



T.C.  
OSMANIYE KORKUT ATA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Mehmet EKER**

**ÜNİFORM OLMAYAN KESİTE SAHİP  
PIEZOELEKTRİK BİR ÇUBUĞUN  
SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ**

**MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**OSMANIYE – 2015**

**T.C.  
OSMANİYE KORKUT ATA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ÜNİFORM OLMAYAN KESİTE SAHİP PİEZOELEKTRİK  
BİR ÇUBUĞUN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ**

**Mehmet EKER**

**MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ  
ANABİLİM DALI**

**OSMANİYE  
TEMMUZ-2015**

## TEZ ONAYI

### ÜNİFORM OLMAYAN KESİTE SAHİP PİEZOELEKTRİK BİR ÇUBUĞUN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Mehmet EKER tarafından Yrd. Doç. Dr. Kerimcan ÇELEBİ danışmanlığında Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Makine Mühendisliği** Anabilim Dalı'nda hazırlanan bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği/çokluğu ile **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman:** Yrd. Doç. Dr. Kerimcan ÇELEBİ .....  
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, OKÜ

**Üye:** Yrd. Doç. Dr. Durmuş Yarımabuç .....  
Matematik Anabilim Dalı, OKÜ

**Üye:** Yrd. Doç. Dr. Cihan YILDIRIM .....  
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Adana BTÜ

Yukarıdaki jüri kararı Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ...../...../..... tarih ve ..... /..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. A. Ali GÜRTEN .....  
Enstitü Müdürü, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Bu çalışma OKÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi Tarafından Desteklenmiştir.

Proje No: OKÜBAP-2013-PT3-021

*Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.*

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, bu çalışma sonucunda elde edilmeyen her türlü bilgi ve ifade için ilgili kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını ve bu tezin Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Mehmet EKER

## ÖZET

### ÜNİFORM OLMAYAN KESİTE SAHİP PIEZOELEKTRİK BİR ÇUBUĞUN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Mehmet EKER

Yüksek Lisans, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı  
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Kerimcan ÇELEBİ

Temmuz 2015, 52 sayfa

Sahip oldukları hızlı cevap verme ve düşük enerji kullanma gibi özellikleri sayesinde piezoelektrik etki gösteren malzemeler algılayıcı ve uyarıcı olarak sıklıkla kullanılmaktadır. Piezoelektrik malzemelerin çalışma prensinde çoğunlukla titreşim özellikleri etkin rol oynadığından, piezoelektrik malzemelerin titreşim karakteristiklerini bilmek önemlidir. Kesiti üniform olmayan piezoelektrik (PZT-4) bir çubuğun keyfi olarak değişen kesit alanlarında ve farklı sınır koşulları altında serbest eksenel titreşimini ifade eden denklemler tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile çözülmüştür. Çözüm yöntemi sadece kesit alanının özel fonksiyonlarla ifade edildiği durumlar için değil, keyfi herhangi bir fonksiyona bağlı olarak değişmesi durumu içinde oldukça elverişlidir. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile problem Runge-Kutta gibi bir sayısal yöntemle çözülebilecek bir başlangıç değer problemine dönüştürülmüştür. Elde edilen sonuçlar, yöntemi doğrulamak için analitik olarak Bessel Fonksiyonları çözümüyle elde edilmiş sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu çözüm yöntemi iyi yapılandırılmış, basit ve etkili bir yöntemdir. Keyfi kesit geometrisinin çubuğun dinamik davranışına etkisini göstermek için sayısal örnekler verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Piezoelektrik Çubuk, Serbest Titreşim, Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu, Bessel Fonksiyonları

## ABSTRACT

### FREE VIBRATION ANALYSIS OF A NONUNIFORM PIEZOELECTRIC ROD

Mehmet EKER

M.Sc., Department of Mechanical Engineering  
Supervisor: Asist. Prof. Dr. Kerimcan ÇELEBİ

July 2015, 52 pages

Piezoelectric materials, which have fast response and low energy usage features, are widely used as a sensor and actuator. It is important to know the vibration characteristic of piezoelectric materials due to the active role in their working principle. Free longitudinal vibration of non-uniform piezoelectric (PZT-4) rod is solved by complementary functions method for arbitrary cross-section area under three different boundary conditions. The solution procedure is not confined to any particular choice of cross-sectional area model; it is equally suitable for arbitrary functions defining the variation of cross-sectional area. Complementary functions method (CFM) will be infused into the analysis to convert the problem to an initial value problem, which can be easily solved by, for instance, Runge-Kutta methods with great accuracy. Solutions thus obtained are compared to analytical solutions which solved with Bessel functions to validate the method presented. The solution procedure is well-structured, simple and efficient. Numerical examples are given to show the effect of arbitrary geometry on the dynamic characteristic of the rod.

**Key Words:** Piezoelectric Rod, Free Vibration, Complementary Functions Method, Bessel Functions

*Çok değerli aileme ve biricik eşime...*

## TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tez konumun belirlenerek tez çalışmamın yürütölmesini üstlenen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Kerimcan ÇELEBİ'ye teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmalarım esnasında karşılaştığım sıkıntılarında başvurduğum Sayın Yrd. Doç. Dr. Durmuş YARIMPABUÇ hocama sonsuz sabır ve desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Varlıklarından her zaman güç aldığım, koşulsuz desteklerini hiç esirgemeyen çok kıymetli ailem ve bu süreçte hayatımı birleştirdiğim sevgili eşim Tülin EKER'e destek, ilgi ve anlayışlarından dolayı çok teşekkür ederim.



# İÇİNDEKİLER

TEZ ONAYI	
TEZ BİLDİRİMİ	
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iv
İÇİNDEKİLER .....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
SİMGELER ve KISALTMALAR .....	vii
1. GİRİŞ .....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	3
2.1. Üniorm Olmayan Çubuklar .....	3
2.2. Piezoelektrik Çubuklar.....	5
2.3. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi .....	8
3. KURAM ve YÖNTEM .....	10
3.1. Piezoelektrik Malzemelerin Özellikleri ve Piezoelektrik Etki .....	11
3.2. Piezoelektrik Malzemelerin Uygulama Alanları.....	12
3.3. Piezoelektrik Malzeme Sabitleri .....	13
3.4. Piezoelektrik Malzemelerin Bünye Denklemleri .....	14
3.5. Sınır Koşulları.....	19
3.5.1. Elektriksel Sınır Koşulu .....	19
3.5.2. Mekanik Sınır Koşulları.....	19
3.6. Doğal Frekanslar için Analitik Çözüm .....	20
3.6.1. Üstel Değişken Kesit Durumu için Çözüm .....	20
3.6.2. Ekspansiyel Değişken Kesit Durumu için Çözüm .....	27
3.7. Doğal Frekanslar için Sayısal Çözüm .....	29
3.7.1. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile Çözüm .....	29
3.7.2. TFY ile Üstel Değişken Kesit Durumu için Çözüm.....	30
3.7.3. TFY ile Ekspansiyel Değişken Kesit Durumu için Çözüm.....	32
4. SAYISAL SONUÇLAR .....	35
5. YORUMLAR ve ÖNERİLER .....	44
KAYNAKLAR .....	45
EKLER.....	49
ÖZGEÇMİŞ .....	52

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 Elektrik, mekanik ve termal sistemler arasındaki etkileşim .....	10
Şekil 3.2 Piezoelektrik dönüştürücülerin çalışma prensibi .....	11
Şekil 3.3 Türdeş kesite sahip olmayan piezoelektrik çubuk .....	17
Şekil 4.1 Üstel değişen kesit durumu ve sabit-sabit sınır koşulu için sonuçlar .....	37
Şekil 4.2 Üstel değişen kesit durumu ve serbest-serbest sınır koşulu için sonuçlar .....	38
Şekil 4.3 Üstel değişen kesit durumu ve sabit-serbest sınır koşulu için sonuçlar .....	39
Şekil 4.5 Eksponansiyel değişen kesit durumu ve sabit-sabit sınır koşulu için sonuçlar .....	41
Şekil 4.6 Eksponansiyel değişen kesit durumu ve sabit-sabit sınır koşulu için sonuçlar .....	42
Şekil 4.7 Eksponansiyel değişen kesit durumu ve sabit-serbest sınır koşulu için sonuçlar .....	43
Şekil A.1 Birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonu .....	50

## SİMGELER ve KISALTMALAR

A	Kesit alan	(m <sup>2</sup> )
E	Elektrik alan	(N/C)
D	Elektriksel yerdeğiştirme	(C/ m <sup>2</sup> )
$\gamma$	Mekanik gerinim	(-)
$\sigma$	Mekanik gerilme	(N/ m <sup>2</sup> )
e	Piezoelektrik sabit	(C/m <sup>2</sup> )
c	Elastik katılık sabiti	(N/ m <sup>2</sup> )
$\epsilon$	Dielektrik sabit	(C <sup>2</sup> /N m <sup>2</sup> )
$\rho$	Yoğunluk	(kg/m <sup>3</sup> )
$\emptyset$	Elektiriksel potansiyel	(V)
$u_i$	Yerdeğiştirme vektörü	(-)
$C_i$	Keyfi integrasyon sabiti	(i=1,2)
a,b	Kesit fonksiyon sabitleri	(-)
$J_\nu$	Birinci tür Bessel fonksiyonu	(-)
$N_\nu$	İkinci tür Bessel fonksiyonu	(-)
$\nu$	Bessel fonksiyonu derecesi	(-)
n	İnhomojenlik katsayısı	(-)
$b_j$	Keyfi integrasyon sabiti	(j=1,2)
$Z_i$	TFY dönüşüm kabulü	(i=1,2)

## 1. GİRİŞ

Çağın ilerlemesi ile birlikte teknolojideki gereksinimlerde paralel olarak artmaktadır. Geniş kullanım alanına sahip geleneksel mühendislik malzemelerinin yanı sıra çağdaş ihtiyaçları karşılamak üzere akıllı mühendislik malzemelerinin kullanımı da gittikçe yaygınlaşmaktadır. Günümüzde uzay ve havacılık mühendisliğinden otomotiv mühendisliğine, makine mühendisliğinden inşaat mühendisliğine kadar çeşitli alanlarda kullanılmaya başlanan akıllı malzemeler, çağımızın mühendislik teknolojisine damgasını vuracak bir kavram olmaya adaydır.

Akıllı malzemeler, geometrik ve yapısal özellikleri beklenen görevlerin niteliğine uygun biçimde değiştirilebilen malzemeler olarak tanımlanmaktadır. Görevin amacı açısından faydalı olan bu değişimler dıştan uygulanan kumandalarla olabileceği gibi dış uyarılara karşı malzemenin (kendiliğinden) gösterdiği tepkiler biçiminde de olabilir. Akıllı malzemeler olarak tanımlanan bu malzemeler herhangi bir elektriksel alan altında mekanik olarak şekil değiştirebildiği gibi (elektromekanik etki), herhangi bir boyutsal değişiklik sonucunda elektrik sinyali üretebilmektedir (mekanoelektrik etki). Bu tür malzemelere en iyi örnek piezoelektrik malzemelerdir. Piezoelektrik özellik gösteren çok miktarda malzeme olmasına karşın, genelde bu tip malzemeler iki ana grupta toplanabilir. Birinci grup kristal yapı gösteren ve seramik şeklinde olanlardır, en yaygın kullanımı olan PZT adı verilen kurşun zirkonyum titanat bileşimidir. İkinci grup ise piezoelektrik etki gösteren polimerlerdir [1].

Sahip oldukları hızlı cevap verme ve düşük enerji kullanma gibi özellikleri sayesinde piezoelektrik etki gösteren bu malzemeler algılayıcı ve uyarıcı olarak sıklıkla kullanılmaktadır. En basit haliyle piezoelektrik bir malzemeye eyleyici davranışı sergiletebilmek için, elektriksel alan uygulanması ve malzemedeki birim uzama ortaya çıkması yeterli olmaktadır. Aynı şekilde, eğer piezoelektrik malzeme bir deformasyona maruz kaldıysa, elektrik potansiyel farkı ortaya çıkar ve bir algılayıcı elde edilir. Piezoelektrik etki gösteren bu malzemelerden yapılan algılayıcı ve uyarıcılar, yapıların ya yüzeylerine yapıştırılmakta ya da yapıya gömülmektedir. Bu elemanlar kontrol edilerek istenmeyen titreşim, gürültü ve şekil değiştirme gibi etkiler kolaylıkla ve etkinlikle yok edilebilmektedir [2].

Piezoelektrik seramik malzemeden yapılmış eyleyici ve dönüştürücünün bir araya gelmesi ile oluşmuş piezoelektrik transformatörler, alışlagelmiş manyetik elemanlar içermeyen, bünyesindeki enine modda çalışan eyleyici ve aksel modda çalışan dönüştürücünün elektromanyetik birleşiminden doğan elektrik dönüştürgeçleridir. Matematiksel modelleme açısından transformatörü oluşturan her iki kısımda piezoelektrik çubuk olarak düşünülebilir. Bu sebeple piezoelektrik çubukların titreşim davranışları bilmek önemlidir.

Bu çalışmada üniform olmayan kesite sahip piezoelektrik malzemeden yapılmış bir çubuğun serbest titreşim analizi yapılmıştır. Çubuk geometrisinin aksel koordinatta değiştiği varsayılarak analizlerde kullanılacak çubuk kesit alanını ifade eden denklemler iki farklı fonksiyon olarak seçilmiştir. Farklı sınır koşulları için serbest titreşim analizi analitik olarak Bessel Fonksiyonları yardımı ile, sayısal olarak da Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu (TFM) ile çözümlenerek sonuçlar karşılaştırılmıştır. Sonuçların birbiri ile uyumlu olduğu gözlemlenmiş, TFY 'nin iyi yapılandırılmış basit ve etkili bir yöntem olduğu gösterilmiştir.

## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

### 2.1. Üniform Olmayan Çubuklar

Kiriş ve çubukların titreşim analizi literatürde kapsamlı bir şekilde çalışılmış ve hala ilgi çekmeye devam etmektedir.

Raj ve Sujith [3] değişken kesit alanına sahip çubukların bir eksen boyuncaki titreşimine ait kesin çözümleri sunmuştur. Çubukların doğal frekansları belirli kesit alanları için elde edilmiştir.

Li ve arkadaşları [4] öteleme yayı ile birleştirilmiş tekil yükler altındaki üniform olmayan çubukların aksenal titreşimlerinin kesin çözümlerini elde etmişlerdir. Üniform olmayan kesite sahip çubuğun aksenal titreşimini idare eden diferansiyel denklem, uygun kesit alanı seçimi ile Bessel eşitliğine veya adi diferansiyel denkleme çevrilmiştir. Çalışmalarında önerilen metodun gerçek boyutlardaki ölçüm verileri ile uyumlu olduğu ve mühendislik uygulamalarında kullanılabilir olduğu gözlemlenmiştir.

Abrate [5] bazı üniform olmayan çubuk ve kirişlerin hareketinin, üniform bir çubuk veya kirişin hareketine dönüştürülebilir olduğunu göstermiştir. Ayrıca, çubuğun iki uçta sabitlendiği mesnet durumunda üniform olmayan kesit için doğal frekanslar üniform kesitli bir çubuk veya kirişinki ile aynı olmuştur. Çeşitli sınır şartları için üniform olmayan kirişlerin doğal frekanslarını öngörme için basit denklemler sunulmuştur.

Qiusheng ve ark. [6] değişken katılığa ve kütleye sahip yüksek katlı yapıların doğal frekansları ve mod şekillerini belirlemişlerdir.

Horgan ve Chan [7] yayların, çubukların ve membranların, polinomal ve üstel değişen özellikleri için kesin çözümleri elde etmişlerdir.

Li, Fang ve Jeary [8] sönümlenme etkilerini de dikkate alarak değişken katılığa ve kütleyle sahip çubukların serbest eksenel titreşimlerinin diferansiyel eşitliklerini çıkarmışlardır. Bu özelliklere sahip yüksek binalara ait dikey yönde doğal frekans ve mod şeklini belirlemek için bir yaklaşım sunmuşlardır.

Eisenberg [9] değişken kesit alanına sahip bir çubuğun eksenel yöndeki titreşimine ait frekansların kesin çözümünü sunmuştur.

Kumar ve Sujith [10] üniform olmayan çubukların eksenel titreşimi için kesin analitik çözümler sunmuştur. Uygun dönüşümler kullanarak, özel kesit alanlarına sahip çubukların eksenel yöndeki titreşim hareketini ifade eden denklemleri analitik olarak çözülebilir diferansiyel denkleme çevirmişlerdir.

Li [11] katılığı ve kütlesi eksenel yönde değişen bir çubuğun serbest titreşimi için kesin analitik çözümler sunmuştur. Uygun dönüşümler kullanılarak, serbest eksenel titreşimi ifade eden diferansiyel denklemleri Bessel denklemlerine veya sabit katsayılı adi diferansiyel denklemlere çevirmiştir.

Candan ve Elishakoff [12] iki farklı sınır koşulu için benzer olmayan çubukların kapalı formda çözümlerini elde etmişlerdir. Doğal frekansı hesaplamak için belirlenen kapalı biçimli ifadelerin referans çözümler gibi kullanılabilceğini belirmişlerdir.

Elishakoff ve Candan [13] ters dönüşüm metodu kullanarak polinom olarak malzeme ve geometrik özellikleri değişen kiriş ve çubuklardaki kesin doğal frekansları elde etmişlerdir.

Nachum ve Altus [14] farklı çubuk ve kirişlerin mod şekillerini ve doğal frekanslarını fonksiyonel pertürbasyon metodu kullanarak bulmuşlardır.

Çelebi, Keleş ve Tütüncü [15] Laplace dönüşüm metodu kullanarak, dinamik eksenel yük altındaki farklı yapıya sahip çubukların yer değiştirmelerini kesin olarak elde

etmişlerdir. Zaman uzayına ters dönüşüm ise Modifiye edilmiş Durbin Metodu ile gerçekleştirilmiştir.

Yardımoğlu ve Aydın [16] fonksiyon dönüşüm metodu kullanarak değişken kesitli çubukların aksenal titreşiminin kesin çözümünü farklı kesitler ve sınır koşulları için elde etmişlerdir.

Üniform olmayan çubukların serbest aksenal titreşimleri için Gao ve Yang [17] serilerin kullanıldığı bir metot önermişlerdir. Önerdikleri metodla özel durum olarak kabul edilen geometrisi ve malzeme özellikleri değişen dört farklı çubuk tipi için kesin çözümleri kısa formda elde etmişlerdir.

## **2.2. Piezoelektrik Çubuklar**

Piezoelektrik konusunda ilk zamanlarda yapılan çalışmalar; ince çubuklar, plaklar, diskler, silindirik kabuklar gibi sonlu ve sonsuz boyutlu değişik geometrideki yapılarla ilgili olmuştur. Tek başlarına piezoelektrik malzemelerin dikkate alındığı çalışmaların yanında, tamamı piezoelektrik malzemedan oluşan ya da piezoelektrik katmanlar içeren kirişlerin ve plakların statik ya da dinamik analizleri ile ilgili olarak da çok sayıda çalışma yapılmıştır.

Eringen [63] elektrostatığın temelleri üzerine yaptığı çalışmada dielektrik malzemelere ait bünye denklemlerini sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinde incelemiştir.

Syed ve Dawson [19] Rosen tipi piezoelektrik dönüştürücü için eşdeğer devre modellerini incelemiştir. Bir uçtan sabitlenmiş bir modeli ele alarak kalınlık ve aksenal modlar için iletim hattı eşitliklerini geliştirmişlerdir. İletim hattı modelini eşdeğer devre modeline dönüştürmek için kısmi kesirlerle açılım kuramını kullanmışlardır. Rosen tipi piezoelektrik dönüştürücünün farklı kutuplanma durumları için piezoelektrik eşitlikler üzerinden eşdeğer devre modellerini kurmuşlardır.



Holmes [20] piezoelektrik malzemeden yapılmış helisel bir yaya ait rezonans frekanslarını önceden belirleyebilen denklemler geliştirmiştir. Böyle bir yapının düşük doğal rezonans frekanslarına sahip olduğunu belirlemiştir.

Xue, Yang ve Hu. [21] değişken kesit alanının Rosen tipi piezoelektrik dönüştürücüye etkisini incelemiştir. Rosen tipi dönüştürücü yapısal olarak iki bölüm halinde incelenmiş her bölüm için karakteristik ifadeler çıkarılmıştır. Dönüştürücünün serbest ve zorlanmış titreşimini farklı kesit durumlarına göre kıyaslamışlardır.

Wei ve Su [22] hegzagonal kristal sisteminde bulunan 6 mm simetriye sahip bir piezoelektrik çubuğun elastik modelini oluşturarak dalga yayılımını incelemiştir. Bu problemde eş metot olarak isimlendirilen bir metot kullanmışlardır.

Yang ve Zhang [23] yüksek elektrik voltajı elde etmek için eksenel titreşim yapan ve üniform olmayan piezoelektrik dönüştürücünün üç boyutlu lineer denklemlerinden faydalanarak bir boyutlu analitik bir model geliştirmişlerdir. Rosen tipi dönüştürücüler yapısal olarak iki bölüm halinde incelenmiş her bölüm için karakteristik ifadeler çıkarılmıştır. Çubuğun serbest ve zorlanmış titreşim analizleri gerçekleştirilmiştir. Serbest titreşim analizi ve titreşim modları aracılığı ile piezoelektrik dönüştürücünün çalışma mekanizmasını göstermişlerdir.

Deng ve Luo [24] çalışmalarında piezoelektrik tabaka ile kaplanmış değişken kesitli çubuğun dalga karakteristiğini elde etmeyi amaçlamışlardır. Değişken kesitli çubuk problemi, değişken sınır fonksiyonları yardımı ile tanımlanmış ve piezoelektrik katmanlı çubuktaki yer değiştirmeler, yardımcı fonksiyonlardan faydalanılarak elde edilmiştir. Kullanılan yardımcı fonksiyonlar radyal koordinatlarda polinom şeklindedir. Hamilton prensibinin matris formüllerine dayanarak katmanlı çubuk içerisindeki dalga yayılımı ile ilgili dinamik eşitlikleri oluşturmuşlardır. Farklı kesitler ve dalga yayılım mesafeleri için dağılım eğrilerinin sayısal çözümleri çeşitli operatörler kullanılarak öz değer probleminin çözümüyle elde edilmiştir.

Nadal ve Pigache [25] piezoelektrik bir dönüştürücünün serbest titreşim denklemlerini Hamilton prensiplerini kullanarak oluşturmuşlardır. Enerji denklikleri yardımıyla elektromekanik modelini oluşturmuş ve serbest titreşim denklemini kurmuşlardır.

Yang ve Zhifei [26] elastisite ve piezoelektrisite teorilerine dayanarak farklı sınır koşulları altındaki çok katmanlı olarak ele aldıkları fonksiyonel derecelendirilmiş piezoelektrik bir kirişin serbest titreşim davranışını durum uzayı tabanlı diferansiyel kareleme yöntemi ile incelemişlerdir. Elde ettikleri sonuçların sonlu elemanlar analizi sonuçları ve literatürde farklı özel durumlar için elde edilmiş sonuçlarla uyumlu olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca işlevsel derecelendirilmiş piezoelektrik malzeme için malzeme parametrelerinde meydana gelecek değişimin doğal frekansa olan etkisini vurgulamışlardır.

Arslan ve Usta [27] eğri eksenli bimorph bir piezoelektrik kirişin deformasyon ve elektriksel davranışını ifade eden matematiksel bir model geliştirmişlerdir. İlk olarak bir elektriksel potansiyel altında kirişi tetikleyici olarak tasarlayıp deformasyon analizini yapmışlar ve sonuçları literatürdeki sonuçlar ile kıyaslamışlardır. İkinci olarak bir uçtan sabit, diğer ucuna eğilme momenti uygulanan eğri eksenli piezoelektrik bimorph kirişin gerilme, elektrik potansiyeli ve yerdeğiştirmelerini incelemişlerdir.

Khani ve ark. [28] piezoelektrik katmanlı üniform olmayan bir kirişin serbest titreşim davranışını genelleştirilmiş diferansiyel kareleme yöntemi (GDQM) ile incelemişlerdir. Bu yapıdaki bir kiriş için serbest titreşim davranışını idare eden denklemleri elde ettikten sonra bu metotla ayırıştırıp bir özdeğer problemine dönüştürmüşlerdir. Özdeğer probleminin çözümüyle de frekans ve mod şekillerini elde etmişlerdir. Sonuçların literatürdeki çalışmalarla ve Ansys çözümünden elde edilen sonuçlarla örtüştüğünü göstermişler ve GDQM 'nin verdiği sonuçların hassasiyetini vurgulamışlardır.

Davi [29] lineer piezoelektrik çubukların dinamik davranışını incelemiştir. Lineer piezoelektrik çubuğun bir boyutlu modeli elektriksel alan hipotezleri ve uygun kabuller yapılarak üç boyutlu piezoelektrik denklemlerden elde edilmiştir.

### **2.3. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi**

Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi sınır şartlarına sahip problemlerin çözümünde kolaylık sağlamaktadır. Bu yöntemle sınır değer problemleri başlangıç değer problemlerine dönüştürülüp sayısal yöntemlerle çözülebilmektedir.

Temel ve Çalım [30], lineer viskoelastik malzemeden yapılmış silindirik helisel çubukların zamanla değişen yükler altındaki davranışını incelerken Timoshenko çubuk teorisini kullanarak kurduğu denklemleri Laplace uzayında skaler formda adi diferansiyel denklemlere dönüştürmüş, problemin dinamik rijitlik matrisini hesaplamak için tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemini kullanmışlardır. Bu yöntemle sayısal olarak çözdükleri denklemleri Durbin'in sayısal ters dönüşümünü kullanarak zaman uzayına dönüştürmüşlerdir.

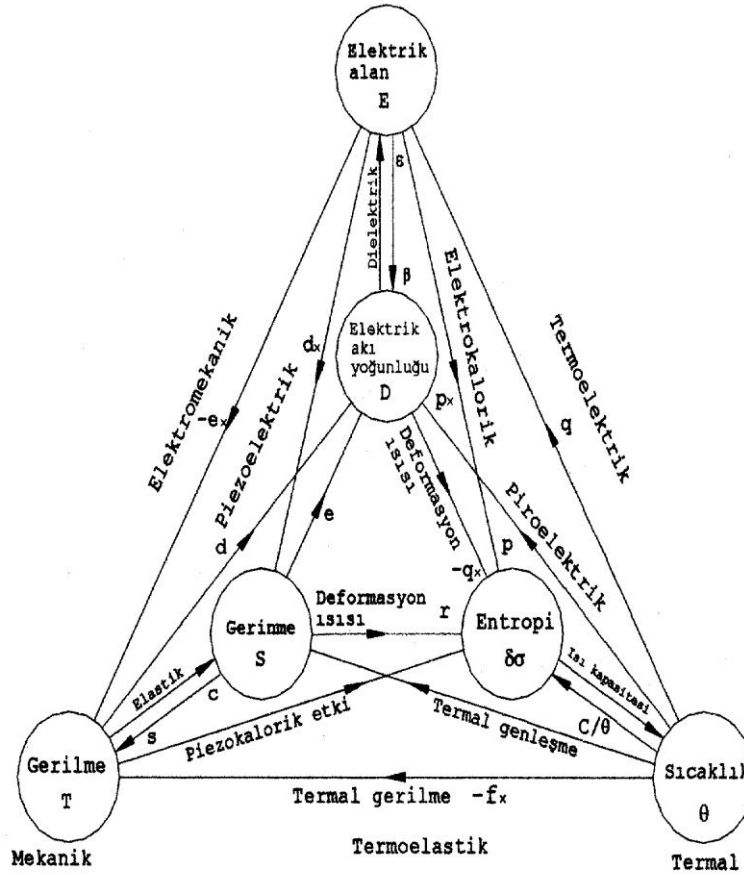
Tütüncü ve Temel [31], düzgün iç basınç dağılımı altındaki fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeye sahip silindir, disk ve küre problemini incelemiştir. Simetrik olmayan yer değiştirme ve gerilme denklemlerini, elastisite teorisini kullanarak iki sınır koşuluna sahip sınır değer problemine çevirmişlerdir. Tamamlayıcı fonksiyonlar metodu ile problem başlangıç değer problemine dönüştürülmüş ve beşinci derece Runge-Kutta sayısal yöntemi yardımıyla çözmüşlerdir.

Temel ve ark. [32] heterojen malzeme olarak da adlandırılan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış eksenel simetriye sahip halka şeklindeki yapıların (silindir, disk, küre) zorlanmış titreşim analizine yeni bir yaklaşımda bulunmuşlardır. Malzemeye ait özelliklerin radyal yönde keyfi değiştiği kabulü ile harmonik olarak, darbe yükü altında ve zamanla sürekli fonksiyon şeklinde değişen dinamik yükleri malzemenin iç sınırlarına uygulamışlardır. Bazı yük tipleri ve bazı malzeme özelliklerini ifade eden fonksiyon tipleri için analitik olarak çözülebilen

değişken katsayılı diferansiyel denklemler elde edilebildiğini göstermişlerdir. Yeni yaklaşımlarında problemi sayısal olarak Laplace dönüşümü ile zamandan bağımsız sınır değer problemine dönüştürüp tamamlayıcı fonksiyonlar metodu ile çözmüşlerdir. Zaman uzayına ters dönüşümü ise Durbin'in ters dönüşüm yöntemi ile gerçekleştirmişlerdir. Bu sayısal yöntemin malzeme özelliğini ifade eden belirli bazı fonksiyonlara bağlı kalmaksızın bütün keyfi fonksiyonlar için son derece uygun olduğunu belirtmişlerdir.

### 3. KURAM ve YÖNTEM

Elektriksel, mekanik ve termal sistemler arasındaki etkileşimler Şekil 3.1' de gösterildiği gibi iki veya üç sistem arasında mümkündür. Şekilde gösterilen etkileşimler herhangi iki sistem arasındaki doğrusal etkileşimlerdir. Dış üçgenin köşelerindeki terimler bağımsız değişkenleri göstermektedir. Bağımlı değişkenler ise içteki üçgenin köşelerinde yer almaktadır. Üçgen içerisindeki oklar bağımsız değişkenlerden bağımlı değişkenlere doğru yönelmiştir. İlgili etkileşimde söz konusu malzemeye özgü katsayılar da okların yanında belirtilmiştir. Burada çalışmamıza temel olan piezoelektrik kavramı, elektriksel ve mekanik sistemler arasındaki lineer etkileşimi ifade etmektedir. Piezoelektrik etkilerin en çok bilinen uygulamaları ultrasonik dalgaların üretilmesi, elektromanyetik enerjinin mekanik enerjiye dönüştürülmesi veya tersi işlemlerin yapılmasıdır.



Şekil 3.3.1. Elektrik, mekanik ve termal sistemler arasındaki etkileşim [33]

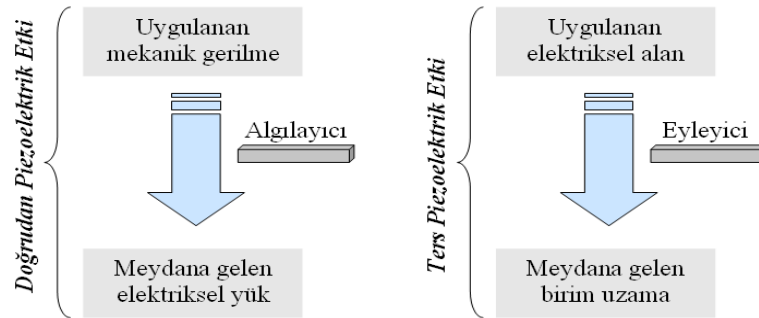
### 3.1. Piezoelektrik Malzemelerin Özellikleri ve Piezoelektrik Etki

Elektrik alana maruz kalmayan bir katı maddelerin yapısında, artı ve eksi yüklerin sayıları birbirlerine eşittir. Başka bir deyişle elektriksel olarak nötr durum yani denge hali söz konusudur. Kuramsal olarak bu dengenin, yapıda boyutsal bir şekil değişimi ile bozulması ve malzeme yüzeylerinde elektriksel yüklerin oluşması beklenir. Kristal simetri, bu elektriksel yüklerin oluşumunu sağlayan en önemli etmendir. Kюри (Curie) sıcaklığı olarak adlandırılan belirli bir sıcaklık altında, piezoelektrik malzemenin kristal yapısı merkezi simetriye sahip olur ve elektrik kutup çifti momenti oluşmaz. Bu sıcaklığın üzerinde, malzemenin kristal yapısı daha karmaşık bir yapı olan ve eksenel simetrik olmayan bir faz değişikliğine uğrar. Bu fazda, kristal yapı doğal kutup çifti özelliği gösterir yani piezoelektrik özellik kazanır.

Piezoelektrik olgu, bir malzemenin mekanik olarak zorlandığında malzeme içerisinde elektrik alan meydana gelmesi durumudur. İki gruba ayrılan piezoelektrik etki bir malzemenin mekaniksel ve elektriksel davranışları arasındaki etkileşimi gösterir.

**Direk Piezoelektrik Etki;** malzemenin uygulanan kuvvetle orantılı olarak küçük fakat ölçülebilir bir elektrik yükü oluşturma kabiliyetidir. Bu tipik bir algılama özelliğidir ve algılayıcıların geliştirilmesinde faydalanılmıştır.

**Ters Piezoelektrik Etki;** uygulanan elektrik alanın piezoelektrik malzemede deformasyona yol açmasıdır ve eyleyici özellik olarak tanımlanır[34].



Şekil 3.2. Piezoelektrik dönüştürücülerin çalışma prensibi[35].

### **3.2. Piezoelektrik Malzemelerin Uygulama Alanları**

#### **➤ Algılayıcılar**

Algılayıcı yüzlerine etkiyen basınç veya ivmelenmeyi işleyerek duyulabilir, görülebilir veya hissedilebilir cevaplara dönüştürme işleviyle görev yaparlar. Gemilerde derinlik ve hedef bulmaya yarayan sonar dalgaların tespiti ve üretimi, hassas terazi olarak kimya ve biyoloji uygulamaları, bazı gerinim ölçerler, akustik emisyon testi uygulama alanlarındandır.

Ultrasonik temizleyiciler, sıvıların atomizasyonu, ultrasonik mikrofonlar, kısa mesafede uzaktan kumanda için sonarlar, sualtı tarama işlemleri, toplu halde bulunan balık kümelerinin tespiti, malzemelerin tahribatsız muayene yöntemlerinde kullanılan uçlar, ultrasonik titreşimler oluşturduğu için tipik diğer uygulamalardır.

#### **➤ Üreteçler**

Piezoelektrik üreteçler, piezoelektik etki doğrultusunda gerilim(voltaj veya elektriksel potansiyel fark) üretirler. Bu özelliklerinden dolayı herhangi bir elektrot aralığında ark oluşturabilirler. Yakıt ateşleyicilerinde, gaz sobalarında, kombilerde, kaynak ekipmanlarında kullanılırlar.

#### **➤ Eyleyiciler**

Aktüatör veya tetikleyici olarak da bilinirler. Elektrik sinyalini yüksek hassasiyette yer değiştirmeye dönüştürürler. Piezoelektrik kristali üzerine uygulanan yüksek elektrik alanının kristal genişliğinde mikrometre ölçüsünden çok daha hassas değişime sebebiyet vermesi konumlandırma işlemlerinde piezoelektrik malzemeleri üstün kılmaktadır. Bu özelliği ile makinelerde kullanılan takımların hassas ayarlanmasında (kalibrasyon), optik lens veya aynaların mikroskobik ayarlanması gibi yüksek hassasiyet gerektiren uygulamalarda tercih edilir.

### 3.3. Piezoelektrik Malzeme Sabitleri

#### ➤ Piezoelektrik Sabit ( $C/m^2$ )

Elektrik alan ile gerilme arasındaki ilişkiyi tanımlar.  $e_{ij}$  ile gösterilir.  $i$  yönünde uygulanan elektrik alanın,  $j$  yönünde meydana getirdiği mekanik gerilmeye oranını ifade eder.

#### ➤ Piezoelektrik Voltaj Sabiti ( $m^2/C$ )

Piezoelektrik potansiyel fark katsayısı olarak da ifade edilir. Meydana gelen elektrik alanın uygulanan mekanik gerilmeye oranı olarak tanımlanabilir.  $g_{ij}$  ile gösterilir.  $i$  eksenine uygulanan mekanik gerilmenin yada meydana gelen gerilmenin yönünü,  $j$  eksenine ise uygulanan elektrik yükünün yada ortaya çıkan elektrik alanının yönünü ifade etmektedir.

#### ➤ Elektriksel Geçirgenlik Sabiti ( $C^2/Nm^2$ )

Birim elektrik alan başına düşen dielektrik ötelenme (elektrik yükü) dir.  $\epsilon_{ij}$  ile gösterilir.  $\epsilon^T$ , sabit gerilme altında dielektrik sabit ve  $\epsilon^S$ , sabit gerilme altındaki dielektrik sabittir.  $i$  eksenine dielektrik ötelenme doğrultusunu,  $j$  eksenine elektrik alanının doğrultusunu ifade eder.

#### ➤ Katılık Sabiti ( $N/m^2$ )

Malzemeye uygulanan gerilmenin aynı yönde oluşturduğu gerilmeye oranıdır.  $c_{ij}$  ile gösterilir.

#### ➤ Etkileşim Sabiti

Elektromekanik çift faktörü olarak da ifade edilebilen katsayı, malzemenin elektrik enerjisini mekanik enerjiye veya mekanik enerjiyi elektrik enerjisine ne kadar verimli çevirdiğinin ölçüsüdür. Kritik frekanslarda elde edilmesi karmaşık hal aldığından, buralarda grafikler yardımıyla belirlenmektedir.  $k_{ij}$  ile gösterilir.  $i$ ,



elektrotların dik olduğu eksen,  $j$  ise uygulanan kuvvetin veya oluşan gerinimin yönünü gösterir.

➤ **Mekanik Kalite Sabiti**

Piezoelektrik bir elemanın titreşime verdiği mekanik yanıt olarak tanımlanabilir. Gerilme ile aynı fazdaki gerinimin, gerilme ile faz dışındaki gerinimin oranıdır. Titreşim özelliği önemli olan cihazlarda yüksek mekanik kalite katsayısına sahip piezoelektrik malzemeler tercih edilir.  $Q_m$  ile gösterilir, boyutsuzdur.

➤ **Frekans Sabiti ( $mH$ )**

Rezonans frekansı ile rezonansın olduğu doğrusal mesafenin çarpımı olarak tanımlanır ve farklı titreşim modları için ayrı ayrı hesaplanabilir [35].

### **3.4. Piezoelektrik Malzemelerin Bünye Denklemleri**

Piezoelektrik malzemeler dönüştürücülerde sıklıkla kullanılmaktadır. Bunlar arasında en etkin kullanım olanağı sağlayan Rosen tipi dönüştürücülerdir. Rosen tipi dönüştürücüler, hareket verici ve algılayıcı olmak üzere iki kısımdan oluşur ve bu kısımların yaptığı aksenal titreşimlerden faydalanarak çalışırlar. Bu gibi bir cihaz örneğinde olduğu gibi hareket verici veya algılayıcı kısımların her biri farklı koordinat ve kutuplanma şartlarında aslında birer piezoelektrik çubuktur.

Lineer piezoelektrikte, lineer elastisite denklemleri piezoelektrik sabitler aracılığıyla elektrostatik yük eşitlikleri ile birleştirilirler. Fakat elektriksel değişkenler bütünüyle statik değişimlerdir, dinamik denklemlerle birleştirilebilmeleri için yarı statik haldelerdir [36].

Doğrusal davranış gösteren piezoelektrik malzemelerin bünye denklemleri elektromekanik özelliği tanımlar. Piezoelektrik malzemelerin herhangi bir sıcaklık etkisinde olmadığı kabulü ile uygulanan kuvvet ile oluşan tepki piezoelektrik malzemenin özelliklerine, yapının boyutuna ve şekline, mekanik ve elektriksel etkinin yönüne bağlıdır [35].

Piezoelektrik bünye denklemlerini oluşturan dört değişken;

$E$	Elektrik alan	Birinci dereceden tensör ( $N/C$ )
$D$	Elektriksel yer değiştirme	Birinci dereceden tensör ( $C/m^2$ )
$\gamma$	Mekanik gerinim	İkinci dereceden tensör ( - )
$\sigma$	Mekanik gerilme	İkinci dereceden tensör ( $N/m^2$ )

ve malzeme özellikleri;

$c_{ijkl}^E$	Elastik katılık sabiti	Dördüncü dereceden tensör ( $N/m^2$ )
$e_{kij}$	Piezoelektrik sabit	Üçüncü dereceden tensör ( $C/m^2$ )
$\varepsilon_{ik}$	Dielektrik sabit	İkinci dereceden tensör ( $C^2/Nm^2$ ) dir.

Herhangi bir fiziksel kuvvet ve serbest yükün olmadığı durumlar için piezoelektik malzemelerin üç boyutlu bünye denklemlerini özetlersek[23];

Hareket denklemi; (Newton'un ikinci kanunundan)

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \quad (3.1)$$

Elektrostatik yük denklemi; (Gauss denklemi)

$$D_{i,i} = 0 \quad (3.2)$$

Mekanik gerinim denklemi; (Gerinim tensörü)

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.3)$$

Elektriksel alan denklemi;

$$E_i = -\phi_{,i} \quad (3.4)$$

Eşitlikler kartezyen tensör gösterimi ile yazılmıştır. Bir alt indisle birlikte yazılan virgül, o indise kısmi türevi gösterir. Sembol üzerine konmuş iki nokta ise zamana göre türevi gösterir.

Piezoelektrik bünye denklemleri malzemenin ön plana çıkarılmak istenen özellikleri için çeşitli şekillerde yazılabilir. Bu temelle, gerinim ve elektriksel alan bağımsız değişkenleri açısından piezoelektrik gerilme ve elektrik yer değiştirme denklemleri yazılabilir [37].

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^E \gamma_{kl} - e_{kij} E_k \quad (3.5)$$

$$D_i = e_{ijkl} \gamma_{jk} + \varepsilon_{ik}^Y E_k \quad (3.6)$$

Bu denklemler aynı zamanda piezoelektrik bir çubuğun mekanik olarak sabitlenmiş ve elektriksel olarak yüksüz durumu yani gerinim ve elektrik alanın bağımsız değişken olduğu durum için de geçerlidir.

(3.5) ve (3.6) bağıntılarını (3.1) ve (3.2) diferansiyel denklemlerinde yerine yazıp (3.3) ifadesi ile verilen tanımı kullanacak olursak  $u_i$  yerdeğiştirme vektörü ve  $\phi$  potansiyelini bilinmeyen olarak kabul eden skaler denklemler elde ederiz.

$$c_{ijkl}^E u_{k,lj} - e_{kij} \phi_{,ki} = \rho \ddot{u}_i \quad (3.7)$$

$$e_{ikl} u_{k,li} + \varepsilon_{ik}^Y \phi_{,ki} = 0 \quad (3.8)$$

Bu diferansiyel denklemler başlangıç ve sınır şartları ile tamamlanmak zorundadır [38].

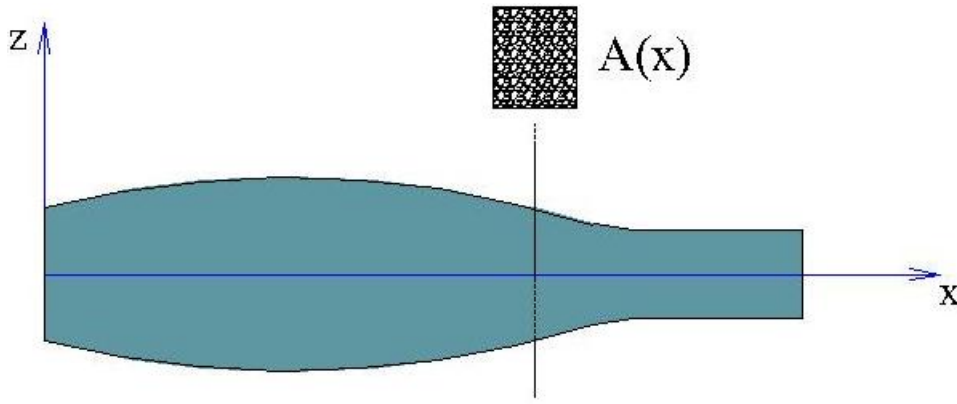
Bu çalışmada piezoelektrik çubukların iki farklı kesit geometrisi durumunda ve farklı sınır koşullarında serbest eksenel titreşim ifadeleri ve frekans değerleri elde edilecektir.

Şekil 3.3. türdeş olmayan piezoelektrik bir çubuğu göstermektedir. Çubuk x eksenini boyunca kutuplandırılmıştır. Eksenel yerdeğiştirme  $u$ , bileşke kuvvet  $N$  ve bileşke elektriksel yerdeğiştirme  $D$  olsun. Magnetik alan etkisi ihmal edildiğinde sistemin bünye denklemler [39];

$$N = A(x)(\tilde{c}_{11}u_{,x} - \tilde{e}_{11}E_X) \quad (3.9)$$

$$D = A(x)(\tilde{c}_{11}u_{,x} + \tilde{e}_{11}E_X) \quad (3.10)$$

şeklindedir. Burada  $A(x)$ , eksen boyunca değişen kesit alanını verirken çubuğa ait kesit alanı ve elektriksel alan ise  $E(x) = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$  şeklinde ifade edilir. Burada  $\phi$  elektriksel potansiyeldir.



Şekil 3.3. Üniform olmayan kesite sahip piezoelektrik çubuk

Malzeme özelliklerinin çubuğun  $x$  eksen boyunca değişmediği varsayımıyla çubuk için hareket denklemi,

$$\frac{d}{dx} \left[ A(x) \frac{d(\tilde{c}_{11}u + \tilde{e}_{11}\phi)}{dx} \right] = \rho A(x)\ddot{u} \quad (3.11)$$

şekline indirgenir. Benzer şekilde elektrostatik durum için malzemenin içerisinde bir yer değişiminin olmadığını belirten Gauss denklemi,

$$\frac{d}{dx} \left[ A(x) \frac{d(\tilde{e}_{11}u - \tilde{\epsilon}_{11}\phi)}{dx} \right] = 0 \quad (3.12)$$

olur. Denklem (3.11) ve (3.12) değişken kesite sahip piezoelektrik çubuğun aksenal hareketini idare eden denklemlerdir.

Böyle bir durumdaki sistemi idare eden denkleminin eldesi için, elektriksel ve mekanik hareket denklemleri birlikte düşünülmelidir. Denklem (3.12)'nin integrali alınıp açık halde yazıldığında,

$$A(x) \frac{d(\tilde{e}_{11}u - \tilde{\varepsilon}_{11}\phi)}{dx} = C_o, \quad (C_o = \text{sabit}) \quad (3.13)$$

şekline dönüşür. Türevler alınıp ifade açık halde yazılırsa,

$$A(x) \frac{d\phi}{dx} = \frac{\tilde{e}_{11}}{\tilde{\varepsilon}_{11}} A(x) \frac{du}{dx} + \frac{C_o}{\tilde{\varepsilon}_{11}} \quad (3.14)$$

şeklinde elektriksel ifade elde edilecektir. Dolayısıyla mekanik salınım ifadesini elde etmede bu elektriksel denklemin etkisi de gözönünde bulundurulmuş olacaktır. Buna göre (3.14) ifadesi (3.11) denkleminde yerine konup yeniden düzenlenmelidir.

$$\frac{d}{dx} \left[ \tilde{c}_{11} A(x) \frac{du}{dx} + \tilde{e}_{11} A(x) \frac{d\phi}{dx} \right] = \rho A(x) \ddot{u} \quad (3.15)$$

yukarıda elde edilen (3.14) ifadesi eşitlik içerisinde yerine konulduğunda ifade,

$$\frac{d}{dx} \left[ \tilde{c}_{11} A(x) \frac{du}{dx} + \tilde{e}_{11} \left( \frac{\tilde{e}_{11}}{\tilde{\varepsilon}_{11}} A(x) \frac{du}{dx} + \frac{C_o}{\tilde{\varepsilon}_{11}} \right) \right] = \rho A(x) \ddot{u} \quad (3.16)$$

şeklinde yazılabilir. Türev alma işlemleri gerçekleştirilip ifade açık halde,

$$\tilde{c}_{11} \frac{dA(x)}{dx} \frac{du}{dx} + \tilde{c}_{11} A(x) \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\tilde{e}_{11}^2}{\tilde{\varepsilon}_{11}} \frac{dA(x)}{dx} \frac{du}{dx} + \frac{\tilde{e}_{11}^2}{\tilde{\varepsilon}_{11}} A(x) \frac{d^2u}{dx^2} = \rho A(x) \ddot{u} \quad (3.17)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer terimleri ortak paranteze alındığında

$$\left( \tilde{c}_{11} + \frac{\tilde{e}_{11}^2}{\tilde{\varepsilon}_{11}} \right) A(x) \frac{d^2u}{dx^2} + \left( \tilde{c}_{11} + \frac{\tilde{e}_{11}^2}{\tilde{\varepsilon}_{11}} \right) \frac{dA(x)}{dx} \frac{du}{dx} = \rho A(x) \ddot{u} \quad (3.18)$$

$\bar{c}_{11} = \tilde{c}_{11} + \frac{\tilde{e}_{11}^2}{\tilde{\varepsilon}_{11}}$  kabulü ile ifade aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{A(x)} \frac{du}{dx} \frac{dA(x)}{dx} = \frac{\rho}{\bar{c}_{11}} \ddot{u} \quad (3.19)$$

Harmonik hareketin olduğu varsayılırsa,

$$\ddot{u} = -w^2 u \quad (3.20)$$

olarak yazılabilir. Burada  $w$  açısal frekanstır. Buna göre frekans cinsinden diferansiyel denklem,

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{A(x)} \frac{du}{dx} \frac{dA(x)}{dx} + \frac{\rho w^2}{\bar{c}_{11}} u = 0 \quad (3.21)$$

olarak elde edilir. Denklem (3.21) kesit alanı  $A(x)$ 'in formlarına bağlı olarak değişken katsayılı bir denklem olduğundan sadece özel fonksiyonlar için çözüm mevcuttur. Çalışmada iki farklı kesit durumu için çözümlenmeler yapılacaktır.

### 3.5. Sınır Koşulları

(3.21) denklemi  $x=0$  ve  $x = \ell$  noktalarındaki sınır koşulları için çözümlenmelidir. Malzememiz piezoelektrik olduğu için hem elektriksel hem de mekanik sınır koşulları söz konusudur.

#### 3.5.1. Elektriksel Sınır Koşulu

Elektriksel olarak iki ucunda açık olduğu kabulü ile elektriksel sınır şartı,

$$D = A(x)(\tilde{e}_{11}u_{,x} - \tilde{\epsilon}_{11}\phi_{,x}) = 0, \quad x = 0, \ell \quad (3.22)$$

#### 3.5.2. Mekanik Sınır Koşulları

Sistem üç ayrı mekanik sınır koşulu için çözülecektir. Her bir mesnetlenme durumu için uygulanması gereken sınır koşulları aşağıda verilmiştir.

➤ İki ucunda serbest olduğu Serbest-Serbest durumu

$$N = A(x)(\tilde{c}_{11}u_{,x} - \tilde{e}_{11}\phi_{,x}), \quad x = 0, \ell \quad (3.23)$$

➤ İki ucunda mesnetlenmiş halde olduğu Sabit-Sabit durumu

$$u = 0, \quad x = 0, \ell \quad (3.24)$$

➤ Bir uçtan mesnetlenmiş, diğer uçtan serbest haldeki Sabit-Serbest durumu

$$u = 0, \quad x = 0 \quad (3.25)$$

$$N = A(x)(\tilde{c}_{11}u_{,x} - \tilde{e}_{11}\phi_{,x}), \quad x = \ell \quad (3.26)$$

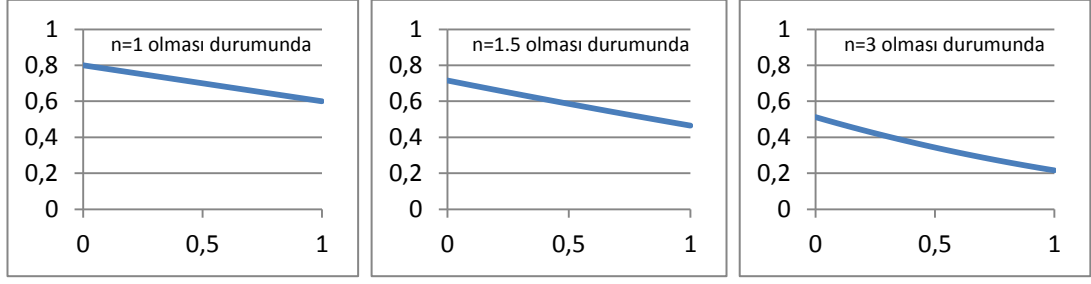
### 3.6. Doğal Frekanslar için Analitik Çözüm

#### 3.6.1. Üstel Değişken Kesit Durumu için Çözüm

Piezoelektrik çubuğun kesit alanını aşağıdaki şekilde bir üstel ifade ile değiştirmeyi kabul edersek,

$$A(x) = A_o \left( a + b \frac{x}{\ell} \right)^n \quad (3.27)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $a, b$  ve  $n$  boyutsuz değişkenler olup çalışmada seçilen  $n$  değerleri için çubuk kesiti inhomojenlik parametresine göre Şekil 3.4.'deki gibi değişmektedir.



Şekil 3.4. Üstel fonksiyonla değişen kesitin inhomojenlik parametresine göre geometri değişimi

Bu durum için frekans cinsinden diferansiyel denklem,

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{A(x)} \frac{du}{dx} \frac{dA(x)}{dx} + \frac{\rho w^2}{\bar{c}_{11}} u = 0 \quad (3.33) \quad (3.28)$$

şeklinde elde edilmişti. Bu diferansiyel denklemi Bessel fonksiyonları cinsinden çözebilmek için ilk etapta,

$$\xi = a + b \frac{x}{\ell} \quad (3.29)$$

değişken dönüşümü yapılır. Bu değişken dönüşümü altında,

$$\frac{dA}{dx} = nA_0 \xi^{n-1} \frac{b}{\ell} \quad (3.30)$$

ve

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{b}{\ell} \frac{du}{d\xi} \quad (3.31)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{b^2}{\ell^2} \frac{d^2u}{d\xi^2} \quad (3.32)$$

ifadeleri (3.28) denkleminde yerine yazılırsa,



$$\frac{b^2}{l^2} \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{n}{\xi} \frac{b^2}{l^2} \frac{du}{d\xi} + \frac{\rho w^2}{\bar{c}_{11}} u = 0 \quad (3.33)$$

halini alır. Denklem düzenlenirse,

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{n}{\xi} \frac{du}{d\xi} + \beta^2 u = 0 \quad (3.34)$$

şeklinde piezoelektrik bir çubuğun üstel kesit formu için bünye denklemi elde edilir.

Burada  $\beta^2 = \frac{\rho \omega^2 l^2}{\bar{c}_{11} b^2}$  şeklinde kısaltılmıştır. Bu tür bir diferansiyel denklem için çözüm literatürde incelenmiş [39-41] ve bazı kabuller yapıp Bessel diferansiyel denklemine dönüştürülerek çözülmüştür. Bunun için kabuller aşağıda verilmiştir.

$$u = \eta^\nu U, \quad \eta = \beta \cdot \xi, \quad \nu = \frac{1-n}{2} \quad (3.35)$$

Yukarıdaki kabuller kullanılarak (3.34) denklemi Bessel diferansiyel denklemine dönüştürülebilir. Bunun için bir dizi matematiksel işlemler gerekecektir. O halde,

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{du}{d\eta} \frac{d\eta}{d\xi} \quad (3.36)$$

biçiminde yazılabilir. (3.35)'deki kabullerden  $\frac{d\eta}{d\xi} = \beta$  olacaktır. Buna göre;

$$\frac{du}{d\eta} = \nu \eta^{\nu-1} U + \eta^\nu \frac{dU}{d\eta} \quad (3.37)$$

$$\frac{du}{d\xi} = \beta \nu \eta^{\nu-1} U + \beta \eta^\nu \frac{dU}{d\eta} \quad (3.38)$$

ifadeleri ve bu ifadeler yardımıyla

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} = \beta^2 \nu(\nu-1) \eta^{\nu-2} U + 2\beta^2 \nu \eta^{\nu-1} \frac{dU}{d\eta} + \beta^2 \eta^\nu \frac{d^2 U}{d\eta^2} \quad (3.39)$$

olarak elde edilir. Elde edilen türevli ifadelerle (3.34) denklemi yeniden yazılabilir;

$$\begin{aligned} & \beta^2 \nu(\nu - 1)\eta^{\nu-2}U + 2\beta^2 \nu\eta^{\nu-1} \frac{dU}{d\eta} + \beta^2 \eta^\nu \frac{d^2U}{d\eta^2} \\ & + \frac{n}{\beta} \left[ \beta \nu \eta^{\nu-1}U + \beta \eta^\nu \frac{dU}{d\eta} \right] + \beta^2 \eta^\nu U = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Tüm terimlerde bulunan  $\beta^2$  ifadesi sadeleştirilip, ifade ortak parantezlere alınırsa;

$$\eta^\nu \frac{d^2U}{d\eta^2} + \left( \frac{n}{\eta} \eta^\nu + 2\nu\eta^{\nu-1} \right) \frac{dU}{d\eta} + \left[ \nu(\nu - 1)\eta^{\nu-2} + \frac{n}{\eta} \nu\eta^{\nu-1} + \eta^\nu \right] U = 0 \quad (3.41)$$

(3.35)' de yapılan kabuller yardımıyla,

$$\eta^\nu \frac{d^2U}{d\eta^2} + \underbrace{(n + 2\nu)\eta^{\nu-1}}_1 + \underbrace{[\nu(\nu - 1) + n\nu]\eta^{\nu-2} + \eta^\nu}_{\left(1 - \frac{\nu^2}{\eta^2}\right) \eta^\nu} U = 0 \quad (3.42)$$

$$\eta^\nu \frac{d^2U}{d\eta^2} + \frac{n\nu}{\eta} \frac{dU}{d\eta} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\eta^2}\right) \eta^\nu U = 0 \quad (3.43)$$

eşitlik,  $\eta^\nu$  ifadesi ile sadeleştirildiğinde denklem Bessel diferansiyel denklemine dönüşür.

$$\frac{d^2U}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dU}{d\eta} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\eta^2}\right) U = 0 \quad (3.44)$$

Denklem (3.44) gibi bir Bessel diferansiyel denklem için genel çözüm [42];

$$U = C_1 J_\nu(\eta) + C_2 N_\nu(\eta) \quad (3.45)$$

$J_\nu$  ve  $N_\nu$  sırasıyla  $\nu$  derecesinden birinci ve ikinci tip Bessel fonksiyonlarıdır. Bu durumda yer değiştirme ifadesi;

$$u = \eta^\nu [C_1 J_\nu(\eta) + C_2 N_\nu(\eta)] \quad (3.46)$$

olacaktır.  $n$  'nin bazı özel değerleri için Bessel fonksiyonu kuralları gereği (3.35)'de verilen kabule göre belirlenen  $\nu$  'nün alacağı değerlere göre genel çözüm ifadesi ayrı ayrı yazılacaktır.

Bu çalışmada üç farklı inhomojenlik parametresi için çözüm elde edilmiştir. Bu çözümler aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

$n = 1$  değeri için çözüm

Bu durumda,

$$2\nu = 0 \quad (3.47)$$

olarak bir tamsayı değeri alacaktır. Bu hal için birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonları cinsinden genel çözüm;

$$U = C_1 J_0(\eta) + C_2 N_0(\eta) \quad (3.48)$$

ve

$$u = \eta^0 [C_1 J_0(\eta) + C_2 N_0(\eta)] \quad (3.49)$$

şeklinde elde edilir.

$n = 1.5$  değeri için çözüm

Bu durumda,

$$2\nu = -\frac{1}{2} \quad (3.50)$$

olarak tamsayı olmayan bir değer alacaktır. Bu hal için birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonları cinsinden genel çözüm;

$$U = C_1 J_{1/4}(\eta) + C_2 J_{-1/4}(\eta) \quad (3.51)$$

ve

$$u = \eta^\nu [C_1 J_{1/4}(\eta) + C_2 J_{-1/4}(\eta)] \quad (3.52)$$

şeklinde elde edilir.

*n = 3 değeri için çözüm*

Bu durumda,

$$2\nu = -2 \quad (3.53)$$

olarak bir tamsayı değeri alacaktır. Bu hal için birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonları cinsinden genel çözüm;

$$U = C_1 J_1(\eta) + C_2 N_1(\eta) \quad (3.54)$$

$$u = \eta^\nu [C_1 J_1(\eta) + C_2 N_1(\eta)] \quad (3.55)$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik (3.13) ve (3.14) dikkate alındığında elde edilmesi gereken diğer ifadeler de mevcuttur. Piezoelektrik çubuğun iki ucunda ( $x=0, \ell$ ) elektriksel olarak açık devre olması durumunda (yani elektrotlardan sıfır akım geçtiğinde) eşitlik (3.18)'de  $C_0 = 0$  olur. Bu durumda eşitlik (3.19);

$$\phi_{,x} = \frac{\tilde{\epsilon}_{11}}{\tilde{\epsilon}_{11}} u_{,x} \quad (3.56)$$

şeklinde sadeleşebilir.

### **Sabit-Serbest Sınır Koşulu İçin Çözüm Yöntemi**

$\eta = \beta \cdot \xi$  ifadesi çubuğun her iki ucundaki davranışı sergilemek için o noktalardaki duruma göre şekil almalıdır.

$$u = 0 , \quad \eta = \eta_0 = \beta \cdot a \quad (3.57)$$

olarak 0 noktasındaki yer değiştirme ifadesi,

$$\frac{du}{d\eta} = 0, \quad \eta = \eta_1 = \beta(a + b)$$

olarak da  $l$  noktasındaki yer değiştirme ifadesi elde edilir ve mekanik sınır şartları uygulanarak Bessel diferansiyel denkleminde çözüme gidilebilir.

Sabit-serbest sınır koşulu ve  $n=1$  durumu için  $\eta = \eta_0$  da  $u = 0$  idi. O halde bu noktadaki yer değiştirme ifadesi;

$$\eta_0^0 [C_1 J_0(\eta_0) + C_2 J_0(\eta_0)] = 0 \quad (3.58)$$

olur. Burada  $\eta_0^v$  ifadesi sıfıra eşit olamayacağından

$$C_1 J_0(\eta_0) + C_2 J_0(\eta_0) = 0 \quad (3.59)$$

$\eta = \eta_1$  için de  $u_{,\eta} = 0$  idi. Bu noktadaki yerdeğiştirme ise;

$$\frac{du}{d\eta} = v\eta_1^{v-1} [C_1 J_0(\eta_1) + C_2 N_0(\eta_1)] + \eta_1 [C_1 J'_0(\eta_1) + C_2 N'_0(\eta_1)] = 0 \quad (3.60)$$

(3.59) ve (3.60) eşitliklerini birlikte çözersek,

$$\begin{bmatrix} J_0(\eta_0) & J_0(\eta_0) \\ vJ_0(\eta_1) + \eta_1 J'_0(\eta_1) & vJ_0(\eta_1) + \eta_1 J'_0(\eta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Sistemin sıfır olmayan çözüümü için determinantının sıfıra eşit olması gerekir.

$$\begin{vmatrix} J_0(\eta_0) & J_0(\eta_0) \\ vJ_0(\eta_1) + \eta_1 N'_0 & vJ_0(\eta_1) + \eta_1 N'_0(\eta_1) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.62)$$

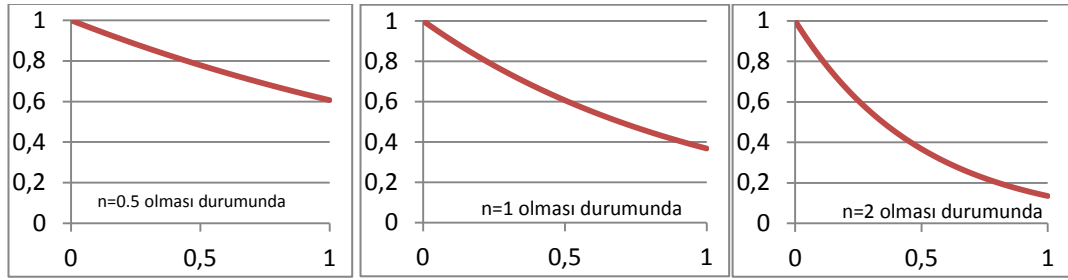
determinantının çözüümü ile sisteme ait frekans değerleri hesaplanır.  $n'$ 'nin tüm değerleri ve diğer sınır koşulları için frekans büyüklükleri hesaplanmış, sonuçlar Tablo 1-3'de sunulmuştur.

### 3.6.2. Eksponansiyel Değişen Kesit Durumu için Çözüm

Piezoelektrik çubuğun kesit değişimini diğer bir fonksiyon olan,

$$A(x) = A_0 e^{-\frac{nx}{\ell}} \quad (3.63)$$

fonksiyonu ile değiştirmeyi kabul edelim. Bu halde çubuk kesiti inhomojenlik parametresine göre Şekil 3.5.'deki değişmektedir.



Şekil 3.5. Eksponansiyel fonksiyonla değişen kesitin inhomojenlik parametresine göre geometri değişimi

Böyle bir kesit durumu için (3.21) denklemi tekrar yazılmalıdır. Diferansiyel denklemde kullanılmak üzere kesit alanın türev ifadesi,

$$\frac{dA}{dx} = -\frac{n}{\ell} e^{-\frac{nx}{\ell}} A_0 \quad (3.64)$$

şeklinde elde edilip yerine yazılırsa denklem

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{A_0 e^{-\frac{nx}{\ell}}} \frac{du}{dx} - \frac{n}{\ell} e^{-\frac{nx}{\ell}} A_0 + \frac{\rho w^2}{\bar{c}_{11}} u = 0 \quad (3.65)$$

halini alacaktır. Sadeleştirmeler yapıldığında (3.21) denklemi eksponansiyel değişen kesit durumu için,

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{n}{\ell} \frac{du}{dx} + \frac{\rho w^2}{\bar{c}_{11}} u = 0 \quad (3.66)$$

Olarak elde edilir.  $\frac{\rho w^2}{c_{11}}$  ifadesini R olarak yeniden adlandırırsak böyle bir diferansiyel denklemin çözümünde;

$$\frac{n^2}{\ell^2} - 4R^2 \geq 0 \quad (3.67)$$

ise çözüm yoktur ve,

$$u(x) = 0 \quad (3.68)$$

olur.  $\frac{n^2}{\ell^2} - 4R^2 < 0$  olması durumunda ise genel çözüm;

$$u(x) = e^{\frac{nx}{2\ell}} [c_1 \cos\left(\frac{\alpha x}{\ell}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\alpha x}{\ell}\right)] \quad (3.69)$$

olarak bulunur. Burada;

$$\alpha^2 = \frac{\ell^2}{4} \left( \frac{4\rho w^2}{c_{11}} - \frac{n^2}{\ell^2} \right) \quad (3.70)$$

olarak elde edilir. Mekanik sınır koşulları eksponansiyel durum için uygulandığında sistemin hareketini idare eden denklemler aşağıdaki gibi elde edilir.

*Serbest - serbest sınır koşulu için;*

$$\sin(\alpha) = 0 \quad (3.71)$$

*Sabit - Sabit sınır koşulu için;*

$$\sin(\alpha) = 0 \quad (3.72)$$

*Sabit – serbest sınır koşulu için;*

$$\frac{n}{2} \sin(\alpha) + \alpha \cos(\alpha) = 0 \quad (3.73)$$

Kesit ifadesindeki n 'nin 0.5, 1, 2 değerleri ile değiştiği durumlarda frekans büyüklükleri hesaplanmış ve sonuçlar Tablo 4-6'da verilmiştir.

### 3.7. Doğal Frekanslar için Sayısal Çözüm

#### 3.7.1. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile Çözüm

Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi, ikinci mertebeden sınır değer problemlerini başlangıç değer problemine dönüştürme esasına dayanmaktadır.  $u(r)$  bağımlı değişkenine bağlı,

$$u'' + P(r)u' + Q(r)u = R(r) \quad (3.74)$$

gibi bir diferansiyel denklemin kapalı form genel çözümü elde edilemez. TFY ile elde edilecek genel çözüm;

$$u = b_j u_j + u_p \quad , \quad j = 1, 2 \quad (3.75)$$

olup,  $u_j$  ve  $u_p$  sırasıyla lineer bağımsız homojen çözüm ve özel çözümdür.  $b_j$  sınır şartlarından elde edilecek sabitlerdir. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yönteminde çözüme  $u_i = Z_1^{(i)}$  ve  $u'_i = Z_2^{(i)}$  kabulleri yapılarak başlanır. Buna göre,

$$(Z_1^{(i)})' = Z_2^{(i)} \quad (3.76)$$

olacaktır. Burada  $i = 1, 2$  homojen çözümleri,  $i = p$  olması durumu ise özel çözümü göstermektedir. Homojen çözümleri elde etmek için (3.74) denkleminin sağ tarafı sıfıra eşitlenir ve

$$(Z_2^{(i)})' = -P(r)Z_2^{(i)} - Q(r)Z_1^{(i)} \quad (3.77)$$

eşitliği elde edilir. (3.76) ve (3.77) eşitlikleri her bir homojen çözümü elde etmek için sayısal olarak çözülür. Çözümlerin lineer bağımsızlığını sağlayabilmek için lineer bağımsız başlangıç koşulları seçilmelidir. Kolaylık olması açısından Klocker Delta kullanılabilir.



$$Z_1^{(i)} = \delta_{ji}, \quad j, i = 1, 2 \quad (3.78)$$

Özel çözümü elde etmek için ise (3.77) eşitliği düzenlenirse,

$$(Z_2^{(p)})' = -P(r)Z_2^{(p)} - Q(r)Z_1^{(p)} + R(r) \quad (3.79)$$

halini alacaktır. Özel çözümün bulunabilmesi için diferansiyel denklemin homojen başlangıç koşullarını sağlaması gerekir. Bunun için,

$$Z_j^{(p)} = 0, \quad j=1,2 \quad (3.80)$$

olarak uygulanır. Denklem (3.76), (3.79) ve (3.80) başlangıç koşulları ile birlikte özel çözümü elde etmek için gerekli denklem sistemini oluşturmaktadır ve sayısal olarak Runge-Kutta yöntemi ile çözülebilir. Homojen çözümler ile birlikte sınır koşulları kullanılarak  $b_1$  ve  $b_2$  katsayıları aşağıdaki cebirsel işlemle elde edilebilir.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} RHS1 \\ RHS2 \end{Bmatrix} \quad (3.81)$$

Burada,  $A_{ij}$  homojen çözümlerin sınır koşulları için değerlerini ifade etmekte, RHS1 ve RHS2 (eşitliklerin sağ tarafları) ise özel çözümlerin değerlerini içermektedir [31].

### 3.7.2 TFY ile Üstel Değişen Kesit Durumu için Çözüm

Çubuk kesitinin  $A(x) = A_o(a + b \frac{x}{l})^n$  şeklinde değişmesi durumundaki diferansiyel denklem analitik çözüm kısmında (3.34)'de çıkarılmıştı. Bu diferansiyel denklem TFY ile sınır koşulları yardımı ile çözülebilir.

#### **Sabit – Serbest Sınır Koşulu**

$$x = 0 \text{ için } \xi = a, \quad u = 0$$

$$x = l \text{ için } \xi = a + b, \quad A(x)(\tilde{c}_{11}u_{,x} + \tilde{e}_{11}\phi_{,x}) = 0 \text{ ve } u_{,\xi} = 0$$

O halde  $\xi \in [a, a + b]$  aralığında hesaplamalar yapılmalıdır. Bu duruma göre elde edilmesi gereken genel çözüm,

$$u(\xi) = b_1 u_1(\xi) + b_2 u_2(\xi) \quad (3.82)$$

$u_1(\xi)$  in belirlenmesi

$$u_1'' + \frac{n}{\xi} u_1' + \beta^2 u_1 = 0 \quad (3.83)$$

Bu tür ikinci dereceden iki bilinmeyenli diferansiyel denklemde lineer bağımsız iki çözüm elde etme şartını sağlamak için, hayali lineer başlangıç sınır koşulu belirlenebilir. Bu yüzden hayali başlangıç koşulları:

$$\begin{aligned} u_1(a) &= c_1 \\ u_1'(a) &= c_2 \end{aligned} \quad (3.84)$$

şeklinde verilebilir. TFY kurallarına göre,

$$\begin{aligned} u_1 &= z_1 \\ u_1' &= z_2 \end{aligned} \quad (3.85)$$

kabulleri yapılırsa, genel denklem;

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= -\frac{n}{\xi} z_2 - \beta^2 z_1 \end{aligned} \quad (3.86)$$

Bu durumda yeni değişkenlere göre başlangıç değerleri aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\begin{aligned} z_1(a) &= c_1 \\ z_2(a) &= c_2 \end{aligned} \quad (3.87)$$

$u_2(\xi)$  in belirlenmesi

Benzer şekilde hayali lineer bağımsız başlangıç koşulları,

$$\begin{aligned}u_2(a) &= c_3 \\u_2'(a) &= c_4\end{aligned}\tag{3.88}$$

şeklinde verilip,

$$\begin{aligned}u_2 &= z_3 \\u_2' &= z_4\end{aligned}\tag{3.89}$$

kabulleri yapılırsa, genel denklem;

$$\begin{aligned}z_3' &= z_4 \\z_4' &= -\frac{n}{\xi} z_4 - \beta^2 z_3\end{aligned}\tag{3.90}$$

olacaktır. Bu durumda yeni değişkenlere göre başlangıç değerleri,

$$\begin{aligned}z_3(a) &= c_1 \\z_4(a) &= 4\end{aligned}\tag{3.91}$$

$u_1$  ve  $u_2$  için elde edilen genel denklemler, başlangıç koşulları yardımıyla Runge-Kutta 2 (RK2) yöntemiyle  $\xi$  için belirlenen aralıkta çözülür.

### 3.7.3 TFY ile Eksponansiyel Değişen Kesit Durumu için Çözüm

Çubuk kesitinin  $A(x) = A_0 e^{-n x/l}$  şeklinde değişmesi durumundaki diferansiyel denklem analitik çözüm kısmında (3.66)'daki gibi çıkarılmıştı. Bu diferansiyel denklem için de Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi sınır koşulları yardımıyla uygulanacaktır.

### Sabit – Serbest Sınır Koşulu

$x = 0$  noktasında  $u = 0$ ,

$x = l$  noktasında  $A(x)(\tilde{c}_{11}u_{,x} + \tilde{e}_{11}\phi_{,x}) = 0$

yani  $u_{,x} = 0$  dır.  $x$  için tanımlanan değerler sırasıyla 0 ve 1 dir. O halde  $x \in [0, 1]$  aralığında hesaplamalar yapılmalıdır. Bu duruma göre elde edilmesi gereken genel çözüm,

$$u(x) = b_1 u_1(x) + b_2 u_2(x) \quad (3.92)$$

#### $u_1(x)$ in belirlenmesi

$u'' - \frac{n}{l}u' + \frac{\rho\omega^2}{\tilde{c}_{11}}u = 0$  diferansiyel denklemi için hayali lineer bağımsız başlangıç koşulları,

$$u_1(0) = c_1$$

$$u_1'(0) = c_2 \quad (3.93)$$

gibi verilip,

$$u_1 = z_1$$

$$u_1' = z_2 \quad (3.94)$$

kabulleri yapılırsa genel denklem;

$$z_1' = z_2$$

$$z_2' = -\frac{n}{l}z_2 - \frac{\rho\omega^2}{\tilde{c}_{11}}z_1 \quad (3.95)$$

olur. Bu durumda yeni değişkenlere göre başlangıç değerleri şu şekilde olacaktır.

$$z_1(0) = c_1$$

$$z_2(0) = c_2 \quad (3.96)$$

$u_2(\xi)$  in belirlenmesi

Benzer şekilde hayali lineer bağımsız başlangıç koşulları,

$$\begin{aligned} u_2(0) &= c_3 \\ u_2'(0) &= c_4 \end{aligned} \quad (3.97)$$

gibi verilip,

$$\begin{aligned} u_2 &= z_3 \\ u_2' &= z_4 \end{aligned} \quad (3.98)$$

kabulleri yapılırsa, genel denklem;

$$\begin{aligned} z_3' &= z_4 \\ z_4' &= -\frac{n}{l} z_4 - \frac{\rho\omega^2}{\bar{c}_{11}} z_3 \end{aligned} \quad (3.99)$$

Bu durumda yeni değişkenlere göre başlangıç değerleri,

$$\begin{aligned} z_3(0) &= c_3 \\ z_4(0) &= c_4 \end{aligned} \quad (3.100)$$

$u_1$  ve  $u_2$  için elde edilen genel denklemler yine başlangıç koşulları yardımıyla Runge-Kutta 2 (RK2) yöntemiyle  $x$  için verilen aralıkta çözülür.

Her iki kesit geometrisi durumu için sınır koşullarından sadece sabit-serbeste ait çözümlere yer verilmiş, diğer sınır koşulları için çözümler aynı yordamla yapılarak sonuçlar Tablo 1-6'da sunulmuştur.

#### 4. SAYISAL SONUÇLAR

Bu çalışmada piezoelektrik çubuk malzemesi olarak PZT-4 seçilmiştir. PZT-4 için kullanılan elastik, piezoelektrik, ve dielektrik sabitler Ek 2 'de sunulmuştur. Analizi yapılan çubuğun geometrisinin iki farklı fonksiyona bağlı olarak şeklinde değiştiği varsayılmıştır. Hesaplamalarda kesit ifadelerinde yer alan  $A_0$ ,  $a$  ve  $b$  sabitleri sırasıyla 1, 0.8 ve -0.2 olarak kabul edilmiştir. Kesit ifadelerinde yer alan  $n$  ise inhomojenlik parametresidir ve kesit ifadesi üstel olarak değişen çubuk için sırasıyla 1, 1.5, 3 alırken kesit ifadesi eksponansiyel olarak değişen çubuk için ise sırasıyla 0.5, 1 ve 2 değerlerini almıştır.

Sınır koşulları, serbest-serbest, sabit-serbest, sabit-sabit olmak üzere üç farklı şekilde belirlenmiş ve her durum için sistemi idare eden diferansiyel denklemler analitik olarak Bessel fonksiyonları ile, sayısal olarak tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile iki farklı kesit durumu içinde çözülmüştür. Hertz cinsinden elde edilen doğal frekans değerleri Tablo 1-6'da sunulmuştur.

## Kesit İfadesinin Üstel Değişen Durumu için Doğal Frekanslar

Tablo 1. Sabit-Sabit sınır koşulu için sonuçlar

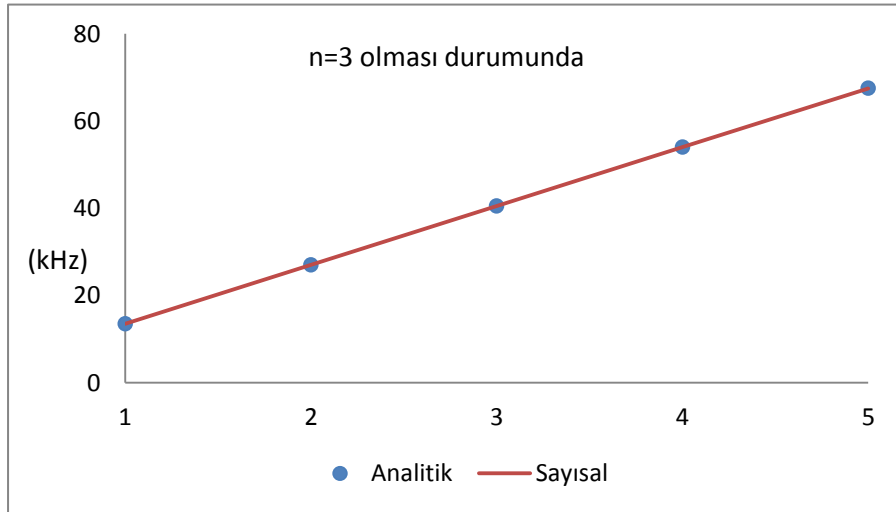
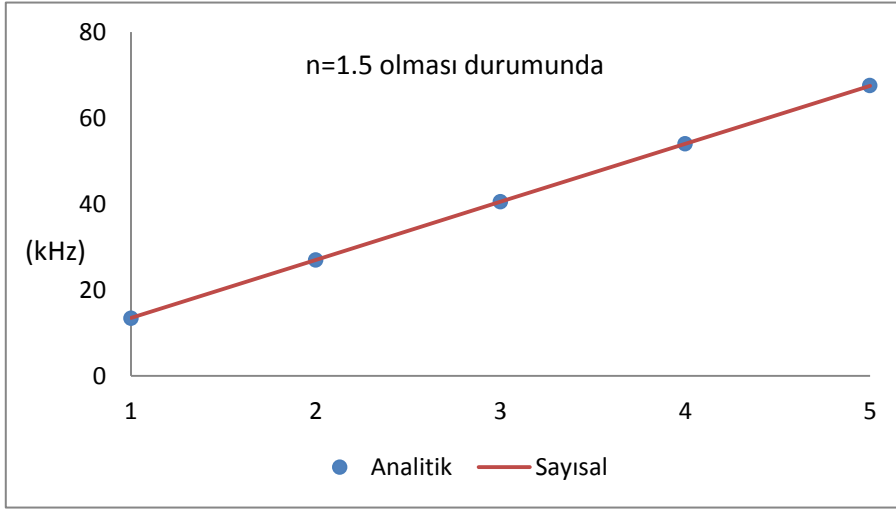
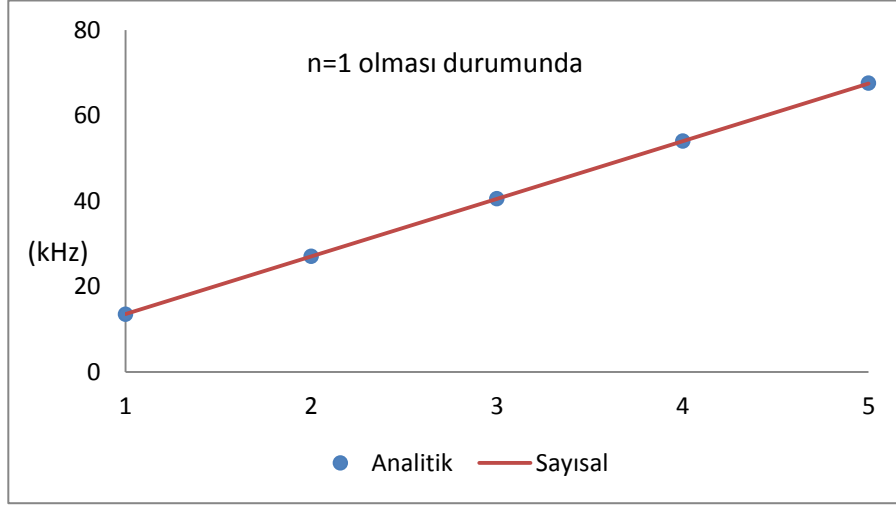
	<b>n=1</b>		<b>n=1.5</b>		<b>n=3</b>	
	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal
<b>1</b>	13496,9431	13496,3929	13500,4669	13499,9223	13553,2114	13552,6788
<b>2</b>	27014,9571	27010,5191	27016,7343	27012,3040	27043,3778	27038,9139
<b>3</b>	40528,3509	40513,3625	40529,5376	40514,5522	40547,3346	40532,3854
<b>4</b>	54040,5679	54009,4060	54041,4585	54010,8808	54054,8154	54019,3878
<b>5</b>	67552,3121	67482,4225	67553,0248	67483,7814	67563,7137	67463,8834

Tablo 2. Serbest-serbest sınır koşulu için sonuçlar

	<b>n=1</b>		<b>n=1.5</b>		<b>n=3</b>	
	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal
<b>1</b>	13553,2114	13552,6565	13588,6659	13584,2068	13575,2239	13720,0823
<b>2</b>	27043,3377	27038,9303	27192,4022	27054,9072	27087,3897	27124,0536
<b>3</b>	40547,3346	40532,3324	40791,2331	40543,0026	40613,3239	40589,2511
<b>4</b>	54054,8154	54019,2983	54387,0744	54027,2884	54142,7484	54061,9779
<b>5</b>	67563,7137	67494,4622	67979,8486	67500,8199	67673,5451	67528,4974

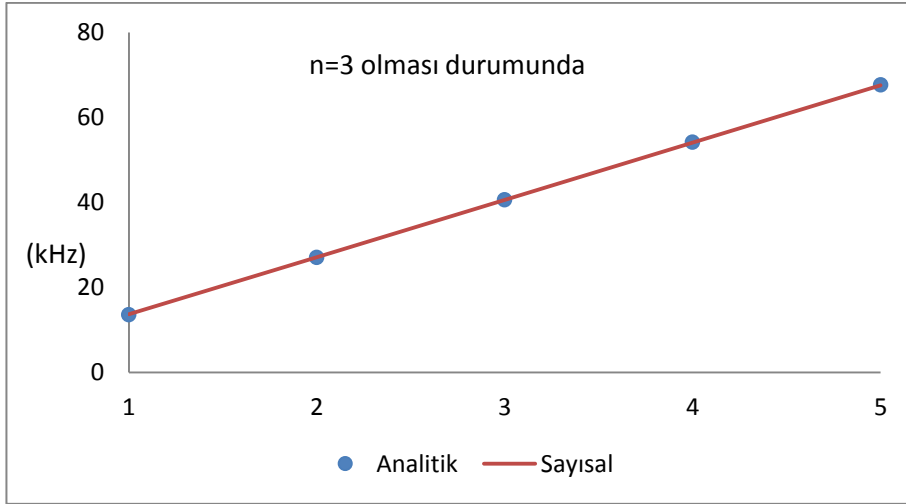
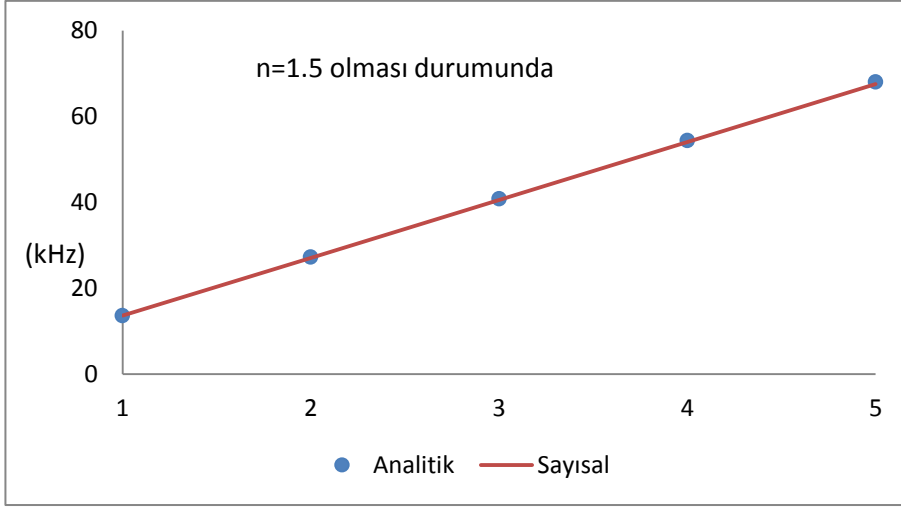
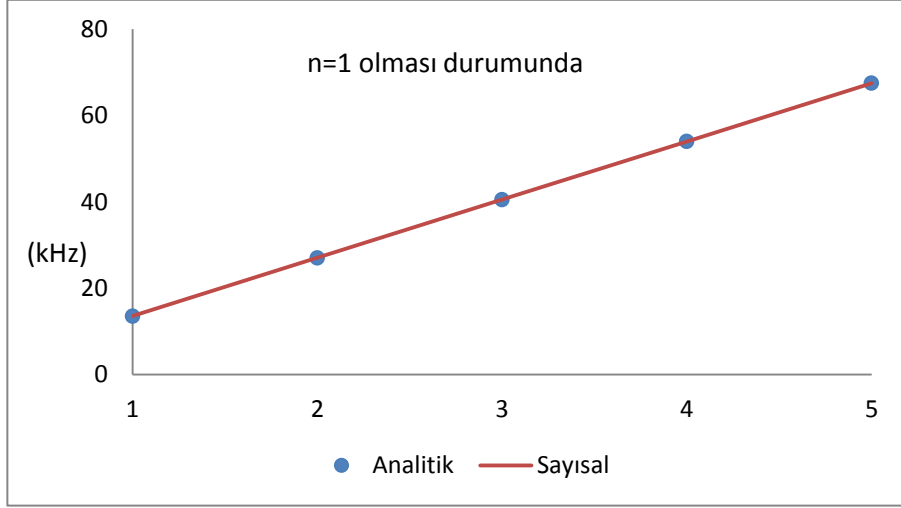
Tablo 3. Sabit-serbest sınır koşulu için sonuçlar

	<b>n=1</b>		<b>n=1.5</b>		<b>n=3</b>	
	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal
<b>1</b>	7153,3742	7151,4866	13388,3729	7354,1901	13525,1212	7977,0044
<b>2</b>	20407,8781	20360,6202	26792,8686	20437,2231	26987,0292	20691,7429
<b>3</b>	33862,8632	33649,4359	40194,1630	33694,8981	40462,7687	33848,1463
<b>4</b>	47349,6263	46781,2629	53595,0117	46811,5812	53942,0491	46915,3534
<b>5</b>	60847,1317	59683,5632	66996,0914	59703,3476	67422,7606	59773,1856

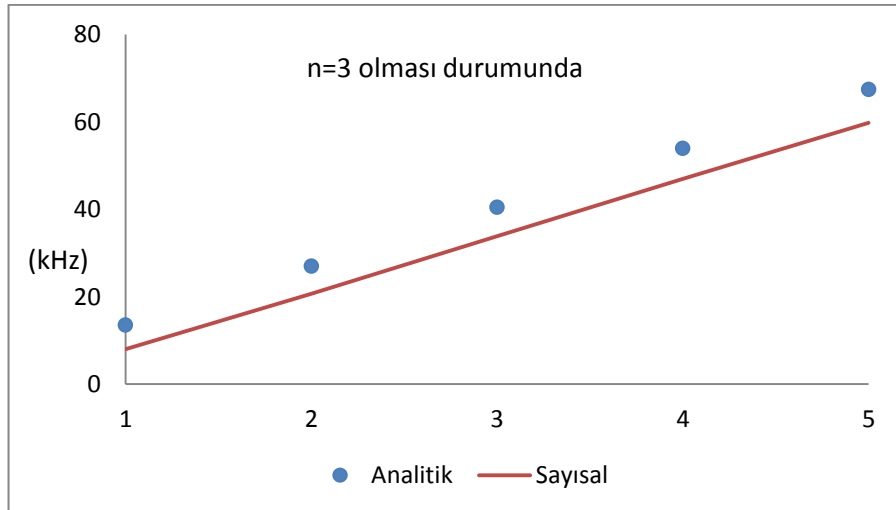
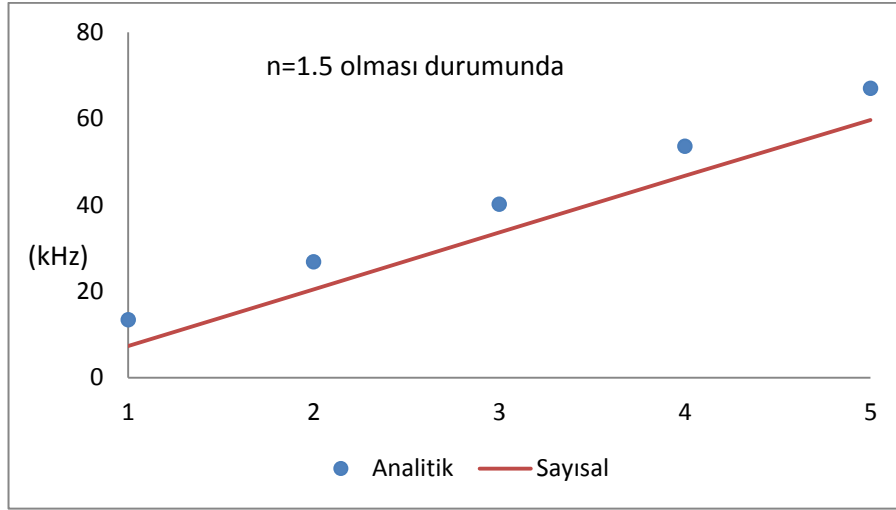
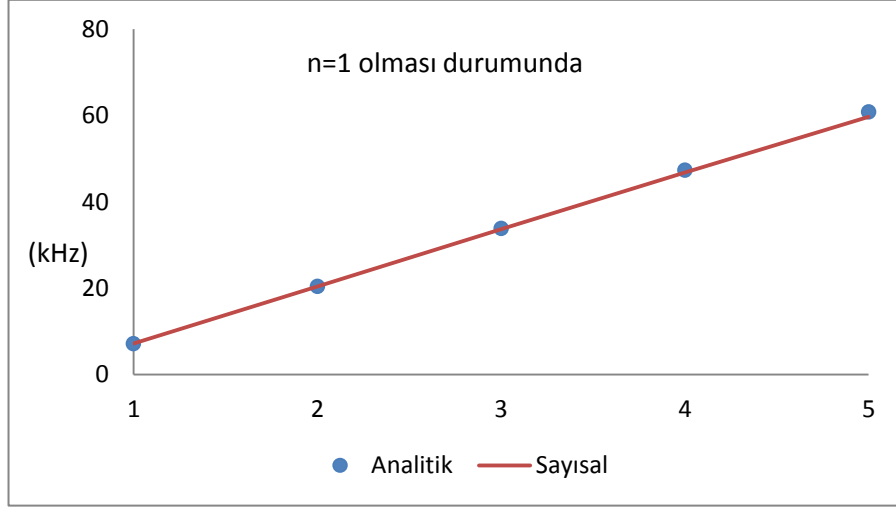


Şekil 4.1 Üstel değişen kesit durumu ve sabit-sabit sınır koşulu için sonuçlar





Şekil 4.2 Üstel değişen kesit durumu ve serbest-serbest sınır koşulu için sonuçlar



Şekil 4.3 Üstel değişen kesit durumu ve sabit-serbest sınır koşulu için sonuçlar

## Kesit İfadesi Eksponansiyel Kesit Durumu için Doğal Frekanslar

Tablo 4. Sabit-Sabit sınır koşulu için sonuçlar

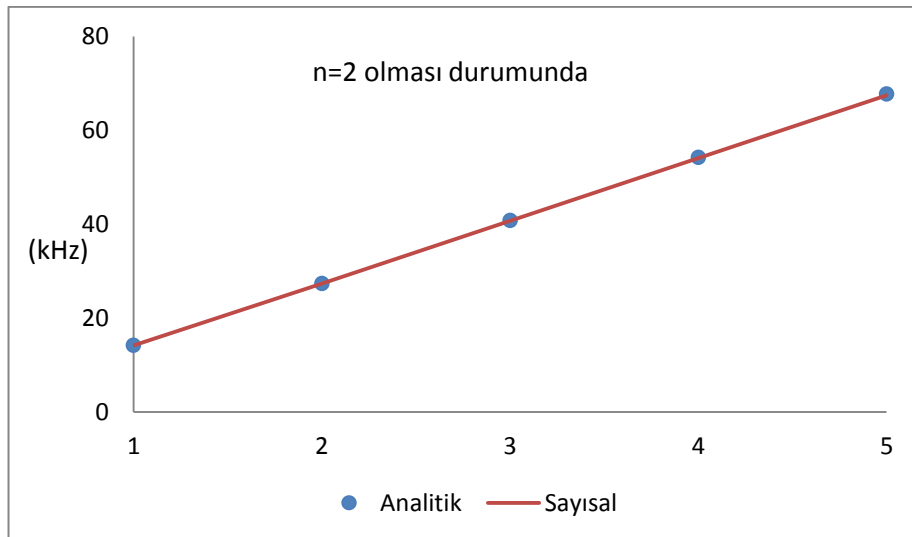
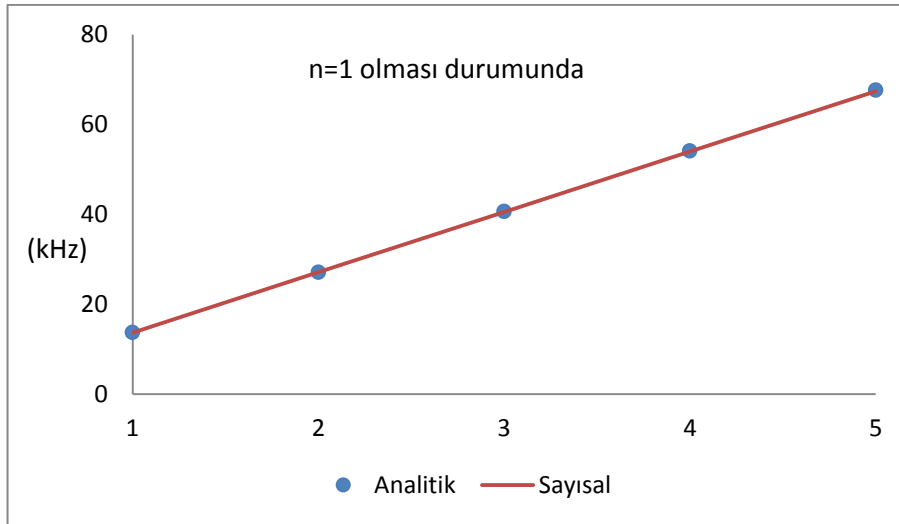
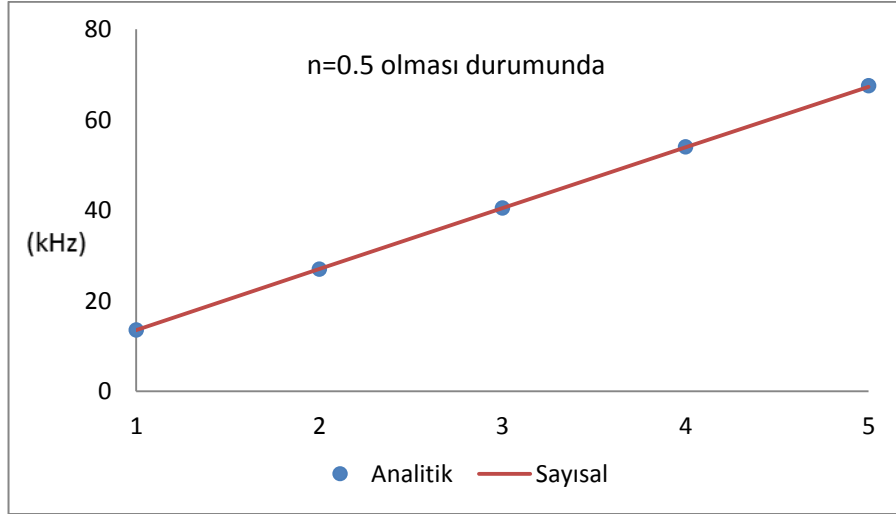
	<b>n=0.5</b>		<b>n=1</b>		<b>n=2</b>	
	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal
<b>1</b>	13553,7448	13551,5896	13681,0816	13679,0871	14178,9978	14177,5815
<b>2</b>	27043,4465	27025,9531	27107,4896	27090,4194	27362,1633	27346,4971
<b>3</b>	40547,3551	40488,363	40590,0973	40531,9847	40760,6181	40705,1085
<b>4</b>	54054,8241	53915,6026	54086,8931	53949,2942	54214,9793	54081,7462
<b>5</b>	67563,7181	67293,559	67589,3779	67321,9588	67691,9197	67431,3668

Tablo 5. Serbest-serbest sınır koşulu için sonuçlar

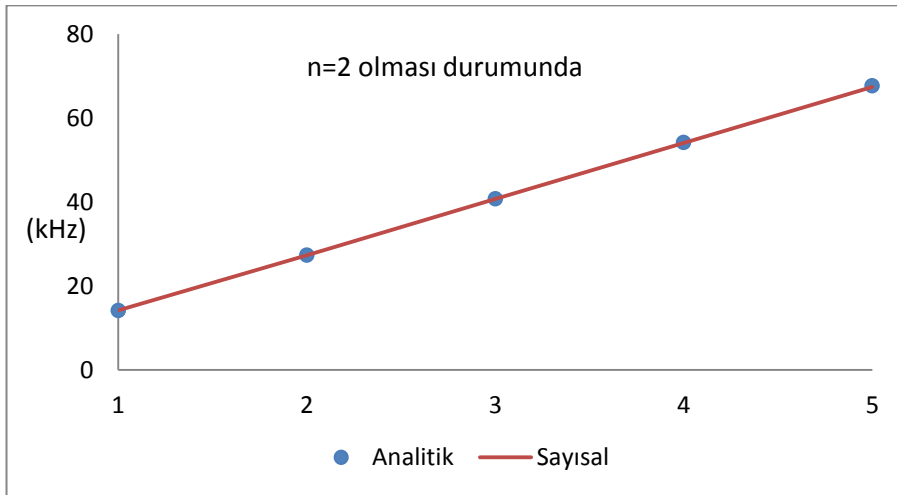
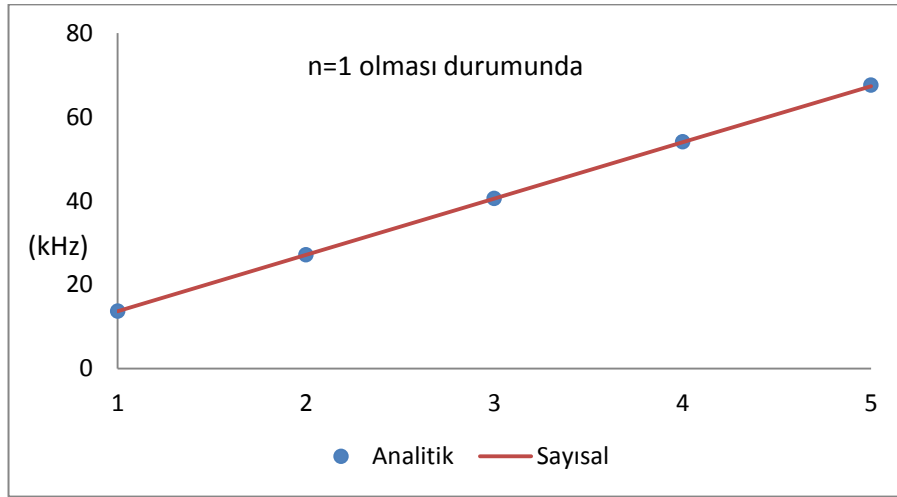
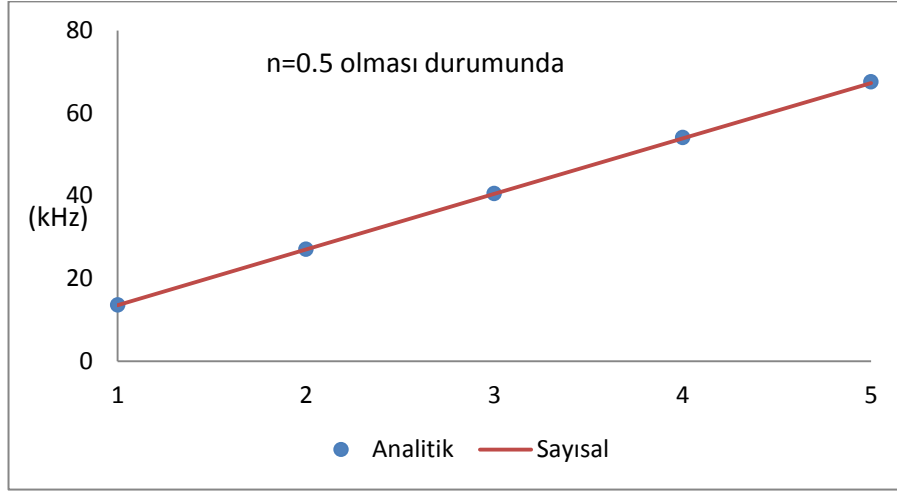
	<b>n=0.5</b>		<b>n=1</b>		<b>n=2</b>	
	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal
<b>1</b>	13553,7448	13552,0231	13681,0816	13679,0871	14178,9978	14177,5815
<b>2</b>	27043,4465	27025,9531	27107,4896	27090,4194	27362,1633	27346,4971
<b>3</b>	40547,3551	40488,3635	40590,0973	40531,9847	40760,6181	40705,1085
<b>4</b>	54054,8241	53915,6026	54086,8931	53949,2942	54214,9793	54081,7462
<b>5</b>	67563,7181	67293,5560	67589,3779	67321,9588	67691,9197	67431,3669

Tablo 6. Sabit-serbest sınır koşulu için sonuçlar

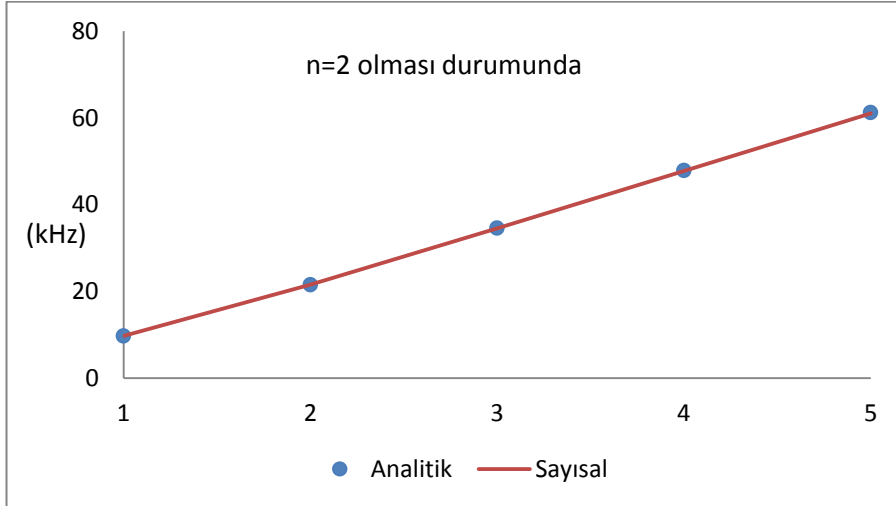
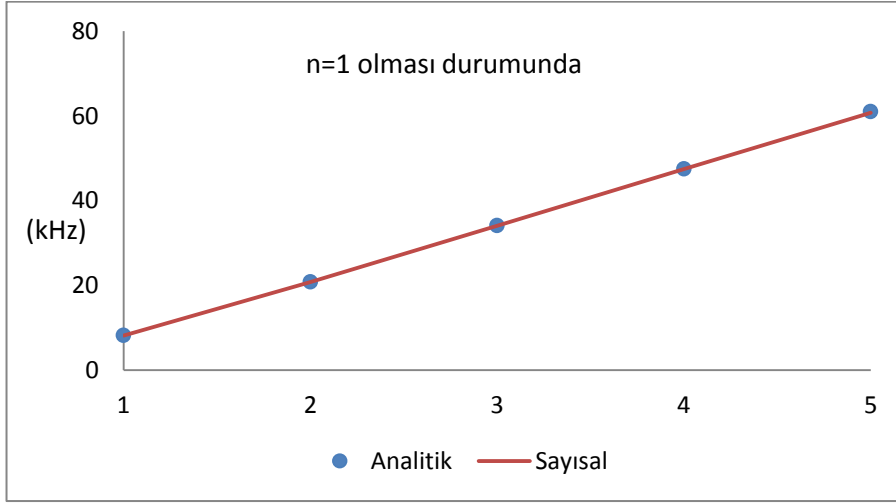
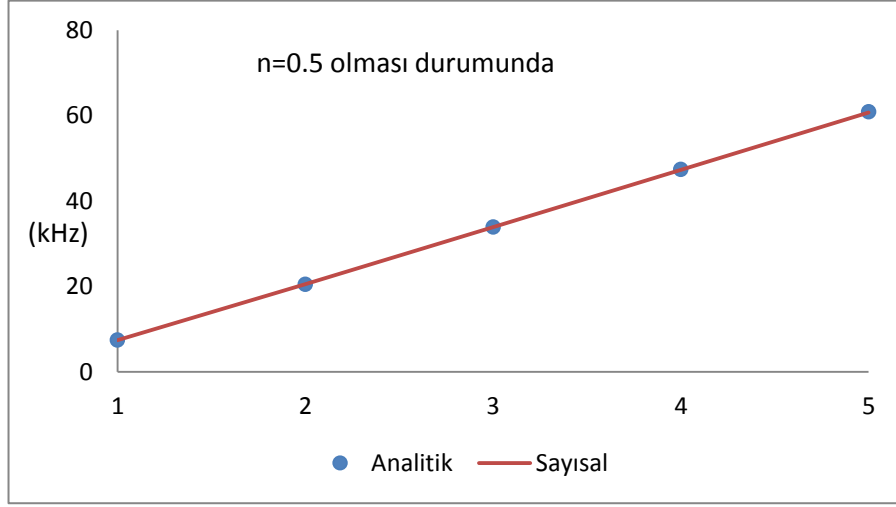
	<b>n=0.5</b>		<b>n=1</b>		<b>n=2</b>	
	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal	Analitik	Sayısal
<b>1</b>	7455,8041	7455,4970	8186,1214	8185,8339	9727,4257	9727,3141
<b>2</b>	20520,1777	20512,6525	20822,7997	20815,3839	21563,3196	21556,5449
<b>3</b>	33930,9197	33896,4676	34116,6655	34082,5618	34582,2715	34549,5804
<b>4</b>	47398,3743	47304,4891	47531,9111	47438,8557	47869,1068	47778,7153
<b>5</b>	60885,0907	60686,9708	60989,2311	60792,7591	61253,0221	61061,1222



Şekil 4.4 Eksponansiyel değişen kesit durumu ve sabit-sabit sınır koşulu için sonuçlar



Şekil 4.5 Eksponansiyel değişen kesit durumu ve sabit-sabit sınır koşulu için sonuçlar



Şekil 4.6 Ekspansiyel değişen kesit durumu ve sabit-serbest sınır koşulu için sonuçlar

## 5. YORUMLAR ve ÖNERİLER

Üniform olmayan kesite sahip piezoelektrik bir çubuğun serbest titreşim analizi yapılmıştır. Piezoelastisite teorisinden elde edilen elektrik ve mekanik denklemler belirli bazı kesit ifadeleri için analitik olarak Bessel fonksiyonları yardımı ile çözülmüştür. Daha sonra aynı problem tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi çözülmüştür. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi benzer problemleri başlangıç değer sistemine çevirerek literatürdeki herhangi bir sayısal yöntem ile çözümlenmesine izin vermektedir. Bu çalışmada ikinci dereceden Runge-Kutta yöntemi kullanılarak sayısal olarak çözüm yapılmıştır. İki yöntem ile elde edilen sonuçların büyük oranda örtüştüğü görülmüştür. Genel olarak probleme doğrusal yaklaşımlar yapılmıştır. Bu yüzden bazı sonuçlarda birtakım hatalar oluşmuştur.

Tamamlayıcı fonksiyonlar yönteminin çubuğun serbest titreşim analizinde sağladığı avantajlar sırasıyla;

- 1) Çözüm yöntemi kesit alanını ifade eden belirli bazı özel fonksiyonlara bağımlı değildir, kesit alanını ifade eden tüm keyfi fonksiyonlar için son derece uygundur.
- 2) Klasik metotlara göre daha az sürede ve daha az maliyetle daha hassas ve daha doğru sonuçlar bulunabilmektedir.

Ayrıca sonuçlar incelendiğinde kesit alandaki değişimin titreşim karakteristiği üzerindeki etkisi görülmektedir. İnhomojenlik parametresindeki artış ile elde edilen doğal frekans değerleri de artmıştır. Özel teknik ihtiyaçlar için gerekli frekans değerlerinin kesitteki küçük değişimlerle sağlanabileceği ortaya çıkmaktadır.

## KAYNAKLAR

- [1] Zabihollah, A., Analysis, Design Optimization and Vibration Suppression of Smart Laminated Beams, Doktora Tezi, Concordia Üniversitesi, Kanada, 2007.
- [2] Yaman, Y., Akıllı Mühendislik Yapıları ve Havacılıktaki Uygulamalar, 2000’li Yıllarda Uzay, Havacılık ve Savunma Teknolojilerinin Öncelikleri Sempozyumu, Hava Harp Okulu, 755-762, İstanbul, 1999.
- [3] Raj, A., Sujith, R.I., Closed-form solutions for the free longitudinal vibration of inhomogeneous rods, *Journal of Sound and Vibration*, 283(3-5), 1015–1030, 2005.
- [4] Li, Q.S., Li, G.Q., Liu, D.K., Exact solutions for longitudinal vibration of rods coupled by translational springs, *International Journal of Mechanical Sciences*, 42(6), 1135–1152, 2000.
- [5] Abrate, S., Vibration of non-uniform rods and beams, *Journal of Sound and Vibration*, 185(4), 703–716, 1995.
- [6] Qiusheng, L., Hong, C., Guiqing, L., Static and dynamic analysis of straight, *Computers & Structures*, 59(6), 1185-1 191, 1996.
- [7] Horgan, C.O. ve Chan, A.M., Vibration of Inhomogeneous strings, rods and membranes. *Journal of Sound and Vibration*, 225, 503-513, 1999.
- [8] Li, Q.S., Fang, J.Q., Jeary, A.P., Calculation of vertical dynamic characteristics of tall buildings with viscous damping, *Int. J. Solids Structure*, 35(24), 1998.
- [9] Eisenberger, M., Exact Longitudinal Vibration Frequencies of a Variable Cross-Section Rod. *Applied Acoustics*, 34, 123-130, 1991.
- [10] Kumar, B.M., Sujith, R.I., Exact solutions for the longitudinal vibration of non-uniform rods, *Journal of Sound and Vibration*, 207, 721–729, 1997.
- [11] Li, Q.S., Free Longitudinal Vibration analysis of Multi-Step Non-Uniform Bars Based on Piecewise Analytical Solutions. *Engineering Structures*, 22, 1205-1215, 2000.
- [12] Candan, S. ve Elishakoff, I., Constructing the Axial Stiffness of Longitudinally Vibrating Rod from Fundamental Mode Shape. *International Journal of Solids and Structures*, 38, 3443-3452, 2001.



- [13] Elishakoff, I. ve Candan, S., Apparently First Closed-Form Solution for Vibrating: Inhomogeneous Beam. *International Journal of Solids and Structures*, 38, 3411-3441, 2001.
- [14] Nachum, S. ve Altus, E., Natural Frequencies and Mode Shapes of Deterministic and Stochastic Non-homogeneous Rods and Beams. *Journal of Sound and Vibration*, 302, 903-924, 2007.
- [15] Çelebi, K., Keleş, İ. ve Tütüncü, N., Homojen Olmayan Çubuk, disk ve Silindirlerin Laplace Transformasyonu ile Zorlanmış Titreşim Analizi, XVI. Ulusal Mekanik Kongresi, Erciyes Üniversitesi, Kayseri, 2009.
- [16] Yardımoglu, B., Aydın, L., Exact longitudinal vibration characteristics of rods with variable cross-sections, *Shock and Vibration*, 18, 555–562, 2011.
- [17] Guo, S., Yang, S., Wave motions in non-uniform one-dimensional waveguides, *Journal of Vibration and Control*, 18(1), 92–100, 2011.
- [18] Eringen, A. C., On the foundations of electroelastostatic, *Int. J. Eng*, 1, 127-153, 1963.
- [19] Syed, E. M., ve ark., Analysis and modeling of a rosen type piezoelectric transformer, *Power Electronics Specialists Conference*, vol.4, 1761-1766, 2001.
- [20] Holmes, J. E., Novel piezoelectric structures for sensor applications, *Journal of The European Ceramic Society*, 2000.
- [21] Xue, H., Yang, J., Hu, Y., Analysis of rosen piezoelectric transformers with a varying cross-section, *IEEE Transactions On Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 55(7), 1632–1639, 2008.
- [22] Wei, J.P., Su, X.Y, Wave propagation in a piezoelectric rod of 6 mm symmetry, 42, 3644–3654, 2005.
- [23] Zhang, C.L., Chen, W.Q., Li, J.Y., Yang, J. S., One-dimensional equations for piezoelectromagnetic beams and magnetoelectric effects in fibers, *Smart Materials and Structures*, 18, 1-12, 2009.
- [24] Deng, Q., Luo, S., Characteristics of wave propagation in section-varying bar covered with piezoelectric layer, *Computers and Structures*, 86, 1297–1304, 2008.
- [25] Nadal, C., ve Pigache, F., Multimodal Electromechanical Model of Piezoelectric Transformers by Hamilton's Principle, *IEEE Transactions on Ultrasonic, Ferroelectrics and Frequency Control*, 56,11, 2009.

- [26] Li, Y., Shi, Z., Free vibration of a functionally graded piezoelectric beam via state-space based differential quadrature. *Composite Structures*, 87(3), 257–264, 2009.
- [27] Arslan, E., Usta, R., Mechanical and electrical fields of piezoelectric curved sensors, *Arch. Mech.*, 66(5), 329-342, Warszawa, 2014.
- [28] Khani, S., Tabandeh, N., Ghomshei, M. M., Natural frequency analysis of non-uniform smart beams with piezoelectric layers, using differential quadrature method. *Composites Part B: Engineering*, 58, 303–311, 2014.
- [29] Davi, F., Dynamics of Linear Piezoelectric Rods, *Journal of Elasticity*, 46, 181-198, 1997.
- [30] Temel, B., Çalım, F.F., Zamanla Değişen Yükler Altında Viskoelastik Helisel Çubukların Zorlanmış Titreşimi, *Niğde Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, Cilt 7, Sayı1, 31-47, 2003.
- [31] Tutuncu, N., Temel, B., A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders , disks and spheres, *Composite Structures*, 91(3), 385–390, 2009.
- [32] Temel, B., Yıldırım, S., Tutuncu, N., Elastic and viscoelastic response of heterogeneous annular structures under arbitrary transient pressure, *International Journal of Mechanical Sciences*, 89, 78–83, 2014.
- [33] Ikeda, J., *Fundamental of Piezoelectricity*, Oxford University Prees, 257 syf, Tokyo, 1990.
- [34] Bayar, S., Malzeme özellikleri sıcaklığa bağlı olan bir piezoelektrik plağın statik analizi, *İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul, 77, 2007.
- [35] Sevgi, H.E., Piezoelektrik yamalı katmanlı kompozit bir kirişin titreşim analizi ve kontrolü, *İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul, 129, 2009.
- [36] An American National Standard IEEE Standard on Piezoelectricity, *IEEE Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control Society*, New York, 1988, ANSI/IEEE Std 176-1987.
- [37] H. J. Ding ve W. Q. Chen, *Three Dimensional Problems of Piezoelasticity*, Nova science Publishers, New York, 2001.

- [38] Doğrukol, S., Piezoelektrik malzemelerin bünye denklemleri, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Isparta, 109, 2002.
- [39] W.Q. Chen, C.L. Zhang, Exact analysis of longitudinal vibration of a nonuniform piezoelectric rod, Second International Conference on Smart Materials and Nanotechnology in Engineering, Proc. Of SPIE 749307, 2009.
- [40] Li, Q.S., Wu, J.R., Xu, J., Longitudinal vibration of multi-step non-uniform structures with lumped masses and spring supports. *Applied Acoustics*, 63(3), 333–350, 2002.
- [41] Li, Q.S., Exact solutions for free longitudinal vibration of stepped non-uniform rods, *Applied Acoustics*, 60(1), 13–28, 2000.
- [42] O’Neil, P.V., İleri Mühendislik Matematiği, (Çeviri: Yaşar Pala), Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, 2013.
- [43] Roberts, S. M., ve Shipman, J.S., Fundamental Marix and Two-Point Boundry-Value Problems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol 28(1), 1979.

## EKLER

### EK 1 Bessel Diferansiyel Denklemi ve Çözümleri

İkinci mertebeden değişken katsayılı diferansiyel denklemler içerisinde Bessel diferansiyel denklemi önemli bir yere sahiptir. Pek çok mühendislik probleminin çözümünde Bessel denklemlerine ve bu denklemlerin çözümü olan fonksiyonlarla sık sık karşılaşılır.

$v$ 'nin herhangi bir parametre olması durumunda,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

şeklindeki denkleme  $v$ . dereceden Bessel diferansiyel denklemi denir. Bu şekildeki bir denklem, ikinci mertebeden değişken katsayılı denklemlerin çözümünde kullanılan Frobenius metodu ile çözülür ve bu çözüm,

$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + v + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v}$$

şeklindedir.  $J_v(x)$  çözümüne birinci tür Bessel fonksiyonu, bu çözümden lineer bağımsız olan

$$Y_v(x) = \frac{J_v(x) \cos vx - J_{-v}(x)}{\sin vx}$$

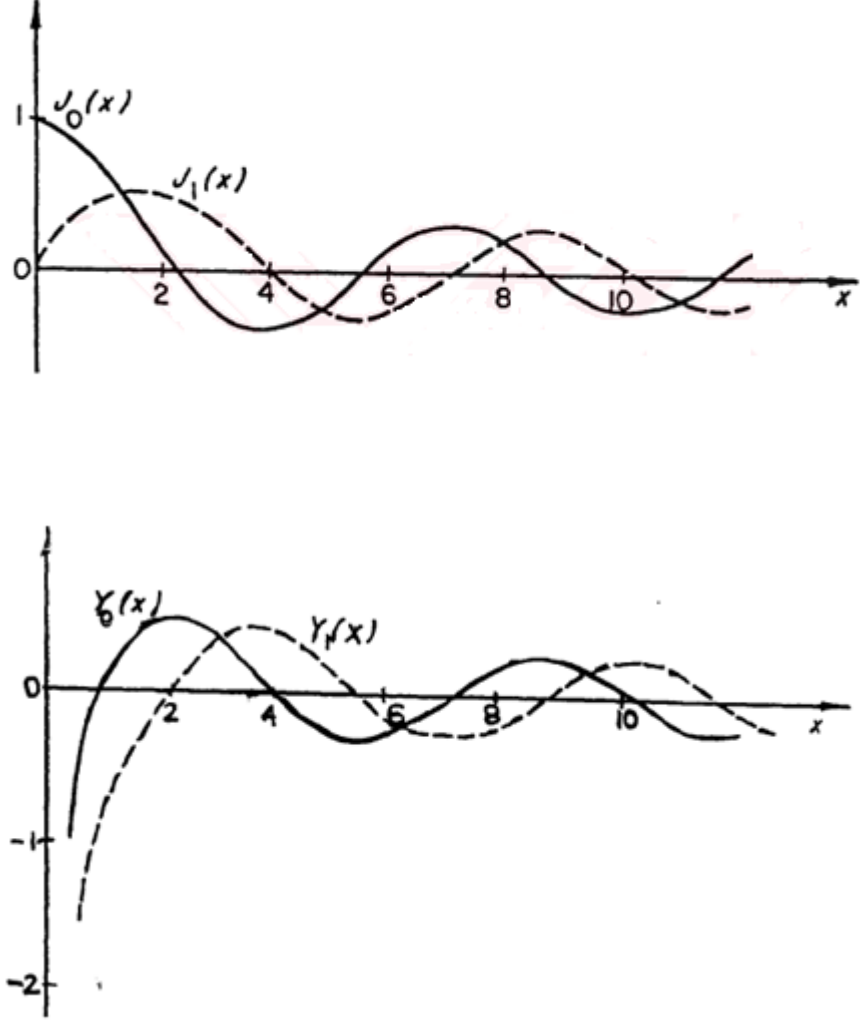
çözüne ise ikinci tür Bessel fonksiyonu denir. Bu durumda diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$y(x) = AJ_v(x) + BY_v(x)$$

şeklindedir. Bu çözüm  $v$ 'nin tamsayı olması halinde elde edilir. Eğer  $v$  bir tamsayı değilse genel çözüm,

$$y(x) = AJ_v(x) + BJ_{-v}(x)$$

olur. Bu şekilde birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonu çözümlerinin grafikleri aşağıdaki gibidir.



Şekil A.1. Birinci ve İkinci Tür Bessel Fonksiyonu

## EK 2 PZT-4 için Sabitler[37]

$$\text{Elastik Sabitler } [c_{pq}] = \begin{bmatrix} 138.499 & 54.016 & 73.643 & 0 & 0 & 0 \\ 54.016 & 138.499 & 73.643 & 0 & 0 & 0 \\ 73.643 & 73.643 & 114.745 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22.6 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ (N/m}^2\text{)}$$

$$\text{Piezoelektrik Sabitler } [e_{jq}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 12.72 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.72 & 0 & 0 \\ -5.2 & -5.2 & 15.08 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (C/m}^2\text{)}$$

$$\text{Dielektrik Sabitler } [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 13.06 & 0 & 0 \\ 0 & 13.06 & 0 \\ 0 & 0 & 11.57 \end{bmatrix} \times 10^{-9} \text{ (C}^2\text{/Nm}^2\text{)}$$

$$\text{Yoğunluk } \rho = 7600 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

## ÖZGEÇMİŞ

- 1. Adı Soyadı** : Mehmet EKER  
**2. Doğum Tarihi** : 20.11.1985  
**3. Ünvanı** : Araştırma Görevlisi  
**4. Öğrenim Durumu** :

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Bitirme Yılı
Lisans	Makine Mühendisliği	Zonguldak Karaelmas Üniversitesi	2004 - 2008
Yüksek Lisans	Makine Mühendisliği A.B.D.	Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi	2012-

### 5. Akademik Ünvanlar:

Görevi	Bölümü	Kurumu	Yıl
Araştırma Görevlisi	Makine Mühendisliği	Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi	2013 -

### 6. İş Tecrübesi:

Görev Unvanı	Görev Yeri	Yıl
Şantiye Şefi	Gündoğan Konstrüksiyon İnş. Ltd. Şti. - Osmaniye	2011-2012
Şantiye Şefi	Teknoçağ Makine İnş. Ltd. Şti. – Ceyhan Botaş	2012