

**T.C.**  
**RECEP TAYYIP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YARIM DÜZLEM ÜZERİNE OTURAN FONKSİYONEL  
DERECELENDİRİLMİŞ TABAKANIN TEMAS PROBLEMİ**

**MÜJGEN YAYLI**

**TEZ DANIŞMANI**

**DOÇ. DR. MURAT YAYLACI**

**II. DANIŞMAN**

**PROF. DR. AHMET BİRİNCİ**

**TEZ JÜRİLERİ**

**PROF. DR. VOLKAN KAHYA**

**DR. ÖĞR. ÜYESİ ERDAL ÖNER**

**DR. ÖĞR. ÜYESİ ZELİHA TONYALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**


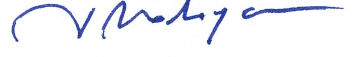



**RİZE-2019**

**Her Hakkı Saklıdır**

T.C.  
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YARIM DÜZLEM ÜZERİNE OTURAN FONKSİYONEL  
DERECELENDİRİLMİŞ TABAKANIN TEMAS PROBLEMİ**

Doç. Dr. Murat YAYLACI danışmanlığında, Müjgen YAYLI tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafından 03/05/2019 tarihinde İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	Unvanı Adı Soyadı	İmzası
Başkan	: Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ	
Üye	: Prof. Dr. Volkan KAHYA	
Üye	: Doç. Dr. Murat YAYLACI	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÖNER	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Zeliha TONYALI	

  
Doç. Dr. Ferhat KALAYCI  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ



## ÖNSÖZ

Bu çalışma Recep Tayyip Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

“Yarım düzlem üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın temas problemi” isimli tez çalışmasını bana öneren ve her aşamasında bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, öğrencisi olmaktan ve kendileri ile çalışmaktan onur duyduğum danışman hocalarım Sayın Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ'ye ve Sayın Doç. Dr. Murat YAYLACI'ya minnet ve şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca bana emeği geçen tüm hocalarımı saygıyla anar, kendilerine minnettar olduğumu belirtmek isterim. Tez çalışmam boyunca bilgi ve birikimlerinden faydalandığım Sayın Prof. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN'e, Sayın Prof. Dr. Volkan KAHYA'ya ve Sayın Prof. Dr. Ümit UZMAN'a teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında tezim ile ilgili birçok konuda yardım ve değerli fikirlerini benden esirgemeyen bilgi ve birikimlerinden her fırsatta yararlanabildiğim Sayın İnşaat Yüksek Mühendisi Merve Pembe KARABULUT ve Sayın Arş. Gör. Gökhan ADIYAMAN'a ayrıca teşekkürü bir borç bilirim. Tez çalışmasına beraber başladığım çalışmamın her bir bölümünde yanımda olan yüksek lisans eğitimim boyunca desteğini benden esirgemeyen değerli arkadaşım Merve ABANOZ'a teşekkürü borç bilirim.

Tez çalışmamın başarıya ulaşmasında katkısı olan değerli meslektaşlarım İnş. Müh. Ayşegül EYÜBOĞLU, İnş. Müh. Betül GÜLAY ve İnş. Müh. Tülay ADANUR'a teşekkür ederim. Öğrenim hayatım süresince beni sabırla destekleyen başta annem Zeliha YAYLI, babam Yavuz YAYLI ve ablam Figen KALYON'a müteşekkir olduğumu belirtir, çalışmanın ülkemize faydalı olmasını temenni ederim.

**Müjgen YAYLI**

## TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan “Yarım Düzlem Üzerine Oturan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakanın Temas Problemi” başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim.  
03/05/2019

  
Müjgan YAYLI

**Uyarı:** Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## ÖZET

### YARIM DÜZLEM ÜZERİNE OTURAN FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ TABAKANIN TEMAS PROBLEMİ

Müjgen YAYLI

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi  
Danışmanı: Doç. Dr. Murat YAYLACI

Bu çalışmada, simetrik iki yayılı yük ile yüklenmiş ve elastik yarım düzlem üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) tabakanın temas problemi, elastisite teorisine göre çözülmüştür. FD tabakanın kayma modülü, tabaka yüksekliği boyunca üstel bir fonksiyona bağlı olarak değişmektedir. Elastik yarım düzlem ise homojen olarak dikkate alınmıştır. Problemin çözümünde FD tabaka ve elastik yarım düzlemin kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir. Ayrıca ele alınan problemde tüm yüzeyler sürtünmesiz olarak kabul edilmiştir. Birinci bölümde, FD tabakalarda temas problemleri ile ilgili daha önce yapılmış bazı çalışmalar özetlenmiştir. Yine bu bölümde, elastisite teorisine ait temel denklemler ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak FD tabaka ve yarım düzlem için gerilme ve yer değiştirme bileşenleri elde edilmiştir. İkinci bölümde, ele alınan problemin tanımı yapılmış ve sınır şartları kullanılarak bir integral denklem elde edilmiştir. İntegral denklemin sayısal çözümü, Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu ile gerçekleştirilmiştir; temas uzunlukları ve temas gerilme yayılışları elde edilmiştir. Üçüncü bölümde, yük genişliği ve rijitlik değişiminin etkilerini incelemek üzere parametrik çalışma yapılmış ve sonuçlar tablolar ve grafiklerle verilerle irdelenmiştir. Dördüncü bölümde, çalışmadan çıkarılan sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

2019, 51 sayfa

**Anahtar Kelimeler:** Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabaka, Elastisite Teorisi, Temas Mekanığı, İntegral Denklem.

## ABSTRACT

### CONTACT PROBLEM OF A FUNCTIONALLY GRADED LAYER RESTING ON AN ELASTIC HALF PLANE

Müjgen YAYLI

Recep Tayyip Erdoğan University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Civil Engineering  
Master Thesis  
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat YAYLACI

In this study, contact problem of a functionally graded (FG) layer resting on an elastic half-plane, which is symmetrically loaded by two uniform distributed load is solved with the aid of the theory of elasticity. Shear modulus of the FG layer is assumed to vary exponentially through the thickness. The elastic half-plane is considered as homogeneous. In solution, the body forces of the FG layer and elastic half-plane are neglected. Besides, all surfaces are assumed to be frictionless. In the first chapter, some studies which are made on the contact problems of FG layers are summarized. In addition, general expressions of stress and displacement fields are obtained for the FG layer and the half- plane by using fundamental equations of theory of elasticity and integral transform techniques. In the second chapter, boundary conditions of given and an integral equation is obtained. The singular integral equation is solved numerically by using the Gauss-Jacobi integration formulation, and then contact areas and the contact pressure are determined. In the third chapter, a parametric study is performed to investigate the effect of the non-homogeneity parameter and the load width. The results are given in tabular and graphical form and discussed. In the fourth chapter, conclusions drawn from this study and some recommendations are given.

2019, 51 pages

**Keywords:** Functionally Graded Layer, Theory of Elasticity, Contact Mechanics, Integral Equation.

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	I
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	II
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VI
TABLolar DİZİNİ.....	VII
SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	VIII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Literatür Araştırması.....	2
1.3. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı.....	7
1.4. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi.....	8
1.4.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş (FD) Tabaka için Genel Denklemlerin Elde Edilmesi.....	9
1.4.2. Elastik Yarım Düzlem İçin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi.....	15
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	22
2.1. Problemin Tanımı.....	22
2.2. Problemin Çözümü.....	23
2.2.1. Kullanılacak Denklemler.....	23
2.2.2. Problemin Sınır Şartları.....	24
2.2.3. Katsayıların Belirlenmesi.....	25
2.2.4. İntegral Denklemin Elde Edilmesi.....	27
2.2.5. İntegral Denklemin Boyutsuzlaştırılması.....	30
2.2.6. İntegral Denklemin Sayısal Çözümü.....	31
3. BULGULAR.....	34
4. TARTIŞMA ve SONUÇLAR.....	45
5. ÖNERİLER.....	46
KAYNAKLAR.....	47
ÖZGEÇMİŞ.....	51

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<b>Şekil 1.</b>	Problemin geometrisi.....	22
<b>Şekil 2.</b>	Çeşitli rijitlik değişim parametresi değerleri için temas uzunluğunun $a_2/h$ değeri ile değişimi ( $a_1/h = 0, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ ).....	35
<b>Şekil 3.</b>	Çeşitli rijitlik değişim parametresi değerleri için temas uzunluğunun $a_2/h$ değeri ile değişimi ( $a_1/h = 0,05, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ ). ....	36
<b>Şekil 4.</b>	Çeşitli rijitlik değişim parametresi değerleri için temas uzunluğunun $a_1/h$ değeri ile değişimi ( $a_2/h = 1, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ ).....	37
<b>Şekil 5.</b>	Çeşitli rijitlik değişim parametresi değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki temas gerilme yayılışlarının $a_2/h$ değeri ile değişimi ( $a_1/h = 0, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ ), (a, b, c) .....	38
<b>Şekil 6.</b>	Çeşitli rijitlik değişim parametresi değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki temas gerilme yayılışlarının $a_2/h$ değeri ile değişimi ( $a_1/h = 0,05, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ ), (a, b, c) .....	39
<b>Şekil 7.</b>	Çeşitli rijitlik değişim parametresi değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki temas gerilme yayılışlarının $a_1/h$ değeri ile değişimi ( $a_2/h = 1, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ ), (a, b, c) .....	40
<b>Şekil 8.</b>	Çeşitli $a_2/h$ değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki temas gerilme yayılışları ( $a_1/h = 0, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ ), (a, b, c).....	41
<b>Şekil 9.</b>	Çeşitli $a_2/h$ değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki temas gerilme yayılışları ( $a_1/h = 0,05, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ ), (a,b,c).....	42
<b>Şekil 10.</b>	Çeşitli $a_1/h$ değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki temas gerilme yayılışları ( $a_2/h = 1, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ ), (a, b, c).....	43



## TABLULAR DİZİNİ

- Tablo 1.** Çeşitli rijitlik değişim parametresi değerleri için temas uzunluğunun  $a_2/h$  değeri ile değişimi ( $a_1/h = 0, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ ).....35
- Tablo 2.** Çeşitli rijitlik değişim parametresi değerleri için temas uzunluğunun  $a_2/h$  değeri ile değişimi ( $a_1/h = 0,05, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ ) .....36
- Tablo 3.** Çeşitli rijitlik değişim parametresi değerleri için temas uzunluğunun  $a_1/h$  değeri ile değişimi ( $a_2/h = 1, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ ).....37
- Tablo 4.** Çeşitli  $a_2/h$  ve  $\beta$  değerleri için yarı temas uzunluğu ( $b/h$ ) değişiminin karşılaştırılması ( $a_1/h = 0, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ ) (El-Borgi vd., 2006). .....44

## SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$b$	FD Tabaka ile Yarım Düzlem Arasındaki Yarı Temas Uzunluğu
$h$	FD Tabakanın Yüksekliği
$u, v$	Düzlem Halde Kartezyen Koordinatlardaki Yer Değiştirme Bileşenleri
$x, y$	Kartezyen Koordinatlar
$\sigma_x, \sigma_y$	Sırasıyla $x, y$ Eksenleri Doğrultusundaki Normal Gerilme Bileşenleri
$\tau_{xy}$	Kayma Gerilmesi Bileşeni
$P_0$	Yaylı Yükün Şiddeti
$\mu(y)$	FD Tabakanın Kayma Modülü
$\kappa$	Malzeme Sabiti
$\nu$	Poisson Oranı
$\partial$	Türev Operatörü
$\phi, \psi$	FD Tabaka için Ters Fourier Dönüşüm Fonksiyonları
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	$x, y$ Doğrultularındaki Uzama Şekil Değiştirme Bileşenleri
$\beta$	Rijitlik Değişim Parametresi

# 1. GENEL BİLGİLER

## 1.1. Giriş

Yapıların ve mekanik sistemlerin elemanları birbirleri ile temas halindedir. Bu temasın karakteri, cisimlerin gerilmeleri birbirlerine iletiş şekilleri, temas halindeki cisimlerde meydana gelen şekil değiştirmeler, temas uzunlukları ve temas bölgesindeki temas gerilmesi dağılımı yapının davranışında önemli rol oynamaktadır. Temas konusunun uygulama alanlarından bazıları temeller, karayolları, demiryolları, havaalanı pistleri, tahıl siloları, akaryakıt tankları, silindirik miller ve silindirik veya küresel bilyelerdir (Çömez, 2009).

Elastisite teorisinden elde edilen ifadeler elemanter teoriye göre daha kesin sonuçlar vermektedir. Mühendislik yapılarının temas problemlerinde, bilgisayar teknolojisi ve sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmesine bağlı olarak elastisite teorisi yardımıyla elde edilen çözümlerde artış sağlanmıştır.

Bilimin ve teknolojinin gelişmesiyle birlikte geçmişte kullanılan malzemelere oranla daha fonksiyonel özelliğe sahip malzeme ihtiyacı giderek artmaktadır. Bu bağlamda uluslararası literatürde Functionally Graded Material (FGM) olarak adlandırılan, Türkçe’de ise Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FDM) olarak tanımlanan ve çoğunlukla metal-seramik çiftinden oluşan kompozit malzemeler geliştirilmiştir (Öztürk, 2009).

Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme, mekanik özellikleri bir noktadan diğer bir noktaya düzenli ve sürekli olarak değişen heterojen özelliğe sahip yapılardır. Bu özelliklerinden dolayı, malzeme ara yüzleri arasında, malzeme özelliklerinin süreksizliğinin yol açtığı çatlak oluşumu, tabakalar arası oluşan gerilmeler ve yüksek sıcaklık ortamlarında oluşan ısıl gerilme yoğunlaşmalarının yol açtığı problemlerin giderilmesinde kullanılabilirler. FDM’ler iki farklı malzeme içerirler. Bu malzemelerden birincisi, yüksek sıcaklıktaki çalışma ortamındaki ağır ısıl yüke dayanması için seramik ve ikincisi ise yapısal rijitliği korumak için hafif bir metaldir. İki farklı malzemenin uyumlu şekilde çalışabilmesi için malzeme arası geçişler ani

değildir. Bu sayede malzemenin yapı özellikleri, sabit sayısal değerler olarak değil, fonksiyonlar ile ifade edilmektedir.

Yüzey gerilmelerini azaltma özelliklerinden dolayı FDM'ler, ortaya çıktıklarından itibaren havacılık, elektronik, enerji, kimya mühendisliği, optik malzemeler ve biyomedikal mühendisliği olmak üzere çok geniş çerçevede uygulama alanı bulmuşlardır (Abanoz, 2018)

FDM'lerin avantajlarını ve dezavantajlarını aşağıdaki şekilde özetlemek mümkündür:

Avantajları:

- a) Korozyon dirençleri daha yüksektir.
- b) Bünyelerinde farklı malzemelerin üstün özellikleri bir araya getirilmiştir.
- c) Biyolojik dokularla diğer geleneksel malzemelere göre daha yüksek uyumluluk göstermektedirler.
- d) Termal bariyer kaplamalarda termal yorulma ömrünü uzatırlar.

Dezavantajları:

- a) Özel üretim teknikleri gerektirirler ve pahalıdırlar.
- b) Birçok malzeme bileşenin bir arada olması nedeniyle çatlak oluşumuna müsaittirler (Öner, 2017).

## 1.2. Literatür Araştırması

Temas problemleri ile ilgili ilk çalışmalar Heinrich Hertz tarafından 1882 yılında yazılan "On The Contact of Elastic Solids" adlı makale ile başladığı söylenebilir (Johnson, 1985). Hertz temas halindeki iki elastik cismin dengesini, temas bölgesinin eliptik olduğunu kabul ederek incelemiştir, temas gerilmesi ve şekil değiştirmeler için formülasyon geliştirmiştir. Bulduğu sonuçları farklı geometriye sahip problemlerde uygulamıştır. Bu tip problemler Hertz temas problemi olarak isimlendirilmiştir.

Kompleks değişkenler yönteminin Muskhelishvili tarafından geliştirilmesi (Muskhelishvili, 1953) ve Sneddon'un integral dönüşüm tekniklerini elastisite teorisinde kullanmasıyla (Sneddon, 1951) temas problemleri üzerine yapılan çalışmalar yoğunlaşmıştır. Galin'in "Contact problems in the Theory of Elasticity" adlı eserinde temas problemi ile ilgili çalışmaların 1950'li yıllara kadar olan tarihçesi ve çözüm yöntemleri detaylarıyla verilmiştir (Galin, 1961). İntegral dönüşüm tekniklerinin temas problemlerine uygulanma yöntemleri ise Uffliand'ın eserinde ortaya konmuştur (Uffliand, 1965).

Koizumi (1993) fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin farklı üretim yöntemlerini ele almıştır. FDM, katmanlı malzemelerin sürekli değişen bir kompozisyonda ve derecelendirilmiş bir yapıda birbiriyle birleşmesi ile oluşur. Malzemeler arası ani olmayan geçişler katmanlar arasındaki gerilme dağılımının da sürekliliğini sağlar. FDM'lerde temas gerilmeleriyle ilgili de literatürde pek çok çalışma yer almaktadır.

Bilgisayar teknolojisindeki ve sayısal çözüm metotlarındaki gelişmelere paralel olarak bu alanda yapılan çalışmaların yaygınlığı artmıştır. Temas mekaniğinde tabakaların FD olmasına ilişkin literatürde yapılan çalışmalar aşağıda özetlenmektedir.

Giannakopoulos ve Suresh (1997a-b); düz, konik ve küresel rijit pançlar aracılığıyla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde temas gerilmelerini incelemişlerdir.

Guler ve Erdoğan (2004, 2007), elastik yarım düzlem üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş özellikteki tabakanın sürtünmeli temas problemini incelemişlerdir. Kayma modülü, derinliği boyunca üstel olarak değişen tabakaya, düşey ve yatay kuvvetler dikdörtgen ve eğrisel profillerde olan değişik şekillerdeki pançların aracılığıyla etki ettirilmiştir. Problem integral dönüşüm tekniği kullanılarak bir tekil integral denkleme dönüştürülerek gerilme yayılışları elde edilmiştir.

Ke ve Wang (2006, 2007), elastik yarım düzlem üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş özellikteki tabakanın sürtünmeli temas problemini, transfer matris yöntemini ve integral dönüşüm tekniklerini beraber kullanarak incelemişlerdir.

Yang ve Ke (2008), silindirik rijit bir panç altındaki kaplama tabakası-FD tabaka-alt tabaka yapısı için iki boyutlu sürtünmesiz temas problemini incelemişlerdir. Kaplama tabakası ve alt tabaka, farklı fiziksel özelliklere sahip homojen malzemelerdir. Ara tabaka kalınlık boyunca keyfi olarak değişen kayma modülüne sahiptir.

Liu ve Wang (2008), eksenel simetrik sürtünmesiz bir panç aracılığıyla yüklenmiş FD kaplamalı yarım düzlemin temas problemini incelemişlerdir. FD kaplamanın kayma modülünün üstel bir fonksiyon, Poisson oranının ise sabit olduğu kabul edilmiştir. Hankel integral dönüşüm tekniği kullanılarak eksenel simetrik sürtünmesiz temas problemi, Cauchy tipi tekil bir integral denkleme indirgenmiştir. Bu denklemler sayısal olarak çözümlenerek; temas gerilmesi, temas yarıçapı ve pançın kaplamaya girme derinliği çeşitli panç profilleri için hesaplanmıştır.

El-Borgi vd. (2006, 2014), elastik yarım düzlem üzerine oturan yayılı yük etkisindeki fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmesiz ve sürtünmeli temas problemini incelemişlerdir. Homojen olmayan elastik tabakanın kayma modülünün derinliği boyunca üstel olarak değiştiği kabul edilmiştir.

Choi (2009), sürtünmeli kayan düz bir panç aracılığıyla yüklenmiş, FD bir tabakanın temas problemini incelemiştir. Sürtünme katsayısının sabit olduğu ve FD tabakanın alt tarafının sağlam bir temel üzerine sıkıca bağlı olduğu kabul edilmiştir. FD tabakanın kayma modülü üstel bir değişim ile temsil edilirken Poisson oranı sabit tutulmuştur.

Apatay (2010), fonksiyonel derecelendirilmiş malzemedan yapılan bir kaplamada yüzey altında, temas yüzeyindeki düzgün profilli sürtünmeli rijit zımba etkisiyle oluşan gerilme dağılımlarını hesaplamak için tekil integral denklemlere dayalı bir yöntem geliştirmişlerdir. Çalışmada; düzlem elastisite durumu ele alınmış ve Poisson oranının, homojen gövde ve FDM kaplama için aynı olduğu kabul edilmiştir.

Aizikovich vd. (2011), derinlik boyunca rastgele değişen özelliklere sahip malzemeler için temas problemlerinin verimli bir şekilde çözümünü veren yaklaşık analitik bir yöntem geliştirmişlerdir.

FD malzemelerle kaplı elastik olarak benzer iki silindirin yuvarlanmalı temas problemi Guler vd. (2012) tarafından ele alınmıştır. Tekil integral denklem yaklaşımı problemin temel denklemlerini çıkarmak için kullanılmıştır. Çözümde temel denklemler, Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonu ile cebirsel denklem sistemine indirgenmiştir. Mekanik özelliklerin, kaplama kalınlığının ve dış yüklerin; yüzey gerilme bileşenleri, sürtünme oranı ve güç kaybı üzerine etkilerini incelemek için kapsamlı bir parametrik çalışma yapılmıştır.

Chen ve Chen (2012), derecelendirilmiş bir tabaka ile kaplı elastik yarım düzlem ve rijit pañç arasındaki temas davranışlarını incelemişlerdir. Temas ara yüzündeki yer değiştirmelerin ve normal gerilmelerin ilişkisini tanımlayan temel denklem, Fourier dönüşümü ve Transfer matrisi yöntemi ile elde edilmiştir.

Volkov vd. (2013), düz bir tabanı olan dairesel bir pañçın yumuşak FD elastik bir tabakaya girmesi durumundaki temas problemini irdelemişlerdir. Çalışmada, FD tabakanın elastik özelliklerinin rastgele olarak derinliğe göre değiştirdiği, üzerine oturduğu temelin elastik olduğu ancak tabakadan daha rijit olduğu varsayılmıştır.

Çömez (2013, 2014, 2015, 2019 ), farklı geometriler için FD tabakalarda temas problemlerini ele almıştır. Yaptığı bu çalışmalarda, Winkler zemine oturan FD tabaka, FD iki tabakalı kirişin ve rijit zemine oturan FD tabaka için sürekli ve süreksiz temas problemlerini elastisite teorisini kullanarak çözmüştür. Tabakalar, rijit silindirik bir pañç aracılığıyla tekil yükle ve yayılı yükle yüklenmiştir. Çalışmalarda, Poisson oranı sabit olarak alınmış ve elastisite modülünün tabakanın kalınlığı boyunca üstel olarak değiştirdiği varsayılmıştır.

Nikbakht vd. (2014), FD sonlu boyutlu bir plaka ve rijit küresel bir pañç arasındaki temas problemini incelemişlerdir. Çalışmada ele alınan plaka, altta sünek

(metal) bir faz ve üst yüzeyde kırılğan (seramik) bir fazdan oluşmaktadır. Rijit pañç plakanın seramik açısından daha zengin olan üst yüzeyine etki etmektedir.

Gün ve Gao (2014), sürtünmeli homojen olmayan, izotropik ve lineer elastik FD malzemeli temas problemleri için kuadratik bir sınır elemanı formülasyonu geliştirmişlerdir. Çalışmada; temas koşulları altında sonsuz sürtünme, sürtünmesiz ve Coulomb sürtünmesi de dahil olmak üzere temas durumları için farklı denklem sistemleri birleştirilmiştir.

Yan ve Li (2015), FD bir tabaka ile elastik bir tabaka arasında sürtünmesiz ayrılmalı temas problemini incelemişlerdir. Çalışmada; FD tabakanın izotropik olduğu kabul edilmiş, tabakanın kayma modülü kalınlık boyunca üstel bir fonksiyona bağlı olarak değişmektedir. Çalışma sonucunda, temas gerilmeleri ve temas bölgeleri için sayısal sonuçlar çeşitli boyutsuz büyüklükler için verilmiştir.

Liu vd. (2016), rijit bir blok aracılığıyla yüklenmiş FD tabaka için eksenel simetrik temas problemini incelemişlerdir. Çalışmada, rijit blok profilinin silindirik ve küresel olması durumları irdelenmiştir.

Çömez vd. (2016, 2018) tarafından , rijit silindirik bir blok aracılığıyla yüklenmiş iki FD tabakanın ayrılmalı temas problemi, elastik yarım düzleme oturan ve rijit bir pañç aracılığıyla yüklenmiş FD tabakanın sürtünmeli temas problemi, iki rijit silindirik pañç ile mesnetlenmiş ve rijit silindir bir pañçla yüklenmiş FD tabakanın temas problemi ve rijit pañç vasıtasıyla yüklenmiş iki elastik çeyrek düzleme oturan FD tabakanın ayrılmalı temas problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir. Çözümde tabakaların kayma modüllerinin kalınlık boyunca üstel bir fonksiyona bağlı olarak değiştiği kabul edilmiştir. Çalışma sonucunda rijitlik değişim parametresinin temas gerilmelerine ve temas bölgesinin büyüklüğüne etkisi araştırılmıştır.

Hes (2016), rijit pañç ile homojen olmayan FD yarım düzlem arasındaki eksenel simetrik ve sürtünmesiz temas problemlerinin çözümü için, üç boyutlu temas problemlerinin doğru tanımlanmış bir Winkler temeli olan tek boyutlu problemlerle eşleştirilebileceğini gösteren bir yöntem sunmuştur.



Adıyaman vd. (2016, 2017) tarafından , homojen iki çeyrek düzlem üzerine ve rijit zemine oturan FD tabakanın ayrılmalı ve ayrılmaz temas problemi incelenmiştir. Çalışmada, FD tabakanın kayma modülü üstel bir fonksiyona bağlı olarak değişmektedir. Malzemenin rijitlik değişim parametresinin temas gerilmelerine ve temas bölgesinin uzunluğuna etkisi incelenmiştir.

Balcı vd. (2017) tarafından, FD bir kaplamadan ve homojen alt tabakadan oluşan termoelastik temas problemi incelenmiştir. Çalışmada, ısı üretimi ile sürtünmeli temasa maruz bırakılan fonksiyonel derecelendirilmiş kaplamalardaki yüzey altı gerilmelerinin hesaplanması için bir sonlu eleman yöntemi önerilmiştir. Sunulan sonuçlar, çeşitli geometrik parametrelerin ve malzeme parametrelerinin yüzey altı gerilmeleri üzerindeki etkilerini göstermektedir.

Wagih vd. (2019) tarafından, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak rijit küresel panç ile bastırılan fonksiyonel olarak derecelendirilmiş bir elastoplastik tabakanın temas problemi incelenmiştir.

### **1.3. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı**

Bu çalışmada, elastik yarım düzlem üzerine oturan FD tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir. Problemden FD tabakaya üstten simetrik şekilde iki yayılı yük etki ettirilmiştir. Çözümde tüm yüzeyler sürtünmesiz kabul edilip FD tabakanın ve elastik yarım düzlemin kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir.

Çalışmanın amacı, FD tabaka-yarım düzlem arasındaki temas mesafelerinin ve temas gerilmelerinin farklı yükleme ve malzeme özelliklerine göre belirlenmesidir.

Birinci bölümde, FDM'lerin özellikleri ile ilgili bilgiler verilmiş, temas problemlerinin tarihsel gelişiminden bahsedilmiş ve literatür özeti sunulmuştur. Ayrıca, elastisite teorisine ait temel denklemler ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak, gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin genel denklemleri elde edilmiştir.

İkinci bölümde, problemin tanımı yapılmıştır. FD tabaka ve yarım düzlem için elde edilen gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerine sınır şartları uygulanarak FD tabaka ve yarım düzlem için altı bilinmeyenli altı tane cebrik denklem elde edilmiştir. Bu denklem sisteminin çözümünde bilinmeyen katsayılar elde edilmiştir. Elde edilen bu katsayılarda FD tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas gerilmeleri bilinmeyenlerdir. FD tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas mesafesi boyunca tabakanın düşey yer değiştirme fonksiyonunun türevinin, yarım düzlemin düşey yerdeğiştirme fonksiyonunun türevine eşit olması şartı kullanılarak da probleme ilişkin integral denklem elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen bu integral denklem boyutsuzlaştırılarak integral denklemin sayısal çözümü Gauss-Jacobi formülasyonu kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

Üçüncü bölümde, probleme ilişkin sayısal uygulamalar yapılmıştır. Farklı yükleme, malzeme özelliklerine göre, FD tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas uzunlukları ve temas gerilmeleri boyutsuz olarak elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar tablo ve grafiklerle sunulmuş ve bunlara ilişkin değerlendirmeler yapılmıştır.

Dördüncü bölümde, çalışmadan çıkarılan sonuçlar sıralanmıştır. Beşinci bölümde çalışma ile ilgili öneriler verilmiş olup son bölümde ise yararlanılan kaynaklar sunulmaktadır.

#### **1.4. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi**

Bu kısımda, elastisite teorisinden yararlanılarak FD tabaka için gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin genel ifadeleri elde edilecektir. Bu amaçla, önce bünye denklemleri ve yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak denge denklemleri, yer değiştirmeler cinsinden yazılarak Navier denklemleri elde edilecektir. Yer değiştirme bileşenlerinin gerekli türevleri Navier denklemlerinde yerine yazılarak elde edilecek adi diferansiyel denklem takımının çözümü sonucunda da yer değiştirme bileşenlerinin genel ifadeleri bulunacaktır. Bu ifadelerin bünye denklemlerinde yerine yazılması ile de gerilme bileşenlerinin genel ifadeleri belirlenecektir.

### 1.4.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş (FD) Tabaka için Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Düzlem halde;  $\sigma_{1x}, \sigma_{1y}$  ve  $\tau_{1xy}$  gerilme bileşenlerini göstermek üzere kütle kuvvetsiz halde denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial \sigma_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{1xy}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{1yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{1y}}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

(1) ve (2) ifadelerinde geçen 1 indisi, FD tabakayı temsil etmektedir. Bu ifadelerde geçen gerilme bileşenleri, bünye denklemleri ve yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir :

$$\sigma_{1x} = \frac{\mu_1(y)}{\kappa_1 - 1} \left[ (\kappa_1 + 1) \frac{\partial u_1}{\partial x} + (3 - \kappa_1) \frac{\partial v_1}{\partial y} \right] \quad (3)$$

$$\sigma_{1y} = \frac{\mu_1(y)}{\kappa_1 - 1} \left[ (3 - \kappa_1) \frac{\partial u_1}{\partial x} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_1}{\partial y} \right] \quad (4)$$

$$\tau_{1xy} = \mu_1(y) \left[ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right] \quad (5)$$

(3-5) ifadelerinde geçen  $u_1$  ve  $v_1$  sırasıyla FD tabakanın  $x, y$  doğrultusundaki yer değiştirme bileşenlerini ve  $\kappa_1$  malzeme sabitini ifade etmektedir.  $\kappa_1$  sabit bir değer almakta ve düzlem şekil değiştirme durumu için  $\kappa_1 = (3 - 4\nu_1)$ , düzlem gerilme durumunda ise  $\kappa_1 = (3 - \nu_1)/(1 + \nu_1)$  olmaktadır.  $\mu_1(y)$  ise FD tabakanın kayma modülünü göstermekte olup aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\mu_1(y) = \mu_0 e^{\beta y} \quad (6)$$

Burada  $\mu_0$  FD tabakanın alt yüzeyindeki kayma modülünün değerini,  $\beta$  ise rijitlik değişim parametresini göstermektedir.

(3-5) denklemlerinin gerekli türevleri alınıp (1) ve (2) denge denklemlerinde yerlerine yazılırlarsa, Navier denklemleri düzlem şekil değiştirme halinde aşağıdaki şekilde elde edilirler:

$$(\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + (\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + \beta(\kappa_1 - 1) \frac{\partial u_1}{\partial y} + \beta(\kappa_1 - 1) \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$$(\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \beta(3 - \kappa_1) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \beta(\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

FD tabakaya ilişkin geometri, yükleme durumu ve malzeme özellikleri  $y$  eksenine göre simetrik olması nedeniyle,  $u_1$  ve  $v_1$  yer değiştirmeler aşağıdaki eşitlikleri sağlarlar:

$$u_1(x, y) = -u_1(-x, y) \quad (9)$$

$$v_1(x, y) = v_1(-x, y) \quad (10)$$

Navier denklemlerinin kısmi türevler içermesi problemin çözümünü zorlaştırmaktadır. Navier denklemlerini adi diferansiyel denklem takımına dönüştürmek ve çözümü kolaylaştırmak için yer değiştirmeler  $u_1(x, y)$  ve  $v_1(x, y)$  bilinmeyen fonksiyonlar  $\phi_1(\xi, y)$  ve  $\psi_1(\xi, y)$ 'nin Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümleri olarak tanımlanarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$u_1(x, y) = F_s [\phi_1(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \phi_1(\xi, y) \sin \xi x d\xi \quad (11)$$

$$v_1(x, y) = F_c [\psi_1(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi_1(\xi, y) \cos \xi x d\xi \quad (12)$$

Bu ifadelerin ters Fourier dönüşümleri ise,

$$\phi_1(\xi, y) = F_s^{-1} [u_1(x, y); x \rightarrow \xi] = \int_0^{\infty} u_1(x, y) \sin(\xi x) dx \quad (13)$$

$$\psi_1(\xi, y) = F_c^{-1} [v_1(x, y); x \rightarrow \xi] = \int_0^{\infty} v_1(x, y) \cos(\xi x) dx \quad (14)$$

olarak yazılabilir. Burada  $\xi$  dönüşüm değişkeni olup  $\phi_1(\xi, y)$  ve  $\psi_1(\xi, y)$  fonksiyonları  $u_1(x, y)$  ve  $v_1(x, y)$  yer değiştirme ifadelerinin ters Fourier dönüşüm fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonların belirlenebilmesi için (7) nolu denklem  $\sin(\xi x) dx$  ve (8) nolu denklem  $\cos(\xi x) dx$  ile çarpılıp  $(0, +\infty)$  aralığında integre edilirse.

$$\int_0^{\infty} \left[ (\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + (\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + \beta(\kappa_1 - 1) \frac{\partial u_1}{\partial y} + \beta(\kappa_1 - 1) \frac{\partial v_1}{\partial x} \right] \sin(\xi x) dx = 0 \quad (15)$$

$$\int_0^{\infty} \left[ (\kappa_1 - 1) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + (\kappa_1 + 1) \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \beta(3 - \kappa_1) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \beta(\kappa_1 + 1) \frac{\partial v_1}{\partial x} \right] \cos(\xi x) dx = 0 \quad (16)$$

ifadeler elde edilir. Bu ifadelerde  $u_1(x, y)$  ve  $v_1(x, y)$  yer değiştirme ifadeleri olduğu bilinmektedir. (15) ve (16) nolu denklemlerde  $u_1$  ve  $v_1$ 'in bazı türevlerinin Fourier dönüşümleri,

$$F_s \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi^2 \phi_1 \quad (17)$$

$$F_s \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}; x \rightarrow \xi \right] = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \quad (18)$$

$$F_s \left[ \frac{\partial^2 v_1(x, y)}{\partial x \partial y}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \quad (19)$$

$$F_c \left[ \frac{\partial^2 v_1(x, y)}{\partial x^2}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi^2 \psi_1 \quad (20)$$

$$F_c \left[ \frac{\partial^2 v_1(x, y)}{\partial y^2}; x \rightarrow \xi \right] = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \quad (21)$$

$$F_c \left[ \frac{\partial^2 u_1(x, y)}{\partial x \partial y}; x \rightarrow \xi \right] = \xi \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y} \quad (22)$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitlikler kısmi integrasyon kullanılarak elde edilmiş ve aşağıdaki sınır şartlarından yararlanılmıştır.

$$u_1(0, y) = u_1(\infty, y) = v_1(\infty, y) = \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (23)$$

(17-22) ifadeleri (15) ve (16) nolu denklemlerde yerine konular ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$-(\kappa_1 + 1)\xi^2 \phi_1 + (\kappa_1 - 1) \frac{d^2 \phi_1}{dy^2} - 2\xi \frac{d\psi_1}{dy} + \beta(\kappa_1 - 1) \left[ \frac{d\phi_1}{dy} - \xi \psi_1 \right] = 0 \quad (24)$$

$$-(\kappa_1 - 1)\xi^2 \psi_1 + (\kappa_1 + 1) \frac{d^2 \psi_1}{dy^2} + 2\xi \frac{d\phi_1}{dy} + \beta \left[ (3 - \kappa_1)\xi \phi_1 + (\kappa_1 + 1) \frac{d\psi_1}{dy} \right] = 0 \quad (25)$$

adi diferansiyel denklem takımı elde edilir.(24) ve (25) denklemleri  $\dot{y} = \mathcal{U}y + ky$  şeklinde diferansiyel denklem takımı oluştururlar (Apatay, 2010). Bu denklem sisteminin çözümü için,

$$\phi_1 = y_1 \quad \text{ve} \quad \frac{d\phi_1}{dy} = y_3 \quad (26)$$

$$\psi_1 = y_2 \text{ ve } \frac{d\psi_1}{dy} = y_4 \quad (27)$$

tanımlamaları yapılarak diferansiyel denklem sistemi  $\dot{y} = \mathcal{U}y$  şeklinde matris formda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\kappa_1+1}{\kappa_1-1} \xi^2 & \beta \xi & -\beta & \frac{2\xi}{\kappa_1-1} \\ -\beta \xi \frac{(3-\kappa_1)}{\kappa_1+1} & \frac{\kappa_1-1}{\kappa_1+1} \xi^2 & -\frac{2\xi}{\kappa_1+1} & -\beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Burada,

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \xi^2 \frac{\kappa+1}{\kappa-1} & \beta \xi & -\beta & \frac{2\xi}{\kappa-1} \\ -\beta \xi \frac{(3-\kappa)}{\kappa+1} & \xi^2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & -\frac{2\xi}{\kappa+1} & -\beta \end{bmatrix} \quad (29)$$

olarak tanımlanır ve  $|\mathcal{U} - nI| = 0$  yazılırsa,

$$n^4 + 2\beta n^3 + (\beta^2 - 2\xi^2)n^2 - 2\xi^2 \beta n + \frac{\xi^2(3\beta^2 + \xi^2 + (\xi^2 - \beta^2)\kappa_1)}{\kappa_1 + 1} = 0 \quad (30)$$

şeklinde diferansiyel denklem sisteminin karakteristik denklemi elde edilir. Diferansiyel denklem sisteminin çözümü  $e^{ny}$  şeklinde aranır;

$$\phi_1 = \sum_{j=1}^4 A_j e^{n_j y} \quad (31)$$

$$\psi_1 = \sum_{j=1}^4 A_j m_j e^{n_j y} \quad (32)$$

olarak elde edilir. (31) ve (32) ifadeleri (24) ve (25) ifadelerinde yerine yazılırsa,

$$m_j = \frac{(3\beta + 2n_j - \beta\kappa_1) [n_j(\beta + n_j)(\kappa_1 + 1) - \xi^2(\kappa_1 + 3)]}{\xi [4\xi^2 - \beta^2(\kappa_1 - 3)(\kappa_1 + 1)]} \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (33)$$

şeklinde elde edilir. Karakteristik denklemin kökleri aşağıdaki şekilde bulunur :

$$n_1 = -\frac{1}{2} \left( \beta + \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 - 4\xi^2 \beta i \sqrt{\frac{3-\kappa_1}{\kappa_1+1}}} \right) \quad (34)$$

$$n_2 = -\frac{1}{2} \left( \beta - \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 - 4\xi^2 \beta i \sqrt{\frac{3-\kappa_1}{\kappa_1+1}}} \right) \quad (35)$$

$$n_3 = -\frac{1}{2} \left( \beta + \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 + 4\xi^2 \beta i \sqrt{\frac{3-\kappa_1}{\kappa_1+1}}} \right) \quad (36)$$

$$n_4 = -\frac{1}{2} \left( \beta - \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 + 4\xi^2 \beta i \sqrt{\frac{3-\kappa_1}{\kappa_1+1}}} \right) \quad (37)$$

(31) ve (32) ifadeleri ile tanımlanan  $\phi(\xi, y)$  ve  $\psi(\xi, y)$  fonksiyonları sırasıyla (11) ve (12) nolu denklemlerde yerine yazılırsa, FD tabakaya ait yer değiştirme ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j e^{n_j y} \sin(\xi x) d\xi \quad (38)$$



$$v_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (39)$$

Denklemlerde geçen  $A_j(j=1, \dots, 4)$  büyüklükleri, bilinmeyen katsayılar olup problem ait sınır şartlarından elde edilecektir. (38) ve (39) ifadeleri (3-5) denklemlerinde yerine konursa, FD tabaka için gerilme ifadeleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\sigma_{1x} = \frac{2\mu_0 e^{\beta y}}{\pi(\kappa_1 - 1)} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j [(3 - \kappa_1)m_j n_j + \xi(\kappa_1 + 1)] e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (40)$$

$$\sigma_{1y} = \frac{2\mu_0 e^{\beta y}}{\pi(\kappa_1 - 1)} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j C_j e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (41)$$

$$\tau_{1xy} = \frac{2\mu_0 e^{\beta y}}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j D_j e^{n_j y} \sin(\xi x) d\xi \quad (42)$$

Burada;

$$C_j = [(\kappa_1 + 1)m_j n_j + \xi(3 - \kappa_1)] \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (43)$$

$$D_j = [n_j - \xi m_j] \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (44)$$

olarak tanımlanır.

#### 1.4.2 Elastik Yarım Düzlem İçin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Gerilme bileşenleri  $\sigma_{2x}$ ,  $\sigma_{2y}$  ve  $\tau_{2xy}$  olmak üzere, elastik yarım düzlem için denge denklemleri düzlem halde kütle kuvvetsiz olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial \sigma_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{2xy}}{\partial y} = 0 \quad (45)$$

$$\frac{\partial \tau_{2yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{2y}}{\partial y} = 0 \quad (46)$$

(45) ve (46) nolu ifadelerdeki gerilme bileşenleri yer değiştirme-şekil bağıntıları ve bünye denklemleri kullanılarak düzlem hal için aşağıdaki gibi yazılabilir. İfadelerde geçen 2 indisi elastik yarım düzlemi temsil etmektedir.

$$\sigma_{2x} = \hat{\lambda}_2 e_2 + 2\mu_2 \left( \frac{du_2}{dx} \right) \quad (47)$$

$$\sigma_{2y} = \hat{\lambda}_2 e_2 + 2\mu_2 \left( \frac{dv_2}{dx} \right) \quad (48)$$

$$\tau_{2xy} = \mu_2 \left( \frac{dv_2}{dx} + \frac{du_2}{dy} \right) \quad (49)$$

Yukarıdaki eşitliklerde geçen  $u_2$ ,  $x$  doğrultusundaki yer değiştirme bileşenini,  $v_2$ ,  $y$  doğrultusundaki yer değiştirme bileşenini,  $e_2$  yarım düzleme ait hacim değiştirme oranını  $\hat{\lambda}_2$  ise Lamé sabitini ve  $\mu_2$  kayma modülünü göstermekte olup aşağıdaki gibi tanımlanabilirler.

$$e_2 = \frac{du_2}{dx} + \frac{dv_2}{dy} \quad (50)$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{\nu_2 E_2}{(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)} \quad (51)$$

$$\mu_2 = \frac{E_2}{2(1 + \nu_2)} \quad (52)$$

(51) ve (52) nolu denklemlerdeki elastik yarım düzleme ilişkin ifadeleri;  $E_2$  elastisite modülünü,  $\mu_2$  kayma modülünü ve  $\nu_2$  Poisson oranını göstermektedir. (47-49)

denklemlerinde gerekli olan türevler alınıp (45-46) denklemlerinde yerine yazılırsa, düzlem şekil değiştirme halinde elastik yarım düzlem için Navier denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$(\lambda_2 + \mu_2) \frac{\partial e_2}{\partial x} + \mu_2 \nabla^2 u_2 = 0 \quad (53)$$

$$(\lambda_2 + \mu_2) \frac{\partial e_2}{\partial y} + \mu_2 \nabla^2 v_2 = 0 \quad (54)$$

Burada  $\nabla^2$ , Laplace operatörü olup aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (55)$$

$u_2$  ve  $v_2$  yer değiştirmeleri, elastik yarım düzlemin malzeme özellikleri, yükleme durumu ve geometrisinin y eksenine göre simetrik olması nedeniyle aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$u_2(x, y) = -u_2(-x, y) \quad (56)$$

$$v_2(x, y) = v_2(-x, y) \quad (57)$$

$u_2(x, y)$  ve  $v_2(x, y)$  yer değiştirmeleri bilinmeyen fonksiyonlar  $\phi_2(\xi, y)$  ve  $\psi_2(\xi, y)$ 'nin Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümleri olarak tanımlanırlarsa, aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$u_2(x, y) = F_s [\phi_2(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi_2(\xi, y) \sin \xi x d\xi \quad (58)$$

$$v_2(x, y) = F_c [\psi_2(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi_2(\xi, y) \cos \xi x d\xi \quad (59)$$

Bu ifadelerin ters Fourier dönüşümleri alınırsa,

$$\phi_2(\xi, y) = F_s^{-1}[u_2(x, y); x \rightarrow \xi] = \int_0^{\infty} u_2(x, y) \sin(\xi x) dx \quad (60)$$

$$\psi_2(\xi, y) = F_c^{-1}[v_2(x, y); x \rightarrow \xi] = \int_0^{\infty} v_2(x, y) \cos(\xi x) dx \quad (61)$$

şeklinde yazılabilir. Bilinmeyen  $\phi_2(\xi, y)$  ve  $\psi_2(\xi, y)$  fonksiyonlarının belirlenmesi için (53) nolu denklem  $\sin(\xi x) dx$ , (54) nolu denklem  $\cos(\xi x) dx$  ifadeleri ile çarpılıp sıfırdan sonsuz aralığında integrale edilirse,

$$\int_0^{\infty} \left[ \mu_2 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) + (\lambda_2 + \mu_2) \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} \right) \right] \sin(\xi x) dx = 0 \quad (62)$$

$$\int_0^{\infty} \left[ \mu_2 \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right) + (\lambda_2 + \mu_2) \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right) \right] \cos(\xi x) dx = 0 \quad (63)$$

ifadeleri elde edilir. (62) ve (63) nolu ifadelerde geçen  $u_2$  ve  $v_2$ 'nin ilgili türevlerinin Fourier dönüşümleri aşağıda gösterildiği gibidir.

$$F_s \left[ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi^2 \phi_2 \quad (64)$$

$$F_s \left[ \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}; x \rightarrow \xi \right] = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} \quad (65)$$

$$F_s \left[ \frac{\partial^2 v_2(x, y)}{\partial x \partial y}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \quad (66)$$

$$F_c \left[ \frac{\partial^2 v_2(x, y)}{\partial x^2}; x \rightarrow \xi \right] = -\xi^2 \psi_2 \quad (67)$$

$$F_c \left[ \frac{\partial^2 v_2(x, y)}{\partial y^2}; x \rightarrow \xi \right] = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \quad (68)$$

$$F_c \left[ \frac{\partial^2 u_2(x, y)}{\partial x \partial y}; x \rightarrow \xi \right] = \xi \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y} \quad (69)$$

Kısmi integrasyon kullanılarak elde edilen eşitliklerde aşağıdaki sınır şartları kullanılmıştır.

$$u_2(0, y) = u_2(\infty, y) = v_2(\infty, y) = \frac{\partial u_2(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (70)$$

(64-69) nolu denklemler (62) ve (63) nolu denklemlerde yerlerine konular ve düzenlemeler yapılırsa,

$$-(\hat{\lambda}_2 + 2\mu_2)\xi^2 \phi_2 + \mu_2 \phi_2^{II} - (\hat{\lambda}_2 + \mu_2)\xi \psi_2^I = 0 \quad (71)$$

$$(\hat{\lambda}_2 + 2\mu_2)\psi_2^{II} - \xi^2 \mu_2 \psi_2^{II} + (\hat{\lambda}_2 + \mu_2)\xi \phi_2^I = 0 \quad (72)$$

adi diferansiyel denklem takımı elde edilir. (71) nolu denklem  $y$ 'ye göre iki kez, (72) nolu denklem  $y$ 'ye göre bir kez türetilirse,

$$-(\hat{\lambda}_2 + 2\mu_2)\xi^2 \phi_2^{III} + \mu_2 \phi_2^{IV} - (\hat{\lambda}_2 + \mu_2)\xi \psi_2^{III} = 0 \quad (73)$$

$$(\hat{\lambda}_2 + 2\mu_2)\psi_2^{III} - \xi^2 \mu_2 \psi_2^I + (\hat{\lambda}_2 + \mu_2)\xi \phi_2^{II} = 0 \quad (74)$$

olarak elde edilir. (73) nolu denklemden  $\psi_2^{III}$  çekilerek (74) nolu denklemde yerine yazılırsa,

$$(\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{1}{\xi(\lambda_2 + \mu_2)} \left[ \mu_2 \phi_2^{IV} - (\lambda_2 + 2\mu_2) \xi^2 \phi_2^{II} \right] - \xi^2 \mu_2 \psi_2^I + (\lambda_2 + \mu_2) \xi \phi_2^{II} = 0 \quad (75)$$

ifadesi yazılabilir. Bu denklemden  $\psi_2^I$  çekilip (71) nolu denklemde yerine yazılırsa  $\phi_2^I$  'ye göre 4. mertebeden sabit katsayılı, lineer ve homojen diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\phi_2^{IV} - 2\xi^2 \phi_2^{II} + \xi^4 \phi_2 = 0 \quad (76)$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü  $\phi_2 = e^{by}$  olarak aranır ve (76) nolu denklemde yerine yazılırsa, karakteristik denklem aşağıdaki gibi bulunur.

$$b^4 - 2\xi^2 b^2 + \xi^4 = 0 \quad (77)$$

Bu denklemin kökleri  $b_1 = b_2 = \xi$  ve  $b_3 = b_4 = -\xi$  olarak bulunur. (76) nolu diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\phi_2(\xi, y) = (B_1 + B_2 y) e^{-\xi y} + (B_3 + B_4 y) e^{\xi y} \quad (78)$$

$\psi_2(\xi, y)$  bilinmeyen fonksiyonunun çözümü için (71) nolu denklemin  $y$ 'e göre bir kez türevi alınıp  $\psi_2$  değeri çekilerek (72) nolu denklemde yerine yazılırsa,  $\psi_2(\xi, y)$  fonksiyonu,  $\phi_2(\xi, y)$  fonksiyonuna ve türevlerine bağlı olarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$\psi_2(\xi, y) = \left[ B_1 + \left( \frac{\kappa_2}{\xi} + y \right) B_2 \right] e^{-\xi y} + \left[ -B_3 + \left( \frac{\kappa_2}{\xi} - y \right) B_4 \right] e^{\xi y} \quad (79)$$

Bu ifadede geçen  $\kappa_2$ , elastik yarım düzlemin malzeme sabitidir. Malzeme sabiti düzlem şekil değiştirme hali için  $\kappa_2 = 3 - 4\nu_2$  olarak bilinmektedir.  $\phi_2(\xi, y)$  ve

$\psi_2(\xi, y)$  bilinmeyen fonksiyonları (58) ve (59) nolu eşitliklerde yerlerine yazılırlarsa,  $u_2(x, y)$  ve  $v_2(x, y)$  yer değiştirme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$u_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ (B_1 + B_2 y) e^{\xi y} \right] \sin(\xi x) d\xi \quad (80)$$

$$v_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ -B_1 + \left( \frac{\kappa_2}{\xi} - y \right) B_2 \right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (81)$$

Burada,  $B_i$  ( $i=1,2$ ) 'ler bilinmeyen katsayılarıdır ve problem ait sınır şartlarından bulunacaktır. (80) ve (81) nolu ifadelerin gerekli türevleri alınıp (47-49) ifadelerinde yerine yazılırsa, gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\frac{1}{2\mu_2} \sigma_{2x}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \xi (B_1 + B_2 y) + \left( \frac{3 - \kappa_2}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (82)$$

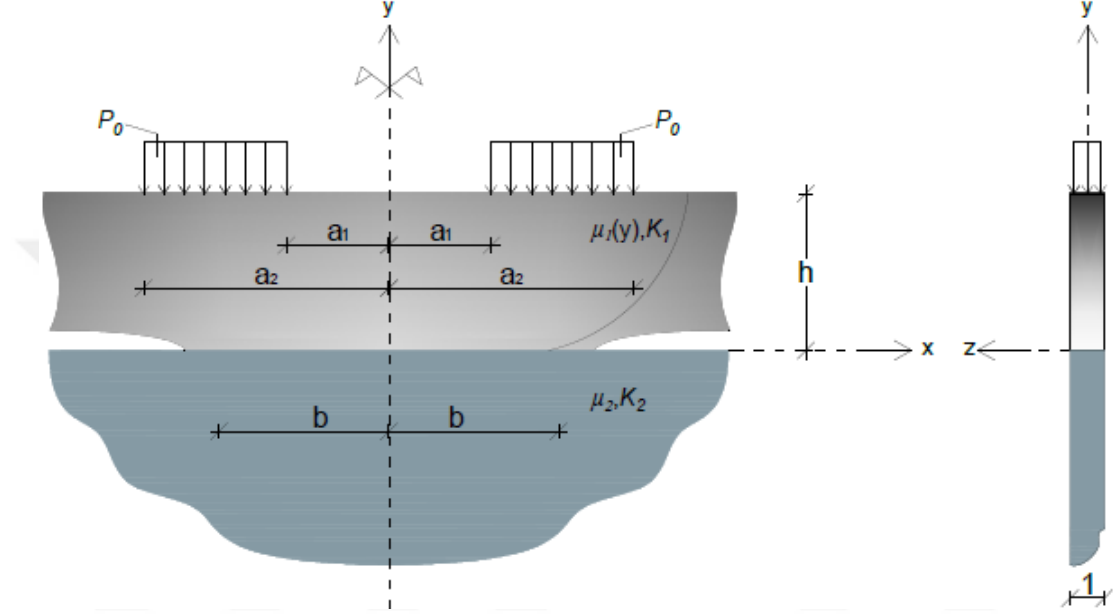
$$\frac{1}{2\mu_2} \sigma_{2y}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ -\xi (B_1 + B_2 y) + \left( \frac{1 + \kappa_2}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (83)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \tau_{2xy}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \xi (B_1 + B_2 y) + \left( \frac{1 - \kappa_2}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \sin(\xi x) d\xi \quad (84)$$

## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, elastik yarım düzlem üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) bir tabakanın sürtünmesiz temas problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir.

### 2.1. Problemin Tanımı



Şekil 1. Problemin geometrisi ve yükleme durumu

Problemin geometrisi ve yükleme durumu Şekil 1'de verilmiştir. FD tabakanın kayma modülü (85) denkleminde verildiği gibi tabaka yüksekliği boyunca üstel bir fonksiyona bağlı olarak değişmektedir. Yarım düzlemin ( $\mu_2$ ) kayma modülünün her yerde aynı olduğu yani homojen olduğu kabul edilmiştir.

$$\mu_1(y) = \mu_0 e^{\beta y}, \quad (0 \leq y \leq h) \quad (85)$$

Burada,  $\mu_0$  FD tabakanın alt yüzeyindeki kayma modülü,  $\beta$  ise sıfırdan farklı olmak üzere rijitlik değişim parametresidir. Tabaka yüksekliği sabit ve  $h$ 'dir. FD tabaka  $y$  eksenine göre simetrik şekilde iki düzgün yayılı yük ile yüklenmiştir. Yayılı yükler  $(a_1, a_2)$  ve  $(-a_1, -a_2)$  aralıklarında etki etmektedir. Çözümlerde tüm yüzeylerde sürtünmenin bulunmadığı kabul edilmiş ve kütle kuvvetlerinin etkisi ihmal edilmiştir.



Tabaka  $x$  eksenini boyunca  $(-\infty, \infty)$  aralığında uzanmaktadır. Problem  $y$  eksenine göre simetrik olduğundan çözümün  $(0, \infty)$  aralığında yapılması yeterlidir.

## 2.2. Problemin Çözümü

Problem elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniği kullanılarak çözülmüştür. Problem; FD tabaka ve elastik yarım düzlem için ve Fourier dönüşümü uygulanıp sınır şartlarının kullanılmasıyla, temas uzunluğunun bilinmeyen olduğu tekil bir integral denkleme indirgenmiştir. İntegral denklemin sayısal çözümü Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu yardımıyla yapılmış ve denge denklemleri de sağlatılmak koşuluyla FD tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas uzunlukları belirlenmiştir.

### 2.2.1. Kullanılacak Denklemler

Problemde (1) indisli ifadeler FD tabakaya (2) indisli ifadeler ise elastik yarım düzleme ait ifadeleri göstermektedir. Problemin çözümünde kullanılacak yer değiştirme ve gerilme bağıntıları FD tabaka ve elastik yarım düzlem için aşağıdaki gibi yazılabilirler :

FD tabaka için kullanılacak denklemler  $(0 \leq y \leq h)$ ;

$$u_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j e^{n_j y} \sin(\xi x) d\xi \quad (86)$$

$$v_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j m_j e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (87)$$

$$\sigma_{1x} = \frac{2\mu_0 e^{\beta y}}{\pi(\kappa_1 - 1)} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j [(3 - \kappa_1) m_j n_j + \xi(\kappa_1 + 1)] e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (88)$$

$$\sigma_{1y} = \frac{2\mu_0 e^{\beta y}}{\pi(\kappa_1 - 1)} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j C_j e^{n_j y} \cos(\xi x) d\xi \quad (89)$$

$$\tau_{1xy} = \frac{2\mu_0 e^{\beta y}}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j D_j e^{n_j y} \sin(\xi x) d\xi \quad (90)$$

Elastik yarım düzlem için kullanılacak denklemler ( $-\infty < y \leq 0$ );

$$u_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(B_1 + B_2 y) e^{\xi y}] \sin(\xi x) d\xi \quad (91)$$

$$v_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ -B_1 + \left( \frac{\kappa_2}{\xi} - y \right) B_2 e^{\xi y} \right] \cos(\xi x) d\xi \quad (92)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \sigma_{2x}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \xi (B_1 + B_2 y) + \left( \frac{3 - \kappa_2}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (93)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \sigma_{2y}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ -\xi (B_1 + B_2 y) + \left( \frac{1 + \kappa_2}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (94)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \tau_{2xy}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \xi (B_1 + B_2 y) + \left( \frac{1 - \kappa_2}{2} \right) B_2 \right] e^{\xi y} \sin(\xi x) d\xi \quad (95)$$

### 2.2.2. Problemin Sınır Şartları

$u(x, y)$  ve  $v(x, y)$  yerdeğiştirme bileşenlerini  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$  ve  $\tau_{xy}(x, y)$  gerilme bileşenlerini göstermek üzere probleme ilişkin sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilirler:

$$\sigma_{1y}(x, h) = \begin{cases} -p_0 & ; & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 0 & ; & |x| > a_2, |x| < a_1 \end{cases} \quad (96)$$

$$\tau_{1xy}(x, h) = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \quad (97)$$

$$\sigma_{1y}(x,0) = \begin{cases} -p_1(x) & ; & 0 \leq x < b \\ 0 & ; & b \leq x < \infty \end{cases} \quad (98)$$

$$\sigma_{1y}(x,0) = \sigma_{2y}(x,0) \quad , \quad (0 \leq x < \infty) \quad (99)$$

$$\tau_{1xy}(x,0) = 0 \quad , \quad (0 \leq x < \infty) \quad (100)$$

$$\tau_{2xy}(x,0) = 0 \quad , \quad (0 \leq x < \infty) \quad (101)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x,0) - v_2(x,0)] = 0 \quad (0 \leq x < b) \quad (102)$$

Probleme ilişkin denge şartı ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\int_{-b}^b p_1(x) dx = 2(a_2 - a_1) p_0 \quad (103)$$

Burada  $p_0$  yayılı yükün şiddetini,  $p_1(x)$  ise FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki bilinmeyen temas gerilmesini göstermektedir.  $a_1$  ve  $a_2$  sırasıyla yayılı yükün başlangıç ve bitiş noktalarını,  $b$  ise FD tabaka ile yarım düzlem arasındaki yarı temas uzunluğudur.

### 2.2.3. Katsayıların Belirlenmesi

(96-101) ifadeleri ile verilen sınır şartlarında, FD tabaka ve elastik yarım düzleme ilişkin gerilme ve yer değiştirme bağıntıları yerlerine yazılması ve ters Fourier dönüşümü alınması sonucunda,  $A_j$  ( $j=1, \dots, 4$ ) ve  $(B_1, B_2)$  katsayılarını içeren altı bilinmeyenli altı cebrik denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sum_{j=1}^4 A_j C_j e^{n_j h} = -p_0(\xi) \quad p_0(\xi) = \left( \frac{\kappa_1 - 1}{\mu_0 e^{\beta h}} \right) \int_{a_1}^{a_2} p_0 \cos(\xi x) d\xi \quad (104)$$

$$\sum_{j=1}^4 A_j D_j e^{n_j h} = 0 \quad (105)$$

$$-\xi B_1 + \left( \frac{1+\kappa_2}{2} \right) B_2 = -p_1(\xi) \quad ; \quad p_1(\xi) = -\frac{1}{2\mu_2} \int_0^b p_1(t) \cos(\xi t) d\xi \quad (106)$$

$$\frac{\mu_0}{2\mu_2(\kappa_1-1)} \sum_{j=1}^4 A_j C_j + \xi B_1 - \frac{(\kappa_2+1)}{2} B_2 = 0 \quad (107)$$

$$\sum_{j=1}^4 A_j D_j = 0 \quad (108)$$

$$-\xi B_1 + \left( \frac{\kappa_2-1}{2} \right) B_2 = 0 \quad (109)$$

Bu altı denklemin ortak çözümü sonucunda bilinmeyenler  $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1$  ve  $B_2$  katsayıları aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$A_1 = (\bar{p}(e^{hm_2}(C_4 D_2 D_3 - C_3 D_2 D_4) + e^{hm_3}(C_2 D_3 D_4 + C_4 D_2 D_3) + e^{hm_4}(C_3 D_2 D_4 + C_2 D_3 D_4)) + F(e^{h(n_2+n_3)}(C_3 D_2 D_4 - C_2 D_3 D_4) + e^{h(n_2+n_4)}(C_2 D_3 D_4 - C_4 D_2 D_3) + e^{h(n_3+n_4)}(C_4 D_2 D_3 - C_3 D_2 D_4))) / \Delta \quad (110)$$

$$A_2 = (\bar{p}(e^{hm_1}(C_3 D_1 D_4 - C_4 D_1 D_3) + e^{hm_3}(C_4 D_1 D_3 - C_1 D_3 D_4) + e^{hm_4}(C_1 D_3 D_4 - C_3 D_1 D_4)) + F(e^{h(n_1+n_3)}(-C_3 D_1 D_4 + C_1 D_3 D_4) + e^{h(n_1+n_4)}(-C_1 D_3 D_4 + C_4 D_1 D_3) + e^{h(n_3+n_4)}(-C_4 D_1 D_3 + C_3 D_1 D_4))) / \Delta \quad (111)$$

$$A_3 = (\bar{p}(e^{hm_1}(-C_2 D_1 D_4 + C_4 D_1 D_2) + e^{hm_2}(C_1 D_2 D_4 - C_4 D_1 D_2) + e^{hm_4}(C_2 D_1 D_4 - C_1 D_2 D_4)) + F(e^{h(n_1+n_2)}(-C_1 D_2 D_4 + C_2 D_1 D_4) + e^{h(n_1+n_4)}(C_1 D_2 D_4 - C_4 D_1 D_2) + e^{h(n_2+n_4)}(-C_2 D_1 D_4 + C_4 D_1 D_4))) / \Delta \quad (112)$$

$$A_4 = (\bar{p}(e^{hm_1}(C_2 D_1 D_3 - C_3 D_1 D_2) + e^{hm_2}(-C_1 D_2 D_3 + C_3 D_1 D_2) + e^{hm_3}(C_1 D_2 D_3 - C_2 D_1 D_3)) + F(e^{h(n_1+n_2)}(C_1 D_2 D_3 - C_2 D_1 D_4) + e^{h(n_1+n_3)}(-C_1 D_2 D_3 + C_3 D_1 D_2) + e^{h(n_2+n_3)}(C_2 D_1 D_3 - C_3 D_1 D_2))) / \Delta \quad (113)$$

$$B_1 = -p_1(\xi) \frac{(\kappa_2 - 1)}{2\xi} \quad (114)$$

$$B_2 = -p_1(\xi) \quad (115)$$

Bu ifadelerde geçen  $F$ ,  $\bar{p}$ ,  $p_1(\xi)$  ve  $\Delta$  büyüklükleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\bar{p} = \left( \frac{\kappa_1 - 1}{\mu_0 e^{\beta h}} \right) \int_{a_1}^{a_2} p_0 \cos(\xi x) d\xi \quad (116)$$

$$F = \left( \frac{\kappa_1 - 1}{\mu_0} \right) \int_0^b p_1(\xi) \cos(\xi x) d\xi$$

(117)

$$p_1(\xi) = \frac{1}{2\mu_2} \int_0^b p_1(t) \cos(\xi t) d\xi \quad (118)$$

$$\begin{aligned} \Delta = & e^{h(n_1+n_2)} (C_1 C_3 D_2 D_4 - C_1 C_4 D_2 D_3 - C_2 C_3 D_1 D_4 - C_2 C_4 D_1 D_3) \\ & + e^{h(n_1+n_3)} (-C_1 C_2 D_3 D_4 + C_1 C_4 D_2 D_3 + C_2 C_3 D_1 D_4 - C_3 C_4 D_1 D_2) \\ & + e^{h(n_1+n_4)} (C_1 C_2 D_3 D_4 - C_1 C_3 D_2 D_4 - C_2 C_4 D_1 D_3 + C_3 C_4 D_1 D_2) \\ & + e^{h(n_2+n_3)} (C_1 C_2 D_3 D_4 - C_1 C_3 D_2 D_4 - C_2 C_4 D_1 D_3 + C_3 C_4 D_1 D_2) \\ & + e^{h(n_2+n_4)} (-C_1 C_2 D_3 D_4 + C_1 C_4 D_2 D_3 + C_2 C_3 D_1 D_4 - C_3 C_4 D_1 D_2) \\ & + e^{h(n_3+n_4)} (C_1 C_3 D_2 D_4 - C_1 C_4 D_2 D_3 - C_2 C_3 D_1 D_4 + C_2 C_4 D_1 D_3) \end{aligned} \quad (119)$$

#### 2.2.4. İntegral Denklemin Elde Edilmesi

FD tabaka ve yarım düzlem arasındaki  $p_1(\xi)$  temas gerilmesi bilinmeyen olup, (102) nolu sınır şartı kullanılarak elde edilecek integral denklemin çözümünden bulunacaktır. Söz konusu sınır şartı düzenlenirse,

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0) - v_2(x, 0)] = p_0 M(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^b p_1(t) [L_1(x, t) + L_2(x, t)] dt = 0 \quad (120)$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
M(x) = & \int_0^{\infty} \frac{-\xi(\kappa_1 - 1)}{\Delta\mu_0 e^{\beta h}} \{ (e^{nh_1} ((C_3 D_1 D_4 - C_4 D_1 D_3) M_2 + (C_4 D_1 D_2 - C_2 D_1 D_4) M_3 \\
& + (C_2 D_1 D_3 - C_3 D_1 D_2) M_4) + (e^{nh_2} ((C_4 D_2 D_3 - C_3 D_2 D_4) M_1 \\
& + (C_1 D_2 D_4 - C_4 D_1 D_2) M_3 + (C_3 D_1 D_2 - C_1 D_2 D_3) M_4) \\
& + (e^{nh_3} ((C_2 D_3 D_4 - C_4 D_2 D_3) M_1 + (C_4 D_1 D_3 - C_1 D_3 D_4) M_2 \\
& + (C_1 D_2 D_3 - C_2 D_1 D_3) M_4) + (e^{nh_4} ((C_3 D_2 D_4 - C_2 D_3 D_4) M_1 \\
& + (C_1 D_3 D_4 - C_3 D_1 D_4) M_2 + (C_2 D_1 D_4 - C_1 D_2 D_4) M_3) \} \\
& \sin(\xi x) \sin(\xi a_2 - \xi a_1) d\xi \\
(121)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_1(x, t) = & \int_0^{\infty} \frac{-\xi(\kappa_1 - 1)}{\Delta\mu_0} \{ e^{h(n_1+n_2)} ((C_2 D_1 D_4 - C_1 D_2 D_4) M_3 + (C_1 D_2 D_3 - C_2 D_1 D_3) M_4) \\
& + e^{h(n_1+n_3)} ((C_1 D_3 D_4 - C_3 D_1 D_4) M_2 + (C_3 D_1 D_2 - C_1 D_2 D_3) M_4) \\
& + e^{h(n_1+n_4)} ((C_4 D_1 D_3 - C_1 D_3 D_4) M_2 + (C_1 D_2 D_4 - C_4 D_1 D_2) M_3) \\
& + e^{h(n_2+n_3)} ((C_3 D_2 D_4 - C_2 D_3 D_4) M_1 + (C_2 D_1 D_3 - C_3 D_1 D_2) M_4) \\
& + e^{h(n_2+n_4)} ((C_2 D_3 D_4 - C_4 D_2 D_3) M_1 + (C_4 D_1 D_4 - C_2 D_1 D_4) M_3) \\
& + e^{h(n_3+n_4)} ((C_4 D_2 D_3 - C_3 D_2 D_4) M_1 + (C_3 D_1 D_4 - C_4 D_1 D_3) M_3) \} \sin(\xi x) \cos(\xi t) d\xi \\
(122)
\end{aligned}$$

$$L_2(x, t) = \frac{1}{\mu_2} \int_0^{\infty} -\frac{(1+\kappa_2)}{4} \sin(\xi x) \cos(\xi t) d\xi \quad (123)$$

şeklinindedir. (102) nolu sınır şartı  $y=0$  için yazıldığından, (121-123) ifadelerinde  $y \rightarrow 0$  limitine geçmek gerekir. Fakat  $L_1(x, t)$  integralinin çekirdeğinin yakınsaması  $y \rightarrow 0$  limiti için bozulmaktadır. Diğer bir ifadeyle büyük  $\xi$  değerleri için çekirdeğin integrali sıfırdan farklı bir değere yaklaşmaktadır. Çekirdeğin içindeki yakınsamayı bozan bu terime singüler terim (ST) adı verilip aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$ST = \frac{1}{\mu_0} \int_0^{\infty} -\frac{(\kappa_1 + 1)}{4} e^{\xi y} \sin(\xi x) \cos(\xi t) d\xi \quad (124)$$

Singüler terimin kapalı integrali, integral dönüşüm tabloları yardımıyla (Erdelyi vd.,1954) hesaplanıp  $y \rightarrow 0$  limitine geçilirse,

$$\int_0^{\infty} \left[ -\frac{1}{\mu_0} \frac{(\kappa_1+1)}{4} \right] \sin(\xi x) \cos(\xi t) d\xi = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \frac{(\kappa_1+1)}{4} \left[ \frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x} \right] \quad (125)$$

ifadesi elde edilir. (122) nolu integralin çekirdeğinin yakınsamasını bozan bu singüler terim çekirdek içinden çıkarılıp (125) ifadesinde elde edilen kapalı integralinin eklenmesiyle, (120) denklemini aşağıdaki gibi bir integral denkleme indirgenmiş olur:

$$p_0 M(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^b p_1(t) \left\{ L_1^*(x,t) + \frac{\kappa_1+1}{8\mu_0} \left[ \frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x} \right] + L_2(x,t) \right\} dt = 0 \quad (126)$$

bu ifadede geçen  $L_1^*(x,t)$  aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} L_1^*(x,t) = & \int_0^{\infty} \frac{-\xi(\kappa_1-1)}{\Delta\mu_0} \{ e^{h(n_1+n_2)} ((C_2D_1D_4 - C_1D_2D_4)M_3 + (C_1D_2D_3 - C_2D_1D_3)M_4) \\ & + e^{h(n_1+n_3)} ((C_1D_3D_4 - C_3D_1D_4)M_2 + (C_3D_1D_2 - C_1D_2D_3)M_4) \\ & + e^{h(n_1+n_4)} ((C_4D_1D_3 - C_1D_3D_4)M_2 + (C_1D_2D_4 - C_4D_1D_2)M_3) \\ & + e^{h(n_2+n_3)} ((C_3D_2D_4 - C_2D_3D_4)M_1 + (C_2D_1D_3 - C_3D_1D_2)M_4) \\ & + e^{h(n_2+n_4)} ((C_2D_3D_4 - C_4D_2D_3)M_1 + (C_4D_1D_4 - C_2D_1D_4)M_3) \\ & + e^{h(n_3+n_4)} ((C_4D_2D_3 - C_3D_2D_4)M_1 + (C_3D_1D_4 - C_4D_1D_3)M_3) \\ & + \frac{(\kappa_1+1)}{4\mu_0} \} \sin(\xi x) \cos(\xi t) d\xi \end{aligned} \quad (127)$$

Simetri özelliğinden  $p_1(t)$  temas fonksiyonunun  $p_1(t) = p_1(-t)$  şeklinde çift fonksiyon olduğu göz önünde bulundurulursa, denklemin yeni hali aşağıdaki gibi olur.

$$p_0 M(x) + \frac{2}{\pi} \int_{-b}^b p_1(t) \left\{ k(x,t) + \left[ \frac{1}{t-x} \right] \left[ \frac{\kappa_1+1}{8\mu_0} + \frac{\kappa_2+1}{8\mu_2} \right] \right\} dt = 0 \quad (128)$$

Burada,

$$\begin{aligned}
k(x, t) = & \int_0^{\xi} \frac{\xi(\kappa_1 - 1)}{2\Delta\mu_0} \{ e^{h(n_1+n_2)} ((C_2D_1D_4 - C_1D_2D_4)M_3 + (C_1D_2D_3 - C_2D_1D_3)M_4) \\
& + e^{h(n_1+n_3)} ((C_1D_3D_4 - C_3D_1D_4)M_2 + (C_3D_1D_2 - C_1D_2D_3)M_4) \\
& + e^{h(n_1+n_4)} ((C_4D_1D_3 - C_1D_3D_4)M_2 + (C_1D_2D_4 - C_4D_1D_2)M_3) \\
& + e^{h(n_2+n_3)} ((C_3D_2D_4 - C_2D_3D_4)M_1 + (C_2D_1D_3 - C_3D_1D_2)M_4) \\
& + e^{h(n_2+n_4)} ((C_2D_3D_4 - C_4D_2D_3)M_1 + (C_4D_1D_4 - C_2D_1D_4)M_3) \\
& + e^{h(n_3+n_4)} ((C_4D_2D_3 - C_3D_2D_4)M_1 + (C_3D_1D_4 - C_4D_1D_3)M_3) \\
& - \frac{(\kappa_1 + 1)}{8\mu_0} \} \sin(\xi(x-t)) d\xi
\end{aligned}$$

(129)

olarak tanımlanabilir.

### 2.2.5. İntegral Denklemin Boyutsuzlaştırılması

Elde edilen integral denklemin sayısal çözümünü yapabilmek için aşağıda verilen değişken dönüşümleri yapılarak boyutsuz büyüklükler tanımlanabilir.

$$z = \xi h \quad , \quad dz = h d\xi \quad (130)$$

$$x = bs \quad (131)$$

$$t = br \quad , \quad dt = bdr \quad (132)$$

$$\phi(r) = \frac{p_1(t)}{p_0} \quad (133)$$

Burada geçen  $\phi(r)$  büyüklüğü, FD tabaka ile yarım düzlem arasındaki bilinmeyen boyutsuz temas gerilmesidir. Tanımlanan bu boyutsuz gerilme (128) numaralı integral denklemde yerine konulup düzenlenirse ,

$$\int_{-1}^1 \phi(r) \left\{ \frac{b}{h} k(s, r) + \left[ \frac{1}{r-s} \right] \left[ \frac{\kappa_1 + 1}{8} + \frac{\mu_0(\kappa_2 + 1)}{8\mu_2} \right] \right\} dr = \frac{1}{h} M(s) \quad (134)$$



olarak elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
k(s, r) = & \int_0^{\infty} \frac{(z/h)(\kappa_1 - 1)}{2\Delta} \{ e^{h(n_1+n_2)} ((C_2D_1D_4 - C_1D_2D_4)M_3 + (C_1D_2D_3 - C_2D_1D_3)M_4) \\
& + e^{h(n_1+n_3)} ((C_1D_3D_4 - C_3D_1D_4)M_2 + (C_3D_1D_2 - C_1D_2D_3)M_4) \\
& + e^{h(n_1+n_4)} ((C_4D_1D_3 - C_1D_3D_4)M_2 + (C_1D_2D_4 - C_4D_1D_2)M_3) \\
& + e^{h(n_2+n_3)} ((C_3D_2D_4 - C_2D_3D_4)M_1 + (C_2D_1D_3 - C_3D_1D_2)M_4) \\
& + e^{h(n_2+n_4)} ((C_2D_3D_4 - C_4D_2D_3)M_1 + (C_4D_1D_4 - C_2D_1D_4)M_3) \\
& + e^{h(n_3+n_4)} ((C_4D_2D_3 - C_3D_2D_4)M_1 + (C_3D_1D_4 - C_4D_1D_3)M_3) \\
& - \frac{(\kappa_1 + 1)}{8} \} \sin\left(z\left(\frac{b}{h}r - \frac{b}{h}s\right)\right) dz
\end{aligned} \tag{135}$$

$$\begin{aligned}
M(s) = & \int_0^{\infty} \frac{-(z/h)(\kappa_1 - 1)}{\Delta e^{\beta h}} \{ (e^{nh_1} ((C_3D_1D_4 - C_4D_1D_3)M_2 \\
& + (C_4D_1D_2 - C_2D_1D_4)M_3 + (C_2D_1D_3 - C_3D_1D_2)M_4) \\
& + (e^{nh_2} ((C_4D_2D_3 - C_3D_2D_4)M_1 + (C_1D_2D_4 - C_4D_1D_2)M_3 \\
& + (C_3D_1D_2 - C_1D_2D_3)M_4) + (e^{nh_3} ((C_2D_3D_4 - C_4D_2D_3)M_1 \\
& + (C_4D_1D_3 - C_1D_3D_4)M_2 + (C_1D_2D_3 - C_2D_1D_3)M_4) \\
& + (e^{nh_4} ((C_3D_2D_4 - C_2D_3D_4)M_1 + (C_1D_3D_4 - C_3D_1D_4)M_2 \\
& + (C_2D_1D_4 - C_1D_2D_4)M_3) \} \sin\left(z\frac{b}{h}s\right) \sin\left(\left(z\frac{a_2}{h} - z\frac{a_1}{h}\right)\right) dz
\end{aligned} \tag{136}$$

şeklinde dir. Boyutsuz büyüklükler denge şartında yerine yazılırsa,

$$\frac{b}{2(a_2 - a_1)} \int_{-1}^1 \phi(r) dr = 1 \tag{137}$$

olarak elde edilir.

## 2.2.6 İntegral Denklemin Sayısal Çözümü

İntegral denklemin sayısal çözümü Gauss-Jacobi integral formülasyonu yardımıyla yapılacaktır (Erdoğan ve Gupta 1972). İntegral denklemin çözümü aşağıdaki şekilde aranabilir:

$$\phi(r) = w(r)g(r) \quad (-1 \leq r \leq 1) \quad (138)$$

Burada;

$$w(r) = (1-r)^\alpha (1+r)^\beta \quad (139)$$

İntegral denklem FD tabaka ve elastik yarım düzlem arasındaki temas yüzeyi için elde edilmiştir. Temas yüzeyinin bittiği andan itibaren gerilmeler sıfır olur. Bu nedenle (134) nolu integral denklemin indisi "-1" olur (Erdoğan ve Gupta, 1972). Bu durumda Gauss-Jacobi integral formülasyonu Gauss-Chebyshev integrasyon formülasyonuna dönüşür ve  $\alpha = \beta = 0.5$  olarak alınır. Buna göre ifadeler aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\phi(r_i) = w(r_i)g(r_i) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (140)$$

$$w_1(r_i) = (1 - r_i^2)^{0.5} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (141)$$

Gerilmeler için tanımlanan bu ifadeler integral denklemde yerlerine yazılırsa, integral denklem temas gerilmesinin bilinmeyen olduğu aşağıdaki denklem takımına indirgenebilir;

$$\sum_{i=1}^N W_i g(r_i) \left[ \left\{ \frac{b}{h} k(s_k, r_i) + \left[ \frac{1}{r_i - s_k} \right] \left[ \frac{\kappa_1 + 1}{8} + \frac{\mu_0(\kappa_2 + 1)}{8\mu_2} \right] \right\} \right] = \frac{1}{h} M(s) \quad (142)$$

$$\frac{b}{2(a_2 - a_1)} \sum_{i=1}^N W_i(r_i) g(r_i) = 1 \quad (143)$$

Burada;

$$r_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N+1}\right) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (144)$$

$$s_k = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2k-1}{N+1}\right) \quad (k = 1, \dots, N+1) \quad (145)$$

$$W_i^N = \pi \left(\frac{1-r_i^2}{N+1}\right) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (146)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu denklemlerde geçen  $g(r_i)$  büyüklükleri bilinmeyen temas gerilmesi değerleridir ve  $N$  tanedir. İntegral denklemlerden  $(N+1)$  tane denklemden oluşan bir lineer denklem takımı elde edilir. (142) ifadesindeki  $(N/2+1)$ 'inci denklem uygunluk şartına karşılık gelir ve otomatik olarak sağlanır. Bu denklem takımından çıkarıldığında,  $N$  bilinmeyenli  $N$  denklemden oluşan bir denklem takımı elde edilir. Elde edilen denklem takımının çözümünden, temas gerilme değerleri ve yarı temas uzunluğu hesaplanabilir. Elde edilen temas gerilme değerleri ve yarı temas uzunluklarının (143) denklemini sağlaması gerekir. Seçilen temas bölgeleri ( $b$ ) için (142) nolu denklemin çözümünden  $g(r_i)$ 'ler hesaplanır ve bulunan değerler (143) nolu denklemde yerine yazılarak eşitliği sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir. Eşitlik sağlanmadığı takdirde ( $b$ )'ye artırımlar verilir ve yukarıdaki işlemler tekrarlanır. Bu işlemler sonunda bulunacak  $g(r_i)$  değerleri (143) ifadesinde yerine yazılarak boyutsuz yarı temas uzunluğu ( $b$ ) elde edilmiş olur. Gerekli hesaplamalar için Matlab programlama dilinde kodlanan bir program kullanılmıştır.

### 3. BULGULAR

Bu bölümde, yayılı yükün başlama mesafesinin tabaka yüksekliğine oranı ( $a_1/h$ ), bitiş mesafesinin tabaka yüksekliğine oranı ( $a_2/h$ ), malzeme özellikleri ( $\kappa_1/\kappa_2 = 1$ ) ve rijitlik değişim parametresi ( $\beta$ ) gibi çeşitli boyutsuz büyüklükler için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki yarı temas uzunluğu ( $b/h$ ) ve temas gerilmesi ( $p_1(x)/p_0$ ) ele alınmıştır. Çözümlerde rijitlik değişim parametresi için ( $\beta = -1, \beta = 0,001, \beta = 1$ ) değerleri kullanılmıştır. Bütün çözümlerde  $\mu_0/\mu_2 = 1$  değeri kullanılmıştır.

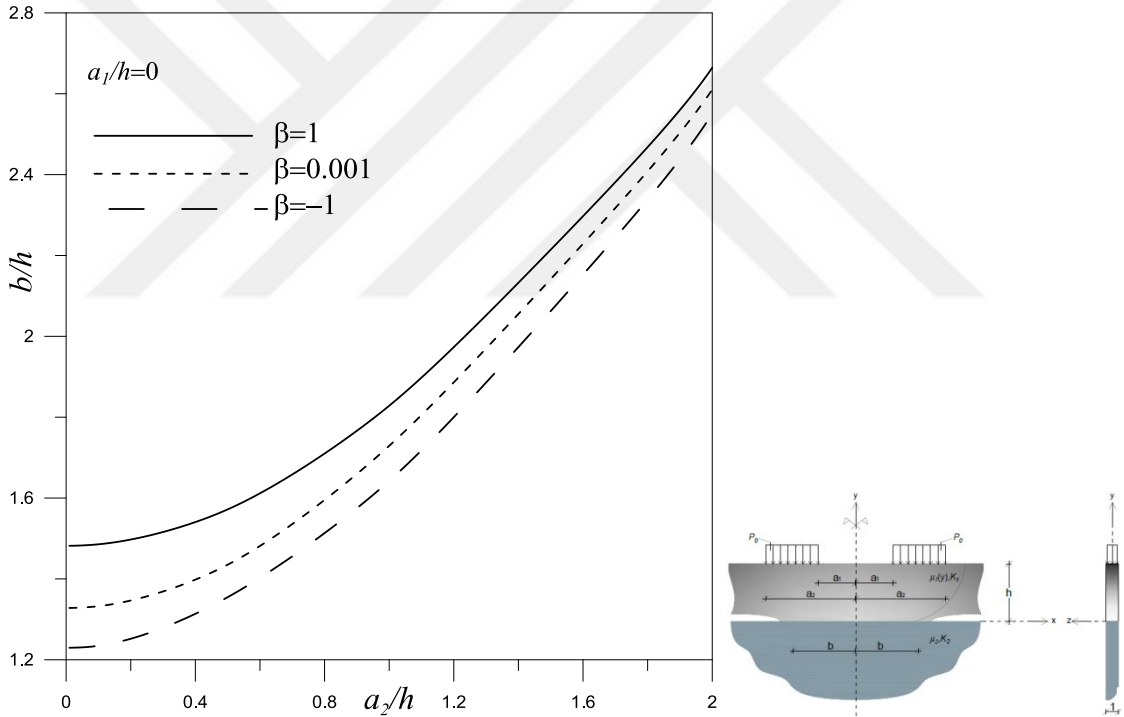
Tablo 1’de, yayılı yükün başlama mesafesi sabit tutulup ( $a_1/h = 0$ ), artan yayılı yükün bitiş mesafesi  $a_2/h$  göre seçilen farklı rijitlik değişim parametresi değerleri için yarı temas uzunluğu  $b/h$  değişimi gösterilmiştir. Şekil 2’de ise bunların değişimleri grafik olarak verilmektedir. Buna göre temas uzunluğunun,  $a_2/h$  oranının artması ile arttığı görülmektedir. Ayrıca, rijitlik değişim parametresi ( $\beta$ ) değeri arttıkça temas uzunluğunun da arttığı görülmektedir.

Tablo 2’de, yayılı yükün başlama mesafesi ( $a_1/h = 0,05$ ) değeri için temas uzunluğunun değişimi verilmiştir. Buna göre temas uzunluğu,  $a_2/h$  oranının ve rijitlik değişim parametresinin değerinin artması ile artmaktadır. Şekil 3’de ise aynı parametrelerin değişimleri grafik olarak verilmektedir.

Tablo 3’de, yayılı yükün bitiş mesafesi sabit tutulup ( $a_2/h = 1$ ), artan yayılı yükün başlangıç mesafesi oranına ( $a_1/h$ ) göre seçilen farklı rijitlik değişim parametresi değerleri için temas uzunluğunun değişimi gösterilmiştir. Şekil 4’de ise aynı parametrelerin değişimleri grafik olarak verilmektedir. Buna göre temas uzunluğunun,  $a_1/h$  oranının artması ile arttığı görülmektedir. Ayrıca rijitlik değişim parametresi değeri arttıkça temas uzunluğunun da arttığı görülmektedir.

**Tablo 1.** Çeşitli rijitlik değişim parametresi değerleri için temas uzunluğunun  $a_2/h$  değeri ile değişimi ( $a_1/h = 0, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ )

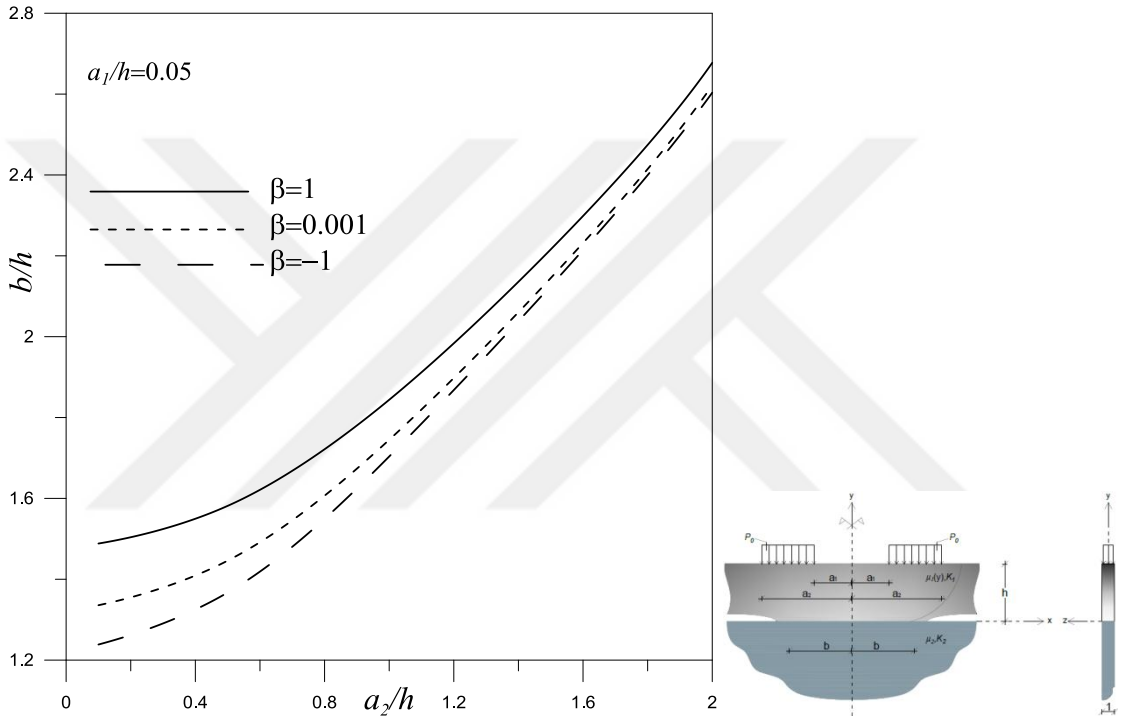
$a_2/h$	$b/h$		
	$\beta = -1$	$\beta = 0,001$	$\beta = 1$
0,01	1,2297	1,3281	1,4819
0,02	1,2299	1,3283	1,4820
0,05	1,2307	1,3292	1,4828
0,10	1,2346	1,3325	1,4856
0,50	1,3548	1,4351	1,5719
1,00	1,6423	1,7291	1,8283
2,00	2,5506	2,6102	2,6644



**Şekil 2.** Çeşitli rijitlik değişim parametresi değerleri için temas uzunluğunun  $a_2/h$  değeri ile değişimi ( $a_1/h = 0, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ )

**Tablo 2.** Çeşitli rijitlik değişim parametresi değerleri için temas uzunluğunun  $a_2/h$  değeri ile değişimi ( $a_1/h = 0,05, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ )

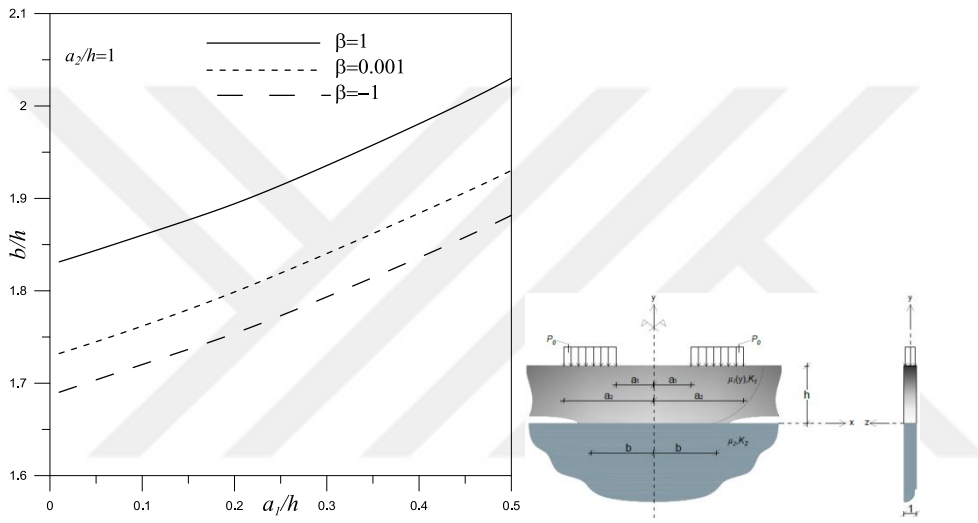
$a_2/h$	$b/h$		
	$\beta = -1$	$\beta = 0,001$	$\beta = 1$
0,10	1,2385	1,3357	1,4883
0,50	1,3671	1,4460	1,5815
1,00	1,7036	1,7449	1,8439
2,00	2,6035	2,6216	2,6774



**Şekil 3.** Çeşitli rijitlik değişim parametresi değerleri için temas uzunluğunun  $a_2/h$  değeri ile değişimi ( $a_1/h = 0,05, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ )

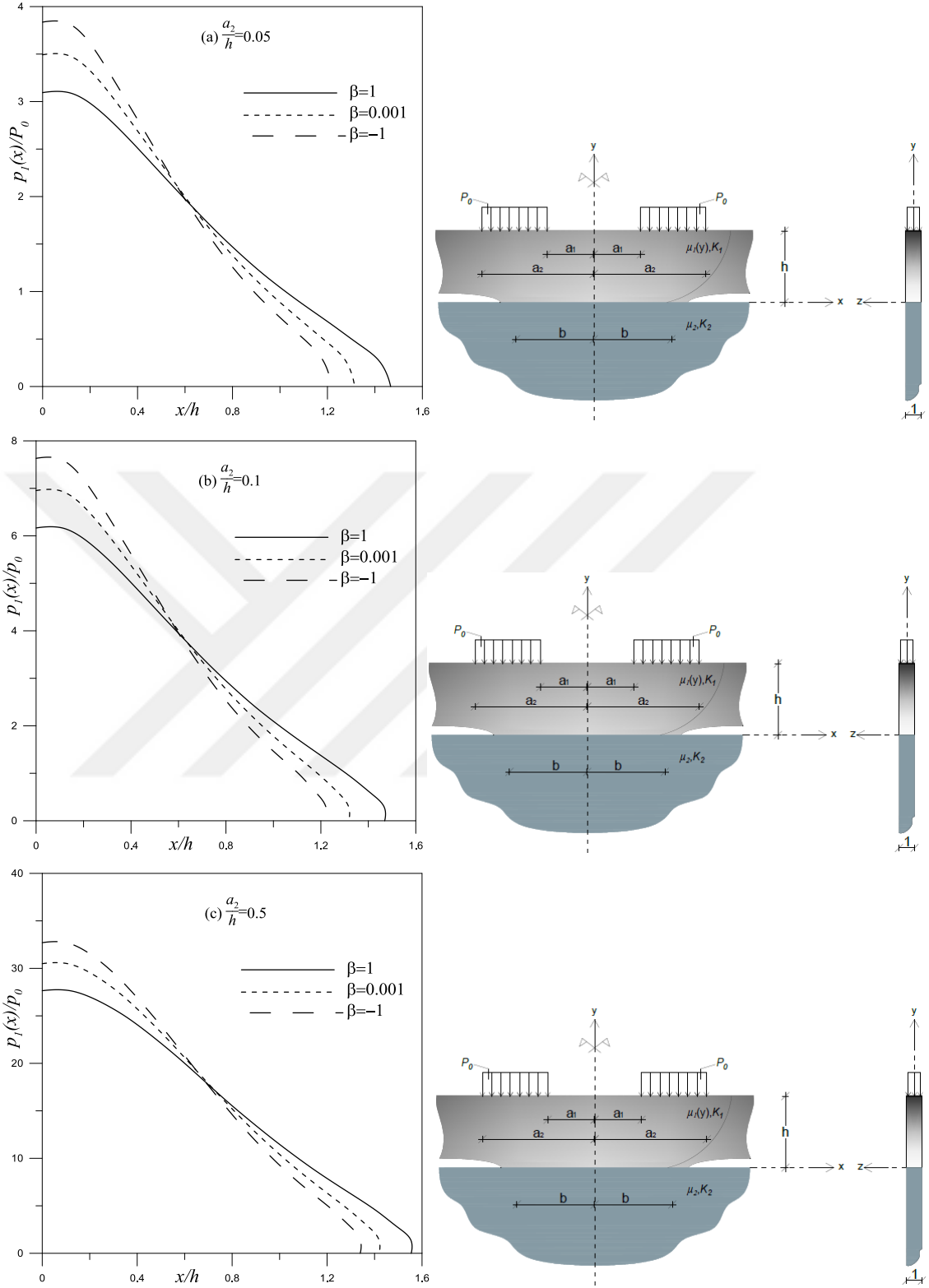
**Tablo 3.** Çeşitli rijitlik değişim parametresi değerleri için temas uzunluğunun  $a_1/h$  değeri ile değişimi ( $a_2/h = 1, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ )

$a_1/h$	$b/h$		
	$\beta = -1$	$\beta = 0,001$	$\beta = 1$
0,01	1,6902	1,7321	1,8313
0,05	1,7036	1,7449	1,8439
0,10	1,7202	1,7618	1,8602
0,20	1,7539	1,7987	1,8942
0,50	1,8817	1,9302	2,0301



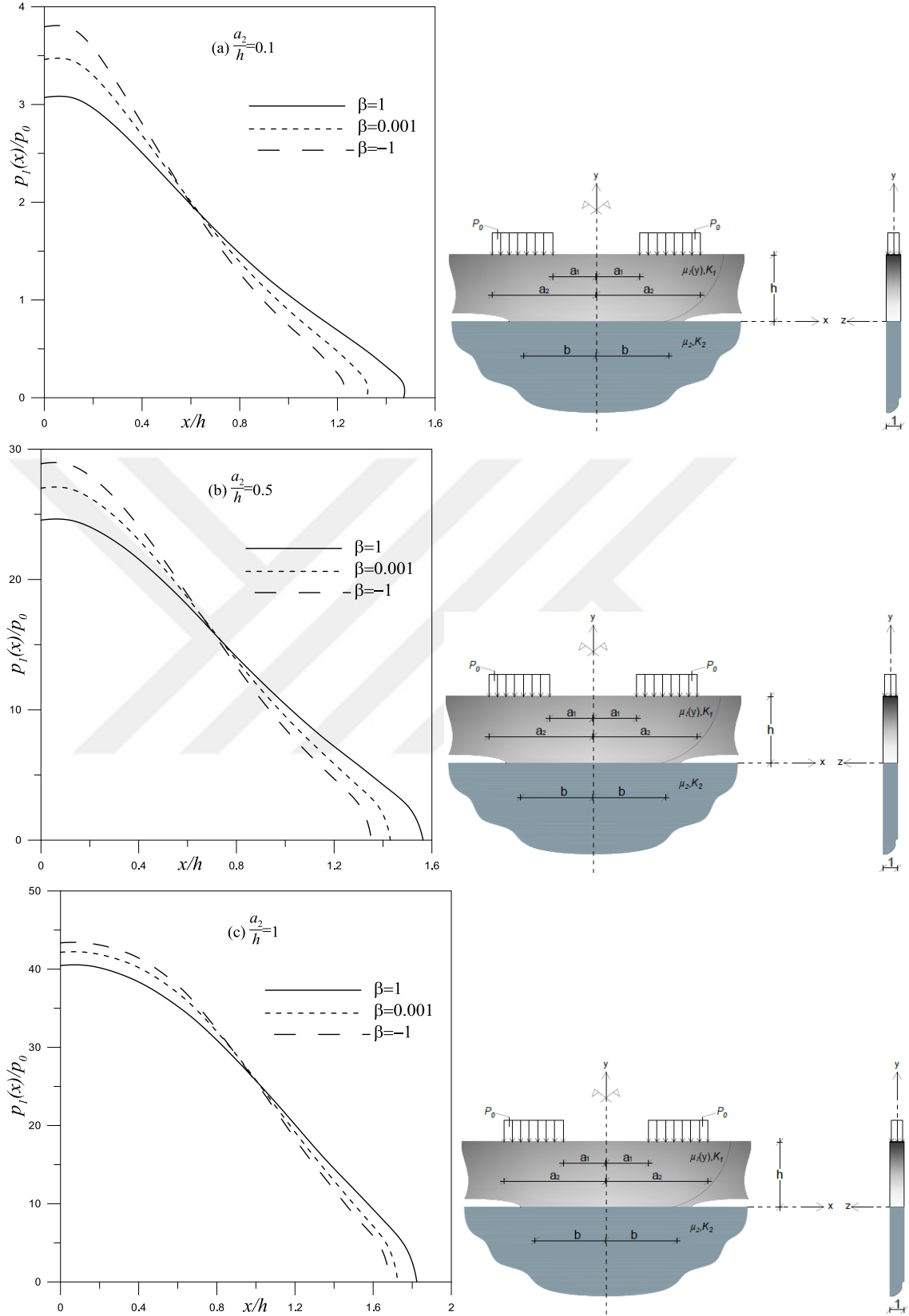
**Şekil 4.** Çeşitli rijitlik değişim parametresi değerleri için temas uzunluğunun  $a_1/h$  değeri ile değişimi ( $a_2/h = 1, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ )

Şekil 5 ve Şekil 6 'da, temas gerilme yayılışlarının; yayılı yükün başlangıç mesafesi  $a_1/h$  sabit tutulup yayılı yükün bitiş mesafesinin  $a_2/h$  farklı değerleri için rijitlik değişim parametresi  $\beta$  ile değişimleri gösterilmiştir. Grafiklerden de görüleceği gibi rijitlik değişim parametresi  $\beta$  arttıkça temas gerilmeleri simetri eksenine yakın bölgelerde azalmakta ve temasın bittiği noktaya yaklaştıkça artmaktadır. Şekil 7'de ise temas gerilme yayılışlarının; yayılı yükün bitiş mesafesi  $a_2/h$  sabit tutulup yayılı yükün başlangıç mesafesinin  $a_1/h$  farklı değerleri için rijitlik değişim parametresi  $\beta$  ile değişimleri gösterilmiştir. Grafik incelendiğinde, rijitlik değişim parametresi  $\beta$  artmasıyla temas gerilmeleri simetri eksenine yakın bölgelerde azalmakta olduğu, temasın bittiği noktaya yaklaştıkça arttığı görülmektedir.

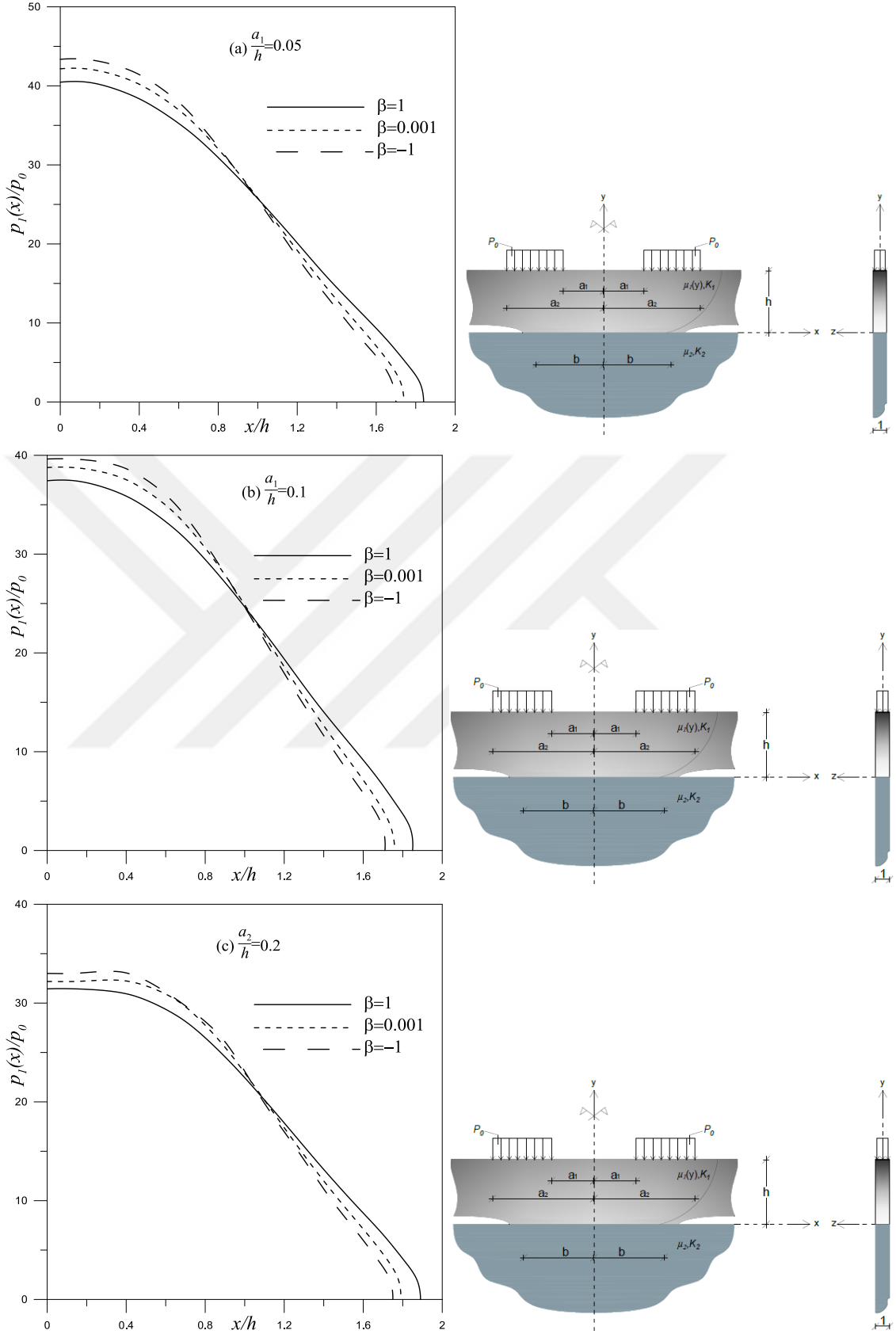


**Şekil 5.** Çeşitli rijitlik değişim parametresi değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki temas gerilme yayılışlarının  $a_2/h$  değeri ile değişimi ( $a_1/h = 0, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ ), (a, b, c)



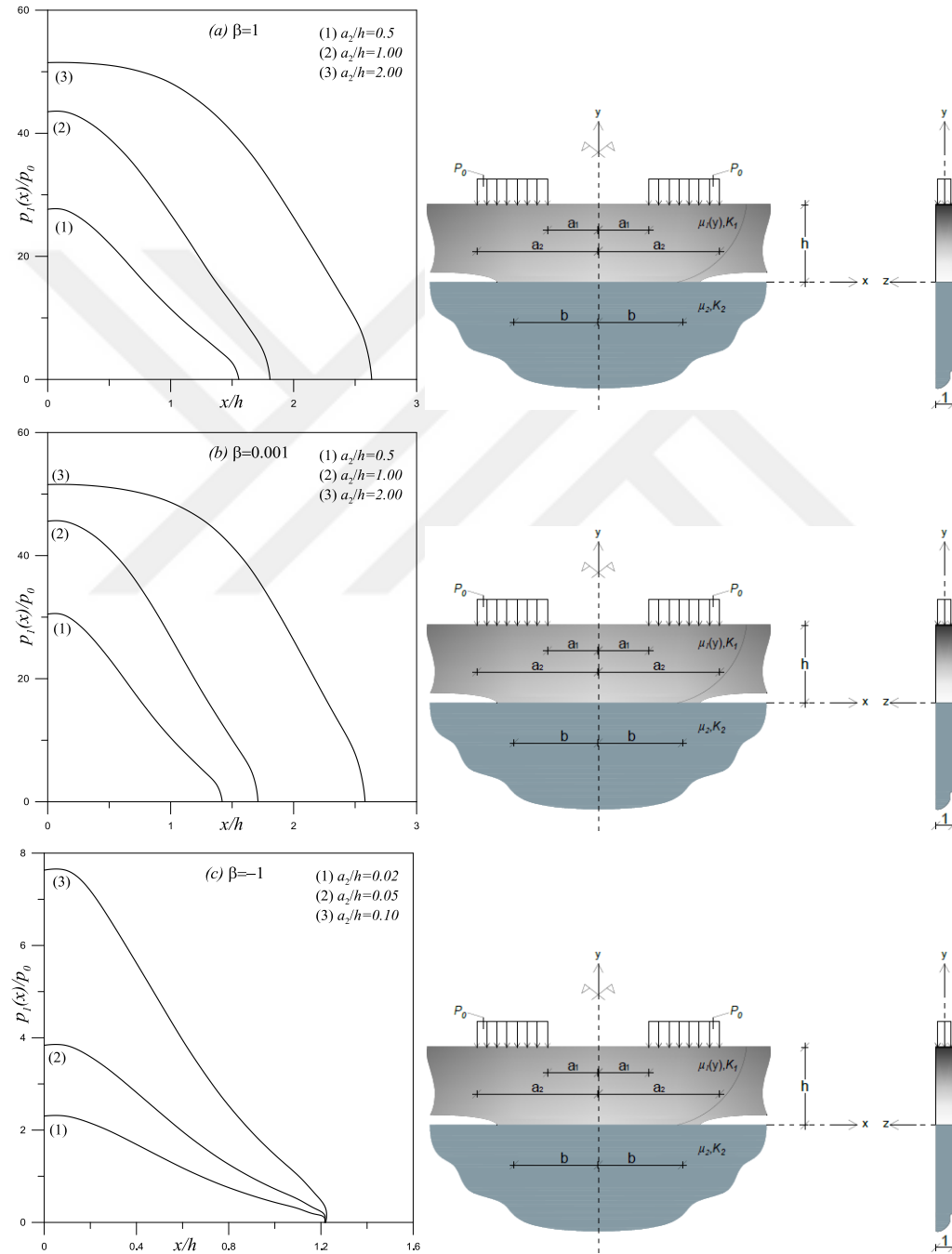


**Şekil 6.** Çeşitli rijitlik değişim parametresi değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki temas gerilme yayılışlarının  $a_2/h$  değeri ile değişimi ( $a_1/h = 0,05, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ ), (a, b, c)

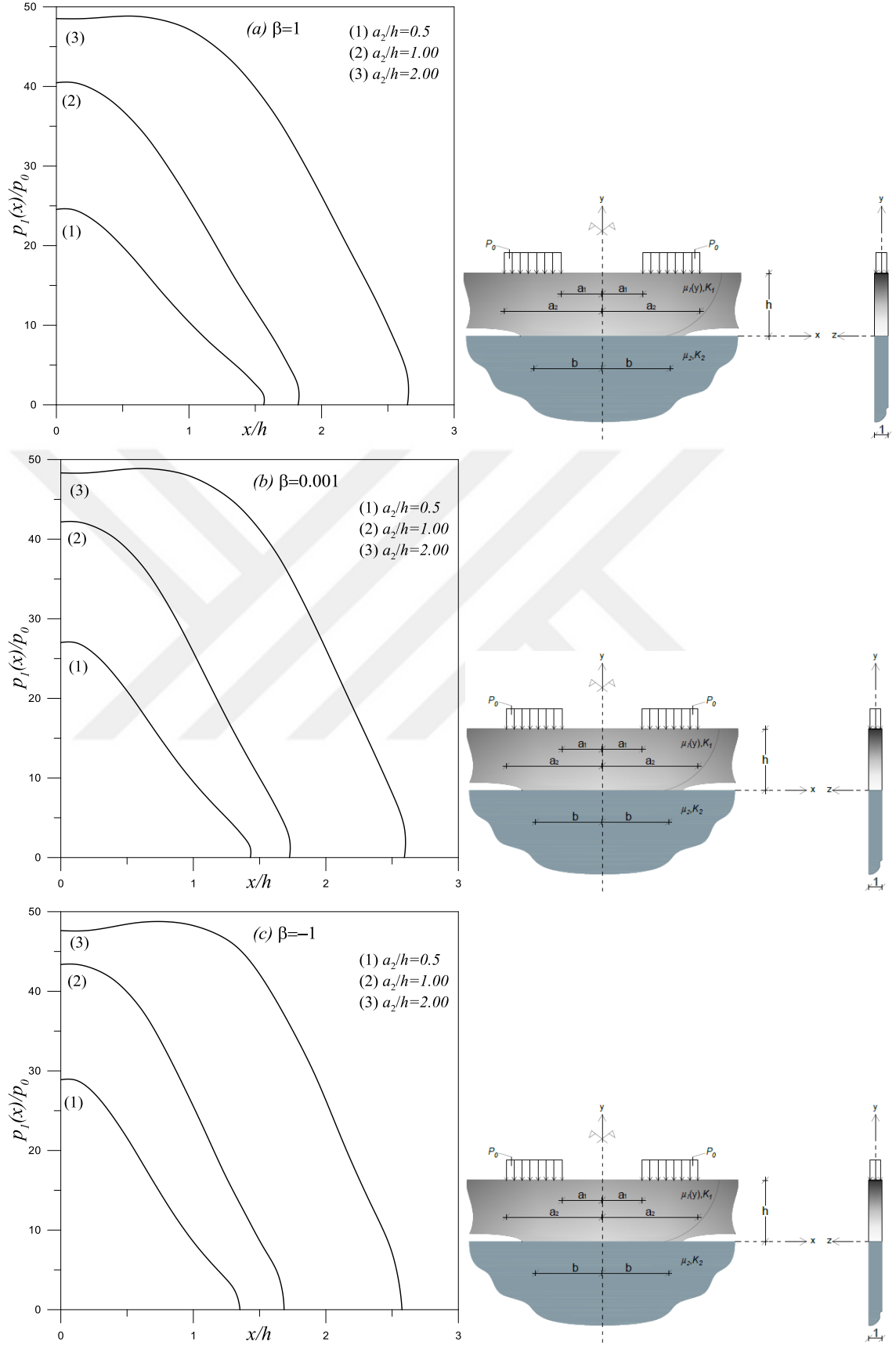


**Şekil 7.** Çeşitli rijitlik değişim parametresi değerleri için FD tabaka ile elastik yarı düzlem arasındaki temas gerilme yayılışlarının  $a_1/h$  değeri ile değişimi ( $a_2/h = 1, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ ), (a, b, c)

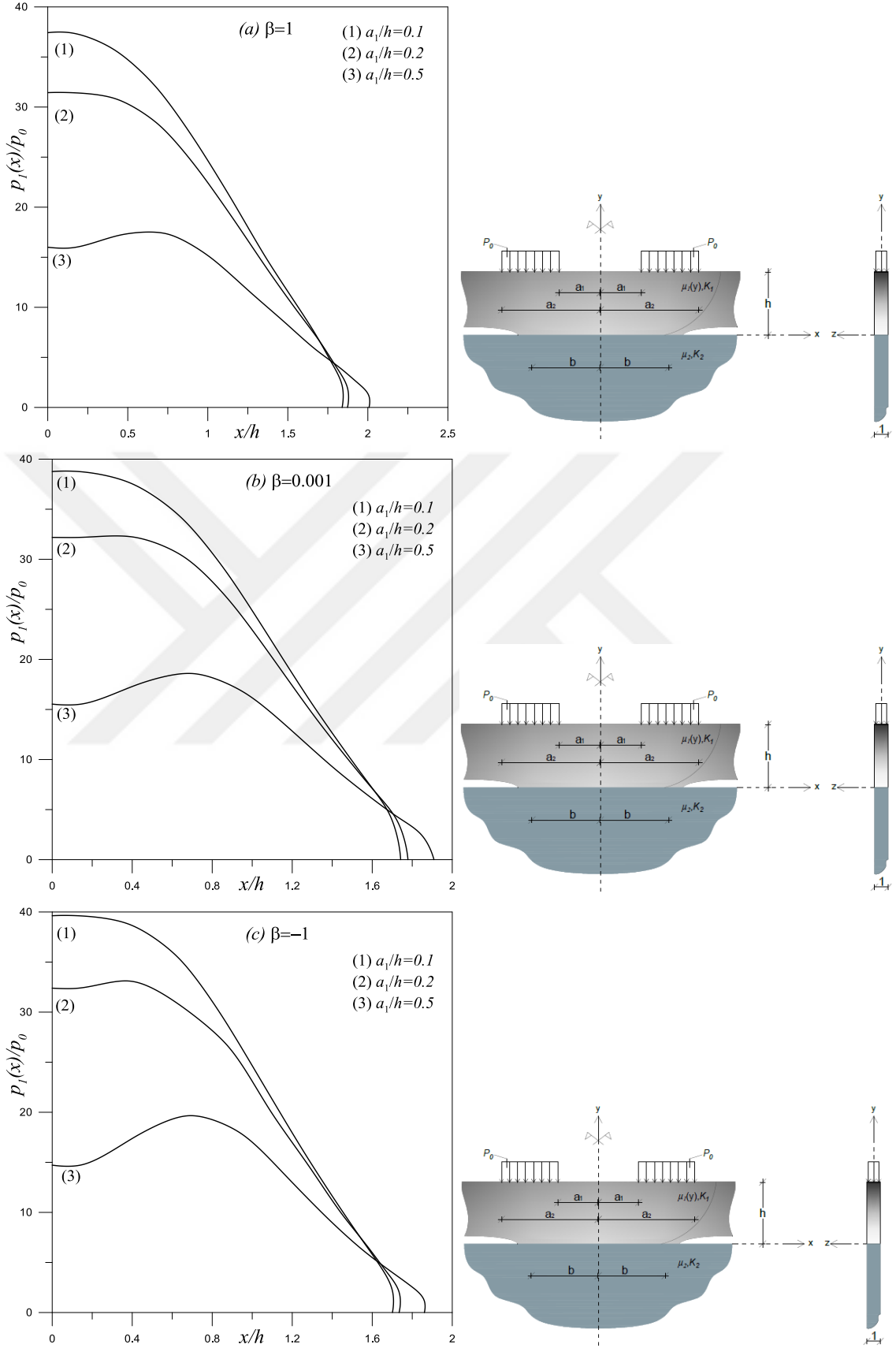
Şekil 8 ve Şekil 9'da temas gerilme yayılışlarının, yayılı yükün bitiş mesafesinin tabaka yükseliğine oranı ile değişimleri gösterilmiştir. Grafiklerden de görüleceği gibi  $a_2/h$  oranı arttıkça temas gerilmeleri artmaktadır. Şekil 10'da ise temas gerilme yayılışlarının, yayılı yükün başlama mesafesinin tabaka yükseliğine oranı ile değişimleri gösterilmiştir. Şekilden  $a_1/h$  oranı arttıkça temas gerilmelerinin azaldığı görülmektedir.



Şekil 8. Çeşitli  $a_2/h$  değerleri için FD tabaka ile elastik yarı düzlem arasındaki temas gerilme yayılışları ( $a_1/h = 0, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ ), (a, b, c)



**Şekil 9.** Çeşitli  $a_2/h$  değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki temas gerilme yayılışları ( $a_1/h = 0,05$ ,  $\kappa_1/\kappa_2 = 1$ ), (a, b, c)



**Şekil 10.** Çeşitli  $a_1/h$  değerleri için FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki temas gerilme yayılışları ( $a_2/h = 1, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ ), (a, b, c)

Tablo 4'de ise yarı temas uzunluklarının çeşitli yükleme ve rijitlik değişim parametresi değerleri için özel bir durum olan El-Borgi vd. (2006) ile karşılaştırılması verilmektedir. Tablodan da görüldüğü gibi mevcut çözümden elde edilen sonuçlar ile El-Borgi vd. (2006)'nin elde etmiş olduğu sonuçlar birbiriyle uyumludur.

**Tablo 4.** Çeşitli  $a_2/h$  ve  $\beta$  değerleri için yarı temas uzunluğu ( $b/h$ ) değişiminin karşılaştırılması ( $a_1/h = 0, \kappa_1/\kappa_2 = 1$ ) (El-Borgi vd., 2006).

$a_2/h$	$\beta = -1$		$\beta = 0,001$		$\beta = 1$	
	Sunulan Çalışma	El-Borgi vd.(2006)	Sunulan Çalışma	El-Borgi vd.(2006)	Sunulan Çalışma	El-Borgi vd.(2006)
0,01	1,2297	1,1778	1,3281	1,3243	1,4819	1,6026
1,00	1,6423	1,6528	1,7291	1,7229	1,8283	1,9800
2,00	2,5506	2,5154	2,6102	2,6064	2,6644	2,8600

#### 4. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Bu çalışmada, üstten simetrik yayılı yük ile yüklenmiş, elastik yarım düzleme oturan FD tabakanın sürtünmesiz temas problemi elastisite teorsine göre incelenmiştir. Çalışmada, FD tabakanın kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir. Söz konusu problemin incelenmesinde, bilinmeyen temas uzunluğu ve temas gerilmesi elastisite teorisine göre analitik olarak hesaplanmıştır. Yarı temas uzunluğu ( $b/h$ ) ve temas gerilme yayılışı  $p_2(x)/p_0$ ;  $\beta$ ,  $a_1/h$  ve  $a_2/h$  gibi çeşitli malzeme özellikleri ve yükleme durumları için incelenmiştir. Çalışma sonunda elde edilen sonuçlar aşağıda özetlenmiştir:

Rijitlik parametresi  $\beta > 0$  olması durumunda, FD tabakanın rijitliği alt yüzeyinden üst yüzeyine doğru artmaktadır.  $\beta < 0$  olması halinde ise tam tersi bir durum söz konusudur. Rijitlik değişim parametresi  $\beta$  değeri azaldıkça, tabakanın rijitliği azalmaktadır.  $\beta$  değeri arttıkça temas uzunluğu artmaktadır. Temas gerilmesi ise simetri ekseninde azalırken temasın bittiği bölgede artmaktadır. Rijitlik değişim parametresi, temas mesafesi ve temas gerilme yayılışı üzerinde önemli bir etkiye sahiptir

( $\beta h > 0$ ) yada ( $\beta h < 0$ ) olması durumları için farklı sonuçlara ulaşılmıştır. Yük parametrelerinin sabit değeri için ( $\beta h$ ) değeri negatif olduğunda ve mutlak değerce artırıldığında, temas uzunluğunun azalmasına ve temas gerilmesinin en büyük değerinin artmasına neden olmaktadır. ( $\beta h$ ) değerinin negatif olması durumunda en büyük değeri için temas bölgesi en küçük değerini almaktadır. Bunun aksi bir etki ( $\beta h$ ) değeri pozitif yönde artması durumunda meydana gelmektedir. ( $\beta h$ ) değeri pozitif olduğunda ve artırıldığında, temas gerilmesinin tepe noktası azalmakta ve temas uzunluğu ise artmaktadır. ( $\beta h$ ) değeri pozitif doğrultuda büyürse, FD tabakanın eğilme rijitliği ve temas uzunluğu artar. Öte yandan ( $\beta h$ ) değeri negatif olması FD tabakanın eğilme rijitliği azalmasına ve daha küçük temas bölgelerine yol açar.

FD tabaka üzerindeki yayılı yükün genişliği artıkça, temas uzunluğu ve temas gerilmeleri artmaktadır. FD tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki temas gerilmeleri  $x=0$  simetri kesitinde en büyük değerine ulaşmakta, temasın sona erdiği  $x = \pm b$  noktalarında sıfır olmaktadır.

## 5. ÖNERİLER

Bu tez çalışmasından elde edilen sonuçlardan hareketle gelecekte yapılacak çalışmalara ışık tutması amacıyla, aşağıdaki önerilerin dikkate alınması tavsiye edilmektedir.

ANSYS paket programına; fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın kayma modülünün ve elastisite modülünün tabaka yüksekliği boyunca bir fonksiyona bağlı olarak değişimini sağlayacak ek bir program kodu yazılması suretiyle problemin çözümü numerik olarak gerçekleştirilebilir.

Problem farklı geometrilerde ve yükleme durumları için çözülebilir.



## KAYNAKLAR

- Abanoz, M., 2018.** Rijit Bir Panç Aracılığıyla Yüklenmiş ve Rijit Temele Bağlanmış Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakanın Temas Problemi. Yüksek Lisans Tezi. Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Rize, Türkiye, 66s.
- Adıyaman, G., Birinci, A., Öner, E. and Yaylacı, M., 2016.** A receding contact problem between a functionally graded layer and two homogeneous quarter planes. *Acta Mechanica*. 227, 1753–1766.
- Adıyaman, G., Öner, E. and Birinci, A., 2017.** Continuous and discontinuous contact problem of a functionally graded layer resting on a rigid foundation. *Acta Mechanica*. 228, 303–317.
- Aizikovich, S.M., Vasilev, A.S., Krenev, L.I., Trubchik, I.S. and Seleznev, N.M., 2011.** Contact problems for functionally graded materials of complicated structure. *Mechanics of Composite Materials*, 47, 539–548.
- Apatay, T., 2010.** Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kaplamalarda Çatlak ve Temas Problemi. Doktora Tezi. Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, Türkiye, 131s.
- Balcı, M.N., Dağ, S. and Yıldırım, B., 2017.** Subsurface stresses in graded coatings subjected to frictional contact with heat generation. *Journal of Thermal Stresses*, 40, 517–534.
- Chen, P. and Chen, S., 2012.** Contact behaviors of a rigid punch and a homogeneous half space coated with a graded layer. *Acta Mechanica*, 223, 563–577.
- Choi, H.J., 2009.** On the plane contact problem of a functionally graded elastic layer loaded by a frictional sliding flat punch. *Journal Mechanical Science Technology*, 23 (10), 2703–2713.
- Çömez, İ., 2009.** Rijit Dairesel Bir Pançla Bastırılan Elastik Tabaka ve Yarım Düzlemin Sürtünmeli Temas Problemi. Doktora Tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, Türkiye, 128s.
- Çömez, İ., 2013.** Contact problem of a functionally graded layer resting on a winkler foundation. *Acta Mechanica*, 224, 2833-2843.
- Çömez, İ., 2014.** Elasticity solution for a functionally graded two-layer beam with simple supported edges. *Turkish Journal of Engineering & Environmental Sciences*, 38, 373-381.
- Çömez, İ., 2015.** Contact problem for a functionally graded layer intended by a moving punch. *International Journal of Mechanical Sciences*, 100, 339-344.

- Çömez, İ., 2019.** Continuous and discontinuous contact problem of a functionally graded layer pressed by a rigid cylindrical punch. *European Journal of Mechanics / A Solids*, 73, 437-448.
- Çömez, İ., El-Borgi, S., Kahya, V. and Erdöl, R., 2016.** Receding contact problem for two layer functionally graded media indented by a rigid punch. *Acta Mechanica*, 227, 2493-2504.
- Çömez, İ., Kahya, V. and Erdöl, R., 2018.** Plane receding contact problem for a functionally graded layer supported by two quarter-planes. *Archives of Mechanics*, 70, 485-504.
- El-Borgi, S., Abdelmoula, R. and Keer L., 2006.** A receding contact problem between a functionally graded layer and a homogeneous substrate. *International Journal of Solids and Structures*, 43, 658-674.
- El-Borgi, S., Usman, S. and Güler, M.A., 2014.** A frictional receding contact plane problem between a functionally graded layer and a homogeneous substrate. *International Journal of Solids and Structures*, 51, 4462-4476.
- Erdoğan, F. and Gupta, G.D., 1972.** On the numerical solution of singular integral equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, 29, 525-534.
- Galín, L.A., 1961.** *Contact Problems in the Theory of Elasticity*. North Carolina State College Translation Series, Raleigh, North Carolina.
- Giannakopoulos, A.E. and Suresh, S., 1997a.** Indentation of solids with gradients in elastic properties: part I. point force. *International Journal of Solids and Structures*, 34, 2357-2392.
- Giannakopoulos, A.E. and Suresh, S., 1997b.** Indentation of solids with gradients in elastic properties: part II. axisymmetric indentors. *International Journal of Solids and Structures*, 34, 2393-2428.
- Guler, M.A. and Erdogan, F., 2004.** Contact mechanics of graded coatings. *International Journal of Solids and Structures*, 41, 3865-3889.
- Guler, M.A. and Erdogan, F., 2007.** The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. *International Journal of Mechanical Sciences*, 49, 161-182.
- Guler, M.A., Alinia, Y. and Adibnazari, S., 2012.** On the rolling contact problem of two elastic solids with graded coatings. *International Journal of Mechanical Sciences*, 64, 62-81.
- Gün, H. and Gao, X.W., 2014.** Analysis of frictional contact problems for functionally graded materials using BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 38, 1-7.

- Hes, M., 2016.** A simple method for solving adhesive and non-adhesive axisymmetric contact problems of elastically graded materials. *International Journal of Engineering Science*, 104, 20-33.
- Johnson, K.L., 1985.** *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Ke, L. and Wang, Y., 2006.** Two-Dimensional contact mechanics of functionally graded materials with arbitrary spatial variations of material properties. *International Journal of Solids and Structures*, 43, 5779-5798.
- Ke, L. and Wang, Y., 2007.** Two-Dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 26, 171-188.
- Koizumi, M., 1993.** Concept of FGM. *Ceramic Transactions*, 34, 3-10.
- Liu, T. and Wang, Y.S., 2008.** Axisymmetric frictionless contact problem of a functionally graded coating with exponentially varying modulus. *Acta Mechanica*, 199, 151-165.
- Liu, T.J., Zhang, C., Wang, Y.S. and Xing, Y.M., 2016.** The axisymmetric stress analysis of double contact problem for functionally graded materials layer with arbitrary graded materials properties. *International Journal of Solids and Structures*, 96, 229–239.
- Muskhelishvili, N.I., 1953.** *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*. Noordhoff, Groningen.
- Nikbakht, A., Arezoodar, A.F., Sadighi, M. and Talezadeh, A., 2014.** Analyzing contact problem between a functionally graded plate of finite dimensions and a rigid spherical indenter. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 47, 92-100.
- Öner, E., 2017.** Rijit Bir Blok Aracılığıyla Yüklenmiş ve Elastik Yarım Düzleme Oturan Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakanın Sürekli ve Süreksiz Temas Problemi. Doktora Tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, Türkiye, 135s.
- Öztürk, A., 2009.** Fonksiyonel Derecelendirilmiş Bir Silindirde Malzeme Özelliklerinin Isıl Gerilme Dağılımına Etkisinin Parametrik İncelenmesi, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, Türkiye, 198s.
- Sneddon, I.N., 1951.** *Fourier Transforms*. McGraw-Hill, New York.
- Uffliand, I.S., 1965.** *Survey of Articles on the Application of Integral Transforms in the Theory of Elasticity*. North Carolina State College Translation Series, Raleigh, North Carolina.
- Volkov, S., Aizikovich, S., Wang, Y.S. and Fedotov, I., 2013.** Analytical solution of axisymmetric contact problem about indentation of a circular indenter into a soft functionally graded elastic layer. *Acta Mechanica Sinica*, 29, 196-201

- Wagih, A., Attia, M.A., AbdelRahman, A.A., Bendine, K. and Sebaey, T.A., 2019.** Analyzing contact problem between a functionally graded plate of finite dimensions and a rigid spherical indenter. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 47, 92-100.
- Yan, J. and Li, X., 2015.** Double receding contact plane problem between a functionally graded layer and an elastic layer. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 53, 143-150.
- Yang, J. and Ke, L., 2008.** Two-dimensional contact problem for a coating-graded layer substrate structure under a rigid cylindrical punch. *International Journal of Mechanical Sciences*, 50, 985-994.



## ÖZGEÇMİŞ

Müjgen YAYLI, 01/03/1991 tarihinde Trabzon'da doğdu. İlköğretimini 2005 yılında Ortahisar ilçesinde 100. Yıl İlköğretim Okulu'nda ve Ortaöğretimini 2009 yılında Ortahisar ilçesinde Yunus Emre tamamladı. 02.09.2010 tarihinde başladığı lisans eğitimini 10/07/2014 tarihinde Atatürk Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nde tamamladı. 2015 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda başladığı yüksek lisans öğrenimine halen devam etmektedir.

