FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜLERİ
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Aykut EMNİYET

BAZI YARIGRUP YAPILARI İÇİN YENİDEN YAZMA SİSTEMLERİ

Matematik ANABİLİM DALI

OSMANİYE – 2015

T.C
OSMANİYE KORKUT ATA
ÜNİVERSİTESİ

T.C
KAHRAMANMARAŞ
SÜTÇÜ İMAM
ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI YARIGRUP YAPILARI İÇİN YENİDEN YAZMA SİSTEMLERİ

Aykut EMNİYET

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

OSMANİYE
OCAK-2015

Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü "Matematik" Anabilim Dalı "13MB01" no'lu öğrencisi "Aykut EMNİYET" tarafından "Yrd.Doç.Dr. Basri ÇALIŞKAN" danışmanlığında hazırlanan "Bazı Yarıgrup Yapıları İçin Yeniden Yazma Sistemleri" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Yrd.Doç.Dr. Basri ÇALIŞKAN ………………...

Prof.Dr. Hüseyin YILDIRIM ………………...

Doç.Dr. Melis MİNİSKER ………………....

Yukarıdaki Jüri kararı Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..../......./........ tarih ve .... /……......sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç.Dr. A. Ali GÜRTEN
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, bu çalışma sonucunda elde edilmeyen her türlü bilgi ve ifade için ilgili kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını ve bu tezin Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Aykut EMNİYET

Üniversitesi	**: Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi**
Enstitüsü	**: Fen Bilimleri Enstitüsü**
Anabilim Dalı	**: Matematik Anabilim Dalı**
Tez Danışmanı	**: Yrd.Doç.Dr. Basri ÇALIŞKAN**
Tez Türü	**: Yüksek Lisans**
Tarihi	**: Ocak-2015**

Aykut EMNİYET

BAZI YARIGRUP YAPILARI İÇİN YENİDEN YAZMA SİSTEMLERİ

ÖZET

Bu tezde yarıgrup teorisindeki önemli cebirsel yapılardan bazılarının hangi durumlarda bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip olup olmadıkları incelenmiştir. S bir yarıgrup ve T de S nin bir büyük alt yarıgrubu olmak üzere, T nin bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşulun S nin de bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip olması gerektiği gösterilmiştir. Ayrıca S, T nin U ile bir ideal genişlemesi olmak üzere, eğer T ve U bir sonlu tam yeniden yazma sistem ile takdim edilebiliyorsa S nin de bir sonlu tam yeniden yazma sistem ile takdim edilebildiği gösterilmiştir. Son olarak M bir monoid, ρ da M üzerinde $M \times M$ nin bir alt monoidi olarak bir kongrüans olmak üzere, eğer ρ bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahipse ise M ve M/ρ nun da bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yeniden Yazma Sistemi, büyük alt yarıgrup, küçük genişleme, ideal genişlemesi, kongrüans genişlemesi.

University : **Osmaniye Korkut Ata University**
Institute : **Institute of Natural and Applied Sciences**
Science Programme : **Department of Mathematics**
Supervisor : **Assist. Prof. Dr. Basri ÇALIŞKAN**
Degree Awarded : **M.Sc.**
Date : **January-2015**

Aykut EMNİYET

REWRITING SYSTEMS FOR SOME SEMIGROUP CONSTRUCTIONS

ABSTRACT

Whether some important algebraic constructions in semigroup theory has a finite complete rewriting system in which conditions is investigated. Let S be a semigroup and let T be a a large subsemigroup of S. It is shown that T has a finite complete rewriting system if and only if S has a finite complete rewriting system. Let S be an ideal extension of T by U, it is shown that if T and U are presented by finite complete rewriting systems then S is presented by a finite complete rewriting system. Let M be a monoid and let ρ be congruece on M as a submonoid of $M \times M$, finally it is shown that if ρ has a finite complete rewriting system then so do M and M/ρ.

Key Words: Rewriting system, large subsemigroup , small extension, ideal extension, congruence extension.

Canım oğluma ve eşime…,

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır.

Yüksek Lisans tez konumun belirlenerek tez çalışmamın yürütülmesini üstlenen, çalışmalarım süresince değerli bilgi ve tecrübeleriyle katkılarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Basri ÇALIŞKAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim elemanlarına desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER

ŞEKİLLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

A^+	: A kümesinden oluşturulan en az bir uzunluklu kelimelerin kümesi
A^*	: $A^+ \cup \{1\}$
$w \rightarrow x$	: w kelimesinin x kelimesine indirgenmesi
$\rightarrow_R^*$	: R tarafından üretilen indirgeme bağıntısı
$\langle X \mid R \rangle$	: Monoid (ya da yarıgrup) takdimi
$[W']_{R_1}$	: W' kelimesinin R_1 bağıntısına göre denklik kümesi
$d_{R_1}(W_i)$	: W_i kelimesi ile başlayan indirgeme zincirlerinin boyu en büyük olan
$L(W_i)$	: W_i kelimesinin uzunluğu
$S \times S$	: S kümesinin kartezyen çarpımı
S/ρ	: S yarıgrubunun ρ kongrüansı ile bölüm yarıgrubu
S^1	: S yarıgrubuna $\{1\}$ elemanı eklenerek elde edilen monoid
S^0	: S yarıgrubuna $\{0\}$ elemanı eklenerek elde edilen sıfırlı yarıgrup
$\langle A \rangle$	: A kümesi tarafından doğrulan yarıgrup
B_X	: X kümesi üzerindeki tüm bağıntıların kümesi
$\rho[x]$	: x elemanının ρ kongrüansına göre denklik sınıfı
R^∞	: R denklik bağıntısının geçişmeli kapanışı
$R^\#$	: R yi içeren en küçük kongrüans
$Irr(R)$	: R yeniden yazma sistemine göre indirgenemez elemanların kümesi
$w_1 \equiv w_2$	: w_1 ve w_2 kelimeleri özdeş
$w_1 = w_2$	: $w_1\rho = w_2\rho$ (S yarıgrubunda aynı elemanı temsil eden kelimeler)
$st_R(w)$	: w kelimesinin indigemelerinden en uzun olanının boyu
$w_1 \equiv \alpha_1, \ldots, \alpha_n \equiv w_2$	: w_1 kelimesinden w_2 kelimesine sonlu bir dizi
$w_1 \equiv \alpha_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha_n \equiv w_2$	: w_1 kelimesinden w_2 kelimesine sonlu bir zincir

1. GİRİŞ

Yarıgrup yapılarının sonlu takdimi ve yeniden yazma sistemleri son yıllarda çok çalışılan bir konudur. Grup, monoid ve yarıgruplar için tanımlanan takdimlerin kullanım amaçları, sadece ait oldukları cebirsel yapıların mertebelerini bulmak veya bu cebirsel yapıların genel bir karakterizasyonunu yapmak değildir. Özellikle son çeyrek yüzyıl içerisinde, cebirsel yapıların sahip oldukları takdimleri kullanılarak bu yapılar üzerinde tanımlanan bazı özel *problemlerin* çözümleri için de geniş çalışma alanları oluşturulmuştur.

Problem, ele alınan bir soruya karşılık bu sorunun cevabını veren bir algoritmanın (veya metodun) bulunup bulunmamasıdır.

Cevabı "evet" veya "hayır" olan problemlere *karar verme problemleri* denir. Eğer verilen bir problemi çözmek için bir algoritma (veya metod) varsa bu karar verme problemine *çözülebilir*, böyle bir algoritma yoksa o zaman da bu karar verme problemine *çözülemez* denir.

Yirminci yüzyılın başlarında Max Dehn (Dehn, 1911) sonlu takdimli gruplar için üç temel karar verme problemini (kelime problemi, eşlenik problemi ve izomorfizma problemi) ortaya atmıştır. Yaklaşık aynı dönemlerde ise Axel Thue (Thue, 1914) bugün kelime problemi olarak bilinen problem için bir algoritma bulmaya çalışmıştır. 1930'larda mantıkçıların "algoritma"nın formal tanımını belirlemek için yaptığı girişimlere kadar Thue'nun çalışmaları uzun yıllar göz ardı edilmiştir. 1950 ve 60'larda yarı-Thue sistemler, bilgisayar bilimindeki matematiksel modeller için kullanışlı olduğundan ve bilgisayar hafızalarının boyutlarının ve hesaplama hızlarının artması ile konu büyük önem kazanmıştır. Bu çalışmalar, otomoto teorisinin gelişmesine yol açmış ve Knuth ve Bendix prosedürü (Knuth and Bendix, 1970) ile gelecek çalışmalara ilham vermiştir. 1985'te yeniden yazma teknikleri ve uygulamaları üzerine her iki yılda bir uluslararası bir konferans düzenlenmeye başlanmıştır.

Son yıllarda dizi yeniden yazma sistemleri monoidlerin takdimleri olarak kullanıldığından kelime problemi çözümü için sıklıkla çalışılmaktadır. G sonlu takdimli bir grup olsun. G nin doğurayları ile oluşturulan keyfi bir w kelimesinin bu grubun birimine eşit olup olmadığına karar veren bir algoritmanın varlığının araştırılması problemidir. Kelime problemi birçok grup takdimi için çözülebilirdir. Örneğin en fazla bir bağıntısı olan takdimler ve her bir a ve b doğuray elemanı için, $ab = ba$ bağıntısını içeren takdimler için kelime problemi çözülebilirdir. Ayrıca kelime problemi çözülebilen gruplara bir başka örnek olarak basit gruplar verilebilir.

Yeniden yazma sistemi, özellikle monoid ve yarıgruplardaki kelime problemleri için temel bir metottur. Çünkü bu tip yapılar gruplara göre biraz daha genel oldukları için (yani monoidler için bir elemanın tersinin ve yarıgruplar için de buna ek olarak birim elemanının bulunmaması) bu cebirsel yapılar üzerinde tanımlanacak kelime probleminin çözülebilirliği için gruplara göre başka özelliklerin de aranmasını gerektirmektedir. Örneğin, gruplarda elemanların temsilci kümesini oluşturarak verilen bir kelimenin bu kümedeki grubun birimine eşit olup olmadığı araştırılır. Ancak monoidlerde, bu temsilci kümesini oluşturabilmek için verilen bir kelimenin indirgendiği tek bir kelimenin bulunması gerekmektedir. Eğer indirgenen kelime tek değil ise temsilci kümesinden alınan iki eleman aynı kelimeyi temsil edeceğinden ki bu da temsilci kümesinin özelliğine uymaz, bu durumda monoid için kelime problemi çözülemezdir.

Kelime probleminin çözülüp çözülmediğini belirleyen kesin bir algoritma bulunmamaktadır. Ancak bazı durumlarda bu problemler çözülebilir olup bu durumlarda çözümde ”normal form” önemli bir rol oynamaktadır. Bir yeniden yazma sistemi, bir tek normal formun varlığını garanti eden confluent özelliğine ve her elemanın bir normal formunun olduğunu garanti eden Noetherian özelliğine sahipse bu sisteme bir sonlu tam yeniden yazma sistemi denir. Eğer bir monoid bir sonlu tam yeniden yazma sistemi ile takdim edilebilir ise bu monoid için kelime problemi çözülebilirdir. Daha fazla bilgi için (Squier, 1987) Theorem 2.1 e bakılabilir.

1993’te Groves ve Smith sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip grupların bir yarı-direkt çarpımının da sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip olduğunu ispatladılar (Groves and Smith, 1993). Wang bu sonucu gruplardan monoidlere genelleştirdi (Wang, 2008).

Ayrıca yine Groves ve Smith ilgili çalışmalarda bir *G* grubunda sonlu indeksli bir H alt grubu bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahipse *G* nin de bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip olduğunu gösterdiler (Groves and Smith, 1989).

2011 de Gray ve Malheiro, sonlu sayıda sol ve sağ ideali olan bir düzgün yarıgrup verildiğinde, eğer her maksimal alt grup bir sonlu tam yeniden yazma sistem ile takdim edilebiliyorsa, o zaman yargrubunda bir sonlu tam yeniden yazma sistem ile takdim edilebildiğini gösterdiler (Gray and Malheiro, 2011).

Hazırlanan bu tezin 2. bölümünde yarıgrup teorisinde kullanılan temel tanım ve teoremler, bağıntılar, denklikler, kongrüanslar, idealler ve takdimler ifade edilmiştir.

Tezin 3. bölümünde *S* bir yarıgrup ve *T* de *S* nin bir büyük alt yarıgrubu olmak üzere *T* nin bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşulun *S* nin de bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip olması gerektiği gösterilmştir.

4. bölümde ise *S*, *T* nin *U* ile bir ideal genişlemesi olmak üzere, eğer *T* ve *U* bir sonlu tam yeniden yazma sistem ile takdim edilebiliyorsa *S* nin de bir sonlu tam yeniden yazma sistem ile takdim edilebildiği gösterilmiştir.

S bir yarıgrup, ρ da S üzerinde bir kongrüans olsun. Bu durumda ρ, $S\times S$ nin bir alt yarıgrubudur, ayrıca $\rho[x]$ $x\in S$ elemanları için denklik sınıfları olmak üzere $\rho[x],\rho[y]\in S/\rho$ için

$$\left(\rho[x]\right)\left(\rho[y]\right)=\rho[xy]$$

işlemi ile S/ρ bir yarıgrup olur.

(Ayık vd., 2005a) da , eğer ρ sonlu takdimli ise S ve S/ρ nun da sonlu takdim edilebilir olduğunu gösterdiler. Üstelik ρ için verilen bir takdimden S ve S/ρ için bir takdim elde ettiler.

(Wang, 2007) deki makalesinde eğer ρ kongrüansı sonlu türetilmiş tip (FDT) özelliğine sahip ise bu durumda S nin de sonlu türetilmiş tip özelliğine sahip olduğunu gösterdi.

(Çalışkan, 2010) da S, ρ ve S/ρ yarıgrupları için periyodiklik, yerel sonlu takdim edilebilirlik ve artık sonluluk gibi bazı sonluluk koşullarını inceledi.

(Kuyucu, 2010) daki çalışmasında S, ρ ve S/ρ yarıgruplarının rankları arasındaki ilişkileri inceledi.

Bu tezin son bölümü olan 5. Bölümde ise eğer ρ bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahipse ise M ve M/ρ nun da bir sonlu sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip olduğu gösterilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan yarıgrup teorideki temel tanım ve teoremlerden bazıları ve bunlarla ilgili örnekler verilmiştir. Bu materyallerle ilgili daha detaylı bilgiler (Howie, 1995), (Ruskuc, 1995) ve (Sims, 1994) kaynaklarından elde edilebilir.

S boş kümeden farklı bir küme ve $\cdot$ işlemi S üzerinde bir ikili işlem olsun. Her $x, y \in S$ için $x \cdot y$ yazmak yerine basitlik adına xy yazılır. $(S, \cdot)$ ikilisi birleşme özelliğini sağlıyorsa, yani

$$\text{her } x, y, z \in S \text{ için } (xy)z = x(yz)$$

oluyorsa $(S, \cdot)$ ikilisine (ya da daha sade olarak S ye) bir *yarıgrup* denir. Eğer her $x, y \in S$ için $xy = yx$ ise o zaman S ye bir *değişmeli yarıgrup* denir. Her $s \in S$ için $1s = s1 = 1$ olacak şekilde S nin 1 elemanı varsa 1 e S nin birim elemanı ve S ye de *monoid* denir. Eğer S nin birim elemanı yoksa S kümesine S de olmayan ve 1 ile gösterilen bir eleman eklenerek elde edilen küme $S^1 = S \cup \{1\}$ ise her $s \in S$ için $1s = s1 = 1$ ve $1.1 = 1$ olarak tanımlanırsa S^1 birim elemanı 1 olan bir yarıgrup olur.

S en az iki elemanı olan bir yarıgrup olsun. Eğer her $s \in S$ için $0s = s0 = 0$ ise 0 elemanına S nin sıfır elemanı S ye de sıfırlı yarıgrup denir.

Bir S monoidinde sadece bir tek sıfır elemanı olduğu açıktır. Eğer S nin sıfır elemanı yoksa S kümesine, S de olmayan ve 0 ile gösterilen bir eleman eklenerek elde edilen küme $S^0 = S \cup \{0\}$ ise her $s \in S$ için $0s = s0 = 0$ ve $0.0 = 0$ olarak tanımlanırsa S^0 sıfır elemanı 0 olan bir yarıgrup olur.

S birim elemanlı bir yarıgrup (yani bir monoid) ve S nin birim elemanı $1 \in S$ olsun. Eğer her $x \in S$ için $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$ olacak şekilde bir $x^{-1} \in S$ elemanı varsa S ye bir *grup* denir.

Yarıgrup teorideki grup tanımı şu şekildedir, eğer bir S yarıgrubu

$$\text{her } x \in S \text{ için } xS = S \text{ ve } Sx = S$$

özelliğini sağlıyorsa S ye bir *grup* denir.

S bir yarıgrup ve T de S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer T çarpma altında kapalı ise T ye S nin bir *alt yarıgrubu* denir. A, S nin boş olmayan herhangi bir alt kümesi olmak üzere A yı içeren S nin en küçük alt yarıgrubuna A nın doğurduğu yarıgrup denir ve bu alt yarıgrup $\langle A \rangle$ ile gösterilir. A ya bu yarıgrubun doğuray kümesi denir.

S bir yarıgrup olsun. Eğer $SL \subseteq L$ $(RS \subseteq R)$ ise S nin boştan farklı S (R) alt kümesine S nin bir sol ideali (sağ ideali) denir. S bir yarıgrup olsun. S nin bir sağ ideali R eğer S nin $K \neq \emptyset$ bir sağ ideali için $K \subseteq R$ olduğunda $K = R$ oluyorsa R ye S nin *minimal sağ ideali* denir. Benzer şekilde minimal sol ideal tanımlanır. S nin bir I ideali eğer S nin bir $K \neq \emptyset$ ideali için $K \subseteq I$ olduğunda $K = I$ oluyorsa I idealine S nin *minimal ideali* denir.

S ve T iki yarıgrup, Φ, S den T ye bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in S$ için $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$ oluyorsa, Φ ye bir homomorfizm denir. T nin $\Phi(S) = \{\Phi(s) : s \in S\}$ alt kümesine Φ nin görüntü kümesi denir. Ayrıca $\Phi(S)$ nin T nin bir alt yarıgrubu olduğu açıktır.

S ve T iki yarıgrup, Φ, S den T ye bir homomorfizm olsun. Eğer Φ bire-bir ise Φ ye bir monomorfizm, Φ örten ise Φ ye bir epimorfizm ve Φ hem monomorfizm hem de epimorfizm ise Φ ye bir izomorfizm denir. Φ, S den T ye bir izomorfizm ise S, T izomorfiktir denir ve $S \cong T$ yazılır.

2.1 Bağıntılar, Denklikler ve Kongrüanslar

Eğer $X \neq \varnothing$ bir küme ise $X \times X$ in bir ρ alt kümesine X üzerinde bir *bağıntı* denir. X üzerindeki tüm bağıntıların kümesi genellikle B_X ile gösterilir. ρ ve σ, X üzerinde herhangi iki bağıntı olsun. Bu iki bağıntının bileşkesi,

$$\rho o \sigma = \rho\sigma = \{(x,y) : (\exists z \in X), (x,z) \in \rho \text{ ve } (z,y) \in \sigma\}$$

şeklinde tanımlanır ve bağıntıların bileşkesi işlemi ile B_X bir yarıgrup olup buna (X üzerindeki) *bağıntılar yarıgrubu* denir. B_X in birim elemanı,

$$1_X = \{(x,x) : x \in X\}$$

özdeşlik bağıntısıdır ve boş bağıntı da B_X in sıfır elemanıdır. Ters bağıntı,

$$\rho^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in \rho\}$$

olarak tanımlanır. $\rho\rho^{-1} = 1_x$ olmak zorunda değildir.

Tanım 2.1.1 ρ, X üzerinde bir bağıntı olsun.

i) Her $x \in X$ için $(x,x) \in \rho$ ise, ρ ya *yansımalı bağıntı* denir.

ii) Her $x, y \in X$ için $(x,y) \in \rho$ iken $(y,x) \in \rho$ oluyorsa ρ ya *simetrik bağıntı* denir.

iii) Her $x, y \in X$ için $(x, y) \in \rho$ ve $(y, x) \in \rho$ iken $x = y$ oluyorsa ρ ya *antisimetrik bağıntı* denir.

iv) Her $x, y, z \in X$ için $(x, y) \in \rho$ ve $(y, z) \in \rho$ iken $(x, z) \in \rho$ oluyorsa ρ ya *geçişken bağıntı* denir.

Eğer ρ, yansımalı, simetrik ve geçişken bir bağıntı ise ρ ya bir *denklik bağıntısı* denir (Howie, 1995).

Eğer ρ, X üzerinde bir denklik bağıntısı ise o zaman $(x, y) \in \rho$ yerine bazen $x\rho y$ veya $x \equiv y \pmod{\rho}$ yazılır. $\rho[x]$, kümesine ρ-sınıfı veya denklik sınıfı denir. X/ρ notasyonu ile tüm denklik sınıfları gösterilir.

Her $x \in X$ için, x in denklik sınıfı,

$$\rho[x] = \{y \in X : (x, y) \in \rho\}$$

ile tanımlanır.

R, X üzerinde herhangi bir denklik bağıntısı ise R yi içeren denklik bağıntılarının bir ailesi boş değildir, en azından $X \times X$ denklik bağıntısı vardır. Böylece X üzerinde tüm denklik bağıntılarının kesişimi de bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısı X üzerinde R yi içeren tek en küçük denklik bağıntısıdır. R, X üzerinde bir denklik bağıntı olsun,

$$R^{\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^{n}$$

kümesine R nin geçişmeli kapanışı denir. Daha fazla bilgi için (Howie, 1995) bakınız.

Bir S yarıgrubu üzerinde bir kongrüans, S üzerindeki denklik sınıflarının doğal çarpımı ile tanımlanan bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 2.1.2 S bir yarıgrup ve ρ da S üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. Her $s \in S$ ve her $(x,y) \in \rho$ için $(sx, sy) \in \rho$ ($(xs, ys) \in \rho$) ise, ρ ya *sol (sağ) uyumlu* denir. Her $(x,y),(x',y') \in \rho$ için $(xx', yy') \in \rho$ ise ρ ya *uyumlu* denir.

Sol uyumlu bir denklik bağıntısına *sol kongrüans*, sağ uyumlu bir denklik bağıntısına *sağ kongrüans*, uyumlu bir denklik bağıntısına da *kongrüans* denir (Howie, 1995).

Tanım 2.1.3 *R*, bir *S* yarıgrubu üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. *S* üzerinde *R* yi içeren en küçük kongrüansa *R nin doğurduğu kongrüans* denir ve $R^{\#}$ ile gösterilir. Bu durumda *R* bağıntısına, $R^{\#}$ kongrüansının *doğuray kümesi* denir (Howie, 1995).

S bir yarıgrup ve ρ da S üzerinde bir kongrüans olsun. Tüm denklik sınıflarının kümesi S/ρ üzerindeki çarpma her $\rho[x], \rho[y] \in S/\rho$ için

$$(\rho[x])(\rho[y]) = \rho[xy]$$

şeklinde tanımlanır. S/ρ bu çarpma işlemi ile bir yarıgruptur. S/ρ ya, S nin ρ ile elde edilen *bölüm yarıgrubu* denir. Dikkat edilirse yarıgruplar da, bölüm yapısı diğer cebirsel yapılardan farklılık gösterir. Bu farklılığın kaynağı da yarıgruplar arasındaki homomorfizmin çekirdeğinin bir kongrüans olmasıdır.

Örnek 2.1.4 S sonlu bir yarıgrup ve çarpım tablosu aşağıdaki gibi tanımlansın.

Çizelge 2.1.1 S Yarıgrubunun Çarpım Tablosu

.	e	a	f	b
e	e	a	f	b
a	a	e	b	f
f	f	b	f	b
b	b	f	b	f

Bu S yarıgrubu üzerinde bir ρ bağıntısı

$$\rho = \{(f,b),(b,f)\}$$

olarak seçilirse, ρ S yarıgrubu üzerinde bir kongrüans olup, ρ nun denklik sınıfları

$$\rho[e] = \{e\},\ \rho[a] = \{a\} \text{ ve } \rho[b] = \rho[f] = \{b, f\}$$

dır. Bu denklik sınıflarını $c = \{e\}$, $d = \{a\}$ ve $g = \{b, f\}$ ile gösterilirse S/ρ bölüm yarıgrubunun çarpım tablosu aşağıdaki gibi elde edilir.

Çizelge 2.1.2 S/ρ Bölüm Yarıgrubunun Çarpım Tablosu

.	c	d	g
c	c	d	g
d	d	c	g
g	g	g	g

Tanım 2.1.5 S ve T iki yarıgrup ve ρ da S üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer $S/\rho \cong T$ ise S ye T nin ρ ile bir *genişlemesi* denir. (Ayık, vd., 2005a)

Tanım 2.1.6 S bir yarıgrup ve I da S nin bir ideali olsun. S üzerinde tanımlı

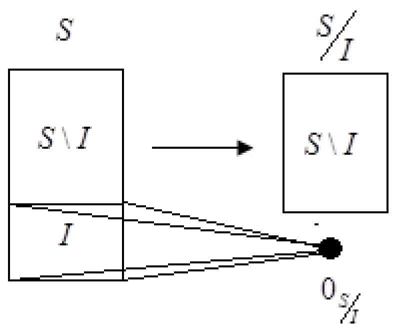
$$\rho_I = \{(s_1, s_2) : s_1, s_2 \in I \text{ ya da } s_1 = s_2\}$$

kongrüansına *Rees Kongrüans* denir (Ruskuc, 1995).

S/ρ_I bölüm yarıgrubu yerine genellikle basitlik adına S/I yazılır ve buna S yarıgrubunun I ideali ile *Rees Bölümü* denir. S/I bölüm yarıgrubu I elemanlarından ve her $s \in S \setminus I$ için $\{s\}$ elemanlarından oluşur. S/I üzerinde tanımlı çarpma işlemi ise

$$s_1 s_2 = \begin{cases} s_1 s_2, & \text{eğer } s_1, s_2, s_1 s_2 \in (S \setminus I) \text{ ise} \\ Is = I = sI, & \text{her } s \in I \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Dolayısıyla I , S/I bölüm yarıgrubunun sıfır elemanıdır.



Şekil 2.1.1 İdeal Genişlemesi

Tanım 2.1.7 S, T ve U yarıgruplar ve T' S nin bir ideali olsun. Eğer $T \cong T'$ ve S/T' Rees bölüm yarıgrubu için $S/T' \cong U$ ise S ye T nin U ile bir *ideal genişlemesi* denir (Ruskuc, 1995).

Eğer S T nin U ile bir ideal genişlemesi olacaksa, U mutlaka sıfır elemanına sahip olmalıdır, ayrıca S nin U ile ideal genişlemesi olan çok sayıda birbirine izomorfik olmayan yarıgruplar olabilir.

Tanım 2.1.8 S bir yarıgrup ve R de S üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. Eğer $x, y \in S$ için

$$x = urv \quad \text{ve} \quad y = usv$$

olacak şekilde $u, v \in S^1$ ve $(r, s) \in R$ veya $(s, r) \in R$ mevcut ise x ile y *temel R-bağlantılıdır* denir. Eğer her $1 \le i \le n-1$ için z_i ile z_{i+1} temel R -bağlantılı olacak şekilde sonlu bir

$$x = z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n = y$$

dizisi mevcut ise x ile y *R-bağlantılıdır* veya y, x in bir *R-sonucudur* denir (Howie, 1995).

Teorem 2.1.9 S bir yarıgrup ve R de S üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. S üzerindeki yeni bir ρ bağıntısı

$$(s, t) \in \rho \Leftrightarrow s = t \text{ veya } s \text{ ile } t \ R-\text{bağlantılıdır}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman ρ, S üzerinde R bağıntısını içeren en küçük kongrüanstır.

İspat: Her $s \in S$ $(s, s) \in \rho$ olduğundan ρ yansımalıdır. Her $(s, t) \in \rho$ için

$$s = z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n = t \text{ ise } t = z_n, z_{n-1}, \cdots, z_2, z_1 = s$$

olup ρ simetriktir. Her $(s,t),(t,u)\in\rho$ için

$$s=z_1,z_2,\ldots,z_n=t \text{ ve } t=v_1,v_2,\cdots,v_m=u$$

olup

$$s=z_1,z_2,\ldots,z_n,v_1,v_2,\ldots,v_m=u$$

olur. Yani $(s,u)\in\rho$ olup ρ geçişmelidir. Böylece ρ bir denklik bağıntısıdır. $(s,t)\in\rho$ ve $u,v\in S^1$ için

$$usv=uz_1v,uz_2v,\ldots,uz_nv=utv$$

ve her $1\le i\le n-1$ için uz_iv ile $uz_{i+1}v$ de temel R-bağlantılı olduğundan $(us,ut),(sv,tv)\in\rho$ olup ρ bir kongrüanstır. $R\subseteq\rho$ olduğu açıktır.

σ, S üzerinde $R\subseteq\sigma$ olacak şekildeki başka bir kongrüans olsun. $(s,t)\in\rho$ olsun. Eğer $s=t$ ise $(s,t)\in R\subseteq\sigma$ dır. Eğer $s\ne t$ ise sonlu

$$s=z_1,z_2,\ldots,z_n=t$$

dizisi vardır; öyle ki

$$z_i=u_ir_iv_i \text{ ve } z_{i+1}=u_is_iv_i$$

($u_i,v_i\in S^1$ ve $(r_i,s_i)\in R$ veya $(s_i,r_i)\in R$) dir. $R\subseteq\sigma$ ve σ (sağ/sol) uyumlu olduğundan $(z_i,z_{i+1})\in\sigma$ ve geçişmeli olduğundan $(s,t)\in\sigma$ olur. Böylece istenildiği gibi $\rho\subseteq\sigma$ olur (Howie, 1995). ■

2.2 Takdimler

Bu kısımda yarıgrup ve monoid takdimleri ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

A bir alfabe ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olmak üzere bir *yarıgrup takdimi* $\langle A | R \rangle$ ikilisidir. $\langle A | R \rangle$ tarafından tanımlanan yarıgrup ise ρ, R yi içeren A^+ üzerindeki en küçük kongrüans olmak üzere A^+ / ρ yarıgrubudur.

$\langle A | R \rangle$ takdiminde, A ya doğuray kümesi, R ye de tanımlayıcı ilişkiler (bağıntılar) kümesi denir. A ve R sonlu ise bu takdime sonlu takdim, S ye de sonlu takdim edilmiş denir.

$\langle A | R \rangle$ bir takdim ve $w_1, w_2 \in A^+$ olsun. $\alpha, \beta \in A^*, (u,v) \in R$ veya $(v,u) \in R$ için $w_1 \equiv \alpha u \beta,\ \ w_2 \equiv \alpha v \beta$ ise w_2, *R deki bir ilişki bir kez uygulanarak w_1 den elde edilmiştir* denir. $w_1 \equiv w_2$ veya α_{i+1}, R deki bir ilişki bir kez uygulanarak α_i elde edilmiş olmak üzere kelimelerin sonlu bir

$$w_1 \equiv \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \equiv w_2$$

dizisi varsa w_2, w_1 *den elde edilmiştir* denir. Ayrıca $w_1 = w_2$, $\langle A | R \rangle$ nin veya sadece R nin *bir sonucudur* da denir (Howie, 1995).

Teorem 2.2.10 $\langle A | R \rangle$ bir takdim, ρ da R yi içeren en küçük kongrüans, $S = A^+ / \rho$ ve $w_1, w_2 \in A^+$ olsun. O zaman $w_1 \rho = w_2 \rho$ olması için gerek ve yeter koşul $w_1 = w_2$ nin $\langle A | R \rangle$ nin bir sonucu olmasıdır.

İspat: İspatı için (Ruskuc, 1995) e bakınız. ■

Teorem 2.2.11 S, $A \subseteq S$ tarafından doğrulan bir yarıgrup ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olsun. O zaman $\langle A | R \rangle$ nin S için bir takdim olabilmesi için gerek ve yeter koşul,

i) R deki tüm ilişkiler S de sağlanır,

ii) Eğer $u, v \in A^+$ için $u = v$ S de sağlanıyor ise $u = v$ R nin bir sonucudur

İspat : İspat için (Ruskuc, 1995) e bakınız. ■

Tanım 2.2.12 A bir alfabe, A^* A üzerindeki serbest monoid, $R \subseteq A^* \times A^*$, ρ da R nin doğurduğu kongrüans olsun. $\langle A | R \rangle$ ikilisine bir monoid takdimi denir. A^*/ρ bölüm monoidine de $\langle A | R \rangle$ takdiminin tanımladığı monoid denir. Eğer M bir monoid ve $M \cong A^*/\rho$ ise, $\langle A | R \rangle$ ye M nin bir takdimi denir.

M bir monoid ve $\langle A | R \rangle$ de M nin bir monoid takdimi olsun. O zaman $e \notin A$ için $\left\langle A, e \,\middle|\, \overline{R},\ ae = a,\ ea = a,\ e^2 = e,\ (a \in A) \right\rangle$ yarıgrup takdimi M yi bir yarıgrup gibi tanımlar. Burada $\overline{R}$, R den $r = 1$ ya da $1 = s$ şeklindeki ilişkilerin $r = e$ ya da $e = s$ ile değiştirilmesiyle elde edilmiştir.

Her yarıgrup takdimi aynı zamanda bir monoid takdimidir. P herhangi bir S yarıgrubunu tanımlayan bir yarıgrup takdimi ise, P bir monoid takdimi olarak düşünüldüğünde P, $S \cup \{e\}$ gibi bir monoidi tanımlar. S nin içinde birim eleman varsa artık bu $S \cup \{e\}$ de birim eleman olmayacaktır (Howie, 1995).

Tanım 2.2.13 S bir yarıgrup ve T de S nin bir alt yarıgrubu olsun. $S \setminus T$ nin kardinalitesine T nin S deki *indeksi* denir ve $[S : T]$ ile gösterilir. Eğer T nin S deki indeksi sonlu ise S ye T nin bir *küçük genişlemesi* denir (Ruskuc, 1998).

2.3 Yeniden Yazma Sistemi

Yeniden yazma sistemi, özellikle monoid ve yarıgruplardaki kelime problemleri için temel bir metottur. Bu yapı her ne kadar matematiğin cebirsel kısmında çalışılan bir konu olsa da, anlamı aynı fakat dili farklı olan değişik başlıklar altında birçok bilim dalında da bulunabilir.

Sonlu bir X alfabesi için, X^* bu alfabedeki harflerden oluşan bütün kelimelerin kümesi ve ε boş kelime olsun. X üzerindeki *yeniden yazma kuralı* aslında $\left(l,r\right)\in X^*\times X^*$ şeklindeki sıralı çiftlerdir. Bu kural $(l\rightarrow r)$ şeklinde de gösterilebilir. Buradaki l kelimesi *sol taraf*, r kelimesi ise *sağ taraf* diye adlandırılır. *Yeniden yazma sistemi* X *üzerindeki yeniden yazma kurallarının bir kümesidir* ve bu sistem R ile gösterilir. X^* kümesindeki kelimeler arasındaki bu bağıntı ($\rightarrow_R$) için aşağıdaki kural tanımlanır:

X üzerindeki u ve v herhangi iki kelime olmak üzere, $u\rightarrow_R v$ olması için gerek ve yeter koşul $x,y\in X^*$ ve $\left(l\rightarrow r\right)\in R$ için $u=xly$ ve $v=xry$ olmasıdır.

Tanım 2.3.14 Bir $u\in X^*$ kelimesi için $u\rightarrow_R v$ olacak şekilde bir $v\in X^*$ kelimesi varsa bu u kelimesine *indirgenir kelime* denir. Aksi durumda ise (yani $u\rightarrow_R v$ olacak biçimde bir v kelimesi yoksa) bu u kelimesine *indirgenemez kelime* denir (Karpuz, 2009).

Önerme 2.3.15 Tanımlanan bu $\rightarrow_R$ bağıntısının yansımalı, geçişmeli kapanışı olan $\rightarrow_R^*$ kuralı, aslında R tarafından doğrulan bir indirgeme bağıntısıdır.

İspat: İspat için **(**Book and Otto, 1993) e bakınız. ■

Tanım 2.3.16 $u, v \in X^*$ için eğer $u \rightarrow_R^* v$ bağıntısı varsa ve v kelimesi indirgenemez ise, bu v kelimesine u kelimesinin *normal formu* denir (Karpuz, 2009).

Tanım 2.3.17 Bu $\rightarrow_R$ bağıntısının yansımalı, simetrik ve geçişmeli kapanışı ki bu $\leftrightarrow_R^*$ ile gösterilir, R tarafından üretilen bir *Thue kongrüans*tır (Karpuz, 2009). Bir $w \in X^*$ kelimesi için w nin kongrüans sınıfı,

$$\left\{ u \in X^* \ : \ u \leftrightarrow_R^* w \right\}$$

olup bu denklik sınıfı $[w]_R$ ile gösterilir. Ayrıca $X^* / \leftrightarrow_R^*$ bütün kongrüans sınıflarının kümesini gösterir. u ve v kelimelerinin kongrüans sınıflarının çarpımı

$$[u]_R [v]_R = [uv]_R$$

şeklindedir. Bu çarpma işlemi birleşme özelliğini sağlar ve $[\varepsilon]_R$ birim elemandır. Böylece $X^* / \leftrightarrow_R^*$ bir monoiddir ve $\langle X \,|\, R \rangle$ çifti bir *monoid takdimidir*. Bu takdimdeki doğuray kümesi X sonlu ise bu monoide sonlu doğuraylı monoid, hem X hem de R sonlu ise o zaman bu monoide *sonlu takdimli monoid* denir (Karpuz, 2009).

Bir R yeniden yazma sistemi için kelime problemi, *verilen iki* u ve v kelimeleri için $u \leftrightarrow_R^* v$ nin sağlanıp-sağlanmamasıdır. Yani bu iki kelimenin, belli bir kural altında birbirine denk olup olmamasının incelenmesidir.

Örnek 2.3.18 $X = \{ x, y \}$, $R = \{ xx^{-1} \rightarrow e,\ x^{-1}x \rightarrow e,\ yy^{-1} \rightarrow e,\ y^{-1}y \rightarrow e \}$ olsun. R, $x > y > x^{-1} > y^{-1}$ sıralaması ile X^* üzerinde bir yeniden yazma sistemidir.

Ayrıca $u = xyx^{-1}xy^{-1}x^{-1}y^{-1}yxy$ olsun. R yi kullanarak u yu indirgemenin değişik yolları vardır. Birincisi

$$xy\underline{x^{-1}x}y^{-1}x^{-1}y^{-1}yxy \to_R x\underline{yy^{-1}}x^{-1}y^{-1}yxy \to_R \underline{xx^{-1}}y^{-1}yxy$$
$$\to_R \underline{y^{-1}y}xy \to_R xy$$

ve ikincisi ise

$$xyx^{-1}xy^{-1}x^{-1}\underline{y^{-1}y}xy \to_R xyx^{-1}xy^{-1}\underline{x^{-1}x}y \to_R xyx^{-1}x\underline{y^{-1}y}$$
$$\to_R xy\underline{x^{-1}x} \to_R xy$$

dir. Bu iki indirgemenin sonucunda da aynı indirgenmiş eleman xy elde edildi.

Örnek 2.3.19 $X = \{a,b\}$ ve $<<$, X^* üzerinde uzunluk ve alfabetik sıralama olmak üzere $R = \{a^2 \to e, b^3 \to e, (ab)^3 \to e\}$, $a << b$ ile X^* üzerinde bir yeniden yazma sistemidir. $u = a^2babab$ olsun. R yi kullanarak u nun indirgemesi değişik yollardan yapılabilir.

Birincisi,

$$a\underline{ababab} \to_R a$$

ve ikincisi ise

$$\underline{aa}babab \to_R babab$$

dir. Bu iki indirgemenin sonucunda farklı indirgenmiş elemanlar a ve $babab$ elde edildi.

Şimdiki tanımlar bir yeniden yazma sisteminde normal formun varlığını ve tekliğini garanti eden tanımlar olacaktır.

Tanım 2.3.20 Bir yeniden yazma sistemi R için eğer her $n \geq 1$ için $w_n \to w_{n+1}$ olacak şekilde sonsuz bir zincir bulunmuyorsa R ye *Noetherian* ya da bir *sonlanan yeniden yazma sistemi* denir. Herhangi $u, v, w \in X^*$ için $u \to_R^* v$ ve $u \to_R^* w$ iken $v \to_R^* z$ ve $w \to_R^* z$ olacak şekilde bir $z \in X^*$ kelimesi varsa R ye confluent denir. Hem *Noetherian* hem de confluent özelliklerini sağlayan yeniden yazma sistemine *tam (complete ya da convergent) yeniden yazma sistemi* denir (Karpuz, 2009).

Tam sistemler kullanılarak aşağıdaki önemli sonuç elde edilir:

Teorem 2.3.21 Eğer R yeniden yazma sistemi tam ise, bu sistem içindeki her bir kelime tek bir normal forma sahip olduğundan, bu R yeniden yazma sistemi *çözülebilir kelime problemine* sahiptir.

İspat: İspat için (Karpuz, 2009) a bakınız. ■

Teorem 2.3.21 in ispatında düşünce tarzı, verilen sistem tam olduğu için kelimelerin sonlu sayıda adımla başka kelimelere indirgendiği ve indirgenen bu kelimelerin de birbirine eşit olduğu şeklindedir. Eğer indirgenen bu kelimeler birbirine eşit olmasaydı, bu durumda bir kelime farklı iki şekilde ifade edilemeyeceğinden, bu sistem için kelime problemi çözülemez olurdu.

Tanım 2.3.22 *S* bir küme olsun. *S* üzerindeki bir M çoklu kümesi, elemanları *S* nin elemanlarından oluşan $\{s \in S : M(s) > 0\}$ kümesi sonlu olacak şekildeki $M : S \to \mathbb{N}$ tanımlanan bir fonksiyondur. Daha açık bir ifadeyle $n_i = M(s_i)$, $(1 \leq i \leq k)$ elemanların çokluğunu veren bir doğal sayı olmak üzere

$$M = \left[\underbrace{s_1, \ldots, s_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{s_k, \ldots s_k}_{n_k} \right]$$

şeklinde gösterilir.

Bir *S* kümesi üzerindeki herhangi bir $\succ$ sıralama *S* üzerindeki (sonlu) çoklu kümeler üzerindeki bir $\succ_{mult}$ sıralamaya aşağıdaki şekilde genişletilebilir:

i) $M \neq N$

ii) Her nerede $N(x) > M(x)$ ise bu durumda $y \succ x$ olacak şekilde en az bir y elemanı vardır öyle ki $M(y) > N(y)$ dir.

Yani, bir çoklu küme sıralamasına göre, bir çoklu kümenin herhangi bir elemanı $\succ$ sıralamasına göre daha küçük olan sonlu sayıdaki elamanla yer değiştirebilir.

Sonlu çoklu kümeler üzerindeki bir çoklu küme sıralaması $\succ_{mult}$ sonlanan bir sıralama olması için gerek yeter koşul $\succ$ sıralamasının sonlanan olmasıdır. Bu konuyla ilgili daha detaylı bilgilere (Terese, 2003) e bakılabilir.

Tanım 2.3.23 ρ , *S* yarıgrubu üzerinde bir kongrüans ve $(x_1, x_2) \in \rho$ olsun. Her bir *i* =1, 2 için $\varphi_i(x_1, x_2) = x_i$ olarak tanımlanan dönüşüme ρ dan *S* ye *i. izdüşüm* denir.

Tanım 2.3.24 ρ , *S* yarıgrubu üzerinde bir kongrüans ve *X* de ρ için bir doğuray kümesi olsun. Eğer her $(x, y) \in X$ için (x, x), $(y, y) \in X$ ise *X* kümesine ρ için bir *yansımalı doğuray kümesi* denir (Ayık, vd., 2005a).

Yardımcı Teorem 2.3.25 *S* bir yarıgrup ve ρ da *S* üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer *X* kümesi, ρ için bir doğuray kümesi ise φ_i de *i*. izdüşüm olmak üzere $\varphi_i(X)$ (*i* =1, 2) *S* için bir doğuray kümesidir.

İspat: İspat için (Ayık, vd., 2005a) Lemma 2.1 e bakınız. ■

Önerme 2.3.26 ρ, S yarıgrubu üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer ρ sonlu doğuraylı ise ρ için sonlu yansımalı bir doğuray kümesi vardır.

İspat: İspat için (Ayık, vd., 2005a) Proposition 2.3 e bakınız. ■

3. MONOİDLERİN KÜÇÜK GENİŞLEMELERİ İÇİN YENİDEN YAZMA SİSTEMLERİ

Bu bölümde S bir monoid ve T de S nin bir sonlu indeksli alt monoidi olmak üzere eğer T bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahipse T nin bir küçük genişlemesi S monoidinin de bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip olduğu gösterilmiştir. Daha detaylı bilgi için (Wang, 1998) e bakılabilir.

Teorem 3.27 S bir yarıgrup, A S nin bir doğuray kümesi ve T, S nin bir büyük alt yarıgrubu olsun.

$$X = \left\{ s_1 a s_2 : s_1, s_2 \in S^1 \setminus T, a \in A, s_1 a, s_2 a \in T \right\}$$

kümesi T için bir doğuray kümesidir.

İspat: İspat için (Campbell vd., 1995) Theorem 3.1 e bakınız. ■

Teorem 3.28 S bir yarıgrup ve T, S nin bir büyük alt yarıgrubu olsun. S nin sonlu doğuraylı olması için gerek ve yeter koşul T nin sonlu doğuraylı olmasıdır (Ruskuc,1998).

İspat $(\Rightarrow)$ Teorem 3.27 den $X = \left\{ s_1 a s_2 : s_1, s_2 \in S^1 \setminus T, a \in A, s_1 a, s_2 a \in T \right\}$ kümesi T için bir doğuray kümesidir. Eğer A ve $S \setminus T$ sonlu ise X in de sonlu olduğu açıktır.

$(\Leftarrow)$ Kabul edilsin ki B, T için bir sonlu doğuray kümesi olsun. O zaman $Y = B \cup (S \setminus T)$ kümesi S için bir doğuray kümesidir. Eğer B ve $S \setminus T$ sonlu ise Y de sonludur. ■

Teorem 3.29 Bir sonlu takdimli yarıgrubun bir küçük genişlemesi de sonlu takdimlidir (Ruskuc, 1998).

İspat: *T*, $\langle A | R_1 \rangle$ takdimine sahip sonlu takdimli bir yarıgrup ve *S*, *T* nin bir küçük genişlemesi olsun. Teorem 3.28 de olduğu gibi *S*, $A \cup (S \setminus T)$ (sonlu) kümesi tarafından doğurulur ve *S* için bu doğuray kümesinin elemanlarına göre bir takdim bulunabilir.

$s \in S \setminus T$ ve $a \in A$ herhangi iki eleman olsun. *sa* elemanı ya *T* de dir, ki bu durumda *sa* A^+ daki bir kelime ile temsil edilir, ya da $S \setminus T$ ye aittir. $\rho(s,a) \in A^+ \cup (S \setminus T)$, $sa = \rho(s,a)$ bağıntısı *S* de sağlanacak şekilde bir kelime olsun. (Burada *A* ve ($S \setminus T$) yi formal doğuray kümeleri olarak düşünülmektedir. *S* nin alt kümeleri olarak değil.) Benzer şekilde $\lambda(a,s) \in A^+ \cup (S \setminus T)$ elemanını $as = \lambda(a,s)$ bağıntısı *S* de sağlanacak şekilde seçelim. Son olarak, herhangi iki $s,t \in S \setminus T$ için $\pi(s,a) \in A^+ \cup (S \setminus T)$ yi $st = \pi(s,t)$ bağıntısı *S* de sağlanacak şekilde seçilsin.

İddia $P = \langle A, S \setminus T | R_1,$ (1)

$$sa = \rho(s,a) \quad (2)$$

$$as = \lambda(a,s) \quad (3)$$

$$ss' = \pi(s,s') \quad (4)$$

$$\left(s, s' \in (S \setminus T), a \in A\right)\rangle$$

takdimi *S* yi tanımlar.

$$R_2 = \left\{\left(sa = \rho(s,a)\right), \left(as = \lambda(a,s)\right), \left(ss' = \pi(s,s')\right) : s, s' \in (S \setminus T), a \in A\right\}$$

olarak gösterilsin. Bağıntıların tümünün S de sağlandığı açıktır. $u,v \in \left(A \cup \left(S \setminus T\right)\right)^{+}$ elemanları $u = v$ bağıntısı S de sağlanacak şekilde iki keyfi eleman olsun. $u = v$ nin P nin bir sonucu olduğu gösterilmelidir. İlk olarak, dikkat edilirse (2), (3) ve (4) bağıntılarını kullanılarak $u = u_1$ ve $v = v_1$ bağıntılarının P nin bir sonucu olacak şekilde $u_1, v_1 \in A^{+} \cup \left(S \setminus T\right)$ kelimeleri bulunabilir. $u_1 = v_1$ bağıntısı S de sağlandığından ya $u_1 \equiv v_1 \in \left(S \setminus T\right)$ ya da $u_1, v_1 \in A^{+}$ olmalıdır. İlk durumda, $u = u_1 \equiv v_1 = v$, P nin bir sonucudur. İkinci durumda ise $u_1 = v_1$ T de sağlanır ve böylece R_1 bağıntıları kullanılarak elde edilebilir ve yine $u = u_1 \equiv v_1 = v$, P nin bir sonucu olarak elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 3.30 Herhangi bir $U \in \left(A \cup \left(S \setminus T\right)\right)^{*}$ için $U \to_{R_2}^{*} U'$ olacak şekilde bir $U' \in A^{*} \cup \left(S \setminus T\right)$ elemanı vardır.

İspat: $U \in \left(A \cup \left(S \setminus T\right)\right)^{*}$ olsun. Bu durumda $U_1, \ldots, U_{n+1} \in A^{*}$ ve $s_1, \ldots s_n \in S \setminus T$ olmak üzere $U \equiv U_1 s_1 U_2 s_2 \cdots U_n s_n U_{n+1}$ şeklinde olup, burada $U_i \equiv U_i' a$ ya da $U_i \equiv aU_i''$, $i = 1, 2, \ldots n+1$ şeklindedir. Dolayısıyla $U \equiv U_1' a s_1 U_2' a s_2 \cdots U_n' a s_n U_{n+1}'$ (ya da $U \equiv aU_1' s_1 a U_2' s_2 \cdots U_n' s_n a U_{n+1}'$) kelimesinde ortaya çıkan as_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ (ya da $s_j a$, $j = 1, 2, \ldots, n$) elemanları R_2 bağıntılarının bir sonucu olduğundan $U \to_{R_2}^{*} U'$ olacak şekilde bir $U' \in A^{*} \cup \left(S \setminus T\right)$ olduğu görülür. ■

Teorem 3.31 S, T nin bir küçük genişlemesi olsun. Eğer T bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip ise S de bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahiptir.

İspat: R_1 in A üzerinde bir sonlu tam yeniden yazma sistemi olduğunu kabul edilsin. $R = R_1 \cup R_2$ olsun. R'nin $A \cup (S \setminus T)$ üzerinde bir sonlu tam yeniden yazma sistemi olduğu gösterilmelidir.

Önce R nin confluent olduğu gösterilmelidir.
$U, V, W \in (A \cup (S \setminus T))^*$ olmak üzere $U \to_R^* V$ ve $U \to_R^* W$ olsun. Yardımcı Teorem 3.30 den dolayı $V \to_R^* V'$ ve $W \to_R^* W'$ olacak şekilde $V', W' \in A^* \cup (S \setminus T)$ kelimeleri vardır.

S de $V' = W'$ bağıntısı S de sağlandığından ya $V' \equiv W' \in S \setminus T$ olur ya da $V', W' \in A^*$ için $V' = W'$, T de sağlanır. İkinci durumda $[V']_{R_1} = [W']_{R_1}$ olduğu görülür. R_1, A üzerinde bir sonlu tam yeniden yazma sistemi olduğundan $V' \to_{R_1}^* X$ ve $W' \to_{R_1}^* X$ olacak şekilde bir indirgenemez $X \in A^*$ kelimesi mevcuttur. Böylece $V \to_R^* X$ ve $W \to_R^* X$ olur. Dolayısıyla R confluenttir.

R nin Noetherian olduğunu göstermek için $A \cup (S \setminus T)^*$ üzerinde sonsuz azalan bir zincirin olmadığı gösterilmelidir. Eğer $W \to_R V$ ise $W > V$ olacak şekilde $(A \cup (S \setminus T))^*$ üzerinde bir $>$ sıralama bağıntısı tanımlansın.

Herhangi bir $W \in A \cup (S \setminus T)^*$ için $W \equiv W_1 s_1 W_2 s_2 \ldots W_n s_n W_{n+1}$ olsun. Burada, $W_1, \ldots, W_{n+1} \in A^*$, $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S \setminus T$ dir.

$\phi_1, \phi_2, \ldots$ fonksiyonları $(A \cup (S \setminus T))^*$ kümesinden negatif olmayan tamsayılar kümesine aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\phi_1(W) = n,$$

$$\phi_{2i}(W) = d_{R_1}(W_i),$$

$$\phi_{2i+1}(W) = L(W_i),$$

$$\phi_j(W) = 0 \ .$$

Burada $1 \le i \le n+1$ ve $j > 2n+3$ dır.

$W, X \in \left(A \cup (S \setminus T)\right)^*$ iki kelime olsun. Eğer bir k için $\phi_k(W) > \phi_k(X)$ ve her $j < k$ için $\phi_j(W) = \phi_j(X)$ ise $W > X$ olarak tanımlansın.

Bir sonsuz

$$X_1 > X_2 > X_3 > \cdots$$

zinciri olduğu varsayılsın. $\phi_1(X_1) \ge \phi_1(X_2) \ge \phi_1(X_3) \ge \cdots$ olacağından

$$\phi_1\left(X_{k_1}\right) = \phi_1\left(X_{k_1+1}\right) = \phi_1\left(X_{k_1+2}\right) = \cdots$$

eşitliğini sağlayan bir k_1 tamsayısı olmak zorundadır.

Bu durumda,

$$\phi_2\left(X_{k_1}\right) \ge \phi_2\left(X_{k_1+1}\right) \ge \phi_2\left(X_{k_1+2}\right) \ge \cdots$$

olur. Öyle bir $k_2 \ge k_1$ tamsayısı vardır ki

$$\phi_2\left(X_{k_2}\right) = \phi_2\left(X_{k_2+1}\right) = \phi_2\left(X_{k_2+2}\right) = \cdots$$

olur. Böylece

$$\phi_3\left(X_{k_2}\right) \geq \phi_3\left(X_{k_2+1}\right) \geq \phi_3\left(X_{k_2+2}\right) \geq \cdots$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek

$$\phi_j\left(X_{k_j}\right) = \phi_j\left(X_{k_j+1}\right) = \phi_j\left(X_{k_j+2}\right) = \cdots \ , \qquad (j = 1, 2, ..., m)$$

olacak şekilde $k_m \geq k_{m-1} \geq \cdots \geq k_2 \geq k_1$ tamsayıları bulunabilir.

Dolayısıyla $j = 1, 2, ..., m$ için $\phi_j\left(X_{k_m}\right) = \phi_j\left(X_{k_m+1}\right)$ olur.

Her i için $\phi_1\left(X_i\right) \leq \phi_1\left(X_1\right)$ olduğundan, $j > 2\phi_1\left(X_1\right) + 3$ olmak üzere her i için $\phi_j\left(X_i\right) = 0$ olur. Şimdi $m = 2\phi_1\left(X_1\right) + 3$ olsun. Bu durumda her j için $\phi_j\left(X_{k_m}\right) = \phi_j\left(X_{k_m+1}\right)$ olur. Bu $X_{k_m} > X_{k_{m+1}}$ için imkansızdır. Dolayısıyla bir sonsuz $X_1 > X_2 > X_3 > \cdots$ zinciri yoktur.

Şimdi $W \to_R V$ ise $W > V$ olduğu gösterilmelidir.

$W_i \in A^*$ ve $s_j \in S \setminus T$ olmak üzere $W \equiv W_1 s_1 W_2 s_2 \cdots W_n s_n W_{n+1}$ olsun. V yi elde etmek için W ya bir $r \in R$ kuralı uygulandığı varsayılsın. Eğer $r \in R_1$ ise bir bu bağıntının W_i alt kelimesine uygulanması gerekir. Bu durumda $\phi_j\left(W\right) = \phi_j\left(V\right)$ $(1 \leq j < 2i)$ ve $\phi_{2i}\left(W\right) > \phi_{2i}\left(V\right)$ olur. Dolayısıyla $W > V$ dir. Eğer $r = (s_i s_{i+1}, \pi(s_i, s_{i+1}))$, ya da $\rho\left(s_i, a\right) \in A^*$ olmak üzere $r = (s_i a, \rho(s_i, a))$, ya da $\lambda\left(a, s_i\right) \in A^*$ olmak üzere $r = (a s_i, \lambda(a, s_i))$ ise bu durumda $\phi_1\left(W\right) > \phi_1\left(V\right)$ ve dolayısıyla $W > V$ olur.

Eğer $s_i' \in S \setminus T$ olmak üzere $r = (s_i a, s_i')$ ise, bu durumda $W_{i+1} \equiv aW'_{i+1}$ olmak üzere

$$W \equiv W_1 s_1 \ldots W_i s_i a W'_{i+1} s_{i+1} \ldots W_{n+1},$$
$$V \equiv W_1 s_1 \ldots W_i s_i' W'_{i+1} s_{i+1} \ldots W_{n+1}$$

olur.

Böylece

$\phi_j(W) = \phi_j(V)$ $(1 \leq j < 2i+2)$, $\phi_{2i+2}(W) = d_{R_1}(aW'_{i+1}) \geq d_{R_1}(W'_{i+1}) = \phi_{2i+2}(V)$ ve $\phi_{2i+3}(W) = L(aW'_{i+1}) > L(W'_{i+1}) = \phi_{2i+3}(V)$ olur. Dolayısıyla $W > V$ dir.

Benzer şekilde, eğer $s_i' \in S \setminus T$ olmak üzere $r = (as_i, s_i')$ ise $W > V$ olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.32 *S*, *T* nin bir küçük genişlemesi olsun. Eğer *S* bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip ise *T* de bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahiptir.

İspat: İspat için (Wong and Wong) Theorem 1.1 e bakınız. ■

Sonuç 3.33 *S*, *T* nin bir küçük genişlemesi olsun. *S* nin bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul *T* nin bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip olmasıdır.

4. İDEAL GENİŞLEMELERİ İÇİN YENİDEN YAZMA SİSTEMLERİ

Bu bölümde *S*, *T* nin *U* ile bir ideal genişlemesi olmak üzere, eğer *T* ve *U* bir sonlu tam yeniden yazma sistem ile takdim edilebiliyorsa ise *S* nin de bir sonlu tam yeniden yazma sistem ile takdim edilebildiği gösterilmiştir. Daha detaylı bilgi için (Gray and Malheiro, 2011) e bakılabilir.

İlk olarak bir sonlu takdimli yarıgrubun, başka bir sonlu takdimli yarıgrup ile olan ideal genişlemesinin de sonlu takdimli olduğunu belirten teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.34 *S*, *T* ve *U* yarıgruplar ve *S*, *T* nin *U* ile bir ideal genişlemesi olsun. Eğer *T* ve *U* yarıgrupları sonlu takdimli iseler S de sonlu takdimlidir (Ruskuc, 1999).

İspat: *T* ve *U* yarıgruplarının sırasıyla $\langle A|R\rangle$ ve $\langle B|Q\rangle$ gibi sonlu takdimlere sahip olduğu ve S nin *T* nin *U* ile bir ideal genişlemesi olduğu kabul edilsin. Bu *T* nin *S* nin bir idealine izomorfik olduğu ve *U* nun da S/T Rees bölüm yarıgrubuna izomorfik olduğu anlamına gelir.

B_0 ile U nun sıfırını temsil eden B deki tüm doğurayların kümesi gösterilsin. (Bu küme boş olabilir.) O zaman $A\cup(B\setminus B_0)$ kümesi S yi doğurur.

Q_0 ile U nun sıfırını temsil eden u ve dolayısıyla v elemanları için Q daki $u=v$ şeklindeki tüm bağıntıların kümesi gösterilsin.

Boş kelimeden farklı U nun sıfırını temsil eden her $u\in(B\setminus B_0)^*$ elemanı *T* nin *S* deki bir elemanını temsil eder ve dolayısıyla $u=\rho(u)$ bağıntısı S de sağlanacak şekilde bir $\rho(u)\in A^+$ vardır. Ayrıca her $a\in A$ ve $b\in B\setminus B_0$ elemanları için ab ve ba kelimeleri *T* nin *S* deki bir elemanlarını temsil eder. Boş kelimeden farklı olan bu kelimeler için $ab=\sigma(a,b)$ ve $ba=\pi(b,a)$ bağıntıları S de sağlanacak şekilde bir $\sigma(a,b),\ \pi(b,a)\in A^{+}$ elemanları belirlensin. Bu durumda aşağıda verilen sonlu takdim

$$\langle A, B\setminus B_0 \mid R, Q\setminus Q_0 \qquad (1)$$

$$u=\rho(u)\ \left((u=v)\in Q_0,\ u\in (B\setminus B_0)^{*}\right), \qquad (2)$$

$$ab=\sigma(a,b), ba=\pi(b,a)\ \ (a\in A \text{ ve } b\in B\setminus B_0)\rangle \qquad (3)$$

S yi tanımlar.

Bu takdimdeki tüm bağıntıların S de sağlandığı açıktır. w_1 ve $w_2\in\left(A\cup(B\setminus B_0)\right)^{*}$ S nin aynı elemanını temsil eden herhangi iki kelime yani $w_1=w_2$ bağıntısı S de sağlansın. Eğer w_1 ve w_2 A nın herhangi bir elemanını içeriyorsa (3) nolu bağıntı ile $w_1=\overline{w_1}$ ve $w_2=\overline{w_2}$ S de sağlanacak şekilde $\overline{w_1},\overline{w_2}\in A^{*}$ kelimeleri bulunabilir. $\overline{w_1}=\overline{w_2}$ bağıntısı T de sağlandığından $w_1=w_2$ bağıntısı R nin bir sonucudur.

Eğer w_1 dolayısıyla w_2 U nun sıfırı olmayan bir elemanını temsil etsin. Bu durumda $w_1,w_2\in(B\setminus B_0)^{*}$ ve $w_1=w_2$ bağıntısı U da sağlanır. O zaman $w_1=w_2$ bağıntısı $Q\setminus Q_0$ ın bir sonucudur. ■

Önerme 4.35 *S*, $\langle X\mid R\rangle$ sonlu tam yeniden yazma sistemi takdimi ile tanımlanan sıfırlı bir yarıgrup olsun. $0\notin X$ ve $z\in X$ sıfırı temsil eden indirgenemez bir eleman olsun. O zaman $X\cup\{0\}$ üzerindeki yeniden yazma sistemi

$$R_0=R\cup\{(z,0)\}\cup\{(0x,0),(x0,0): x\in X\cup\{0\}\}$$

bir sonlu tam yeniden yazma sistemidir ve S yi tanımlar. Dahası, bu yeniden yazma sisteminde 0, S nin sıfırını temsil eden bir indirgenemez elemandır.

İspat : Öncelikle R_0 ın noetherian olduğu gösterilmelidir.

$$w_1 \to_{R_0} w_2 \to_{R_0} \cdots \to_{R_0} w_n \to_{R_0} \cdots \qquad (4.1)$$

zincirinin bir sonsuz zincir olduğu kabul edilsin. Bu diziden $\langle X \mid R \rangle$ deki başka bir

$$\tilde{w}_1 \to_R^* \tilde{w}_2 \to_R^* \cdots \to_R^* \tilde{w}_n \to_R^* \cdots \qquad (4.2)$$

zinciri elde edilebilir.

$\tilde{w}_i$ lar w_i lere şu işlemler uygulanarak elde edilebilir:
w_i deki her 0 sembolü yerine z yazılır. Bu durumda, herhangi bir $x \in X$ için z , R de indirgenemez olduğundan $0x \to_{R_0} 0$ tek adım indirgemesi $zx \to_{R_0}^+ z$ boş olmayan zincirine karşılık gelir. Bu durum $(x0,0)$ ve $(00,0)$ bağıntıları için de geçerlidir. Ayrıca eğer (4.1) zincirinde $(z,0)$ bağıntısı uygulanırsa, yani en az bir $i \in \mathbb{N}_0$ için $w_i \to_{R_0} w_{i+1}$ bağıntısında $(z,0)$ bağıntısı uygulanırsa $\tilde{w}_i$ ve $\tilde{w}_{i+1}$ özdeş kelimeler olup $w_i \to_{R_0} w_{i+1}$ tek adım indirgeme bağıntısı bir boş zinciri ile yer değiştirir.

Şimdi, R noetherian olduğundan (4.2) zinciri sonlu sayıda tek adımlı indirgemeler içerir.

(4.2) zinciri (4.1) zincirinden sonlu $R \cup \{(0x,0),(x0,0) : x \in X \cup \{0\}\}$ bağıntıları kullanılarak elde edildiğinden sonludur.

$R_0 = R \cup \{(z,0)\} \cup \{(0x,0),(x0,0) : x \in X \cup \{0\}\}$ bağıntıları kullanılarak elde edilen (4.2) zinciri sonsuz kabul edildiğinden ve $R \cup \{(0x,0),(x0,0) : x \in X \cup \{0\}\}$ bağıntıları kullanılarak tek adımlı indirgemelerin sayısı sonlu olduğundan $(z,0)$

bağıntısının kullanıldığı tek adımlı indirgeme sayısı sonsuz olmalıdır. Fakat bu $n \geq k$ olacak şekilde en az bir $k \in \mathbb{N}_0$ için $w_n \to_{R_0} w_{n+1}$ tek adım indirgemelerinde $(z,0)$ ilişkisinin kullanılması anlamına gelir. Bu bir çelişkidir, çünkü z , 0 içermediğinden $(z,0)$ ilişkisi w_k ya sonsuz defa uygulanamayacaktır. Dolayısıyla R_0 noetherian dır.

S yarıgrubunun $\langle X \mid R \rangle$ takdimine yeni doğuray ve yeni bağıntılar eklenerek elde edilen $\langle X \cup \{0\} \mid R_0 \rangle$ takdiminin S yarıgrubunu tanımlayan bir takdim olduğu açıktır. R_0 -indirgenemez elemanlar $Irr(R) \setminus \{z\} \cup \{0\}$ olup bunlar S nin elemanlarına birebir karşılık geleceğinden, R_0 S yi tanımlayan bir sonlu tam yeniden yazma sistemidir.

Teorem 4.34 deki takdimin (1), (2) ve (3) nolu bağıntılarının tümü V ile gösterilsin. Şimdi $\langle A | R \rangle$ ve $\langle B | Q \rangle$ takdimlerinin tam olduğu kabul edilerek Teorem 4.34 deki takdiminde tam olduğu gösterilecektir.

Yardımcı Teorem 4.36 Herhangi bir $w \in \left(A \cup B \setminus B_0\right)^+$ kelimesi için

i) Eğer w T nin bir elemanını temsil ediyorsa bu durumda $w \to_V^* w'$ olacak şekilde $w' \in A^+$ vardır.

ii) Diğer durumlarda $w \in \left(B \setminus B_0\right)^+$ dır.

İspat: i) $w \in \left(A \cup B \setminus B_0\right)^+$ kelimesi T nin bir elemanını temsil etsin. Eğer $w \in A^+$ ise $w \equiv w'$ olacağından i) açıkça sağlanır. Şimdi ise w kelimesinin hem A dan hem de $B \setminus B_0$ dan elemanlar içerdiği kabul edilsin. Teorem 4.34 deki takdimdeki (3) nolu bağıntı kullanılarak w kelimesi A daki bir kelimeye indirgenebilir.

Diğer durumlar için ise $w \in (B \setminus B_0)^+$ olacaktır. Bu durumda w U nun sıfırını temsil edeceğinden ve $\langle B | Q \rangle$ takdimi Önerme 4.35 deki gibi bir takdime sahip olacağından boştan farklı bir

$$w \equiv w_0 \to_Q w_1 \to_Q \cdots \to_Q w_n \equiv 0$$

indirgeme zinciri vardır.

$k_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $w_{i-1} \to_{Q_0} w_i$ olacak şekildeki en küçük i olsun. $w \in (B \setminus B_0)^+$ olduğundan ve k_0 ın seçiminden dolayı, $(u, v) \in Q_0$ olmak üzere $w_{k_0 - 1} \to_{Q_0} w_{k_0}$ indirgemesinde kullanılan yeniden yazma bağıntısı $u \to v$ formunda olmalıdır. Dolayısıyla $u \to \rho(u)$ bağıntısı Teorem 4.34 deki takdime aittir. z A dan elemanlar içermek üzere V yeniden yazma sisteminde,

$$w \equiv w_0 \to_{Q \setminus Q_0} \cdots \to_{Q \setminus Q_0} w_{k_0 - 1} \to_{(2)} z$$

bir indirgeme zinciri elde etmek için $u \to v$ ile $u \to \rho(u)$ yer değiştirilebilir. Bu durum bize bir önceki paragraftaki durumu verecektir.

ii) T S nin bir ideali olduğu için eğer w A dan bazı elemanlar içeriyorsa bu w nun T nin bir elemanını temsil edeceği anlamına gelir. ■

Yardımcı Teorem 4.37 $\to_V$ indirgeme bağıntısı noetherian dır.

İspat: $n \in \mathbb{N}_0$, $u_0, u_n \in A^*$, $i = 1, 2, \ldots n-1$ için $u_i \in A^+$ ve $j = 1, 2, \ldots n$ için $v_j \in (B \setminus B_0)^+$ olmak üzere bir $w \in (A \cup B \setminus B_0)^+$ kelimesi $u_n v_n \cdots u_1 v_1 u_0$ şeklinde tek türlü yazılabilir. Benzer şekilde bir $w' \in \left(A \cup B \setminus B_0\right)^+$ kelimesi de $u'_n v'_n \cdots u'_1 v'_1 u'_0$ şeklinde tek türlü yazılabilir.

Bu durumda eğer

i) $\left[st_Q\left(v'_1\right), \ldots, st_Q\left(v'_m\right)\right] >_{mult} \left[st_Q\left(v_1\right), \ldots, st_Q\left(v_n\right)\right]$; ya da

ii) Bu çoklu kümeler eşit olup, en az bir $k < n = m$ için $v_0 \equiv v'_0, \ldots, v_k \equiv v'_k$ dır ve $v'_{k+1} \rightarrow_{Q \setminus Q_0} v_{k+1}$ dır; ya da

iii) Çoklu kümeler eşittir, $v_0 \equiv v'_0, \ldots, v_n \equiv v'_n$ olup, en az bir $k < n = m$ için $u_0 \equiv u'_0, \ldots, u_k \equiv u'_k$ dır ve $u'_{k+1} \rightarrow_R u_{k+1}$,

koşulları sağlanıyorsa $w \prec w'$ sıralaması vardır.

$>_{mult}$ sıralaması sonlan bir sıralama ve $\rightarrow_Q$ ile $\rightarrow_R$ her ikisi de notherian olduğundan $\prec$ indirgeme bağıntısı $\left(A \cup B \setminus B_0\right)^+$ üzerinde sonlanan bir sıralamadır.

$\rightarrow_V$ indirgeme bağıntısı noetherian olması için her $w' \rightarrow_V w$ olduğunda $w \prec w'$ olduğu idaasının doğru olduğu gösterilmelidir.

$w \equiv u_n v_n \cdots u_1 v_1 u_0$ ve $w' \equiv u'_n v'_n \cdots u'_1 v'_1 u'_0$ olarak seçilsin. Eğer w' R nin bir bağıntısı kullanılarak w ya indirgeniyorsa, bu durumda iii) nolu durum geçerlidir. Eğer $Q \setminus Q_0$ dan bir bağıntı uygulanırsa, bu durumda en az bir $j \in \{1, 2, \ldots n\}$ için $v'_j \rightarrow_{Q \setminus Q_0} v_j$ dır, dolayısıyla $st_Q\left(v'_j\right) \geq st_Q\left(v_j\right)$ olup, bu durumda ii) nolu durum geçerlidir. Eğer $st_Q\left(v'_j\right) = st_Q\left(v_j\right)$ ise bu durumda da i) nolu durum geçerlidir.

Şimdi ise w' nün $u = \rho(u)$ şeklinde bir bağıntı kullanılarak w ya indirgendiği kabul edilsin. Bu durumda en az bir $j \in \{1, 2, \ldots n\}$ için v'_j nün bir çarpanı $\rho(u)$ ile yer değiştirir. v'_j nün yer değiştirilmeyen elemanları w kelimesinde değişmeden kalacaktır. Eğer u v'_j nün bir asal çarpanı (v'_j den daha kısa) ise v'_j bir ya da iki çarpandan oluşacaktır, aksi halde, yani u ile v'_j aynı ise v'_j indirgenecek ve yok olacaktır. Bu durumların her birinde $st_Q\left(v'_j\right)$ doğal sayısı $\left[st_Q\left(v'_1\right),\ldots,st_Q\left(v'_m\right)\right]$ çoklu kümesinde hepsi $st_Q\left(v'_j\right)$ sayısından küçük olan doğal sayıların bir sonlu kümesi ile yer değiştirilir. Bu yüzden i) nolu durum oluşacaktır.

Son ihtimal ise w' nün $ab=\sigma(a,b)$ (ya da $ba=\pi(b,a)$) şeklinde bir bağıntı kullanılarak w ya indirgendiği durumdur. Bu durum bir önceki adıma benzer şekilde ele alınır. w' nün bazı v'_j çarpanları, onun bazı son kısımları ile yer değiştirilecektir. Bu durumda daha küçük bir gerinmeye sahip olup, bu durum i) nolu durumu ortaya çıkaracaktır. ■

Teorem 4.38 *S*, bir *T* yarıgrubunun bir *U* yarıgrubu ile bir ideal genişlemesi olsun. Eğer *T* ve *U* nun her ikisi de bir sonlu tam yeniden yazma sistemi ile takdim edilebiliyorsa, bu durumda *S* de bir sonlu tam yeniden yazma sistemi ile takdim edilebilir.

İspat: Teorem 4.34 de bahsedilen takdim S yi tanımlayan bir takdimdir. Yardımcı Teorem 4.37 $\rightarrow_V$ indirgeme bağıntısı noetherian olduğunu göstermektedir. Yardımcı Teorem 4.37 ve $\langle A|R\rangle$ ve $\langle B|Q\rangle$ takdimlerinin tam olduğu gerçeğinden V ye göre indirgenemez elemanlar S nin elemanlarına birebir karşılık gelir. Sonuç olarak Teorem 4.34 de bahsedilen takdim S yi tanımlayan bir sonlu tam yeniden yazma takdimidir.

5. KONGRÜANSLAR İÇİN SONLU TAM YENİDEN YAZMA SİSTEMİ

S bir yarıgrup, ρ da S üzerinde bir kongrüans olsun. Bu durumda ρ, $S\times S$ nin bir alt yarıgrubudur. Bu bölümde ρ bir yarıgrup olarak ele alındığında, eğer ρ bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahipse ise S ve S/ρ nun da bir sonlu sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip olduğu gösterildi.

Tanım 5.39 G ve H iki grup ve N de G nin bir normal altgrubu olsun. Eğer G/N bölüm grubu H ye izomorfik, yani $G/N \cong H$ ise G ye H nin N ile olan *genişlemesi* denir.

Eğer H ve N sonlu takdimli gruplar ise G de sonlu takdimli bir gruptur (Johnson, 1990). Bu sonuçtan hareketle S bir yarıgrup ve ρ da S üzerinde bir kongrüans olmak üzere, ρ, $S\times S$ nin bir alt yarıgrubu olarak ele alınabilir.

(Ayık vd., 2005a) daki makalede S bir yarıgrup, ρ da S üzerinde bir kongrüans olmak üzere, eğer ρ sonlu takdimli ise S ve S/ρ nun da sonlu takdim edilebilir olduğunu gösterdiler.

Önerme 5.40 X , ρ için yansımalı bir doğuray kümesi ve $\langle X \mid R\rangle$ de ρ için bir yarıgrup takdimi olsun. Eğer $\varphi_i(X)$ izdüşüm fonksiyonu X^+ dan $\varphi_i(X)^+$ e bir homomorfizm olacak şekilde genişletilirse, o zaman $w \equiv (x_1, y_1)\cdots(x_m, y_m) \in X^+$ için

$$\varphi_1(w) \equiv x_1 \cdots x_m \text{ ve } \varphi_2(w) \equiv y_1 \cdots y_m$$

olur. $X_i = \varphi_i(X)$ ve $R_i = \varphi_i(R) = \{(\varphi_i(r), \varphi_i(s)) : (r,s) \in R\}$ (i =1, 2) alınırsa, o zaman $\langle X_i \mid R_i\rangle$ (i =1, 2) S için bir yarıgrup takdimidir (Ayık vd., 2005a).

İspat: Yardımcı Teorem 2.3.25 den, eğer X , ρ için bir doğuray kümesi ise, $\varphi_i\left(X\right)=X_i$ $\left(i=1,2\right)$ de S için bir doğuray kümesidir. $\left(r,s\right)\in R$ için

$$r\equiv\left(x_{i_1},y_{i_1}\right)\cdots\left(x_{i_m},y_{i_m}\right) \text{ ve } s\equiv\left(x_{j_1},y_{j_1}\right)\cdots\left(x_{j_n},y_{j_n}\right)$$

olacak şekilde $\left(x_{i_1},y_{i_1}\right),\ldots,\left(x_{i_m},y_{i_m}\right),\left(x_{j_1},y_{j_1}\right),\ldots,\left(x_{j_n},y_{j_n}\right)\in X$ elemanları vardır. $r=s$ ρ da sağlandığından

$$\begin{aligned} x_{i_1}\cdots x_{i_m} &= x_{j_1}\cdots x_{j_n} \\ y_{i_1}\cdots y_{i_m} &= y_{j_1}\cdots y_{j_n} \end{aligned}$$

ilişkileri de S de sağlanır. Dolayısıyla $\varphi_1\left(r\right)=\varphi_1\left(s\right)$ ve $\varphi_2\left(r\right)=\varphi_2\left(s\right)$ dir. Bundan dolayı R_1 deki tüm bağıntılar S de sağlanır. $u,v\in X^+$ S de aynı elemanı temsil eden iki kelime olsun. O zaman

$$u\equiv x_1\cdots x_m \text{ ve } v\equiv y_1\cdots y_n$$

olacak şekilde $x_1,\ldots,x_m y_1,\ldots,y_n\in X_i$ elemanları vardır. X , ρ için yansımalı bir doğuray kümesi ve $\varphi_i\left(X\right)=X_i$ olduğundan

$$\left(x_1,x_1\right),\ldots,\left(x_m,x_m\right),\left(y_1,y_1\right),\ldots,\left(y_n,y_n\right)\in X$$

dir. $\bar{u}\equiv\left(x_1,x_1\right)\cdots\left(x_m,x_m\right)$ ve $\bar{v}\equiv\left(y_1,y_1\right)\cdots\left(y_n,y_n\right)$ olarak alınırsa, $\bar{u}$ ve $\bar{v}$ ρ da aynı elemanı temsil edeceğinden $\bar{u}=\bar{v}$ ilişkisi ρ da sağlanır. Bundan dolayı $\bar{u}$ den $\bar{v}$ ye sonlu bir zincir vardır. Yani $i=1,2,\ldots,n-1$ için α_{i+1}, R deki bir ilişki bir kez kullanılarak α_i den elde edilmiş olmak üzere $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in X^+$ kelimelerinin sonlu bir

$$\bar{u} \equiv \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \equiv \bar{v}$$

dizisi vardır. Burada $1 < j \leq n$ için, $(r_j,s_j) \in R$ veya $(s_j,r_j) \in R$ olmak üzere $\alpha_{j-1} = u_j r_j v_j$ ve $\alpha_j = u_j s_j v_j$ olacak şekilde $u_j, v_j \in X^*$ vardır. Şimdi α_{j-1} ve α_j ye X^+ dan $\varphi_i(X)^+$ e genişlemesi olan $\varphi_i(X)$ uygulanırsa

$$\alpha_{j-1}^i \equiv \varphi_i(u_j)\varphi_i(r_j)\varphi_i(v_j)$$
$$\alpha_j^i \equiv \varphi_i(u_j)\varphi_i(s_j)\varphi_i(v_j)$$

elde edilir. $\varphi_i(r_j) = \varphi_i(s_j)$ bağıntısı R_i de sağlandığından

$$\bar{u} \equiv \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \equiv \bar{v}$$

zincirindeki tüm elemanlara bu homomorfizm uygulanırsa u dan v ye sonlu bir zincirin olduğu görülür. Yani $\alpha_1^i,\alpha_2^i,\ldots,\alpha_k^i \in X_i^+$ kelimelerinin sonlu bir dizisi

$$u \equiv \alpha_1^i,\alpha_2^i,\ldots,\alpha_k^i \equiv v$$

vardır öyle ki α_j^i $(1 < j \leq n)$ kelimesi R_i bağıntılarından bir tanesi kullanılarak α_{j-1}^i den elde edilir. Dolayısıyla $u = v$ R_i nin bir sonucudur. O halde $\langle X_i | R_i \rangle$ S yarıgrubunun bir takdimidir. ■

Yardımcı Teorem 5.41 Eğer S sonlu takdimli bir yarıgrup ve ρ da S üzerinde kongrüans olarak sonlu doğuraylı ise S/ρ da sonlu takdimlidir (Toker, 2008).

İspat: $\langle X \mid R \rangle$ S yarıgrubu için bir sonlu takdim ve ρ da $Y = \{(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_k, \beta_k)\}$ sonlu kümesini içeren en küçük kongrüans olsun. $S/\rho = \{a\rho : a \in S\}$ dir. $a \in S$ olup $a = x_1 \cdots x_n$ olacak şekilde $x_1, \ldots, x_n \in X$ elemanları vardır. $x_m\rho = \{x : (x_m, x) \in \rho\}$ olup bu x elemanı S nin bir elemanı olduğundan X kümesi S/ρ için bir doğuray kümesidir.

$$S/\rho \cong {}^{X^+/R^\#}\!\big/_{\rho} = X^+ \big/ (R \cup Y)^\#$$

olduğundan $\langle X \mid R \cup \{\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_k = \beta_k\} \rangle$ ikilisi S/ρ için bir takdimdir.

Bu fikirler, S yarıgrubu yerine bir M monoidini alarak ve $\langle X \mid R \rangle$ ρ nun bir takdimi olmak üzere R nin sonlu bir tam yeniden yazma sistem olması durumunda, M nin bir takdimi olan $\langle X_i \mid R_i \rangle$ $(i = 1, 2)$ için tanımlanan R_i $(i = 1, 2)$ nin de X_i üzerinde sonlu bir tam yeniden yazma sistem olup olmadığını göstermek için kullanılabilir.

Yardımcı Teorem 5.42 M bir monoid, ρ da M üzerinde bir kongrüans olsun. Yukarıda tanımlanan φ_i dönüşümü bir örten homomorfizmdir ve ayrıca $U, V \in X_i^*$ ve $U \rightarrow_{R_i}^* V$ için $U = \varphi_i(U)$, $V = \varphi_i(V)$ ve $U \rightarrow_R^* V$ olacak şekilde $U, V \in X^*$ elemanları vardır.

İspat : $\varphi_i : \rho \rightarrow S$ izdüşüm dönüşümü olmak üzere φ_i X^+ dan $\varphi_i(X)^+$ ya bir homomorfizm genişlemesi olarak genişletilebilir. $w \equiv (x_1, y_1) \ldots (x_m, y_m) \in X^+$ alınırsa

$\varphi_1(w) = x_1 x_2 \ldots x_m$ ve $\varphi_2(w) = y_1 y_2 \ldots y_m$ şeklindedir. Önerme 2.3.19 dan X ρ için bir sonlu yansımalı doğuray kümesi olduğundan her $s \in S$ için $(s,s) \in \rho$ olup $\varphi_i(s,s) = s$ olacağından φ_i örtendir.

Şimdi $U,V \in X_i^*$ ve $U \to_{R_i}^* V$ olsun. $U = x_1 x_2 \ldots x_m$ ve $V = y_1 y_2 \ldots y_n$ olacak şekilde $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n \in X_i = \varphi_i(X)$ vardır. X ρ için bir yansımalı doğuray kümesi olduğundan $(x_1,x_1),\ldots,(x_m,x_m),(y_1,y_1),\ldots,(y_n,y_n) \in X$ dir.

Şimdi,

$$U \equiv (x_1,x_1)(x_2,x_2)\ldots(x_m,x_m)$$

ve

$$V \equiv (y_1,y_1)(y_2,y_2)\ldots(y_m,y_m)$$

alınsın. Bu durumda $U = V$, ρ da sağlanır, o zaman U den V ye R nin bağıntıları kullanılarak elde edilen bir dizi vardır. Dolayısıyla $U \to_R^* V$ dir. ■

Teorem 5.43 M bir monoid, ρ M da üzerinde bir kongrüans ve $\langle X \mid R \rangle$ ve $\langle X_i \mid R_i \rangle$ $(i = 1,2)$ sırasıyla ρ ve M nin birer takdimleri olsun. Eğer R, X üzerinde bir sonlu tam yeniden yazma sistemi ise, $i = 1,2$ için R_i de X_i üzerinde bir sonlu yeniden yazma sistemidir.

İspat : R, X üzerinde bir sonlu tam yeniden yazma sistemi olsun.

$$X_i = \varphi_i(X) \text{ ve } R_i = \varphi_i(R) = \{(\varphi_i(r), \varphi_i(s)) : (r,s) \in R\} \ (i = 1,2)$$

olsun. $i=1,2$ için R_i nin X_i üzerinde bir sonlu tam yeniden yazma sistemi olduğu gösterilmelidir.

Önce R_i $(i=1,2)$ nin confluent olduğu gösterilmelidir. $i=1,2$ için U,V ve $W \in X_i^*$, $U \to_{R_i}^* V$ ve $U \to_{R_i}^* W$ olsun. Şimdi $V \to_{R_i}^* Q$ ve $W \to_{R_i}^* Q$ olacak şekilde bir $Q \in X_i^*$ elemanının var olduğu gösterilmelidir. U,V ve $W \in X_i^* = \varphi_i(X)^*$ ve φ_i bir örten homomorfizm olduğundan,

$$U = \varphi_i(U), V = \varphi_i(V) \text{ ve } W = \varphi_i(W)$$

olacak şekilde U,V ve $W \in X^*$ vardır. Burada $U = (x_{i_1}, y_{i_1})\dots(x_{i_m}, y_{i_m}) \in X^*$, $V = (x_{j_1}, y_{j_1})\dots(x_{j_n}, y_{j_n}) \in X^*$ ve $W = (x_{k_1}, y_{k_1})\dots(x_{k_l}, y_{k_l}) \in X^*$ biçimindedir.

$U = V$ ve $U = W$ ρ da sağlandığından U den V ye ve U den W ye R nin bağıntıları kullanılarak elde edilen bir sonlu dizi vardır. Dolayısıyla

$$U \to_R^* V \text{ ve } U \to_R^* W$$

dır. R, X üzerinde bir sonlu tam yeniden yazma sistemi olduğundan,

$$V \to_R^* Q \text{ ve } W \to_R^* Q$$

olacak şekilde bir $Q \in X^*$ vardır. $Q = \varphi_i(Q)$ alınırsa,

$$V = \varphi_i(V) \to_{R_i}^* \varphi_i(Q) = Q \text{ ve } W = \varphi_i(W) \to_{R_i}^* \varphi_i(Q) = Q$$

olup, istenen elde edilmiş olur. Yani R_i confluent dır.

Şimdi ise R_i in notherian (sonlanan yeniden yazma sistemi) olduğu gösterilmelidir. Her $n \geq 1$ için $W_n \in X_i^*$ ve $W_1 \to_{R_i} W_2 \to_{R_i} W_3 \ldots$ olacak şekilde bir sonsuz zincirin var olduğunu kabul edilsin.

O zaman, her $n \geq 1$ve $W_n \in X_i^*$ için, φ_i örten homomorfizm olduğundan, $\varphi_i\left(W_n\right) = W_n$ olacak şekilde bir $W_n \in X^*$ vardır. $W_1 = \varphi_i\left(W_1\right)_1 \to_{R_i} W_2 = \varphi_i\left(W_2\right) \to_{R_i} W_3 = \varphi_i\left(W_3\right) \cdots$ olduğundan, Yardımcı Teorem 5.42 den dolayı,

$$W_1 \to_R W_2 \to_R W_3 \cdots$$

zinciri sonsuz bir zincir olup, bu durum R nin Notherian olması ile çelişir. O zaman R_i de bir sonlanan yeniden yazma sistemidir. Böylece R_i in sonlu bir tam yeniden yazma sistemi olduğu gösterilmiş olur. ■

Sonuç 5.44 M bir monoid, ρ M da üzerinde sonlu doğuraylı bir kongrüans olsun. Eğer ρ bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip ise, M/ρ da bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahiptir.

İspat: ρ nun bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip olduğu kabul edilsin. Teorem 5.43 den dolayı M monoidi de bir sonlu tam yeniden yazma sistemi ile takdim edilebilir.

Yardımcı Teorem 5.41 den M/ρ nun $\langle K | Q \rangle$ gibi bir sonlu takdimi vardır. Her $x\rho \in M/\rho$ için $\langle K \rangle = M/\rho$ olduğundan,

$$x\rho = \left(x_1 \cdots x_m\right)\rho$$

olacak şekilde $x_1, \ldots, x_m \in M$ vardır. Bu durumda

$$x\rho = x_1\rho \cdots x_m\rho$$

olacağından ve $x_i\rho = \left\{x_i' \in M : \left(x_i, x_i'\right) \in \rho\right\}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} x\rho &= \left(x_1 \cdots x_m\right)\rho \\ &= x_1\rho \cdots x_m\rho \\ &= x_1' \cdots x_m' \in M \end{aligned}$$

dır. M bir sonlu tam yeniden yazma sistemi ile takdim edildiğinden, M/ρ da bir sonlu tam yeniden yazma sistemi ile takdim edilebilir. ■

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada eğer bir monoid bir sonlu tam yeniden yazma sistemi ile takdim edilebilir ise bu monoid için kelime problemi çözülebilirdir sonucundan hareketle bazı yarıgrup yapılarının hangi koşullar altında bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip olup olmadıkları araştırılmıştır.

S bir monoid ve T de S nin bir sonlu indeksli alt monoidi olmak üzere eğer T bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahipse T nin bir küçük genişlemesi S monoidinin de bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip olduğu gösterilmiştir.
S, T nin U ile bir ideal genişlemesi olmak üzere, eğer T ve U bir sonlu tam yeniden yazma sistem ile takdim edilebiliyorsa ise S nin de bir sonlu tam yeniden yazma sistem ile takdim edilebildiği gösterilmiştir.

Bu iki cebirsel yapı küçük genişleme ve ideal genişlemesinde kullanılan metoda benzer bir metotla, ρ S üzerinde bir kongrüans olmak üzere, eğer ρ bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahipse ise S ve S/ρ nun da bir sonlu sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip olduğu gösterilmiştir. Bu sonucun ilerleyen zamanlarda bir sempozyumda sunulması veya bir yayın haline getirilmesi planlanmaktadır.

Yeniden yazma sistemleri ile ilgilenen araştırmacılar aşağıda verilen bazı açık problemleri araştırabilirler.

SORU 1: H G de sonlu indeksli bir alt grup olmak üzere eğer G bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip ise bu durumda H da bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip midir? (Wang, 2008).

SORU 2: A ve B sonlu takdimli iki grup (ya da monoid) olsun. Eğer $A*B$ serbest çarpımı bir sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip ise bu durumda A ve B de sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip midir? (Wang, 2008).

KAYNAKLAR

Araujo I.M., Branco M.J.J., Fernandes V.H., Gomes G.M.S., Ruskuc N., On Generators and Relations of Unions of Semigroups, Semigroup Forum, 63, 49-62, 2001.

Ayık H., Presentations and Efficiency of Semigroups, (Doktora Tezi) (Ph. D. Thesis), University of St Andrews, 1998.

Ayık H., On Finiteness Conditions for Rees Matrix Semigroups. Czechoslovak Math. J., 55 , 455-463, 2005.

Ayık G., Ayık H., Ünlü Y., Presentations for S and S/ρ from a given presentation ρ. Semigroup Forum. 70 : 146—149, 2005a.

Ayık G., Ayık H., Ünlü Y., Presentations and word problem for strong semilattices of semigroups, Algebra and Discrete Mathematics, 4, 1-8, 2005b.

Ayık H., Ruskuc N., Generators and Relations of Rees Matrix Semigroups, Proc. Edinburgh Math. Soc., 42, 481-495, 1999.

Book R.V., Otto F., String-Rewriting Systems, Springer-Verlag, ed: Gries D., New York, Pp:189, 1993.

Campbell C.M., Robertson E.F., Ruskuc N. and Thomas R.M., Reidemeister-Schreier type rewriting for semigroups, Semigroup Forum, 51, 47-62, 1995.

Çalışkan B., Ayık H., Yarıgrupların Güçlü Yarılatisleri İçin Sonluluk Koşulları, XXVI.Ulusal Matematik Sempozyumu, Diyarbakır-Türkiye, pp: 117, 2013.

Çalışkan B., On Finitness Conditions For S, ρ and S/ρ, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 65 (1), 1-9, 2010.

Dehn M., tiber unendliche diskontinuierliche Gruppen, *Mathematische Annalen* 71, 116-144, 1911.

Gray R., Malheiro A., Finite complete rewriting systems for regular semigroups, Theoretical Computer Science, 412, 654-661, 2011.

Groves J.R.J. and Smith G.C., Rewriting systems and soluble groups Computer Science Technical Reports, Bath . 89–19, 1989.

Groves J.R.J. and Smith G.C., Soluble Groups with a Finite Rewriting System, Proc. Edinburgh Math. Soc. 36., 283–288, 1993.

Howie, J. M., Fundamentals of Semigroup Theory, Clarendon Press,, ed: Dales H.G., Neuman P.M., Oxford, Pp: 366, 1995.

Johnson D.L., Presentations of Groups. Cambridge University Pres., Cambridge 228s, 1995.

Karpuz, E., Geometrik Metotlar Altında Kelime Problemi ve Sonuçları, (Doktora Tezi) (Ph. D. Thesis), Balıkesir Üniversitesi, 2009.

Knuth D., and Bendix P., Simple word problems in universal algebras Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, New York, 263–297, 1970.

Kuyucu F., Relations between Ranks of Certain Semigroups, Selçuk J. Appl. Math.,12, 123-126, 2011.

Malheiro A., Finite derivation type for semilattices of semigroups, Semigroup Forum, 84, 515–526, 2012.

Squier C., Otto F., Kobayashi Y., A finiteness condition for rewriting systems, Theoretical Computer Science, 131, 271–294, 1994.

Ruskuc N., Presentations for Subgroups of Monoids, Journal of Algebra 49**,** 220, 365–380, 1999.

Ruskuc N., Semigroup Presentations (Ph. D. Thesis), University of St Andrews. 256s, 1995.

Ruskuc N., On large subsemigroups and finiteness conditions of semigroups Proc. London Math. Soc., 76, 383-405, 1998.

Sims C.C., Computation With Finitely Presentations Groups, Cambridge University Press. Great Britain, Pp:604, 1994

Squier C., Word problems and a homological finiteness condition for monoids, J. Pure Appl. Algebra 49**,** 201-217, 1987.

Thue A., Probleme uber Veranderungen von Zeichenreihen nach gegebenen Reglen Skr. Vid. Kristiania I Mat. Natuv Klasse No.10, 34s, 1914.

Toker K., Bazı Yarıgrup Yapılarının Sonlu Takdim Edilebilirliği, (Yüksek Lisans Tezi), Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 59s, 2008.

Wang J., Finite complete rewriting systems and finite derivation type for small extensions of monoids, Journal of Algebra, 204, 493–503, 1998.

Wang J., String Rewriting Systems and Finiteness Conditions for Monoids, Southeast Asian Bulletin of Mathematics 32, 999–1006, 2008.

Wang J., Finite Derivation Type for Semigroups and Congruences, Semigroup Forum, 75, 388-392, 2007.

Wong K.B., Wong P.C., On finite complete rewriting systems and large subsemigroups, Journal of Algebra, 345, 242-256, 2010.

ÖZGEÇMİŞ

1. **Adı Soyadı** : Aykut EMNİYET

2. **Doğum Tarihi** : 01.10.1977

3. **Unvanı** : Araştırma Görevlisi

4. **Öğrenim Durumu**

Derece	Alan	Üniversite	Yıl
Lisans	Matematik	Karadeniz Teknik Üniversitesi	2006
Y. Lisans	Matematik	Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi	
Doktora	Matematik	Çukurova Üniversitesi	2006-

5. Akademik Unvanlar

Araştırma Görevlisi Matematik Bölümü Osmaniye Korkut Ata Üniv. 2009-