T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK MATRİSLERİ YARDIMI İLE ELDE EDİLEN YENİ DİZİ UZAYLARI

Arzu UZUN

TEZ DANIŞMANI
Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Cemil BİŞGİN
JÜRİ ÜYELERİ
Prof. Dr. Ruşen YILMAZ
Prof. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

RİZE-2020

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan "Genelleştirilmiş Fark Matrisleri Yardımı ile Elde Edilen Yeni Dizi Uzayları" başlıklı bu tezi, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 23/06/2020

Arzu UZUN

Uyarı: *Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.*

ÖNSÖZ

“Genelleştirilmiş Fark Matrisleri Yardımıyla Elde Edilen Yeni Dizi Uzayları” isimli tez çalışmamın seçiminde, yürütülmesinde ve sonuçlanmasında katkıda bulunan ve desteğini esirgemeyen değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Cemil BİŞGİN’e teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca bana verdikleri maddi ve manevi destekten, gösterdikleri anlayıştan dolayı kıymetli aileme ve sevgili eşim Mehmet UZUN’a teşekkür ederim.

Arzu UZUN

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK MATRİSLERİ YARDIMI İLE ELDE EDİLEN YENİ DİZİ UZAYLARI

Arzu UZUN

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Cemil BİŞGİN

Bu tez kapsam bakımından altı farklı bölümden oluşur. Birinci bölümde dizi uzayları tanımına yer verilerek literatürde sıkça yer alan klasik dizi uzaylarından bahsedildi. İkinci bölümde dizi uzayları teorisinde başlıca ele alınan problemlerin çözümüne katkıda bulunabilecek dual uzayları tanımlarına, matris sınıflarına, matris dönüşümlerine yer verilerek bu konu ile ilgili literatürde yer alan çeşitli teoremler sunuldu. Üçüncü, dördüncü, beşinci ve altıncı bölümlerde ise sırasıyla klasik dizi uzaylarının fark matrisleri altındaki etki alanları ile elde edilen dizi uzayları, $B(r,s)$ ikili band matrisinin etki alanı ile elde edilen dizi uzayları, $B(r,s,t)$ üçlü band matrisinin etki alanları ile elde edilen dizi uzayları ve $Q(r,s,t,u)$ dörtlü band matrisi altındaki etki alanları ile elde edilen yeni dizi uzayları tanımlanıp bu dizi uzaylarının dual uzayları ve matris dönüşümlerine yer verildi ve elde edilen bu dizi uzaylarının Schauder bazı bulundu ve $\alpha -$, $\beta -$ ve $\gamma -$ dualleri belirlendi. Ayrıca dörtlü band matrisinin etki alanları ile elde edilen dizi uzaylarında, dizi uzayları teorisinde ele alınan problemlere çözüm arandı. Son olarak yedinci bölümünde bu tez ile varılan sonuçtan ve bu tezin öneminden bahsedildi.

2020, 104 sayfa

Anahtar Kelimeler: Matris Sınıfları, Matris Dönüşümleri, Scahuder Bazı, $\alpha -$, $\beta -$ ve $\gamma -$ Dualleri, Etki Alanı.

ABSTRACT

NEW SEQUENCE SPACES ACQUIRED WITH THE HELP OF GENERALIZED DIFFERENCE MATRIXES

Arzu UZUN

Recep Tayyip Erdogan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Mustafa Cemil BİŞGİN

This thesis consists of six parts within scope. In the first part, definition of sequence spaces was included and classical sequence spaces which are frequently found in the literature were mentioned. In the second part, definitions of dual spaces, matrix classes, matrix transformations which can contribute to the solution of the main problems dealt in the theory of sequence spaces and theorems about this topic in the literature were presented. In the third, fourth, fifth and sixth parts, the sequence spaces acquired with the matrix domain under the difference matrixes of sequence spaces, the sequence spaces acquired with the matrix domain of dual band matrix $B(r,s)$, the sequence spaces acquired with the matrix domain of triple band matrix $B(r,s,t)$ and new sequence spaces acquired with the matrix domain of quadruple band matrix $Q(r,s,t,u)$ were respectively defined while dual spaces and matrix transformations of these sequence spaces were included, and the Schauder base of these sequence spaces were found and the duals $\alpha-, \beta -$ and $\gamma -$ were determined. Moreover, solutions to the problems dealt in the theory of sequence spaces were searched in the sequence spaces acquired with the matrix domain of the quadruple band matrix. Finally, results concluded with this thesis and the importance of it were mentioned in the seventh part.

2020, 104 pages

Keywords: Matrix Classes, Matrix Transformations, Schauder Bases, The Duals $\alpha-, \beta -$ and $\gamma -$, Matrix Domain

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR DİZİNİ

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\emptyset$	Boş Küme
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
w	Kompleks veya Reel Terimli Diziler Uzayı
l_p	p. Dereceden Mutlak Yakınsak Diziler Uzayı
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{F}$	Reel veya Kompleks Sayılar Cismi
c_0	Sıfıra Yakınsak Diziler Uzayı
l_∞	Sınırlı Diziler Uzayı
bv	Sınırlı Salınımlı Diziler Uzayı
bs	Sınırlı Seri Oluşturan Diziler Uzayı
ϕ	Sonlu Diziler Sınıfı
c	Yakınsak Diziler Uzayı
cs	Yakınsak Seri Oluşturan Diziler Uzayı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

w ile kompleks (veya reel) terimli dizilerin kümesini gösterelim. w skalerle çarpma ve koordinatsal toplama işlemlerine göre bir vektör uzayını temsil eder. Bu durumda; $\mathbb{F}$, $\mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) cismi olsun.

$w = \{x = (x_k): x_k \in \ \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$)$\}$

$+: \ w \times w \to w$
$(x, y) \to x + y$=$(x_k + y_k)$

$.: \mathbb{F} \times w \to w$
$(\alpha, x) \to \alpha. x = (\alpha x_k)$

şeklinde işlemler tanımlayalım. $\forall x, y, z \in w$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için

i. $x + y \in w$ (kapalılık)
ii. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (birleşme)
iii. $x + e = e + x = x$ olacak şekilde $e \in X$ vardır ve bu eleman tektir.
iv. $x + x^{-1} = x^{-1} + x = e$ olacak şekilde $x^{-1} \in X$ vardır ve bu eleman tektir.
v. $x + y = y + x$ (değişme)
vi. $\alpha. x \in w$
vii. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
viii. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
ix. $(\alpha. \beta)x = \alpha(\beta x)$
x. $1_{\mathbb{F}}. x = x$

koşulları sağlanıyorsa $(w, +, .)$ üçlüsüne $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör uzayıdır denir. Burada $e = (0,0, \dots)$ olacak şekilde bir sıfır dizisi ve $1_{\mathbb{F}}$ de $\mathbb{F}$ cisminin çarpma işlemine göre etkisiz elemanıdır.
w'nın alt vektör uzaylarının her birine dizi uzayı denir. Literatür taramalarında en çok

karşılaştığımız dizi uzayları;

$$\ell_\infty = \left\{x = (x_k) \in w : \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty\right\}$$

$$c_0 = \left\{x = (x_k) \in w : \lim_{k\to\infty} x_k = 0\right\}$$

$$c = \left\{x = (x_k) \in w : \lim_{k\to\infty} x_k \text{ mevcut}\right\}$$

$$\ell_p = \left\{x = (x_k) \in w : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty\,, 1 \le p < \infty\right\}$$

$$bv = \left\{x = (x_k) \in w : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k - x_{k+1}| < \infty\right\}$$

$$bs = \left\{x = (x_k) \in w : \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \in \ell_\infty\right\}$$

$$cs = \left\{x = (x_k) \in w : \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \in c\right\}$$

şeklindedir. Bu dizi uzayları sırasıyla sınırlı, sıfıra yakınsak, yakınsak, p. dereceden mutlak yakınsak seri oluşturan dizi uzayı, sınırlı salınımlı dizi uzayı, sınırlı seri oluşturan dizi uzayı, yakınsak seri oluşturan dizi uzayı isimlerini alırlar. Bu dizi uzayları arasında

i. $c_0 \subset c \subset \ell_\infty$

ii. $\ell_1 \subset bv \subset c$

şeklinde ifade edilebilen bazı kapsama bağıntıları mevcuttur.

i. Sıfıra yakınsak olarak nitelendirdiğimiz her dizi aynı zamanda yakınsaktır. Yakınsak her dizi aynı zamanda sınırlı olduğundan kapsama bağıntısı gerçekleşir.

Şimdi $e = (1,1,\dots)$ ve $x = (x_k) = ((-1)^k)$ dizilerini ele aldığımızda; $e \in {}^{c}/_{c_0}$ ve $x = (x_k) = ((-1)^k)$ dizisi sınırlı bir dizi belirtir. Buna rağmen ıraksaktır. Bu durumda kapsamalar kesindir.

ii. $\forall x \in \ell_1$ için

$$x \in \ell_1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| < \infty$$

sağlanır. Burada üçgen eşitsizliğinden faydalandığımızda;

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k - x_{k+1}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=0}^{\infty} |x_{k+1}| < \infty$$

elde edilir. Böylece $x \in bv$ olduğundan $\ell_1 \subset bv$ yazılabilir. $x = (x_k) = \left(\frac{1}{k+1}\right)$ dizisini ele aldığımızda:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k - x_{k+1}| = \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 3k + 2} < \infty$$

olduğu görülür. $x = (x_k) = \left(\frac{1}{k+1}\right) \in bv$ yazılabilir. Ayrıca $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ serisi ıraksak olduğundan $x = (x_k) = \left(\frac{1}{k+1}\right) \notin \ell_1$ olur. Böylece kapsama bağıntıları kesinleşmiş olur.

$$\forall x \in bv \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |x_k - x_{k+1}| < \infty$$

Mutlak yakınsak her seri yakınsak olduğundan

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x_k - x_{k+1})$$

serisi yakınsaktır. Bu durumda

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (x_k - x_{k+1}) = x_0 - x_{n+1}$$

olduğunda

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (x_0 - x_{n+1})$$

mevcut ve böylece $\lim_{n\to\infty} x_n$ mevcuttur. Bu nedenle $x \in c$ olup $bv \subset c$ kapsama bağıntısı sağlanır. $x = (x_k) = \left(\frac{(-1)^k}{k+1}\right)$ dizisi ele alındığında,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 0$$

olup limit mevcuttur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} |x_k - x_{k+1}| &= \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k+1} - \frac{(-1)^{k+1}}{k+2} \right| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{2k+3}{k^2+3k+2} \right| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+3}{k^2+3k+2}\end{aligned}$$

olur ve bu serinin ıraksak olduğu görülür. Bu durumda $x \notin bv$ dir. Dolayısıyla kapsama kesinleşir.

Dizi uzayları teorisinde ele alınan başlıca problemler:

i. Etki alanları yardımıyla elde edilen yeni dizi uzayları tanımlamak,

ii. Etki alanları yardımıyla elde edilen yeni dizi uzaylarının topolojik özelliklerini incelemek,

iii. Etki alanları yardımıyla elde edilen yeni dizi uzayları ile literatürde yer alan dizi uzayları arasında kapsama bağıntılarını incelemek,

iv. Etki alanları yardımıyla elde edilen yeni dizi uzaylarının varsa Schauder bazını belirlemek,

v. Etki alanları yardımıyla elde edilen yeni dizi uzaylarının $\alpha-, \beta-$ ve $\gamma-$ duallerini belirlemek,

vi. Etki alanları yardımıyla elde edilen yeni dizi uzayları ile literatürde yer alan dizi uzayları arasındaki matris sınıflarını belirlemek,

şeklinde sıralanabilir.

1.2. Temel Tanım ve Teoremler

Bilimler mevcut problemleri ifade edebilmek için matematikten yararlanmaktadır. Birçok bilimsel problem matematiksel düşünme ile aydınlanır. Bu problemler ilgili alanların yapı ve özellikleri ile yakından ilişkilidir. Bu problemlere matematiksel açıdan yönelmek birçok gereksiz ayrıntıyı göz ardı ederek sorunun temel özelliklerine inmemize fayda sağlayacaktır.

Matematikte yer alan problemler içinse çoğunlukla belirli aksiyomları sağlayan kümelerden yola çıkılır. Söz konusu olan teoriyi sağlayacak aksiyomlardan faydalanarak mantıksal sonuçlar elde edilir. Bu ise soyut yollarla geliştirilen matematiksel sonuçların elde edilmesini sağlar. Bu sonuca ulaşmada belirli aksiyomları sağlayan kümelerle yola çıkmamız birçok önemsiz ayrıntıların neden olduğu zorlaştırmaları ortadan kaldırır. Fonksiyonel analizde soyut yapıları kullanma fikri ilk kez M. Fréchet'e kadar dayanır.

1.2.1. Metrik Uzaylar

Metrik uzay kavramı, reel sayılar üzerindeki noktalar arasında bilinen uzaklık kavramını bazı özellikler vasıtasıyla tanımlar. Metrik uzay kavramı, M. Fréchet tarafından 1906 yılında ortaya atılmıştır. Fakat bu tanımı ilk kullanan Hausdorff'tur.

Tanım 1.2.1.1. X boş olmayan bir küme olsun.

$$d: X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$(x,y) \to d(x,y)$$

dönüşümü her $x,y,z \in X$ için;

i. $d(x,y) \geq 0$

ii. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii. $d(x,y) = d(y,x)$ (simetri)

iv. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa tanımladığımız d dönüşümüne X kümesi üzerinde metrik(uzaklık fonksiyonu) denir. (X,d) ikilisine ise metrik uzay denir. Bu şekilde tanımlanan X kümesine (X,d) metrik uzayının temel kümesi, kümenin elemanlarına ise noktalar denir. Burada i., ii., iii., iv. şartlarına ise metrik aksiyomları denir.

$\mathbb{R}$ üzerinde

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$(x,y) \to d(x,y) = |x-y|$$

şeklinde tanımlı $(\mathbb{R},d)$ metrik uzaydır ve mutlak değer metriği ya da alışılmış metrik olarak isimlendirilir. $X \in \{l_\infty, c_0, c\}$ olsun.

$$d_\infty: XxX \to \mathbb{R} \cup \{0\}$$
$$(x,y) \to d_\infty(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k - y_k|$$

şeklinde tanımlı bir d_∞ dönüşümü ile (X,d_∞) bir metrik uzaydır.

1.2.2. Eşitsizlikler

Önerme 1.2.2.1. $\forall a,b \in \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) için;

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

eşitsizliği mevcuttur (Maddox, 1988).

Önerme 1.2.2.2. $p > 1$ olsun. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlayacak bir q seçelim. Öyleyse her $a, b \in \mathbb{R}$ için,

$$|a.b| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliği mevcuttur (Maddox, 1988).

Önerme 1.2.2.3.

i. $p > 1$ olsun. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlayacak bir q seçelim. Öyleyse $\forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ için

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği mevcuttur ve bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir.

ii. $1 \leq p < \infty$ olsun. $\forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ için

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği mevcuttur ve bu eşitsizliğe Minkowski eşitsizliği denir (Maddox, 1988).
Hölder ve Minkowski eşitsizliklerinin $n \to \infty$ için limiti alındığında;

Önerme 1.2.2.4.

i. $p > 1$ olsun. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlayacak bir q seçelim. Öyleyse;
$\forall x, y \in \mathbb{F}^{\infty}$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği ve

ii. $1 \leq p < \infty$ olsun ve $\forall x, y \in \mathbb{F}^{\infty}$ için

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği elde edilir (Maddox, 1988).

Genelleştirilmiş Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri yardımı ile aşağıdaki örnekler verilebilir.

w üzerinde

$$d: w \times w \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$$

$$(x, y) \to d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

olacak şekilde bir d dönüşümü tanımlansın. O halde (w, d) metrik uzaydır.

l_p üzerinde

$$d: l_p \times l_p \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$$

$$(x, y) \to d_p(x, y) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

olacak şekilde bir d_p dönüşümü tanımlansın. O halde (l_p, d_p) bir metrik uzaydır.

1.2.3. Metrik Uzayda Topolojik Kavramlar

Tanım 1.2.3.1. (X, d) metrik uzayında, $a \in X$ ve $\forall r \in \mathbb{R}$ için $r > 0$ olsun. O halde

$$D(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

kümesine a merkezli r yarıçaplı açık yuvar ve

$$D[a,r] = \{x \in X: d(x,a) \leq r\}$$

kümesine ise a merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar denir. O halde $a \in X$ noktasının komşuluğu $D(a,r)$ açık yuvarıdır.

Tanım 1.2.3.2. (X,d) metrik uzayında, $A \subseteq X$ ve $a \in X$ olsun. Eğer her $r > 0$ için

$$[D(a,r) \backslash \{a\}] \cap A \neq \emptyset$$

ise a noktasına A nın yığılma noktalarının kümesi denir ve A' ile ifade edilir.

Tanım 1.2.3.3. (X,d) metrik uzay ve (x_n) dizisinin terimleri X de yer alsın ve $a \in X$ olsun. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_0^{(\varepsilon)}$ olduğunda $d(x_n, a) < \varepsilon$ koşulunu sağlayan en az bir $n_0^{(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisinin limiti a dır denir, ve $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ veya $(x_n) \to a(n \to \infty)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.3.4. (X,d) bir metrik uzay ve (x_n) dizisinin terimleri X de yer alsın. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $n, m > n_0^{(\varepsilon)}$ iken $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ koşulunu sağlayan en az bir $n_0^{(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 1.2.3.5. (X,d) metrik uzayında yer alan her Cauchy dizisi (X,d) metrik uzayının bir elemanına yakınsıyor ise bu uzaya tam metrik uzay denir.

Teorem 1.2.3.6. (X,d) tam metrik uzayında $A \subset X$ olsun. A, X de kapalı ise (A,d) uzayı tamdır.

Örnek 1.2.3.7. d alışılmış metrik olmak üzere $(\mathbb{R}, d)$ tam metrik uzaydır.

Örnek 1.2.3.8. (l_∞, d_∞), (c, d_∞), (c_0, d_∞) ve $\left(l_p, d_p\right)$ uzayları tam metrik uzaylardır. Gerçekten $\forall m \in \mathbb{N}$ için $x_m = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots\right)$ olmak üzere (x_m) dizisi l_∞ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists m_0^{(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ vardır $\ni$ $\forall m, r > m_0^{(\varepsilon)}$ için

$d_\infty(x_m, x_r) < \varepsilon$ şartı sağlanır. $d_\infty(x_m, x_r) = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(r)}\right| < \varepsilon$ elde edilir. O halde $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\left|x_k^{(m)} - x_k^{(r)}\right| < \varepsilon$ yazılabilir. Sonuç olarak alınan her $k \in \mathbb{N}$ sabiti için $\left(x_k^{(m)}\right)$ dizisi $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam metrik uzay olduğundan $\lim_{m\to\infty} x_k^{(m)} = x_k$ olacak şekilde $x_k \in \mathbb{R}$ vardır.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots)$ olarak seçilirse $x \in l_\infty$ ve $\lim_{m\to\infty} x_m = x$ koşullarını sağlamalıyız. O halde $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\left|x_k^{(m)} - x_k^{(r)}\right| < \varepsilon$ olmak üzere bu ifadenin $\forall m > m_0^{(\varepsilon)}$ ve $r \to \infty$ için limiti alındığında $\left|x_k^{(m)} - x_k\right| < \varepsilon$ elde edilir. Diğer taraftan $\forall m \in \mathbb{N}$ için $x_k^{(m)} \in l_\infty$ olduğundan $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\left|x_k^{(m)}\right| \leq M_\mu$ olacak şekilde en az bir $M_\mu > 0$ vardır. O halde $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|x_k| = \left|x_k - x_k^{(m)} + x_k^{(m)}\right| \leq \left|x_k^{(m)} - x_k\right| + \left|x_k^{(m)}\right| < \varepsilon + M_\mu = M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır. $x = (x_k) \in l_\infty$ olur. Ayrıca; $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\left|x_k^{(m)} - \mathrm{x}_k\right| < \varepsilon \Rightarrow \sup_{k\in\mathbb{N}}\left|x_k^{(m)} - x_k\right| < \varepsilon$, $d_\infty(x_m, x) < \varepsilon$, bu da $\lim_{m\to\infty} x_m = x, x \in l_\infty$ olur.

O halde (l_∞, d_∞) uzayı tam metrik uzaydır. Diğer ispatlarda benzer şekilde yapılabilir.

1.2.4. Normlu Uzaylar ve Schauder Bazı

Tanım 1.2.4.1. X, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\|.\|$ dönüşümü;

$$\|.\|: X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$x \mapsto \|x\|$$

şeklinde ifade edilsin. O halde; $\forall a \in \mathbb{R}$ ve $\forall x, y \in X$ için

i. $\|x\| \geq 0$

ii. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

iii. $\|ax\| = |a|\|x\|$

iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\|.\|$ dönüşümüne X üzerinde bir norm denir. $(X, \|.\|)$ ikilisine ise normlu uzay denir. i.,ii.,iii., iv. şartlarına ise norm aksiyomları denir (Maddox, 1988).

Önerme 1.2.4.2. $(X, \|.\|)$ ikilisi bir normlu uzay olsun.

$$d: XxX \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$(x, y) \to d(x, y) = \|x - y\|$$

olacak şekilde bir d dönüşümü tanımlayalım. O halde (X, d) bir metrik uzaydır.

Lemma 1.2.4.3. $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay olsun. $a \in \mathbb{R}$ ve $\forall x, y \in X$ için

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde ifade edilsin. O halde $\forall x, y \in X$ için

i. $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ (Öteleme özelliği)

ii. $d(ax, ay) = |a| d(x, y)$ (Mutlak homojenlik özelliği)

ifadeleri sağlanır (Maddox, 1988).

İspat: $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay olmak üzere $a \in \mathbb{R}$ ve $\forall x, y \in X$ için

i. $d(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x + z - y - z\| = \|x - y\|$

ii. $d(ax, ay) = \|ax - ay\| = \|a(x - y)\| = |a| \|x - y\|$

Sonuç 1.2.4.4. Normlu her uzay bir metrik uzaydır.

Bu önerme gereğince (X, d) metrik vektör uzayı olmak üzere; d metriği i. ve ii. şartlarını sağlıyorsa $d(x, \theta) = \|x\|$ tanımı ile $(X, \|.\|)$ ikilisi normlu uzaydır.

Lemma 1.2.4.5. (X, d) metrik vektör uzayındaki d metriği öteleme ve mutlak homojenlik şartlarını sağlasın. O halde $x \in X$ için

$$\|x\| = d(x, \theta)$$

ise; (X, d) ve $(X, \|.\|)$ ikililerinin topolojik yapıları eştir. Öyleyse (X, d) metrik vektör uzayındaki her yakınsak, sınırlı ve Cauchy dizisi $(X, \|.\|)$ metrik vektör uzayında da sırası ile yakınsak, sınırlı ve Cauchy dizisidir ve bunun tersi de doğrudur (Maddox, 1988).

Lemma 1.2.4.6. $(X, \|.\|)$ normlu uzayında alınan her cauchy dizisinin yakınsadığı eleman yine bu uzaya ait ise $(X, \|.\|)$ uzayına tam normlu uzay ya da Banach uzayı denir (Choudhary and Nanda, 1989).

Sonuç 1.2.4.7. (X, d) metrik vektör uzayı tam ve d metriği öteleme özelliği ve mutlak homojenlik özelliğini sağlasın. Öyleyse $x \in X$ için,

$$\|x\| = d(x, \theta)$$

olur ve $(X, \|.\|)$ uzayı Banach uzayıdır.

Sonuç 1.2.4.8. Sınırlı l_∞, sıfıra yakınsak c_0, yakınsak c dizi uzayları

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$$

normuna göre Banach uzayıdır.

Sonuç 1.2.4.9. p. dereceden mutlak yakınsak seri oluşturan dizi uzayı l_p

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

Tanım 1.2.4.10. X bir lineer topolojik uzayı ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$p_n : X \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto p_n(x) = x_n$$

koordinat dönüşümleri sürekli ise X dizi uzayına K-uzayı yani koordinat uzayı denir (Choudhary and Nanda, 1989).

Tanım 1.2.4.11. Koordinat dönüşümleri sürekli olan bir X uzayı tam lineer metrik uzay ise o halde bu X dizi uzayına FK uzayı (Fréchet koordinat uzayı) denir (Choudhary and Nanda, 1989).

Tanım 1.2.4.12. Metriği normlanabilen FK uzayına BK uzayı (Banach koordinat uzayı) denir (Choudhary and Nanda, 1989).

Örnek 1.2.4.13. Sınırlı l_∞, sıfıra yakınsak c_0, yakınsak c dizi uzayları

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$$

normuna göre BK uzayıdır.

Örnek 1.2.4.14. p. dereceden mutlak yakınsak seri oluşturan dizi uzayı l_p

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre bir BK uzayıdır.

Gerçekten l_∞, c_0, c ve l_p dizi uzaylarının verilen normlara göre birer Banach uzayı olduğunu biliyoruz. O halde l_∞, c_0, c ve l_p dizi uzaylarının koordinat dönüşümlerinin sürekli olduğunu gösterirsek BK uzayı olduğunu kanıtlamış oluruz. Öyleyse;

$X \in \{l_\infty, c_0, c\}$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|p_n(x)| = |x_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \|x\|_\infty < \infty$

olur. O halde p_n koordinat dönüşümleri $\forall n \in \mathbb{N}$ için süreklidir. Öyleyse l_∞, c_0, c dizi uzayları birer BK uzayıdır.

$X = l_p$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$|p_n(x)| = |x_n| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p < \infty$$

olur. O halde p_n koordinat dönüşümleri $\forall n \in \mathbb{N}$ için süreklidir. Öyleyse l_p dizi uzayı BK uzayıdır.

Tanım 1.2.4.15. $(X, \|.\|_1)$ ve $(Y, \|.\|_2)$ uzayları birer normlu uzay olmak üzere $f: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. $\forall x \in X$ için

$$\|x\|_1 = \|f(x)\|_2$$

oluyorsa yani f dönüşümü uzaklıkları koruyorsa bu dönüşüme izometrik dönüşüm ya da izometri denir. f dönüşümü uzaklıkları koruyorsa ve aynı zamanda örten ise bu dönüşüme izometrik izomorfi denir. O halde $(X, \|.\|_1)$ ve $(Y, \|.\|_2)$ uzaylarına eş yapılı uzaylar ve ya izometrik uzaylar denir ve $X \cong Y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2.4.16. X bir normlu uzay ve (y_k) da bu uzayda bir dizi olmak üzere $\forall x \in X$ için;

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k y_k \right\| = 0$$

olacak şekilde bir (λ_k) dizisi bulunabiliyorsa (y_k) dizisine X uzayının Schauder bazı denir. Burada

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k y_k$$

ifadesine x dizisinin (y_k) Schauder bazına göre açılımı denir (Choudhary and Nanda, 1989).

Tanım 1.2.4.17. Sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahip olan uzaya ayrılabilir uzay denir (Musayev and Alp, 2000).

Tanım 1.2.4.18. $\mathbb{R}$ cismi üzerinde X vektör uzayı olsun.

$$p: X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$x \mapsto p(x)$$

olacak şekilde bir p dönüşümü tanımlayalım. p dönüşümü $\forall a \in \mathbb{R}$ ve $\forall x, y \in X$ için
i. $p(ax) = |a|p(x)$
ii. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$
şartlarını sağlıyorsa p dönüşümüne X üzerinde yarı-norm denir. O halde (X, p) ikilisine de yarı normlu uzay denir (Musayev ve Alp, 2000).

Teorem 1.2.4.19. $(X, \|.\|_X)$ normlu bir uzayının ayrılabilir olması için gerek ve yeter şart sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahip olmasıdır.

Teorem 1.2.4.20. Schauder bazına sahip her Banach uzayı ayrılabilirdir (Musayev ve Alp, 2000).

Teorem 1.2.4.21. (Banach-Steinhaus Teoremi) X bir Banach uzayı,

$$X' = \{g | g: X \to \mathbb{R}\text{ , lineer ve sürekli}\}$$

kümesi X in sürekli duali ve $\{f_n\} \subset X'$ olmak üzere $\forall x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ise $f \in X'$ olur.

1.2.5. İç Çarpım ve Hilbert Uzayı

Tanım 1.2.5.1. X bir vektör uzayı ve $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) olsun.

$$\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{F}$$

dönüşümü,

i. $\forall x \in X$ için $\langle x,x \rangle \geq 0$ veya $\langle x,x \rangle = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x = \theta$ olmasıdır.

ii. $\forall x, y \in X$ için $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$

iii. $\forall x, y \in X$ ve $a \in \mathbb{K}$ için $\langle ax,y \rangle = a\langle x,y \rangle$

iv. $\forall x, y, z \in X$ için $\langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$

koşullarını sağlıyorsa $\langle .,. \rangle$ ye X vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım denir ve $(X, \langle .,. \rangle)$ ikilisine de iç çarpım uzayı (veya ön Hilbert uzayı) denir (Maddox, 1988).

Örnek 1.2.5.2. $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ şeklinde tanımlı $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$(veya $\mathbb{C}^n$) olmak üzere; $\mathbb{R}^n$(veya $\mathbb{C}^n$)

$$\langle x,y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \text{ veya } \langle x,y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

dönüşümü ile birlikte bir iç çarpım uzayıdır.

Örnek 1.2.5.3. $f, g \in \mathbb{C}([a,b];\ \mathbb{F})$ için $\mathbb{C}([a,b];\ \mathbb{F})$ iç çarpım uzayı

$$\langle f,g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}$$

dönüşümü ile birlikte bir iç çarpım uzayıdır.

Önerme 1.2.5.4. (Cauchy-Schwarz eşitsizliği) $\forall x, y \in X$ olmak üzere ve $(X, \langle .,. \rangle)$ uzayı iç çarpım uzayı olmak üzere

$$|\langle x,y \rangle|^2 \leq \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle \qquad (1)$$

eşitsizliği sağlanır.

$(X, \langle .,. \rangle)$ uzayı iç çarpım uzayı ve $x \in X$ olmak üzere x vektörünün normu,

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca tanımda yer alan i. ve ii. şartlarını sağladığı göz önüne alınarak $(X, \langle .,. \rangle)$ iç çarpım uzayı (2) ile normlu vektör uzayı olur ve (1) eşitsizliği de $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$ şeklini alır.

Önerme 1.2.5.5. $(X, \langle .,. \rangle)$ iç çarpım uzayı üzerinde yer alan (2) normu $\forall x, y \in X$ için Paralelkenar kuralı,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \tag{3}$$

Kutupsal özdeşlik kuralı,

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\} \tag{4}$$

eşitsizliklerini sağlar (Maddox, 1988).
$(X, \langle .,. \rangle)$ iç çarpım uzayı ise $\forall x, y \in X$ için

$$d(x, y) = \|x - y\| = \langle x - y, x - y \rangle^{\frac{1}{2}}$$

koşulunu sağlıyorsa bir metrik uzaydır.
Bu durumda her iç çarpım uzayı bir normlu uzaydır diyebiliriz fakat bunun tersi doğru değildir.

Teorem 1.2.5.6. $(X, \|.\|)$ normlu uzay ve $\forall x, y \in X$ olmak üzere (3) eşitsizliği sağlanıyorsa $(X, \|.\|)$ normlu uzayına bir iç çarpım uzayıdır denir (Maddox, 1988).

Örnek 1.2.5.7. $(\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$ normlu uzayı $1 \leq p < \infty$ ve $p \neq 2$ iken iç çarpım uzayı değildir (Maddox, 1988).

Gerçekten, $x, y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $x = (1,1,0,0,\ldots 0)$ ve $y = (1,-1,0,0,\ldots 0)$ vektörleri göz önüne alındığında $\|x\|_p + \|y\|_p = 2^{1/p} \neq \|x+y\|_p + \|x-y\|_p = 2$ olur ve görüldüğü gibi (3) eşitliği sağlanmaz. O halde Teorem 1.2.5.6. ya göre iç çarpım uzayı olmaz.

Tanım 1.2.5.8. $(X, \langle .,. \rangle)$ iç çarpım uzayında alınan her Cauchy dizisi yakınsak ise yani; $(X, \langle .,. \rangle)$ iç çarpım uzayı (2) normuna göre tam uzay ise bu uzaya Hilbert Uzayı denir (Maddox, 1988).

1.3. Matris Dönüşümleri ve Dual Uzayları

Toplanabilme daha çok analiz ve uygulamalı matematik de kullanılan bir metottur ve bu metodun kullanılışı 19. yüzyılın sonlarında önemli bir yükselişe geçmiştir. Newton ve Leibnitz sonsuz serileri sistematik olarak kullanan ilk matematikçilerdir diyebiliriz. Ayrıca bu metotta seriler genel olarak ıraksak ve yakınsak olmak üzere iki ana başlık altında ele alınır. Aynı zamanda ıraksak seriler de belirsiz ıraksak seriler ve belirli ıraksak seriler olmak üzere iki başlıkta ele alınır. Belirsiz ıraksak seriler, kısmi toplamlar dizisi en az iki adet limit noktasına sahip seriler ve belirli ıraksak seriler de,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \ \text{ ve } \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k = -\infty$$

şeklindedir. Iraksak serileri incelerken analiz gelişmeye devam ettikçe önemli sonuçlara ulaşılmıştır.

Toplanabilme teorisi Cesáro, Riesz, Nörlund, Abel, Borel,… tarafından kullanılan metotlar ile elde edilmiştir ve daha sonra bu metotlar kullanıldıkça daha genel metotlara ihtiyaç duyulmuş ve böylece matris dönüşümü teorisi harekete geçirilmiştir.

1.3.1. Matris Dönüşümleri

Tanım 1.3.1.1. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

şeklinde tanımlanan (s_n) olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$

$$t_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}$$

şeklinde bir (t_n) dizisi tanımlayalım. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} t_n = L$$

ise $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisi L değerine 1. Mertebeden Cesáro toplanabilirdir denir. Ve bu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = L(C,1)$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.3.1.2. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisi için $|x| < 1$ olmak üzere

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

şeklinde tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = L$$

oluyorsa $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisi L değerine Abel toplanabilirdir denir.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = L(A)$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 1.3.1.3. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ serisi $\frac{1}{2}$ değerine 1. mertebeden Cesáro ve Abel toplanabilirdir.

Gerçekten, $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ serisini ele alalım. $\forall n \in \mathbb{N}$ için bu serinin kısmi toplamlar dizisi

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \frac{1+(-1)^n}{2}$$

şeklindedir. O halde (s_n) dizisi yakınsak değildir.

Şimdi (s_n) serisine 1. mertebeden Cesáro ve Abel toplanabilirlik kavramlarını uygulayalım. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$t_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1+(-1)^n}{n+1}$$

olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1+(-1)^n}{n+1}\right] = \frac{1}{2}$$

olur. Bu sebeple

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = \frac{1}{2}(C,1)$$

yazabiliriz.

$|x| < 1$ ise

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$$

olmak üzere

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

olur. Bu sebeple,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \frac{1}{2} (A)$$

yazabiliriz.

Örnek 1.3.1.4. Yakınsak her dizinin aritmetik ortalaması da aynı değere yakınsar. Gerçekten; (S_n) dizisi s değerine yakınsadığını düşünelim. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_0^{(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ vardır $\ni$ $\forall n > n_0^{(\varepsilon)}$ için $|S_n - s| < \varepsilon$ olur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$t_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}$$

olmak üzere (t_n) dizisinin s değerine yakınsak olduğunu gösterelim.

$\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall n > n_0^{(\varepsilon)}$ için;

$$\begin{aligned} |t_n - s| &= \left| \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} - s \right| \\ &= \left| \frac{(s_0 - s) + (s_1 - s) + \cdots + (s_n - s)}{n+1} \right| \\ &= \left| \frac{(s_0 - s) + (s_1 - s) + \cdots + \left(s_{n_0} - s\right) + \left(s_{n_0+1} - s\right) + \cdots + (s_n - s)}{n+1} \right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{|s_0 - s|}{n+1} + \frac{|s_1 - s|}{n+1} + \cdots + \frac{|s_{n_0} - s|}{n+1} + \frac{|s_{n_0+1} - s|}{n+1} + \cdots + \frac{|s_n - s|}{n+1}$$

$$\leq \frac{(n_0+1)M}{n+1} + \frac{(n-n_0)\varepsilon}{n+1}$$
$$< \varepsilon'$$

elde edilir. Bu da $\lim_{n\to\infty}(t_n) = s$ olduğunu gösterir.

Sonuç 1.3.1.5. Iraksak seriler ya da diziler toplanabilme metotları ile uygun bir değere toplanabilir ya da yakınsatılabilir.

Iraksak bir seri ya da diziyi toplayabilmenin ya da yakınsatabilmenin en yaygın yöntemi sonsuz matrisler kullanmaktır. O halde aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 1.3.1.6. Reel veya kompleks terimli sonsuz bir matris $A = (a_{nk})$ olsun ve $x = (x_n) \in w$ dizisi herhangi bir dizi olsun. O halde A matrisi ve x dizisinin çarpımı

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{0k} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{10} & a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1k} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & & \cdot & & \vdots & & \vdots & \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & & \cdot & \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nk} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ \cdot \\ x_k \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} a_{0k}x_k \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k \\ \vdots \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu çarpımın anlamlı olması için $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k$$

serilerinin yakınsak olması gerekir. Burada $y = (y_n) = ((Ax)_n)$ şeklinde tanımlı diziye

$x = (x_n)$ dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi veya kısaca A −dönüşümü denir.

Tanım 1.3.1.7. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ ve $a_{nk} \in \mathbb{R}$(veya $\mathbb{C}$) olmak üzere $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun. Bu durumda $k > n$ iken $a_{nk} = 0$ ve $a_{nn} \neq 0$ ise $A = (a_{nk})$ matrisi üçgensel matris olarak adlandırılır (Maddox, 1988).

Tanım 1.3.1.8. $A = (a_{nk})$ matrisinin her bir satırı sonlu diziler sınıfına ϕ ait ise yani belli bir yerden sonra sıfır oluyorsa $A = (a_{nk})$ matrisine satır sonlu matris denir (Maddox, 1988).

Gösterimde kolaylık olması açısından burada ve devamında $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisini $\sum_k a_k$ şeklinde göstereceğiz ve negatif indisli olan terimleri sıfır kabul edeceğiz. Ayrıca aritmetik ortalamaya karşılık gelen $C = (c_{nk})$ Cesáro matrisini

$$c_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & 0 \leq k \leq n \\ 0 \quad , & k > n \end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım 1.3.1.9. $a_{nk} \in \mathbb{R}$(veya $\mathbb{C}$) olmak üzere $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris ve X de herhangi bir dizi uzayı olsun. $A = (a_{nk})$ matrisinin X dizi uzayı üzerindeki etki alanı X_A ile gösterilir ve

$$X_A = \{x = (x_k) \in w : Ax \in X\} \tag{5}$$

şeklinde tanımlanır (Maddox, 1988).

Tanım 1.3.1.10. $\forall x \in X$ için $Ax \in Y$ oluyorsa A, X' den Y'ye bir matris dönüşümü tanımlar denir ve $A: X \to Y$ şeklinde gösterilir (Maddox, 1988).

1.3.2. Matris Sınıfları

Tanım 1.3.2.1. X ve Y herhangi iki dizi uzayı olmak üzere, X ile Y arasındaki matrislerin sınıfı

$$(X:Y) = \{A = (a_{nk}) | \, A: X \to Y\}$$

şeklinde ifade edilir (Maddox, 1988).

Teorem 1.3.2.2. Fréchet koordinat uzayları (FK-uzayları) arasındaki matris dönüşümleri süreklidir (Wilansky, 1984).

Tanım 1.3.2.3. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olmak üzere

$$c_A = \{x = (x_k) \in w: Ax \in c\}$$

şeklinde ifade edilen küme $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisinin toplanabilirlik alanıdır (Wilansky, 1984). Ayrıca $c \subset c_A$ oluyorsa $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisine konservatif matris denir. Bu şekilde ifade edilen konservatif matrislerinin sınıfı $(c: c)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 1.3.2.4. A satır sonlu bir matris ise (c_A, p) bir BK uzayıdır. $n = 1,2,3, \ldots$ için $p_0 = \|.\|_A$ ve $p_n = |x_n|$ dir. A üçgensel matris ise (c_A, p_0) bir BK uzayıdır (Wilansky, 1984).

Şimdi konservatif matrisler sınıfını ayırt edebileceğimiz Kojima-Schur teoreminden bahsedelim.

Teorem 1.3.2.5. (Kojima-Schur Teoremi) $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisinin $(c: c)$ sınıfına ait olması için yani, $A = (a_{nk}) \in (c: c)$ olması için gerek ve yeter şart

i. $\|A\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty$

ii. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = \alpha_k$

iii. $\lim_{n\to\infty} \sum_k a_{nk} = \alpha$

koşullarını sağlamasıdır (Boos, 2001).

Tanım 1.3.2.6. $A = (a_{nk})$ ve $B = (b_{nk})$ sonsuz matrisler olmak üzere $c_A \subset c_B$ oluyorsa $B = (b_{nk})$ matrisi $A = (a_{nk})$ matrisinden daha kuvvetlidir denir (Wilansky, 1984).

Teorem 1.3.2.7. $A = (a_{nk})$ ve $B = (b_{nk})$ matrisleri üçgensel matris olmak üzere $B = (b_{nk})$ matrisinin $A = (a_{nk})$ matrisinden daha kuvvetli olması için gerek ve yeter şart BA^{-1} matrisinin konservatif olmasıdır (Wilansky, 1984).

İspat: $B = (b_{nk})$ matrisinin $A = (a_{nk})$ matrisinden daha kuvvetli olduğunu varsayalım. O halde $x \in c$ olsun. $x = Ix = A(A^{-1}x) \in c$ olur ve bu durumda $A^{-1} \in c_A$ yazılabilir. $B = (b_{nk})$ matrisinin $A = (a_{nk})$ matrisinden daha kuvvetli olduğunu varsaydığımızdan $c_A \subset c_B$ olur. Bu sebeple $A^{-1} \in c_B$ yazabiliriz. O halde $A(A^{-1}x) = B(A^{-1}x) = (BA^{-1})x \in c$ olur ve bu da $BA^{-1} \in (c{:}\,c)$ anlamına gelir. Bu durumda BA^{-1} konservatiftir.

Tersini varsayalım yani BA^{-1} konservatif olsun. $x \in c_A$ aldığımızda $Ax \in c$ olur. $Bx = B(AA^{-1})x = (BA^{-1})(Ax) \in c$ yazılabilir. Bu durumda $x \in c_B$ olur ki bu da $c_A \subset c_B$ anlamına gelir ve bu da ispatı tamamlar.

Tanım 1.3.2.8. X bir FK-uzayı ve $\phi \subset X$ olmak üzere $e^{(k)} = (0,0,\dots,1.0,0)$ olacak şekilde $\{e^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ sınıfı X dizi uzayı için Schauder bazı ise X uzayına AK-özelliklidir denir.

Tanım 1.3.2.9. $A = (a_{nk})$ sonsuz matris ve $x = (x_k)$, w'da bir dizi olmak üzere $\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} (Ax)_k$ oluyorsa $A = (a_{nk})$ matrisi regüler matris olarak adlandırılır.

Regüler matris konservatif matrisin daha özel bir hali olduğundan her regüler matris konservatif matristir diyebiliriz. Bu durumda yukarıda sözü geçen yakınsak her dizinin aritmetik ortalaması da aynı değere yakınsar gerçeğinden Césaro matrisinin regüler olduğu sonucuna varabiliriz. Regüler matrislerinin sınıfı $(c{:}\,c;p)$ şeklinde gösterilir. Şimdi regüler matrisler sınıfını ayırt edebileceğimiz Silverman-Teoplitz teoreminden bahsedelim.

Teorem 1.3.2.10. (Silverman-Teoplitz Teoremi) $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisinin $(c{:}\,c;p)$ sınıfına ait olması için yani, $A = (a_{nk}) \in (c{:}\,c;p)$ olması için gerek ve yeter şart

i. $\|A\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty$

ii. $\forall k \in \mathbb{N}$ sabiti için $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$

iii. $\lim_{n\to\infty} \sum_k a_{nk} = 1$

koşullarının sağlamasıdır (Boos, 2001).

Şimdi Césaro matrisinin regüler olduğunu ispatlayalım. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $C = (c_{nk})$ matrisi

$$c_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & 0 \le k \le n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere,

i. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k \left|\frac{1}{n+1}\right| = 1 < \infty$

ii. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

iii. $\lim_{n\to\infty} \sum_k \frac{1}{n+1} = 1$

koşulları sağlandığından $C \in (c\colon c; p)$ olur.

Bir sonraki lemma için aşağıdaki ifadeleri sıralayalım. Burada $\mathcal{F}$, $\mathbb{N}$ nin sonlu alt kümelerinin sınıfını gösterir ve $p \in [1, \infty)$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}|^q < \infty \tag{6}$$

$$\sup_{n,k\in\mathbb{N}} |a_{nk}| < \infty \tag{7}$$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_n |a_{nk}|^p < \infty \tag{8}$$

$$\sup_{K\in\mathcal{F}} \sum_k \left|\sum_{n\in K} a_{nk}\right|^q < \infty \tag{9}$$

$$\sup_{K\in\mathcal{F}}\sum_n\left|\sum_{k\in K}a_{nk}\right|^p<\infty \tag{10}$$

$$\forall k\in\mathbb{N} \text{ için } \lim_{n\to\infty}a_{nk}=\xi_k \tag{11}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k a_{nk}=\xi \tag{12}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k|a_{nk}|=\sum_k\left|\lim_{n\to\infty}a_{nk}\right| \tag{13}$$

Lemma 1.3.2.11. $A=(a_{nk})$ sonsuz matris olmak üzere aşağıdakiler sağlanır (Stieglitz and Tietz, 1977).

i. $A=(a_{nk})\in(c_0:l_\infty)=(c:l_\infty)=(l_\infty:l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (6) sağlanmasıdır.

ii. $A=(a_{nk})\in(l_p:l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $1<p<\infty$ için (6) şartının sağlanmasıdır.

iii. $A=(a_{nk})\in(l_1:l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (7) şartının sağlamasıdır.

iv. $A=(a_{nk})\in(l_\infty:c)$ olması için gerek ve yeter şart (11) ve (13) şartlarının sağlamasıdır.

v. $A=(a_{nk})\in(c:c)$ olması için gerek ve yeter şart (6), (11) ve $q=1$ için (12) şartının sağlamasıdır.

vi. $A=(a_{nk})\in(c_0:c)$ olması için gerek ve yeter şart (7) ve (8) sağlanmasıdır.

vii. $A=(a_{nk})\in(l_p:c)$ olması için gerek ve yeter şart (6), $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $1<p\leq\infty$ için (11) şartını sağlamasıdır.

viii. $A=(a_{nk})\in(l_1:c)$ olması için gerek ve yeter şart (7) ve (11) şartlarının sağlanmasıdır.

ix. $A=(a_{nk})\in(c_0:c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (6), $q=1$ ve $\forall k\in\mathbb{N}$ için $\xi_k=0$ iken (11) şartlarının sağlanmasıdır.

x. $A=(a_{nk})\in(l_1:l_1)$ olması için gerek ve yeter şart $p=1$ için (8) şartının sağlanmasıdır.

xi. $A=(a_{nk})\in\left(l_p:l_1\right)$ olması için gerek ve yeter şart $1<p\leq\infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için (9) şartının sağlamasıdır.

xii. $A=(a_{nk})\in(c_0:l_1)=(c:l_1)$ olması için gerek ve yeter şart $p=1$ için (10) şartının sağlamasıdır.

xiii. $A=(a_{nk})\in\left(l_p:l_p\right)$ olması için gerek ve yeter şart $1<p<\infty$ için $A=(a_{nk})\in(l_\infty:l_\infty)\cap(l_1:l_1)$ olmasıdır.

xiv. $A=(a_{nk})\in\left(c:l_p\right)=\left(c_0:l_p\right)$ olması için gerek ve yeter şart $p\in[1,\infty)$ için (10) şartının sağlamasıdır.

xv. $A=(a_{nk})\in\left(l_1:l_p\right)$ olması için gerek ve yeter şart $1<p\leq\infty$ için (8) şartının sağlamasıdır.

Lemma 1.3.2.12. $A=(a_{nk})\in(l_\infty:c_0)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k|a_{nk}|=0$$

olmasıdır (Stieglitz and Tietz, 1977).

Lemma 1.3.2.13. Banach koordinat uzayları (BK-uzayı) arasındaki matris dönüşümleri süreklidir (Wilansky, 1984).

Tanım 1.3.2.14. $x_n=O(u_n)$ olması için gerek ve yeter şart $\left|\frac{x_n}{u_n}\right|\leq M$ olacak şekilde en az bir $M>0$ vardır (Wilansky, 1984).

Tanım 1.3.2.15. $x_n=o(u_n)$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{u_n}=0$ olmasıdır (Wilansky, 1984).

Tanım 1.3.2.16. $\lambda\supset\phi$ olacak şekilde bir BK uzayı verilsin. $x=(x_k)$ dizisinin n. kesmesini

$$x^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} x_k e^{(k)}$$

şeklinde belirtiriz. Ayrıca $x = (x_k)$ dizisi

$\lim_{n\to\infty} \left\| x - x^{[n]} \right\|_\lambda = 0$ ise λ dizi uzayı AK özelliklidir.

$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| x^{[n]} \right\|_\lambda < \infty$ ise λ dizi uzayı AB özelliklidir.

$x \in \bar{\phi}$ ise λ dizi uzayı AD özelliklidir.

$\{x_k e^{(k)}\}$ kümesi λ uzayında sınırlı ise λ dizi uzayı KB özelliklidir.

Bu özelliklerden biri $\forall x \in \lambda$ için sağlanıyorsa λ uzayı o özelliğe sahiptir denir (Erdmann, 2001).

1.3.3. Dual Uzaylar

Bu bölümde dizi uzayları için tanımlanan $\alpha-, \beta-$ ve $\gamma-$ duallerini vereceğiz.

Tanım 1.3.3.1. X ve Y herhangi iki dizi uzayı olmak üzere; X ve Y nin çarpım kümesi

$M(X,Y) = \{y = (y_k) \in w : \forall x \in X, xy = (x_k y_k) \in Y\}$

şeklinde tanımlanır. Bu tanım göz önüne alındığında keyfi bir X dizi uzayının $\alpha-, \beta-$ ve $\gamma-$ dualleri aşağıdaki gibi tanımlanır (Garling, 1967).

$$X^\alpha = M(X, l_1) = \left\{ a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty, \ \ \forall x \in X \right\}$$

$$X^\beta = M(X, cs) = \left\{ a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \ \ \text{yakınsak}, \forall x \in X \right\}$$

$$X^\gamma = M(X, bs) = \left\{ a = (a_k) : \sup_n \left| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right| < \infty, \quad \forall x \in X \right\}$$

Yakınsak her dizinin sınırlı olacağı gerçeğinden ve $l_1 \subseteq cs$ olduğundan $X^\alpha \subset X^\beta \subset X^\gamma$ olduğu açıktır. Ayrıca $X \subset Y$ ise $\xi = \alpha, \beta$ veya γ olmak üzere $Y^\xi \subset X^\xi$ kapsama bağıntısı mevcuttur.

Lemma 1.3.3.2. $\xi \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ olmak üzere,

i. $c_0^{\xi} = c^{\xi} = l_{\infty}^{\xi} = l_1$

ii. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $1 < p, q < \infty$ için $l_p^{\xi} = l_q$

eşitlikleri sağlanır (Boos, 2001).

Lemma 1.3.3.3. λ ve μ herhangi iki dizi uzayı, B üçgensel matris ve A sonsuz bir matris olmak üzere $A \in (\lambda: \mu_B)$ olması için $BA \in (\lambda: \mu)$ olması gerekir (Wilansky, 1984).

İspat: λ ve μ herhangi iki dizi uzayı, B üçgensel matris ve A sonsuz bir matris olmak üzere $A \in (\lambda: \mu_B)$ olduğunu varsayalım. O halde $\forall x \in \lambda$ için $Ax \in \mu_B$ olur ki bu da $(BA)x \in \mu$ olur ve böylece $\forall x \in \lambda$ için $BA \in (\lambda: \mu)$ elde edilir. Diğer taraftan tersini varsayalım. Yani $BA \in (\lambda: \mu)$ olsun. O halde $\forall x \in \lambda$ için $Ax \in \mu_B$ olur ve bu da ispatı tamamlar.

Teorem 1.3.3.4. X bir topolojik uzay ve S, Xin bir alt vektör uzayı olsun. Keyfi bir $f \in X'$ için S üzerinde $f = 0$ iken $\forall x \in X$ için $f(x) = 0$ oluyorsa $X = \bar{S}$ dir.

Hahn Banach teoreminin l_{∞} uzayı için uygulaması ilk kez Banach limitlerinin temsili olan Stefan Banach tarafından belirlenmiştir. Buna göre; l_{∞} uzayının öteleme operatörleri altında farklılaşmadığı, l_{∞} uzayı üzerinde negatif olmayan lineer fonksiyonelleri ve $l: c \to \mathbb{R}$, $l(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ olmak üzere l nin genişlediğini de ilk kez Banach belirlemiştir. Bu şekildeki fonksiyonlar daha sonra Banach limiti olarak adlandırılmıştır (Choudhary and Nanda, 1989).

i. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $L(ax_n + by_n) = aL(x_n) + bL(y_n)$

ii. $n = 0,1,2, ...$ için $x_n \geq 0$ ise $L(x_n) \geq 0$ dır.

iii. $j = 1,2,3, ...$ ve $P_j(x_n) = x_{n+j}$ olmak üzere $L\left(P_j(x_n)\right) = L(x_n)$

iv. $e = (1,1,1, ...)$ olmak üzere $L(e) = 1$

$L: l_{\infty} \to \mathbb{R}$ f onksiyonu yukarıdaki koşulları sağlanıyorsa Banach limiti olur.

Banach limiti çalışmaları devam ederken bizim ilgileneceğimiz hemen hemen yakınsaklık kavramı ilk kez Lorentz tarafından ortaya koyulmuştur. Bir $x = (x_n) \in l_{\infty}$ dizisinin bütün Banach limitleri λ olması durumunda $x = (x_n)$ dizisi λ limitine hemen

hemen yakınsaktır denir. Ayrıca $L(x_n)=\lambda$ ise $\lim x_n \ =\lambda$ sayısı F-limit olarak adlandırılır (Lorentz, 1948).

Teorem 1.3.3.5. $x=(x_n)$ dizisinin $\lim x_n \ =\lambda$ olacak şekilde F-limitinin var olması için gerek ve yeter şart;

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_n+x_{n+1}+\cdots+x_{n+k}}{k+1}=\lambda$$

olmasıdır (Lorentz, 1948).

Hemen hemen yakınsaklık tanımını ve yukarıdaki teoremi göz önüne aldığımızda sırasıyla hemen hemen yakınsak diziler uzayı, hemen hemen sıfır dizileri ve hemen hemen yakınsak serileri aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$f=\left\{x=(x_k)\in w:\exists\lambda\in\mathbb{C}\ni\lim_{i\to\infty}\sum_{k=0}^{i}\frac{x_{n+k}}{i+1}=\lambda\,,n\text{ ye göre düzgün}\right\},$$

$$f_0=\left\{x=(x_k)\in w:\lim_{i\to\infty}\sum_{k=0}^{i}\frac{x_{n+k}}{i+1}=0\,,n\text{ ye göre düzgün}\right\},$$

$$f_s=\left\{x=(x_k)\in w:\exists\lambda\in\mathbb{C}\ni\lim_{i\to\infty}\sum_{k=0}^{i}\sum_{j=0}^{n+k}\frac{x_j}{i+1}=\lambda\,,n\text{ ye göre düzgün}\right\}$$

Tanım 1.3.3.6. X ve Y herhangi iki normlu uzay olsun. $B(X,Y)$ kümesi X den Y ye sınırlı lineer dönüşümlerin kümesi olmak üzere $Y=\mathbb{C}$(veya $\mathbb{R}$) alınırsa

$$B(X,\mathbb{C})=\{f\,|\,f:X\to\mathbb{C}\text{ sürekli ve lineer}\}$$

şeklinde tanımlı kümeye Xin topolojik duali denir. X^* veya X' şeklinde gösterilir (Maddox, 1988).

Tanım 1.3.3.7. $\forall x \in X$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|f_n(x)\| \leq M_x$ olacak şekilde en az bir $M_x > 0$ varsa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi noktasal sınırlıdır denir (Maddox, 1988).

Tanım 1.3.3.8. $\forall x \in X$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|f_n(x)\| \leq M$ olacak şekilde en az bir $M > 0$ varsa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi düzgün sınırlıdır denir (Maddox, 1988).

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Klasik Dizi Uzaylarının Fark Matrisi Altındaki Etki Alanları

$\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere;

i. $l_\infty(\Delta) = (l_\infty)_\Delta = \{x = (x_k) : \Delta x \in l_\infty\}$

ii. $c(\Delta) = (c)_\Delta = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\}$

iii. $c_0(\Delta) = (c_0)_\Delta = \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}$

tanımlayabiliriz. Bu uzaylar $\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$ normu ile birlikte Banach uzayıdır (Kızmaz, 1981). Şimdi $(l_\infty(\Delta), \|.\|_\Delta)$ uzayının Banach uzayı olduğunu gösterelim.
$\forall n \in \mathbb{N}$ için $x^n = (x_i^n) = (x_1^n, x_2^n, \ldots) \in l_\infty(\Delta)$ olmak üzere (x^n) , $l_\infty(\Delta)$ da bir cauchy dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0^{(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ vardır. Öyle ki $\forall m, n > n_0^{(\varepsilon)}$ için $\|x^n - x^m\|_\Delta < \varepsilon$ olmalıdır.

$$\|x^n - x^m\|_\Delta = |x_1^n - x_1^m| + \|\Delta x^n - \Delta x^m\|_\infty \to 0 \qquad (n, m \to \infty)$$

Bu nedenle $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $m, n \to \infty$ için $|x_k^n - x_k^m| \to 0$ elde ederiz.
Buradan $(x_k^n) = (x_k^1, x_k^2, \ldots)$ dizisi $\mathbb{C}$ ‘de bir cauchy dizisi ve $\mathbb{C}$ tam olduğundan (x_k^n) yakınsaktır. Diğer bir deyişle $\lim_n x_k^n = x_k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ mevcuttur.

Ayrıca her $\varepsilon > 0$ için $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $\forall m, n > N$ olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ mevcuttur.

$$|x_1^n - x_1^m| < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$|x_{k+1}^n - x_{k+1}^m - (x_k^n - x_k^m)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_m |x_1^n - x_1^m| = |x_1^n - x_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_m |x_{k+1}^n - x_{k+1}^m - (x_k^n - x_k^m)| = |x_{k+1}^n - x_{k+1} - (x_k^n - x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n \geq \mathbb{N})$$

ε, k ‘ya bağlı olmadığından,

$$\sup_k |x_{k+1}^n - x_{k+1} - (x_k^n - x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

sonuç olarak $\forall n \geq \mathbb{N}$ için $\|x^n - x\|_\Delta \leq \varepsilon$ olur. Buradan $x = (x_k)$ olmak üzere $l_\infty(\Delta)$ da $n \to \infty$ iken $x^n \to x$ elde ederiz. Şimdi $x \in l_\infty(\Delta)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} |x_k - x_{k+1}| &= |x_k - x_k^N + x_k^N - x_{k+1}^N + x_{k+1}^N - x_{k+1}| \leq |x_k^N - x_{k+1}^N| + \|x^N - x\|_\Delta \\ &= O(1) \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Bu bize $x = (x_k) \in l_\infty(\Delta)$ olduğunu gösterir. Ayrıca $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} \|x^n - x\|_\Delta = 0$ olması $\lim_{n\to\infty} |x_k^n - x_k| = 0$ olmasını gerektirdiğinden $l_\infty(\Delta)$ sürekli koordinat fonksiyonellerine sahiptir. Sonuç olarak $l_\infty(\Delta)$ bir BK uzayıdır. Şimdi

$$s: l_\infty(\Delta) \to l_\infty(\Delta)$$
$$x \to sx = y = (0, x_2, x_3, \dots)$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlayalım. s 'nin $l_\infty(\Delta)$ da sınırlı lineer operatör olduğu ve $\|s\| = 1$ olduğu açıktır. Ayrıca;

$$s[l_\infty(\Delta)] = sl_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) : x \in l_\infty(\Delta), x_1 = 0\} \subset l_\infty(\Delta)$$

uzayı $l_\infty(\Delta)$ uzayının bir alt uzayı ve

$$\|x\|_\Delta = \|\Delta x\|_\infty \in sl_\infty(\Delta)$$

Diğer yandan;

$$\Delta: sl_\infty(\Delta) \to l_\infty$$

$$x = (x_k) \to y = (y_k) = (x_k - x_{k+1}) \tag{14}$$

ifadesinin lineer homeomorfizm olduğunu gösterebiliriz. Yani; $sl_\infty(\Delta)$ ve l_∞uzayları topolojik olarak eşdeğerdir (Maddox, 1988).

2.1.1. Dual Uzayları

Bu bölümde $sl_\infty(\Delta)$ nın $\alpha-, \beta-$ ve $\gamma-$ duallerini belirleyeceğiz ve bazı matris dönüşümü karekterizasyonlarının yararlı sonuçlarını elde edeceğiz.

Lemma 2.1.1.1. $\sup_k |x_k - x_{k+1}| < \infty$ olması için gerek ve yeter şart

i. $\sup_k k^{-1}|x_k| < \infty$

ii. $\sup_k |x_k - k(k+1)^{-1}x_{k+1}| < \infty$

olmasıdır (Kızmaz, 1981).

İspat: $\sup_k |x_k - x_{k+1}| < \infty$ olsun. O halde;

$$|x_1 - x_{k+1}| = \left|\sum_{v=1}^{k}(x_v - x_{v+1})\right| \leq \sum_{v=1}^{k}|x_v - x_{v+1}|$$

$$|x_v - x_{v+1}| \leq \sup_k |x_k - x_{k+1}| = M$$

olacak şekilde $\exists M > 0$ varsa;

$$\sum_{v=1}^{k}|x_v - x_{v+1}| \leq \sum_{v=1}^{k} \sup_k |x_k - x_{k+1}| = M.\sum_{v=1}^{k} 1 = M.k$$

yazabiliriz. $\frac{|x_k - x_{k+1}|}{k} \leq M$ olduğundan $|x_k - x_{k+1}| = O(k)$. Bu da $\sup_k k^{-1}|x_k| < \infty$ olduğunu gösterir.

$$|x_k - k.(k+1)^{-1}.x_{k+1}| = |(k+1)^{-1}.(k+1)x_k - k.(k+1)^{-1}x_{k+1}|$$
$$= |k.(k+1)^{-1}x_k + (k+1)^{-1}x_k - k.(k+1)^{-1}x_{k+1}|$$
$$= |k.(k+1)^{-1}(x_k - x_{k+1}) + (k+1)^{-1}x_k| = O(1)$$

sağlanır. Şimdi (i) ve (ii) şartlarının sağladığını varsayalım. O halde; $|x_k - k.(k+1)^{-1}x_{k+1}| \geq k.(k+1)^{-1}|x_k - x_{k+1}| - (k+1)^{-1}|x_k|$ olur. Bu da $\sup_k |x_k - x_{k+1}| < \infty$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.1.1.2. (P_n) pozitif terimli monoton olarak sonsuza artan bir dizi olsun. Eğer $\sup_n |\sum_{v=1}^{n} c_v| < \infty$ ise o halde $\sup_n \left(P_n \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{n+k-1}}{P_{n+k}}\right|\right) < \infty$ olur.

İspat: Abel kısmi toplamlar formülünü kullanılarak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{n+k-1}}{P_{n+k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{v=1}^{k} c_{n+v-1}\right)\left(\frac{1}{P_{n+k}} - \frac{1}{P_{n+k+1}}\right) \tag{15}$$

ve

$$P_n \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{n+k-1}}{P_{n+k}}\right| = O(1)$$

elde ederiz.

Lemma 2.1.1.3. : Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ serisi yakınsak ise; O halde

$$\lim_n \left(P_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{n+k-1}}{P_{n+k}}\right) = 0$$

olur (Kızmaz, 1981).

İspat: $s_{n-1} = \sum_{v=1}^{n-1} c_v$ olmak üzere (s_{n-1}) cauchy dizisidir. O halde;

$\forall\varepsilon > 0$ için $\exists n_0^{(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0^{(\varepsilon)}$ ve $\forall k \geq 0$ için $|s_{n+k-1} - s_{n-1}| < \varepsilon$ olmalıdır. O halde;

$$|s_{n+k-1} - s_{n-1}| = \left|\sum_{v=1}^{n+k-1} c_v - \sum_{v=1}^{n-1} c_v\right| = \left|\sum_{v=n}^{n+k-1} c_v\right| < \varepsilon$$

olur ki bu da $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{v=n}^{n+k-1} c_v = 0$ olduğunu gösterir. O halde; $\left|\sum_{v=n}^{n+k-1} c_v\right| = o(1)$ şeklinde yazabiliriz. Böylece;

$$P_n \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{n+k-1}}{P_{n+k}}\right| = o(1)$$

olur.

Sonuç 2.1.1.4. (P_n) pozitif terimli monoton olarak sonsuza artan bir dizi olsun

i. Eğer $\sup\limits_n \left|\sum_{v=1}^{n} P_v a_v\right| < \infty$ ise o halde $\sup\limits_n \left|P_n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| < \infty$ olur (Kızmaz, 1981).

İspat: Lemma 2.1.1.2. de c_k yerine $P_{k+1}a_{k+1}$ koyduğumuzda

$$P_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{n+k-1}}{P_{n+k}} = P_n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = O(1)$$

elde ederiz.

ii. Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} P_k a_k$ yakınsak ise o halde $\lim\limits_n P_n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0$ olur (Kızmaz, 1981).

İspat: Lemma 2.1.1.3.te c_k yerine $P_{k+1}a_{k+1}$ koyduğumuzda elde edebiliriz.

iii. $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ olmak üzere $nR_n = o(1)$ ile birlikte $\sum_{k=1}^{\infty} R_k$ yakınsaktır (Kızmaz, 1981).

İspat: Sonuç 2.1.1.4. ün ii. bölümünde $P_n = n$ aldığımızda ve Abel'in toplam formülünü kullandığımızda

$$\sum_{k=1}^{n} ka_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} R_k - nR_{n+1}$$

elde ederiz.

Yukarıda bahsettiğimiz $\alpha-, \beta-$ ve $\gamma-$ duallerinin tanımlarını dikkate alarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.1.1.5. $R_k = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_v$ olmak üzere;

i. $\left(sl_\infty(\Delta)\right)^\alpha = \{a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} k. |a_k| < \infty\} = D_1$

ii. $\left(sl_\infty(\Delta)\right)^\beta = \{a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} k. a_k$ yakınsak $\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| < \infty\} = D_2$

iii. $\left(sl_\infty(\Delta)\right)^\gamma = \left\{a = (a_k) : \sup_n \left|\sum_{k=1}^{n} ka_k\right| < \infty, \sum_{k=1}^{\infty} |R_k| < \infty\right\} = D_3$

şeklindedir (Kızmaz, 1981).

İspat:

i. Eğer $a \in D_1$ ise o halde $\forall x \in sl_\infty(\Delta)$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} k. |a_k| \left({|x_k|}/{k}\right) < \infty$$

Bu da $a \in \left(sl_\infty(\Delta)\right)^\alpha$ olduğunu gösterir. Eğer $a \in \left(sl_\infty(\Delta)\right)^\alpha$ ise $\forall x \in sl_\infty(\Delta)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty$ olur.

$$x_k = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ k, & k \geq 2 \end{cases}$$

alırsak,

$$|a_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} k|a_k| < \infty$$

olur.

ii. $a \in D_2$ olduğunu farz edelim. Eğer $x \in sl_\infty(\Delta)$ ise $y = (y_k) \in l_\infty$ olacak şekilde bir ve yalnız bir $y \in l_\infty$ vardır. Öyle ki;

$$x_k = -\sum_{v=1}^{k} y_{v-1} \qquad , y_0 = 0$$

Böylece;

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = -\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{v=1}^{k} y_{v-1}\right) = -\sum_{k=1}^{n-1} R_k y_k + R_n \sum_{k=1}^{n-1} y_k \qquad (16)$$

$\sum_{k=1}^{\infty} R_k y_k$ mutlak yakınsak ve Sonuç 2.1.1.4. ün iii. bölümünden $n \to \infty$ için $R_n \sum_{k=1}^{n-1} y_k \to 0$ olduğundan $\forall x \in sl_\infty(\Delta)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ ifadesi de yakınsaktır. Bu da $a \in \left(sl_\infty(\Delta)\right)^\beta$ olduğunu gösterir.

Şimdi $a \in \left(sl_\infty(\Delta)\right)^\beta$ ise $\forall x \in sl_\infty(\Delta)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ yakınsaktır.

$$x_k = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ k, & k > 1 \end{cases}$$

aldığımızda;

$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k$ yakınsak olur ve bu Sonuç 2.1.1.4. ün iii. bölümünden $nR_n = o(1)$ olduğunu gösterir. (16) eşitliğini kullanırsak

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = -\sum_{k=1}^{\infty} R_k y_k$$

ifadesi $\forall y \in l_\infty$ için yakınsaktır. Böylece $\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| < \infty$ olduğunu ve $a \in D_2$ olduğunu görebiliriz.

iii. numaralı teoremin ispatı yukarıdaki gibidir. Çünkü; $\xi = \alpha, \beta$ veya γ için $\left(sl_\infty(\Delta)\right)^\xi = \left(sc(\Delta)\right)^\xi$ olduğunu belirtebiliriz. $E, l_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ veya $c_0(\Delta)$ dizi uzaylarından herhangi biri olsun. $\xi = \alpha, \beta$ veya γ için

$(sE)^\xi = E^\xi$

olduğunu görebiliriz.

2.1.2. Matris Dönüşümleri

E ve F, l_∞ ve c dizi uzaylarından herhangi birini göstersin. E' ve F' ise $l_\infty(\Delta)$ ve $c(\Delta)$ uzaylarından herhangi birini temsil etsin. (X, Y) , X den Y ye bütün sonsuz matrislerin sınıfı olmak üzere aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.1.2.1. $A_n(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k.a_{nk}$ ve $R = (r_{nk}) = (\sum_{\vartheta=k+1}^{\infty} a_{n\vartheta})$ olmak üzere; $A \in (E', F)$ olması için gerek ve yeter şart

i. $(a_{nl}) \in F$ ve $\left(A_n(k)\right) \in F$

ii. $R \in (E, F)$

olmasıdır (Kızmaz, 1981).

İspat: Eğer $A \in (E', F)$ ise o zaman $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in E'$ için $A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.x_k$ serileri yakınsak ve $\left(A_n(x)\right) \in F$ dir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ ve $x = (1,0, \dots)$ için $A_n(x) = a_{n1}$ ve $(A_n(x)) \in F$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(a_{n1}) \in F$.

$\forall x \in E'$ için $x = (k)$ aldığımızda, $\Delta x = x_k - x_{k+1} = k - (k+1) = -1$ olur. Yani; $\Delta x = \left((-1)\right) = (-1, -1, \dots) \in l_\infty$ (veya c) o halde $x \in l_\infty(\Delta)$ (veya $c(\Delta)$) olur. Böylece $x \in E'$. Bu durumda i. şartı sağlanır.

Şimdi $x \in sE' \subset E'$ olsun.

$$A_n(m, x) = \sum_{k=1}^{m} a_{nk}x_k = -\sum_{k=1}^{m-1} r_{nk}y_k + r_{nm}\sum_{k=1}^{m-1} y_k \qquad (17)$$

burada $y \in E$ ve $y_0 = 0$ dır öyle ki;

$$x_k = -\sum_{r=1}^{k} y_{r-1}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} |r_{nk}| < \infty$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{k\to\infty} r_{nk} = 0$ olur. O halde $\lim_{m\to\infty} r_{nm} = 0$ ve $\sum_{k=1}^{m-1} y_k$ sınırlı (veya yakınsak) olduğundan; $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{m} A_n(m,x) = A_n(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} r_{nk} y_k$$

Böylece $\forall y \in E$ için $\big(R_n(y)\big) = (\sum_{k=1}^{\infty} r_{nk} y_k) \in F$ olur ve $R \in (E,F)$ elde ederiz. Bu da **ii.** şartını sağlar.

Şimdi i. ve ii. şartlarının sağlandığını kabul edelim Eğer $x \in E'$ ise;

$$x_k = \begin{cases} x_1, & k = 1 \\ x_k', & k > 1 \end{cases}$$

burada $x' = (x_k') \in sE'$ dir. Bu ifadeyi (17) ‘de yerine yazarsak;

$$A_n(x) = a_{n1} x_1 - \sum_{k=1}^{\infty} r_{nk} y_k$$

olur ve bu bize $\forall x \in E'$ için $A_n(x)$ in mevcut olduğunu gösterir. O halde $A \in (E',F)$.

Teorem 2.1.2.2. $A \in (E,F')$ olması için gerek ve yeter şart

i. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

ii. $B \in (E,F)$ burada $B = (b_{nk}) = \big(a_{nk} - a_{n+1,k}\big)$

olmasıdır (Kızmaz, 1981).

Teorem 2.1.2.3.

i. $l_\infty \cap c(\Delta) = l_\infty \cap c_0(\Delta) = M_0 = \Big\{x = (x_k) \colon x \in l_\infty, \lim_{k}(x_k - x_{k+1}) = 0\Big\}$

ii. $(M_0, l_\infty) = (l_\infty, l_\infty)$

iii. $A \in (l_\infty, M_0)$ olması için gerek ve yeter şart

a. $\sup_{k} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

b. $\lim_{n} \sum_{k=1}^{\infty} \big|a_{nk} - a_{n+1,k}\big| = 0$

olmasıdır (Kızmaz, 1981).

İspat:

i. Eğer $x \in l_\infty \cap c(\Delta)$ ise $x \in l_\infty$ ve $\lim_{k\to\infty} x_k - x_{k+1} \to l\ (k \to \infty)$, $x_k - x_{k+1} \to l + \varepsilon_k(\varepsilon_k \to 0\ ,\ k \to \infty)$ olur. O halde, $\sum_{k=1}^{n} x_k - x_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} l + \varepsilon_k$ olup, $x_{n+1} = x_1 - n.l - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$ ise, $l = \frac{x_1}{n} - \frac{x_{n+1}}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$ olup, $l = 0$ ve $x \in l_\infty \cap c_0(\Delta)$ olur.

ii. $A \in (M_0, l_\infty)$ olsun. O halde $\forall x \in M_0$ için $Ax \in l_\infty$ olur. Ayrıca $M_0 \subset l_\infty$ gerçeğinden $\forall x \in l_\infty$ için $Ax \in l_\infty$ olur ki bu bize $A \in (l_\infty, l_\infty)$ olduğunu gösterir. Böylece (M_0, l_∞) = (l_∞, l_∞) sağlanır.

iii. $M_0 = l_\infty \cap c(\Delta)$ olduğundan $\forall x \in M_0$ için $x \in l_\infty$ olur. $A \in (l_\infty, M_0)$ ise $\forall x \in l_\infty$ için $Ax \in M_0$, $M_0 \subseteq l_\infty$ olduğundan $\forall x \in l_\infty$ için $Ax \in l_\infty$ olur. Bu da $\|A\| = \sup_{n\in N} \sum_k |a_{nk}| < \infty$ olduğunu gösterir ve i. şartı sağlanmış olur.

$$
\begin{aligned}
Ax \in M_0 = l_\infty \cap c(\Delta) &\Longrightarrow Ax \in l_\infty \text{ ve } \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \textstyle\sum_k |a_{nk}| < \infty \\
&\Longrightarrow Ax \in c_0(\Delta) \\
&\Longrightarrow \Delta Ax \in c_0 \\
&\Longrightarrow Bx \in c_0
\end{aligned}
$$

o halde $B \in (l_\infty, c_0)$.

$B \in (l_\infty, c_0)$ ise $\lim_{n\to\infty} \sum_k |b_{nk}| = 0$ yani $\lim_{n\to\infty} \sum_k |a_{nk} - a_{n+1,k}| = 0$ olup ii. şartı sağlanmış olur.

Şimdi i. ve ii. şartları sağlanmış olsun.

$\forall x \in l_\infty$ için $Ax \in l_\infty$, $B = \Delta A$ olduğundan $Ax \in c(\Delta)$ (veya $c_0(\Delta)$). O halde $\Delta A \in c$ (veya c_0). O halde $A \in (l_\infty, M_0)$. Eğer, $m_0 = \{x = (x_k) : x \in M_0\ ve\ x_k \in \mathbb{R}\}$ yazarsak Das (1973) ve Devi (1976) kaynaklarından biliyoruz ki; herhangi p pozitif tam sayısı için, $0 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_p$ olmak üzere,

$$
\inf_{n_1, n_2, \ldots, n_p} \sup_k \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_{k+n_i} = \lim\ \sup_k x_k \in m_0
$$

olur.

Teorem 2.1.2.4. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $r_{nk} = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_{nv}$ olmak üzere $A \in (c, c)$ ve

$\sup\limits_{n} \quad \sum_{k=1}^{\infty}|r_{nk}| < \infty$ ise; $A \in (M_0, c)$ olur (Kızmaz, 1981).

İspat: Her $x \in M_0$ için

$$\sum_{k=1}^{m} a_{nk}x_k = x_1 \sum_{k=1}^{m} a_{nk} - \sum_{k=1}^{m-1} r_{nk}(x_k - x_{k+1}) + (x_1 - x_m)r_{nm}$$

$$\lim_{m} \sum_{k=1}^{m} a_{nk}x_k = A_n(x) = x_1 \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} - \sum_{k=1}^{\infty} r_{nk}(x_k - x_{k+1})$$

olur. O halde $\sup\limits_{n} \sum_{k=1}^{\infty}|r_{nk}| < \infty$ olduğundan $\lim\limits_{n} r_{nk}$ mevcuttur. Bu bize $R = (r_{nk}) \in (c_0, c)$ olduğunu gösterir ve $\lim\limits_{n} \sum_{k=1}^{\infty} r_{nk}(x_k - x_{k+1})$ mevcuttur. Böylece $A \in (M_0, c)$ elde ederiz.

Şimdi E ve F dizi uzayları olsun. $E(F)$ yi noktasal çarpma işlemleri ile

$$E(F) = \{x : x_k = y_k z_k \,, y \in E \,, z \in F\}$$

şeklinde tanımlayalım.

M_s, $\sup\limits_{n} |\sum_{k=1}^{n} x_k| < \infty$ koşulunu sağlayan x lerin uzayını belirtsin. O halde

$$M_s = \{y : y_k = x_k - x_{k-1} \,, x \in l_\infty \,, x_0 = 0\}$$

yazabiliriz. *A* matrisi regüler ise ve

$$\lim_{n} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{n,k+1}| = 0$$

koşulunu sağlıyorsa kuvvetli regüler olarak adlandırılır. Das (1973), kaynağından biliyoruz ki Eğer *A* regüler ise o zaman $\forall x \in l_\infty$ için

$$\lim_n A_n(y) = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} y_k = 0$$

olması için gerek ve yeter şart $y_k = x_k - x_{k+1}$ olduğunda A nın kuvvetli regüler olmasıdır.

Şimdi $M_s(M_0)$ kümesini göz önüne alalım. $M_s \subset M_s(M_0)$ olduğu açıktır ve bu kapsama kesindir.

Teorem 2.1.2.5. A regüler matris olsun. $\forall y \in M_s(M_0)$ için $\lim_n A_n(y) = 0$ olması için gerek ve yeter şart A nın kuvvetli regüler olmasıdır (Kızmaz, 1981).

İspat: $\forall y \in M_s(M_0)$ iken $\lim_n A_n(y) = 0$ ise $A \in (M_s(M_0), c_0)$ dır. Bu $A \in (M_s, c_0)$ olduğunu gösterir. Buradan

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{n,k+1}| = 0$$

elde ederiz (Stieglitz and Tietz, 1977). Şimdi A kuvvetli regüler olsun. Eğer $y \in M_s(M_0)$ ise $\alpha = (\alpha_k) \in M_s$ ve $x = (x_k) \in M_0$ için $y_k = \alpha_k x_k$ dır. $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ iken

$$\sum_{k=1}^{m} a_{nk} y_k = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} \alpha_k x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{nk} (\gamma_k - \gamma_{k-1}) x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{nk} \gamma_k x_k - \sum_{k=1}^{m} a_{nk} \gamma_{k-1} x_k \qquad (\gamma_0 = 0 \text{ olduğundan})$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{nk} \gamma_k x_k - \sum_{k=2}^{m} a_{nk} \gamma_{k-1} x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{nk}\gamma_k x_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_{n,k+1}\gamma_k x_{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{nk}\gamma_k x_k - \sum_{k=1}^{m} a_{n,k+1}\gamma_k x_{k+1} + a_{n,m+1}\gamma_m x_{m+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{nk}\gamma_k x_k - \sum_{k=1}^{m} a_{nk}\gamma_k x_{k+1} + \sum_{k=1}^{m} a_{nk}\gamma_k x_{k+1} - \sum_{k=1}^{m} a_{n,k+1}\gamma_k x_{k+1} + a_{n,m+1}\gamma_m x_{m+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{nk}(x_k - x_{k+1})\gamma_k + \sum_{k=1}^{m} \left(a_{nk} - a_{n,k+1}\right)\gamma_k x_{k+1} + a_{n,m+1}\gamma_m x_{m+1}$$

Bundan dolayı $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{m} \sum_{k=1}^{m} a_{nk} y_k = A_n(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(x_k - x_{k+1})\gamma_k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_{nk} - a_{n,k+1}\right)\gamma_k x_{k+1}$$

Böylece $\lim_{n} A_n\,(y) = 0$ elde ederiz.

2.2. $\boldsymbol{B(r,s)}$ Matrisinin Etki Alanı ile Elde Edilen Bazı Yeni Dizi Uzayları

$r, s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olmak üzere $B(r,s) = \{b_{nk}(r,s)\}$ ikili band matrisini, $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için;

$$b_{nk}(r,s) = \begin{cases} r, & k = n \\ s, & k = n-1 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada Δ fark matrisi olmak üzere, $B(1,-1) = \Delta$ olduğuna dikkat edelim.

l_∞ , c , c_0 ve l_p dizi uzaylarının $B(r,s)$ matrisi altındaki etki alanlarının kümesi olarak sırasıyla $\widehat{l_\infty}$, $\hat{c}$, $\widehat{c_0}$ ve $\widehat{l_p}$ dizi uzaylarını tanımlayacağız. Ayrıca $\widehat{l_\infty}$, $\hat{c}$, $\widehat{c_0}$ ve $\widehat{l_p}$

dizi uzaylarının $\beta -$ ve $\gamma -$ duallerini hesaplayacağız. (Kirişçi and Başar, 2010).

$$\widehat{l_\infty} = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{k\in\mathbb{N}} |sx_{k-1} + rx_k| < \infty \right\},$$

$$\hat{c} = \left\{ x = (x_k) \in w : \exists l \in C \ni \lim_{k\to\infty} |sx_{k-1} + rx_k - l| = 0 \right\},$$

$$\widehat{c_0} = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k\to\infty} |sx_{k-1} + rx_k| = 0 \right\},$$

$$\widehat{l_p} = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_k |sx_{k-1} + rx_k|^p < \infty \right\}$$

Burada etki alanı tanımını kullanarak $\widehat{l_\infty}$, $\hat{c}$, $\widehat{c_0}$ ve $\widehat{l_p}$ dizi uzaylarını;

$$\widehat{l_\infty} = (l_\infty)_{B(r,s)},\ \hat{c} = (c)_{B(r,s)},\ \widehat{c_0} = (c_0)_{B(r,s)} \text{ ve } \widehat{l_p} = (l_p)_{B(r,s)}$$

şeklinde tekrar tanımlayabiliriz.

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $x = (x_k)$ dizisinin $B(r,s)$ matris dönüşümü yardımıyla

$$y = (y_k) = sx_{k-1} + rx_k \tag{18}$$

olacak şekilde $y = (y_k)$ dizisini tanımlayalım. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri (18) koşulu ile bağlantılı olmak üzere aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.2.1. $\lambda \in \{l_\infty, c, c_0, l_p\}$ olmak üzere $\lambda_{B(r,s)}$ ve λ uzayları lineer izomorfiktir (Kirişci, 2010). Yani; $\widehat{l_\infty} \cong l_\infty$, $\hat{c} \cong c$, $\widehat{c_0} \cong c_0$ ve $\widehat{l_p} \cong l_p$.

İspat: $\lambda_{B(r,s)}$ ve λ uzayları arasında birebir, örten ve norm koruyan bir lineer dönüşümün varlığını gösterirsek bu uzayların birbirine lineer izomorfik olduğunu göstermiş oluruz. Bu ispat çeşidi klasikleşmiş bütün dizi uzayları için geçerli olacağından biz yalnızca l_∞ için göstereceğiz. Diğer dizi uzayları içinde benzer şekilde gösterilebilir.

T: $\widehat{l_\infty} \to l_\infty$ olacak şekilde bir T dönüşümü olsun.

$$\mathrm{T}: \widehat{l_\infty} \to l_\infty$$
$$\mathrm{x} \to \mathrm{Tx} = B(r,s)x = y = sx_{k-1} + rx_k$$

Böylelikle $x = (x_k)$ ve $u = (u_k) \in \widehat{l_\infty}$ için;

$$\begin{aligned} \{B(r,s)(x+u)\}_n &= s(x_{n-1} + u_{n-1}) + r(x_n + u_n) \\ &= sx_{n-1} + rx_n + su_{n-1} + ru_n \\ &= \{B(r,s)x\}_n + \{B(r,s)u\}_n \end{aligned} \tag{19}$$

olur. Şimdi keyfi bir $\alpha \in C$ skaleri için

$$\begin{aligned} \{B(r,s)(\alpha x)\}_n &= s(\alpha x_{n-1}) + r(\alpha x_n) \\ &= \alpha(sx_{n-1} + rx_n) \\ &= \alpha\{B(r,s)x\}_n \end{aligned} \tag{20}$$

elde edilir ve (19) ve (20) eşitlikleri göz önüne alındığında T dönüşümünün $\widehat{l_\infty}$ uzayında lineer olduğu görülür.

$Tx = B(r,s)x = 0$ olduğunu varsayalım. Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\{B(r,s)x\}_n = sx_{n-1} + rx_n = 0 \tag{21}$$

eşitliği elde edilir. $n = 0$ alındığında (21) eşitliğinde yerine konulduğunda

$$x_0 = 0$$

bulunur. $n = 1$ alındığında yine (21) eşitliğinde yerine konulduğunda

$$sx_0 + rx_1 = 0$$

ve

$$x_1 = 0$$

olduğu görülür. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n = 0$ dolayısıyla $x = 0$ olmak zorundadır. "$Tx = 0$ ise $x = 0$" önermesini sağlaması sebebiyle T lineer dönüşümünün birebir olduğu anlaşılır.

T dönüşümünün örten olduğunu göstermek için ise keyfi bir $y = (y_k) \in l_\infty$ dizisi alalım. Bu durumda $\forall k \in \mathbb{N}$ için bir $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{k}\left(-\frac{s}{r}\right)^j y_{k-j}$$

olacak şekilde tanımlayalım. $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} sx_{k-1} + rx_k &= \frac{s}{r}\sum_{j=0}^{k-1}\left(-\frac{s}{r}\right)^j y_{k-1-j} + \sum_{j=0}^{k}\left(-\frac{s}{r}\right)^j y_{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\left(-\frac{s}{r}\right)^j \left(\frac{s}{r}y_{k-1-j} + y_{k-j}\right) + \left(-\frac{s}{r}\right)^k y_0 \\ &= y_k \end{aligned}$$

bu eşitliği $\|.\|_\infty$ normuna uygularsak

$$\|x\|_{\widehat{l_\infty}} = \sup_{k\in\mathbb{N}}|rx_k + sx_{k-1}| = \sup_{k\in\mathbb{N}}|y_k| = \|y\|_\infty < \infty$$

olduğu görülür. Böylelikle $x \in \widehat{l_\infty}$ olur. Buradan T dönüşümünün birebir, örten ve norm koruyan olduğu görülür. Böylelikle $\widehat{l_\infty}$ ve l_∞ uzayları lineer olarak izomorfiktir.

Şimdi sözü geçen yeni dizi uzayları ile ilgili bir kapsama bağıntısı teoremi verelim.

2.2.1. $\widehat{l_\infty}, \hat{c}, \widehat{c_0}$ ve $\widehat{l_1}$ Dizi Uzaylarının Kapsama Bağıntıları

Teorem 2.2.1.1. $\lambda \in \{l_\infty, c, c_0, l_p\}$ ve $B = B(r,s)$ olsun. O halde;

i. $\left|\frac{s}{r}\right| < 1$ ise $\lambda = \lambda_B$

ii. $\left|\frac{s}{r}\right| \geq 1$ ise $\lambda \subset \lambda_B$ kapsama bağıntısı kesindir (Kirişçi and Başar, 2010).

İspat: $\lambda \in \{l_\infty, c, c_0, l_p\}$ ve $B = B(r,s)$ olsun. O halde ;

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |b_{nk}| = |r| + |s|$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{nk} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k b_{nk} = r + s$$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_n |b_{nk}| = |r| + |s|$$

şartlarını sağladığından $B \in (\lambda:\lambda)$ olmalıdır. Herhangi bir $x \in \lambda$ dizisi için $Bx \in \lambda$ olur. Buradan $x \in \lambda_B$ olur. Bu da $\lambda \subset \lambda_B$ olduğunu gösterir.

i. $\left|\frac{s}{r}\right| < 1$ olsun. Bu matrisin tersini bulabilmek için gerekli matematiksel işlemler yapıldığında $B^{-1} = D = (d_{nk})$ olmak üzere; $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için

$$d_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{r}\left(-\frac{s}{r}\right)^{n-k} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

olduğu görülür. D matrisi;

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |d_{nk}| = \left|\frac{1}{r}\right| \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{s}{r}\right|^{n-k} < \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} d_{nk} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r}\left(-\frac{s}{r}\right)^{n-k} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} d_{nk} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{s}{r}\right)^{n-k} \quad \text{mevcut}$$

ve

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n} |d_{nk}| = \left|\frac{1}{r}\right| \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k} \left|\frac{s}{r}\right|^{n-k} < \infty$$

koşullarını sağladığından $D \in (\lambda:\lambda)$ olur.

Bu durumda, eğer $x \in \lambda_B$ ise;

$$y = Bx \in \lambda$$
$$B^{-1}y = B^{-1}Bx \in \lambda$$
$$x = B^{-1}y \in \lambda$$

elde edilir. Böylece $\lambda_B \subset \lambda$ kapsaması sağlanır. Böylece teoremin i. bölümü ispatlanmış olur.

ii. $u^1 = \left\{\left(-\frac{s}{r}\right)^n / r\right\}$, $u^2 = (n/r)$, $u^3 = \{(-1)^n.(n+1)\}$, $u^4 = \{[1+(-1)^n]/2\}$ dizilerini ele alalım. $\left|\frac{s}{r}\right| > 1$ ise $Bu^1 = e^{(0)} = (1,0,0,\dots) \in \lambda$ olur ve buradan $u^1 \in \lambda_B \backslash \lambda$ olur.

$\left|\frac{s}{r}\right| = 1$ olduğunu varsayalım.

a. $\lambda = c_0, l_p$ olduğunda $u^1 \in \lambda_B \backslash \lambda$ sağlanır.

b. $\lambda = c, l_\infty$ olsun. $s = -r$ olduğunda $Bu^2 = e \in \lambda$ sağlanır. Bundan dolayı $u^2 \in \lambda_B \backslash \lambda$ olduğunu gösterir. $s = r$ olduğunda ise $Bu^3 = \{r(-1)^n\} \in l_\infty$, $Bu^4 = (r,r,r,\dots) \in c$ sağlanır ve bundan dolayı $u^3 \in (l_\infty)_B \backslash l_\infty$, $u^4 \in c_B \backslash c$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.2.2. $\widehat{l_\infty}, \hat{c}, \widehat{c_0}$ ve $\widehat{l_1}$ Dizi Uzaylarının $\beta -$ ve $\gamma -$ Dualleri

Bu bölümde $\widehat{l_\infty}$, $\hat{c}$, $\widehat{c_0}$ ve $\widehat{l_p}$ dizi uzaylarının $\beta -$ ve $\gamma -$ duallerini hesaplayacağız.

Burada gerekli olan tanımları yukarıda vermiştik, şimdi gerekli olan bir başka teoremi vereceğiz.

Teorem 2.2.2.1. $d_1(r,s)$, $d_2(r,s)$, $d_3(r,s)$, $d_4(r,s)$ ve $d_5(r,s)$ kümelerini tanımlayalım.

$$d_1(r,s) = \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{1}{r} \sum_{j=k}^{n} \left(-\frac{s}{r}\right)^{j-k} a_j \right|^q < \infty \right\}$$

$$d_2(r,s) = \left\{ a = (a_k) \in w : \lim_{n\to\infty} \sum_{j=k}^{n} \left(-\frac{s}{r}\right)^{j-k} a_j \text{ mevcut} \right\}$$

$$\begin{aligned} d_3(r,s) = \Bigg\{ a = (a_k) \in w :\ & \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{1}{r} \sum_{j=k}^{n} \left(-\frac{s}{r}\right)^{j-k} a_j \right| \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r} \sum_{j=k}^{n} \left(-\frac{s}{r}\right)^{j-k} a_j \right| \Bigg\} \end{aligned}$$

$$d_4(r,s) = \left\{ a = (a_k) \in w : \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{1 - \left(-\frac{s}{r}\right)^{k+1}}{1 + \frac{s}{r}} \right] a_k \quad \text{mevcut} \right\}$$

$$d_5(r,s) = \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_{k,n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=k}^{n} \left(-\frac{s}{r}\right)^{j-k} a_j \right| < \infty \right\}$$

Buradan;

- **i.** $q = 1$ iken $\{\widehat{l_\infty}\}^\gamma = \{\hat{c}\}^\gamma = \{\widehat{c_0}\}^\gamma = d_1(r,s)$
- **ii.** $\{\widehat{l_p}\}^\gamma = d_1(r,s)$
- **iii.** $\{\widehat{l_1}\}^\gamma = d_5(r,s)$
- **iv.** $q = 1$ iken $\{\widehat{c_0}\}^\beta = d_1(r,s) \cap d_2(r,s)$
- **v.** $q = 1$ iken $\hat{c}^\beta = d_1(r,s) \cap d_2(r,s) \cap d_4(r,s)$

vi. $\{\widehat{l_p}\}^{\beta} = d_1(r,s) \cap d_2(r,s)$

vii. $\{\widehat{l_1}\}^{\beta} = d_2(r,s) \cap d_5(r,s)$

viii. $\{\widehat{l_\infty}\}^{\beta} = d_2(r,s) \cap d_3(r,s)$

eşitlikleri ile $\widehat{l_\infty}$, $\hat{c}$, $\widehat{c_0}$ ve $\widehat{l_p}$ dizi uzaylarının $\beta -$ ve $\gamma -$ dualleri temsil edilir (Kirişçi and Başar, 2010).

İspat:

i. İspatımızda yalnızca $\widehat{c_0}$ dizi uzayının $\gamma -$ dualinin bulunmasına yer vereceğiz. Diğer dizi uzayları için de ispat benzer şekilde elde edilebilir.

$a = (a_k) \in w$ alalım. (18) bağıntısında yer alan $y = (y_k)$ dizisini incelediğimizde $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k = \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{r} \left(-\frac{s}{r} \right)^{j-k} a_j \right] y_k = \sum_{k=0}^{n} d_{nk}(r,s) y_k = (Dy)_n \tag{22}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $D = \{d_{nk}(r,s)\}$ matrisi $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için

$$d_{nk}(r,s) = \begin{cases} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{r} \left(-\frac{s}{r} \right)^{j-k} a_j & 0 \le k \le n \\ 0 & k > n \end{cases} \tag{23}$$

şeklinde tanımlıdır. (22) eşitliği göz önüne alındığında "$x = (x_k) \in \widehat{c_0}$ iken $ax = (a_k x_k) \in bs$ dir ancak ve ancak $y = (y_k) \in c_0$ iken $Dy \in l_\infty$ dır" burada kastedilen $D = \{d_{nk}(r,s)\}$ matrisi (23) eşitliğinde tanımlanmıştır. "$A = (a_{nk}) \in (c_0 : l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty$" gerçeği göz önüne alındığında $q = 1$ iken $\{\widehat{c_0}\}^{\gamma} = d_1(r,s)$ elde edilerek ispat tamamlanır.

iv. $a = (a_k) \in w$ alalım. (18) bağıntısında yer alan $y = (y_k)$ dizisini incelediğimizde (22) eşitliği ve

$$A = (a_{nk}) \in (c_0, c) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_{nk} = \alpha_k, (k \in \mathbb{N}) \\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| < \infty \end{cases}$$

şartı kullanılırsa şu ifade elde edilir. "$x = (x_k) \in \widehat{c_0}$ iken $ax = (a_k x_k) \in cs$ dir ancak ve ancak $y = (y_k) \in c$ iken $Dy \in c$ dir" burada kastedilen $D = \{d_{nk}(r,s)\}$ matrisi (23) eşitliğinde tanımlanmıştır. $\forall k \in \mathbb{N}$ sabiti için $\lim_{n\to\infty} d_{nk}(r,s)$ mevcut ve $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} |d_{nk}(r,s)| < \infty$ elde edilir. O halde $q = 1$ iken $\{\widehat{c_0}\}^\beta = d_1(r,s) \cap d_2(r,s)$ sonucunu çıkarırız. $\hat{c}^\beta$ uzayı içinde benzer ispat yöntemi kullanılabilir. ii. ve iii. bölümlerini benzer şekilde ispatlayabiliriz.

Şunu biliyoruz ki $A = (a_{nk})$ üçgensel matris iken normlu bir λ dizi uzayının λ_A etki alanı bir baza sahiptir ancak ve ancak λ dizi uzayı bir baza sahiptir (Jarrah and Malkowsky, 1990) (Teorem 2.4.) Bu bilgi yardımıyla aşağıdaki sonuca ulaşabiliriz.

Sonuç 2.2.2.2. $z = (z_n)$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ sabiti için $b^{(k)}(r,s) = \left\{b_n^{(k)}(r,s)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizilerini

$$z_n = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{s}{r}\right)^k$$

$$b_n^{(k)}(r,s) = \begin{cases} 0 & n < k \\ \frac{1}{r}\left(-\frac{s}{r}\right)^n & n \geq k \end{cases}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. O halde;

a. $\widehat{c_0}$ ve $\widehat{l_p}$ uzayları için $\left\{b^{(k)}(r,s)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir bazdır ve $\widehat{c_0}$ ve $\widehat{l_p}$ uzaylarında aldığımız herhangi bir x dizisinin $\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k(r) = \{B(r,s)x\}_k$ olmak üzere,

$$x = \sum_k a_k(r) b^{(k)}(r,s)$$

olacak şekilde tek gösterimi vardır (Kirişçi and Başar, 2010).

b. $\hat{c}$ uzayı için $\left\{z, b^{(k)}(r,s)\right\}$ kümesi bir Schauder bazıdır ve $\hat{c}$ uzayında aldığımız herhangi bir x dizisinin $l = \lim_{k\to\infty}\{B(r,s)x\}_k$ olduğunda

$$x = lz + \sum_k [a_k(r) - l] b^{(k)}(r,s)$$

olacak şekilde tek bir gösterimi vardır (Kirişçi and Başar, 2010).

Sonuç 2.2.2.3. $\left|\frac{s}{r}\right| = 1$ olduğu durumda $\widehat{l_1}$ dizi uzayı KB- ve AB- özelliklerine sahiptir (Kirişçi and Başar, 2010).

Sonuç 2.2.2.4. $\left|\frac{s}{r}\right| \leq 1$ olduğu durumda $\widehat{c_0}$ ve $\widehat{l_p}$ $(p > 1)$ dizi uzayları AD- özelliğine sahiptir (Kirişçi and Başar, 2010).

2.2.3. $\widehat{l_\infty}, \hat{c}, \widehat{c_0}$ *ve* $\widehat{l_1}$ Dizi Uzayları ile İlgili Bazı Matris Dönüşümleri

Bu bölümde tanımladığımız $\widehat{l_\infty}$, $\hat{c}$, $\widehat{c_0}$ ve $\widehat{l_p}$ dizi uzayları ile ilgili bazı matris sınıflarını karakterize edeceğiz.

Teorem 2.2.3.1. λ bir FK- uzayı, U bir üçgensel matris ve bu üçgensel matrisin tersi $\mathcal{V}$ olsun. μ ise w dizi uzayının keyfi bir alt uzayı olsun. $A = (a_{nk}) \in (\lambda_U : \mu)$ olması ancak ve ancak $\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$C^{(n)} = \left(c_{mk}^{(n)}\right) \in (\lambda : c) \tag{24}$$

ve

$$C = (c_{nk}) \in (\lambda : \mu) \tag{25}$$

şartlarını sağlamasıdır. Burada kastedilen $C^{(n)}$ ve C matrisleri $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$ için

$$c_{mk}^{(n)} = \begin{cases} \sum_{j=k}^{m} a_{nj} v_{jk}, & (0 \le k \le m) \\ 0 & , \quad (k > m) \end{cases}$$

ve

$$c_{nk} = \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} v_{jk}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat: $A = (a_{nk}) \in (\lambda_U : \mu)$ ve $x = (x_k) \in \lambda_U$ alalım. O halde $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için;

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{m} a_{nk} \left(\sum_{j=0}^{k} v_{kj} y_j \right) = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{j=k}^{m} a_{nj} v_{jk} \right) y_k = \sum_{k=0}^{m} c_{nk}^{(n)} y_k \tag{26}$$

eşitliklerini elde ederiz. O halde Ax mevcuttur ve $(\lambda : c)$ sınıfında olmak zorundadır. $m \to \infty$ için (26) eşitliğinin limitini alırsak $Ax = Cy$ bulunur. O halde $Ax \in \mu$ yani $Cy \in \mu$ olur. Diğer bir deyişle $C \in (\lambda : \mu)$ elde edilir. Diğer taraftan $x \in \lambda_U$ alalım ve (24) ve (25) şartları sağlansın. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \in \lambda_U^{\beta}$ ve (24) ile birlikte verilen $(c_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \in \lambda^{\beta}$ sonucunu elde ederiz. O halde Ax mevcuttur. Böylece $m \to \infty$ için (26) eşitliğinin limitini alırsak $Ax = Cy$ olur ve bu da ispatı tamamlar.

Bu bölümde kullanacağımız bazı şartlar aşağıdaki verilmiştir.

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{m} \left| \frac{1}{r} \sum_{j=k}^{m} \left(-\frac{s}{r} \right)^{j-k} a_{nj} \right|^{q} < \infty \tag{27}$$

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{r} \sum_{j=k}^{m} \left(-\frac{s}{r} \right)^{j-k} a_{nj} = c_{nk} \tag{28}$$

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\left|\frac{1}{r}\sum_{j=k}^{m}\left(-\frac{s}{r}\right)^{j-k}a_{nj}\right| = \sum_{k}|c_{nk}| \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{29}$$

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{r}\left[\frac{1-\left(-\frac{s}{r}\right)^{k+1}}{1+\frac{s}{r}}\right]a_{nk} = \alpha_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{30}$$

$$\sup_{k,m\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{r}\sum_{j=k}^{m}\left(-\frac{s}{r}\right)^{j-k}a_{nj}\right| < \infty \tag{31}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k}|c_{nk}|^{q} < \infty \tag{32}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_{nk} = \beta_k \tag{33}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k}|c_{nk}| = \sum_{k}|\beta_k| \tag{34}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k} c_{nk} = \beta \tag{35}$$

$$\sup_{k,n\in\mathbb{N}}|c_{nk}| < \infty \tag{36}$$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n}|c_{nk}| < \infty \tag{37}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k} c_{nk} = 0 \tag{38}$$

$$\sup_{N,K\in\mathcal{F}}\left|\sum_{n\in N}\sum_{k\in K} c_{nk}\right| < \infty \tag{39}$$

$$\sup_{N\in\mathcal{F}} \sum_k \left| \sum_{n\in N} c_{nk} \right|^q < \infty \tag{40}$$

Teorem 2.2.3.1 den Sonuç 2.2.3.2. yi elde edebiliriz.

Sonuç 2.2.3.2. $\lambda \in \{\widehat{l_\infty}, \hat{c}, \widehat{c_0}, \text{ve } \widehat{l_p}\}$ ve $\mu \in \{l_\infty, c_0, c, l_p\}$ olsun. $A = (a_{nk}) \in (\lambda{:}\,\mu)$ olması aşağıdaki şartlara bağlıdır (Kirişçi and Başar, 2010).

i. $A = (a_{nk}) \in (\widehat{l_\infty}{:}\, l_\infty) \Leftrightarrow$ (28) ve (29) şartları sağlanmalı ayrıca $q = 1$ iken (32) şartının sağlanmalıdır.

ii. $A = (a_{nk}) \in (\hat{c}{:}\, l_\infty) \Leftrightarrow$ (28) ve (30) şartları sağlanmalı ayrıca $q = 1$ iken (27) ve (32) şartları sağlanmalıdır.

iii. $A = (a_{nk}) \in (\widehat{c_0}{:}\, l_\infty) \Leftrightarrow$(28) şartı sağlanmalı ayrıca $q = 1$ iken (27) ve (32) şartları sağlanmalıdır.

iv. $A = (a_{nk}) \in (\widehat{l_p}{:}\, l_\infty) \Leftrightarrow$ (27), (28), (32) şartları sağlanmalıdır.

v. $A = (a_{nk}) \in (\widehat{l_1}{:}\, l_\infty) \Leftrightarrow$ (28), (31) ve (36) şartları sağlanmalıdır.

vi. $A = (a_{nk}) \in (\widehat{l_\infty}{:}\, c) \Leftrightarrow$(28), (29), (33), (34) şartları sağlanmalıdır.

vii. $A = (a_{nk}) \in (\hat{c}{:}\, c) \Leftrightarrow$ (28), (30), (33) ve (35) şartları sağlanmalı ayrıca $q = 1$ iken (27) ve (32) şartları sağlanmalıdır.

viii. $A = (a_{nk}) \in (\widehat{c_0}{:}\, c) \Leftrightarrow$ (28) ve (33) şartları sağlanmalı ayrıca $q = 1$ iken (27) ve (32) şartları sağlanmalıdır.

ix. $A = (a_{nk}) \in (\widehat{l_p}{:}\, c) \Leftrightarrow$ (27), (28), (32) ve (33) şartları sağlanmalıdır.

x. $A = (a_{nk}) \in (\widehat{l_1}{:}\, c) \Leftrightarrow$ (28), (31), (32) ve (33) şartları sağlanmalıdır.

xi. $A = (a_{nk}) \in (\widehat{l_\infty}{:}\, c_0) \Leftrightarrow$ (28), (29) ve (38) şartları sağlanmalıdır.

xii. $A = (a_{nk}) \in (\hat{c}{:}\, c_0) \Leftrightarrow \beta_k = 0$ iken (28), (30), (33), $\beta = 0$ iken (35) şartı sağlanmalı ayrıca $q = 1$ iken (27) ve (32) şartları sağlanmalıdır.

xiii. $A = (a_{nk}) \in (\widehat{c_0}{:}\, c_0) \Leftrightarrow \beta_k = 0$ iken (28) ve (33) şartları sağlanmalı ayrıca $q = 1$ iken (27) ve (32) şartları sağlanmalıdır.

xiv. $A = (a_{nk}) \in (\widehat{l_p}{:}\, c_0) \Leftrightarrow$ (27), (28) ve (32) şartı sağlanmalı ayrıca $\beta_k = 0$ iken (33) şartı sağlanmalıdır

xv. $A = (a_{nk}) \in \left(\widehat{l_1}: c_0\right) \Leftrightarrow \beta_k = 0$ iken (28), (31), (33) ve (36) şartları sağlanmalıdır.

xvi. $A = (a_{nk}) \in \left(\widehat{l_\infty}: l_1\right) \Leftrightarrow$ (28), (29) ve (39) şartları sağlanmalıdır.

xvii. $A = (a_{nk}) \in (\hat{c}: l_1) \Leftrightarrow$ (28), (30) ve (39) şartları sağlanmalı ayrıca $q = 1$ iken (27) şartı sağlanmalıdır.

xviii. $A = (a_{nk}) \in (\widehat{c_0}: l_1) \Leftrightarrow$ (28), (39) şartları sağlanmalı ayrıca $q = 1$ iken (27) şartı sağlanmalıdır.

ixx. $A = (a_{nk}) \in \left(\widehat{l_p}: l_1\right) \Leftrightarrow$ (27), (28) ve (40) şartları sağlanmalıdır.

xx. $A = (a_{nk}) \in \left(\widehat{l_1}: l_1\right) \Leftrightarrow$ (28), (31) ve (37) şartları sağlanmalıdır.

2.3. Klasik Dizi Uzaylarının $B(r, s, t)$ Matrisi Altındaki Etki Alanları

$r, s, t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olmak üzere $B(r, s, t) = \{b_{nk}(r, s, t)\}$ üçlü band matrisini, $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için;

$$b_{nk}(r, s, t) = \begin{cases} r, & k = n \\ s, & k = n - 1 \\ t, & k = n - 2 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $B(r, s), \Delta^2$ ve Δ sırasıyla ikili band (genelleştirilmiş fark), ikinci mertebeden fark ve fark matrisi olmak üzere, $B(r, s, 0) = B(r, s)$, $B(1, -2, 1) = \Delta^2$ ve $B(1, -1, 0) = \Delta$ olduğuna dikkat edelim.

Bu bölümde $l_\infty(B)$, $c(B)$, $c_0(B)$ ve $l_p(B)$ dizi uzaylarını tanımlayacak ve bu uzayların $\alpha -$, $\beta -$,$\gamma -$ duallerini belirleyeceğiz. Klasik dizi uzayları olan l_∞, c, c_0 ve l_p dizi uzaylarının $B(r, s, t)$ genelleştirilmiş fark matrisi altındaki dönüşümlerini sırasıyla $l_\infty(B)$, $c(B)$, $c_0(B)$ ve $l_p(B)$ şeklinde tanımlayacağız (Sönmez, 2011). Yani;

$$l_\infty(B) = \left\{x = (x_k) \in w: \sup_{k\in\mathbb{N}} |rx_k + sx_{k-1} + tx_{k-2}| < \infty\right\}$$

$$c(B) = \left\{x = (x_k) \in w: \exists l \in \mathbb{C} \ni \lim_{k\to\infty} |rx_k + sx_{k-1} + tx_{k-2} - l| = 0\right\}$$

$$c_0(B)=\left\{x=(x_k)\in w: \lim_{k\to\infty}|rx_k+sx_{k-1}+tx_{k-2}|=0\right\}$$

$$l_p(B)=\left\{x=(x_k)\in w: \sum_k |rx_k+sx_{k-1}+tx_{k-2}|^p<\infty\right\}$$

Burada etki alanının tanımını kullanarak $l_\infty(B)$, $c(B)$, $c_0(B)$ ve $l_p(B)$ dizi uzaylarını

$l_\infty(B)=(l_\infty)_{B(r,s,t)}$, $\quad c(B)=(c)_{B(r,s,t)}$, $\quad c_0(B)=(c_0)_{B(r,s,t)}$, $\quad l_p(B)=\left(l_p\right)_{B(r,s,t)}$

şeklinde ifade etmek mümkündür.

$\forall k\in\mathbb{N}$ için $x=(x_k)$ dizisinin $B(r,s,t)$ dönüşümü yardımıyla elde edilen $y=(y_k)$ dizisini;

$$y_k = rx_k+sx_{k-1}+tx_{k-2} \tag{41}$$

şeklinde tanımlayalım. O halde λ ve $\lambda_{B(r,s,t)}$ norm izometrik olup $x=(x_k)\in\lambda_{B(r,s,t)}$ olması için gerek ve yeter şart $y=(y_k)\in\lambda$ olduğu görülür. Burada $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ (41) deki ilişki ile bağlantılıdır. Sonuç 2.3.4. verilecek bazı sonuçların elde edilmesi için gerekli lemmaları vermeden önce bu yeni uzaylarla ilişkili kapsama teoremini ve bir lemmayı vereceğiz.

Lemma 2.3.1. (Bilgiç, Furkan, and Başar, 2010) (Not.1,Teorem 2.2), (Bilgiç, Furkan, and Altay, 2007) (Teorem 2.1-2.10(i))

i. $\lambda\in\left\{l_\infty,c,c_0,l_p\right\}$ ve s, $\sqrt{s^2}=-s$ olacak şekilde bir karmaşık sayı olsun.

$$S=\left\{\alpha\in\mathbb{C}: |2(r-\alpha)|\le\left|-s+\sqrt{s^2-4t(r-\alpha)}\right|\right\}$$

olacak şekilde S kümesi tanımlayalım. Burada $S=\sigma(B(r,s,t),\lambda)$ dır.

ii. Eğer $\sqrt{s^2}=s$ ise o halde aynı diziler için

$$\sigma(B(r,s,t),\lambda)=\left\{\alpha\in\mathbb{C}: |2(r-\alpha)|\le\left|s+\sqrt{s^2-4t(r-\alpha)}\right|\right\}$$

elde ederiz.

iii. (Bilgiç, Furkan, and Başar, 2010) (Teorem 2.4), (Bilgiç, Furkan, and Altay, 2007) (Teorem 2.3) kaynaklarına dayanarak

$$S_1 = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : |2(r-\alpha)| \leq \left|-s + \sqrt{s^2 - 4t(r-\alpha)}\right|\right\}$$

olsun O halde; $\sigma_p(B(r,s,t)^*, \lambda^*) = S_1$ olur.

iv. (Bilgiç, Furkan, and Başar, 2010)(Teorem 2.6), (Bilgiç, Furkan, and Altay, 2007)(Teorem 2.5) kaynaklarına dayanarak

S_1 yukarıdaki gibi tanımlansın ve

$$S_2 = \left\{\alpha \in \mathbb{C} : |2(r-\alpha)| = \left|-s + \sqrt{s^2 - 4t(r-\alpha)}\right|\right\}$$

şeklinde tanımlayalım. O halde

a. $\sigma_r\left(\left(B(r,s,t)\right), \lambda\right) = S_1$

b. $\sigma_c\left(\left(B(r,s,t)\right), \lambda\right) = S_2$

2.3.1. $l_\infty(B)$, $c(B)$, $c_0(B)$, $l_1(B)$ Dizi Uzaylarının Kapsama Bağıntıları

Teorem 2.3.1.1. $\lambda \in \{l_\infty, c, c_0, l_p\}$ ve $B = B(r,s,t)$ olsun. O halde;

i. Eğer $|r| > \left|\frac{-s+\sqrt{s^2-4tr}}{2}\right|$ ise $\lambda = \lambda(B)$

ii. Eğer $|r| \leq \left|\frac{-s+\sqrt{s^2-4tr}}{2}\right|$ ise $\lambda \subset \lambda(B)$

kapsama bağıntısı kesindir (Sönmez, 2011).

İspat: $\lambda \in \{l_\infty, c, c_0, l_p\}$ ve $B = B(r,s,t)$ olsun. B matrisi;

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |b_{nk}| = |r| + |s| + |t| \ , \ \lim_{n\to\infty} b_{nk} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k b_{nk} = r+s+t$$

ve

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\sum_n |b_{nk}| = |r|+|s|+|t|$$

şartları sağlandığında $B \in (\lambda:\lambda)$ dır. Herhangi bir $x \in \lambda$ dizisi için $Bx \in \lambda$ dır. Dolayısıyla $x \in \lambda(B)$ dir. Bu $\lambda \subset \lambda(B)$ olduğunu gösterir.

i. $|r| > \left|\frac{-s+\sqrt{s^2-4tr}}{2}\right|$ olsun. B matrisinin $B^{-1} = D = (d_{nk})$ ters matrisi;

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k |d_{nk}| < \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} d_{nk} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k d_{nk} \text{ mevcut}$$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\sum_n |d_{nk}| < \infty$$

şartlarını sağladığından $B^{-1} \in (\lambda:\lambda)$ dır. Burada $\forall k,n \in \mathbb{N}$ için

$$d_{nk}(r,s,t) := \begin{cases} \frac{1}{r}\sum_{v=0}^{n-k}\left(\frac{-s+\sqrt{s^2-4tr}}{2r}\right)^{n-k-v}\left(\frac{-s-\sqrt{s^2-4tr}}{2r}\right)^{v}, & (0\le k\le n) \\ 0, & (k>n) \end{cases}$$

Bu sebeple $x \in \lambda(B)$ ise $y = Bx \in \lambda$ ve $x = B^{-1}y \in \lambda$ dır. Böylelikle $\lambda(B) \subset \lambda$ karşıt kapsaması kanıtlanmış olur. Bu kanıtın i. kısmını tamamlar.

ii. $q^1 := \begin{cases}\frac{1}{r}\sum_{v=0}^{n-1}\left(\frac{-s+\sqrt{s^2-4tr}}{2r}\right)^{n-v}\left(\frac{-s-\sqrt{s^2-4tr}}{2r}\right)^{v}\end{cases}$

$$q^2 := \left(\frac{n}{r}\right)$$

$$q^3 := \{(-1)^n(n+2)\}$$

ve

$$q^4 := \left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$$

dizilerini göz önüne alalım. O halde $\left|\frac{-s+\sqrt{s^2-4tr}}{2r}\right| \geq 1$ ise, $Bq^1 = e^{(0)} = (1,0,0,\ldots) \in \lambda$. Böylece $q^1 \in \lambda(B)$ elde ederiz. Fakat (Bilgiç, Furkan, and Başar, 2010)(Teorem2.1) den $r \neq 0$ ve $s^2 \neq 4tr$ ise; $u_1 := \frac{-s+\sqrt{s^2-4tr}}{2r}$, $u_2 := \frac{-s-\sqrt{s^2-4tr}}{2r}$ olacak şekilde $|u_2| < |u_1|$ olmalıdır ve $|u_1| > 1$ olduğundan

$$q^1 := \frac{1}{\sqrt{s^2-4tr}}(u_1^n - u_2^n) = \frac{1}{\sqrt{s^2-4tr}}\left[1-\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^n\right]u_1^n$$

elde ederiz. Böylece q^1 dizisi sınırlı değildir ve buradan da $q^1 \in \lambda(B)\backslash\lambda$ dır. Eğer $r \neq 0$ ve $s^2 = 4tr$ ise $u_1 = u_2 = \frac{-s}{2r}$ dir. Dolayısıyla $q^1 := \frac{-2n}{s}\left(\frac{-s}{2r}\right)^n = \frac{n}{r}\left(\frac{-s}{2r}\right)^n$ elde ederiz. $\left|\frac{-s}{2r}\right| \geq 1$olduğundan q^1 dizisi sınırlı değildir. Böylelikle $q^1 \in \lambda_B\backslash\lambda$. Varsayalım ki $\left|\frac{-s+\sqrt{s^2-4tr}}{2r}\right| = 1$ olsun.

a. $\lambda = c_0, l_p$ olsun. O halde $q^1 \in \lambda_B\backslash\lambda$.

b. $\lambda \in l_\infty, c$ olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.

i. $r+s+t=0$ ise $Bq^2 = \left(\frac{r-t}{r}, \frac{r-t}{r}, \ldots\right) \in \lambda$ dır. Böylelikle $q^2 \in \lambda(B)\backslash\lambda$.

ii. $r-s+t=0$ ise $Bq^3 = \{(-1)^n.(r-t)\} \in l_\infty$ ve

$Bq^4 = \left(\frac{r+s+t}{2}, \frac{r+s+t}{2}, \ldots\right) \in c$ dir. Böylelikle $q^3 \in l_\infty(B)\backslash l_\infty$ ve $q^4 \in c(B)\backslash c$. Böylelikle $\lambda \subset \lambda_B$ kapsama bağıntısı kesindir sonucu çıkarılabilir. Bu adım ispatı tamamlar.

2.3.2. $\boldsymbol{l_\infty(B)}$, $\boldsymbol{c(B)}$, $\boldsymbol{c_0(B)}$, $\boldsymbol{l_1(B)}$ Dizi Uzaylarının $\boldsymbol{\beta -}$ ve $\boldsymbol{\gamma -}$ Dualleri

Bu bölümde $l_\infty(B)$, $c(B)$, $c_0(B)$, $l_1(B)$ dizi uzaylarının $\beta -$ ve $\gamma -$ duallerini hesaplayacağız.

Temel Lemma 2.3.2.1. (Altay and Başar, 2007)(Teorem 3.1)
$C = (c_{nk})$ matrisini $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için $b = (b_k) \in w$ dizisi ve ters matrisi $D = (d_{nk})$, üçgensel matrisi $U = (u_{nk})$ ile

$$c_{nk} = \begin{cases} \sum_{j=k}^{n} b_j d_{jk} \ , & (0 \leq k \leq n) \\ 0 \ , & k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. O halde;

$$\{\lambda_U\}^\gamma \coloneqq \{b = (b_k) \in w : C \in (\lambda : l_\infty)\}$$

$$\{\lambda_U\}^\beta \coloneqq \{b = (b_k) \in w : C \in (\lambda : c)\}$$

Lemma 1.3.2.11. i ve bu temel lemmayı birlikte göz önüne alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.3.2.2. $d_1(r,s,t)$, $d_2(r,s,t)$, $d_3(r,s,t)$, $d_4(r,s,t)$, $d_5(r,s,t)$, $d_6(r,s,t)$ kümelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$d_1(r,s,t) = \left\{ b = (b_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{j=k}^{n} d_{jk} b_j \right|^q < \infty \right\}$$

$$d_2(r,s,t) = \left\{ b = (b_k) \in w : \lim_{n \to \infty} \sum_{j=k}^{n} d_{jk} b_j \ \text{mevcut} \right\}$$

$$d_3(r,s,t)=\left\{b=(b_k)\in w:\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{j=k}^{n}d_{jk}b_j\right|=\sum_{k=0}^{\infty}\left|\lim_{n\to\infty}\sum_{j=k}^{n}d_{jk}b_j\right|\right\}$$

$$d_4(r,s,t)=\left\{b=(b_k)\in w:\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}d_{jk}b_k\ \text{mevcut}\right\}$$

$$d_5(r,s,t)=\left\{b=(b_k)\in w:\sup_{k,n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=k}^{n}d_{jk}b_j\right|<\infty\right\}$$

$$d_6(r,s,t)=\left\{b=(b_k)\in w:\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{j=k}^{n}d_{jk}b_k\right|=0\right\}$$

O halde

i. $q=1$ için $\{l_\infty(B)\}^\gamma=c(B)^\gamma=\{c_0(B)\}^\gamma:=d_1(r,s,t);$

ii.$\{l_p(B)\}^\gamma:=d_1(r,s,t);$

iii.$\{l_1(B)\}^\gamma:=d_5(r,s,t);$

iv.$q=1$ için $\{c_0(B)\}^\beta:=d_1(r,s,t)\cap d_2(r,s,t);$

v.$q=1$ için $\{c(B)\}^\beta:=d_1(r,s,t)\cap d_2(r,s,t)\cap d_4(r,s,t);$

vi.$\{l_p(B)\}^\beta:=d_1(r,s,t)\cap d_2(r,s,t);$

vii.$\{l_1(B)\}^\beta:=d_2(r,s,t)\cap d_5(r,s,t);$

viii.$\{l_\infty(B)\}^\beta:=d_2(r,s,t)\cap d_3(r,s,t);$

şeklindedir (Sönmez, 2011).

Sonuç 2.3.2.3. $\forall k\in\mathbb{N}$ için $\alpha_k(r)=\{B(r,s,t)x\}_k$ olsun. $\forall k\in\mathbb{N}$ sabiti için $z=(z_k)$ ve $b^{(k)}(r,s,t)=\{b^{(k)}(r,s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizilerini $z_n=\sum_{k=0}^{n}d_{nk}$ ve

$$b_n^{(k)}(r,s,t)=\begin{cases}0 & ,\quad n<k\\ d_{nk}\,, & \quad n\geq k\end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. O halde aşağıdakiler sağlanır (Sönmez, 2011).

a. $\{b^{(k)}(r,s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $c_0(B)$ ve $l_p(B)$ için bir bazdır ve $c_0(B)$ veya $l_p(B)$ deki keyfi x için

$$x := \sum_k a_k(r) b^{(k)}(r,s,t)$$

olacak şekilde tek bir gösterimi vardır.

b. $\{z, b^{(k)}(r,s,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ kümesi $c(B)$ için bir bazdır ve $l = \lim_{k\to\infty}\{B(r,s,t)x\}_k$ olmak üzere $c(B)$ deki her x elemanının,

$$x := lz + \sum_k [a_k(r) - l]\, b^{(k)}(r,s,t)$$

şeklinde tek bir gösterime sahiptir.

Lemma 2.3.2.4.

λ ve μ BK uzayı olsun. $F_\mu^U = (f_{nk})$ matrisini $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için $\alpha = (\alpha_k) \in \mu$ dizisi ve $U = (u_{nk})$ üçgensel matrisi ile

$$f_{nk} = \sum_{j=k}^{n} \alpha_j u_{nj} d_{jk}$$

şeklinde tanımlayalım. O halde λ_U aşağıdaki özelliklere sahiptir (Altay and Başar, 2007)(Teorem 2.1 ve Teorem 4.1).

i. KB özelliktedir ancak ve ancak $F_{l_1}^U \in (\lambda : \lambda)$ ise,

ii. AB özelliktedir ancak ve ancak $F_{bv_0}^U \in (\lambda : \lambda)$.

Lemma 2.3.2.4. den ve Lemma 2.3.1. in iv. kısmından aşağıdaki sonuca ulaşabiliriz.

Sonuç 2.3.2.5. $\left|\frac{s+\sqrt{s^2-4tr}}{2r}\right| = \left|\frac{-s+\sqrt{s^2-4tr}}{2r}\right| = 1$ ise $l_1(B)$, KB ve AB özelliklerine sahiptir (Sönmez, 2011).

Lemma 2.3.2.6. λ, AK özelliğine sahip BK uzayı U, üçgensel matris ve $\lambda_U \supset \emptyset$ olsun. O halde λ_U dizi uzayı AD özelliğine sahiptir ancak ve ancak $t \in \lambda^B$ için $tU = \theta$ olması, $t = \theta$ olmasını gerektirir (Altay and Başar, 2007).

c_0 ve l_p nin AK özelliğine sahip olduğundan, $U = B(r,s,t)$ matrisi için Lemma 2.3.2.6. yı kullanabiliriz. Ayrıca Lemma 2.3.1. in iii. kısmından aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.3.2.7. $c_0(B)$ ve $l_p(B)$ $(p > 1)$ AD özelliğine sahiptir ancak ve ancak $\left|\frac{-s-\sqrt{s^2-4tr}}{2r}\right| \leq \left|\frac{-s+\sqrt{s^2-4tr}}{2r}\right| \leq 1$ olmasıdır (Sönmez, 2011).

2.3.3. $l_\infty(B)$, $c(B)$, $c_0(B)$, $l_1(B)$ Dizi Uzaylarına İlişkin Bazı Matris Dönüşümleri

Bu bölümde yeni dizi uzaylarına ilişkin sonsuz matrislerin bazı sınıflarını karakterize edeceğiz.

Lemma 2.3.3.1. λ, bir FK uzayı olsun. U üçgensel matris, D bu matrisin tersi ve w nun keyfi bir alt kümesi μ olsun. O halde $A = (a_{nk}) \in (\lambda_U, \mu)$ sağlanır ancak ve ancak

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } C^{(n)} = \left(c_{mk}^{(n)}\right) \in (\lambda : c) \tag{42}$$

ve

$$C = (c_{nk}) \in (\lambda : \mu) \tag{43}$$

olmasıdır. Burada $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$ için

$$c_{mk}^{(n)} = \begin{cases} \sum_{j=k}^{m} a_{nj} d_{jk}\,, & (0 \leq k \leq m) \\ 0 & ,(k > m) \end{cases}$$

ve

$$c_{nk} = \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} d_{jk}$$

dır.

İspat: $A = (a_{nk}) \in (\lambda_U, \mu)$ olsun ve $x \in \lambda_U$ alalım. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{m} a_{nk} \left(\sum_{j=0}^{k} d_{kj} y_j \right) = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{j=k}^{m} a_{nj} d_{jk} \right) y_k = \sum_{k=0}^{m} c_{mk}^{(n)} y_k \tag{44}$$

O halde Ax mevcut olduğundan $C^{(n)}$, $(\lambda: c)$ sınıfında olmalıdır. (44) eşitliğinden $m \to \infty$ iken $Ax = Cy$ elde ederiz. $Ax \in \mu$ dan $Cy \in \mu$ olur yani, $C \in (\lambda: \mu)$.
Tersine (42) ve (43) sağlasın. $x \in \lambda_U$ alalım. O halde (42) ile birlikte $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in \lambda_U^{\beta}$ yı veren $(c_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in \lambda^{\beta}$ alalım. Dolayısıyla Ax mevcuttur. Böylece (44) eşitliğinde $m \to \infty$ alarak $Ax = Cy$ elde ederiz. Bu da $A \in (\lambda_U: \mu)$ olduğunu gösterir.

Şimdi aşağıdaki koşulları listeleyelim.

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{m} \left| \sum_{j=k}^{m} d_{jk} a_{nj} \right|^{q} < \infty \tag{45}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{r} \sum_{j=k}^{m} d_{jk} a_{nj} = c_{nk} \tag{46}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \left| \frac{1}{r} \sum_{j=k}^{m} d_{jk} a_{nj} \right| = \sum_{k} |c_{nk}| \tag{47}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} d_{jk} a_{nk} = \alpha_n \tag{48}$$

$$\sup_{m,k\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{r}\sum_{j=k}^{m} d_{jk}a_{nj}\right| < \infty \tag{49}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k}|c_{nk}|^{q} < \infty \tag{50}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_{nk} = \beta_k \tag{51}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k}|c_{nk}| = \sum_{k}|\beta_k| \tag{52}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k} c_{nk} = \beta \tag{53}$$

$$\sup_{n,k\in\mathbb{N}}|c_{nk}| < \infty \tag{54}$$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n}|c_{nk}| < \infty \tag{55}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k} c_{nk} = 0 \tag{56}$$

$$\sup_{N,K\in\mathcal{F}}\left|\sum_{n\in N}\sum_{k\in K} c_{nk}\right| < \infty \tag{57}$$

$$\sup_{N\in\mathcal{F}}\sum_{k}\left|\sum_{n\in N} c_{nk}\right|^{q} < \infty \tag{58}$$

Burada $\mathcal{F}$, $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu alt kümelerinin sınıfını belirtir. Böylece aşağıdaki tabloyu verebiliriz. Bu tabloda $\lambda \in \{l_\infty(B), c(B), c_0(B), l_p(B)\}$ ve $\mu \in \{l_\infty, c, c_0, l_1\}$ olmak üzere $A \in (\lambda : \mu)$ sınıfını karakterize edeceğiz.

Tablo 1. $(\lambda:\mu)$ sınıfının $\lambda \in \{l_\infty(B), c(B), c_0(B), l_p(B)\}$ ve $\mu \in \{l_\infty, c, c_0, l_1\}$ ile karakterizasyonu

	$\boldsymbol{l_\infty(B)}$	$\boldsymbol{c(B)}$	$\boldsymbol{c_0(B)}$	$\boldsymbol{l_p(B)}$	$\boldsymbol{l_1(B)}$
$\boldsymbol{l_\infty}$	1.	2.	3.	4.	5.
$\boldsymbol{c}$	6.	7.	8.	9.	10.
$\boldsymbol{c_0}$	11.	12.	13.	14.	15.
$\boldsymbol{l_1}$	16.	17.	18.	19.	20.

Sonuç 2.3.3.2. Tablo 1'i okuduğumuzda $\lambda \in \{l_\infty(B), c(B), c_0(B), l_p(B)\}$ ve $\mu \in \{l_\infty, c, c_0, l_1\}$ olmak üzere $A \in (\lambda:\mu)$ sınıfı için tüm yeterli ve gerekli koşullar aşağıda sıralanmıştır (Sönmez, 2011).

1. $q = 1$ için (50), (46) ve (47)
2. $q = 1$ için (45), (50) ve (46), (48)
3. $q = 1$ için (45), (50) ve (46)
4. (45), (46) ve (50)
5. (46), (49) ve (54)
6. (46), (47), (51) ve (52)
7. $q = 1$ için (45), (50) ve (46), (48), (51),(53)
8. $q = 1$ için (45),(50) ve (46),(51)
9. (45),(46),(50) ve (51)
10. (46), (49), (51) ve (54)
11. (46), (47) ve (56)
12. $\beta_k = 0$ için (46), (48), (51) ve $\beta = 0$ için (53) ve $q = 1$ için (45), (50)
13. $\beta_k = 0$ için (46), (51) ve $q = 1$ için (45), (50)
14. $\beta_k = 0$ için (51) ve (45), (46) ve (50)
15. $\beta_k = 0$ için (46), (49), (51) ve (54)
16. (46), (47) ve (57)
17. $q = 1$ için (45) ve (46), (48) ve (57)
18. $q = 1$ için (45) ve (46), (57)
19. (45), (46) ve (58)
20. (46), (49) ve (55)

Şimdi bazı yeni matris sınıflarının karakterizasyonunu Sonuç 2.3.3.2. den karakterize etmek için yararlı olan Altay ve Başar (2003) tarafından sunulan Lemma 2.3.3.3. verebiliriz.

Lemma 2.3.3.3. λ ve μ iki dizi uzayı olsun. A sonsuz bir matris ve U üçgensel matris olsun. O halde $A \in (\lambda: \mu_U)$ olması için gerek ve yeter şart $UA \in (\lambda: \mu)$ olmasıdır (Altay and Başar, 2003).

Son olarak eğer Sonuç 2.3.3.2. de $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için a_{nk}, $ra_{nk} + sa_{n-1,k} + ta_{n-2,k}$ şeklinde değiştirilirse o halde $U = B(r, s, t)$ için Lemma 2.3.3.3.ten $(\lambda(B): \mu(B))$ sınıflarının karekterizasyonlarını türetebiliriz.

2.4. Klasik Dizi Uzaylarının $Q(r, s, t, u)$ Dörtlü Band Matrisi Altındaki Etki Alanı ve Elde Edilen Yeni Dizi Uzayları

Bu bölümde dörtlü band matrisinin etki alanlarını kullanarak $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $c_0(Q)$, $c(Q)$, $l_\infty(Q)$ ve $l_p(Q)$ uzaylarını sırasıyla c_0, c, l_∞ ve l_p uzaylarına lineer izometrik olduğunu göstereceğiz. Ayrıca bu uzaylar arasındaki kapsama bağıntılarından bahsedeceğiz.

$r, s, t, u \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olsun. $Q = Q(r, s, t, u) = \big(q_{nk}(r, s, t, u)\big)$ dörtlü band matrisini $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için

$$q_{nk}(r, s, t, u) = \begin{cases} r, & k = n \\ s, & k = n-1 \\ t, & k = n-2 \\ u, & k = n-3 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada Δ^3,$B(r, s, t)$, Δ^2, $B(r, s)$ ve Δ sırasıyla üçüncü mertebeden fark, üçlü band, ikinci mertebeden fark, ikili band (genelleştirilmiş fark) ve fark matrisi olmak üzere $Q(1, -3{,}3, -1) = \Delta^3$, $Q(r, s, t, 0) = B(r, s, t)$, $Q(1, -2{,}1{,}0) = \Delta^2$, $Q(r, s, 0{,}0) = B(r, s)$ ve $Q(1, -1) = \Delta$ olduğuna dikkat edelim. Dolayısıyla dörtlü band matrisinin etki alanları ile elde edilmiş sonuçlar, yukarıda bahsedilen matrislerin etki alanları ile elde edilen sonuçlardan daha genel ve daha kapsamlıdır.

Şimdi dörtlü band matrisinin etki alanı aracılığı ile $c_0(Q)$, $c(Q)$, $l_\infty(Q)$ ve $l_p(Q)$ matrislerini tanımlayalım (Bişgin, 2020). $1 \leq p < \infty$ olmak üzere;

$$c_0(Q) = \left\{x = (x_k) \in w : \lim_{k\to\infty}(rx_k + sx_{k-1} + tx_{k-2} + ux_{k-3}) = 0\right\}$$

$$c(Q) = \left\{x = (x_k) \in w : \lim_{k\to\infty}(rx_k + sx_{k-1} + tx_{k-2} + ux_{k-3}) \text{ mevcut}\right\}$$

$$l_\infty(Q) = \left\{x = (x_k) \in w : \sup_{k\in\mathbb{N}}|rx_k + sx_{k-1} + tx_{k-2} + ux_{k-3}| < \infty\right\}$$

ve

$$l_p(Q) = \left\{x = (x_k) \in w : \sum_k |rx_k + sx_{k-1} + tx_{k-2} + ux_{k-3}|^p < \infty\right\}$$

şeklindedir. Aksi belirtilmedikçe negatif alt indis içeren her hangi bir terimin sıfır olduğu varsayılır. Etki alanı tanımından;

$$c_0(Q) = (c_0)_Q\ ,\ c(Q) = c_Q\ ,\ l_\infty(Q) = (l_\infty)_Q \text{ ve } l_P(Q) = \left(l_p\right)_Q \tag{59}$$

yazabiliriz. $x = (x_k) \in w$ olmak üzere x in Q dönüşümünü $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için

$$(Qx)_k = y_k = rx_k + sx_{k-1} + tx_{k-2} + ux_{k-3}$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Teorem 2.4.1. Aşağıdakiler sağlanır (Bişgin, 2020).

a. $c_0(Q)$, $c(Q)$ ve $l_\infty(Q)$ dizi uzayları

$$\begin{aligned}\|x\|_{c_0(Q)} = \|x\|_{c(Q)} = \|x\|_{l_\infty(Q)} = \|Qx\|_\infty \\ = \sup_{k\in\mathbb{N}}|rx_k + sx_{k-1} + tx_{k-2} + ux_{k-3}|\end{aligned}$$

normu ile birlikte BK uzayıdır

b. $l_p(Q)$ dizi uzayı $1 \leq p < \infty$ olmak üzere;

$$\|x\|_{l_p(Q)} = \|Qx\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |rx_k + sx_{k-1} + tx_{k-2} + ux_{k-3}|^p\right)^{1/p}$$

normu ile birlikte bir BK uzayıdır.

İspat :

a. c_0, c ve l_∞uzaylarının kendi supremum normuna göre BK uzayı olduğu açıktır. $Q = Q(r,s,t,u)$ matrisi üçgensel matristir. Ayrıca (59) bağıntısı sağlanır. Bu üç koşulu, Wilansky (1984) de Teorem 4.2.16 ile birleştirerek $c_0(Q)$, $c(Q)$ ve $l_\infty(Q)$ uzaylarının BK uzayı olduğu çıkarımına varabiliriz.

b. Bu kısmını benzer yolla ispatlayabiliriz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi $r,s,t,u \in \mathbb{R}/\{0\}$ olmak üzere; $rz^3 + sz^2 + tz + u = 0$ denklemini ele alalım. Bu denklemin üç kökü olduğu açıktır. Öyle ki;

$$z_1 = \frac{1}{3r}[a - b - s]$$

$$z_2 = -\frac{1}{6r}\left[\left(1 - i\sqrt{3}\right)a - \left(1 + i\sqrt{3}\right)b + 2s\right]$$

ve

$$z_3 = -\frac{1}{6r}\left[\left(1 + i\sqrt{3}\right)a - \left(1 - i\sqrt{3}\right)b + 2s\right]$$

bu denklemin kökleridir. Burada

$$a = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{(-27r^2u + 9rst - 2s^3)^2 + 4(3rt - s^2)^3} - 27r^2u + 9rst - 2s^3}{2}}$$

ve

$$b=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{(-27r^2u+9rst-2s^3)^2+4(3rt-s^2)^3}+27r^2u-9rst+2s^3}{2}}$$

şeklindedir. Burada ve devamında aksi belirtilmedikçe $rz^3+sz^2+tz+u=0$ denkleminin rasgele köklerini μ_1,μ_2 ve μ_3 kabul edeceğiz. Burada basit hesaplamalar ile;

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3=-\frac{s}{r}$$

$$\mu_1\mu_{2+}\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3=\frac{t}{r}$$

$$\mu_1\mu_2\mu_3=-\frac{u}{r}$$

$$\mu_1^3+\frac{s}{r}\mu_1^2+\frac{t}{r}\mu_1+\frac{u}{r}=0 \tag{60}$$

$$\mu_1^2+\mu_2^2+\frac{s}{r}(\mu_1+\mu_2)+\mu_1\mu_2+\frac{t}{r}=0 \tag{61}$$

$$\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2+\mu_1\mu_{2+}\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3+\frac{s}{r}(\mu_1+\mu_2+\mu_3)+\frac{t}{r}=0 \tag{62}$$

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3+\frac{s}{r}=0 \tag{63}$$

ifadelerini elde ederiz.

Teorem 2.4.2. $1\leq p<\infty$ olmak üzere; $c_0(Q)$, $c(Q)$, $l_\infty(Q)$ ve $l_p(Q)$ dizi uzayları sırasıyla c_0, c, l_∞ ve l_p dizi uzayları ile lineer izomorfiktir (Bişgin, 2020).

İspat: Benzer ifadeleri tekrar tekrar kullanmamak adına yalnızca $c(Q)$ dizi uzayı için ispatı veriyoruz. Bu ispat için $c(Q)$ ve c uzayları arasında birebir, örten ve norm koruyan bir fonksiyonun varlığını göstermeliyiz.

$$L: c(Q) \to c$$
$$L(x) = Q(x)$$

şeklinde tanımlı L dönüşümünü göz önüne alalım. L dönüşümünün lineer olduğu açıktır. Ayıca $Qx = \theta$ olduğunda $x = \theta$ olduğu açıktır. O halde L birebirdir.

$y = (y_k) \in c$ olsun ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$x_k = \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k-j}\sum_{v=0}^{k-j-i} \mu_1^{k-j-i-v}.\mu_2^{v}.\mu_3^{i}.y_j$$

olacak şekilde $x = (x_k)$ dizisi tanımlayalım. O halde (60)-(63) eşitliklerini dikkate aldığımızda $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
(Qx)_k = {} & rx_k + sx_{k-1} + tx_{k-2} + ux_{k-3} \\
= {} & \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k-j}\sum_{v=0}^{k-j-i} \mu_1^{k-j-i-v}.\mu_2^{v}.\mu_3^{i}.y_j \\
& + \frac{s}{r}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-j-1}\sum_{v=0}^{k-j-i-1} \mu_1^{k-j-i-v-1}.\mu_2^{v}.\mu_3^{i}.y_j \\
& + \frac{t}{r}\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{i=0}^{k-j-2}\sum_{v=0}^{k-j-i-2} \mu_1^{k-j-i-v-2}.\mu_2^{v}.\mu_3^{i}.y_j \\
& + \frac{u}{r}\sum_{j=0}^{k-3}\sum_{i=0}^{k-j-3}\sum_{v=0}^{k-j-i-3} \mu_1^{k-j-i-v-3}.\mu_2^{v}.\mu_3^{i}.y_j
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{k-3}\left[\sum_{i=0}^{k-j-3}\left[\sum_{v=0}^{k-j-v-3} \mu_3^i\mu_2^v\mu_1^{k-j-i-v-3}\left(\mu_1^3+\frac{s}{r}\mu_1^2+\frac{t}{r}\mu_1+\frac{u}{r}\right)\right.\right.$$

$$+\mu_3^i\mu_2^{k-j-i-2}\left(\mu_1^2+\mu_2^2+\frac{s}{r}(\mu_1+\mu_2)+\mu_1\mu_2+\frac{t}{r}\right)$$

$$+\mu_3^{k-j-2}\left(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2+\mu_1\mu_{2+}\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3+\frac{s}{r}(\mu_1+\mu_2+\mu_3)\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{t}{r}\right)\right]\right]y_j$$

$$+\left[y_{k-2}\left(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2+\mu_1\mu_{2+}\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3+\frac{s}{r}(\mu_1+\mu_2+\mu_3)+\frac{t}{r}\right)\right]$$

$$+y_{k-1}\left(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\frac{s}{r}\right)+y_k$$

$$= y_k$$

elde ederiz. Bu nedenle $Qx = y$ ve $y \in c$ olduğundan $Qx \in c$ olur. Yani; $x = (x_k) \in c(Q)$ ve $L(x) = y$. Böylece L örtendir. Ayrıca Teorem 6.1. den her $x = (x_k) \in c(Q)$ için

$$\|L(x)\|_\infty = \|Qx\|_\infty = \|x\|_{c(Q)}$$

olduğunu biliyoruz. Bu nedenle L dönüşümü normu koruyor. Buradan L dönüşümü istediğimiz gibi $c(Q)$ ve c uzayları arasında birebir, örten ve norm koruyan fonksiyondur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.4.3. $X \in \{c_0, c, l_\infty, l_p\}$ ve $Q = Q(r,s,t,u)$ olsun. O halde

a. Eğer $\forall\sigma \in \{1,2,3\}$ için $|\mu_\sigma| < 1$ ise, $X = X_Q$.

b. Eğer $\exists\sigma \in \{1,2,3\}$ için $|\mu_\sigma| \geq 1$ ise, $X \subset X_Q$ kapsaması kesindir (Bişgin, 2020).

İspat: $X \in \{c_0, c, l_\infty, l_p\}$ ve $Q = Q(r,s,t,u)$ alalım. Lemma 1.3.2.11. deki i., v., ix., x. ve xiii. şartlarını dikkate aldığımızda

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k |q_{nk}(r,s,t,u)| = |u| + |t| + |s| + |r|,$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n\to\infty} q_{nk}(r,s,t,u) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k q_{nk}(r,s,t,u) = r + s + t + u$$

ve

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\sum_n |q_{nk}(r,s,t,u)| = |r| + |s| + |t| + |u|.$$

olduğu görülür. Bu nedenle $Q \in (X\colon X)$ elde ederiz. Yani; $X \subset X_Q$.

a. $\forall\sigma \in \{1,2,3\}$ için $|\mu_\sigma| < 1$ ve $Q = Q(r,s,t,u)$ matrisinin ters matrisi $\forall n,k \in \mathbb{N}$ için;

$$h_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-k}\sum_{v=0}^{n-k-i} \mu_1^{n-k-i-v}\mu_2^v\mu_3^i\ , & 0 \le k \le n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $H = (h_{nk})$ olsun. O halde $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$ olduğu durumda $\forall k \in \mathbb{N}$ için;

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k |h_{nk}| &\le \frac{1}{|r|}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left[\frac{|\mu_1|^2 - |\mu_1|^{n+3}}{(1-|\mu_1|)(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)}\right. \\ &\quad \left. + \frac{|\mu_2|^2 - |\mu_2|^{n+3}}{(1-|\mu_2|)(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_2)} + \frac{|\mu_3|^2 - |\mu_3|^{n+3}}{(1-|\mu_3|)(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)}\right] \\ &\le \frac{1}{|r|}\left[\frac{1}{(1-|\mu_1|)(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)} + \frac{1}{(1-|\mu_2|)(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_2)}\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(1-|\mu_3|)(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)}\right] < \infty\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} h_{nk} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\mu_2-\mu_3)\mu_1^{n-k+2} + (\mu_3-\mu_2)\mu_2^{n-k+2} + (\mu_1-\mu_2)\mu_3^{n-k+2}}{r(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k h_{nk} = \frac{1}{r}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{{\mu_1}^2 - {\mu_1}^{n+3}}{(1-\mu_1)(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)} + \frac{{\mu_2}^2 - {\mu_2}^{n+3}}{(1-\mu_2)(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_2)} + \frac{{\mu_3}^2 - {\mu_3}^{n+3}}{(1-\mu_3)(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)}\right]$$

$$= \frac{1}{r}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{{\mu_1}^2}{(1-\mu_1)(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)} + \frac{{\mu_2}^2}{(1-\mu_2)(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_2)} + \frac{{\mu_3}^2}{(1-\mu_3)(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)}\right],$$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\sum_n |h_{nk}| \leq \frac{1}{|r|}\sup_{k\in\mathbb{N}}\left[\frac{|\mu_1|^2}{(1-|\mu_1|)(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)} + \frac{|\mu_2|^2}{(1-|\mu_2|)(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_2)} + \frac{|\mu_3|^2}{(1-|\mu_3|)(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)}\right]$$
$$\leq \frac{1}{|r|}\left[\frac{1}{(1-|\mu_1|)(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)} + \frac{1}{(1-|\mu_2|)(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_2)} + \frac{1}{(1-|\mu_3|)(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)}\right] < \infty$$

$\mu = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ olduğu durumda $\forall k \in \mathbb{N}$ için;

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k |h_{nk}|$$
$$= \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{(n^2+5n+6)|\mu|^{n+1} - 2(n^2+4n+3)|\mu|^{n+2} + (n^2+3n+2)|\mu|^{n+3} - 2}{2|r|(|\mu|-1)^3}$$
$$\leq \frac{1}{|r|(1-|\mu|)^3} < \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} h_{nk} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mu^{n-k}(n-k+2)(n-k+1)}{2r} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k h_{nk}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+5n+6)\mu^{n+1}-2(n^2+4n+3)\mu^{n+2}+(n^2+3n+2)\mu^{n+3}-2}{2r(\mu-1)^3}$$
$$= \frac{1}{r(1-\mu)^3},$$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\sum_n |h_{nk}| = \frac{1}{|r|(1-|\mu|)^3} < \infty$$

$\lambda, i, j \in \{1,2,3\}$ olmak üzere $\mu = \mu_i = \mu_j \neq \mu_\lambda$ olduğu durumda $\forall k \in \mathbb{N}$ için;

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k |h_{nk}| \leq \frac{1}{|r|}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left[\frac{|\mu|}{|\mu-\mu_\lambda|(|\mu|-1)^2}+\frac{|\mu_\lambda||\mu|}{|\mu-\mu_\lambda|^2(1-|\mu|)}\right.$$
$$\left.+\frac{|\mu_\lambda|^2}{|\mu-\mu_\lambda|^2(1-|\mu_\lambda|)}\right]$$
$$\leq \frac{1}{|r|}\left[\frac{1}{|\mu-\mu_\lambda|(|\mu|-1)^2}+\frac{1}{|\mu-\mu_\lambda|^2(1-|\mu|)}+\frac{1}{|\mu-\mu_\lambda|^2(1-|\mu_\lambda|)}\right]$$
$$< \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} h_{nk} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mu^{n-k+1}[(\mu-\mu_\lambda)(n-k+1)-\mu_\lambda]+\mu_\lambda^{n-k+2}}{r(\mu-\mu_\lambda)^2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k h_{nk} = \frac{1}{r}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{-(n+2)\mu^{n+2}+(n+1)\mu^{n+3}+\mu}{(\mu-\mu_\lambda)(\mu-1)^2}-\frac{\mu_\lambda(\mu^{n+2}-\mu)}{(\mu-\mu_\lambda)^2(\mu-1)}\right.$$
$$\left.+\frac{\mu_\lambda^{n+3}-\mu_\lambda^2}{(\mu-\mu_\lambda)^2(\mu_\lambda-1)}\right]$$
$$= \frac{1}{r}\left[\frac{\mu}{(\mu-1)^2(\mu-\mu_\lambda)}-\frac{\mu_\lambda\mu}{(\mu-\mu_\lambda)^2(1-\mu)}+\frac{\mu_\lambda^2}{(\mu-\mu_\lambda)^2(1-\mu_\lambda)}\right]$$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\sum_n |h_{nk}| \leq \frac{1}{|r|}\sup_{k\in\mathbb{N}}\left[\frac{|\mu|}{|\mu-\mu_\lambda|(|\mu|-1)^2}+\frac{|\mu_\lambda||\mu|}{|\mu-\mu_\lambda|^2(1-|\mu|)}\right.$$
$$\left.+\frac{|\mu_\lambda|^2}{|\mu-\mu_\lambda|^2(1-|\mu_\lambda|)}\right]$$

$$\leq \frac{1}{|r|}\left[\frac{1}{|\mu-\mu_\lambda|(|\mu|-1)^2}+\frac{1}{|\mu-\mu_\lambda|^2(1-|\mu|)}+\frac{1}{|\mu-\mu_\lambda|^2(1-|\mu_\lambda|)}\right]<\infty$$

Dolayısıyla $H \in (X{:}X)$ elde ederiz. Yani; $X_Q \subset X$ olur. Böylece $X = X_Q$ sağlanır.

b. $X \subset X_Q$ kapsamasının sağladığını biliyoruz. $\exists\sigma \in \{1,2,3\}$ için $|\mu_\sigma| \geq 1$ olsun. Şimdi dört dizi tanımlayalım. Öyle ki;

Eğer $\forall\sigma \in \{1,2,3\}$ için $|\mu_\sigma| > 1$ ise;

$$\varphi_1 = \left\{\frac{1}{r}\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{v=0}^{n-i-2}\mu_1^{n-i-2-v}\mu_2^v\mu_3^i\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$\varphi_2 = \{n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$\varphi_3 = \{(-1)^n(n+3)\}_{n\in\mathbb{N}}$

$\varphi_4 = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$

olsun. $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$ olduğu durumda;

$$\varphi_1 = \left\{\frac{(\mu_2-\mu_3)\mu_1^n+(\mu_3-\mu_1)\mu_2^n+(\mu_1-\mu_2)\mu_3^n}{r(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \notin X$$

$\mu = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ olduğu durumda;

$$\varphi_1 = \left\{\frac{\mu^{n-2}n(n-1)}{2r}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \notin X$$

$i,j,\lambda \in \{1,2,3\}$ için $\mu = \mu_i = \mu_j \neq \mu_\lambda$ olduğu durumda;

$$\varphi_1 = \left\{\frac{\mu^{n-1}[(\mu-\mu_\lambda)(n-1)-\mu_\lambda]+\mu_\lambda^n}{r(\mu-\mu_\lambda)^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \notin X$$

$Q\varphi_1 = e^{(2)} = (0,0,1,0,\dots) \in X$,yani $\varphi_1 \in X_Q$. O halde $\varphi_1 \in X_Q \backslash X$.

Eğer $\exists\sigma \in \{1,2,3\}$ için $|\mu_\sigma| = 1$ ise, herhangi bir $X \in \{c_0, l_p\}$ için $\varphi_1 \in X_Q \backslash X$.

$X \in \{c, l_\infty\}$ olsun. O halde iki durum söz konusu olur. Öyle ki;

i. $\mu_\sigma = 1$ olduğu durumda, yani; $r + s + t + u = 0$ ise,

$Q\varphi_2 = (r - t - 2u, r - t - 2u, \dots) \in X$ elde ederiz. Yani; $\varphi_2 \in X_Q \backslash X$.

ii. $\mu_\sigma = -1$ olduğu durumda, yani; $r - s + t - u = 0$ ise,

$Q\varphi_3 = \{(-1)^n (2r - s + u\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$, $Q\varphi_4 = (0,0,0, \dots) \in c$ elde ederiz. Bu yüzden $\varphi_3 \in (l_\infty)_Q \backslash l_\infty$ ve $\varphi_4 \in c_Q \backslash c$ olur. Sonuç olarak $X \subset X_Q$ kapsaması kesindir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.4.4. $r + s + t + u = 0$ ise $c \subset c_0(Q)$ kapsaması kesindir (Bişgin, 2020).

İspat: $r + s + t + u = 0$ ve $x = (x_k) \in c$ olduğunu varsayalım. $\lim_{k\to\infty} x_k = l$ olur. O halde $\lim_{k\to\infty} (Qx)_k = (r + s + t + u)l = 0$ olur. Yani; $Qx = ((Qx)_k) \in c_0$ olur. Bu durumda $x = (x_k) \in c_0(Q)$ olur. Bu bize $c \subset c_0(Q)$ kapsama bağıntısının sağladığını verir. Şimdi $z = (z_k)$ dizisini tanımlayalım. Öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}$ için $z_k = \ln(k + 4)$ olsun. O halde $z = (z_k) \notin c$ olduğu açıktır, fakat $Qx = ((Qx)_k) = \left(s \ln\left(\frac{k+3}{k44}\right) + t \ln\left(\frac{k+2}{k44}\right) + u \ln\left(\frac{k+1}{k44}\right)\right) \in c_0$, yani $z = (z_k) \in c_0(Q)$. Sonuç olarak $c \subset c_0(Q)$ kapsama bağıntısı kesindir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.4.5. $l_p(Q) \subset c_0(Q) \subset c(Q) \subset l_\infty(Q)$ kapsama bağıntısı kesin olarak sağlanır (Bişgin, 2020).

İspat: $l_p \subset c_0 \subset c \subset l_\infty$ kapsama bağıntısının varlığını biliyoruz. O halde $l_p(Q) \subset c_0(Q) \subset c(Q) \subset l_\infty(Q)$ kapsaması bağıntısı da sağlanır. Şimdi $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$x_k = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k-j} \sum_{v=0}^{k-j-i} \mu_1^{k-j-i-v} \mu_2^v \mu_3^i (j+1)^{-\frac{1}{p}}$$

$$y_k = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k-j} \sum_{v=0}^{k-j-i} \mu_1^{k-j-i-v} \mu_2^v \mu_3^i$$

ve

$$z_k = \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k-j}\sum_{v=0}^{k-j-i} \mu_1^{k-j-i-v}\mu_2^{v}\mu_3^{i}(-1)^{j}$$

şeklinde üç diziyi ele alalım. O halde $Qx = \left(\frac{1}{(k+1)^{\frac{1}{p}}}\right) \in c_0\backslash l_p$, $Qy = (1,1,1,\dots) \in c\backslash c_0$ ve $Qz = ((-1)^k) \in l_\infty\backslash c$ olduğu görülür. Yani $x = (x_k) \in c_0(Q)\backslash l_p(Q)$, $y = (y_k) \in c(Q)\backslash c_0(Q)$ ve $z = (z_k) \in l_\infty(Q)\backslash c(Q)$ sağlanır. Sonuç olarak $l_p(Q) \subset c_0(Q) \subset c(Q) \subset l_\infty(Q)$ kapsama bağıntısı kesindir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.4.6. l_∞ ve $c_0(Q)$ dizi uzayları örtüşür fakat birbirini içermez (Bişgin, 2020).

İspat: $Q = (q_{nk}(r,s,t,u))$ dörtlü band matrisini ve Lemma 1.3.2.12. yi ele alalım. O halde; $\forall r,s,t,u \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olmak üzere;

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k |(q_{nk}(r,s,t,u)| = |r| + |s| + |t| + |u| \neq 0$$

elde ederiz. Bu $Q \notin (l_\infty : c_0)$ anlamına gelir yani en az bir $a = (a_k) \in l_\infty$, $Qa \notin c_0$ demektir. Yani $l_\infty \not\subset c_0(Q)$ olur. Şimdi $b = (b_k)$ ve $d = (d_k)$ şeklinde iki diziyi tanımlayalım. Öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}$ için $b_k = 4^{-k}$ ve $d_k = 5^{k+3}$ olsun. O halde $b = (b_k) \in l_\infty \cap c_0(Q)$ olduğu açıktır. $r = t = 1$ ve $s = u = -5$ olduğunda $Qd = (0,0,0,\dots) \in c_0$ elde ederiz. Yani $d = (d_k) \in c_0(Q)$ fakat $d = (d_k) \notin l_\infty$. Böylece $l_\infty \cap c_0(Q) \neq \emptyset$ ve $c_0(Q) \not\subset l_\infty$olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.4.7. $B = B(b_1,b_2,b_3) = (b_{nk})$ üçlü band matrisi $\forall k,n \in \mathbb{N}$ ve $b_1,b_2,b_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olmak üzere;

$$b_{nk} = \begin{cases} b_1 & ,k = n \\ b_2 & ,k = n-1 \\ b_3 & ,k = n-2 \\ 0 & ,d.d \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığında $l_p(B) \subset l_p(Q)$, $c_0(B) \subset c_0(Q)$, $c(B) \subset c(Q)$, $l_\infty(B) \subset l_\infty(Q)$ kapsama bağıntıları kesindir (Bişgin, 2020).

İspat: $Q = Q(r,s,t,u)$ dörtlü band matrisini ele alalım. $u = 0$ olduğunda $Q(r,s,t,0) = B(b_1,b_2,b_3)$ elde ederiz. Yani $l_p(B) \subset l_p(Q)$, $c_0(B) \subset c_0(Q)$, $c(B) \subset c(Q)$ ve $l_\infty(B) \subset l_\infty(Q)$ kapsamaları sağlanır. $r,s,t,u \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ varsayalım. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k = k^2 + 3k + 2$ ve $y_k = (k+2)^3$ olacak şekilde $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerini tanımlayalım. O halde

$(Bx)_k = (b_1 + b_2 + b_3)k^2 + (3b_1 + b_2 - b_3)k + 2b_1$

$(Qx)_k = (r + s + t + u)k^2 + (3r + s - t - 3u)k + (2r + 2u)$

$(By)_k = (b_1 + b_2 + b_3)k^3 + (6b_1 + 3b_2)k^2 + (12b_1 + 3b_2)k + (8b_1 + b_2)$

ve

$(Qy)_k = (r + s + t + u)k^3 + (6r + 3s - 3u)k^2 + (12r + 3s + 3u)k + (8r + s - u)$

elde ederiz. Böylece

i. $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olduğunda $Bx \notin c_0, l_p$ ve $By \notin c, l_\infty$ yani $x \notin c_0(B), l_p(B)$ ve $y \notin c(B), l_\infty(B)$.

ii. $s = -3r, t = 3r, u = -r$ ve $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olduğunda $Qx \in c_0, l_p$ ve $Qy \in c, l_\infty$ yani $x \in c_0(Q), l_p(Q)$ ve $y \in c(Q), l_\infty(Q)$ olduğunu görebiliriz.

Sonuç olarak $l_p(B) \subset l_p(Q)$, $c_0(B) \subset c_0(Q)$, $c(B) \subset c(Q)$ ve $l_\infty(B) \subset l_\infty(Q)$ kapsamaları kesindir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.4.1. Schauder Bazı ve $\alpha-,\beta-,\gamma-$ Dualleri

Bu bölümde, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $c_0(Q)$, $c(Q)$, $l_\infty(Q)$ ve $l_p(Q)$ uzaylarının Schauder bazını vereceğiz ve $c_0(Q)$, $c(Q)$, $l_\infty(Q)$ ve $l_p(Q)$ uzaylarının $\alpha-,\beta-,\gamma-$ duallerini belirleyeceğiz.

Teorem 2.4.1.1. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\chi_k = (Qx)_k$ ve $l = \lim_{k\to\infty} \chi_k$ olsun. $\forall k \in \mathbb{N}$ sabiti için $d^{(k)}(r,s,t,u) = \left\{d_n^{(k)}(r,s,t,u)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $g = (g_n)$ iki dizi olsun. Öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$d_n^{(k)}(r,s,t,u) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq n < k \\ \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-k}\sum_{v=0}^{n-k-i} \mu_1^{n-k-i-v}\mu_2^v\mu_3^i & , \quad n \geq k \end{cases}$$

ve

$$g_n = \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j}\sum_{v=0}^{n-j-i} \mu_1^{n-j-i-v}\mu_2^v\mu_3^i$$

olsun.

a. $c_0(Q)$ ve $l_p(Q)$ dizi uzaylarının schauder bazları $\{d^{(k)}(r,s,t,u)\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisidir ve her $x \in c_0(Q)$ veya $l_p(Q)$ iken

$$x = \sum_k \chi_k\, d^{(k)}(r,s,t,u)$$

şeklinde tek bir gösterime sahiptir (Bişgin, 2020).

b. $c(Q)$ dizi uzayının schauder bazı $\{g, d^{(0)}(r,s,t,u), d^{(1)}(r,s,t,u), \ldots\}$ dizisidir ve her $x \in c(Q)$ iken

$$x = lg + \sum_k [\chi_k - l] d^{(k)}(r,s,t,u)$$

şeklinde tek bir gösterime sahiptir (Bişgin, 2020).

İspat:

a. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $e^{(k)}$, k. birim vektör yani $e^{(k)} = (0,0,\ldots,1,0,0,\ldots)$ şeklindedir. Yani k yerine 1 ve diğer durumlarda 0 dır. $1 \leq p < \infty$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere;

$Qd^{(k)}(r,s,t,u) = e^{(k)} \in c_0, l_p$

olduğu kolayca görülebilir. Bu nedenle $\{d^{(k)}(r,s,t,u)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset c_0(Q)$ ve $\{d^{(k)}(r,s,t,u)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset l_p(Q)$ sağlanır.

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere $x = (x_k) \in c_0(Q)$ veya $l_p(Q)$ alalım. $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$x^{[m]} = \sum_{k=0}^{m} \chi_k . d^{(k)}(r,s,t,u)$$

şeklinde tanımlayalım. O halde $Q = Q(r,s,t,u)$ dörtlü band matrisini $x^{[m]}$ ye uygulayarak $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için

$$Qx^{[m]} = \sum_{k=0}^{m} x_k Q d^{(k)}(r,s,t,u) = \sum_{k=0}^{m} (Qx)_k e^{(k)}$$

ve

$$\{Q(x - x^{[m]})\}_n = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq n \leq m \\ (Qx)_n & , \quad n > m \end{cases}$$

elde ederiz.

Keyfi verilen $\forall \varepsilon > 0$ için $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\forall m \geq m_0$ için $|(Qx)_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\sum_{n=m_0+1}^{\infty} |(Qx)_n|^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$ olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. O halde $\forall m \geq m_0$ için

$$\left\| x - x^{[m]} \right\|_{c_0(Q)} = \sup_{m \leq n} |(Qx)_n| \leq \sup_{m_0 \leq n} |(Qx)_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

ve

$$\left\| x - x^{[m]} \right\|_{l_p(Q)} = \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} |(Qx)_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=m_0+1}^{\infty} |(Qx)_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

elde ederiz. Bu da bize

$$x = \sum_{k} \chi_k d^{(k)}(r,s,t,u)$$

verir. Şimdi $x = (x_k)$ dizisinin

$$x = \sum_k \lambda_k d^{(k)}(r,s,t,u)$$

şeklinde başka bir gösterimi olduğunu varsayalım. $L: c_0(Q) \to c_0$ veya $L: l_p(Q) \to l_p$ şeklinde tanımlanan L dönüşümünden dolayı $L(x) = Qx$ sürekli olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(Qx)_n = \sum_k \lambda_k \left\{Qd^{(k)}(r,s,t,u)\right\}_n = \sum_k \lambda_k e_n^{(k)} = \lambda_n$$

elde ederiz. Bu sonuç $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(Qx)_n = \chi_n$ gerçeğiyle çelişiyor. Sonuç olarak $x \in c_0(Q)$, $l_p(Q)$ gösterimi tektir.

b. $\left\{d^{(k)}(r,s,t,u)\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset c_0(Q)$ ve $Qg = e \in c$ olduğu açıktır. Bu $\left\{g, d^{(k)}(r,s,t,u)\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset c(Q)$ kapsama bağıntısının sağlandığını gösterir. Keyfi alınan $x = (x_k) \in c(Q)$ için $l = \lim_{k\to\infty} \chi_k$ olmak üzere $y = x - lg$ olsun. O halde $y = (y_k) \in c_0(Q)$ olduğu açıktır. (a) bölümüne göre $y = (y_k)$ nın tek bir gösterimi olduğu sonucuna varılır. Böylece

$$x = lg + \sum_k [x_k - l] d^{(k)}(r,s,t,u)$$

şeklinde tek bir $x = (x_k) \in c(Q)$ yazılabilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.4.1. ve Teorem 2.4.1.1. deki sonuçları kullanarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.4.1.2. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $c_0(Q)$, $c(Q)$ ve $l_p(Q)$ dizi uzayları ayrılabilirdir (Bişgin, 2020).

Teorem 2.4.1.3. $\mathcal{F}$, $\mathbb{N}$ de tüm sonlu alt kümelerinin koleksiyonu ve $1 \leq p < \infty$ iken $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\tau_1 = \left\{ a = (a_k) \in w: \sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_n \left| \frac{1}{r} \sum_{k \in K} \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{v=0}^{n-k-i} \mu_1^{n-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i a_n \right| < \infty \right\},$$

$$\tau_2 = \left\{ a = (a_k) \in w: \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_n \left| \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{v=0}^{n-k-i} \mu_1^{n-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i a_n \right| < \infty \right\}$$

ve

$$\tau_3 = \left\{ a = (a_k) \in w: \sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_k \left| \frac{1}{r} \sum_{n \in K} \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{v=0}^{n-k-i} \mu_1^{n-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i a_n \right|^q < \infty \right\}$$

şeklinde τ_1, τ_2, τ_3 kümelerini tanımlayalım. O halde aşağıdakiler sağlanır (Bişgin, 2020).

i. $\{c_0(Q)\}^\alpha = \{c(Q)\}^\alpha = \tau_1$

ii. $\{l_1(Q)\}^\alpha = \tau_2$

iii. $1 < p \leq \infty$ iken $\{l_p(Q)\}^\alpha = \tau_3$

İspat: Teoremin yalnızca i. kısmını ispatlayacağız. Diğer bölümler benzer şekilde ve Lemma 1.3.2.11. kullanılarak ispatlanabilir.

i. Teorem 2.4.2. yi dikkate alarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{v=0}^{n-k-i} \mu_1^{n-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i y_k \tag{64}$$

olacak şekilde $x = (x_n)$ dizisini alalım. O halde her bir $a = (a_n) \in w$ dizisi için

$$a_n x_n = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{v=0}^{n-k-i} \mu_1^{n-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i a_n y_k = (V^{r,s,t,u} y)_n$$

olduğu görülür. Yukarıdaki sonuç; $x = (x_k) \in c_0(Q)$ veya $c(Q)$ olduğunda $ax =$

$(a_k x_k) \in l_1$ olması için gerek ve yeter şart $y = (y_k) \in c_0$ veya c olduğunda $V^{r,s,t,u} y \in l_1$ olduğunu gösterir yani $a = (a_n) \in \{c_0(Q)\}^{\alpha} = \{c(Q)\}^{\alpha}$ olması için gerek ve yeter şart $y = (y_k) \in c_0$ veya c olduğunda $V^{r,s,t,u} \in (c_0 : l_1) = (c : l_1)$ olmasıdır. Bu sonuçtan ve Lemma 1.3.2.11.in xii. şartından

$$a = (a_n) \in \{c_0(Q)\}^{\alpha} = \{c(Q)\}^{\alpha} \Leftrightarrow \sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_n \left| \frac{1}{r} \sum_{k \in K} \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{v=0}^{n-k-i} \mu_1^{n-k-i-v} \mu_2^{v} \mu_3^{i} a_n \right| < \infty$$

elde edilir. Sonuç olarak $\{c_0(Q)\}^{\alpha} = \{c(Q)\}^{\alpha} = \tau_1$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.4.1.4. $\tau_4, \tau_5, \tau_6, \tau_7$ ve τ_8 kümelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\tau_4 = \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{1}{r} \sum_{j=k}^{n} \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^{v} \mu_3^{i} a_j \right|^q < \infty \right\}, 1 \leq q < \infty$$

$$\tau_5 = \left\{ a = (a_k) \in w : \frac{1}{r} \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^{v} \mu_3^{i} a_j \ \ \forall k \in \mathbb{N} \text{ için mevcut} \right\},$$

$$\tau_6 = \left\{ a = (a_k) \in w : \frac{1}{r} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^{v} \mu_3^{i} a_j \text{ mevcut} \right\},$$

$$\tau_7 = \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_{n,k \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{r} \sum_{j=k}^{n} \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^{v} \mu_3^{i} a_j \right| < \infty \right\}$$

ve

$$\tau_8 = \left\{ a = (a_k) \in w : \lim_{n \to \infty} \sum_k \left| \frac{1}{r} \sum_{j=k}^{n} \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^{v} \mu_3^{i} a_j \right| \right.$$

$$= \sum_{k} \left| \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^{v} \mu_3^{i} a_j \right| \Bigg\}$$

o halde aşağıdakiler sağlanır (Bişgin, 2020).

i. $q = 1$ için $\{c_0(Q)\}^{\beta} = \tau_4 \cap \tau_5$,

ii. $q = 1$ için $\{c(Q)\}^{\beta} = \tau_4 \cap \tau_5 \cap \tau_6$,

iii. $\{l_1(Q)\}^{\beta} = \tau_5 \cap \tau_7$,

iv. $1 < p < \infty$ ve $1 < q < \infty$ için $\{l_p(Q)\}^{\beta} = \tau_5 \cap \tau_4$,

v. $\{l_\infty(Q)\}^{\beta} = \tau_5 \cap \tau_8$,

vi. $q = 1$ için $\{c_0(Q)\}^{\gamma} = \{c(Q)\}^{\gamma} = \tau_4$,

vii. $\{l_1(Q)\}^{\gamma} = \tau_7$,

viii. $1 < p < \infty$ ve $1 < q < \infty$ için $\{l_p(Q)\}^{\gamma} = \tau_4$,

ix. $q = 1$ için $\{l_\infty(Q)\}^{\gamma} = \tau_4$

İspat: Teoremin yalnızca i. kısmını ispatlayacağız. Diğer bölümler benzer şekilde ve Lemma 1.3.2.11. kullanılarak ispatlanabilir.

i. Keyfi bir $a = (a_k)$ dizisini alalım ve (64) bağıntısı ile tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini ele alalım. $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$e_{nk}^{r,s,t,u} = \begin{cases} \dfrac{1}{r} \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^{v} \mu_3^{i} a_j & ,0 \leq k \leq n \\ 0 & ,k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $E^{r,s,t,u} = \left(e_{nk}^{r,s,t,u}\right)$ olmak üzere, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k x_k &= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{1}{r} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k-j} \sum_{v=0}^{k-j-i} \mu_1^{k-j-i-v} \mu_2^{v} \mu_3^{i} y_j \right] a_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{1}{r} \sum_{j=k}^{n} \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^{v} \mu_3^{i} a_j \right] y_k \\ &= (E^{r,s,t,u} y)_n \end{aligned}$$

yazabiliriz.

Yukarıdaki hesaplamalar $x = (x_k) \in c_0(Q)$ iken $ax = (a_k x_k) \in cs$ olması için gerek ve yeter şart $y = (y_k) \in c_0$ iken $E^{r,s,t,u} y \in c$ olduğunu gösterir. Yani $a = (a_n) \in \{c_0(Q)\}^{\beta}$ olması için gerek ve yeter şart $E^{r,s,t,u} \in (c_0 : c)$ olmasıdır. Sonucumuzu ve Lemma 1.3.2.11. in vi. şartını birleştirerek $a = (a_n) \in \{c_0(Q)\}^{\beta}$ olması için gerek ve yeter şartın $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{1}{r} \sum_{j=k}^{n} \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^{v} \mu_3^{i} a_j \right| < \infty$$

ve

$$\frac{1}{r} \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^{v} \mu_3^{i} a_j \ \text{mevcut}$$

olduğunu görürüz. Bunun sonucu olarak $\{c_0(Q)\}^{\beta} = \tau_4 \cap \tau_5$ olduğunu elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.4.2. Dört Yeni Dizi Uzayı ile İlgili Bazı Matris Dönüşümleri

Bu bölümde $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $c_0(Q), c(Q), l_\infty(Q)$ ve $l_p(Q)$ uzayları ile ilgili bazı matris sınıflarını belirleyeceğiz.

Gösterimi basitleştirmek adına bu bölüm boyunca $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için

$$g_{nk}^{r,s,t,u} = \frac{1}{r} \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^{v} \mu_3^{i} a_{nj}$$

şeklinde tanımlanan eşitliği kullanacağız.

Şimdi sonraki ifadelerimizde bize yardımcı olacak iki lemma vereceğiz.

Teorem 2.4.2.1. Kompleks sayılarda keyfi verilen $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi için aşağıdakiler sağlanır (Bişgin, 2020).

i. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $A \in \left(c(Q): l_p\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{k \in K} g_{nk}^{r,s,t,u} \right|^p < \infty \tag{65}$$

$$\forall k, n \in \mathbb{N} \text{ için } g_{nk}^{r,s,t,u} \text{ mevcut} \tag{66}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_k g_{nk}^{r,s,t,u} \text{ yakınsak} \tag{67}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ ve } 1 \leq p < \infty \; için \; \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{m} \left| \frac{1}{r} \sum_{j=k}^{m} \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i a_{nj} \right| < \infty \tag{68}$$

ii. $A \in (c(Q): l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (66) ve (68) şartlarını sağlaması ve

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k \left| g_{nk}^{r,s,t,u} \right| < \infty \tag{69}$$

olmasıdır.

İspat: Teoremin ii. kısmını Lemma 1.3.2.11. in i. şartının yerine Lemma 1.3.2.11. in xiv. şartı alınarak benzer yolla ispatlanabileceği için teoremin yalnızca i. kısmını ispatlayacağız.

i. $x = (x_k) \in c(Q)$ alalım ve (65)-(68) şartlarının sağladığını varsayalım. O halde Teorem 2.4.1.4. ün ii. kısmını kullanarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \{c(Q)\}^\beta$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla x in A −dönüşümü mevcuttur.

$\forall k, n \in \mathbb{N}$ için $h_{nk}^{r,s,t,u} = g_{nk}^{r,s,t,u}$ olmak üzere $H^{r,s,t,u} = \left(h_{nk}^{r,s,t,u}\right)$ olacak şekilde bir matris tanımlayalım. (65) şartına göre $H^{r,s,t,u} = \left(h_{nk}^{r,s,t,u}\right)$ matrisi Lemma 1.3.2.11. xiv. şartınıda sağlar. Yani; $H^{r,s,t,u} \in \left(c: l_p\right)$ olur.

$\forall m, n \in \mathbb{N}$ için;

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=k}^{m} \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^{v} \mu_3^{i} a_{nj} y_j \tag{70}$$

eşitliğini ele alalım. Her iki tarafın $m \to \infty$ için limiti alındığında

$$\sum_{k} a_{nk} x_k = \sum_{k} g_{nk}^{r,s,t,u} y_k \tag{71}$$

$l_p -$ normu alındığında

$$\|Ax\|_{l_p} = \|H^{r,s,t,u} y\|_{l_p} < \infty$$

elde ederiz. Bu bize $Ax \in l_p$ olduğunu gösterir yani $A \in \big(c(Q): l_p\big)$ olur. Tersine $A \in \big(c(Q): l_p\big)$ olduğunu varsayalım. Lemma 1.3.2.13. yi ve $c(Q)$ ve l_p uzaylarının BK uzayı olduğu gerçeğini birleştirirsek her $x = (x_k) \in c_0(Q)$ için;

$$\|Ax\|_{l_p} \leq M \|x\|_{c(Q)} \tag{72}$$

olduğunu söyleyebiliriz.

$d^{(k)}(r,s,t,u) = \left\{d_n^{(k)}(r,s,t,u)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ ve $K \in \mathcal{F}$ olmak üzere $\forall k \in \mathbb{N}$ sabiti için

$$x_k = \sum_{k \in K} d^{(k)}(r,s,t,u)$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini düşünelim. Her $x = (x_k) \in c(Q)$ için (72) eşitsizliği sağlanır. O halde

$$\|Ax\|_{l_p} = \left(\sum_{n} \left| \sum_{k \in K} g_{nk}^{r,s,t,u} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq M \|x\|_{c(Q)} = M$$

yazabiliriz. Bundan dolayı (65) sağlanır.

Bu varsayımı dikkate aldığımızda $A = (a_{nk})$ matrisinin $c(Q)$ uzayına uygulanabileceği sonucuna varıyoruz. Sonuç olarak (66)-(68) şartlarının sağlaması kolayca görülür. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.4.2.2. Kompleks sayılarda keyfi verilen $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi için $A \in (c(Q): c)$ olması için gerek ve yeter şart (66),(68),(69),

$$\forall \mathrm{k} \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n\to\infty} g_{nk}^{r,s,t,u} = \alpha_k \tag{73}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k g_{nk}^{r,s,t,u} = \alpha \tag{74}$$

şartlarının sağlamasıdır (Bişgin, 2020).

İspat: $x = (x_k) \in c(Q)$ keyfi dizisini alalım ve $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisinin (66), (68), (69), (73) ve (74) koşullarını sağladığını varsayalım. Teorem 2.4.1.4. ü ve varsayılan koşulları dikkate aldığımızda $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \{c(Q)\}^{\beta}$ sonucuna varırız. Bundan dolayı Ax mevcuttur. (69) ve (73) şartlarına göre $\forall \mathrm{k} \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{j=0}^{k} |a_j| = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k} |g_{nj}^{r,s,t,u}| \le \sup_n \sum_j |g_{nj}^{r,s,t,u}| < \infty$$

yazabiliriz. Bu da $(a_k) \in l_1$ olduğunu gösterir ve böylece $\sum_k a_k(y_k - l)$ serisi $\lim_{k\to\infty} y_k = l$ olacak şekilde yakınsaktır. Yani $y \in c$ olur. Lemma 1.3.2.11. in v. şartı ile (69), (73) ve (74) şartlarını birleştirirsek $G^{r,s,t,u} \in (c: c)$ elde ederiz. Ayrıca (71) şartına göre $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_k a_{nk}x_k = \sum_k g_{nk}^{r,s,t,u}(y_k - l) + l\sum_k g_{nk}^{r,s,t,u} \tag{75}$$

elde ederiz. (75) in $n \to \infty$ için limiti alındığında,

$$\lim_{n\to\infty}(Ax)_n = \sum_k \alpha_k(y_k - l) + l\alpha \tag{76}$$

elde ederiz ki bu da $A \in (c(Q): c)$ olduğunu verir.

Tersini varsayalım; yani $A \in (c(Q): c)$ olsun. $c \subset l_\infty$ kapsama bağıntısını dikkate alırsak $A \in (c(Q): l_\infty)$ olduğunu görürüz. Bu sonuca ve Teorem 2.4.2.1. ün ii. kısmına dayanarak (66), (68) ve (69) koşullarının sağlandığını elde ederiz.

Şimdi $d^{(k)}(r,s,t,u) = \left\{d_n^{(k)}(r,s,t,u)\right\}$ ve $x = \sum_k d^{(k)}(r,s,t,u)$ dizilerini ele alalım. O halde $\forall k \in \mathbb{N}$ için $Ad^{(k)}(r,s,t,u) = \left\{g_{nk}^{r,s,t,u}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \in c$ ve $Ax = \left\{\sum_k g_{nk}^{r,s,t,u}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \in c$ olduğu açıktır. Bu bize ihtiyacımız olan (73) ve (74) şartlarının sağladığını gösterir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.4.2.3. Kompleks sayılarda verilen keyfi bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi için aşağıdakiler sağlanır (Bişgin, 2020).

i. $A \in (l_1(Q): l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart,

$$\sup_{k,n\in\mathbb{N}}\left|g_{nk}^{r,s,t,u}\right| < \infty \tag{77}$$

şartının sağlamasıdır.

ii. $A \in \left(l_p(Q): l_\infty\right)$ olması için gerek ve yeter şart $1 < p < \infty$ olmak üzere,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k\left|g_{nk}^{r,s,t,u}\right|^q < \infty \tag{78}$$

ve

$$\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \tau_4 \tag{79}$$

şartlarının sağlamasıdır.

iii. $A \in (l_\infty(Q): l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (69) şartı ve

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{m\to\infty} \sum_k \left| \sum_{j=k}^{m} \sum_{i=0}^{j-k} \sum_{v=0}^{j-k-i} \mu_1^{j-k-i-v} \mu_2^v \mu_3^i a_{nj} \right| = \sum_k \left| g_{nk}^{r,s,t,u} \right| \tag{80}$$

İspat: i. ve iii. kısımları benzer yolla ispatlanabileceğinden teoremin yalnızca ii. kısmını ispatlayacağız.

ii. $x = (x_k) \in l_p(Q)$ keyfi dizisini alarak $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi için (78) ve (79) koşullarının sağladığını varsayalım. Teorem 2.4.1.4. ün iv. kısmına göre $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \{l_p(Q)\}^\beta$ olduğu açıktır. Böylece Ax mevcuttur.

(71) nin sırasıyla l_∞ normunu alıp Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$$\|Ax\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_k a_{nk} x_k \right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_k g_{nk}^{r,s,t,u} y_k \right| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_k \left| g_{nk}^{r,s,t,u} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_k |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

elde ederiz. Böylece $Ax \in l_\infty$ sağlanır. Yani $A \in \left(l_p(Q): l_\infty\right)$ olur.

Tersini varsayalım. $A \in \left(l_p(Q): l_\infty\right)$ olsun. Hipotezden $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \{l_p(Q)\}^\beta$ olduğundan (79) koşulu sağlanır ve $\{g_{nk}^{r,s,t,u}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ mevcuttur. Ayrıca aynı sebeple (71) koşulu sağlanır ve $a_n = \{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizileri, $l_p(Q)$ da $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$f_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$$

olacak şekilde sürekli lineer f_n fonksiyonellerini tanımlar. Ayrıca Teorem 6.2. den biliyoruz ki $l_p(Q)$ ve l_p uzayları izomorfiktir. Bu sonucu ve (71) i birleştirirsek,

$$\|f_n\| = \left\|\{g_{nk}^{r,s,t,u}\}_{k\in\mathbb{N}}\right\|_q$$

elde ederiz ki bu bize fonksiyonların noktasal sınırlı olduğunu verir. Banach Steinhaus teoremine göre fonksiyonların düzgün sınırlı olduğunu biliyoruz. Yani; $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\sum_k \left|g_{nk}^{r,s,t,u}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|f_n\| \le M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ mevcuttur. Bu bize (78) sağladığını gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.4.2.4. Kompleks sayılarda verilen keyfi bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi için $A \in \left(l_1(Q): l_p\right)$ olması için gerek ve yeter şart $1 \le p < \infty$ iken

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_n \left|g_{nk}^{r,s,t,u}\right|^p < \infty \tag{81}$$

şartının sağlamasıdır (Bişgin, 2020).

İspat: $x = (x_k) \in l_1(Q)$ keyfi dizisini alarak (81) şartının sağladığını varsayalım. O halde $y \in l_1$ olduğu açıktır. Teorem 6.1.4. ün iii. kısmına göre $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \{l_1(Q)\}^{\beta}$ sağlanır yani Ax mevcuttur. Buradan $\forall n \in \mathbb{N}$ sabiti ve $y \in l_1$ için $\sum_k g_{nk}^{r,s,t,u}\, y_k$ mutlak yakınsaktır.

Şimdi (71) e Minkowsky eşitsizliğini uygulayarak

$$\left(\sum_n |(Ax)_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \sum_n |y_n| \left(\sum_n \left|g_{nk}^{r,s,t,u}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

elde ederiz ki bu bize $Ax \in l_p$ olduğunu verir. Yani $A \in \left(l_1(Q): l_p\right)$ dir.

Tersini varsayalım. $1 \le p < \infty$ olmak üzere $A \in \left(l_1(Q): l_p\right)$ olduğunu varsayalım. O halde Ax mevcut olduğu ve her $x = (x_k) \in l_1(Q)$ için l_p uzayına ait olduğu açıktır.

Yani; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \{l_1(Q)\}^{\beta}$ olur ve bu (71) nin sağladığını gösterir.

Şimdi $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $d_{nk} = g_{nk}^{r,s,t,u}$ olacak şekilde bir $D = (d_{nk})$ matrisi tanımlayalım. Bu sebeple $D \in \left(l_1 \colon l_p\right)$ olduğu açıktır. Lemma 1.3.2.11. in xv. şartını dikkate alarak (81) ün sağladığını görürüz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.4.2.5. Kompleks sayılarda verilen keyfi bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi için aşağıdakiler sağlanır (Bişgin, 2020).

i. $A \in (l_1(Q) \colon f)$ olması için gerek ve yeter şart (77) ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$f - \lim g_{nk}^{r,s,t,u} = \lambda_k \tag{82}$$

şartlarının sağlamasıdır.

ii. $A \in \left(l_p(Q) \colon f\right)$ olması için gerek ve yeter şart $1 \leq p < \infty$ olmak üzere (78), (79) ve (82) şartlarının sağlamasıdır.

iii. $A \in (l_\infty(Q) \colon f)$ olması için gerek ve yeter şart (69),(80) ve (82) ve n ye göre düzgün

$$\lim_{m\to\infty} \sum_k \left| \frac{1}{m+1} \sum_{\sigma=0}^{m} g_{n+\sigma,k}^{r,s,t,u} - \lambda_k \right| = 0$$

şartlarının sağlamasıdır.

İspat: i. ve ii. kısmını benzer yolla ispatlanabileceğinden teoremin yalnızca iii. kısmını ispatlayacağız.

ii. $x = (x_k) \in l_p(Q)$ keyfi dizisini alarak (78), (79) ve (82) şartlarını sağladığını varsayalım. O halde Ax mevcut olduğu açıktır. (82) şartını dikkate alarak $\forall k \in \mathbb{N}$ için $m \to \infty$ iken ve n ye göre düzgün

$$\left| \frac{1}{m+1} \sum_{\sigma=0}^{m} g_{n+\sigma,k}^{r,s,t,u} \right|^q \to |\lambda_k|^q$$

yazabiliriz. Bu bizi (78) ile $\forall k \in \mathbb{N}$ için n ye göre düzgün

$$\sum_{\sigma=0}^{k}|\lambda_k|^q = \lim_{m\to\infty}\sum_{\sigma\to\infty}^{k}\left|\frac{1}{m+1}\sum_{\varphi=0}^{m} g_{n+\varphi,\sigma}^{r,s,t,u}\right|^q \leq \sup_{n,m\in\mathbb{N}}\sum_{\sigma}\left|\frac{1}{m+1}\sum_{\varphi=0}^{m} g_{n+\varphi,\sigma}^{r,s,t,u}\right|^q = M < \infty$$

eşitsizliğinin sağladığına yönlendirir. Buradan $(\lambda_k) \in l_1$ elde edilir.

Hipotezden $x = (x_k) \in l_p(Q)$ olduğunda $y = (y_k) \in l_p$ olduğunu biliyoruz. O halde Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\sum_k |\lambda_k y_k| \leq \left(\sum_k |\lambda_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_k |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

yazabiliriz ki bu $(\lambda_k y_k) \in l_1$ olduğunu verir. Ayrıca $y = (y_k) \in l_p$ den dolayı $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\left(\sum_{k=k_0}^{\infty}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{4M^{\frac{1}{q}}}$$

olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O halde (82) den n ye göre düzgün $\forall m \geq m_0$ için

$$\left|\sum_{k=0}^{k_0}\left[\frac{1}{m+1}\sum_{\sigma=0}^{m} g_{n+\sigma,k}^{r,s,t,u} - \lambda_k\right] y_k\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

olacak şekilde en az bir $m_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Bu iki gerçeği göz önüne alarak ve Hölder eşitsizliğini kullanarak n ye göre düzgün ve $\forall m \geq m_0$ için

$$\left|\frac{1}{m+1}\sum_{\varphi=0}^{m}(Ax)_{n+\varphi} - \sum_k \lambda_k y_k\right| = \left|\sum_k \left[\frac{1}{m+1}\sum_{\sigma=0}^{m} g_{n+\sigma,k}^{r,s,t,u} - \lambda_k\right] y_k\right|$$

$$\leq \left|\sum_{k=0}^{k_0}\left[\frac{1}{m+1}\sum_{\sigma=0}^{m} g_{n+\sigma,k}^{r,s,t,u} - \lambda_k\right] y_k\right|$$

$$+\left|\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left[\frac{1}{m+1}\sum_{\sigma=0}^{m} g_{n+\sigma,k}^{r,s,t,u} - \lambda_k\right] y_k\right|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left[\left|\frac{1}{m+1}\sum_{\sigma=0}^{m} g_{n+\sigma,k}^{r,s,t,u}\right| + |\lambda_k|\right]^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + 2M^{\frac{1}{q}}\frac{\epsilon}{4M^{\frac{1}{q}}} = \epsilon$$

yazabiliriz ki bu bize $Ax \in f$ olduğunu verir yani $A \in \left(l_p(Q): f\right)$ dir.

Tersini varsayalım. Yani $A \in \left(l_p(Q): f\right)$ olsun. O halde $f \subset l_\infty$ kapsama bağıntısını dikkate alırsak $A \in \left(l_p(Q): l_\infty\right)$ elde ederiz ki bu (78) ve (79) koşullarının sağladığını gösterir.

Şimdi Teorem 2.4.1.1. de tanımlanan $d^{(k)}(r,s,t,u) = \left\{d_n^{(k)}(r,s,t,u)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_p(Q)$ dizisini dikkate alalım. $A \in \left(l_p(Q): f\right)$ varsayımından $\forall k \in \mathbb{N}$ için $Ad^{(k)}(r,s,t,u) = \left\{g_{nk}^{r,s,t,u}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \in f$ yazabiliriz. Bu (82) şartının sağladığını gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.4.2.5. de f −limit yerine sıradan limit kullanırsak sıradaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.4.2.6. Kompleks sayılarda verilen keyfi bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi için aşağıdakiler sağlanır (Bişgin, 2020).

i. $A \in (l_1(Q): c)$ olması için gerek ve yeter şart (73) ve (77) şartlarının sağlamasıdır.

ii. $A \in \left(l_p(Q): c\right)$ olması için gerek ve yeter şart $1 < p < \infty$ iken (73), (78) ve (79) şartlarının sağlamasıdır.

iii. $A \in (l_\infty(Q): c)$ olması için gerek ve yeter şart (69), (73), (80) ve

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k \left|g_{nk}^{r,s,t,u} - \lambda_k\right| = 0$$

şartlarının sağlamasıdır.

Son olarak Lemma 1.3.2.14., Teorem 2.4.2.1., Teorem 2.4.2.2., Teorem 2.4.2.3., Teorem 2.4.2.4., Teorem 2.4.2.5., ve Sonuç 2.4.2.6. yardımı ile aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.4.2.7. $A = (a_{nk})$ kompleks değerlere sahip sonsuz bir matris olmak üzere $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için

$$c_{nk} = ra_{nk} + sa_{n-1,k} + ta_{n-2,k} + ua_{n-3,k}$$

olacak şekilde $C = (c_{nk})$ matrisi tanımlayalım. O halde $A = (a_{nk})$ matrisinin Teorem 2.4.2.1., Teorem 2.4.2.2., Teorem 2.4.2.3., Teorem 2.4.2.4., Teorem 2.4.2.5., ve Sonuç 2.4.2.6. den herhangi birinde gerekli olduğunda $C = (c_{nk})$ matrisi yer değiştirdiğinde $A = (a_{nk})$ matrisinin $\left(c(Q): l_p(Q)\right)$, $\left(c(Q): l_\infty(Q)\right)$, $\left(c(Q): c(Q)\right)$, $\left(l_1(Q): l_\infty(Q)\right)$, $\left(l_p(Q): l_\infty(Q)\right)$, $\left(l_\infty(Q): l_\infty(Q)\right)$, $\left(l_1(Q): l_p(Q)\right)$, $\left(l_1(Q): c(Q)\right)$, $\left(l_p(Q): c(Q)\right)$ ve $\left(l_\infty(Q): c(Q)\right)$ sınıflarından herhangi birine ait olması için gerekli ve yeterli koşullar belirlenir (Bişgin, 2020).

3. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Matris dönüşümleri teorisi Cesaro, Norlund, Borel, Riesz, tarafından elde edilen toplanabilme teorisinde büyük önem taşımaktadır. Birçok yazar sonsuz matrislerin etki alanını kullanarak yeni dizi uzayları tanımlamıştır. İlk olarak Kızmaz (1981), Δ fark matrisinin etki alanlarını inceleyerek $c(\Delta)$, $c_0(\Delta)$ ve $l_\infty(\Delta)$ uzaylarını tanımladı. Sonra Kirişci ve Başar (2010), Δ fark matrisinden daha genel olan $B(r,s)$ ikili band matrisinin etki alanlarını inceleyerek $\widehat{l_\infty}$, $\hat{c}$, $\widehat{c_0}$ ve $\widehat{l_p}$ uzaylarını tanımladı. $B(r,s)$ ikili band matrisinde $r=1$ ve $s=-1$ alınırsa Δ fark matrisi oluşur. Sönmez (2011), $B(r,s)$ ikili band matrisinden daha genel olan $B(r,s,t)$ üçlü band matrisinin etki alanlarını inceleyerek $l_\infty(B)$, $c(B)$, $c_0(B)$ ve $l_p(B)$ uzaylarını tanımlamıştır. $B(r,s,t)$ üçlü band matrisinde $t=0$ alınırsa $B(r,s)$ ikili band matrisi, $r=1$, $s=-2$, $t=1$ alınırsa Δ^2 ikinci mertebeden fark matrisi ve $r=1$, $s=-1$, $t=0$ alınırsa Δ fark matrisi oluşur. Daha sonra Bişgin (2020), $B(r,s,t)$ üçlü band matrisinden daha genel olan $Q(r,s,t,u)$ dörtlü band matrisinin etki alanlarını inceleyerek $c(Q)$, $c_0(Q)$, $l_\infty(Q)$ ve $l_p(Q)$ uzaylarını tanımladı. Dikkat edilirse $Q(r,s,t,u)$ dörtlü band matrisinde $r=1$, $s=-3$, $t=3$ ve $u=-1$ alınırsa Δ^3 üçüncü mertebeden fark matrisi, $u=0$ alınırsa $B(r,s,t)$ üçlü band matrisi, $r=1$, $s=-2$, $t=1$ ve $u=0$ alınırsa Δ^2 ikinci mertebeden fark matrisi, $t=0$, $u=0$ alınırsa $B(r,s)$ ikili band matrisi, $r=1$, $s=-1$, $t=0$ ve $u=0$ alınırsa Δ fark matrisi oluşur. Ayrıca etki alanı yardımı ile elde edilen bu yeni dizi uzaylarında, dizi uzayları teorisinde ele alınan problemlere yönelik çözüm aranmıştır.

4. ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Δ fark matrisinin, $B(r,s)$ ikili band matrisi, $B(r,s,t)$ üçlü band matrisi ve $Q(r,s,t,u)$ dörtlü band matrisinin etki alanları ile yeni dizi uzayları elde ettik. Elde ettiğimiz bu dizi uzayları teorisinde ele alanın başlıca problemlere çözüm aradık. Bundan sonraki çalışmalarda fark matrisi genişletilerek elde edilen bu sonuçlardan daha genel ve daha kapsamlı sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKÇA

Altay, B. and Başar, F. (2003). On the space of sequences p-bounded variation and related matrix mappings. *Ukrainian Mathematical Journal*, 55(1), 136-147.

Altay, B. and Başar, F. (2007). Certain topological properties and duals of the matrix domain of a triangle matrix in a sequence space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 336(1), 632-645.

Bilgiç, H., Furkan, H. and Altay, B. (2007). On the fine spectrum of the operator B(r,s,t) over c0 and c. *Computers and Mathematics with Applications*, 53, 989-998.

Bilgiç, H., Furkan, H. and Başar, F. (2010). On the fine spectrum of the operator B(r,s,t) over the sequnce spaces lp and bvp. *Computers and Mathematics with Applications,* 60(5), 2141-2152.

Bişgin, M.C. (2014). Bazı yeni dizi uzayları ve topolojik özellikleri. Doktora Tezi. Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kayseri, Türkiye, 66 s.

Bişgin, M.C. (2020). Four new sequence spaces obtained from the domain of quarduble band matrix operator. *İncelemede*.

Boos, B. (2001). Classical and modern methods in summability. New York: Oxford University Press.

Choudhary, B. and Nanda, S. (1989). Functional analysis with applications. New Delhi: Wiley.

Das, G. (1973). Banach and other limits. *Journal of the London Mathematical Society,* 2(7), 501-507.

Devi, S.L. (1976). Banach limits and infinite matrices. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(12), 397-401.

Erdmann, K.G. (2001). On l1-invariant sequence spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 262, 112-132.

Garling, D. (1967). The β- and γ- duality of sequence spaces. *In Mathematical Proveedings of the Cambridge Philosophical Society,* 63(4), 963-981.

Jarrah, A. and Malkowsky, E. (1990). BK space, bases and linear operators. *Rendiconti Circle Math,* 2(52), 177-191.

Kirişci, M. (2010). Genelleştirilmiş fark matrisi ve klasik dizi uzayları. Doktora Tezi. Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kayseri, Türkiye, 50 s.

Kirişçi, M. and Başar, F. (2010). Some new sequence spaces derived by the domain of generalized difference matrix. *Computers and Mathematics with Applications,* 60(5), 1299-1309.

Kızmaz, H. (1981). On certain sequence spaces. *Canadian Mathematical Bulletin,* 24(2), 169-176.

Lorentz, G.G. (1948). A cuntribution to the theory of divergent sequences. *Acta Mathematica,* 80, 167-190.

Maddox, I.J. (1988). Elements of functional analysis. cambridge: Cambridge University Press.

Musayev, B. ve Alp, M. (2000). Fonksiyonel analiz. Ankara: Balcı Yayınları.

Sönmez, A. (2011). Some new sequence spaces derived by the domain of the triple band matrix. *Computers and Mathematics with Applications,* 62(2), 641-650.

Stieglitz, M. and Tietz, H. (1977). Matrixtransformationen von folgenraumen eine ergebnisübersicht. *Mathematische Zeitschrift,* 154, 1-16.

Wilansky, A. (1984). Summability through functional analysis. *North-Holland Mathematics Studies,* 85.

ÖZGEÇMİŞ

Arzu UZUN, 15/10/1989'da Kars ilinin Arpaçay ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğretimini İstanbul'da tamamladı. 10/09/2007 tarihinde yerleşmeye hak kazandığı Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü 10/06/2011 tarihinde tamamladı. 2011 yılında Manisa Celal Bayar Üniversite'sinde Pedagojik Formasyon Eğitime Başlayıp 2012 tarihinde tamamladı. 21/09/2013 yılında Trabzon İlinin Çaykara ilçesinde Çaykara Anadolu Lisesi'nde Matematik Öğretmeni olarak göreve başladı. 2016 yılında Artvin ili Arhavi ilçesinde atandı. Şu anda Arhavi Ertuğrul Kurdoğlu Fen Lisesinde Görev yapmaktadır. 2017 yılında Rize ilinde Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda başladığı yüksek lisans eğitimine halen devam etmektedir.