

T.C.
RECEP TAYYIP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN DENKLEMLER VE GEOGEBRA UYGULAMALARI

KADİR ÖMEROĞLU

TEZ DANIŞMANI
DR. ÖĞR. ÜYESİ İŐHAK CUMHUR
TEZ JÜRİLERİ
DR. ÖĞR. ÜYESİ MEHMET ÜNLÜ
DR. ÖĞR. ÜYESİ AYŞE KABATAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI




RİZE-2019

Her Hakkı Saklıdır

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN DENKLEMLER VE GEOGEBRA UYGULAMALARI

Dr. Öğr. Üyesi İshak CUMHUR danışmanlığında, Kadir ÖMEROĞLU tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafından 24/05/2019 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	Unvanı Adı Soyadı	İmzası
Başkan	: Dr. Öğr. Üyesi İshak CUMHUR	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ÜNLÜ	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Ayşe KABATAŞ	


Doç. Dr. Ferhat KALANCI
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Matematik öğretiminde görselleştirme önemli bir yere sahiptir. Birçok branşta eğitim amaçlı değişik görsel uygulamalar oluşturulmuştur. Bu tip uygulamalarda görsellikler, geometrik çizimlerden yararlanılarak sağlanmıştır. Bu görselleştirmelerle beraber analitik ve cebirsel problemlerin çözümleri de araştırılmıştır. Çalışmada lineer olmayan denklemlerin çözümleri için GeoGebra’da görsel arayüzler tasarlanmıştır. Bu şekildeki arayüzlerle aslında teorik olan bir dersi daha anlaşılır hale getirmek amaçlanmıştır.

Çalışmamın bütün aşamalarında yönlendirmeleri ve fikirleriyle büyük destek sağlayan, bana her konuda yardımcı olan ve yol gösteren tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi İshak CUMHUR’a teşekkürlerimi sunarım.

Tüm çalışmam boyunca bana manevi desteğini hissettiren, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen sevgili eşim Elif ÖMEROĞLU’na da ayrıca teşekkür ederim. Her bilgisayar başına oturduğumda yanımda bekleyen canım oğlum Muhammed Burak iyi ki varsın.

Kadir ÖMEROĞLU

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan “Lineer Olmayan Denklemler ve Geogebra Uygulamaları” başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 24/05/2019



Kadir ÖMEROĞLU

***Uyarı:** Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.*

ÖZET

LİNEER OLMAYAN DENKLEMLER VE GEOGEBRA UYGULAMALARI

Kadir ÖMEROĞLU

**Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi İshak CUMHUR**

Bu çalışmada amacımız dinamik matematik yazılımı olan GeoGebra ile sayısal analizde yer alan lineer olmayan denklemler konusu ile ilgili görsel uygulamalar oluşturmak. GeoGebra'nın lise ve üniversite düzeyinde matematik öğretiminde önemli bir potansiyeli vardır. Lineer olmayan denklemleri çözmek için birkaç sayısal yöntem başlığı altında GeoGebra arayüzlerinin oluşturulması hedeflenmektedir. Özel olarak bu çalışmada ele alınan yöntemler; yarılama, Regula-Falsi, Newton-Raphson, sekant, sabit nokta iterasyonu ve Müller yöntemi şeklindedir.

2019, 56 sayfa

Anahtar Kelimeler: GeoGebra, Sayısal Denklem Çözme, Etkileşimli Öğrenme, Matematiksel Aktiviteler, Lineer Olmayan Denklemler

ABSTRACT

NONLINEAR EQUATION AND GEOGEBRA APPLICATIONS

Kadir ÖMEROĞLU

**Recep Tayyip Erdogan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Asst. Prof. Dr. İshak CUMHUR**

In this paper, our goal is to create the visual applets with regard to nonlinear equation subject in numerical analysis by using dynamic mathematical software GeoGebra. GeoGebra has a substantial potential for teaching mathematics in high school and the university. This paper aims to build up the GeoGebra interfaces for the subjects of several numerical interactive method to solve nonlinear equations. Specifically, the methods to be dealt with in this paper are the bisection, the Regula-Falsi, the Newton-Raphson, secant method, fixed point iteration and Muller's method

2019, 56 pages

Keywords: GeoGebra, Numerical Equation Solving, Interactive Learning, Mathematic Activities, Nonlinear Equation

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	I
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	II
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VII
TABLolar DİZİNİ.....	IX
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. GeoGebra'nın Geliştirilişi.....	2
1.3. GeoGebra'nın Bölümleri.....	4
1.4. GeoGebra'nın Kullanımı.....	7
1.5. GeoGebra'da Kullanılan Bazı Araçlar.....	9
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	12
2.1. Sayısal Analiz Yöntemleri.....	12
2.2. Yakınsaklık Analizi.....	13
2.3. Doğrusal Olmayan Denklemlere Giriş.....	13
2.4. İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi.....	14
2.4.1. Yarılama (Bisection) Yakınsaklık Analizi.....	15
2.4.2. İkiye Bölme Yönteminin Dezavantajları.....	18
2.5. Regula Falsi Yöntemi ve Yakınsaklık Analizi.....	19
2.6. Newton-Raphson Yöntemi.....	24
2.6.1. Newton-Raphson Yöntemi Yakınsaklık Analizi.....	25
2.6.2. Newton-Raphson Yönteminin Dezavantajları.....	26
2.7. Kirişler (Sekant) Yöntemi ve Yakınsaklık Analizi.....	28

2.8. Sabit Nokta İterasyon Yöntemi ve Yakınsaklık Analizi.....	32
2.9. Müller Yöntemi	34
3. BULGULAR	37
4. TARTIŞMA ve SONUÇLAR	51
5. ÖNERİLER.....	52
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	56



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. GeoGebra dinamik çalışma sayfası	4
Şekil 2. Grafik görünümü taşı ve komutlar kısmı	6
Şekil 3. GeoGebra'nın dinamik yapısında eksenleri ve ağları kapatıp açma	7
Şekil 4. GeoGebra da fonksiyon girişi ve köklerin bulunuşu	8
Şekil 5. Nokta, doğru, doğru parçası, ışın, kesişim noktası.....	10
Şekil 6. Sürgü çubuğu örnek görünümü	11
Şekil 7. İkiye bölme yönteminin geometrik gösterimi a) kök $[a, c]$ aralığındaki gösterimi b) kök $[c, b]$ aralığındaki gösterimi	14
Şekil 8. Yarılama yöntemi ile hesaplanamayacak kökler.....	18
Şekil 9. Yarılama yönteminde oluşan hata uygulaması	18
Şekil 10. Alt ve üst sınırlara kök değerleri girilmesi durumunda oluşan hata uygulaması	19
Şekil 11. Regula Falsi yönteminin geometrik gösterimi a) kök $[a, c]$ aralığındaki gösterimi, b) kök $[c, b]$ aralığındaki gösterimi	20
Şekil 12. Regula-Falsi yakınsama durumu	21
Şekil 13. Newton Raphson yönteminin geometrik gösterimi.....	24
Şekil 14. Newton-Raphson yönteminin GeoGebra arayüzü üzerinde hata gösterimi	27
Şekil 15. Hata uygulaması yakın plan gösterimi	27
Şekil 16. Kirişler yönteminin geometrik gösterimi.....	28
Şekil 17. Sabit nokta yönteminin a) yakınsama durumu, b) yakınsama durumu, c) iraksama durumu, d) iraksama durumu	33
Şekil 18. Müller yöntemi GeoGebra arayüz örneği	35
Şekil 19. Yarılama yöntemi için GeoGebra arayüz örneği	37
Şekil 20. GeoGebra uygulaması Örnek 1 yakın plan gösterimi	38
Şekil 21. Girilen fonksiyonun istenilen aralıkta sayısal çözümünde oluşan yaklaşık kökleri	38
Şekil 22. Regula-Falsi yöntemi için GeoGebra arayüz örneği	39
Şekil 23. GeoGebra uygulaması Örnek 2 yakın plan gösterimi	39
Şekil 24. Girilen denklemin istenilen aralıkta sayısal çözümünde oluşan yaklaşık kökleri	40
Şekil 25. Newton Raphson yöntemi için GeoGebra arayüz örneği	40
Şekil 26. GeoGebra uygulaması Örnek 3 çözümünde kullanılan teğet doğruları	41

Şekil 27. Girilen denklemin istenilen aralıkta sayısal çözümünde oluşan yaklaşık kökleri	41
Şekil 28. Secant yöntemi için GeoGebra arayüzü	42
Şekil 29. GeoGebra uygulaması Örnek 4 çözümünde kullanılan teğet doğruları	42
Şekil 30. Girilen denklemin istenilen aralıkta sayısal çözümünde oluşan yaklaşık kökleri	43
Şekil 31. Regula Falsi ile çözüm (yöntem karşılaştırma).....	44
Şekil 32. Kiriş yöntemi ile çözüm (yöntem karşılaştırma).....	44
Şekil 33. Sabit Nokta İterasyonu için GeoGebra arayüzü	45
Şekil 34. GeoGebra uygulaması Örnek 6 yakın plan gösterimi	45
Şekil 35. Girilen denklemin istenilen çözüm aralığında sayısal çözümünde oluşan yaklaşık kökleri	46
Şekil 36. 1. Durum için GeoGebra üzerinde çözüm görseli.....	47
Şekil 37. 2. Durum için GeoGebra üzerinde çözüm görseli.....	47
Şekil 38. 3. Durum için GeoGebra üzerinde çözüm görseli.....	48
Şekil 39. Müller yöntemi için GeoGebra arayüzü	48
Şekil 40. GeoGebra uygulamasında Örnek 8 için çözümde oluşan yaklaşık kökler	49
Şekil 41. Girilen denklemin istenilen çözüm aralığında sayısal çözümünde oluşan yaklaşık kökleri	49
Şekil 42. Girilen denklemin istenilen çözüm aralığında sayısal çözümünde oluşan yaklaşık kökleri	50

TABLolar DİZİNİ

Tablo 1. Bazı matematiksel semboller için GeoGebra kısaltmaları	6
Tablo 2. Boolean değişkenleri ve şartları	9



1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Yazılım sektörünün ilerlemesiyle her gün yeni programlar kullanıcılara sunulmaktadır. Bu programlardan ücretsiz açık kaynak kodlu GeoGebra programı, hem bilgisayar cebir sistemleri (BCS) özelliklerini hem de dinamik geometri yazılımı (DGY) özelliklerini bir arada içinde bulundurması, çeşitli dillere çevrilmesi ve kullanım kolaylığı yönleriyle de matematik öğretiminde önemli bir yer teşkil etmektedir (Kutluca ve Zengin, 2011).

GeoGebra geometri, cebir ve analizi birbiri ile ilişkili hale getiren dinamik bir matematik yazılımıdır. Bu yazılım Markus Hohenwarter tarafından 2001 yılında Salzburg Üniversitesi'nde yüksek lisans tezi olarak hazırlanıp, okullarda matematik öğretimine katkı sağlamak ve öğrenimi kolaylaştırmak için geliştirilmiştir. GeoGebra yazılımının geliştiricileri Markus Hohenwarter (Johannes Kepler Üniversitesi, Avusturya), Judith Hohenwarter (International GeoGebra Institute, Avusturya), Micheal Borchers (Birmingham), Mathieu Blossier (IREM-Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), Florian Sonner (Hamburg), yardımcı geliştirici olarak Yves Kreis (Luxemburg Üniversitesi) isimli araştırmacılarıdır (GeoGebra Resmi Web Sitesi, 2009).

Matematik öğretiminde görselleştirmelerden yararlanarak eğitim amaçlı birçok uygulamalar oluşturulmuştur. Bu tip uygulamalarla geometrik şekillerden daha çok yararlanılmış ve oluşturulan görsellerle birçok cebirsel ve analitik problemlerin çözümlerini incelemek daha pratik ve eğlenceli olmuştur.

Görsel matematik uygulamaları oluşturmak için kullanılan en önemli yazılımlardan biri de GeoGebra'dır. GeoGebra 2001 senesinde Markus Hohenwarter tarafından oluşturulmuştur ve günümüze kadar daha da geliştirilerek çok geniş bir uygulama sahası elde etmiştir.

Matematik öğretiminde birçok konunun öğretilmesinde, teorik olarak verilen bir konunun görsel olarak desteklenmesi çok önemlidir. Bu görselleştirmeler, öğrencilerin bu dersteki kavramları daha kısa sürede anlamalarını sağlar. Bu durumda GeoGebra, matematik öğretme ve öğrenme faaliyetlerinde etkin bir şekilde kullanılır. Matematikle alakalı birçok konuda kullanıcı etkileşimli uygulamalar geliştirmek için GeoGebra'dan yararlanılmıştır.

GeoGebra'nın birçok uygulamaları önceki çalışmalarda geliştirilmiştir. Sayısal iteratif yöntemlerin ele alındığı çalışmada lineer olmayan denklemler için eğitici düzeyde arayüzler tasarlanmıştır (Manoel, 2018). Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde kullanılan Euler ve Runge-Kutta yöntemleri için bir uygulama geliştirilmiştir (Dragoslav, 2008). GeoGebra'nın matematik öğretimindeki önemi vurgulanmıştır (Dariusz, 2014). Türev uygulamaları konusunun öğretiminde dinamik bir yazılım olan GeoGebra tercih edilmiştir (Yılmaz, 2014). Limit ve sürekliliğinin öğretiminde GeoGebra'nın etkileri incelenmiştir (Kepçeoğlu, 2017).

1.2. GeoGebra'nın Geliştirilişi

Markus Hohenwarter (2001), tarafından Avusturya Salzburg Üniversitesinde, 2001 yılında yüksek lisans tezi olarak tasarlanan GeoGebra programına olan ilgi, Avrupa ve Kuzey Amerika başta olmak üzere birçok ülkede her geçen gün artmaktadır. Hohenwarter'ın yazılımı geliştirmesindeki temel fikir geometri, cebir ve analizi tek bir arayüzde barındıran açık kaynak kodlu, kullanımı kolay dinamik bir ortam olarak tasarlamasıdır. GeoGebra 2002 yılında internette yayımlandıktan sonra birçok öğretmen Hohenwarter ile iletişime geçerek memnuniyetlerini bildirip, sınıflarında programı kullanmak istemişlerdir. Öğretmenlerin bu yaklaşımı ve GeoGebra'nın Avrupa akademik yazılım ödülü dâhil olmak üzere birçok prestijli ödül alması, Hohenwarter'e doktora çalışmasında GeoGebra'nın pedagojik yönünü incelemesine ilham vermiştir. Gönüllüler tarafından 54 dile çevrilmiş olan yazılımı indirmek, yayınlanmış çalışmalarını incelemek, yazılım hakkında ulusal ve uluslararası bilgi edinmek, GeoGebra enstitülerine ulaşmak için programın resmi sitesi <https://www.geogebra.org/> tüm kullanıcılara hizmet vermektedir (Hohenwarter, 2009)

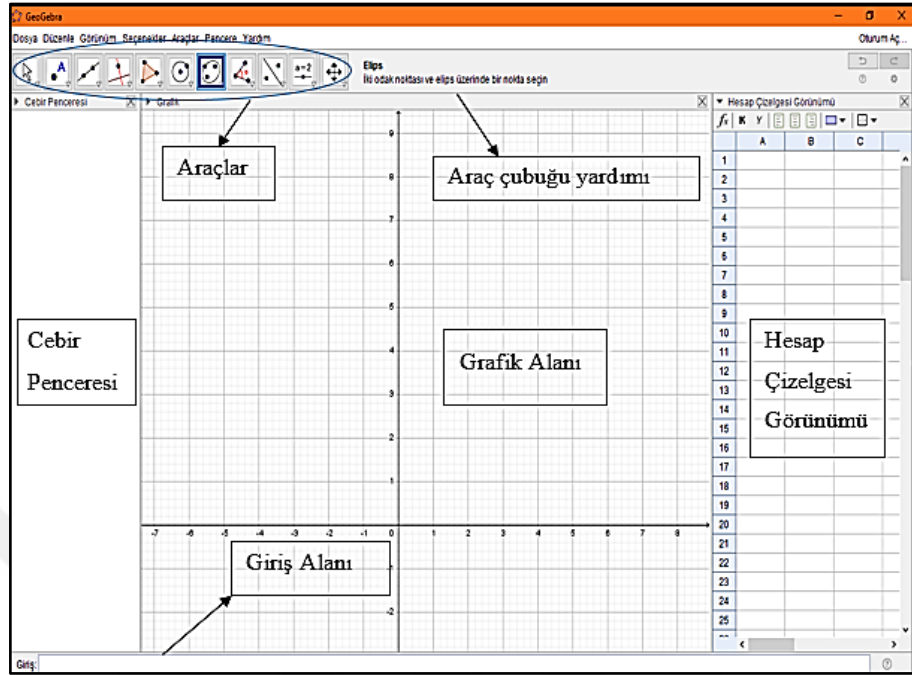
GeoGebra yazılımı ilk olarak ortaokul seviyesinde matematik eğitimini desteklemek amaçlı geliştirilmiştir. GeoGebra yazılımının devamlı güncellenen dinamik yapısı sayesinde ortaöğretim ve yükseköğretim matematik derslerini de görsel anlamda desteklemek amacıyla her kademedeki kullanılabilir geometri, cebir ve analizi tek bir arayüze taşıyan açık kaynak kodlu dinamik bir matematik yazılımı olmuştur. Öğrenciler nesnelerin yerini değiştirerek veya sürgüyü hareket ettirerek değişiklikleri istedikleri yönde yaparlar. Bağımsız nesnelere sürükleyerek bağımlı nesnelerin nasıl etkilendiğini gözleyebilirler.

Birçok dil desteği olan GeoGebra'nın Türkçe dil desteği de bulunmaktadır. GeoGebra yazılımı Erol KARAKIRIK, Mustafa DOĞAN ve Süleyman CENGİZ tarafından Türkçeye çevrilmiştir. 23.01.2009 tarihinde Türkiye GeoGebra Enstitüsü kurulmuştur. Aynı şekilde hizmet veren Türkiye'deki diğer bir enstitü de İstanbul GeoGebra Enstitüsü'dür (<http://www.geocebir.org/>). Ayrıca bu çalışmada yer alan rehber kitabı, çalışma sayfaları ve materyallerin hazırlanması GeoGebra resmi sitesinde bulunabilir.

“Grafik hesap makinesiyle karşılaştırıldığında kullanımı daha kolay bir yazılımdır. Basit kullanışlı bir arayüze sahip olan GeoGebra menüler, komutlar ve yardım içeriği sunmaktadır. Öğrencilerin matematik projelerini, çoklu temsilleri, deneyim ve keşfederek öğrenme yoluyla desteklemektedir. Öğretmenin rolü matematiksel bilgiyi öğrencilere aktarma değil, onlara kendi zihinsel yapılarını besleyecek ortamlar oluşturmaktadır. GeoGebra, öğretmenlere teknolojiyi sınıfta kullanabilme ve matematiği etkileşimli ortamlara taşıma gibi olanakları da sunmaktadır.” Şeklinde belirtilmiştir (Dikovic, 2009).

GeoGebra'nın kullanıcı arayüzü grafik penceresi, cebir penceresi ve birde çizelge görünümünden oluşmaktadır (Şekil 1). Bunlar matematikle ilgili nesnelere grafiksel (noktalar, fonksiyon grafikleri), hesap çizelge (spreadsheet) hücreleri ve cebirsel (noktaların koordinatları, denklemler) olarak 3 farklı şekilde görebilmenizi sağlar. Böylece aynı nesnenin farklı gösterimleri dinamik olarak birleştirilir ve gösterimlerin herhangi biri için yapılan değişiklikler, üç farklı durumda ifade edilir.


Şekil 1’de GeoGebra sayfası için başlangıç arayüzü tanıtılmıştır.



Şekil 1. GeoGebra dinamik çalışma sayfası

1.3. GeoGebra'nın Bölümleri

Grafik Alanı: Grafik alanı aynı zamanda çizim tahtası olarak adlandırılmıştır. Araç çubukları menüsünde bulunan inşa araçlarını kullanarak fare ile grafik görünümünde geometrik şekiller oluşturulabilir. Bir aracın nasıl kullanılacağını öğrenmek için araç çubuğunda yardım kısmında açıklaması bulunmaktadır.

Grafik alanında oluşturulan nesnenin aynı zamanda cebir penceresinde cebirsel gösterimi de oluşmaktadır. Grafik alanında oluşturulan nesnenin araçlar kısmından  (taşı) sekmesiyle veya farenin sağ tuşunu basılı tutarak hareketi sağlanabilir. Nesnenin hareketinde cebir penceresindeki cebirsel ifadesi de dinamik bir şekilde güncellenmektedir.

Araç çubuğundaki her bir düğme, benzer inşa (oluşturma) araçlarının seçimini içeren bir araç kutusunu da gösterir. Bir araç kutusunu açmak için, araç çubuğu düğmesinin sağ alt köşesindeki küçük okun üzerine tıklamak gerekir.

Çizelge Görünümü: GeoGebra'nın Ctrl+Shift+S tuş kombinasyonu kullanılarak Çizelge (Spreadsheet) görünümü açılır. Hesap çizelgesine veri girişi yaparken grafik penceresinde şeklin nerede oluşması isteniyorsa, metin giriş alanına girilen veriler o hücrelere yazılır. GeoGebra'nın Çizelge (Spreadsheet) görünümünde her hücrenin, bu hücrelere direk olarak ulaşmayı sağlamak için özel bir adı vardır. Örneğin, A sütunu ve 1. satırda yer alan hücre, A1 olarak isimlendirilir. Bu hücre isimleri için ilgili hücrenin içeriğini belirten uygun ifadeler ve komutlar kullanılabilir.

Çizelge hücrelerine, sadece sayılar değil aynı zamanda GeoGebra tarafından desteklenen (örneğin; noktaların koordinatları, fonksiyonlar, komutlar vs.) matematiğe ait nesnelerin bütün tipleri girilebilir. Şayet varsa ve mümkünse, çizelge hücresinde girilen nesne Grafik Görünümünde GeoGebra tarafından eş zamanlı grafiksel olarak da gösterilir. Nesnenin adı, çizelge hücresinde oluşturulan ilk adla aynı olur: A5, C1 vs. (Hohenwarter, 2009).

Cebir Görünümü: Arayüzde giriş alanını kullanarak cebirsel ifadeleri GeoGebra'ya direk olarak girebilirsiniz. Giriş alanına girilen cebirsel ifade onaylandığı anda cebirsel görünümde ortaya çıkarken grafik alanında da grafik şekli otomatik olarak görünür.

GeoGebra'da oluşturulan nesne daha önce kullanılan ifadeler daha önce tanımlanmışsa bağımlı nesne, daha önceki ifadeleri içermiyorsa bağımsız nesne olarak algılanır. Eğer bir nesnenin cebirsel gösterimini cebir görünümünde saklamak istenirse nesne yardımcı nesne olarak belirlenebilir. Cebir görünümünde bağımlı nesnenin üzerine çift tıklarsa nesneyi tekrar tanımlama sağlayacak bir iletişim penceresi oluşur.


Cebir görünümünde istenilen nesne üzerine sağ tıklanarak çıkan menüden özellikler seçilir. Seçilen nesne özellikler iletişim penceresinde yer alan temel etiketi sekmesindeki yardımcı nesneye tıklayarak yardımcı nesne özelleştirilebilir. Varsayılan ayar (default) olarak yardımcı nesneler Cebir görünümünde görülmezler, fakat bu ayar Görünüm menüsünden yardımcı nesne seçilerek değiştirilebilir. Ayrıca Cebir görünümünde nesneler de değiştirilebilir.

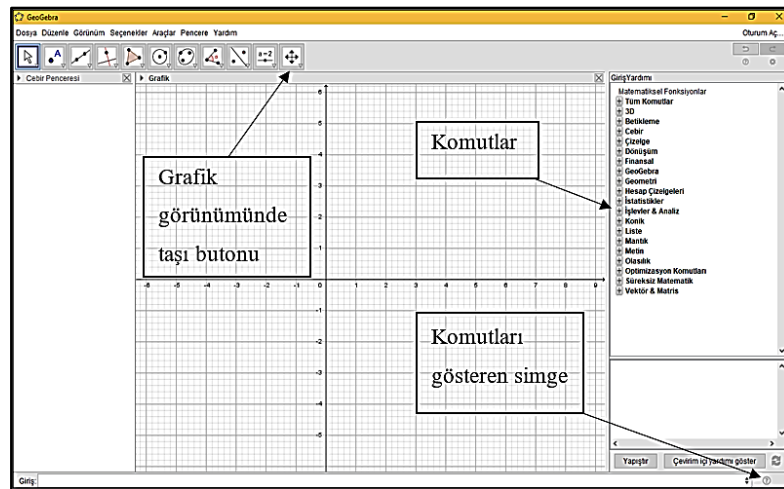
Giriş alanında bulunan, bölümüne komutları yazmak için yan tarafta bulunan komutlar seçilir veya komutların ilk harfleri yazıldığında otomatik olarak komutlar ekrana gelir. Giriş alanında kısaltmalar kullanılabilir. Örneğin, giriş alanında kullanılacak bazı matematiksel semboller için Tablo 1’de kısaltmalar verilmiştir.

Tablo 1. Bazı matematiksel semboller için GeoGebra kısaltmaları

$\text{Alt}+\text{o} \rightarrow \circ$	$\text{Alt}+\text{p} \rightarrow \pi$	$\text{Alt}+\text{m} \rightarrow \mu$	$\text{Alt}+\text{b} \rightarrow \beta$	$\text{Alt}+. \rightarrow \geq$
$\text{Alt}+\text{l} \rightarrow \wedge$	$\text{Alt}+\text{g} \rightarrow \vee$	$\text{Alt}+\text{f} \rightarrow \varphi$	$\text{Alt}+\text{d} \rightarrow \delta$	$\text{Alt}+\text{s} \rightarrow \sigma$
$\text{Alt}+\text{a} \rightarrow \alpha$	$\text{Alt}+\text{w} \rightarrow \omega$	$\text{Alt}+\text{i} \rightarrow \infty$	$\text{Alt}+\text{t} \rightarrow \theta$	$\text{Alt}+\text{e} \rightarrow e$
$\text{Alt}+- \rightarrow \neq$	$\text{Alt}+? \rightarrow \mp$			

GeoGebra aynı zamanda Giriş kısmı sayesinde dışardan komut girilebilen çok geniş bir seçenek sunar. Komutlar listesi, giriş çubuğunun sağ köşesinde yer alan komutlar simgesine tıklanarak açılır ve komutun nasıl çalıştığı incelenebilir (Şekil 2).


Grafik görünümü taşı tuşu  ile grafik penceresi kaydırılabilir ve istenilen konuma getirilebilir (Şekil 2).

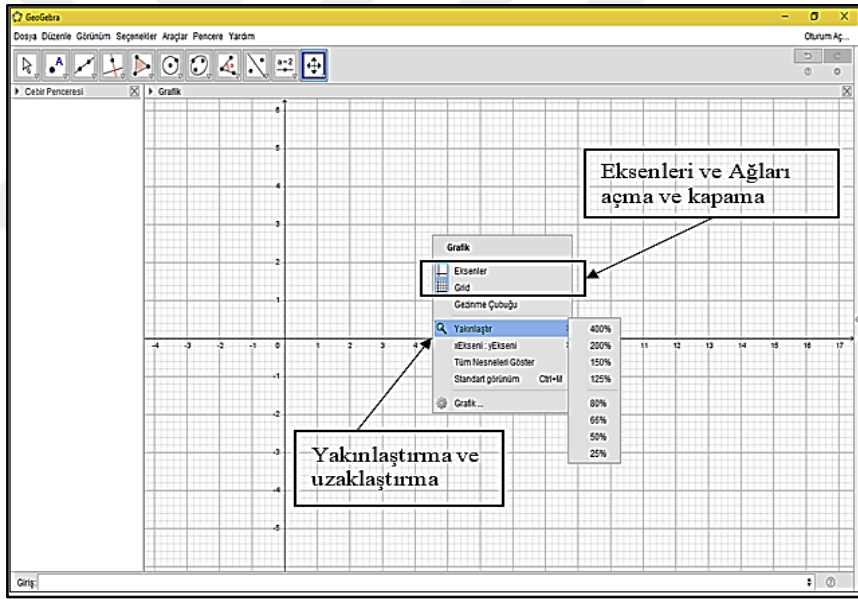


Şekil 2. Grafik görünümü taşı ve komutlar kısmı

1.4. GeoGebra'nın Kullanımı

GeoGebra'nın içeriğinde birçok kod ve araç olduğu için bu kısımda daha çok incelenen konunun kapsadığı yapılara değinilecektir. Şekil 3'te fare sağ tıkladığında açılan menüden eksenler kaldırılabilir ve ağ seçenekleri kapatılabilir.

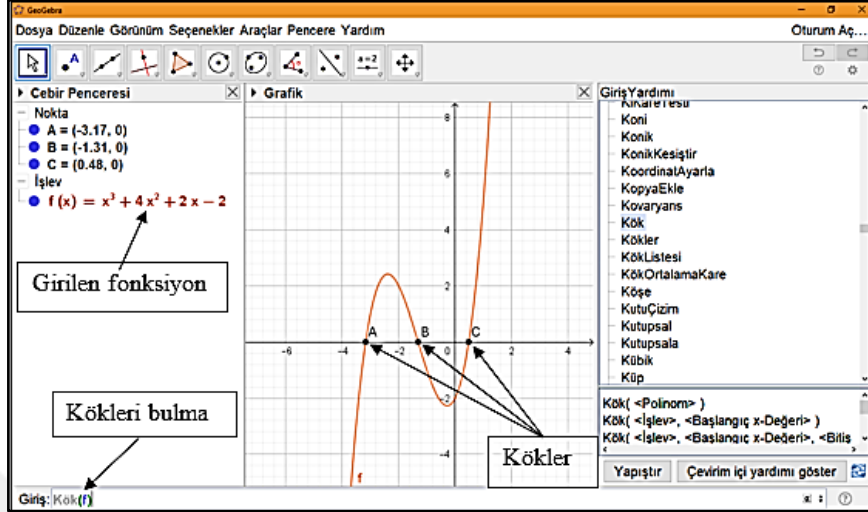
Grid seçeneğinin altında (Şekil 3), yakınlaştır seçeneği ve bu  menünün devamında yüzde kaç yakınlaştırma ve uzaklaştırma yapılacağı belirtilebilir. Aynı zamanda aynı işlem Çizim Tahtası Taşı tuşunun altındaki yakınlaştır, uzaklaştır tuşları ile yapılabilir. Bu işlemden sonra yakınlaştırılmak veya uzaklaştırılmak istenilen kısım üzerine tıklanması yeterlidir. Yakınlaştırıp uzaklaştırma işlemi grafik alanı üzerinde iken fare kullanılarak da gerçekleştirilebilir.



Şekil 3. GeoGebra'nın dinamik yapısında eksenleri ve ağları kapatıp açma

GeoGebra üzerinde istenilen fonksiyonun çizilmesi oldukça basittir. Fonksiyon giriş alanına yazılarak onaylandığında GeoGebra grafik alanında grafiği çizer (Şekil 4). Fonksiyondaki üslü ifadeler için üs alma sembolü (^) kullanılabilir gibi istenilen üs kısa yol tuşları ile, örneğin Alt + 2 (x^2) ve Alt + 3 (x^3) şeklinde ifadeler oluşturulabilir (Şekil 4).

Bir fonksiyonun köklerini bulmak için komutlardan kök yazılır ve ifadenin içine kökü bulunması istenilen fonksiyon yazılır (Şekil 4).



Şekil 4. GeoGebra da fonksiyon girişi ve köklerin bulunuşu

GeoGebra sayılar, açılar, vektörler, noktalar, doğrular, doğru parçaları, fonksiyonlar ve parametrik eğriler, konik dilimleriyle çalışabilir. Bu objelere ait koordinat ya da denklemleri giriş çubuğuna yazdıktan sonra enter tuşuna basarak girilebilir.


GeoGebra'da boolean değişkenleri yanlış veya doğru olarak kullanılabilir. Örnek olarak; $a = \text{doğru}$ veya $b = \text{yanlış}$ olarak giriş çubuğuna yazılır ve enter tuşuna basılır.


Serbest boolean değişkenleri, grafik görünümünde onay kutuları seçilerek görüntülenebilir. Klavyeden ok tuşlarını kullanarak cebir görünümünde boolean değişkenleri değiştirilebilir. GeoGebra'da boolean değişkenleri ve şartları için Tablo 2'deki işlemleri kullanılabilir.




Tablo 2. Boolean değişkenleri ve şartları


	Liste	Klavye	Örnek	Nesne Tipi
Eşittir	\doteq	==	$a \doteq b$ veya $a == b$	Sayılar, noktalar, doğrular, konikler a, b
Eşit değil	\neq	!=	$a \neq b$ veya $a != b$	Sayılar, noktalar, doğrular, konikler a, b
Küçük	$<$	$<$	$a < b$	Sayılar a, b
Büyük	$>$	$>$	$a > b$	Sayılar a, b
Küçük eşit	\leq	\leq	$a \leq b$ veya $a \leq b$	Sayılar a, b
Büyük eşit	\geq	\geq	$a \geq b$ veya $a \geq b$	Sayılar a, b
Ve	\wedge	&&	$a \wedge b$ veya $a \&\& b$	Booleans a, b
Veya	\vee		$a \vee b$ veya $a b$	Booleans a, b
Değil	\neg	!	$\neg a$ veya $!a$	Boolean a
Paralel	\parallel		$a \parallel b$	Doğrular a, b
Dik	\perp		$a \perp b$	Doğrular a, b

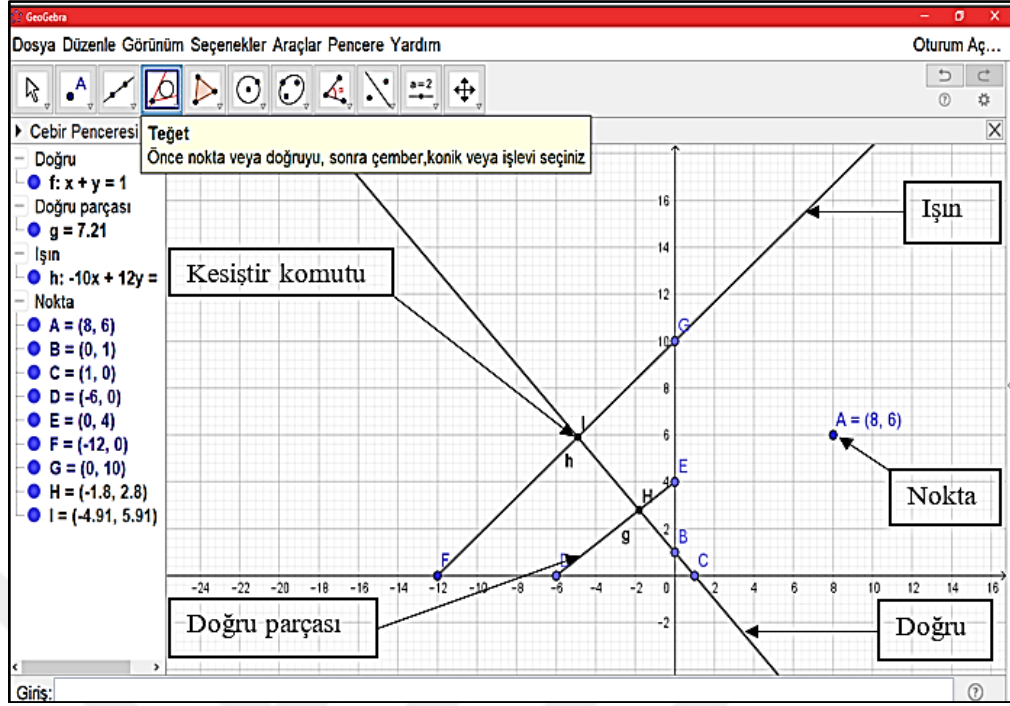
1.5. GeoGebra’da Kullanılan Bazı Araçlar

Nokta: Araçlar kısmından  ifadesi seçildikten sonra çizim noktasında istenilen yere nokta bırakılabileceği gibi doğru fonksiyon veya eğri üzerinde de nokta oluşturulabilir (Şekil 5).


Kesiştir: Araçlar kısmından  ifadesi tıklandıktan sonra kesişen iki doğru ayrı ayrı tıklandığında kesiştiği yerde nokta oluşturabileceği gibi direk kesişim noktası tıklandığında GeoGebra yazılımı tam olarak kesişim yerine noktayı oluşturur (Şekil 5).


Doğru, Doğru Parçası, Işın: Araçlar kısmından  ifadesi seçildikten sonra grafik alanında oluşturulan iki farklı nokta tıklandığında bu noktalardan geçen doğru elde edilmiş olur. Ayrıca isteğe göre iki nokta ifadesi seçildikten sonra  tıklanırsa doğru parçası,  sembolü seçilirse ışın oluşur. Burada ışının kapalı ucunu GeoGebra ilk tıklanan nokta olarak algılar (Şekil 5).


Teğet: Araçlar kısmından  sembolü seçildikten sonra önce nokta veya doğru seçilir ardından çember konik veya işlev seçilir.





Şekil 5. Nokta, doğru, doğru parçası, ışın, kesişim noktası


Sürgü: Araçlar kısmında bulunan  sembolü nesnelerin uzunluğunu veya açısını belli sayılar veya açılar arasında değişen değerlere bağlamak için kullanılır. Bu bağlı değerler nesnelere hareketliliği sağlar. Başlangıç, bitiş değeri ve artış miktarı belirlenebilir (Şekil 6).

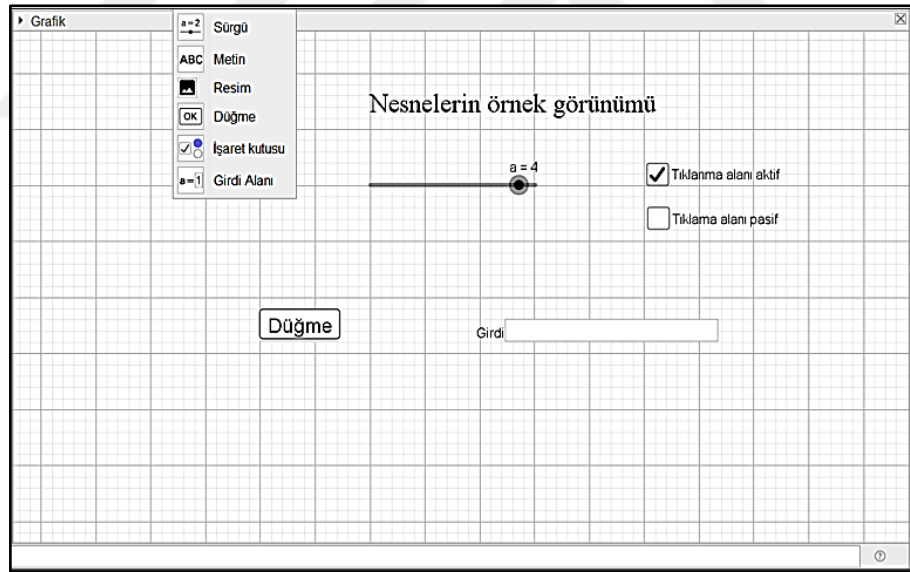
Metin: Metin eklemek için  tuşu ile grafik alanından istenilen yere istenilen metin yazılabilir. Statik metinde komut olarak ne yazıldıysa aynen görülür. Dinamik metinlerde ise durum böyle değildir. Grafik alanında istenilen yere taşınabilir.

Resim: Grafik alanına resim eklemek için  tuşu kullanılır. Grafik alanına tıklanan ilk yer resmin sol alt köşesinin geleceği yeri belirler. Oluşturulan resim taşınmak istenirse grafik alanında 4 nokta seçilir daha sonra resim üzerine sağ tıklanır. Özellikler seçeneğinden köşeler belirlenir. Bu sayede köşelere ait koordinatlar belirlenerek resim küçültülebilir. Resim grafik alanında gezdirilmek istenirse resmin sol alt köşesi olacak şekilde bir nokta belirlenir. Bu nokta sol tuş ile gezdirebilir, sağ tuş ile de resim gezdirilebilir. Ağ (grid) ön planda tutulmak istenirse resim üzerine sağ tıklanır, özellikler seçeneği ile arka plan resmi seçilir. Resmin mat renkte görünmesi istenirse resim üzerine sağ tıklanarak özellikler seçeneğindeki stil ve dolgu işaretlenir.

Girdi Alanı:  tuşu seçildikten sonra grafik tablosunda istenilen bir yer tıklandığında oluşturulan nesnede atanan giriş alanı, atandığı ifadenin dışardan istenilen değer ile kolayca değiştirilmesini sağlar.

Görsel Stili Kopyalama:  aracı renk, boyut, çizgi şekli gibi görsel özellikleri bir nesneden başka bir nesneye ya da diğer nesnelere kopyalamayı sağlar. Bunu yapmak için önce, özelliklerini kopyalamak istediğiniz nesneyi seçin, sonra bu özellikleri benimseyecek tüm diğer nesnelere tıklayın.

Nesneleri Göster/Sakla Onay Kutusu: Araçlar kısmından  kutusu seçilip Grafik alanında tıklandığında bir onay kutusu oluşturur (boolean değişkenleri ve işlemleri için). Bu bir veya daha fazla nesneyi göstermeye veya gizlemeye izin verir. Ortaya çıkan iletişim penceresinde hangi nesnenin onay kutusundan etkilenmesi gerektiği belirlenebilir.



Şekil 6. Sürgü çubuğu örnek görünümü

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Sayısal Analiz Yöntemleri

Sayısal yöntem genellikle analitik çözümün mümkün olmadığı veya bu yöntemle elde edilen çözümün kullanışlı olmadığı durumlarda bilgisayarlar yardımıyla problemin gerçek ya da genellikle yaklaşık çözümünü belirleme yöntemidir. Sayısal analizin asıl amacı, matematiksel problemlerin çözümlenebilmesi için uygun ve en iyi yaklaşım veren yöntemleri bulmak ayrıca bunlardan anlamlı ve faydalı sonuçlar çıkarmaktır. Sayısal yöntemler çok çeşitli araştırma alanlarında kullanılmaktadır. Bu tezde ise GeoGebra ile beraber sayısal hesaplama arayüzleri oluşturulmuştur.

Sayısal analiz süreci, şu aşamalardan oluşmaktadır:

- ✓ Uygun bir matematiksel dille ifade edilmiş bir problem ile başlama,
- ✓ Problemin çözümü için gerekli sayısal yöntemi belirleme
- ✓ Söz konusu sayısal yöntem için geliştirilen algoritmayı oluşturma
- ✓ Algoritmanın uygun bir programlama diline dönüştürülmüş kodunu hazırlama
- ✓ Sonuç, yorum ve matematiksel raporu oluşturma

Doğrusal olmayan (nonlinear) denklemler, üssü birden farklı bir değere sahip olan ve doğrusal olmayan fonksiyonlar içeren denklemdir.

Bu tez çalışmasında doğrusal olmayan denklem çözümleri GeoGebra ile arayüz geliştirmek suretiyle ele alınmıştır. Fonksiyonların kökleri civarında işaret değiştirmeleri gerçeğinden yararlanan yöntemler kapalı yöntemler olarak bilinir. Adından da anlaşılacağı gibi ilk tahmin değerleri kökün farklı yanlarında olmalıdır.

Kapalı yöntemlerde kök, alt ve üst değer arasında bulunacağı için bu yöntemler yakınsak yöntemlerdir ve mutlaka köke yaklaşırlar. Fakat alt ve üst değerleri tahmin etme zorluğu söz konusudur. Açık yöntemlerde ise bir aralık tahmin etmeye gerek yoktur. Her adımda farklı bir hesaplamanın olduğu iterasyona tahmini bir kök ile başlanır. Fakat

fonksiyonun tipine ve başlangıç değerine bağlı olarak bazen iraksamaları bu yöntemlerin en büyük dezavantajlarıdır.

2.2. Yakınsaklık Analizi

Karşılaşılan herhangi bir sayısal yöntemde yakınsaklık büyük bir önem taşımaktadır. İleride sunulacak yöntemlerde yakınsaklık hızlarının nasıl bulunacağı üzerinde durulması gerekmektedir. Bazı kaynaklar yakınsaklık hızı yerine yakınsaklık oranı kavramını da kullanabilmektedir.

Tanım: $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, x^* a p mertebeli yakınsaktır öyleki varolan bir $\mu \in [0,1]$ sabiti için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|^p} = \mu$ dir μ yakınsaklık hızı olarak tanımlanır ve bu değer $[0,1]$ aralığında sonlu bir değerdir. $\mu > 1$ ise $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi iraksaktır. Ayrıca, $p = 1$ ise yakınsama lineer $p = 2$ ise yakınsama kuadrattır.

Yakınsama lineer ve $\mu = 0$ ise yakınsama süperlineer , $\mu = 1$ ise yakınsama sublineerdir.

2.3. Doğrusal Olmayan Denklemlere Giriş

Doğrusal olmayan bir denklemin veya denklem sisteminin köklerinin bulunması çok eski bir problemdir. Kullanılan yöntemlerin fazla olması bu tür problemlerin gerçekten uzun bir geçmişinin olduğunu gösterir.

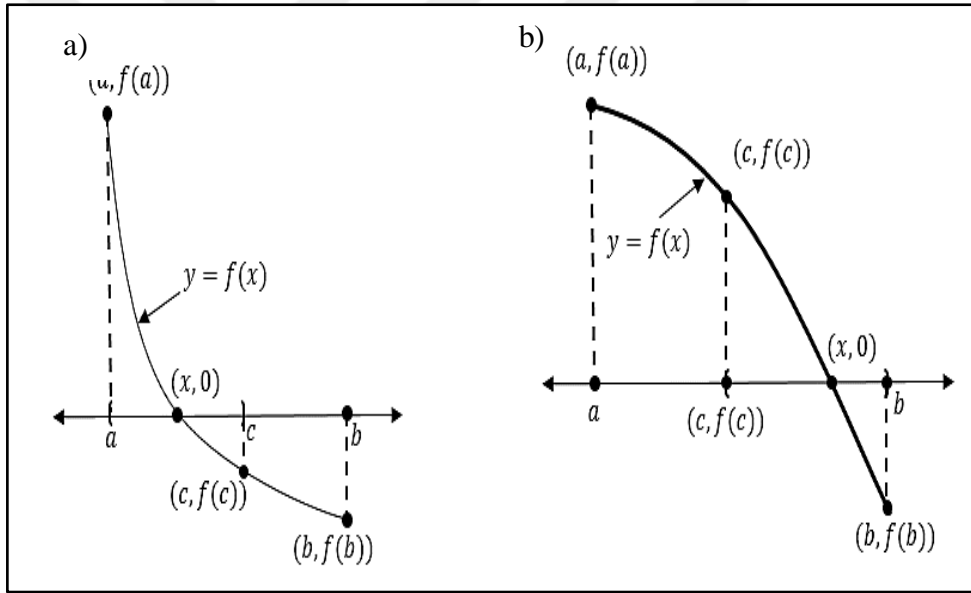
Doğrusal olmayan bir denklem veya denklem sistemi verildiğinde, köklerin bulunması için kullanılacak yöntem, verilen denklemin veya denklem sisteminin bütün köklerini bulma veya birkaç tanesini bulma durumuna bağlı olacaktır. Köklerin bir kısmı reel bir kısmı da kompleks olabilir. Buna göre de çözüm yöntemleri farklılık gösterir. Bazen aranılan kökler için bir ilk yaklaşım kullanılır, bazen kullanılmaz.

Doğrusal olmayan bir denklemin köklerinin bir kısmını ya da tamamını bulmak amacıyla kullanılan yöntemlerden bu tez çalışmasında incelenecek olanlar; ikiye bölme

yöntemi, Regula Falsi yöntemi, Newton-Raphson yöntemi, kirişler yöntemi, secant yöntemi, sabit nokta iterasyon yöntemi ve Müller yöntemi şeklindedir.

2.4. İkiye Bölme (Bisection) Yöntemi

Kök bulma problemi incelenirken göz önüne alınacak ilk teknik temel olarak ara değer teoremi kullanılarak elde edilen ikiye bölme yöntemidir. $f(x)$, $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olmak üzere eğer $f(a)$ ve $f(b)$ değerlerinin işaretleri farklı ise ara değer teoremine göre $[a, b]$ aralığında $f(x) = 0$ koşulunu sağlayacak şekilde $x \in [a, b]$ çözümü bulunmaktadır. Şekil 7(a)'da $[a, c]$ aralığında Şekil 7(b)'de bu durum $[c, b]$ aralığında geometrik olarak gösterilmiştir.



Şekil 7. İkiye bölme yönteminin geometrik gösterimi a) kök $[a, c]$ aralığındaki gösterimi b) kök $[c, b]$ aralığındaki gösterimi

İkiye bölme yöntemi için aşağıdaki algoritma uygulanmaktadır.

Adım 1: $\varepsilon > 0$ hata payını veriniz ve $n = 0$ alınız ve başlangıç aralığını, $a_0 = a$ $b_0 = b$ seçerek aralığı $[a_0, b_0]$ şeklinde belirlenir.

Adım 2: $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ şeklinde aralığın orta noktasını hesaplanır.

Adım 3: Eğer $f(c_n) = 0$ ise $c = c_n$ şeklinde çözüm bulunur.

Adım 4: Eğer $f(a_n).f(c_n) < 0$ ise $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c_n$ seçerek yeni aralığı $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c_n]$ olarak veya,

Adım 5: Eğer $f(c_n).f(b_n) < 0$ ise $a_{n+1} = c_n, b_{n+1} = b_n$ seçerek yeni aralığı $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [c_n, b_n]$ şeklinde belirlenir.

Adım 6: Eğer $|a_n - b_n| > \varepsilon$ ise n 'yi 1 arttırın. $n = n + 1$ alarak 2. adıma gidilir. Aksi durumda işleme son verilir.

2.4.1. Yarılama (Bisection) Yakınsaklık Analizi

Yarılama yönteminin kullandığı alt aralıklar $[a, b] = [a_0, b_0], [a_1, b_1], [a_2, b_2] \dots$ şeklinde oluşturulabilir. Buradan

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}), n \geq 1 \quad (1)$$

yazılabilir. Böylece

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0), n \geq 1 \quad (2)$$

elde edilir.

Ayrıca $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b$ ve $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq a$ olduğu bilinmektedir. O halde $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri hem sınırlıdır hemde monotondur. Bu durumda yakınsak olmaktadır.

Limit kurallarına göre (2) denklemini

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (b_0 - a_0) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0 \quad (3)$$

Bu bize $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizilerinin aynı limit değerine sahip olduğunu göstermektedir. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = r \quad (4)$$

olarak tanımlanabilir. Aynı zamanda bu r değerinin f fonksiyonunun bir kökü olduğu gösterilebilir.

Yarılama yöntemine göre $f(a_n)f(b_n) < 0$ dır. Limit alarak $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0$ elde edilir. (4) ten dolayı

$$[f(r)]^2 \leq 0 \Rightarrow f(r) = 0 \quad (5)$$

elde edilir.

Yarılama yöntemi aralıkta kök olduğu sürece her zaman yakınsar. Yarılama yöntemi algoritması n . iterasyondan sonra durdurulur. Bu durumda $r \in [a_n, b_n]$ ve $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ gerçekte köke bir yaklaşımdır. Hata ise

$$|r - c_n| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2^{n+1}}(b_0 - a_0) \quad (6)$$

ile sınırlıdır. Buna göre n . adım sonucunda hata

$$|r - c_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(b - a) \quad (7)$$

ifadesini sağlar. Bu sınır, f fonksiyonundan bağımsızdır ve sadece aralığın uç değerlerine bağlıdır.

Linear yakınsama için bazı $c < 1$ değerleri için $e_n \leq ce_{n-1}$ olması gerekir. Böylece

$$e_n \leq c^2 e_{n-2} \leq \dots \leq c^n e_0 \quad (8)$$

yazılabilir. Yarılama yöntemi için

$$e_n = |r - c_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}} (b - a) \text{ ve } e_0 = \frac{b-a}{2} \quad (9)$$

şeklindedir. Buna göre (8) koşulu sağlanır.

$$|e_{n+1}| = |r - c_{n+1}| \leq \frac{1}{2} (b_{n+1} - a_{n+1}) = \frac{1}{2} \frac{b_n - a_n}{2} \quad (10)$$

ve

$$|e_n| = |r - c_n| \leq \frac{1}{2} (b_n - a_n) \quad (11)$$

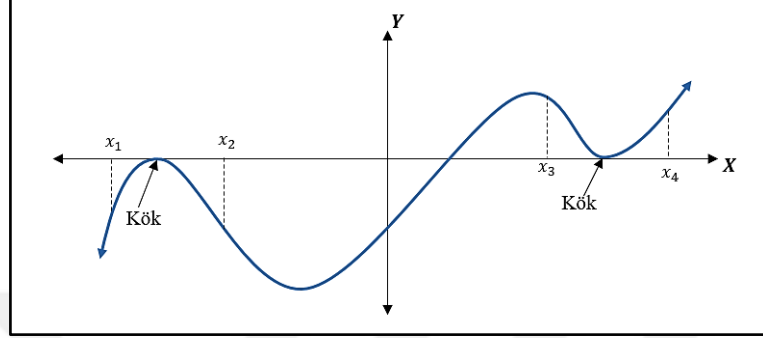
yazılabilir. Böylece,

$$|e_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |e_n| \quad (12)$$

elde edilir. Buna göre yarılama yöntemi lineer bir şekilde yakınsar.

2.4.2. İkiye Bölme Yönteminin Dezavantajları

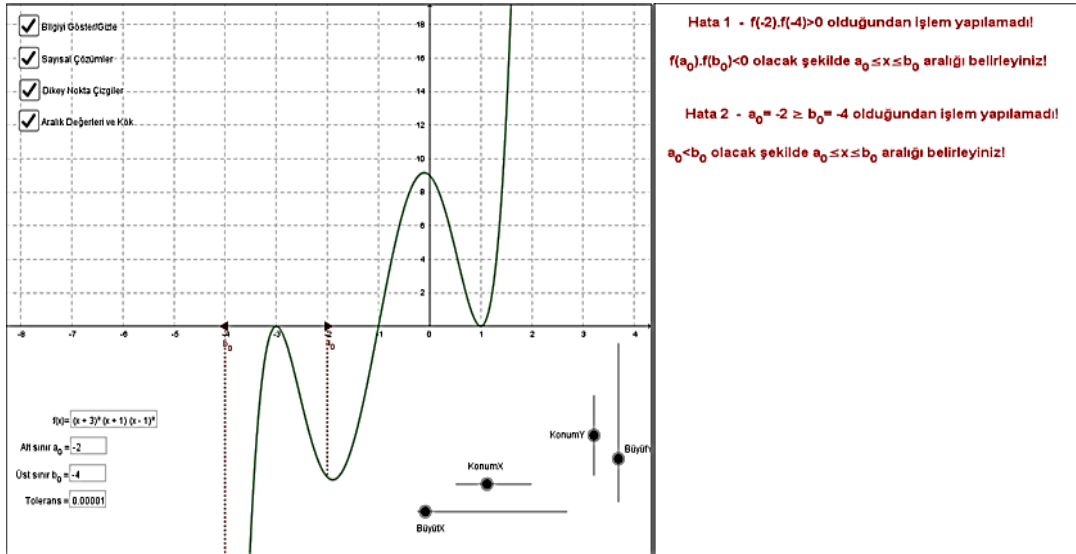
İkiye bölme yöntemi genellikle yavaş yakınsar ve bazen tam olarak çalışmayabilir. Şekil 8’de yarılama yönteminin işe yaramayacağı grafik gösterilmiştir.



Şekil 8. Yarılama yöntemi ile hesaplanamayacak kökler

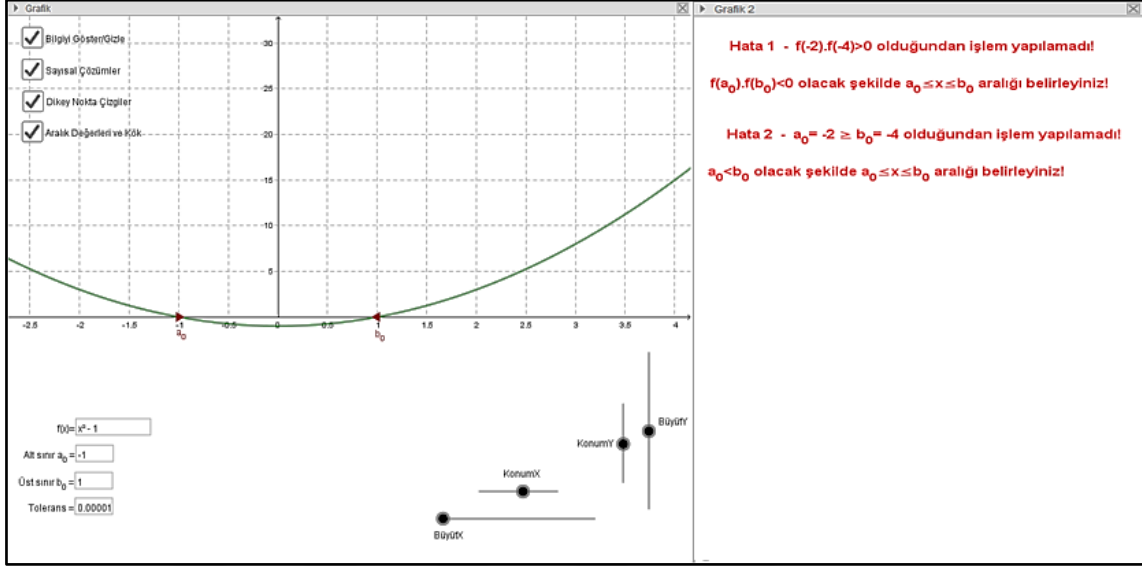
Şekil 8’e göre (x_1, x_2) aralığında $f(x) \leq 0$ ve (x_3, x_4) aralığımda $f(x) \geq 0$ olduğu için ikiye bölme yöntemi çözüm üretmez. Fakat iki aralıkta sadece tek kök vardır.

İkiye bölme yöntemi çift katlı kökler için verilen aralıkta çözüm olmadığı ve aralık değerler yanlış girildiğinde oluşan hata Şekil 9’da incelenmiştir.



Şekil 9. Yarılama yönteminde oluşan hata uygulaması

Şimdi ikiye bölme yönteminde seçeceğimiz alt veya üst sınırın kök değerine denk gelmesi durumunda nasıl bir hata vereceği Şekil 10'da incelenmiştir.



Şekil 10. Alt ve üst sınırlara kök değerleri girilmesi durumunda oluşan hata uygulaması

Şekil 10'da kolaylık açısından ele alınan denklem $f(x) = x^2 - 1$, alt sınır $a_0 = -1$ ve üst sınır $b_0 = 1$ alınarak GeoGebra ortamında verilen hata gösterilmiştir. Buna göre kullanıcıya doğru değerler girmesi yönünde uyarılar vererek aslında doğru parametrelerle çalışılması gerektiği öğretilmektedir.

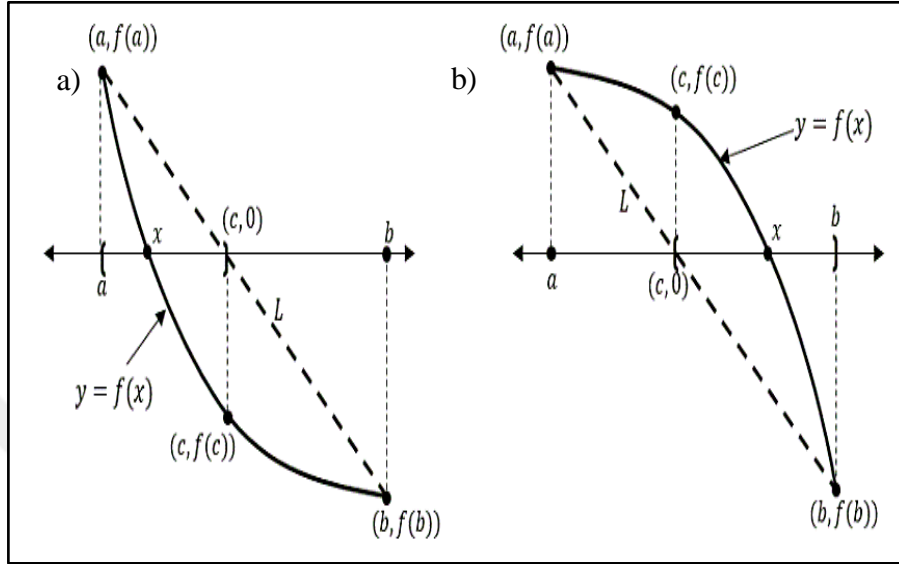
2.5. Regula Falsi Yöntemi ve Yakınsaklık Analizi

Bilinen en eski kök bulma yöntemlerinden birisidir. Eğrinin bir doğruyla yer değiştirmesi sonucunda, kökün konumunun yanlış belirlenmesi nedeniyle Latince “yanlış nokta” anlamında olan Regula Falsi olarak adlandırılır.

İkiye bölme yönteminin yakınsaklık hızı oldukça yavaş olduğundan bu yöntem ortaya çıkmıştır. Regula Falsi yönteminde köke yakınsama yavaş olmasına rağmen mutlaka yakınsama vardır.

$f(x)$, $[a, b]$ aralığında sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $f(c) = 0$ koşulunu sağlayacak şekilde $c \in [a, b]$ çözümünü bulmak için Regula Falsi yönteminde

öncelikle $(a, f(a))$ noktası ile $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının x eksenini kestiği noktanın eğim yardımıyla bulunması hedef alınmıştır (Şekil 11(a), Şekil 11(b)).



Şekil 11. Regula Falsi yönteminin geometrik gösterimi a) kök $[a, c]$ aralığındaki gösterimi, b) kök $[c, b]$ aralığındaki gösterimi

Şekil 11’de görüldüğü gibi $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğruya L doğrusu ve doğrunun x ekseninin kestiği noktaya ise $(c, 0)$ noktası diyelim. L doğrusunun eğimi m olsun. Bu durumda $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktaları kullanıldığında L doğrusunun farklı eğimleri yazılarak,

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0 - f(b)}{c - b} \Rightarrow c = \frac{f(b)a - f(a)b}{f(b) - f(a)} \quad (13)$$

elde edilir bulunan c değeri için $f(c)$ hesaplandığında aşağıdaki algoritma uygulanmaktadır.

Adım 1: $\varepsilon > 0$ hata payı verilir ve $n = 0$ alınır. Başlangıç aralığı $a_0 = a$, $b_0 = b$ seçerek $[a_0, b_0]$ aralığında belirlenir..

Adım 2:

$$c_n = \frac{f(b_n)a_n - f(a_n)b_n}{f(b_n) - f(a_n)} \quad (14)$$

şeklinde nokta bulunur.

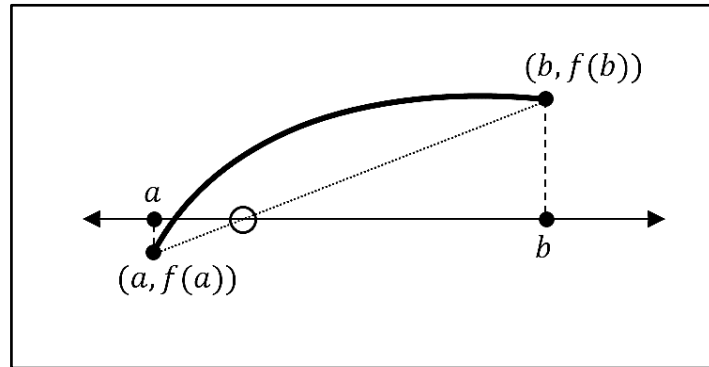
Adım 3: Eğer $f(c_n) = 0$ ise $c = c_n$ şeklinde çözüm elde edilir.

Adım 4: Eğer $f(a_n).f(c_n) < 0$ ise $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$ seçerek yeni aralık $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c_n]$ şeklinde belirlenir.

Adım 5: Eğer $f(c_n).f(b_n) < 0$ ise $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$ seçerek yeni aralık $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [c_n, b_n]$ şeklinde belirlenir.

Adım 6: Eğer $|a_n - b_n| > \varepsilon$ ise n yi 1 arttırılır. $n = n + 1$ alınırsk 2. adıma gidilir. Aksi durumda işleme son verilir.

Yakınsaklık Analizi: Şekil 12’de olduğu gibi $[a, b]$ aralığında bir kökün olduğunu düşünülürse



Şekil 12. Regula-Falsi yakınsama durumu

Yarılama yönteminin ilk iterasyonu sonucunda yaklaşım küçük dairenin içerisine düşer. Fakat $|f(a)|$ küçük olduğundan kökün a 'ya yakın bir yerde olması beklenir. Bunun için $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarından geçen doğruyu bulup x eksenini kestiği nokta ilk yaklaşım olarak alınabilir. Böylece c 'nin yeni değeri

$$c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \quad (15)$$

ile hesaplanır.

Yakınsaklık için $f''(x)$ var ve $[a_i, b_i]$ de $f''(x) \geq 0$ şartını sağlasın. ($f''(x) \leq 0$ durumunda benzer şekilde elde edilebilir.) Ayrıca $f(a_i) < 0$ ve $f(b_i) > 0$ olsun c_i değeri ise $(a_i, f(a_i))$ ve $(b_i, f(b_i))$ noktalarından geçen doğrunun x eksenini kestiği nokta olsun. İddia $a_i < a_{i+1} = c_i < b_{i+1} = b_i$ dir. Derecesi 1 olan bir $p(x)$ polinomu için $p(c_i) = 0$ dir. Açıkça $a_i < c_i < b_i$ ve $x \in [a_i, b_i]$ için,

$$f(x) - p(x) = (x - a_i)(x - b_i) \frac{f''(\mu)}{2}, \mu \in (a_i, b_i) \quad (16)$$

yazılabilir. $x = c_i$ koyarak ve verilen şartlar kullanılarak $f(c_i) \leq 0$ yazılabilir.

$f(c_i) \neq 0$ ise bu durumda $a_{i+1} = c_i > a_i$ ve $b_{i+1} = b_i$ dir. Böylece şartlar sağlandığında, $i \geq i_0$ için $b_i = b_f$ 'dir. Bu durumda a_i monoton artandır ve b_f ile sınırlıdır. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} a_i$ vardır ve ξ 'ya eşittir f sürekli olduğundan, $f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_i) \leq 0$ ve $f(b_f) > 0$ ve böylece $\xi \neq b_f$ 'dir.

$$c_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)} \quad (17)$$

ifadesinde limit alarak

$$\xi = \frac{\xi f(b_f) - b_f f(\xi)}{f(b_f) - f(\xi)} \quad (18)$$

ve böylece

$$(\xi - b_f)f(\xi) = 0 \quad (19)$$

elde edilir.

$\xi \neq b_f$ olduğundan $f(\xi) = 0$ olmalıdır a_i 'nin yerine x_i ve $b_i = b$ alalım.

İterasyon ile birlikte, $\phi(x) = \frac{bf(x)-xf(b)}{f(x)-f(b)}$ olmak üzere

$$x_{i+1} = \frac{bf(x_i) - x_if(b)}{f(x_i) - f(b)} = \phi(x_i) \quad (20)$$

şeklindedir. $i \geq i_0$ değerlerinden sonra regula falsi yöntemi sabit nokta iterasyonu gibi olur. Bu yöntem $|\phi'(\xi)| < 1$ için yakınsar. O halde,

$$\phi'(\xi) = 1 - \frac{\xi - b}{f(\xi) - f(b)} f'(\xi) = 1 - \frac{f'(\xi)}{f'(\mu_1)}, \xi < \mu_1 < b \quad (21)$$

elde edilir.

Ortalama değer teoremi ile $\mu_2 \in (x_i, \xi)$ değeri vardır öyleki

$$f(x_i) - f(\xi) = (x_i - \xi)f'(\mu_2) \quad (22)$$

eşitliği sağlanır. $[x_i, b]$ 'de $f''(x) \geq 0$ olduğu için, $f'(x)$, $[x_i, b]$ 'de monoton artandır ve

$$f'(\mu_2) = \frac{f(x_i)}{x_i - \mu} > 0 \quad (23)$$

buradan

$$0 < f'(\mu_2) \leq f'(\xi) \leq f'(\mu_1) \Rightarrow 0 < \frac{f'(\xi)}{f'(\mu_1)} \leq 1 \quad (24)$$

sonucu çıkar. Böylece

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

olmak üzere

$$f(x_1) = 0 \Rightarrow \frac{0 - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0) \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (27)$$

bunun için aşağıdaki algoritma uygulanmaktadır.

Adım 1: $\varepsilon > 0$ hata payı verilir ve $n = 0$ alınır. Başlangıç noktası x_0 noktası keyfi belirlenir. Eğer $f'(x_0) = 0$ ise başka bir x_0 noktası seçilir.

Adım 2:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

şeklinde nokta bulunur.

Adım 3: Eğer $|x_{n+1} - x_n| > \varepsilon$ ise n 'yi 1 arttırılır. $n = n + 1$ alınarak 2. adıma gidilir. Aksi durumda $f'(x_n) = 0$ ise işleme son verilir değil ise $x \cong x_n$ olarak çözüm elde edilir.

Burada başlangıç değeri olarak karmaşık değer alınıp karmaşık değerler ile çalışıldığında karmaşık köke yakınsama olabilmektedir.

2.6.1. Newton-Raphson Yöntemi Yakınsaklık Analizi

r , $f(x) = 0$ 'ın kökü ve x_n 'de bir yaklaşım olsun. Bu durumda $|r - x_n| = \delta < 1$ olmalıdır. Taylor seri açılımından, $\xi \in (x_n, r)$ için

$$\begin{aligned} 0 &= f(r) = f(x_n + \delta) \\ &= f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2}(r - x_n)^2 \end{aligned} \quad (29)$$

yazılabilir. Newton-Raphson iterasyon formülünden,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (30)$$

$$f(x_n) = f'(x_n)(x_n - x_{n+1}) \quad (31)$$

yazılabilir. (29) ve (31)'den

$$0 = f'(x_n)(r - x_{n+1}) + \frac{f''(\xi)}{2}(r - x_n)^2 \quad (32)$$

elde edilir.

$e_n = (r - x_n)$ ve $e_{n+1} = r - x_{n+1}$ yazılırsa

$$e_{n+1} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)} \cdot e_n^2 \Rightarrow e_{n+1} \approx e_n^2 \quad (33)$$

elde edilir. Bu ise Newton-Raphson yönteminin kuadratik yakınsadığını gösterir.

2.6.2. Newton-Raphson Yönteminin Dezavantajları

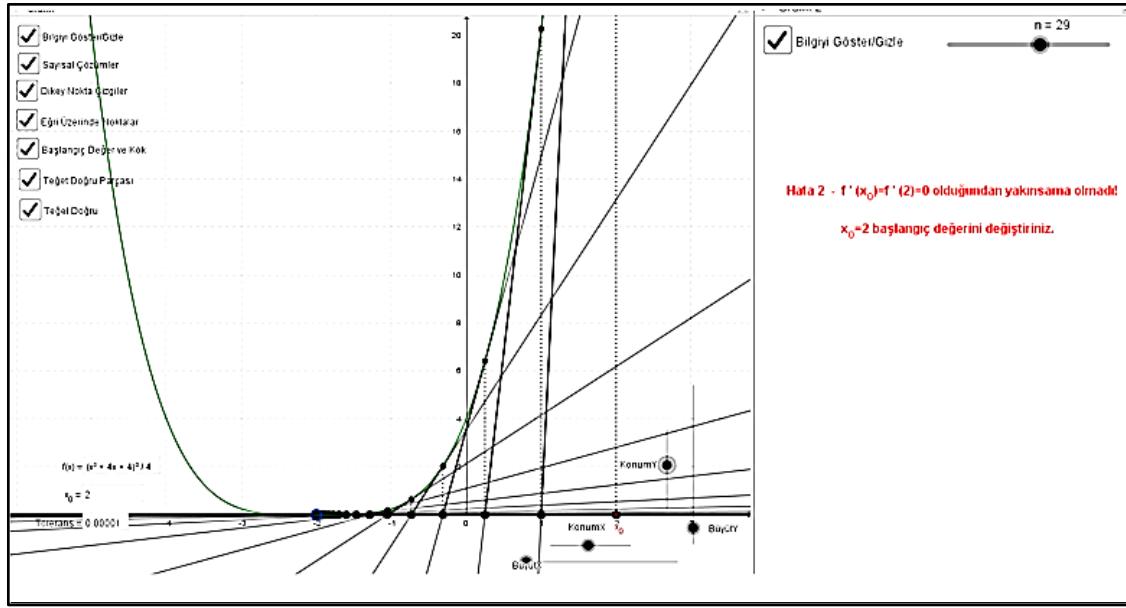
Newton-Raphson yöntemi Örnek 3'te görüldüğü gibi çoğu zaman etkili ve hızlı yaklaşım sağlamasına rağmen bazı durumlarda zayıf ve etkisiz kalmaktadır. Bu durum yakınsama kriterindeki ifadelerin yani $f(x)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevi ve fonksiyonun değeriyle ilgilidir.

Kök civarında dönüm noktası olması durumunda $f''(x) = 0$ kökten gittikçe uzaklaşma göstermektedir.

Başlangıç noktasını yerel maksimum veya minimumlar civarında seçilirse diğer iterasyon değerleri salınma eğilimi göstererek köke yaklaşmayacaktır. Hatta bu salınma

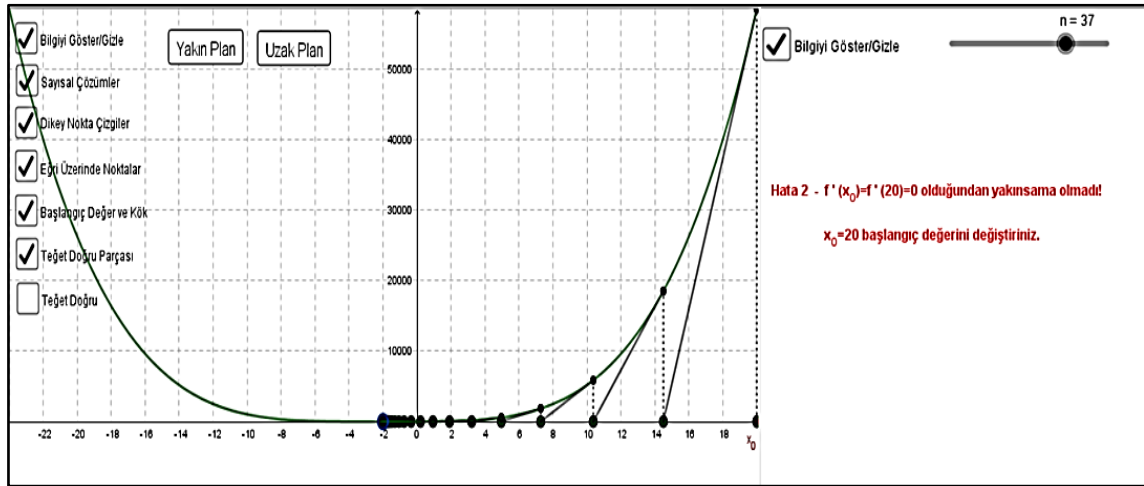
devam edebilir veya eğim ($f'(x)$) sıfır yada sıfıra yakın bir değer çıkabilir. Bu durumda çözüm ya hesaplanmayacak ya da ilgilenen aralığın çok dışında bir yere gidecektir.

Örneğin $\frac{(x^2+4x+4)^2}{4}$ denkleminin için $x = -2$ bir kök değeridir, fakat $f'(-2) = 0$ olduğu için Newton-Raphson yönteminde hata oluşturacaktır. Bu durum GeoGebra arayüzü üzerinde Şekil 14'te incelenmiştir.



Şekil 14. Newton-Raphson yönteminin GeoGebra arayüzü üzerinde hata gösterimi

Bu uygulamayı yakın planda oluşan noktaları teğet doğruları kaldırarak daha ayrıntılı görmek için Şekil 15 verilmektedir.



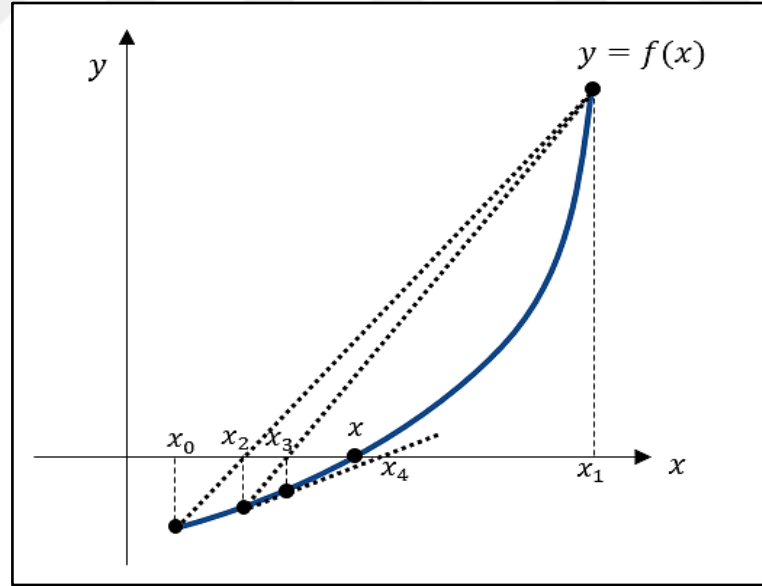
Şekil 15. Hata uygulaması yakın plan gösterimi

Köke çok uzak bir yerden başlangıç noktası seçersek de yukarıdaki sebeplerden dolayı köke sağlıklı bir şekilde yaklaşım olmayabilmektedir.

2.7. Kirişler (Sekant) Yöntemi ve Yakınsaklık Analizi

Sekant kelimesi Latince kesme manasına gelen “secan” kelimesinden türetilmiştir. Sekant yöntemi bir köke yaklaşmak için kiriş kullanır. Bu kiriş eğri üzerindeki iki noktayı birleştirerek oluşturulur.

Newton-Raphson yöntemi hızlı yakınsama sağlayan iyi bir yöntemdir. Fakat onun zayıf noktası $f(x)$ fonksiyonun türevinin gerekli olmasıdır. Polinomlar ve birçok değişik fonksiyonun türevini almakta sorun yoktur fakat bazen karmaşık fonksiyonların türevini almak zor olabilmektedir. Türev almada sorun yaşanabileceği durumlarda veya türev alma uzayacağı durumlarda kirişler yöntemi kullanılarak çözüm üretilebilir Şekil 16’da kirişler yöntemi için geometrik gösterim verilmiştir.



Şekil 16. Kirişler yönteminin geometrik gösterimi

Kirişler yöntemi Newton-Raphson yöntemine benzer bir yöntemdir fakat türevli ifade bu yöntemde kullanılmaz. Kirişler yöntemi için iki noktaya gereksinim vardır. Öncelikle x_0 ve x_1 gibi keyfi bir başlangıç noktaları verilir. Kökü bulunacak ifadenin x_n noktasındaki türevi yerine x_n ve x_{n+1} noktasındaki kirişin eğimi kullanılır.

Kirişler doğrusunun eğimi Şekil 16'dan aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2} \quad (34)$$

Burada x_2 yalnız bırakılırsa

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)} \quad (35)$$

elde edilir. x_2 noktasının elde edilişi gibi x_3, x_4, \dots noktaları da benzer tarzda bulunur. Denklemi genellersek x_{i+1} noktasını bulmak için x_i ve x_{i-1} noktalarını bilmek gerekir ve bu durumda iterasyon denkleminin genel hali şu şekilde olur: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$

Aynı formülü Newton-Raphson yöntemindeki formülden de bulunulabilir. Buna göre

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} \quad (36)$$

türevler için geri fark formülü Newton-Raphson formülünde yerine yazılırsa

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}} \quad (37)$$

elde edilir. Bu ifadeyi düzenlenirse son hali şu şekilde bulunabilir.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}. \quad (38)$$

Kiriş yöntemi, Newton-Raphson yönteminde olduğu gibi, başlangıç değeri karmaşık değer alındığında karmaşık köke yakınsama olabilmektedir.

Yakınsaklık Analizi: $e_n = r - x_n$, $e_{n+1} = r - x_{n+1}$ ve r , $f(x) = 0$ 'ın bir kökü olsun. e_n ve e_{n+1} sırasıyla n . ve $(n + 1)$. iterasyonda ki hatalar, x_n ve x_{n+1} 'de yaklaşımlar olsun. Sekant yöntemi için iterasyon ifadesi

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (39)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (40)$$

ile verilir.

$$f(r) = 0 \text{ ve } e_n = r - x_n \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= e_{n+1} + r \\ x_n &= e_n + r \\ x_{n-1} &= e_{n-1} + r \end{aligned} \quad (41)$$

(41),(40)'ta kullanılırsa

$$e_{n+1} = \frac{e_{n-1}f(x_n) - f(x_{n-1})e_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (42)$$

elde edilir. Ortalama değer teoremine göre x_n ve r aralığındaki μ_n değeri için

$$f'(\mu_n) = \frac{f(x_n) - f(r)}{x_n - r}, f(r) = 0, x_n - r = e_n \quad (43)$$

yazıldığında

$$f'(\mu_n) = \frac{f(x_n)}{e_n} \quad (44)$$

veya

$$f(x_n) = e_n f'(\mu_n) \quad (45)$$

elde edilir. (41) kullanılarak

$$f(x_{n-1}) = e_{n-1} f'(\mu_{n-1}) \quad (46)$$

yazılır. (45) ve (46),(42)'de yerine yazılırsa,

$$e_{n+1} = e_n e_{n-1} \frac{f'(\mu_n) - f'(\mu_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (47)$$

yani $e_{n+1} \cong e_n e_{n-1}$ şeklindedir. Yakınsaklık mertebesi tanımından

$$e_n \cong e_{n-1}^p \Rightarrow e_{n+1} \cong e_n^p \quad (48)$$

yazılabilir. (48)'den

$$e_n^p \cong e_{n-1}^p e_{n-1} \quad (49)$$

$$e_n \cong e_{n-1}^{(p+1)/p} \quad (50)$$

elde edilir. (48) ve (49)'dan

$$p = \frac{p+1}{p} \Rightarrow p = 1.618 \quad (51)$$

$e_{n+1} \cong e_n^{1.618}$ olup yakınsaklık mertebesi Newton yönteminden daima düşüktür.

2.8. Sabit Nokta İterasyon Yöntemi ve Yakınsaklık Analizi

Sabit nokta iterasyonunun ana fikri $f(x) = 0$ denklemini uygun bir şekilde parçalayarak onun yerine $y_1 = g(x)$ ve $y_2 = h(x)$ formunda iki eşitlik kullanmaktır. Oluşturulan sistem ardışık olarak çözülür. Burada parçalanmış denklemin parçaları olan $g(x)$ ve $h(x)$ için aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$f(x) = g(x) - h(x) = 0 . \quad (52)$$

Bunu yapmakla çözülecek denklem sayısı ikiye çıkarılmış ancak denklemler daha basit hale indirgenmiştir. Hatta bunlardan birisi doğrudan x 'e eşit olabilir veya x 'e göre çözülebilir. Yöntemin uygulanışında köke yakın olduğu varsayılan bir başlangıç değeri ile iterasyona başlanır. Birinci denklem ya x_0 'a eşittir ya da x_0 yerine konularak x_1 değeri bulunur. İkinci eşitlikte x_1 kullanılarak x_2 değeri hesaplanır ve bu işlem istenilen yaklaşık kök değerine ulaşmaya kadar devam ettirilir. Bunun için aşağıdaki algoritma uygulanır.

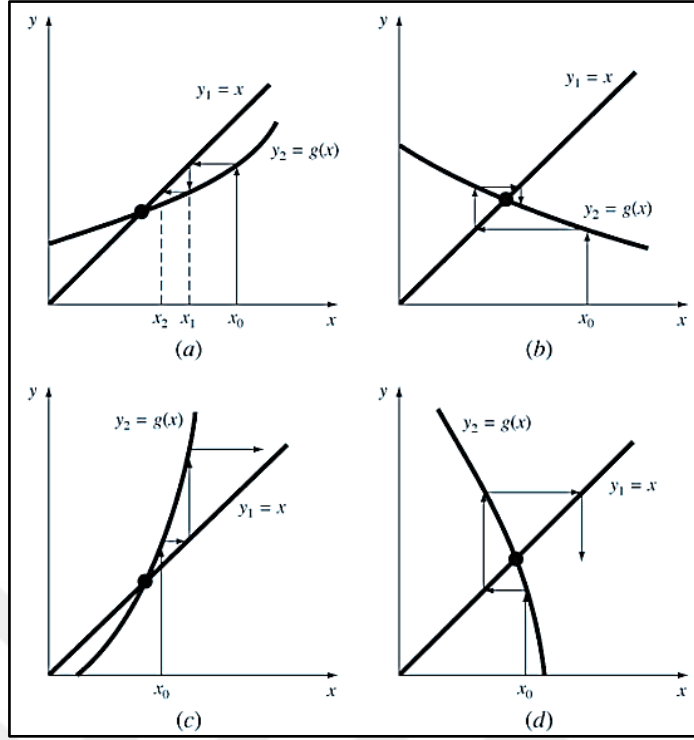
Adım 1: Köke yakın bir x_0 başlangıç değeri tahmin edilir.

Adım 2: $f(x) = 0$ sıfır denklemi $x = g(x)$ formunda yeniden düzenlenir.

Adım 3: $x_{i+1} = g(x_i)$ denkleminde kök için yeni bir değer hesaplanır.

Adım 4: $\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \cdot 100 \leq \varepsilon_s$ ise durulur, değilse $x_i = x_{i+1}$ olarak Adım3'e gidilir.

Sabit nokta yönteminde yakınsama yanında ıraksama ihtimali de her zaman söz konusudur. Yakınsama ve ıraksama olayı grafiksel olarak Şekil 17'de gösterilmiştir.



Şekil 17. Sabit nokta yönteminin a) yakınsama durumu, b) yakınsama durumu, c) iraksama durumu, d) iraksama durumu

Şekil 17(a) ve Şekil 17 (b)'de sabit nokta iterasyonu, yakınsamasının; Şekil 17(c) ve Şekil 17(d)'de sabit nokta iterasyonunun iraksamasının grafiksel gösterimi olmak üzere, (a) ve (b) grafiklerine monoton şekiller, (c) ve (d) grafiklerine ise salınan veya spiral şekiller denir. Yakınsama $|g'(x)| < 1$ şartında gerçekleşebilmektedir.

Şekil 17'de başlangıç değerleri olarak x_0 noktası kullanılmıştır. (d) grafiğinde x_0 noktasından hareket edildiğinde $y_2 = g(x)$ eğrisine ulaşılan yerden $y_1 = x$ doğrusuna doğru gidildiğinde kök değerine yaklaşmış gibi görülmektedir, ancak daha sonra iterasyona devam edildiğinde bir başka deyişle yeni bulunan yaklaşık kök değeri kullanılarak eğrilerin kesişme noktasına yaklaşılmaya çalışıldığında bu noktadan uzaklaştığı görülmektedir. Bu durumlar sabit iterasyon yönteminde zaman zaman karşılaşılabilmektedir. Benzer şekilde (b) grafiğinde ise her iterasyonda köke gittikçe yaklaşmakta ve her adımda hata değeri azalmaktadır. Bu grafikte dikkat edilirse $y_2 = g(x)$ fonksiyonunun eğiminin mutlak değerinin $y_1 = x$ fonksiyonunun eğiminden küçük olması halinde yakınsama olmaktadır. Yakınsama olursa her adımda hata bir önceki adımdaki hata ile aynı ya da küçüktür. Bu nedenle sabit nokta iterasyonu doğrusal yakınsama özelliğine sahiptir.

Yakınsaklık Analizi: $e_n = r - x_n$ olsun. Bu durumda,

$$e_n = g(r) - g(x_{n-1}) = g'(c_n)e_{n-1}, c_n \in (r, x_n) \quad (53)$$

yazılabilir. Böylece,

$$|e_n| \leq K|e_{n-1}| \leq K^2|e_{n-2}| \leq \dots \leq K^n|e_0| \quad (54)$$

yazılabilir. $0 \leq K < 1$ olduğundan, $n \rightarrow \infty$ için $K^n \rightarrow 0$ ve böylece $n \rightarrow \infty$ için $e_n \rightarrow 0$ dir. g fonksiyonunun iki kez türevlenebilir olduğu kabul edilirse,

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= r - x_{n+1} = g(r) - g(x_n) = g(r) - g(r - e_n) \\ &= e_n g'(r) - \frac{e_n^2}{2} g''(c_n), c_n \in (r, x_n) \end{aligned} \quad (55)$$

elde edilir. Şayet $g'(r) \neq 0$ ise bu durumda,

$$|e_{n+1}| \sim A|e_n|, A \approx |g'(r)| \quad (56)$$

olur ve yakınsama birinci mertebededir. Fakat $g'(r) = 0$ ise

$$|e_{n+1}| \sim c|e_n|^2, c \approx |g''(r)|/2 \quad (57)$$

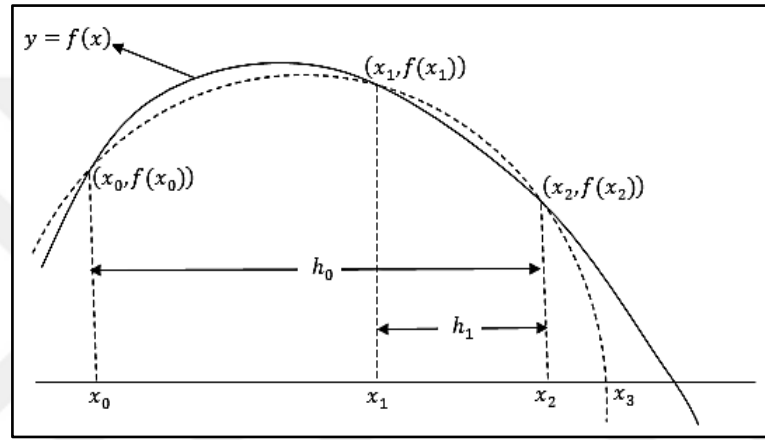
olup yakınsama ikinci mertebededir.

2.9. Müller Yöntemi

Müller yöntemi kirişler yönteminin geliştirilmiş durumudur. Bu yöntemde $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ şeklinde üç noktadan geçen parabol ile temsil edilerek bir yaklaşım kullanılır. Noktalardan ikisi verildiğinde üçüncü noktayı ya kendimiz seçeriz ya da bu nokta verilebilir. Bu üç noktadan geçen parabolün iki kökü vardır. Eğer verilen iki noktanın orta noktası olarak üçüncü nokta seçilirse, bu parabolün köklerinden hangisi bu noktaya yakınsarsa o yaklaşık kök olarak alınır, veya

verilen iki nokta ile birlikte üçüncü nokta olarak alınıp yeni parabol ve bunun köklerini bulmak suretiyle işleme devam edilir.

Kiriş yönteminde ise fonksiyon iki noktadan geçen doğru ile temsil edilmektedir. Fonksiyonu temsil eden parabolün kökü bulunarak, kökün ilk yaklaşım değeri elde edilir. Daha sonra bulunan bu nokta ile diğer iki nokta göz önüne alınıp yeniden yaklaşık kök bulunarak işleme devam edilir. Genelliği kaybetmeksizin aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi x_2 noktasının köke en iyi yaklaşım olduğu kabul edilir.



Şekil 18. Müller yöntemi GeoGebra arayüz örneği

Bu yöntemde $t = x - x_2$ değişken dönüşümü ve $h_0 = x_0 - x_2$, $h_1 = x_1 - x_2$ farkları kullanılır. $y = at^2 + bt + c$ polinomu ele alındığında a, b, c katsayılarını bulmak için $t = h_0, t = h_1, t = 0$ noktaları düşünülür. $h_0 = x_0 - x_2$, $h_1 = x_1 - x_2$ farkları kullanılır.

$$y = at^2 + bt + c \quad (58)$$

Polinomu ele alındığında polinomdaki a, b, c katsayılarını bulmak için $t = h_0$, $(t = h_1), t = 0$ noktaları düşünülür.

$$t = h_0 \Rightarrow ah_0^2 + bh_0 + c = f_0 \quad (59)$$

$$t = h_1 \Rightarrow ah_1^2 + bh_1 + c = f_1 \quad (60)$$

$$t = 0 \Rightarrow a0^2 + b0 + c = f_2 \Rightarrow c = f_2 \quad (61)$$

Buna göre $ah_0^2 + bh_0 = f_0 - f_2$, $ah_1^2 + bh_1 = f_1 - f_2$ katsayılarını

$$a = -\frac{1}{h_0h_1^2 - h_0^2h_1} (f_0h_1 - f_1h_0 + f_2h_0 - f_2h_1) \quad (62)$$

$$b = -\frac{1}{h_0h_1^2 - h_0^2h_1} (f_0h_1^2 - f_1h_0^2 + f_2h_0^2 - f_2h_1^2) \quad (63)$$

olarak elde ederiz. 2. dereceden bir polinomun köklerinin bulunması ise aşağıdaki formül ile hesaplanır:

$$t_{1,2} = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad (64)$$

Eğer $b > 0$ ise karekökün önündeki işaret pozitif alınırken $b < 0$ ise karekökün önündeki işaret negatif alınır ve son olarak bir sonraki iterasyon noktası

$$x_3 = x_2 + t_{1,2} \quad (65)$$

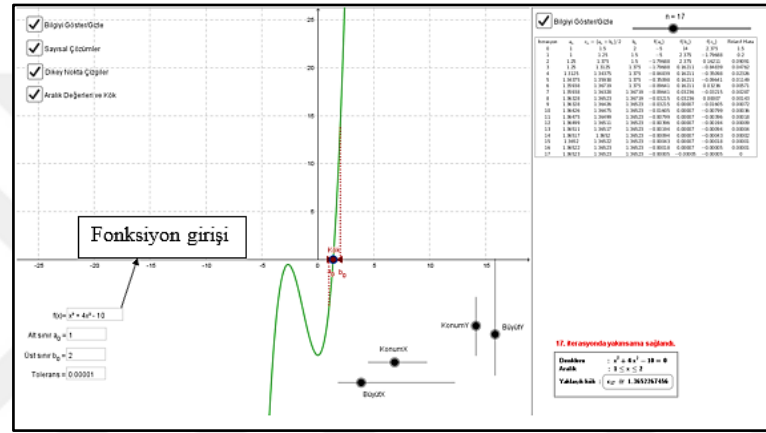
olarak elde edilir.

Müller Yöntemi; giriş yönteminden daha hızlı, Newton –Raphson yönteminden daha yavaştır. Bu yöntem ile karmaşık kökler de hesap edilebilir.

3. BULGULAR

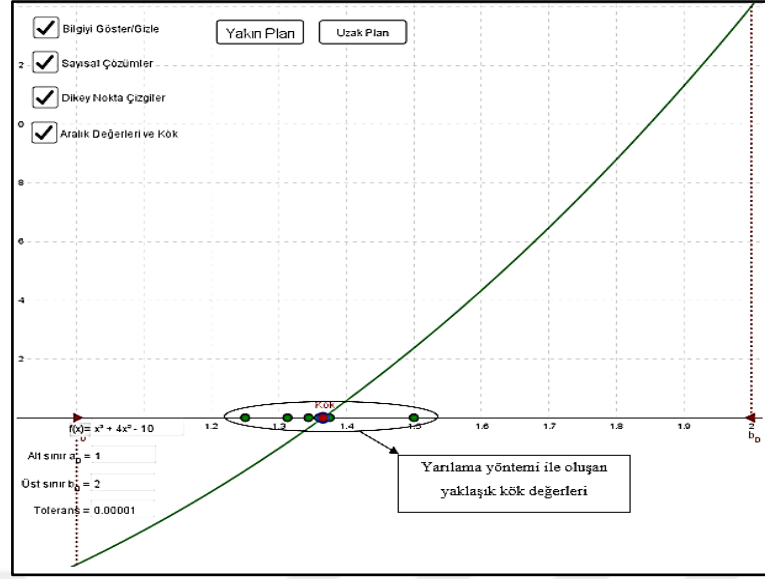
Daha önce verilen yöntemler için GeoGebra’da farklı arayüzler tasarlanmıştır. Her bir yöntem için bu arayüzler aşağıdaki örneklerde verilmektedir.

Örnek 1 (İkiye bölme yöntemi): Bu örnekte $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ denkleminin $[1,2]$ aralığındaki çözümü ikiye bölme yöntemi ile bulunmaktadır. Tolerans olarak $\varepsilon = 10^{-5}$ alınmaktadır. Buna göre görsel arayüz Şekil 19’da gösterildiği gibi olmaktadır:



Şekil 19. Yarılama yöntemi için GeoGebra arayüz örneği

Yarılama yöntemi ile belirlenen hata payı için yaklaşık kök değerine ulaşılırken oluşan yaklaşık kök değerleri Şekil 20’de gösterilmiştir.



Şekil 20. GeoGebra uygulaması Örnek 1 yakın plan gösterimi

Denklemin girilen değerlerde oluşan yaklaşık kök tablosu Şekil 21’de gösterilmiştir.

Bilgiyi Göster/Gizle

n = 17

İterasyon	a_n	$c_n = (a_n + b_n)/2$	b_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$	Relatif Hata
0	1	1.5	2	-5	14	2.375	1.5
1	1	1.25	1.5	-5	2.375	-1.79688	0.2
2	1.25	1.375	1.5	-1.79688	2.375	0.16211	0.09091
3	1.25	1.3125	1.375	-1.79688	0.16211	-0.84839	0.04762
4	1.3125	1.34375	1.375	-0.84839	0.16211	-0.35098	0.02326
5	1.34375	1.35938	1.375	-0.35098	0.16211	-0.09641	0.01149
6	1.35938	1.36719	1.375	-0.09641	0.16211	0.03236	0.00571
7	1.35938	1.36328	1.36719	-0.09641	0.03236	-0.03215	0.00287
8	1.36328	1.36523	1.36719	-0.03215	0.03236	0.00007	0.00143
9	1.36328	1.36426	1.36523	-0.03215	0.00007	-0.01605	0.00072
10	1.36426	1.36475	1.36523	-0.01605	0.00007	-0.00799	0.00036
11	1.36475	1.36499	1.36523	-0.00799	0.00007	-0.00396	0.00018
12	1.36499	1.36511	1.36523	-0.00396	0.00007	-0.00194	0.00009
13	1.36511	1.36517	1.36523	-0.00194	0.00007	-0.00094	0.00004
14	1.36517	1.3652	1.36523	-0.00094	0.00007	-0.00043	0.00002
15	1.3652	1.36522	1.36523	-0.00043	0.00007	-0.00018	0.00001
16	1.36522	1.36523	1.36523	-0.00018	0.00007	-0.00005	0.00001
17	1.36523	1.36523	1.36523	-0.00005	-0.00005	-0.00005	0

17. iterasyonda yakınsama sağlandı.

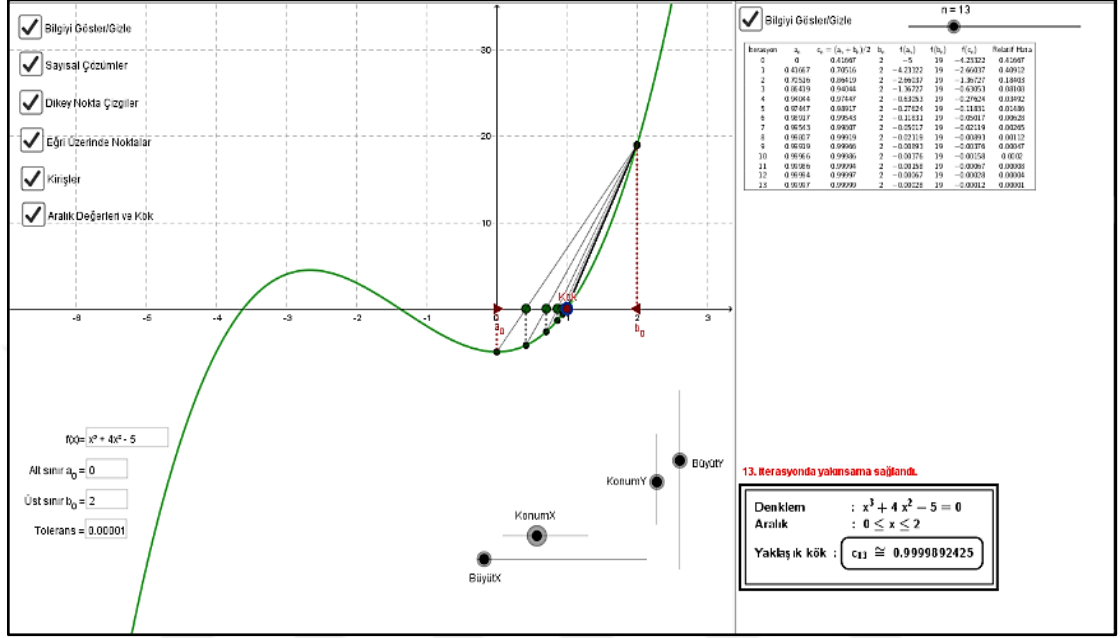
Denlem : $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

Aralık : $1 \leq x \leq 2$

Yaklaşık kök : $c_{17} \approx 1.3652267456$

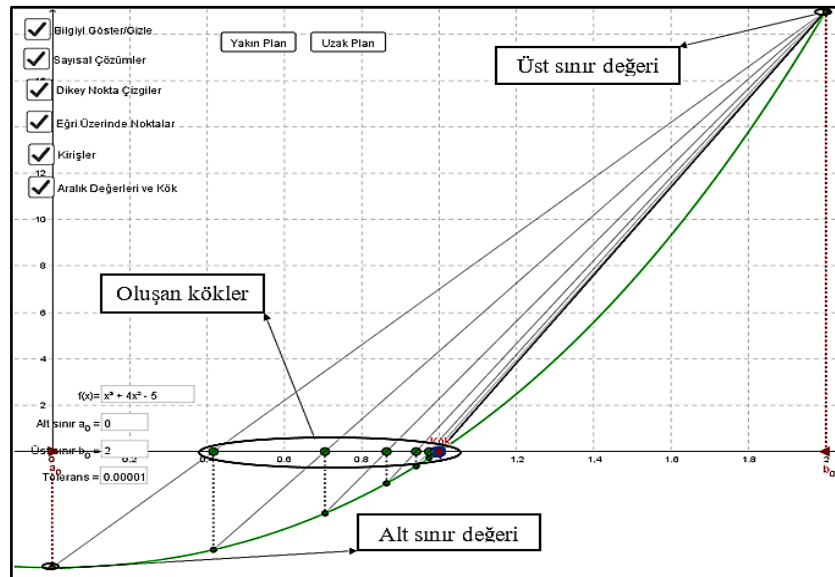
Şekil 21. Girilen fonksiyonun istenilen aralıkta sayısal çözümünde oluşan yaklaşık kökleri

Örnek 2 (Regula Falsi yöntemi): Bu örnekte $x^3 + 4x^2 - 5 = 0$ denkleminin $[0,2]$ aralığındaki çözümü Regula Falsi yöntemi ile bulunmaktadır. Tolerans olarak $\varepsilon = 10^{-5}$ alınmaktadır. Buna göre görsel arayüz Şekil 22’de olduğu gibidir:



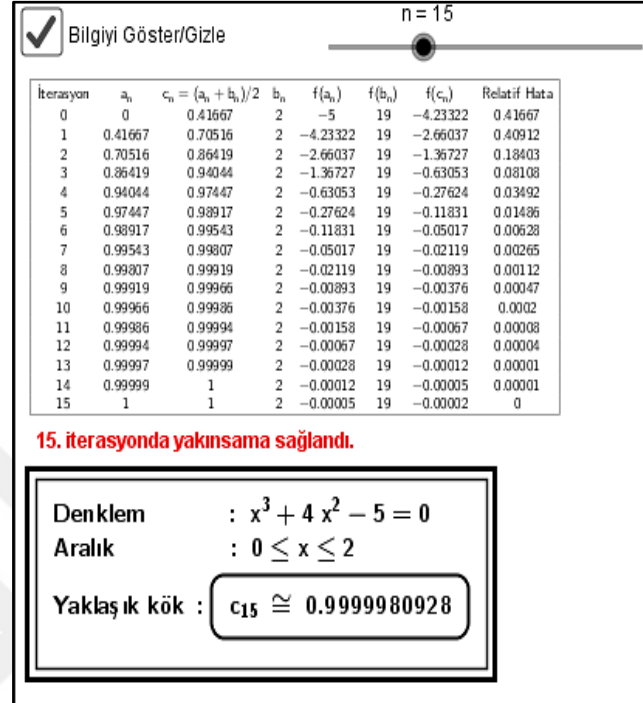
Şekil 22. Regula-Falsi yöntemi için GeoGebra arayüz örneği

Regula Falsi yöntemi ile belirlenen bir tolerans değeri için kök değerine ulaşılırken hesaplanan yaklaşık kök değerleri Şekil 23’te gösterilmiştir.



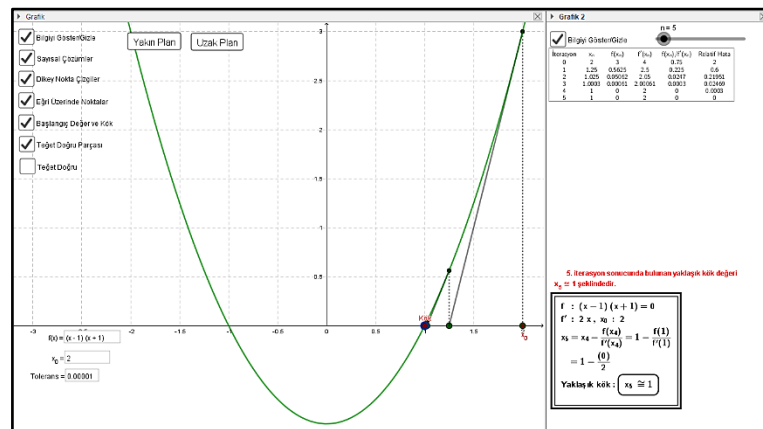
Şekil 23. GeoGebra uygulaması Örnek 2 yakın plan gösterimi

Denklemin girilen değerlerde oluşan yaklaşık kök tablosu Şekil 24'te gösterilmiştir.



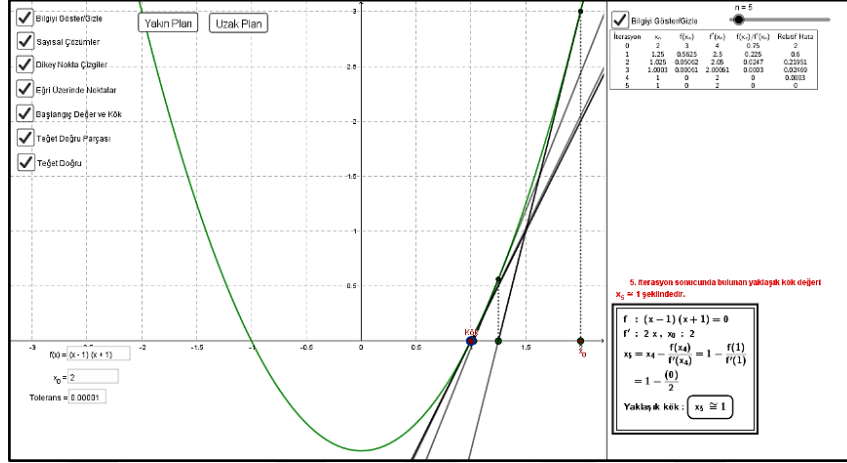
Şekil 24. Girilen denklemin istenilen aralıkta sayısal çözümünde oluşan yaklaşık kökleri

Örnek 3 (Newton Raphson yöntemi): Bu örnekte $f(x) = (x - 1)(x + 1)$ denkleminin $x = 2$ başlangıç koşulu alarak çözümü Newton-Raphson yöntemi ile bulunmaktadır. Tolerans $\varepsilon = 10^{-5}$ alınmaktadır. Buna göre grafik arayüzü aşağıdaki gibi oluşmaktadır (Şekil 25):



Şekil 25. Newton Raphson yöntemi için GeoGebra arayüz örneği

Newton-Raphson yöntemi ile belirlenen başlangıç koşulu ile yaklaşık kök değerine ulaşılrken çizilen teğetler Şekil 26'da gösterilmiştir.



Şekil 26. GeoGebra uygulaması Örnek 3 çözümünde kullanılan teğet doğruları

Denklemin girilen değerlerde oluşan yaklaşık kök tablosu Şekil 27'de gösterilmiştir.

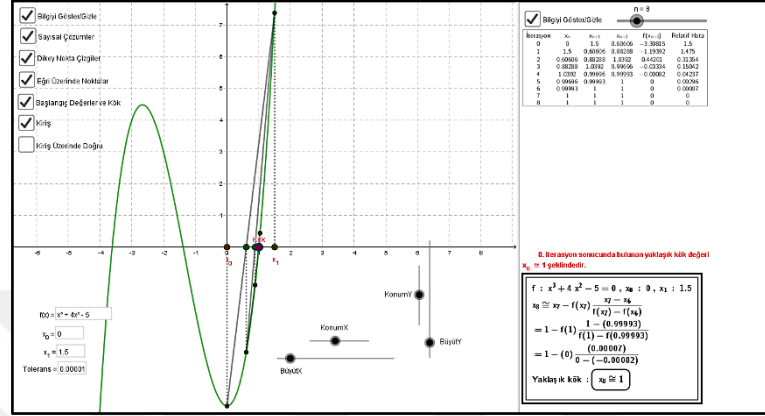
İterasyon	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(x_n)/f'(x_n)$	Relatif Hata
0	2	3	4	0.75	2
1	1.25	0.5625	2.5	0.225	0.6
2	1.025	0.05062	2.05	0.0247	0.21951
3	1.0003	0.00061	2.00061	0.0003	0.02469
4	1	0	2	0	0.0003
5	1	0	2	0	0

5. iterasyon sonucunda bulunan yaklaşık kök değeri $x_5 \approx 1$ şeklindedir.

$f : (x-1)(x+1) = 0$
 $f' : 2x, x_0 : 2$
 $x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)}$
 $= 1 - \frac{0}{2}$
Yaklaşık kök : $x_5 \approx 1$

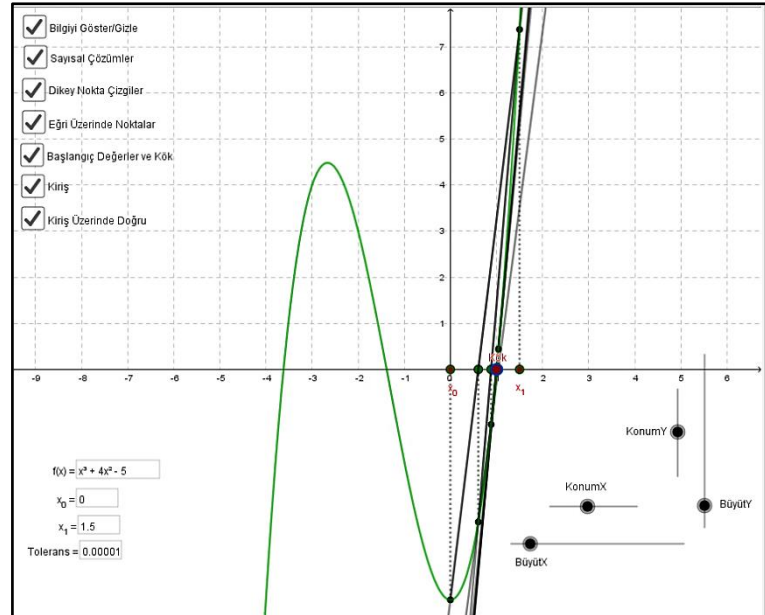
Şekil 27. Girilen denklemin istenilen aralıkta sayısal çözümünde oluşan yaklaşık kökleri

Örnek 4 (Kirişler yöntemi): İterasyon formülü kullanılarak $f(x) = (x - 1)(x + 1)$ denkleminin $x_0 = 0, x_1 = 1.5$ başlangıç koşulu için çözümünü kirişler yöntemi ile bulunmaktadır. Tolerans $\varepsilon = 10^{-5}$ alınmaktadır. Buna göre grafik arayüzü aşağıdaki gibi oluşmaktadır (Şekil 28):



Şekil 28. Secant yöntemi için GeoGebra arayüzü

Kirişler yöntemi ile yaklaşık kök değerine ulaşılırken Şekil 26'da sade görüntü olması için teğet doğruları gizlenmiştir. Teğet görüntüleri ile Şekil 29'da çözüm gösterilmiştir.



Şekil 29. GeoGebra uygulaması Örnek 4 çözümünde kullanılan teğet doğruları

Denklemin girilen değerlerde oluşan yaklaşık kök tablosu Şekil 30'da gösterilmiştir.

Bilgiyi Göster/Gizle
 n = 8

İterasyon	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$f(x_{n+2})$	Relatif Hata
0	0	1.5	0.60606	-3.30815	1.5
1	1.5	0.60606	0.88288	-1.19392	1.475
2	0.60606	0.88288	1.0392	0.44201	0.31354
3	0.88288	1.0392	0.99696	-0.03334	0.15042
4	1.0392	0.99696	0.99993	-0.00082	0.04237
5	0.99696	0.99993	1	0	0.00296
6	0.99993	1	1	0	0.00007
7	1	1	1	0	0
8	1	1	1	0	0

8. iterasyon sonucunda bulunan yaklaşık kök değeri $x_8 \cong 1$ şeklindedir.

$f : x^3 + 4x^2 - 5 = 0, x_0 : 0, x_1 : 1.5$

$$x_8 \cong x_7 - f(x_7) \frac{x_7 - x_6}{f(x_7) - f(x_6)}$$

$$= 1 - f(1) \frac{1 - (0.99993)}{f(1) - f(0.99993)}$$

$$= 1 - (0) \frac{(0.00007)}{0 - (-0.00082)}$$

Yaklaşık kök : $x_8 \cong 1$

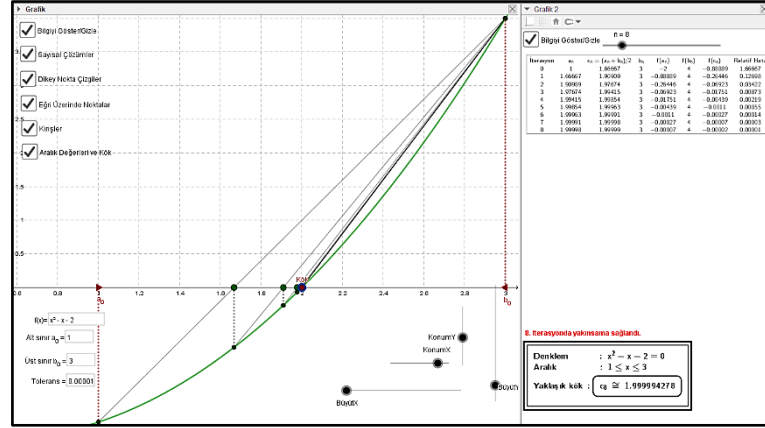
Şekil 30. Girilen denklemin istenilen aralıkta sayısal çözümünde oluşan yaklaşık kökleri

Kiriş yöntemi ile Regula Falsi yöntemi çalışma yöntemi birbirine yakındır. Kiriş metodunda işaretine bakılmaksızın elde edilen ardışık yaklaşım noktalarını birleştiren doğrunun x eksenini kestiği noktanın yeni yaklaşım değeri olarak elde edilmesine karşın, Regula Falsi metodunda ardışık yaklaşım noktalarını birleştiren doğru parçasının x eksenini kestiği yeni yaklaşım noktasının işaretinin kendinden önceki iki yaklaşımın işaretleri ile karşılaştırılması yapılmaktadır.

Sırada ki örnekte hem giriş hem de Regula-Falsi yönteminin GeoGebra üzerinde karşılaştırmalı olarak çözümleri incelenmiştir.

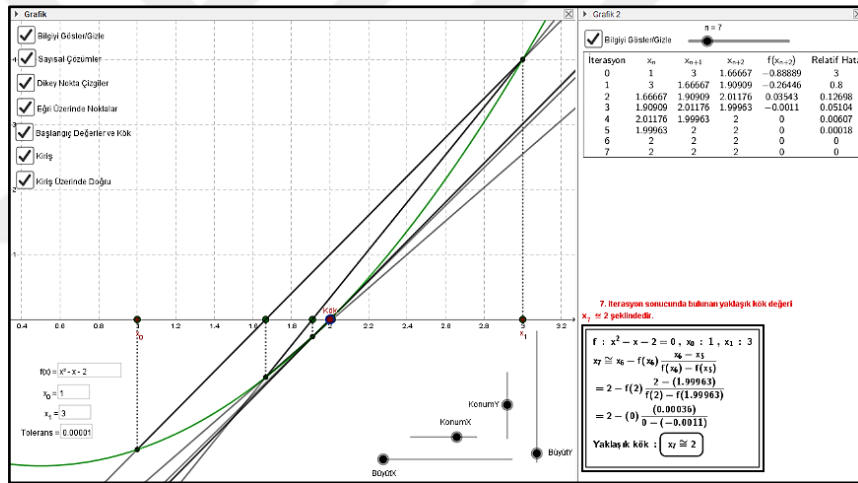
Örnek 5 (Kirişler yöntemi): $f(x) = x^2 - x - 2$ denkleminin $[1,3]$ aralığında ve tolerans $\varepsilon = 10^{-5}$ olmak üzere çözümünü aşağıdaki gibi oluşturmaktadır.

İlk olarak Şekil 31'de Regula-Falsi Yöntemi kullanılarak çözüm yapılmıştır.



Şekil 31. Regula Falsi ile çözüm (yöntem karşılaştırma)

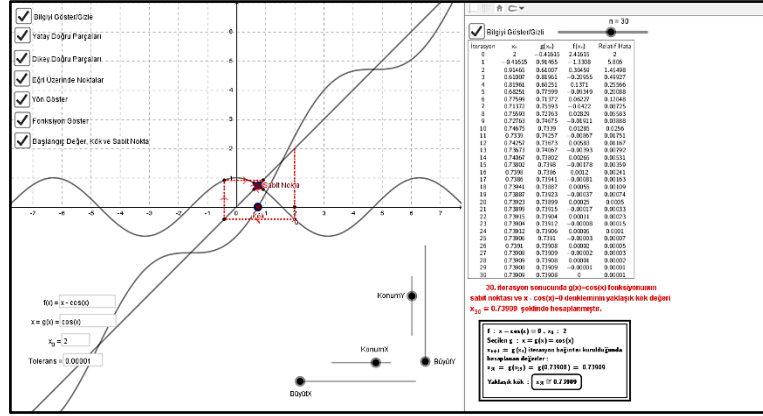
Aynı örneğin Şekil 32’de kirişler yöntemi ile çözümünü aşağıdaki gibi oluşturmaktadır.



Şekil 32. Kiriş yöntemi ile çözüm (yöntem karşılaştırma)

İki çözüm karşılaştırıldığında x_2 ve x_3 yaklaşım değerleri aynı iken x_4 değerinden sonra yaklaşım değerleri farklılaşmaya başlamıştır. Kiriş yöntemi 7. adımda kök değerine yaklaşım sağlamasına karşın Regula Falsi yöntemi 8. Adımda aynı tolerans koşulu altında kök değerine yaklaşım sağlamıştır.

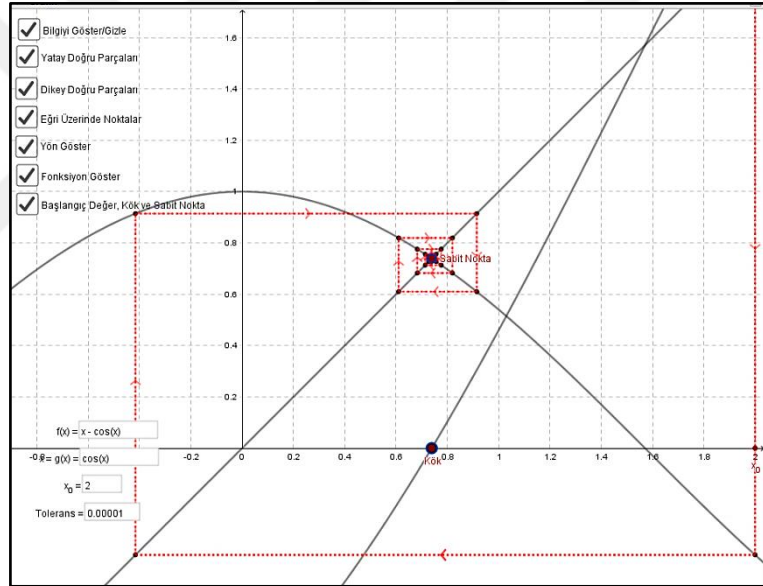
Örnek 6 (sabit nokta iterasyon yöntemi): Sabit nokta iterasyon yöntemi kullanarak $x_0 = 0$ başlangıç noktası tahmini ile $f(x) = x - \cos(x)$ fonksiyonunun kökleri tolerans $\varepsilon = 10^{-5}$ ile bulunmaktadır. Buna göre grafik aşağıdaki gibi olmaktadır (Şekil 33):



Şekil 33. Sabit Nokta İterasyonu için GeoGebra arayüzü

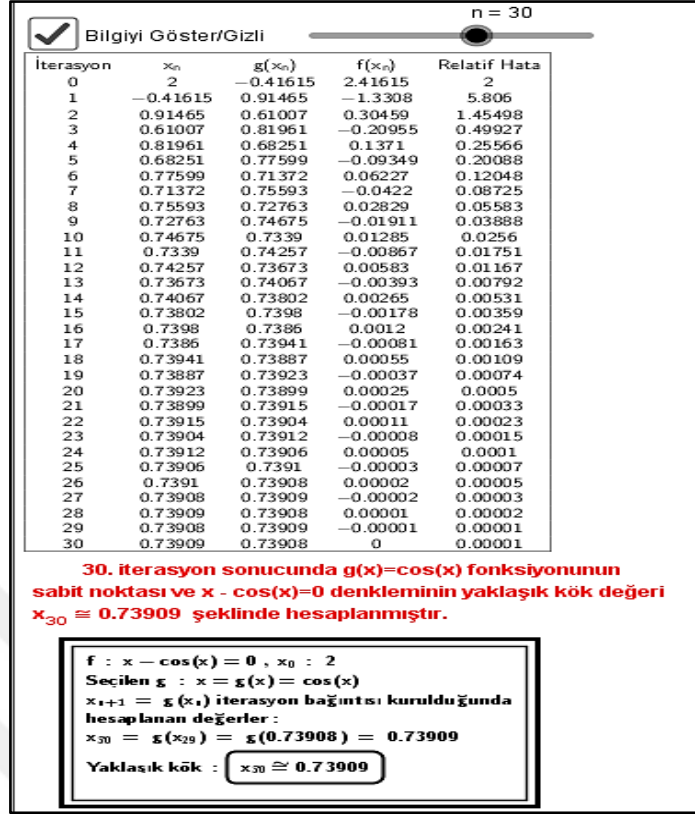
Örnek 6 için Geogebra üzerinde sabit nokta yöntemi ile yakın planda çözümü

Şekil 34'te incelenmiştir.



Şekil 34. GeoGebra uygulaması Örnek 6 yakın plan gösterimi

Denklemin girilen değerlerde oluşan yaklaşık kök tablosu Şekil 35'te gösterilmiştir.



Şekil 35. Girilen denklemin istenilen çözüm aralığında sayısal çözümünde oluşan yaklaşık kökleri

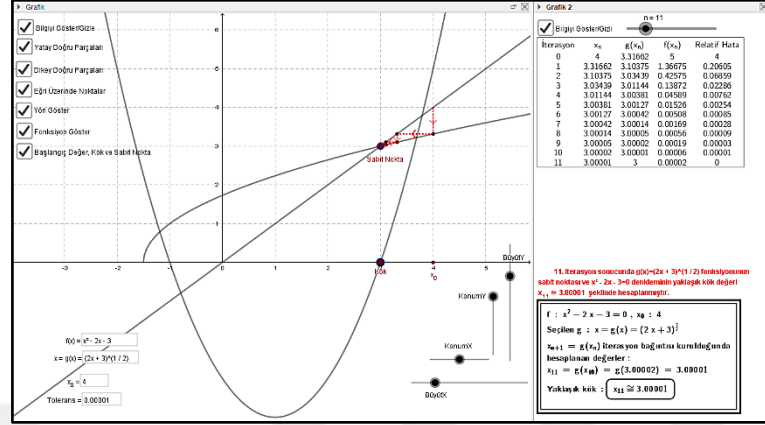
Örnek 7 (sabit nokta iterasyon yöntemi): Bu örnekte sabit iterasyon yöntemi kullanılırken verilen fonksiyonun farklı parçalama durumlarına göre oluşacak durumları incelenmiştir.

$f(x) = x^2 - 2x - 3$ denkleminin kökleri $x_0 = 4$ başlangıç değeri ve tolerans $\varepsilon = 10^{-5}$ ile hesaplanmıştır.

$f(x) = g(x) - h(x)$ eşitliğinde $g(x)=x$ şeklinde alınarak $h(x)$ üç farklı şekilde ifade edilebilir.

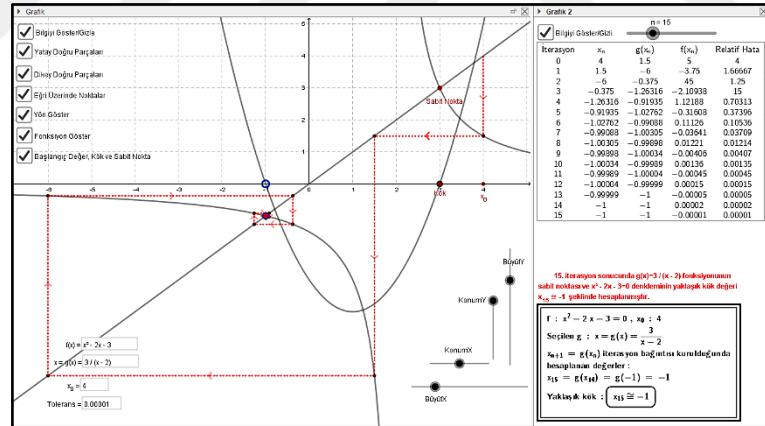
1. seçenek $g(x) = h(x) \Rightarrow x = \sqrt{2x + 3}$
2. seçenek $g(x) = h(x) \Rightarrow x = \frac{3}{x-2}$
3. seçenek $g(x) = h(x) \Rightarrow x = \frac{(x^2-3)}{2}$

Bunların hepsinin aynı başlangıç değeri ile sonuca gitmesi beklenmez. İlk olarak hesaplama için birinci seçenekteki parçalanma Şekil 36’da gösterilmiştir.



Şekil 36. 1. Durum için GeoGebra üzerinde çözüm görseli

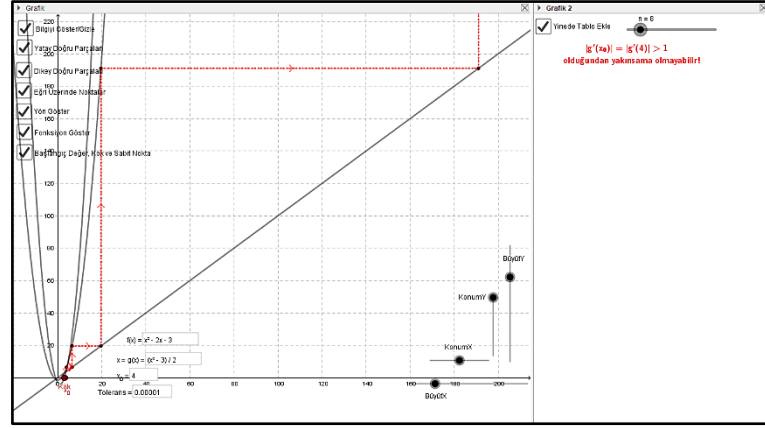
Burada görüldüğü gibi yaklaşık köke yakınsama olmuştur. Şekil 37’de de 2. durum için çözüm bulmaya çalışılmıştır.



Şekil 37. 2. Durum için GeoGebra üzerinde çözüm görseli

Bu seçimde de denklemin diğer kök değerine yakınsama olarak çözüm bulunmuştur. Bu çözüm incelendiğinde bulunan kök değerine daha fazla iterasyon ile ulaşılmıştır.

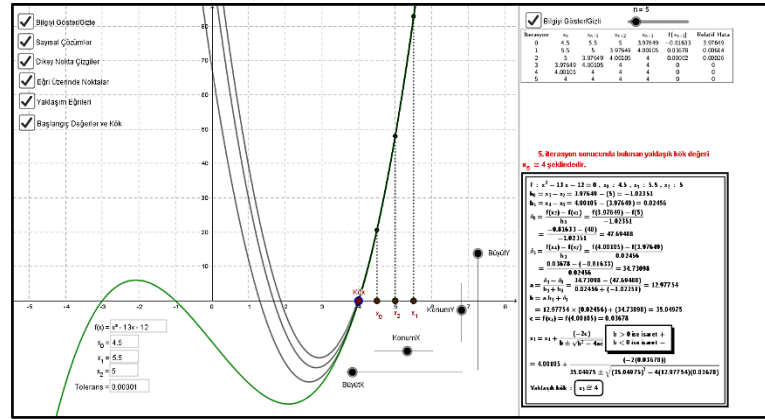
Son olarak 3. durum için çözüm GeoGebra arayüzünde incelenmiştir (Şekil 38).



Şekil 38. 3. Durum için GeoGebra üzerinde çözüm görseli

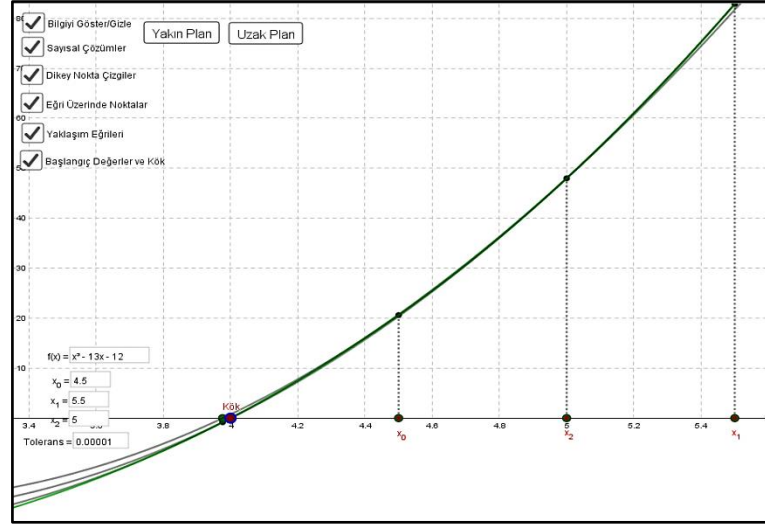
Son durum incelendiğinde seçtiğimiz parçalanma ile sabit iterasyon yöntemi çözümden iraksayarak sonuç üretmemiştir. Görüldüğü gibi seçilen parçalanma bulunacak kökü değiştirebileceği gibi çözüm üretmeyebiliyor.

Örnek 8 (Müller yöntemi): Bu örnekte $x^3 - 13x - 12 = 0$ denkleminin $x_0 = 4.5$, $x_1 = 5.5$ ve $x_3 = 5$ noktaları alınarak çözümü Müller yöntemi ile bulunmaktadır. Tolerans olarak $\epsilon = 10^{-5}$ alınmaktadır. Buna göre grafik Şekil 39'da oluşturulmuştur:



Şekil 39. Müller yöntemi için GeoGebra arayüzü

Müller yöntemi ile belirlenen tolerans için yaklaşık kök değerine ulaşılırken oluşan yaklaşık kök değerleri yakın planda Şekil 40'ta gösterilmiştir.



Şekil 40. GeoGebra uygulamasında Örnek 8 için çözümden oluşan yaklaşık kökler

Denklemin girilen değerlerde oluşan yaklaşık kök tablosu Şekil 41’de gösterilmiştir.

Bilgiyi Göster/Gizli n = 5

İterasyon	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	x_{n+3}	$f(x_{n+3})$	Relatif Hata
0	4.5	5.5	5	3.97649	-0.81633	3.97649
1	5.5	5	3.97649	4.00105	0.03678	0.00614
2	5	3.97649	4.00105	4	0.00002	0.00026
3	3.97649	4.00105	4	4	0	0
4	4.00105	4	4	4	0	0
5	4	4	4	4	0	0

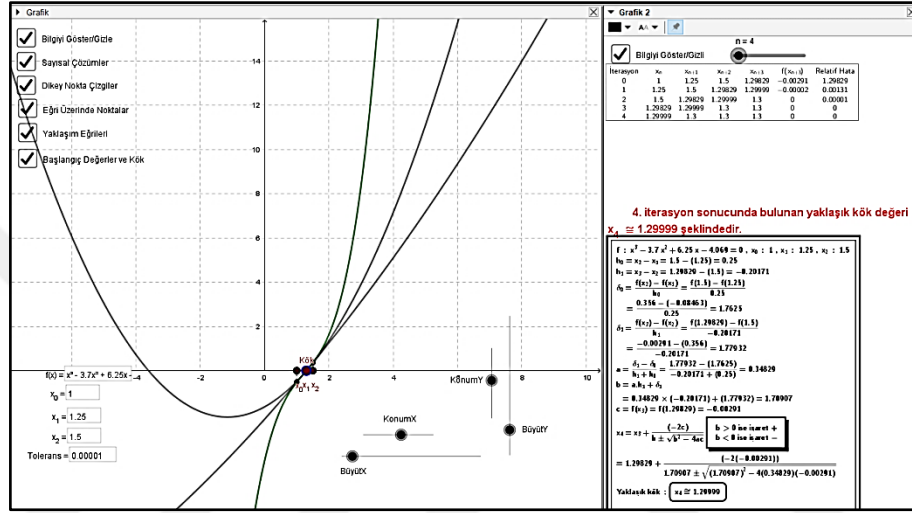
5. iterasyon sonucunda bulunan yaklaşık kök değeri
 $x_5 \approx 4$ şeklindedir.

$f : x^2 - 13x - 12 = 0, x_0 : 4.5, x_1 : 5.5, x_2 : 5$
 $h_0 = x_3 - x_2 = 3.97649 - (5) = -1.02351$
 $h_1 = x_4 - x_3 = 4.00105 - (3.97649) = 0.02456$
 $\delta_0 = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{h_0} = \frac{f(3.97649) - f(5)}{-1.02351}$
 $= \frac{-0.81633 - (48)}{-1.02351} = 47.69488$
 $\delta_1 = \frac{f(x_4) - f(x_3)}{h_1} = \frac{f(4.00105) - f(3.97649)}{0.02456}$
 $= \frac{0.03678 - (-0.81633)}{0.02456} = 34.73098$
 $a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0} = \frac{34.73098 - (47.69488)}{0.02456 + (-1.02351)} = 12.97754$
 $b = a \cdot h_1 + \delta_1$
 $= 12.97754 \times (0.02456) + (34.73098) = 35.04975$
 $c = f(x_4) = f(4.00105) = 0.03678$
 $x_5 = x_4 + \frac{(-2c)}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$
 $= 4.00105 + \frac{(-2(0.03678))}{35.04975 \pm \sqrt{(35.04975)^2 - 4(12.97754)(0.03678)}}$
Yaklaşık kök : $x_5 \approx 4$

Şekil 41. Girilen denklemin istenilen çözüm aralığında sayısal çözümünde oluşan yaklaşık kökleri

Örnek 9 (Müller yöntemi): $x^3 - 3.7x^2 + 6.25x - 4.069 = 0$ denkleminin müller yöntemi ile $x = 1, x = 1.5$ arasındaki kökü GeoGebra arayüzünde Şekil 42’de incelenmiştir.

Verilen aralığın orta noktası $x = 1,25$ ’tir. Üç nokta olacak şekilde veriler GeoGebra üzerinde girildiğinde hesaplamalar sonucu Şekil 42’de gösterilmiştir.



Şekil 42. Girilen denklemin istenilen çözüm aralığında sayısal çözümünde oluşan yaklaşık kökleri

4. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında denklem çözümleri sayısal çözüm yöntemleri için GeoGebra’da uygulama arayüzleri geliştirilmiştir. Yöntem olarak yarılama, Regula-false, Newton-Raphson, sekant ve sabit nokta iterasyonu için ayrı ayrı uygulamalar geliştirilmiştir. Bu uygulamalarla sayısal çözüm araştırmanın yanında çözümün görselleştirilmesine önem gösterilmiştir. Farklı fonksiyon ve farklı parametrelerle GeoGebra’nın dinamik yapısından faydalanıp farklı sonuçların eş zamanlı gözlemlenmesi sağlanmıştır. Kullanıcıların bu şekildeki denemelerle teorik olan bir dersi daha anlaşılır hale getirmeleri amaçlanmıştır.



5. ÖNERİLER

GeoGebra’da oluşturulan uygulamalar program bilgisine gerek duyulmadığı için hem kullanışlıdır hem de eğitici yönüyle eğitime ve öğretime katkı sağlamaktadır. Anlatılmak istenilen konuyu görselleştirerek kalıcı öğrenmeler sağlayabilmektedir. Bu nedenle daha gelişmiş uygulamalar oluşturulabilir ve bu uygulamalar birçok konuda katkı sağlayabilirler.



KAYNAKLAR

- Ana, M., Angel, F. and Tenorio, V., 2015.** Teaching Numerical Methods for Non-Linear Equations with GeoGebra-Based Activities. *Mathematics Education*, 10, 53-65.
- Baki, A., Güven, B., ve Karataş, I., 2001.** Dinamik geometri programı cabri ile yapısalıcı Öğrenme Ortamlarının Tasarımı. I. Uluslar arası Eğitim Teknolojileri Sempozyumu ve Fuarı, Sakarya, 67-78
- Bakioğlu, M., 2004.** Sayısal analiz. Birsen Yayınevi, İstanbul, Türkiye, 541 s, 149-174.
- Bayram, M., 2002.** Nümerik Analiz. Aktif Yayınevi, İstanbul, Türkiye, 499 s, 33-79
- Canevi, K., 2019.** GeoGebra Destekli Öğretimin 10.Sınıf Matematik Dersine Ait Bazı Konularda Öğrencilerin Başarı Ve Tutumlarına Etkisi. Yüksek Lisans Tezi. Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Karaman, Türkiye, 169 s.
- Chapra, C. ve Canale, P., 2003.** Mühendisler için Sayısal Yöntemler. Literatür Yayıncılık, İstanbul, Türkiye, 1026 s, 72-165.
- Çağal, B., 2012.** Sayısal analiz. Birsen Yayınevi, İstanbul, Türkiye, 501 s, 330-396.
- Dariusz, M., 2014.** Application of GeoGebra for Teaching Mathematics. *Advances in Science and Technology Research Journal*, 8, 51-54.
- Dikovic, L., 2009.** Applications GeoGebra into Teaching Some Topics of Mathematics at the College Level vol 6, *Business Technical College*, 34, 191-195.
- Dragoslav, H. and Dorde, H., 2008.** Numerical Mathematics with GeoGebra in high school. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 6, 363–378.
- Filiz, M., 2009.** Geogebra ve Cabri Geometri II Dinamik Geometri Yazılımlarının Web Destekli Ortamlarda Kullanılmasının Öğrenci Başarısına Etkisi. Yüksek Lisans Tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, Türkiye, 115 s.
- Greg, F., 2015.** Nonlinear equations homepage on amadeus.math. [Online]. Available: http://amadeus.math.iit.edu/~fass/577_ch3.pdf
- Güven, B. ve Karataş, İ., 2004.** Dinamik geometri yazılımı cabri ile oluşturmacı öğrenme ortamı tasarlama, *İlköğretim online*, Trabzon, 62-72.
- Hassen, A., 2006.** Root finding homepage on rowan.edu. Available: http://users.rowan.edu/~hassen/NumerAnalysis/Root_Finding.pdf

- Hohenwarter, M. and Jones, K., 2007.** Ways of Linking Geometry and Algebra The Case of GeoGebra. Proceedings of British Society for Research into Learning Mathematics, 27(3).
- Hohenwarter, M. and Hohenwarter, J., 2009.** GeoGebra Help 3.2, Doğan, M. (Ç. Ed.), <http://www.geogebra.org/help/docutr/index.html>
- İçel, R., 2011.** Bilgisayar Destekli Öğretimin Matematik Başarısına Etkisi: Geogebra Örneği. Yüksek Lisans Tezi. Selçuk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya, Türkiye, 100 s
- Kabaca, T., Aktümen, M., Aksoy, Y. ve Bulut, M., 2010.** GeoGebra ve GeoGebra ile Matematik Öğretimi. Third International Conference on Innovations in Learning For the Future 2010, e-Learning, İstanbul, 79-83.
- Kan, O., 2014.** GeoGebra Destekli Öğretiminin Lineer Cebir Dersine Ait Bazı Konularda Akademik Başarı Üzerine Etkisi. Yüksek Lisans Tezi. Necmettin Erbakan Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya, Türkiye, 99 s.
- Karagöz, İ., 2001.** Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları. Vipaş Yayınevi, yayın no: 52, 426 s, 95-110.
- Karakuş, F., 2008.** Matematik tarihinin matematik öğretiminde kullanılması: karekök hesaplamada babil metodu. Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 195-206.
- Kepçeoğlu, İ. ve Yavuz, İ., 2017.** The effect of GeoGebra on achievement of preservice mathematics teachers about concepts of limit and continuity. Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 11, 21-47.
- Kutluca, T. ve Zengin, Y., 2011.** Matematik öğretiminde GeoGebra kullanımı hakkında öğrenci görüşlerinin değerlendirilmesi. Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi, 17, 160-172.
- Manoel, A., Ramos, F. and David, B., 2018.** Métodos de Euler e Runge-Kutta através de um Applet do GeoGebra. Xi emed, pp. 67.
- Selçik, N. ve Bilgici, G., 2011.** Geogebra yazılımının öğrenci başarısına etkisi. Kastamonu Eğitim Dergisi, 19, 913-924 s.
- Taş, M., 2010.** Dinamik Matematik Yazılımı GeoGebra ile Eğrisel İntegrallerin Görselleştirilmesi. Yüksek Lisans Tezi. İstanbul Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye, 109 s.
- Topçu, A., 2014.** Bilgisayar Destekli Nümerik Analiz. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, <http://mmf2.ogu.edu.tr/atopcu/>
- URL-1, 2018.** http://akademikpersonel.kocaeli.edu.tr/aerdem/ders/aerdem25.09.2018_10.05.12ders.pdf (25 Eylül 2018)

- URL-2, 2018.** <http://www.asafvarol.com/Sayfalar/ymt222.php> (30 Eylül 2018)
- URL-3, 2018.** http://content.lms.sabis.sakarya.edu.tr/Uploads/29247/34608/8denklem_cozumleri_acik_yontemler.pdf (22 Eylül 2018)
- URL-4, 2019.** <https://studylibr.com/doc/939650/n%C3%BCmeri%CC%87k-anali%CC%87z-dersi%CC%87> (26 Mart 2019)
- URL-5, 2019.** <http://zgirgin.pau.edu.tr/Dokumanlar/Say%C4%B1sal%20Analiz.pdf> (11 Ocak 2019)
- URL-6, 2018.** <https://studylibr.com/doc/574357/say%C4%B1sal-analiz-ders-notlar%C4%B1-arzu-erdem-kaynaklar> (12 Aralık 2018)
- URL-7, 2019.** <http://www.ozgurertugrul.gen.tr/212/docs/ders%20notlari.pdf> (24 Nisan 2019)
- URL-8, 2019.** <https://merveyemen.wordpress.com/2013/05/16/geogebra/> (16 Mayıs 2019)
- Url-9, 2018.** <https://ece.uwaterloo.ca/~dwharder/NumericalAnalysis/10RootFinding/bisection/examples.html> (11 Ekim 2018)
- Uzun, P., 2014.** GeoGebra İle Öğretimin 7. Sınıf Öğrencilerinin Akademik Başarılarına ve Geometriye Yönelik Tutumlarına Etkisi. Yüksek Lisans Tezi. Kastamonu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu, Türkiye, 137 s.
- Yılmaz, Z. ve Enver, T., 2014.** Türev uygulamaları konusunun öğretiminde GeoGebra. Kastamonu Eğitim Dergisi, 22, 1209-1228 s.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında İstanbul/Kadıköy’de doğdu. İlköğretimini 2001 ve orta öğretimini 2004 yılında İstanbul/Fatih’te Hattat Rakım İlköğretim okulunda 2008 yılında İstanbul/Eyüp’te Otakçılar Lisesi’nde tamamladı. 2008 yılında başladığı lisans eğitimini 2012 tarihinde Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde tamamladı. 2017 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir. Rize Fatih Anadolu lisesi’nde Matematik Öğretmeni olarak çalışmakta evli ve 1 çocuk babasıdır.

