüğü
$\inf X$	X 'in Alt Sınırlarının En Büyüğü
x'	x 'in Komplementi
$\uparrow x$	x 'ten Büyük Eşit Elemanların Kümesi
$\downarrow x$	x 'ten Küçük Eşit Elemanların Kümesi
$a \parallel b$	a ve b Elemanları Kıyaslanamaz
B	Bool Kafesi
$T_1 \times T_2$	T_1 ve T_2 T-normlarının Direkt Çarpımı
P	Kısmen Sıralı Küme
L	Kafes
$\wp(X)$	X 'in Güç Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi $=\{\ldots,-1,0,1,\ldots\}$
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi $=\{1,2,\ldots\}$
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$[a,b]$	Kapalı Aralık
(a,b)	Açık Aralık
$\wedge$	Kafeste İnfimum İşlemi
$\vee$	Kafeste Supremum İşlemi

t-norm	Üçgensel Norm
t-conorm	Üçgensel Conorm
$Z(T)$	T T-normunun Sıfır Bölen Elemanlarının Kümesi
$I(T)$	T T-normunun İdempotent Elemanlarının Kümesi
$N(T)$	T T-normunun Nilpotent Elemanlarının Kümesi
$T_{\wedge}$	İnfimum T-normu
T_W	Drastik Çarpım T-normu
T_P	Çarpım T-normu
T_L	Lukasiewicz T-normu
S_M	Maksimum T-conormu
S_W	Drastik Toplam
S_P	İstatistiksel Toplam
S_L	Lukasiewicz T-conorm (Sınırlı Toplam)
T^{nM}	Nilpotent Minimum T-normu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Üçgensel normların tarihi Karl Menger tarafından 1942' de yapılan "Statistical metrics" adlı çalışmayla başlamıştır. Üçgensel normlar, bazı metrik uzaylarda elemanlar arasındaki uzaklığı rakamlarla göstermek yerine, daha genel bir ifade ortaya koyma ihtiyacı ile ortaya çıkmıştır. Üçgensel normlar, klasik üçgen eşitsizliğinin daha genel yapılara genelleştirilmesi için oluşturulmuştur. Üçgensel normlar, fuzzy kümelerin kesişimini tanımlamak için ve fuzzy mantıkta, mantıksal 've' 'yi modellemek için kullanılır. Fuzzy küme teorisi ve sıra teorisi arasındaki yakın bağlantıdan dolayı birçok yazar sınırlı kısmen sıralı kümeler üzerindeki t-normlar üzerinde çalışır (De Baets, 1995a-b; De Cooman ve Kerre, 1994; Godo ve Sierra, 1988; Jenei, 1997; Nguyen ve Walker 1997; Ray, 1997). Sonlu bir zincir söz konusu olduğunda, bazı t-normlar reel birim aralık üzerindeki sürekli t-normların yapısına benzer şekilde karakterize edilir (Mayor ve Torrens, 1993). T-normlar Schweizer ve Sklar tarafından probalistik metrik uzaylar çerçevesinde tanıtılmıştır (Schweizer ve Sklar, 1963). Ve metrik uzayların tanımındaki üçgen eşitsizliğini genişletmek için probalistik metrik uzaylara karşı Menger tarafından kullanılan bir kavrama dayanmaktadır (Menger, 1942).

Fonksiyonel denklemler ile ilgili olarak, üçgensel normlar birleşmelilik denklemiyle yakından ilgilidir. Bu alanda ilk çalışma N.H. Abel tarafından yapılmıştır (Abel, 1826). Daha sonra bu alanda birçok çalışma yapılmıştır (Brouwer, 1909; Cartan, 1930; Aczel, 1948). Özellikle Janos Aczel' in monografisi (hem almanca hem İngilizce versiyonu) üçgensel normların gelişiminde çok önemli bir etkiye sahiptir. Araştırmaların bir başka yönü, bazı doğal fonksiyonel denklemlerin çözümü olarak üçgensel normların parametrelendirilmiş ailelerinin belirlenmesidir. Bu alandaki en iyi çalışma Frank'ın fonksiyonel denklemi olarak adlandırılan denklemin tek çözümü olan Frank üçgensel norm ve konormların ailesinin ispatlandığı çalışmasıdır (Frank, 1979).

Ordinal toplamlar ve (izomorf) dönüşümler gibi yarı-gruplar teorisinden pek çok inşa etme yöntemi, verilen bir takım örnekler yardımıyla tüm t-normlar ailesini inşa etmek için başarılı bir şekilde uygulanmıştır (Clifford, 1954; Climescu, 1946; Klein-Barmen, 1942; Schweizer ve Sklar, 1963). Özetle, yalnızca üç t-norm yani minimum T_M, çarpım T_P ve Lukasiewicz t-norm T_L kullanılarak izomorf dönüşümler ve ordinal toplamlar vasıtasıyla tüm sürekli t-normları inşa etmek mümkündür (Ling, 1965). Sıra veya yakınsama teoremlerinin karakterizasyonu gibi bazı özel sonuçlar sürekli t-normlar için genel gösterime dayanmaktadır.

Bu çalışmada bazı temel sıra teorisi kavramları verilmiştir. Sonlu zincirler üzerindeki ve aralık değerli t-normlar ele alınmıştır. t-normların idempotent eleman, sıfır bölen eleman ve nilpotent elemanları incelenmiştir. Çarpım kısmen sıralı kümeler üzerinde durulmuştur. Sıfır bölensiz t-normların direkt çarpımının da yine sıfır bölensiz olduğu ortaya konmuştur. Arşimedyan özelliği ve pseudo-arşimedyan özelliği üzerinde durularak pseudo-arşimedyan t-normların direkt çarpımının da yine pseudo-arşimedyan olduğu gösterilmiştir. Ayrıca t-normların kısaltma özelliği de incelenmiştir. T-normların direkt çarpımı, çarpım kafesleri üzerine karakterize edilmiştir.

1.2. Kısmen Sıralı Kümeler (Birkhoff, 1967)

Tanım 1: $\varnothing \neq L$ bir küme; $\leq$, L üzerinde bir bağıntı olsun.

P1) Her $x \in L$ için $(x, x) \in \leq$ (yansıma özelliği)

P2) Her $x, y \in L$ için $(x, y) \in \leq$ ve $(y, x) \in \leq \;\Rightarrow\; x = y$ (ters simetri özelliği)

P3) Her $x, y, z \in L$ $(x, y) \in \leq$ ve $(y, z) \in \leq$ için $(x, z) \in \leq$ (geçişme özelliği)

Bu üç şart sağlanırsa $(L, \leq)$ ye bir kısmen sıralı küme denir.

$(x, y) \in \leq \;\Leftrightarrow\; x \leq y$ ile gösterilir.

Tanım 2 (Duallik Prensibi): Herhangi bir kısmen sıralamanın tersi de bir kısmen sıralamadır.

Tanım 3: $(P_1, \leq_1)$ ve $(P_2, \leq_2)$ iki sınırlı kısmen sıralı küme olsun. $P_1 \times P_2$ üzerindeki kısmi sıra bağıntısı $\leq$, aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \;\Leftrightarrow\; x_1 \leq_1 x_2 \;$ ve $\; y_1 \leq_2 y_2$

Eğer L_1 ve L_2 iki sınırlı kafes ise onların çarpımları da bir sınırlı kafestir.

$L_1 \times L_2$ üzerindeki $\wedge, \vee$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \wedge_1 x_2, y_1 \wedge_2 y_2)$$

$$(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1 \vee_1 x_2, y_1 \vee_2 y_2)$$

$\{L_i \mid \; i \in I\}$ tam kafeslerin bir ailesi olsun. $\prod_{i \in I} L_i$ kartezyen çarpımı üzerindeki infumum ve supremum aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$\underset{\tau \in Q}{\wedge} x_\tau = \left(\underset{\tau \in Q}{\wedge} x_{i\tau} \right)_{i \in I}$, $\underset{\tau \in Q}{\vee} x_\tau = \left(\underset{\tau \in Q}{\vee} x_{i\tau} \right)_{i \in I}$ ve $\Omega = \left\{ x_\tau = \left(x_{i\tau} \right)_{i \in I} \mid \; \tau \in Q \right\} \subseteq \prod_{i \in I} L_i$ için,

$\prod_{i \in I} L_i$ kartezyen çarpımı yukarıdaki infumum ve supremum ile birlikte bir tam kafes formundadır. Bu kafes L_i nin direkt çarpımı olarak adlandırılır.

Tanım 4: $(L, \leq)$ bir kısmen sıralı küme olsun. Her $x, y \in L$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise $(L, \leq)$ ye tam sıralı veya zincir denir.

Tanım 5: P bir kısmen sıralı küme ve $X \subseteq P$ olsun.

(i**)** Eğer bir $a \in X$, $\forall x \in X$ için $a \leq x$ olacak şekilde mevcut ise bu a elemanına X kümesinin en küçük elemanı denir ve E.k.e. X ile gösterilir. X kümesinin en büyük elemanı dual olarak tanımlanır ve E.b.e. X ile gösterilir.

(ii**)** Eğer bir $a \in X$ için $x < a$ olacak şekilde $x \in X$ mevcut değilse, bu a elemanına bir minimal eleman denir. X kümesinde maksimal eleman dual olarak tanımlanır.

Tanım 6: P bir kısmen sıralı küme ve $X \subseteq P$ olsun. Eğer bir $a \in P$, $\forall x \in X$ için $x \leq a$ koşulunu sağlıyor ise a elemanına X kümesinin bir üst sınırı denir. Dual olarak, her $x \in X$ için $b \leq x$ koşulunu sağlayan $b \in P$ elemanına ise X kümesinin bir alt sınırı denir.

Tanım 7: $\vartheta(X)$ ile X kümesinin bütün üst sınırlarının kümesini, $\ell(X)$ ile de X kümesinin bütün alt sınırlarının kümesini gösterelim. Eğer mevcut ise; $\vartheta(X)$ kümesinin en küçük elemanına X kümesinin supremumu, $\ell(X)$ kümesinin en büyük elemanına X kümesinin infumumu denir ve sırasıyla $\sup X$ ve $\inf X$ sembolleriyle gösterilir. P2 ters simetri özelliği ile, eğer mevcutsa $\inf X$ ve $\sup X$ tektir. Buna göre:

(i **)** $\vartheta(X) = \{ \mathrm{a} \in P : \text{Her } \mathrm{x} \in X \text{ için } \mathrm{x} \leq \mathrm{a} \}$ olup $\sup X = \text{E.k.e.}\vartheta(X)$ dir.

(ii**)** $\ell(X) = \{ \mathrm{b} \in P : \text{Her } \mathrm{x} \in X \text{ için } \mathrm{b} \leq \mathrm{x} \}$ olup $\inf X = \text{E.b.e.}\ell(X)$ dir.

Uyarı 1: $\sup\{x,y\}$, $\inf\{x,y\}$, $\sup L$ ve $\inf L$ elemanları ileride sıklıkla kullanılacağı için kolaylık açısından aşağıdaki gösterimleri kullanacağız:

(*i*) $\sup\{x,y\} = x \vee y$, $\inf\{x,y\} = x \wedge y$

(*ii*) L bir kafes olmak üzere, eğer mevcut ise $\sup L = 1$, $\inf L = 0$

(*iii*) P, 0 ve 1 li bir kısmen sıralı küme ise P' ye sınırlı kısmen sıralı küme denir.

(*iv*) L, 0 ve 1 li bir kafes ise L' ye sınırlı kafes denir.

1.3. Kafesler (Birkhoff, 1967)

Tanım 8: $(L,\leq)$ bir kısmen sıralı küme olsun. Her $a,b \in L$ için, $a \wedge b$ ve $a \vee b$ mevcut ise $(L,\leq)$ ye kafes denir.

Tanım 9: $(L,\leq)$ bir kısmen sıralı küme olsun.

- L'ye bir tam üst yarı-kafesi denir: $\Leftrightarrow$ Her $X \subset L$ için $\sup X \in L$.
- L'ye bir tam alt yarı-kafesi denir: $\Leftrightarrow$ Her $Y \subset L$ için $\inf Y \in L$.
- L'ye bir tam kafes denir: $\Leftrightarrow$ L bir tam alt yarı-kafes ve L bir tam üst yarı-kafestir.

$X = L$ alındığında her boştan farklı tam kafesin 0 en küçük elemanına ve 1 en büyük elemanına sahip olduğu elde edilir.

Tanım 10: $(L,\leq)$ bir kafes ve $X \subseteq L$ olsun.

Her $a,b \in X$ için $a \wedge b \in X$ ve $a \vee b \in X$ ise X' e, L' nin bir alt kafesi denir.

Lemma 1: Herhangi bir kısmen sıralı kümede infumum ve supremum (eğer mevcutsa) işlemleri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(L1) : $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$ (idempotent özelliği)

(L2) : $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$ (değişme özelliği)

(L3) : $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (birleşme özelliği)

(L4) : $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$ (yok etme özelliği)

Ayrıca, $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$ ve $x \vee y = y$' dir.

Lemma 2: Eğer P kısmen sıralı kümesi bir sıfıra (en küçük elemana) sahip ise Her $x \in P$ için $0 \wedge x = 0$ ve $0 \vee x = x$ dir.

Dual olarak, Her $x \in P$ için $1 \wedge x = x$ ve $1 \vee x = 1$' dir.

Lemma 3: Herhangi bir L kafesinde supremum ve infimum işlemleri izotondur (sıra korur). Yani; $y, z \in L$ olmak üzere $y \leq z \Rightarrow$ Her $x \in L$ için $x \wedge y \leq x \wedge z$ ve $x \vee y \leq x \vee z$ dir.

Lemma 4: Herhangi bir kafesin elemanları modüler eşitsizliği sağlar.

Her $x, y, z \in L$ için $x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$ dir.

Lemma 5: Herhangi bir L kafesinde aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

Her $x, y, z \in L$ için,

(i **)** $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

(ii **)** $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

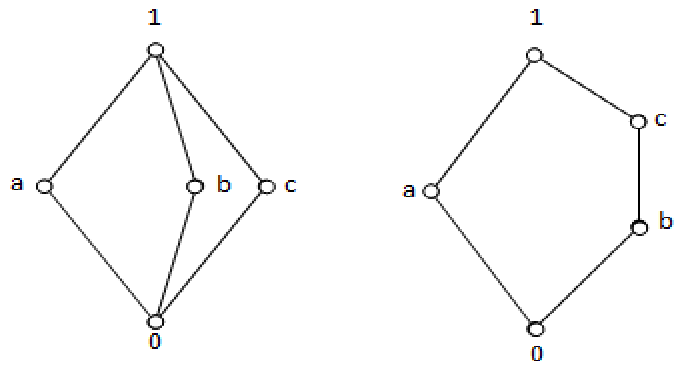
Teorem 1: Herhangi bir kafeste aşağıdaki özellikler denktir.

(L5) Her x, y, z için $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

(L6) Her x, y, z için $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Tanım 11: Bir L kafesine dağılmalı kafes denir: $\Leftrightarrow$ L, teorem 1' deki (L5) veya (L6) özelliğini sağlar.

Tanım 12: $x \leq z$ olan Her x, y, z için (L5) özelliğini sağlayan kafese modüler kafes denir.



Şekil 1. M_5 ve N_5 kafesleri.

Uyarı 2: Her dağılmalı kafes modüler kafestir. Ancak her modüler kafes dağılmalı kafes değildir. Gerçekten, herhangi bir L kafesi dağılmalı kafes olsun. Her $x, y, z \in L$, $x \leq z$ için $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge z$ eşitliği sağlandığından L kafesi modüler kafestir. Tersine M_5 kafesi modüler kafes olup dağılmalı kafes değildir. Gerçekten, $a, b \in M_5$, $0 \leq a$ için $0 \vee (a \wedge b) = 0$ ve $(0 \vee b) \wedge a = b \wedge a = 0$ eşitliğinden M_5 kafesinin modüler kafes olduğu görülür. Diğer taraftan Her $a, b, c \in M_5$ için $a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a$ ve $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = 0$ ifadeleri eşit olmadığından M_5 kafesinin dağılmalı kafes olmadığı görülmüş olur.

N_5 kafesi hem modüler kafes hem de dağılmalı kafes değildir.

Tanım 13: Sınırlı bir L kafesinde $x \in L$ için $x \wedge y = 0$ ve $x \vee y = 1$ olacak şekilde bir $y \in L$ mevcutsa y elemanına x elemanının komplementi denir. Eğer L' deki tüm elemanların komplementleri mevcut ise L' ye komplementli kafes denir.

Tanım 14: Komplementli, dağılmalı bir kafese Boole Kafesi denir.

Teorem 2: Herhangi bir Boole Kafesi' nde her x elemanı tek bir x' komplementine sahiptir ve üstelik:

(L8) $x \wedge x' = 0$, $x \vee x' = 1$

(L9) $(x')' = x$

(L10) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$, $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

özelliklerini sağlar.

Tanım 15: L bir kafes olsun. Eğer L kafesi $\wedge$, $\vee$, işlemleri ile (L1),...,(L10) özelliklerinin tamamını sağlıyorsa, bu takdirde L' ye bir Boole Cebri denir.

Tanım 16: L bir kafes (veya sup-yarı kafesi) ve $\emptyset \neq J \subseteq L$ olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa J' ye L' nin bir ideali denir.

(*i*) $a \in J$, $x \in L$ için $x \leq a$ ise $x \in J$.

(*ii*) $a \in J$, $b \in J$ ise $a \vee b \in J$.

Tanım 17: L bir kafes (veya inf-yarı kafesi) ve $\varnothing \neq J \subseteq L$ olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa J ’ ye L ’ nin bir dual ideali denir.

(i') $a \in J$, $x \in L$ için $a \leq x$ ise $x \in J$.

(ii') $a \in J$, $b \in J$ ise $a \wedge b \in J$.

Uyarı 3:

$\downarrow x$ notasyonu ile $\{y \mid y \in P \quad \text{ve} \quad y \leq x\}$ kümesi gösterilir.

$\uparrow x$ notasyonu ile $\{y \mid y \in P \quad \text{ve} \quad x \leq y\}$ kümesi gösterilir.

1.4. Sıra Morfileri (De Baets ve Mesiar, 1999)

Tanım 18:

(i) L ’ de herhangi boştan farklı $\{x_i \mid i \in I\}$ ailesi için, $g\left(\inf_{i \in I} x_i\right) = \inf_{i \in I} g(x_i)$ ise g’ ye infimum morfisi denir.

(ii) L ’ de herhangi boştan farklı $\{x_i \mid i \in I\}$ ailesi için, $g\left(\sup_{i \in I} x_i\right) = \sup_{i \in I} g(x_i)$ ise g’ ye supremum morfisi denir.

Tanım 19: $\varphi : L \to M$, L kafesinden M kafesine bir fonksiyon olsun.

$x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$

şartı sağlanıyorsa, φ ya sıra korur veya izoton denir.

(1) Her $x, y \in L$ için $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$ ise φ ya supremum morfisi denir.

($1'$) Her $x, y \in L$ için $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$ ise φ ya infimum morfisi denir.

(1) ve ($1'$) nin her ikiside gerçekleşiyorsa, φ ya morfi (veya kafes morfisi) denir.

Bir $\varphi : L \to M$ morfisine;

(i) Birebir ise monomorfi,

(ii) Örten ise epimorfi,

(iii) Birebir ve örten ise yani bir bijeksiyon ise izomorfi,

(iv) $L = M$ ise endomorfi,

(v) $L = M$ olan izomorfiye otomorfi denir.

Teorem 3: $f:[0,1]\to[0,1]$ dönüşümü için aşağıdaki özellikler denktir:

(i **)** f artan dönüşüm,

(ii **)** Her $(x,y)\in[0,1]^2$ için $f(\min(x,y))=\min(f(x),f(y))$,

(iii **)** Her $(x,y)\in[0,1]^2$ için $f(\max(x,y))=\max(f(x),f(y))$.

L bir kafes ve $g:L\to L$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:

(i **)** g artan dönüşüm,

(ii **)** Her $(x,y)\in L^2$ için $g(x\wedge y)\leq g(x)\wedge g(y)$,

(iii **)** Her $(x,y)\in L^2$ için $g(x\vee y)\geq g(x)\vee g(y)$.

Tanım 20: $a\not\leq b$ ve $b\not\leq a$ ise a ile b ye kıyaslanamaz denir ve $a\,||\,b$ ile gösterilir.

1.5. Üçgensel Normlar (t-normlar) (Klement ve Mesiar, 2000)

Tanım 21: $(P,\leq,0,1)$ sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerindeki bir t-norm T, P üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir ikili işlemdir:

(i **)** Her $x\in P$ için $T(x,1)=x$ (birim eleman özelliği)

(ii **)** Her $(x,y,z)\in P^3$ için $x\leq y$ *ise* $T(x,z)\leq T(y,z)$ (monotonluk özelliği)

(iii **)** Her $(x,y)\in P^2$ için $T(x,y)=T(y,x)$ (değişme özelliği)

(iv **)** Her $(x,y,z)\in P^3$ için $T(T(x,y),z)=T(x,T(y,z))$ (birleşme özelliği)

(i **)** ve **(** ii **)** den P üzerindeki herhangi bir T t-normu için $T(x,y)\leq x$ ve $T(x,y)\leq y$ dir. Buradan, her $(x,y)\in P^2$ için $T(x,y)\in\ell(\{x,y\})$ dir.

T_1 ve T_2, P üzerindeki t-normlar olmak üzere, $T_1\leq T_2 \Leftrightarrow$ Her $(x,y)\in P^2$ için $T_1(x,y)\leq T_2(x,y)$ dir.

1.6. En Büyük ve En Küçük t-normlar (De Baets ve Mesiar, 1999)

Bir P sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerindeki en küçük t-norm;

$$T_W(x,y)=\begin{cases} x, & y=1 \\ y, & x=1 \\ 0, & \text{Aksi takdirde.} \end{cases}$$

P üzerindeki herhangi bir T t-normu için $T_W \le T$ dir.

Bir L sınırlı kafesi üzerindeki $T_\wedge(x,y)=x\wedge y$ işlemi en büyük t-normdur.

Böylece, L üzerindeki herhangi bir T t-normu için $T_W \le T \le T_\wedge$ dir.

Örnek 1: Aşağıda sırasıyla $L=[0,1]$ üzerinde $T_P, T_L, T_M, T_W, T^{nM}$ t-normları verilmiştir.

$T_P(x,y)=x.y$

$T_L(x,y)=\max(x+y-1,0)$

$T_M(x,y)=\min(x,y)$

$$T_W(x,y)=\begin{cases} x, & y=1 \\ y, & x=1 \\ 0, & \text{Aksi takdirde.} \end{cases}$$

$$T^{nM}(x,y)=\begin{cases} 0, & x+y\le 1 \\ \min(x,y), & \text{Aksi takdirde.} \end{cases}$$

Uyarı 4: Bir C sınırlı zinciri üzerindeki en küçük t-norm olan T_W şöyle yazılabilir:

$$T_W(x,y)=\begin{cases} \min(x,y) & , \quad \max(x,y)=1 \ \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{Aksi takdirde} \end{cases}$$

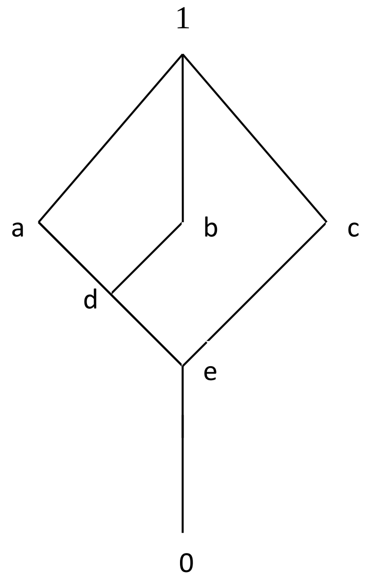
Örnek 2: Herhangi bir L sınırlı kafesi üzerindeki Z_1 ikili işlemini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$Z_1(x,y)=\begin{cases} x\wedge y & , \quad x\vee y=1 \ \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{Aksi Takdirde} \end{cases}$$

Z_1 her zaman t-norm değildir.

Örneğin, $L=\{0,a,b,c,d,e,1\}$ sınırlı kafesinin Şekil 2' deki gibi verildiği düşünülürse

Z_1, L üzerinde t-norm olmaz.



Şekil 2. $L=\{0,a,b,c,d,e,1\}$ kafesi

$b\vee c=1$, $b\wedge c=e$ ve $a\vee e=a<1$ olduğu için,

$Z_1\left(a,Z_1\left(b,c\right)\right)=Z_1\left(a,e\right)=0$.

Diğer taraftan;

$a\vee b=1$, $a\wedge b=d$, $d\vee c=1$ ve $d\wedge c=e$ olduğu için,

$Z_1\left(Z_1\left(a,b\right),c\right)=Z_1\left(d,c\right)=e>0$.

Z_1 birleşme özelliğini sağlamaz. Dolayısıyla Z_1, L üzerinde t-norm değildir.

Fakat bir M sınırlı modüler kafesi için Z_1 ikili işlemi, M üzerinde her zaman bir t-normdur.

Z_1 ' in birleşme özelliğini göstermek ispat için yeterlidir.

$$Z_1\left(x,Z_1\left(y,z\right)\right)=\begin{cases} x\wedge y\wedge z & , \quad y\vee z=1 \quad \text{ve} \quad x\vee\left(y\wedge z\right)=1 \\ 0 & , \quad \text{Aksi takdirde,} \end{cases}$$

$$Z_1\left(Z_1\left(x,y\right),z\right)=\begin{cases} x\wedge y\wedge z & , \quad x\vee y=1 \quad \text{ve} \quad z\vee(x\wedge y)=1 \\ 0 & , \quad \text{Aksi takdirde.} \end{cases}$$

$y\vee z=1$ ve $x\vee\left(y\wedge z\right)=1$ iken $x\vee y=1$ ve $z\vee(x\wedge y)=1$ olduğunu gösterelim.

Tersinin ispatı da benzer şekilde yapılır.

İlk olarak; $x\vee\left(y\wedge z\right)=1$ ve monoton özelliğinden $x\vee y=1$ elde edilir.

Daha sonra, $x\vee\left(y\wedge z\right)=1$ olduğu için, $y=y\wedge\left(x\vee(y\wedge z)\right)$ dir.

$y\wedge z\leq y$ ve M modüler kafes olduğundan $y=(x\wedge y)\vee(y\wedge z)$ elde edilir.

$y=(x\wedge y)\vee(y\wedge z)$ eşitliğinden $y\leq(x\wedge y)\vee z$ elde edilir.

$y\leq(x\wedge y)\vee z$ ve $z\leq(x\wedge y)\vee z$ eşitsizliklerinden de $y\vee z\leq(x\wedge y)\vee z$ elde edilir.

Sonuç olarak, $y\vee z\leq(x\wedge y)\vee z$ olduğu için $(x\wedge y)\vee z=1$ elde edilir.

L sınırlı bir kafes, $e\in L$ ve T_e, L üzerinde bir ikili işlem olsun. L üzerinde T_e aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$T_e(x,y)=\begin{cases} x\wedge y & , \quad x=1 \text{ veya } y=1 \text{ ise} \\ x\wedge y\wedge e & , \quad \text{Aksi takdirde,} \end{cases}$$

(1)

T_e , L üzerinde bir t-normdur.

$T_0=T_W$ ve $T_1=T_\wedge$ dir.

Uyarı 5: $[0,1]$ üzerinde $T_W<T_L<T_P<T_M$ dir.

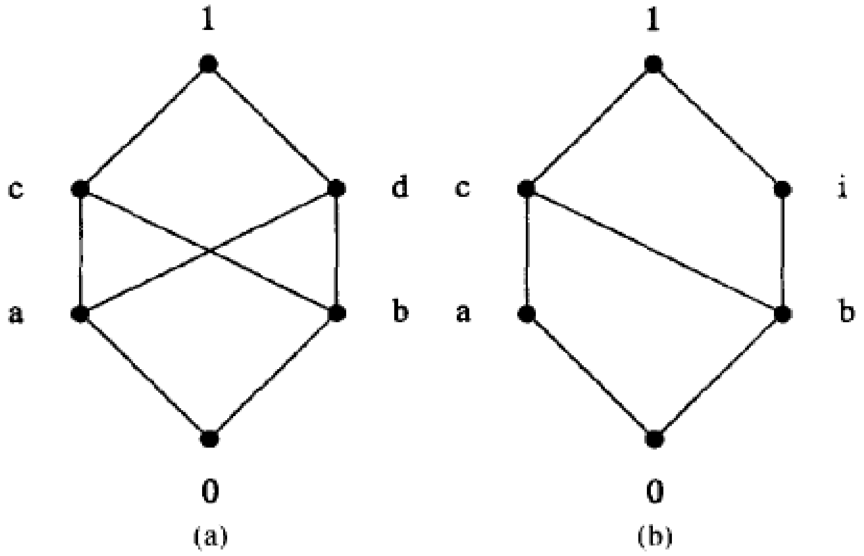
Örnek 3:

(i **)** $P=\{0,a,b,c,i,1\}$ elemanları ile tanımlı $(P,\leq,0,1)$ kısmen sıralı kümesinin diyagramı Şekil 3(a)' da verilir.

(ii **)** Şekil 3(b)'de $L=\{0,a,b,c,i,1\}$ elemanları ile tanımlı $(L,\leq,\wedge,\vee,0,1)$ sınırlı kafesi üzerinde bir T_i t-normu,

$$T_i(x,y)=\begin{cases} T_W(x,y), & (x,y)\neq(i,i) \\ i, & (x,y)=(i,i) \end{cases}$$ olarak tanımlanır.

(iii **)** $B=\{a,b,c\}$ ile $(\wp(B),\subseteq,\cap,\cup,\varnothing,B)$ yapısı bir Bool kafesidir.



Şekil 3. $P=\{0,a,b,c,d,1\}$ kısmen sıralı kümesi ve $L=\{0,a,b,c,i,1\}$ kafesi

Örnek 4: Herhangi bir $T:[0,1]^2\to[0,1]$ t-normu, birleşme özelliği yardımıyla $T:[0,1]^n\to[0,1]$ şeklinde tek türlü genişletilebilir. $[0,1]$ üzerinde T_M,T_P,T_L ve T_W t-normlarının n-li genişlemeleri aşağıdaki gibidir.

$$T_M(x_1,x_2,....,x_n)=\min(x_1,x_2,....,x_n)$$

$$T_P(x_1,x_2,....,x_n)=x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n$$

$$T_L(x_1,x_2,....,x_n)=\max\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-(n-1),0\right)$$

$$T_W(x_1,x_2,....,x_n)=\begin{cases}x_i\ , & j\neq i \text{ için } x_j=1\\ 0\ , & \text{Aksi takdirde.}\end{cases}$$

Uyarı 6: $T:[0,1]^n\to[0,1]$ t-normu ve $(x_1,x_2,...,x_n)\in[0,1]^n$ elemanı için eğer $x_1=x_2=...=x_n=x$ ise bu durumda $T(x_1,x_2,...,x_n)=T(x,x,...,x)=x^{(n)_T}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 21: $(P,\leq,0,1)$ sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerindeki bir t-conorm, P üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir ikili işlemdir.

(i) Her $(x,y,z)\in P^3$ için $S(S(x,y),z)=S(x,S(y,z))$ (birleşme özelliği)

(ii) Her $(x,y,z)\in P^3$ için $x\leq y$ ise $S(x,z)\leq S(y,z)$ (monotonluk özelliği)

(iii) Her $(x,y)\in P^2$ için $S(x,y)=S(y,x)$ (değişme özelliği)

(iv) Her $x \in P$ için $S(x,0) = x$ (birim eleman özelliği)

Örnek 5: Aşağıda sırasıyla $[0,1]$ üzerindeki S_M, S_P, S_L ve S_W t-conormları verilmiştir.

$$S_M(x,y) = \max(x,y)$$

$$S_P(x,y) = x + y - x \cdot y$$

$$S_L(x,y) = \min(x+y,1)$$

$$S_W(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad (x,y) \in \left]0,1\right[^2 \text{ ise} \\ \max(x,y) & , \quad \text{Aksi takdirde.} \end{cases}$$

Uyarı 7: $[0,1]$ üzerinde $S_M < S_P < S_L < S_W$ dir.

Örnek 6: $[0,1]$ üzerindeki S_M, S_P, S_L ve S_W t-conormlarının n-li genişlemeleri aşağıdaki gibidir :

$$S_M(x_1, x_2, ..., x_n) = \max(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$S_P(x_1, x_2, ..., x_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)$$

$$S_L(x_1, x_2, ..., x_n) = \min\left(\sum_{i=1}^{n} x_i, 1\right)$$

$$S_D(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} x_i \ , & j \neq i \text{ için } x_j = 0 \text{ ise} \\ 1 \ , & \text{Aksi takdirde.} \end{cases}$$

1.7. Süreklilik (Klement ve Mesiar, 2000)

Tanım 22: Bir $F : [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyona süreklidir denir: $\Leftrightarrow$ Her yakınsak $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizisi için;

$$F\left(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n\right) = \lim_{n\to\infty} F(x_n, y_n)$$

$[0,1]^2$ birim karesi, $\mathbb{R}^2$ reel düzleminin bir kompakt alt kümesi olduğundan $F : [0,1]^2 \to [0,1]$ ’ in sürekliliği, F ’ in düzgün sürekliliğine denktir.

Açık olarak T_M, T_P, T_L temel t-normları ve onların dualleri olan S_M, S_P, S_L t-conormları sürekli fakat T_W t-normu ve S_W t-conormu sürekli değildir.

Tanım 23: Bir $F:[0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonuna azalmayan fonksiyon denir: $\Leftrightarrow$ $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$ için $x_1 \le x_2$ ve $y_1 \le y_2 \Rightarrow F(x_1, y_1) \le F(x_2, y_2)$ dir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde yapılan çalışmalarda (De Baets ve Mesiar, 1999) kaynağından faydalanılmıştır.

2.1. Aralık Değerli T-normlar

$[0,1]$ birim aralık olmak üzere;

$[0,1]^{[2]} = (\{[x,y] \ |(x,y)\in[0,1]^2 \text{ ve } x\le y\}, \le, \wedge, \vee, [0,0],[1,1] \ )$

sıra bağıntısı $\le$, $\wedge$ ve $\vee$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$[x,y]\le[z,t] \Leftrightarrow x\le z$ ve $y\le t$

$[x,y]\wedge[z,t]=[\min(x,z),\min(y,t)]$

$[x,y]\vee[z,t]=[\max(x,z),\max(y,t)]$

$T:[0,1]^{[2]}\times[0,1]^{[2]}\to[0,1]^{[2]}$ fonksiyonuna bir t-norm denir: $\Leftrightarrow$

(i **)** $T(x,[1,1])=x$

(ii **)** $T(x,y\vee z)=T(x,y)\vee T(x,z)$

(iii **)** $T(x,y\wedge z)=T(x,y)\wedge T(x,z)$

(iv **)** T ' nin $D=\{[x,x] \ | \quad x\in[0,1]\}$ ye kısıtlanışı bir t-normdur.

(v **)** $x=[a,b]$ öyle ki $T([0,1],[a,b]) = [0,b]$

$[0,1]^{[2]}$ üzerindeki her t-norm T aşağıdaki gibi yazılır:

$T([a,b],[c,d]) = [T^*(a,c),T^*(b,d)]$, burada T^* birim aralık üzerinde bir t-normdur.

2.2. İdempotent Elemanlar

Tanım 24: P bir kısmen sıralı küme ve $T:P^2\to P$ bir t-norm olsun. $a\in P$ elemanına T t- normunun bir idempotent elemanı denir: $\Leftrightarrow$ $T(a,a)=a$. T ' nin tüm idempotent elemanlarının kümesi $I(T)$ ile gösterilir. Her t-normun idempotentleri olan 0 ve 1 elemanlarına trivial idempotent elemanlar denir. Eğer bir t-normun bütün elemanları idempotent elemanlar ise bu t-norma idempotent t-norm denir.

Örnek 7:

(i **)** $[0,1]$ üzerinde tanımlı T_W t-normu için her $x \in (0,1)$ elemanı için $T_W(x,x)=0$ olup bu aralıkta idempotent eleman mevcut değildir. O halde $\mathrm{I}(T_W)=\{0,1\}$ dir.

(ii **)** Herhangi bir L sınırlı kafesi üzerinde tanımlı tek idempotent t-norm $T_\wedge$ dur. Gerçekten, T, L sınırlı kafesi üzerinde tanımlı herhangi bir idempotent t-norm olsun. Bu takdirde; $T_\wedge(x,y)=x \wedge y = T(x \wedge y, x \wedge y) \leq T(x,y)$ dir. Buradan $T_\wedge \leq T$. Tersine, $T_\wedge$, L üzerinde en büyük t-norm olduğundan $T_\wedge \geq T$ olup $T_\wedge = T$ elde edilir.

(iii **)** (1) de tanımlanan T_e t-normunun idempotent elemanlarının kümesi aşağıdaki şekildedir; $I(T_e)$ = $[0,e] \cup \{1\}$

(iv **)** Şekil 3(a)' da verilen $P=\{0,a,b,c,d,1\}$ sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde tanımlı olup $a,b \in I(T)$ olacak şekilde bir t-norm mevcut değildir.

Kabul edelim ki, T, a ve b gibi idempotent elemanlara sahip bir t-norm olsun. $T(a,a)=a$ ve $T(b,b)=b$ dir. Buradan, $T(a,a) \leq T(c,d)$ ve $T(b,b) \leq T(c,d)$ dir. $T(c,d) \leq c$ ve $T(c,d) \leq d$ olduğundan $T(c,d) \in \ell(\{c,d\})$ dir. Böylece $T(c,d) \in \vartheta(\{a,b\}) \cap \ell(\{c,d\}) = \varnothing$ çelişkisi elde edilir. Buna göre P üzerinde böyle bir t-norm yoktur.

(v **)** $L=\{0,a,b,c,i,1\}$ sınırlı kafesi Şekil 3(b) deki gibi verilsin. Örnek 3' te verilen L üzerindeki T_i t-normu için $I(T_i)=\{0,i,1\}$ olarak elde edilir.

(vi **)** $[0,1]$ üzerinde tanımlı T_p t-normu için $x \in [0,1]$ olmak üzere $T_P(x,x)=x$ olsun. Bu takdirde $x^2=x$ olur. Buradan $x=1$ ve $x=0$ dır. Yani T_P t-normu trivialden farklı idempotent elemana sahip değildir. O halde $\mathrm{I}(T_P)=\{0,1\}$ dir.

(vii **)** $[0,1]$ üzerinde tanımlı T_L t-normu için $x \in [0,1]$ olmak üzere $T_L(x,x)=x$ olsun. Bu takdirde $\max(2x-1,0)=x$ olur. $2x-1 \geq 0$ ise $2x-1=x$ olup $x=1$ dir. $2x-1<0$ ise $x=0$ olur. Yani T_L t-normunun trivialden farklı idempotent elemanı yoktur. O halde $\mathrm{I}(T_L)=\{0,1\}$ dir.

(*viii*) $[0,1]$ üzerinde tanımlı T^{nM} t-normu için $x \in [0,1]$ olmak üzere $T^{nM}(x,x) = x$ olsun. $x + x \leq 1$ ise $x \leq \frac{1}{2}$ olup $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için $T^{nM}(x,x) = 0$ dır. $x + x > 1$ ise $x > \frac{1}{2}$ olup $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ için $T^{nM}(x,x) = \min(x,x) = x$ olup x idempotent elemandır. T^{nM} t-normunun idempotent elemanlar kümesi $\mathrm{I}(T^{nM}) = \{0\} \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ dir.

(*ix*) $T : [0,1]^2 \to [0,1]$,

$$T(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x.y}{2} & , \quad (x,y) \in [0,1)^2 \\ \min(x,y), & \text{Aksi takdirde,} \end{cases}$$

t-normu göz önüne alınsın. $x \in [0,1)$ için $T(x,x) = x$ olsun. Bu takdirde,

$$T(x,x) = \frac{x.x}{2} = \frac{x^2}{2} = x \Rightarrow x^2 = 2x$$

$$\Rightarrow x^2 = 2x$$

$$\Rightarrow x(x-2) = 0 \quad , \quad x \in [0,1) \text{ olduğundan } x = 0 \text{ dır.}$$

O halde T t-normunun trivialden farklı idempotent elemanı yoktur. Yani $I(T) = \{0,1\}$ dır.

Önerme 1: $(L, \leq, 0, 1)$ bir tam üst yarı-kafes, $T : L^2 \to L$ bir t-norm olsun. Eğer $(I(T), \leq)$ bir kısmen sıralı küme ise bu takdirde $(I(T), \leq)$ bir tam üst yarı kafestir.

İspat : $\{x_i \mid i \in I\}$, T ' nin boştan farklı idempotent elemanlarının bir ailesi olsun. Bu takdirde, $\forall i \in I$ için $T(x_i, x_i) = x_i$ dir. T ' nin monotonluğundan, $T(\sup\limits_{i \in I} x_i, \sup\limits_{i \in I} x_i) \leq \sup\limits_{i \in I} x_i$ dir. Diğer taraftan yine T ' nin monotonluğu kullanılırsa $\forall j \in I$ için $x_j = T(x_j, x_j) \leq T(\sup\limits_{i \in I} x_i, \sup\limits_{i \in I} x_i)$ olur. Buradan $\sup\limits_{i \in I} x_i \leq T(\sup\limits_{i \in I} x_i, \sup\limits_{i \in I} x_i)$ elde edilir. Sonuç olarak $T(\sup\limits_{i \in I} x_i, \sup\limits_{i \in I} x_i) = \sup\limits_{i \in I} x_i$ bulunur ve böylece $\sup\limits_{i \in I} x_i$, T ' nin bir idempotent elemanı olur.

2.3. Sıfır Bölenler ve Nilpotent Elemanlar

Tanım 25: P bir sınırlı kısmen sıralı küme olsun. $x \in P$ elemanına P'nin bir sıfır bölen elemanı denir: $\Leftrightarrow$ $\ell(\{x,y\}) = \{0\}$ olacak şekilde $y \in P \backslash \{0\}$ mevcuttur. P'nin tüm sıfır bölen elemanlarının kümesi $Z[P]$ ile gösterilir.

Bir L sınırlı kafesinin $Z[L]$ altkümesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$Z[L] := \{x \mid x \in L$ ve $\exists\, y \in L \backslash \{0\}$ için $x \wedge y = 0\}$

Örnek 8:

(i **)** Eğer $(L, \leq, 0, 1)$ herhangi bir sınırlı zincir ise bu takdirde $Z[L] = \{0\}$ dır.

(ii **)** Şekil 3(a) da verilen $P = \{0, a, b, c, 1\}$ sınırlı kısmen sıralı kümesi için $Z[P] = \{0, a, b\}$

(iii **)** Şekil 3(b) de verilen $L = \{0, a, b, c, i, 1\}$ sınırlı kafesi için $Z[L] = \{0, a, b, i\}$

(iv **)** $(L, \leq, 0, 1, \wedge, \vee, ')$ bir bool kafesi ise bu takdirde $Z[L] = L \backslash \{1\}$ dir.

Önerme 2: P bir sınırlı kısmen sıralı küme olsun. Bu takdirde $Z[P]$, P**'** nin bir idealidir.

İspat : $a \in Z[P]$, $x \in P$ ve $x \leq a$ olsun. Bu takdirde bir $b \in P \backslash \{0\}$ mevcuttur. Öyle ki $\ell(\{a,b\}) = \{0\}$ dır. $m \in \ell(\{b,x\})$ alalım. Buradan $m \leq b$ ve $m \leq x \leq a$ olduğu için $m \in \ell(\{a,b\}) = \{0\}$ dir. Buradan $m = 0$ dır. $\ell(\{b,x\}) = \{0\}$ elde edilir ve $x \in Z[P]$ dir.

Tanım 26: P bir sınırlı kısmen sıralı küme ve $T : P^2 \to P$ bir t-norm olsun. $x \in P$ elemanına T t- normunun bir sıfır bölen elemanı denir: $\Leftrightarrow$ $\ell(\{x,y\}) \neq \{0\}$ ve $T(x,y) = 0$ olacak şekilde bir $y \in P$ mevcuttur.

T' nin tüm sıfır bölen elemanlarının kümesi $Z(T)$ ile gösterilir. Eğer T hiçbir sıfır bölen elemana sahip değilse T' ye sıfır bölensiz t-norm denir. Tanımdan açıkça görülür ki 0 ve 1 birer sıfır bölen eleman değildirler.

Eğer yukarıdaki tanımda L bir sınırlı kafes alınırsa tanım aşağıdaki şekilde değişir:

L bir sınırlı kafes ve $T : L^2 \to L$ bir t-norm olsun. $x \in L$ elemanına T'nin bir sıfır böleni denir: $\Leftrightarrow$ $x \wedge y \neq 0$ ve $T(x,y) = 0$.

Örnek 9:

(i**)** T_W t-normu için , $Z(T_W)=(0,1)$ dir. Gerçekten, her $x\in(0,1)$ için $1-x\in(0,1)$ olup $T_W(x,1-x)=0$ olduğundan x sıfır bölen elemandır. O halde $Z(T_W)=(0,1)$ dir.

(ii**)** L sınırlı kafesi üzerinde tanımlı $T_\wedge$ için $Z(T_\wedge)=\varnothing$ dir. Gerçekten, her $x\in L\setminus\{0,1\}$ için $T_\wedge(x,y)=x\wedge y=0\Rightarrow y=0$ dır.

(iii**)** (1) de verilen T_e t-normu için,

$Z(T_e)=\{x \mid \exists y\in L,\ x\wedge y\neq 0 \text{ ve } x\wedge y\wedge e=0\}$

(iv**)** Örnek 3'te tanımlanan T_i t-normu için $Z(T_i)=\{a,b,c,i\}$ dir. Gerçekten, $a\in L$ için $T_i(a,i)=0,$ $b\in L$ için $T_i(b,c)=0,$ $c\in L$ için $T_i(c,i)=0,$ $i\in L$ için $T_i(i,c)=0$ dır.

(v**)** T_P t-normu sıfır bölen elemana sahip değildir. Gerçekten, her $x\in(0,1)$ için $T_P(x,y)=x.y=0\Rightarrow y=0$ dır. O halde $Z(T_P)=\varnothing$ dir.

(vi**)** T_L t-normunun sıfır bölen elemanlarına bakalım. Her $x\in(0,1)$ için $1-x\in(0,1)$ olup $T_L(x,1-x)=\max(x+1-x-1,0)=0$ elde edilir. O halde $Z(T_L)=(0,1)$ dir.

(vii**)** T^{nM} t-normu göz önüne alınsın. Bu durumda $Z(T^{nM})=(0,1)$ dir. Gerçekten, her $x\in(0,1)$ için $1-x\in(0,1)$ olup $T^{nM}(x,1-x)=0$ dır.

($viii$**)** $T:[0,1]^2\to[0,1]$,

$$T(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x.y}{2}, & (x,y)\in[0,1)^2\\ \min(x,y), & \text{Aksi takdirde.}\end{cases}$$

Her $x\in(0,1)$ için $T(x,y)=\dfrac{x.y}{2}=0$ ise $x.y=0\Rightarrow y=0$ dır. Böylece T t-normunun sıfır bölen elemanı yoktur. Yani $Z(T)=\varnothing$ dir.

Tanım 27: P bir sınırlı kısmen sıralı küme ve $T:P^2\to P$ bir t-norm olsun. $a\in P\setminus\{0\}$ elemanına T' nin bir nilpotent elemanı denir:$\Leftrightarrow$ $a^{(n)_T}=0$ olacak şekilde bir $n\in\mathbb{N}$ doğal sayısı mevcuttur. T' nin nilpotent elemanlarının kümesi $N(T)$ ile gösterilir.

Örnek 10:

(i**)** En küçük t-norm olan T_W için , $N(T_W)$ = $P\setminus\{0,1\}$ dir. Gerçekten, her $x\in(0,1)$ için $x^{(2)_{T_W}} = T_W(x,x) = 0$ olup x nilpotent elemandır. O halde $N(T_W) = (0,1)$ dir.

(ii**)** Herhangi bir $(L,\leq,0,1)$ sınırlı kafesi üzerinde tanımlı $T_\wedge$ t-normu için , $N(T_\wedge)$ = $\varnothing$ dir. Gerçekten, $x\in L\setminus\{0\}$ için $x^{(n)_{T_\wedge}} = T_\wedge(x,x,...,x) = x\wedge x\wedge ...\wedge x = x\neq 0$ olup $T_\wedge$ t-normu nilpotent elemana sahip değildir.

(iii**)** (1) de tanımlanan T_e t-normunun nilpotent elemanlarının kümesi

$N(T_e)$ = $\{x \mid x\wedge e = 0\}$.

(iv**)** Örnek 3'te verilen T_i t-normu için, $N(T_i)$ = L$\setminus\{0,i,1\}$.

(v**)** T_P t-normu nilpotent elemana sahip değildir. Gerçekten, her $x\in(0,1)$ için $x^{(n)_{T_P}} = x^n$ olup $x^n = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dır. $N(T_P) = \varnothing$ dir.

(vi**)** T_L t-normunun nilpotent elemanlarına bakalım. Her $x\in(0,1)$ için $x^{(n)_{T_L}} = 0$ olacak şekilde $n\in\mathbb{N}$ mevcuttur. Gerçekten, $x^{(n)_{T_L}} = \max\left(\sum_{i=1}^{n} x-(n-1),0\right) = \max(nx-n+1,0)$ dır. Buradan $x\in(0,1)$ olduğundan $x<1$ olup $0<1-x$ dir. Arşimet özelliği ile bir $n\in\mathbb{N}$ için $\frac{1}{n}\leq 1-x$ dir. O halde $1\leq n-nx$ olup $nx-n+1\leq 0$ elde edilir ki buradan da $x^{(n)_{T_L}} = \max(nx-n+1,0) = 0$ olur. Ve x'in bir nilpotent eleman olduğu sonucuna ulaşılır. O halde $N(T_L) = (0,1)$ dir.

(vii**)** T^{nM} t-normu göz önüne alınsın. $x\in(0,1)$ için $x^{(n)_{T^{nM}}} = 0$ olacak şekilde $n\in\mathbb{N}$ mevcut mudur?

$x+x\leq 1$ ise $x\leq\frac{1}{2}$ olup $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ için $x^{(2)_{T^{nM}}} = T^{nM}(x,x) = 0$ dir. Buradan x bir nilpotent elemandır. $x+x>1$ ise $x>\frac{1}{2}$ olup $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ için $x^{(2)_{T^{nM}}} = T^{nM}(x,x) = \min(x,x) = x\neq 0$.

$x^{(3)_{T^{nM}}} = T^{nM}\left(x, T^{nM}(x,x)\right) = T^{nM}(x,x) = x$ olup tümevarımla, her $m \in \mathbb{N}$ için $x^{(m)_{T^{nM}}} = x \neq 0$ dır. O halde $x > \frac{1}{2}$ için x elemanı nilpotent değildir. Öyleyse $N\left(T^{nM}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right]$ dir.

(*viii*) $T : [0,1]^2 \to [0,1]$,

$$T(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x.y}{2} & , \quad (x,y) \in [0,1)^2 \\ \min(x,y), & \text{Aksi takdirde.} \end{cases}$$

her $x \in (0,1)$ için $x^{(n)_T} = \dfrac{x^n}{2} = 0$ ise $x^n = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dır. $N(T) = \varnothing$ dir.

Önerme 3: P bir sınırlı kısmen sıralı küme ve $T : P^2 \to P$ bir t-norm olsun. Bu takdirde;

(*i*) $a \in I(T)$ ve $a \leq x$ ise x nilpotent eleman olamaz.

(*ii*) T' nin herhangi bir z sıfır böleni için, $\downarrow z \cap N(T) \neq \varnothing$

(*iii*) $b \in N(T)$ ve $y \leq b$ ise y idempotent olamaz.

(*iv*) T' nin her nilpotent elemanı aynı zamanda T' nin bir sıfır bölenidir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

Örneğin, $T^{nM} : [0,1]^2 \to [0,1]$ t-normu göz önüne alınsın. $a = 0,6$ için $T^{nM}(0,4\ ,\ 0,6) = 0$ olduğundan a sıfır bölendir. $T^{nM}(0,6\ ,\ 0,6) = \min(0,6\ ,\ 0,6) = 0,6$ olduğundan (i) şıkkı ile a nilpotent eleman değildir.

İspat :

(*i*) $a \in I(T)$ olsun. Açıkça, her $n \in \mathbb{N}$ için $a^{(n)_T} = a$ dir. $a \leq x$ ve monotonluktan her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < a \leq x^{(n)_T}$ dir. Böylece x nilpotent eleman olamaz.

(*ii*) z, T' nin bir sıfır böleni olsun. O halde $\ell(\{y,z\}) \neq \{0\}$ ve $T(z,y) = 0$ olacak şekilde bir $y \in P \setminus \{0\}$ mevcuttur. $0 \neq a \in \ell(\{y,z\})$ için T' nin monotonluğundan $T(a,a) \leq T(z,y) = 0$ Böylece a T' nin nilpotent elemanıdır ve $a \leq z$ olduğu için, $\downarrow z \cap N(T) \neq \varnothing$ olduğu elde edilir.

(*iii*) $b \in N(T), y \le b$ ve $y \in I(T)$ olsun. O halde bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı için $b^{(n)_T} = 0$ dır. $y \in I(T)$ olduğundan $y^{(n)_T} = y$ dir.

$y \le b$ ve T**'** nin monotonluğundan $y^{(n)_T} \le b^{(n)_T} = 0$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla böyle bir $y \in I(T)$ mevcut olamaz.

(*iv*) a, T**'** nin nilpotent elemanı ve n, $a^{(n)_T} \ne 0$ olacak şekildeki en büyük sayı olsun $(n \ge 1)$. O halde $T(a,\ a^{(n)_T}) = 0$ dır. $a^{(n)_T} \in \ell\left(a, a^{(n)_T}\right)$ olduğu için $a \in Z(T)$ dir. Dolayısıyla $N(T) \subseteq Z(T)$ elde edilir.

2.4. Arşimedyan Özelliği

Tanım 28: Bir P sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerindeki T t-normuna Arşimedyan denir: $\Leftrightarrow$ Her $(x,y) \in P^2$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x^{(n)_T} \ge y \Rightarrow x = 1$ veya $y = 0$ dır.

Önerme 4: P sınırlı kısmen sıralı küme ve $T: P^2 \to P$ bir t-norm olsun. T t-normu Arşimedyandır $\Leftrightarrow$ Her $a \ne 1$ için $\ell\left(\left\{a^{(n)_T} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \{0\}$ dır.

İspat :

'$\Rightarrow$' : T t-normu Arşimedyan ve her $a \ne 1$ olsun.

Her $(a,b) \in P^2$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a^{(n)_T} \ge b \Rightarrow a = 1$ veya $b = 0$ dır. $a \ne 1$ olduğundan $b = 0$ dır.

$a^{(n)_T} \ge b$ olduğundan $b \in \ell\left(\left\{a^{(n)_T} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right)$ olur. $\ell\left(\left\{a^{(n)_T} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \{0\}$ elde edilir.

'$\Leftarrow$' : Her $(x,y) \in P^2$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a^{(n)_T} \ge b$ olsun.

Her $x \ne 1$ için $b \in \ell\left(\left\{a^{(n)_T} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right)$ dır. $b = 0$ dır. T t-normu Arşimedyandır.

Sonuç 1: L bir tam kafes olsun. $T: L^2 \to L$ t-normu Arşimedyandır $\Leftrightarrow$ Her $a \ne 1$ için $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} a^{(n)_T} = 0$ dır.

Sonuç 2: Bir C sınırlı zinciri üzerindeki T t-normu Arşimedyandır

$\Leftrightarrow$ Her $(x,y)\in(0,1)^2$ için $x^{(n)_T}<y$ olacak şekilde $n\in\mathbb{N}$ mevcuttur.

P bir sınırlı kısmen sıralı küme olsun. En küçük t-norm olan T_W her zaman Arşimedyandır. P üzerinde verilen bir T t-normu için $N(T)=P\setminus\{0,1\}$ ise T Arşimedyandır. Tersi genelde doğru değildir. Birim aralık üzerindeki $T_P(x,y)=x\cdot y$ çarpım t-normu Arşimedyandır fakat $N(T_P)\neq(0,1)$.

P üzerindeki herhangi bir T Arşimedyan t-normu sadece trivial idempotent elemanlara sahiptir. Gerçekten, her $n\in\mathbb{N}$ için $x^{(n)_T}\leq x$ dir.

Önerme 5: Bir L tam kafesi üzerindeki T t-normu infimum morfisi olsun. T Arşimedyandır $\Leftrightarrow T$ köşegen eşitsizliğini sağlar.

İspat :

'$\Rightarrow$': T arşimedyan olduğundan $x\in P$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $x^{(n)_T}\geq x\Rightarrow x=1$ veya $x=0$ dır. Böylelikle, T, köşegen eşitsizliğini yani her $x\in P\setminus\{0,1\}$ için $T(x,x)<x$ eşitsizliğini sağlar.

'$\Leftarrow$': Sonuç 1 ele alındığında, herhangi bir $x\neq 1$ için $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x^{(n)_T}=0$ olduğu gösterilirse T arşimedyan olur.

$\delta:=\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x^{(n)_T}$ olsun.

$T(\delta,\delta)=T(\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x^{(n)_T},\inf\limits_{m\in\mathbb{N}} x^{(m)_T})$

T nin sıra dönüşümü infimum morfisi olduğu için,

$$\begin{aligned} T(\delta,\delta) &= \inf_{n\in\mathbb{N}}\ \inf_{m\in\mathbb{N}} T(x^{(n)_T},x^{(m)_T}) \\ &= \inf_{n\in\mathbb{N}}\ \inf_{m\in\mathbb{N}} x^{(n+m)_T} \\ &= \inf_{k\in\mathbb{N}/\{1\}} x^{(k)_T}\geq\delta \end{aligned}$$

$T(\delta,\delta)\leq\delta$ olduğu için, $T(\delta,\delta)=\delta$ dır. T köşegen eşitsizliğini sağladığı için $\delta\in\{0,1\}$ kümesinin bir elemanıdır. $x<1$ olduğu için, $\delta<1$ elde edilir.

Dolayısıyla $\delta=0$ dır. Buradan T Arşimedyandır.

Örnek 11:

(i **)** $T_{\wedge}$ t-normu arşimedyan özelliğini sağlamaz. Gerçekten, her $(x,y)\in(0,1)^2$ için $x^{(n)_{T_{\wedge}}}=T_{\wedge}(x,x,...,x)=x\wedge x\wedge...\wedge x=x<y$ durumu her zaman sağlanmayabilir. Örneğin; $x=0,5$, $y=0,4\in(0,1)$ için $(0,5)^{(n)_{T_M}}<0,4$ ve $0,5<0,4$ olup çelişki elde edilir.

(ii **)** T_W t-normu arşimedyan özelliğini sağlar. Gerçekten,

her $(x,y)\in(0,1)^2$ için $x^{(2)_{T_W}}=T_W(x,x)=0<y$ dir.

(iii **)** T_P t-normunun arşimedyan özelliğini sağladığını gösterelim. Her $(x,y)\in(0,1)^2$ için $x^{(n)_{T_P}}=x^n<y$ olacak şekilde $n\in\mathbb{N}$ mevcuttur. Gerçekten, varsayalım ki her $n\in\mathbb{N}$ için $x^{(n)_{T_P}}=x^n\geq y$ olacak şekilde $x,y\in(0,1)$ mevcuttur. Buradan her $n\in\mathbb{N}$ için limit alınırsa; $\lim\limits_{n\to\infty}x^n\geq\lim\limits_{n\to\infty}y$ olup $0\geq y$ elde edilir. Bu durum $y\in(0,1)$ olması ile çelişir. O halde T_P t-normu arşimedyan özelliğini sağlar.

(iv **)** T_L t-normu arşimedyan özelliğini sağlar. Her $(x,y)\in(0,1)^2$ için $x^{(n)_{T_L}}=\max\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x-(n-1),0\right)=\max(nx-n+1,0)<y$ olacak şekilde bir $n\in\mathbb{N}$ var mıdır?

$nx-n+1\leq 0$ olursa $0<y$ olup şart sağlanır. Diğer taraftan $nx-n+1>0$ olsun. Göstermemiz gereken, $nx-n+1<y$ dir. Varsayalım ki her $n\in\mathbb{N}$ için $nx-n+1\geq y$ olsun. Buradan

$1-y\geq n-nx$

$1-y\geq n(1-x)$

$\frac{1-y}{1-x}\geq n$ elde edilir. Her iki taraftan limit alınırsa her $n\in\mathbb{N}$ için bu durum bir çelişkidir. O halde $nx-n+1<y$ olup T_L arşimedyandır.

(v **)** T^{nM} t-normu arşimedyan özelliğini sağlamaz. Her $(x,y)\in(0,1)^2$ için $x^{(n)_{T^{nM}}}<y$ olacak şekilde bir $n\in\mathbb{N}$ var mıdır?

$x+x\leq 1$ ise $x\leq\frac{1}{2}$ olup $x^{(2)_{T^{nM}}}=T^{nM}(x,x)=0<y$ dir. $x+x>1$ ise $x>\frac{1}{2}$ olup $x^{(2)_{T^{nM}}}=T^{nM}(x,x)=\min(x,x)=x$ olur. Böylece arşimedyan değildir. Gerçekten,

$x=\frac{7}{10}$, $y=\frac{3}{5}$ alalım. $\left(\frac{7}{10}\right)^{(n)_{T^{nM}}}=T^{nM}\left(\frac{7}{10},\frac{7}{10},...,\frac{7}{10}\right)=\min\left(\frac{7}{10},\frac{7}{10},...,\frac{7}{10}\right)=\frac{7}{10}<\frac{3}{5}$ olup bu bir çelişkidir.

(vi **)** $T:[0,1]^2\to[0,1]$,

$$T(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x.y}{2} & , \quad (x,y)\in[0,1)^2\\ \min(x,y), & \text{Aksi takdirde.}\end{cases}$$

T t-normunun arşimedyan özelliğini sağladığını gösterelim. Her $(x,y)\in(0,1)^2$ için $x^{(n)_T}=\frac{x^n}{2}<y$ olacak şekilde $n\in\mathbb{N}$ mevcuttur. Gerçekten, varsayalım ki her $n\in\mathbb{N}$ için $\frac{x^n}{2}\geq y$ olsun. Her iki taraftan limit alınırsa;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{2}\geq\lim_{n\to\infty}y$$

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}x^n\geq\lim_{n\to\infty}y$$

$0\geq y$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

O halde varsayım yanlış olup $x^{(n)_T}<y$ olacak şekilde $n\in\mathbb{N}$ mevcuttur.

2.5. Çarpım Kısmen Sıralı Kümeler Üzerindeki t-normların Direkt Çarpımı

Önerme 6: T_1, P_1 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde ve T_2, P_2 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t-norm olsun. T_1 ve T_2 nin direkt çarpımı $T_1\times T_2$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$T_1\times T_2\left((x,x'),(y,y')\right)=\left(T_1(x,y),T_2(x',y')\right)$

$T_1\times T_2$, $P_1\times P_2$ çarpım sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t-normdur.

İspat :

(i **)** Her $(x,x'),(y,y')\in P_1\times P_2$ için

$T_1\times T_2\left((x,x'),(y,y')\right)=\left(T_1(x,y),T_2(x',y')\right)$

$$= \left(T_1(y,x), T_2(y',x')\right)$$
$$= T_1 \times T_2\left((y,y'),(x,x')\right).$$

(*ii*) Her $(x,x'),(y,y'),(z,z') \in P_1 \times P_2$ için, $T_1 \times T_2\left(T_1 \times T_2\left((x,x'),(y,y')\right),(z,z')\right)$

$$T_1 \times T_2\left((x,x'), T_1 \times T_2\left((y,y'),(z,z')\right)\right) = T_1 \times T_2\left((x,x'),\left(T_1(y,z), T_2(y',z')\right)\right)$$
$$= \left(T_1\left(x, T_1(y,z)\right), T_2\left(x', T_2(y',z')\right)\right)$$
$$= \left(T_1\left(T_1(x,y),z\right), T_2\left(T_2(x',y'),z'\right)\right)$$
$$= T_1 \times T_2\left(\left(T_1(x,y), T_2(x',y')\right),(z,z')\right)$$
$$= T_1 \times T_2\left(T_1 \times T_2\left((x,x'),(y,y')\right),(z,z')\right).$$

Böylece birleşme özelliği sağlanır.

(*iii*) Her $(x,x'),(y,y'),(a,b) \in P_1 \times P_2$ için

$(x,x') \le (y,y')$ olsun. Buradan, $x \le y$ ve $x' \le y'$ dir.

T_1 ve T_2 t-norm olduğu için, $\forall a \in P_1$ ve $\forall b \in P_2$ için

$T_1(x,a) \le T_1(y,a)$

$T_2(x',b) \le T_2(y',b)$

$\left(T_1(x,a), T_2(x',b)\right) \le \left(T_1(y,a), T_2(y',b)\right)$

$T_1 \times T_2\left((x,x'),(a,b)\right) \le T_1 \times T_2\left((y,y'),(a,b)\right).$

(*iv*) Her $(x,x') \in P_1 \times P_2$ için,

$$T_1 \times T_2\left((x,x'),(1,1)\right) = \left(T_1(x,1), T_2(x',1)\right)$$
$$= (x,x')$$

Buradan, $T_1 \times T_2$, $P_1 \times P_2$ çarpım sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t-normdur.

Önerme 7: P_1 ve P_2 iki sınırlı kısmen sıralı küme, T_1 ve T_2 sırasıyla P_1 ve P_2 üzerinde birer t-norm olsun. Bu takdirde Önerme 6'da verilen $T_1 \times T_2$ direkt çarpımı gözönüne alınırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

(*i*) $I(T_1 \times T_2) = I(T_1) \times I(T_2)$

(*ii*) $N(T_1 \times T_2) = N(T_1) \times N(T_2)$.

İspat :

(i) $(x,y)\in I(T_1\times T_2)$ olsun.

$T_1\times T_2((x,y),(x,y))=(x,y)$ dir. Buradan $(T_1(x,x),T_2(y,y))=(x,y)$ ise $T_1(x,x)=x$ ve $T_2(y,y)=y$ dir. $x\in I(T_1)$ ve $y\in I(T_2)$ olup $(x,y)\in I(T_1)\times I(T_2)$ elde edilir. $x\in I(T_1)$ ve $y\in I(T_2)$ olsun. $x\in I(T_1)\Rightarrow T_1(x,x)=x$ ve $y\in I(T_2)\Rightarrow T_2(y,y)=y$ dir. Buradan $T_1\times T_2((x,y),(x,y))=(T_1(x,x),T_2(y,y))=(x,y)\Rightarrow(x,y)\in I(T_1\times T_2)$ dir.

(ii) $T=T_1\times T_2$, $(x,y)\in N(T_1\times T_2)$ olsun. $(x,y)^{(m)_T}=(0_1,0_2)$ olacak şekilde bir $m\in\mathbb{N}$ mevcuttur. Buradan $\left(x^{(m)_{T_1}},y^{(m)_{T_2}}\right)=(0_1,0_2)$ ve böylece $x^{(m)_{T_1}}=0_1$ ve $y^{(m)_{T_2}}=0_2$ elde edilir. O halde $(x,y)\in N(T_1)\times N(T_2)$ dir.

$x\in N(T_1)$ ve $y\in N(T_2)$ olsun.

$x\in N(T_1)$ ve $y\in N(T_2)\Rightarrow$ $n_1\in\mathbb{N}$; $x^{(n_1)_{T_1}}=0_1$ ve $n_2\in\mathbb{N}$; $y^{(n_2)_{T_2}}=0_2$

$n:=\max(n_1,n_2)$ alırsak $(x,y)^{(n)_T}=(0_1,0_2)$ olur. Dolayısıyla, $(x,y)\in N(T)$ dır.

Tanım 29: P_1 ve P_2 iki sınırlı kısmen sıralı küme, T_1 ve T_2 sırasıyla P_1 ve P_2 üzerinde birer t-norm olsun. Bu takdirde Önerme 6'da verilen $T_1\times T_2$ direkt çarpımı gözönüne alınırsa açıkça $(0_1,1_2),(1_1,0_2)\in I(T_1\times T_2)$ olup bu elemanlara t-normların direkt çarpımının doğal idempotent elemanları denir.

Lemma 6: P_1 ve P_2 iki sınırlı kısmen sıralı küme olsun.

$Z[P_1\times P_2]=(Z[P_1]\times P_2)\cup(P_1\times Z[P_2])$ veya denk olarak

$(P_1\times P_2)\setminus Z[P_1\times P_2]=(P_1\setminus Z[P_1])\times(P_2\setminus Z[P_2])$ eşitliği sağlanır.

İspat :

$Z[P_1\times P_2]=\{(x,y)\mid\exists(x',y')\in P_1\times P_2\setminus\{(0_1,0_2)\}\ ,\ \ell(\{(x,y),(x',y')\})=\{0_1,0_2\}\ \}$

Keyfi $(x,y)\in Z[P_1\times P_2]$ alalım. Bir $(x',y')\neq(0_1,0_2)$ elemanı için

$$\begin{aligned}\ell(\{(x,y),(x',y')\})&=\ell_1(\{x,x'\})\times\ell_2(\{y,y'\})\\&=\{(0_1,0_2)\}\text{ dır.}\end{aligned}$$

$(x', y') \neq (0_1, 0_2)$ olduğundan $x' \neq 0_1$ veya $y' \neq 0_2$ dir. Kabul edilsin ki $x' \neq 0_1$ $(y' \neq 0_2$ durumu benzer şekilde gösterilir$)$. $\ell_1(\{x, x'\}) = \{0_1\}$ olduğundan, $x \in Z[P_1]$ dir. Buradan $(x, y) \in Z[P_1] \times P_2$ olup $Z[P_1 \times P_2] = (Z[P_1] \times \mathrm{P}_2) \cup (\mathrm{P}_1 \times Z[P_2])$ olduğu elde edilir.

Tersine, $\mathrm{P}_1 \times Z[P_2]$ nin $Z[P_1 \times P_2]$ de kapsandığını gösterelim. $(x, y) \in \mathrm{P}_1 \times Z[P_2]$ keyfi olsun. $y \in Z[P_2]$ olduğundan $\exists y' \in P_2 \setminus \{0_2\}, \ell_2(\{y, y'\}) = \{0_2\}$ dir.

Ayrıca ; $\ell(\{(x, y), (0_1, y')\}) = \ell_1(\{x, 0_1\}) \times \ell_2(\{y, y'\})$

$$= \{0_1\} \times \{0_2\}$$

$$= \{(0_1, 0_2)\}$$

$(0_1, y') \neq (0_1, 0_2)$ olduğu için $(x, y) \in Z[P_1 \times P_2]$. Benzer şekilde $Z[P_1] \times P_2 \subseteq Z[P_1 \times P_2]$ elde edilir. Böylece $(Z[P_1] \times P_2) \cup (P_1 \times Z[P_2]) \subseteq Z[P_1 \times P_2]$ olduğu gösterilmiş olur.

Sonuç 3: C_1 ve C_2 iki sınırlı zincir olsun. Bu takdirde,
$Z[C_1 \times C_2] = (\{0_1\} \times C_2) \cup (C_1 \times \{0_2\})$ dir.

Önerme 8: P_1 ve P_2 iki sınırlı kısmen sıralı küme, T_1 ve T_2 sırasıyla P_1 ve P_2 üzerinde birer t-norm olsun. Bu takdirde Önerme 6'da verilen $T_1 \times T_2$ direkt çarpımı gözönüne alınırsa aşağıdaki eşitlik sağlanır.
$Z(T_1 \times T_2) = (Z(T_1) \times \mathrm{P}_2) \cup (\mathrm{P}_1 \times Z(T_2))$.

İspat : $Z(T_1) \times P_2 \subseteq Z(T_1 \times T_2)$ olduğu gösterilsin. Bunun için $T = T_1 \times T_2$, $x \in Z(T_1)$ ve $y \in P_2$ olsun. $x' \in P_1$ vardır öyle ki $\ell_1(\{x, x'\}) \neq \{0_1\}$ ve $T_1(x, x') = 0_1$

$\ell(\{(x, y), (x', 0_2)\}) = \ell_1(\{x, x'\}) \times \ell_2(\{y, 0_2\}) \neq \{(0_1, 0_2)\}$ ve $T((x, y), (x', 0_2)) = (0_1, 0_2)$ dir.

Buradan $(x, y) \in Z(T_1 \times T_2)$ elde edilir. Benzer şekilde $P_1 \times Z(T_2) \subseteq Z(T_1 \times T_2)$ elde edilir.

Tersine; $Z(T_1 \times T_2) \subseteq (Z(T_1) \times \mathrm{P}_2) \cup (\mathrm{P}_1 \times Z(T_2))$ olduğu gösterilsin.

$(x, y) \in Z(T_1 \times T_2)$ olsun. $(x', y') \in P_1 \times P_2$ öyle ki;

$\ell(\{(x, y), (x', y')\}) = \ell_1(\{x, x'\}) \times \ell_2(\{y, y'\})$

$$\neq \{(0_1, 0_2)\} \text{ olup}$$

$T_1 \times T_2\left(\left(x,y\right),\left(x',y'\right)\right)=\left(T_1\left(x,x'\right),T_2\left(y,y'\right)\right)$

$=\left(0_1,0_2\right)$ dir.

Buradan $\ell_1\left(\left\{x,x'\right\}\right)\neq\left\{0_1\right\}$ veya $\ell_2\left(\left\{y,y'\right\}\right)\neq\left\{0_2\right\}$ dir.

$\ell_1\left(\left\{x,x'\right\}\right)\neq\left\{0_1\right\}$ ise $T_1\left(x,x'\right)=0_1$ olduğundan $x\in Z\left(T_1\right)$ olup $\left(x,y\right)\in Z\left(T_1\right)\times P_2$ dir.

$\ell_2\left(\left\{y,y'\right\}\right)\neq\left\{0_2\right\}$ ise $T_2\left(y,y'\right)=0_2$ olduğundan $y\in Z\left(T_2\right)$ olup $\left(x,y\right)\in P_1\times Z\left(T_2\right)$ dir. O halde $\left(x,y\right)\in\left(Z\left(T_1\right)\times P_2\right)\cup\left(P_1\times Z\left(T_2\right)\right)$ olup $Z\left(T_1\times T_2\right)\subseteq\left(Z\left(T_1\right)\times \mathrm{P}_2\right)\cup\left(\mathrm{P}_1\times Z\left(T_2\right)\right)$ elde edilir.

Sonuç 4: P_1 ve P_2 iki sınırlı kısmen sıralı küme, T_1 ve T_2 sırasıyla P_1 ve P_2 üzerinde birer t-norm olsun. Bu takdirde Önerme 6'da verilen $T_1\times T_2$ direkt çarpımı gözönüne alınırsa;

$T_1\times T_2$ t-normu sıfır bölensizdir $\Leftrightarrow$ T_1 ve T_2 t-normları sıfır bölensizdir.

İspat:

$'\Rightarrow':$ $T_1\times T_2$ t-normu sıfır bölensiz olsun. O halde $Z\left(T_1\times T_2\right)=\varnothing$ dır. Göstermemiz gereken, $Z\left(T_1\right)=\varnothing$ ve $\mathrm{Z}\left(T_2\right)=\varnothing$ olduğudur. Varsayalım ki, $Z\left(T_1\right)\neq\varnothing$ veya $\mathrm{Z}\left(T_2\right)\neq\varnothing$ olsun. $Z\left(T_1\right)\neq\varnothing$ olduğunda, bir $x\in Z\left(T_1\right)$ mevcuttur. O halde $\exists x'\in P\setminus\left\{0\right\},\ell\left(\left\{x,x'\right\}\right)\neq\left\{0\right\}$ ve $T_1\left(x,x'\right)=0$ dır.

$\ell\left(\left\{\left(x,y\right),\left(x',0_2\right)\right\}\right)=\ell_1\left(\left\{x,x'\right\}\right)\times\ell_2\left(\left\{y,0_2\right\}\right)$

$\neq\left\{\left(0_1,0_2\right)\right\}$ ve $T\left(\left(x,y\right),\left(x',0_2\right)\right)=\left(0_1,0_2\right)$ dir.

Buradan $\left(x,y\right)\in Z\left(T_1\times T_2\right)$ elde edilir. Buradan çelişki elde edilir. O halde varsayım yanlıştır. $Z\left(T_1\right)=\varnothing$ dir. Benzer şekilde T_2 için de gösterilir.

$'\Leftarrow':$ T_1 ve T_2 t-normları sıfır bölensiz olsun. Göstermemiz gereken, $Z\left(T_1\times T_2\right)=\varnothing$ olduğudur. Varsayalım ki, $Z\left(T_1\times T_2\right)\neq\varnothing$ olsun. Bu durumda bir $\left(x,y\right)\in Z\left(T_1\times T_2\right)$ dir. $\exists\left(x',y'\right)\in P_1\times P_2\setminus\left\{\left(0_1,0_2\right)\right\}$, $\ell\left(\left\{\left(x,y\right),\left(x',y'\right)\right\}\right)=\ell_1\left(\left\{x,x'\right\}\right)\times\ell_2\left(\left\{y,y'\right\}\right)\neq\left\{\left(0_1,0_2\right)\right\}$ ve

$T_1\times T_2\left(\left(x,y\right),\left(x',y'\right)\right)=\left(T_1\left(x,x'\right),T_2\left(y,y'\right)\right)=\left(0_1,0_2\right)$ dir.

Burada $\ell_1(\{x,x'\}) \neq \{(0_1,0_2)\}$ veya $\ell_2(\{y,y'\}) \neq \{(0_1,0_2)\}$ dir. $\ell_1(\{x,x'\}) \neq \{(0_1,0_2)\}$ ise $T_1(x,x') = 0_1$ olduğundan $x \in Z(T_1)$ dir. Veya $\ell_2(\{y,y'\}) \neq \{(0_1,0_2)\}$ ise $T_2(y,y') = 0_2$ olduğunda $y \in Z(T_2)$ dir. Buradan T_1 ve T_2 sıfır bölen elemana sahip olur. Varsayım yanlıştır. $Z(T_1 \times T_2) = \varnothing$ dir.

2.6. Pseudo - Arşimedyan Özelliği

P_1 ve P_2 iki sınırlı kısmen sıralı küme ve T_1 ve T_2 sırasıyla onlar üzerinde iki t-norm olsun. Önerme 6' da verildiği gibi $T = T_1 \times T_2$ direkt çarpımı göz önüne alınsın.

Her $x \in P_1 \setminus \{1_1\}, y \in P_2 \setminus \{1_2\}$ için T' nin monotonluğu ile her $n \in \mathbb{N}$ için $(0_1,1_2) \leq (x,1_2)^{(n)_T}$ ve $(1_1,0_2) \leq (1_1,y)^{(n)_T}$ olup $\ell\left\{(x,1_2)^{(n)_T} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}, \ell\left\{(1_1,y)^{(n)_T} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} \neq \{(0_1,0_2)\}$ olduğundan Önerme 4'e göre T arşimedyan olamaz. Arşimedyanlık tanımının biraz daha zayıf bir halini elde edelim:

P bir sınırlı kısmen sıralı küme olsun.

$U[P] = \{x \mid x \in P \text{ ve } \exists y \in P \setminus \{1\} \;\; \vartheta(\{x,y\}) = \{1\}\}$ olarak verilirse bu küme L sınırlı kafesi için $U[L] = \{x \mid x \in L \text{ ve } \exists y \in L \setminus \{1\} \text{ için } x \vee y = 1\}$ şeklinde elde edilir.

Tanım 30: Bir P sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerindeki T t-normuna Pseudo- Arşimedyan denir:

$\Leftrightarrow$ Her $(x,y) \in P^2$, her $n \in \mathbb{N}$ için $x^{(n)_T} \geq y$ ise $x \in U[P]$ veya $y = 0$ dır.

Eğer C bir zincir ise, $U[C] = \{1\}$ olduğundan Pseudo-Arşimedyan özelliği ile Arşimedyan özelliği zincirler için çakışır.

Lemma 7: P_1 ve P_2 iki sınırlı kısmen sıralı küme olsun. Aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(*i*) $U[P_1 \times P_2] = (U[P_1] \times \mathrm{P}_2) \cup (\mathrm{P}_1 \times U[P_2])$.

(*ii*) $(\mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_2) \setminus U[P_1 \times P_2] = (\mathrm{P}_1 \setminus U[P_1]) \times (\mathrm{P}_2 \setminus U[P_2])$.

İspat :

(i) $(x_1, y_1) \in P_1 \times U[P_2]$ olsun. $y_1 \in U[P_2]$ olduğundan $\exists y_2 \in P_2 \setminus \{1_2\}$, $\vartheta_2(\{y_1, y_2\}) = \{1_2\}$ $\vartheta_1(\{x_1, 1_1\}) = \{1_1\}$ olduğundan

$$\vartheta(\{(x_1, y_1), (1_1, y_2)\}) = \vartheta_1(\{x_1, 1_1\}) \times \vartheta_2(\{y_1, y_2\})$$
$$= \{(1_1, 1_2)\}.$$

$(1_1, y_2) \neq (1_1, 1_2)$ olduğundan $(x_1, y_1) \in U[P_1 \times P_2]$ dir. $U[P_1] \times P_2 \subseteq U[P_1 \times P_2]$ olduğu benzer şekilde gösterilir. Böylece $(U[P_1] \times P_2) \cup (P_1 \times U[P_2]) \subseteq U[P_1 \times P_2]$. Tersine, $(x_1, y_1) \in U[P_1 \times P_2]$ alalım. $\exists (x_2, y_2) \in P_1 \times P_2 \setminus \{(1_1, 1_2)\}$, $\vartheta(\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}) = \vartheta_1(\{x_1, x_2\}) \times \vartheta_2(\{y_1, y_2\}) = \{(1_1, 1_2)\}$ dir. $(x_2, y_2) \neq (1_1, 1_2)$ olduğundan $x_2 \neq 1_1$ veya $y_2 \neq 1_2$ dır. Kabul edilsin ki $x_2 \neq 1_1$ ($y_2 \neq 1_2$ durumu benzer şekilde gösterilir). $\vartheta_1(\{x_1, x_2\}) = \{1_1\}$ olduğundan $x_1 \in U[P_1]$ dir. O halde $(x_1, y_1) \in U[P_1] \times P_2$ dir. Buradan $U[P_1] \times P_2 \subseteq U[P_1 \times P_2]$ dir. Böylece $U[P_1 \times P_2] = (U[P_1] \times \mathrm{P}_2) \cup (\mathrm{P}_1 \times U[P_2])$ elde edilir.

(ii) Benzer şekilde gösterilir.

Önerme 9: P_1 ve P_2 iki sınırlı kısmen sıralı küme ve T_1 ve T_2 sırasıyla onlar üzerinde iki t-norm olsun. Önerme 6' da verildiği gibi $T = T_1 \times T_2$ direkt çarpımı göz önüne alınsın. T'nin Pseudo-Arşimedyan olması için gerek ve yeter şart T_1 ve T_2 Pseudo-Arşimedyan olmasıdır.

İspat :

'$\Rightarrow$' : T Pseudo-Arşimedyan olsun. T_1 in Pseudo-Arşimedyan olduğunu gösterelim.

$x, x' \in P_1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x^{(n)_{T_1}} \geq x'$ ve $x' \neq 0_1$ olsun. Bu takdirde $(x, 0_2), (x', 0_2) \in P_1 \times P_2$ olup her $n \in \mathbb{N}$ için $(x', 0_2) \neq (0_1, 0_2)$ ve $(x, 0_2)^{(n)_T} \geq (x', 0_2)$ dır.

T Pseudo-Arşimedyan ve $(x', 0_2) \neq (0_1, 0_2)$ olduğu için $(x, 0_2) \in U[P_1 \times P_2]$ dir. $0_2 \notin U[P_2]$ olduğundan lemma 7 ile $(x, 0_2) \in U[P_1] \times P_2$ olup $x \in U[P_1]$ dir. Yani T_1 Pseudo-Arşimedyan dır. T_2'nin Pseudo- Arşimedyanlığı tamamen benzer şekilde gösterilir.

‘$\Leftarrow$’: T_1 ve T_2 Pseudo-Arşimedyan olsun. T ’nin Pseudo-Arşimedyan olduğunu göstermek için $(x,y),(x',y') \in P_1 \times P_2$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $(x,y)^{(n)_T} \geq (x',y')$ ve $(x',y') \neq (0_1,0_2)$ olsun. $x' \neq 0_1$ ise $(x,y)^{(n)_T} = \left(x^{(n)_{T_1}}, y^{(n)_{T_2}}\right) \geq (x',y')$ olduğundan $x^{(n)_T} \geq x'$ olup $x' \neq 0_1$ ve T_1 Pseudo-Arşimedyan olduğu için $x \in U[P_1]$ bulunur. Lemma 7 kullanılırsa $(x,y) \in U[P_1 \times P_2]$ olur ki bu T ’nin Pseudo-Arşimedyan olduğu anlamına gelir.

2.7. Kısaltma Özelliği

Tanım 31: Bir P sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerindeki bir T t-norma kısaltmalıdır denir:
$\Leftrightarrow$ Her $x,y,z \in P$ ve $x \notin Z[P]$ için $T(x,y) = T(x,z)$ ise $y = z$ dir.

Önerme 10: T, bir L sınırlı kafesi üzerinde bir t-norm olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.
(*i*) Her $x,y,z \in L$ ve $x \notin Z[L]$ için $y < z$ ise $T(x,y) < T(x,z)$.
(*ii*) Her $x,y,z \in L$ ve $x \notin Z[L]$ için $T(x,y) = T(x,z) = T(x, y \wedge z)$ ise $y = z$.

İspat :
(*i*) $\Rightarrow$(*ii*)
$T(x,y) = T(x,z) = T(x, y \wedge z)$ olsun. $y < z$ veya $z < y$ ise (*i*) şıkkından dolayı $T(x,y) < T(x,z)$ veya $T(x,z) < T(x,y)$ çelişkisi bulunur. $y \,||\, z$ ise $y \wedge z < y$ olup $T(x, y \wedge z) < T(x,y)$ çelişkisi olur. Böylece $y = z$ olmak zorundadır.
(*ii*) $\Rightarrow$(*i*)
Benzer şekilde gösterilir.

Sonuç 5 : T, C sınırlı zinciri üzerinde bir t-norm olsun. T ’ nin kısaltmalı olması için gerek ve yeter şart her $x,y,z \in C$ ve $x \neq 0$ için $y < z$ ise $T(x,y) < T(x,z)$ dir.

Önerme 11: P_1 ve P_2 iki sınırlı kısmen sıralı küme ve T_1 ve T_2 onlar üzerinde iki t-norm olsun. Önerme 6’ da verildiği gibi $T = T_1 \times T_2$ direkt çarpımı göz önüne alınsın.
T kısaltmalıdır $\Leftrightarrow$ T_1 ve T_2 kısaltmalıdır.

İspat :

'$\Rightarrow$': T kısaltmalı, $x,y,z \in P_1$ ve $x \notin Z[P_1]$ için $T_1(x,y) = T_1(x,z)$ olsun. Buradan,

$(T_1(x,y), T_2(1_2,0_2)) = (T_1(x,z), T_2(1_2,0_2))$ olduğundan

$T((x,1_2),(y,0_2)) = T((x,1_2),(z,0_2))$ olur.

$x \notin Z[P_1]$ ve $1_2 \notin Z[P_2]$ olduğu için Lemma 6' dan $(x,1_2) \notin Z[P_1 \times P_2]$ dır.

T kısaltmalı olduğu için $(y,0_2) = (z,0_2)$ olup $y = z$ elde edilir ki bu T_1' in kısaltmalı olduğunu gösterir.

Benzer şekilde T_2 nin de kısaltmalı olduğu gösterilir.

'$\Leftarrow$': T_1 ve T_2 kısaltmalı, $(x,x'),(y,y'),(z,z') \in P_1 \times P_2$ ve $(x,x') \notin Z[P_1 \times P_2]$ için $T((x,x'),(y,y')) = T((x,x'),(z,z'))$ olsun. Buradan $T_1(x,y) = T_1(x,z)$ ve $T_2(x'y') = T_2(x',z')$ olur. Lemma 6' dan dolayı $x \notin Z[P_1]$ ve $x' \notin Z[P_2]$ bulunur.

T_1 ve T_2 kısaltmalı olduğundan $y = z$ ve $y' = z'$ dir. Yani $(y,y') = (z,z')$ olup T kısaltmalıdır.

Örnek 13:

(i) T_W t-normu kısaltma özelliğini sağlamaz. Gerçekten, $T_W\left(\frac{1}{2},\frac{3}{10}\right) = T_W\left(\frac{1}{2},\frac{4}{10}\right)$ olup $\frac{3}{10} \neq \frac{4}{10}$ dir.

(ii) $T_\wedge$ t-normu kısaltma özelliğini sağlamaz. Gerçekten, $T_\wedge\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right) = T_\wedge\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$ olup $\frac{3}{5} \neq \frac{4}{5}$ dir.

(iii) T_P t-normu kısaltma özelliğini sağlar. Gerçekten, $x \in (0,1]$ ve $(y,z) \in [0,1]^2$ için $T_P(x,y) = T_P(x,z)$ olsun. Buradan,

$x.y = x.z$ olup $x.y - x.z = 0$ dir.

$x(y-z) = 0$ ve $x \in (0,1]$ olduğundan

$y - z = 0$ ise $y = z$ dir.

$(iv)\, T_L$ t-normu kısaltma özelliğini sağlamaz. Gerçekten,

$$T_L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\max\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-1,0\right)=\max\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-1,0\right)=T_L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right) \text{ olup } \frac{1}{3}\neq\frac{1}{5} \text{ dir.}$$

(v) T^{nM} t-normu göz önüne alınsın.

T^{nM} t-normu kısaltma özelliğini sağlamaz. Gerçekten, $T^{nM}\left(\frac{1}{2},\frac{2}{5}\right)=T^{nM}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{10}\right)$ olup $\frac{2}{5}\neq\frac{3}{10}$ dir.

(vi) $T:[0,1]^2\to[0,1]$

$$T(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x.y}{2} & , \quad (x,y)\in[0,1)^2\\ \min(x,y), & \text{Aksi takdirde,}\end{cases}$$

t-normu kısaltma özelliğini sağlar. Gerçekten, $x\in(0,1]$ ve $(y,z)\in[0,1]^2$ için $T(x,y)=T(x,z)$ olsun. Buradan

$\frac{x.y}{2}=\frac{x.z}{2}\Rightarrow x.y=x.z\Rightarrow x(y-z)=0$ dir. $x\neq 0$ olduğundan $y=z$ elde edilir.

2.8. T-normların Direkt Çarpımları

Teorem 4: $(L_1,\leq_1,\wedge_1,\vee_1,0_1,1_1)$ ve $(L_2,\leq_2,\wedge_2,\vee_2,0_2,1_2)$ iki sınırlı kafes ve $T=T_1\times T_2$, $L_1\times L_2$ sınırlı kafesi üzerinde bir t-norm olsun. T, L_1 üzerindeki T_1 t-normu ve L_2 üzerindeki T_2 t-normunun direkt çarpımı olarak verilsin.

T_1 ve T_2 kısmi dönüşümleri supremum morfileridir $\Leftrightarrow$ T nin kısmi dönüşümleri supremum morfileridir.

İspat :

'$\Rightarrow$': $x,y,z\in L_1$ ve $x',y',z'\in L_2$ olsun. T_1 ve T_2 'nin kısmi dönüşümleri supremum morfisi olduğundan;

$T_1(x,y\vee z)=T_1(x,y)\vee T_1(x,z)$ ve $T_2(x',y'\vee z')=T_2(x',y')\vee T_2(x',z')$ dır. Buradan;

$\left(T_1(x, y \vee z), T_2(x', y' \vee z')\right) = \left(T_1(x,y) \vee T_1(x,z), T_2(x',y') \vee T_2(x',z')\right)$

$T_1 \times T_2\left((x,y), T_1 \times T_2\left((y \vee z),(y' \vee z')\right)\right) = \left(T_1(x,y), T_2(x',y') \vee T_1(x,z), T_2(x',z')\right)$

$T_1 \times T_2\left((x,y), T_1 \times T_2\left((y,y'),(z,z')\right)\right) = T_1 \times T_2\left((x,x'),(y,y')\right) \vee T_1 \times T_2\left((x,x'),(z,z')\right)$ olup böylece $T_1 \times T_2$ 'nin kısmi dönüşümleri supremum morfileridir.

'$\Leftarrow$': $(x_1,x_2) \in L_1 \times L_2$ ve $(y_1,y_2) \in L_1 \times L_2$ olsun.

$T\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = T\left((x_1,0_2) \vee (0_1,x_2),(y_1,0_2) \vee (0_1,y_2)\right)$

$(x_1,0_2) \wedge (0_1,y_2) = (0_1,x_2) \wedge (y_1,0_2) = (0_1,0_2)$ olduğu için,

$T\left((x_1,0_2),(0_1,y_2)\right) = T\left((0_1,x_2),(y_1,0_2)\right) = (0_1,0_2)$ dır.

T nin kısmi dönüşümü supremum morfisi olduğu için,

$T\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = T\left((x_1,0_2),(y_1,0_2)\right) \vee T\left((0_1,x_2),(0_1,y_2)\right)$ dır.

$T \leq T_\wedge$ olduğundan

$T\left((x_1,0_2),(y_1,0_2)\right) \leq (x_1,0_2) \wedge (y_1,0_2) = (x_1 \wedge_1 y_1, 0_2)$

Benzer şekilde $T\left((0_1,x_2),(0_1,y_2)\right) \leq (0_1, x_2 \wedge_2 y_2)$

Böylece $T\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = \left(T_1(x_1,y_1), T_2(x_2,y_2)\right)$ olan T_1 ve T_2 dönüşümleri tanımlanabilir. T_1 ve T_2 dönüşümlerinin birer t-norm olduğu kolayca gösterilebilir.

T nin kısmi dönüşümü supremum morfisi olduğu için,

$(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2) \in L_1 \times L_2;$

$T\left((x_1,x_2),(y_1,y_2) \vee (z_1,z_2)\right) = T\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) \vee T\left((x_1,x_2),(z_1,z_2)\right)$

olur ve böylece

$\left(T_1(x_1, y_1 \vee_1 z_1), T_2(x_2, y_2 \vee_2 z_2)\right) = \left(T_1(x_1,y_1) \vee_1 T_1(x_1,z_1), T_2(x_2,y_2) \vee_2 T_2(x_2,z_2)\right)$.

Böylece T_1 ve T_2 nin kısmi dönüşümleri birer supremum morfisidir.

Teorem 5: L_1 ve L_2 iki sınırlı kafes ve $T = T_1 \times T_2$, $L_1 \times L_2$ sınırlı kafesi üzerinde bir t-norm olsun. T, L_1 üzerindeki T_1 t-normu ve L_2 üzerindeki T_2 t-normunun direkt çarpımı olarak verilsin.

T_1 ve T_2 kısmi dönüşümleri infimum morfisidir $\Leftrightarrow T$ nin kısmi dönüşümü infimum morfisidir.

İspat : Teorem 4'ün ispatının duali olarak yapılır.

2.9. Birim Aralık Üzerindeki T-normlar

Teorem 6: $T = T_1 \times T_2$, $\left([0,1]^2, \leq\right)$ üzerinde bir t-norm olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i **)** T, $\left([0,1], \leq\right)$ üzerindeki T_1 ve T_2 t-normlarının direkt çarpımıdır.

(ii **)** T ' nin kısmi dönüşümleri infimum morfileridir.

(iii **)** T ' nin kısmi dönüşümleri supremum morfileridir.

$\left([0,1]^2, \leq\right)$ T_W t-normu $\left([0,1], \leq\right)$ üzerindeki t-normların direkt çarpımı değildir. $x = 0,2$, $y = 0,8$, $z = 0,1$, $w = 1$ için;

$T_W\left(x, y\right) \vee T_W\left(z, w\right) = 0 \vee 0,1 = 0,1$ öte yandan $T_W\left(x \vee z, y \vee w\right) = T_W\left(0,2\ ,\ 1\right) = 0,2$ olduğundan T_W supremum morfisi değildir.

$\left([0,1], \leq\right)$ üzerindeki sürekli t-normların direkt çarpımları da süreklidir.

Bir P sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde her $\left(x, y\right) \in P^2$ için $x \leq y \Leftrightarrow \varphi\left(x\right) \leq \varphi\left(y\right)$ koşulunu sağlayan sıra-korur bir φ otomorfisi aşağıdaki şekilde P üzerindeki bir T t-normunu P üzerindeki bir T_φ t-normuna dönüştürür:

$T_\varphi\left(x, y\right) = \varphi^{-1}\left(T\left(\varphi\left(x\right), \varphi\left(y\right)\right)\right)$.

Herhangi bir φ otomorfisi ve onun tersi olan φ^{-1} kesin artandır.

Önerme 12: $[0,1]^2$ üzerinde tanımlı bir φ dönüşümünün otomorfi olması için gerek ve yeter şart $[0,1]$ üzerinde iki tane φ_1 ve φ_2 otomorfisi vardır öyleki,

$\left(\text{her } x, y \in [0,1] \text{ için } \varphi\left(x, y\right) = \left(\varphi_1\left(x\right), \varphi_2\left(y\right)\right)\right)$veya

$\left(\text{her } x, y \in [0,1] \text{ için } \varphi\left(x, y\right) = \left(\varphi_2\left(x\right), \varphi_1\left(y\right)\right)\right)$.

İspat :

'$\Rightarrow$'

$\varphi : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ bir otomorfi ve $\varphi\left(1,0\right) = \left(a, b\right)$ olsun. $\left(a, b\right) = \left(1,0\right)$ veya $\left(a, b\right) = \left(0,1\right)$ dir. Gerçekten:

Kabul edelim ki, $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olsun. Bu takdirde, $\left(a, \frac{b}{2}\right) \| \left(\frac{a}{2}, b\right)$ dır. $\left(a, \frac{b}{2}\right) < (a,b) = \varphi(1,0)$ olduğu için, $\varphi^{-1}\left(a, \frac{b}{2}\right) < (1,0)$ olur. Benzer şekilde, $\varphi^{-1}\left(\frac{a}{2}, b\right) < (1,0)$ dır. Buradan $\varphi^{-1}\left(a, \frac{b}{2}\right)$ ve $\varphi^{-1}\left(\frac{a}{2}, b\right)$ kıyaslanabilirdir. Bu ise $\left(a, \frac{b}{2}\right) \| \left(\frac{a}{2}, b\right)$ olması ile çelişir.

Böylece ya $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

$b = 0$ olsun. $a = 1$ olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki, $a \neq 1$ olsun.

$(a,0) < (1,0)$ olduğu için, $\varphi^{-1}(a,0) = (1,0) < \varphi^{-1}(1,0)$ dır.

Böylece bir $0 < c \leq 1$ elemanı için $\varphi^{-1}(1,0) = (1,c)$ dir. $\left(1, \frac{c}{2}\right) \| \left(\frac{1}{2}, c\right)$, $\varphi\left(1, \frac{c}{2}\right) < (1,0)$ ve $\varphi\left(\frac{1}{2}, c\right) < (1,0)$ dır. Buradan $\varphi\left(1, \frac{c}{2}\right)$ ve $\varphi\left(\frac{1}{2}, c\right)$ kıyaslanabilirdir. Bu ise $\left(1, \frac{c}{2}\right) \| \left(\frac{1}{2}, c\right)$ olması ile çelişir. Böylece $a = 1$ dir.

Benzer şekilde $b = 1$ olduğunda $a = 0$ olduğu gösterilir.

Yukarıda elde edilenlerden aşağıdaki sonuç çıkarılabilir:

$\varphi \downarrow ([0,1] \times \{0\})$ ve $\varphi \downarrow (\{0\} \times [1,0])$ dönüşümleri $[0,1]$ üzerinde birer otomorfidir.

$\varphi(1,0) = (1,0)$ ise $\varphi(0,1) = (0,1)$ dir.

φ_1 ve φ_2 , $[0,1]$ üzerinde iki otomorfi olsun öyle ki $x, y \in [0,1]$ için,

$\varphi(x,0) = (\varphi_1(x), 0)$, $\varphi(0,y) = (0, \varphi_2(y))$.

$(x,y) \in (0,1]^2$ ise $(x,0) < (x,y)$ ve $(0,y) < (x,y)$ dir. $\varphi(x,0) = (\varphi_1(x), 0) < \varphi(x,y)$ ve $\varphi(0,y) = (0, \varphi_2(y)) < \varphi(x,y)$ dir. Böylece $(\varphi_1(x), \varphi_2(y)) \leq \varphi(x,y)$ elde edilir.

$(\varphi_1(x), \varphi_2(y)) < \varphi(x,y)$ olduğunu varsayalım.

$\varphi^{-1}(\varphi_1(x), \varphi_2(y)) = (x', y') < (x,y)$ ve $(\varphi_1(x), 0) < (\varphi_1(x), \varphi_2(y))$ olduğu için; $\varphi^{-1}(\varphi_1(x), 0) = (x,0) < \varphi^{-1}(\varphi_1(x), \varphi_2(y))$ dir.

Benzer şekilde,

$\varphi^{-1}\left(0,\varphi_2\left(y\right)\right)=\left(0,y\right)<\varphi^{-1}\left(\varphi_1\left(x\right),\varphi_2\left(y\right)\right)$ ve $\left(x,y\right)\leq\varphi^{-1}\left(\varphi_1\left(x\right),\varphi_2\left(y\right)\right)$ olduğundan $\varphi\left(x,y\right)\leq\left(\varphi_1\left(x\right),\varphi_2\left(y\right)\right)$ çelişkisi görülür.

Sonuç olarak $\left(x,y\right)\in\left[0,1\right]^2$ için $\varphi\left(x,y\right)=\left(\varphi_1\left(x\right),\varphi_2\left(y\right)\right)$ dir.

Önerme 13: T_1 ve T_2 , $\left[0,1\right]$ üzerinde t-normlar ve onların direkt çarpımları T olsun. $\left[0,1\right]^2$ üzerindeki herhangi bir φ otomorfisi için T_φ t-normu $\left[0,1\right]$ üzerindeki iki t-normun direkt çarpımıdır.

İspat : $\left(x,y\right)\in\left[0,1\right]^2$ için $\varphi\left(x,y\right)=\left(\varphi_1\left(y\right),\varphi_2\left(x\right)\right)$ durumu için ispat verilecektir.

$$\begin{aligned}
T_\varphi\left(\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)\right)&=\varphi^{-1}\left(T\left(\varphi\left(x_1,y_1\right),\varphi\left(x_2,y_2\right)\right)\right)\\
&=\varphi^{-1}\left(T\left(\left(\varphi_1\left(y_1\right),\varphi_2\left(x_1\right)\right),\left(\varphi_1\left(y_2\right),\varphi_2\left(x_2\right)\right)\right)\right)\\
&=\varphi^{-1}\left(T_1\left(\varphi_1\left(y_1\right),\varphi_1\left(y_2\right)\right),T_2\left(\varphi_2\left(x_1\right),\varphi_2\left(x_2\right)\right)\right)\\
&=\left(\varphi_2^{-1}\left(T_2\left(\varphi_2\left(x_1\right),\varphi_2\left(x_2\right)\right)\right),\varphi_1^{-1}\left(T_1\left(\varphi_1\left(y_1\right),\varphi_1\left(y_2\right)\right)\right)\right)\\
&=\left(T_{2\varphi_2}\left(x_1,x_2\right),T_{1\varphi_2}\left(y_1,y_2\right)\right)
\end{aligned}$$

Böylece T_φ, $T_{2\varphi_2}$ ve $T_{1\varphi_1}$ ’ in direkt çarpımıdır.

3. BULGULAR ve SONUÇLAR

1. Herhangi bir P kısmen sıralı kümesi üzerinde tanımlı temel ve bazı özel t-normların idempotent, nilpotent, sıfır bölen elemanlarının kümesi belirlenerek hangilerinin arşimedyan özelliğini ve kısaltma kuralını sağladıkları ortaya kondu.
2. Bir tam kafes üzerinde tanımlı bir infimum morfisinin hangi durumda arşimedyan olacağı karakterize edildi.
3. Sınırlı kısmen sıralı kümelerin direkt çarpımı üzerinde t-normların direkt çarpımı verilerek, t-normların direkt çarpımlarının idempotent ve nilpotent elemanlar kümesi belirlendi.
4. Kısmen sıralı kümeler ve zincirlerin direkt çarpımlarının sıfır bölenleri ortaya kondu.
5. T-normların direkt çarpımları için yeni bir arşimedyan (pseudo-arşimedyan) özelliği verildi.

4. ÖNERİLER

Önerme 12 ve Önerme 13’ ün $[0,1]^n$ de hangi koşullar altında sağlanıp sağlanmadığı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Aczél, J., 1948. Sur les opérations definies pour des nombres réels. Bulletin de la societe chimique Mathematiques, France, 76, 59 – 64.

Aczél, J., 1961. Vorlesungen über funktionalgleichhungen und ihre anwendungen, Birkhäuser, Basel/Stuttgart, 331 s.

Agusti, J., Esteva, F., Garcia, P., Lopez de Mantaras, R. and Sierra, C., 1994. Local multi-modular expert systems valued logics in. Journal of statistical mechanics: Theory and experiment artificial intell. 6, 303-321.

Birkhoff, G., 1967. Lattice theory. American mathematical society colloquium publications, volume XXV, Rhode Island.

Brouwer, L.E.J., 1909. The select correspondence, 42s.

Cartan, E., 1930. La theorie des groupes finis et continus et l'analysis situs. Memorial des sciences mathematiques, 42, 1165-1226.

Clifford, A.H., 1954. Naturally totally ordered commutative semigroups. American mathematical society, 76, 631-646.

Climescu, A.C., 1946. Sur l'equation fonctionelle de l'associativite. Ecole polytechnic issy, 1, 1-16.

De Baets, B., 1995a. Oplossen van vaag relationele vergelijkingen: een orde theoretisch benadering. Doctoral dissertation, university of gent, 389 s.

De Baets, B., 1995b. Fuzzy set theory and advanced mathematical applications. An order-theoretic approach to solving sup-J- equations, Kluwer academic publishers, dordrecht, 67-87.

De Baets B. and Mesiar R., 1999. Tringular norms on product lattices. Fuzzy sets and systems, 104, 61-75.

De Cooman G. and Kerre E.E., 1994. Order norms on bounded partially ordered sets. Journal of fuzzy mathematics, 2, 281-310.

Drossos, C. and Navara, M., 1996. Generalized t-conorms and closure operators, in: Hans-jürgen zimmermann (edition). Proceedings 4th european congress on intelligent techniques and soft computing, volume 1, Aachen, Germany, 22, 26 s.

Frank, M.J., 1979. On the simultaneous associativity of $F(x,y)$ and $x+y-F(x,y)$. Aequations Mathematics, 19, 194 – 226.

Godo, L. and Sierra, C., 1988. A new approach to connective generation in the framework of expert systems using fuzzy logic. Proceedings 18th International symposium on multiple-valued logic, Palma de mallorca, Spain, The institute of electrical and electronics engineers computer society press, 157-162.

Goguen, J., 1967. L-fuzzy sets. Journal of mathematical analysis and applications, 18, 145-174s.

Gottwald, S., 1976. Untersuchungen zur mehrwertigen mengenlehre mathematik, Nachrichten, 72, 297-303.

Jenei, S., 1997. A more efficient method for defining fuzzy connectives, Fuzzy sets and systems 90, 25-35.

Klein-Barmen, F., 1943. Über gewisse halbverbande und kommutative semigruppen II. Zap mathematical institute 48, 715-734.

Klement, E.P., Mesiar, R. and Pap, E., 2000. Triangular norms, in preparation.

Ling, C., 1965. Representation of associative functions. Publications mathematicae debrecen 12, 189-212.

Mayor, G. and Torrens, J., 1993. On a class of operators for expert systems. International journal of intelligent systems 8, 771-778.

Menger, K., 1942. Statistical metrics, Proceedings national academy sciences of the United States of America, 28, 535-537.

Nguyen, H. and Walker, E., 1997. A first course in fuzzy logic. The chemical rubber company press, Boca Raton, Florida.

Ray, S., 1997. Representation of a boolean algebra by its triangular norms. Mathware soft comput. 4, 63-68.

Schweizer, B. and Sklar, A., 1963. Associative fuctions and abstract semigroups. Publicationes mathematicae debrecen, 10, 69-81.

Schweizer, B. and Sklar, A., 1983. Probabilistic metric spaces. Elsevier, Amsterdam.

Smutna, D., 1998. On a peculiar t-norm. Busefal 75, 60-67.

ÖZGEÇMİŞ

İlknur GENÇ, 24/11/1988 tarihinde Ardeşen/RİZE' de doğdu. İlköğretimini Ardeşen Mesut Karaoğlu İlköğretim Okulu'nda, Ortaöğretimini Ardeşen Yabancı Dil Ağırlıklı Lise'de tamamladı. 2007 yılında Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı. 2011 yılında bu bölümden mezun oldu. Yine aynı yıl Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Pedagojik Formasyon programına kaydoldu. 2012 yılında bu programdan mezun oldu. 2015 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı' nda tezli yüksek lisans programına kaydoldu.

2013 yılında Ardeşen Lokman Hekim Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi' ne Matematik Öğretmeni olarak atandı. 2017 yılında İstanbul Ataşehir İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü'ne atandı. Daha sonra İstanbul Küçükbakkalköy Kemal Berktan Ortaokulu'nda bir dönem görevlendirme çalıştıktan sonra aynı yıl İstanbul Prof. Faik Somer Spor Lisesi'ne atandı. Halen aynı kurumda görevine devam etmektedir. Evlidir.