FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜLERİ
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Vesile İNCESU

BAZI CEBİRSEL YAPILAR İÇİN SONLU TÜRETİLMİŞ TİP ÖZELLİĞİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OSMANİYE – 2015

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

BAZI CEBİRSEL YAPILAR İÇİN SONLU TÜRETİLMİŞ TİP ÖZELLİĞİ

Vesile İNCESU

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

OSMANİYE
EYLÜL-2015

TEZ ONAYI

BAZI CEBİRSEL YAPILAR İÇİN SONLU TÜRETİLMİŞ TİP ÖZELLİĞİ

Vesile İNCESU tarafından Yrd. Doç. Dr. Basri ÇALIŞKAN danışmanlığında Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalı'nda hazırlanan bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği/ çokluğu ile **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Basri ÇALIŞKAN ....
Matematik Anabilim Dalı, OKÜ

Üye: Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM ....
Matematik Anabilim Dalı, KSÜ

Üye: Doç. Dr. Dilek ERSALAN ....
Matematik Anabilim Dalı, ÇÜ

Yukarıdaki jüri kararı Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..../......./........ tarih ve ..../............ sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdullah Ali GÜRTEN ....
Enstitü Müdürü, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Bu Çalışma OKÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi Tarafından Desteklenmiştir.

Proje No: OKÜBAP-2014-PT3-004

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, bu çalışma sonucunda elde edilmeyen her türlü bilgi ve ifade için ilgili kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını ve bu tezin Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

....

Vesile İNCESU

ÖZET

BAZI CEBİRSEL YAPILAR İÇİN SONLU TÜRETİLMİŞ TİP ÖZELLİĞİ

Vesile İNCESU
Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı
Danışman :Yrd. Doç. Dr. Basri ÇALIŞKAN

Eylül 2015, 37 sayfa

S bir yarıgrup ve ρ da S üzerinde bir kongrüans olsun. Bu tezde, ρ kongrüansı $S \times S$ direk çarpım yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olarak ele alınmış ve eğer ρ sonlu türetilmiş tip özelliğine (kısaca FDT) sahip ise S nin de FDT özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir.

Buna ilave olarak, M bir monoid ve T de M deki indeksi sonlu olan bir alt monoidi (yani, M, T nin bir küçük genişlemesi) olsun. Eğer T, FDT özelliğine sahip ise M nin de FDT özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir.

Y bir yarılatis, S_α $(\alpha \in Y)$ ayrık yarıgrupların bir ailesi ve $S = \mathcal{S}[Y, S_\alpha, \lambda_{\alpha,\beta}]$ bu yarıgrupların bir güçlü yarılatisi olsun. S yarıgrubunun FDT özelliğine sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşulun Y yarılatisinin sonlu ve her S_α $(\alpha \in Y)$ yarıgrubunun FDT özelliğine sahip olması gerektiği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Monoidler, kongrüanslar, yarıgrupların güçlü yarılatisi, grafikler, sonlu türetilmiş tip özelliği

ABSTRACT

FINITE DERIVATION TYPE FOR SOME ALGEBRIC STRUCTURES

Vesile İNCESU
M.Sc., Department of Mathematics
Supervisor :Assist. Prof. Dr. Basri ÇALIŞKAN

September 2015, 37 pages

Let S be a semigroup and let ρ be a congruence on S. In this thesis, ρ is considered a subsemigroup of $S \times S$ and it is shown that if ρ has finite derivation type (FDT), then so does S.

In addition to this, let M be monoid and let T be a submonoid of finite index in M (that is, M is small extension of T). It is shown that if T has FDT, then so does M.

Let Y be a semilattice, S_α $(\alpha \in Y)$ be a family of disjoint semigroups and let $S = \mathcal{S}[Y, S_\alpha, \lambda_{\alpha,\beta}]$ be a strong semilattice of semigroups. It is shown that the semigroup S has FDT if and only if Y is finite and every semigroup S_α $(\alpha \in Y)$ has FDT.

Key Words: Monoids, congruences, strong semilattice of semigroups, graphs, finite derivation type property

Sevgili Eşim ve Güzel Kızlarıma

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tez konumun belirlenerek tez çalışmamın yürütülmesini üstlenen, çalışmalarım süresince değerli bilgi ve tecrübelerini katkılarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Basri ÇALIŞKAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca sonsuz manevi desteği ile daima arkamda duran sevgili eşim Halil İNCESU'ya, çalışmama katkılarından dolayı OKÜ Matematik Blüm Başkanı Sayın Yrd. Doç. Dr. Cennet ESKAL'a ve OKÜ Matematik Blümü'nün diğer akademik ve idari personellerine teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

FP_∞	Homolojik sonluluk koşulu
$\langle A \mid R \rangle$	Monoid (ya da yarıgrup) takdimi
$S \times S$	S kümesinin kartezyen çarpımı
$\mathcal{S}[Y, S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}]$	yarıgrupların güçlü yarılatisi
$\langle A \rangle$	A kümesi tarafından doğrulan yarıgrup
S^1	S yarıgrubuna 1 elemanı eklenerek elde edilen monoid
$[S : T]$	T Yarıgrubunun S yarıgrubundaki indeksi
$\mathcal{B}[Y, S_\alpha]$	Yarıgrupların bandı
A^+	A kümesinden oluşturulan en az bir uzunluklu kelimelerin kümesi
A^*	$A^+ \cup \{1\}$
$R^\#$	R yi içeren en küçük kongrüans
A^+/ρ	A^+ yarıgrubunun ρ kongrüansı ile bölüm yarıgrubu
A^*/ρ	A^* monoidinin ρ kongrüansı ile bölüm yarıgrubu
$l(w)$	w kelimesinin uzunluğu
$x\rho$	x elemanının ρ kongrüansına göre denklik sınıfı
$w_1 \equiv w_2$	w_1 ve w_2 kelimeleri özdeş
$w_1 \equiv \alpha_1, \alpha_{2,\ldots}, \alpha_n \equiv w_2$	w_1 kelimesinden w_2 kelimesine sonlu bir dizi
$irr(R)$	R yeniden yazma sistemine göre indirgenemez elemanların kümesi
$[x]$	x kelimesinin denklik kümesi
$x \rightarrow y$	x kelimesinin y kelimesine indirgenmesi (tek adımda)
$\overset{\circ}{\rightarrow}$	Boş indirgeme (etkisiz)
$x \overset{*}{\leftrightarrow} y$	x kelimesinin y kelimesine indirgenmesi (birden fazla adımda)
(U, r, ε, V)	Γ grafiğinde bir kenar
$P_+(\Gamma)$	Γ grafiğinde U köşesinden V köşesine bir yol
$P_-(\Gamma)$	Γ grafiğinde V köşesinden U köşesine bir yol
$P^{(2)}(\Gamma)$	Başlangıç ve bitiş köşeleri aynı olan kapalı yolların kümesi

1. GİRİŞ

Cebirsel yapıların sonluluk koşulları ile ilgili çalışmalar matematikçiler için en önemli çalışma konularından birisidir. Periyodiklik, yerel sonluluk, residual (artıksal) sonluluk, sonlu takdim edilebilirlik, çözülebilir kelime problemine sahip olma, yeniden yazma sistemine sahip olma ve sonlu türetilmiş tip özelliğine sahip olma gibi özellikler sonluluk koşullarından bazılarıdır. Bu özellikler kendi aralarında ve diğer bazı cebirsel problemler arasında ilginç ilişkilere sahiptirler. Özellikle tam yeniden yazma sistemi (confluent ve Notherian özelliklerine sahip bir yeniden yazma sistemi) kelime probleminin çözülebilir olup olmadığında kullanılır.

Yeniden yazma sistemleri ile monoidlerin takdimleri arasındaki ilişki son yıllarda oldukça ilgi çekmektedir. Tam yeniden yazma sistemine sahip sonlu takdimli bir monoid için kelime probleminin çözülebilir olduğu iyi bilinen bir gerçektir. Bilindiği gibi bu sonuç, alınan keyfi iki kelimenin sonlu adımda tek bir indirgenmiş kelimeye sahip olması gerçeği ile mümkündür. Ancak bu sonucun tersi olan ”Çözülebilir kelime problemine sahip her sonlu takdimli monoid sonlu ve tam yeniden yazma sistemi ile ifade edilen bir takdime sahip midir?” problemi yıllardır çözülemeyen bir problem olarak kalmıştır.

Bu problem 1987 yılında Squier tarafından negatif olarak yanıtlandı (Squier, 1987). Squier bu çalışmasında çözülebilir kelime problemine sahip sonlu takdimli monoidler olduğunu ve bu monoidlerin takdimlerinin sonlu ve tam yeniden yazma sistemine sahip olmadığını göstermiştir. Bu çalışmadaki yaklaşım homolojik cebire dayanmaktadır ve gösterilmiştir ki sonlu ve tam yeniden yazma sistemine sahip bir monoid aynı zamanda homolojik sonluluk durumu olan FP_3 özelliğini de sağlamaktadır. Bu gereklilik ise aşağıdaki problemi ortaya çıkarmıştır.

”Acaba FP_3 özelliği, çözülebilir kelime problemine sahip sonlu takdimli bir monoidin sonlu ve tam yeniden yazma sistemine sahip olabilmesi için sadece gerekli değil aynı zamanda yeterli midir?”

Bu problem için de hala çözüm aranırken Kobayashi, (Squier, 1987) deki çalışmasını FP_3 özelliğine göre daha güçlü bir sonluluk durumu olan FP_∞ özelliği için geliştirmiş olup, sonlu ve tam yeniden yazma sistemine sahip bir monoidin FP_∞ homolojik özelliğini sağladığını ispatlamıştır (Kobayashi, 1990). Bu sonuç da doğal olarak bu ilişkinin tersinin doğru olup olmadığını doğurmuştur. Bu durumun sağlanmadığı, (Squier, 1994) de, sonlu türetilmiş tip özelliğinden (kısaca FDT) yararlanılarak gösterilmiştir. Squier (Squier, 1994) deki bu çalışmasında FDT özelliğini literatüre kazandırmış; sonlu ve tam yeniden yazma sistemine sahip bir monoidin bu özelliği sağlaması gerektiği gibi önemli bir sonucu ispatlamıştır. Squier bu çalışmasında ayrıca, FDT özelliğinin monoidin takdiminden bağımsız olduğunu yani bu özelliğin monoid takdimleri için değişmez bir özellik olduğunu göstermiştir.

Örneğin, bir M monoidi için $A = \{a, b, c\}$ doğuray kümesi ve R de

$$cbab \to cbcb, \quad cbbb \to cbcb, \quad cbca \to cacb,$$

$$cbaa \to cbca, \quad cbba \to cbca,$$

$$caab \to cacb, \quad cabb \to cacb,$$

$$caaa \to caca, \quad caba \to caca$$

yeniden yazma kurallarını içeren bir bağıntılar kümesi olmak üzere, $\langle A \,|R\rangle$ takdimi tarafından tanımlanan M monoidi bir sonlu tam yeniden yazma sistemidir. Dolayısıyla sonlu M monoidi FDT özelliğine sahiptir (Cain vd., 2014).

Diğer taraftan, $A = \{a, b_i, c_i, d_i : i = 1, 2, 3\}$ doğuray kümesi ve R de

$$b_i a \to a b_i \qquad i \in \{1, 2, 3\}$$

$$c_j b_j \to c_1 b_1 \qquad j \in \{2, 3\}$$

$$b_j d_j \to b_1 d_1 \qquad j \in \{2, 3\}$$

yeniden yazma kurallarını içeren bir bağıntılar kümesi olmak üzere, $\langle A \,|R\rangle$ takdimi tarafından tanımlanan M monoidi FDT özelliğini sağlayan ama bir sonlu tam yeniden yazma sistemi olmayan bir monoid örneği (Katsura ve Kobayashi, 1997) verilmiştir.

Bu sonlu türetilmiş tip özelliğinin altında iki ana fikir yatmaktadır. Bunlardan birincisi, her bir monoid takdimine bir grafiğin ilişkilendirilmiş olmasıdır. İkinci ana fikir ise, bu grafikteki bütün yolların kümesi üzerindeki denklik bağıntılarının özel bir sınıfını (koleksiyonunu) belirlemeye dayanmaktadır. Bu denklik bağıntıları homotopi bağıntıları olarak adlandırılır.

Bir sonlu ve tam yeniden yazma sistemine sahip bir monoid için FDT özelliği bir gerekli koşul olduğundan ve bu özellik monoid takdimleri için değişmez bir özellik olduğundan hangi monoidlerin veya hangi monoid yapılarının bu FDT özelliğini sağladıklarının araştırılması önem arz etmektedir. Bu araştırmaların bazıları (Wang, 1998), (Otto, 1999), (Pride ve Wang, 2000), (Wang, 2007), (Malheiro, 2006), (Malheiro, 2009) ve (Malheiro, 2012) örnek olarak verilebilir.

Sonlu tam yeniden yazma sistemine sahip olan bir monoidin FDT özelliğini sağlıyor olması bilinmesine rağmen, monoid sonlu doğuray kümesinin (homotopi bağıntısı) bulunması da bir o kadar önemli araştırma konusudur.

Bu düşüncelerle, bu tezin birinci bölümünde öncelikle tezde kullanılacak olan yarıgrup teorisi ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, S bir yarıgrup ve ρ da S üzerinde $S \times S$ direk çarpım yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olarak ele alınmış bir kongrüans olmak üzere eğer ρ FDT özelliğine sahip ise S nin de FDT özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir.

Tezin dördüncü bölümde, M bir monoid ve T de M deki indeksi sonlu olan bir alt monoidi (yani, M, T nin bir küçük genişlemesi) olmak üzere eğer T, FDT özelliğine sahip ise M nin de FDT özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir.

Tezin son bölümünde ise Y bir yarılatis, S_α $(\alpha \in Y)$ ayrık yarıgrupların bir ailesi ve $S = \mathcal{S}[Y, S_\alpha, \lambda_{\alpha,\beta}]$ bu yarıgrupların bir güçlü yarılatisi olmak üzere S yarıgrubunun FDT özelliğine sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşulun Y yarılatisinin sonlu ve her S_α $(\alpha \in Y)$ yarıgrubunun FDT özelliğine sahip olması gerektiği gösterilmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR VE SONUÇLAR

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan yarıgrup teorideki temel tanım ve teoremlerden bazıları ve bunlarla ilgili örnekler verilmiştir. Bu materyallerle ilgili daha detaylı bilgiler (Howie, 1995), (Ruskuc, 1995) ve (Sims, 1994) kaynaklarından elde edilebilir.

2.1 Yarıgruplar

Tanım 2.1 S boş kümeden farklı bir küme olsun. $S \times S$ den S ye tanımlı bir fonksiyona *ikili işlem* denir. Bu ikili işlem $x, y \in S$ için $x \cdot y$ şeklinde gösterilir. Genelde $x \cdot y$ yerine kısaca xy yazılır. Eğer "$\cdot$", S üzerinde bir ikili işlem ise $(S, \cdot)$ ikilisine bir *grupoid* denir.

Tanım 2.2 $(S, \cdot)$ bir grupoid olsun. Eğer "$\cdot$" ikili işlemi S üzerinde birleşme özelliğine sahip, yani her $x, y \in S$ için

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

ise $(S, \cdot)$ grupoidine bir *yarıgrup* denir.

Genellikle $(S, \cdot)$ yerine kısaca S yazılır ve "ikili işlem" yerine "çarpma işlemi" kullanılır.

Tanım 2.3 S yarıgrubu değişme özelliğine sahip, yani her $x, y \in S$ için

$$xy = yx$$

ise S ye *değişmeli yarıgrup* denir.

Tanım 2.4 S bir yarıgrup olsun. Eğer bir $e \in S$ için $e^2 = e$ oluyorsa e ye *idempotent eleman* denir. Eğer S yarıgrubunun tüm elemanları idempotent ise S yarıgrubuna bir *band* denir. Eğer bir S yarıgrubu hem band hem de değişmeli ise S ye bir *yarılatis* denir.

Tanım 2.5 S bir yarıgrup olsun. Eğer her $s \in S$ için

$$1s = s = s1$$

olacak şekilde bir $1 \in S$ varsa, 1 elemanına S nin *birim elemanı* ve S ye de bir *monoid* denir.

Bir S yarıgrubunun en fazla bir tane birim elemanı vardır. Eğer S birim elemana sahip değil ise ekstra bir birim eleman kolayca eklenebilir. Her $s \in S$ için

$$s1 = 1s = s \text{ ve } 11 = 1$$

olarak tanımlanırsa $S \cup \{1\}$ bir monoid olur. S^1 kümesi

$$S^1 = \begin{cases} S, & S \text{ birim elemana sahip ise} \\ S \cup \{1\}, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. S^1 kümesine (eğer gerekli ise) *birim eleman eklenerek S den elde edilen monoid* denir.

Tanım 2.6 Bir $(S, \cdot)$ monoidinde her $a \in S$ için $ab = 1$ olacak şekilde bir $b \in S$ varsa $(S, \cdot)$ ikilisine bir *grup* denir.

Eğer bir monoidde bir elemanının tersi varsa tektir. Bir a elemanının tersi a^{-1} ile gösterilir.

Tanım 2.7 S bir yarıgrup ve $H \subseteq S$ olsun. Her $a, b \in H$ için $ab \in H$ ise H ye S nin bir *alt yarıgrubu* denir. S birim elemanı 1_S olan bir monoid ve H de S nin bir alt yarıgrubu olsun. Eğer $1_S \in H$ ise H de bir monoid olup, bu monoide S nin bir alt monoidi denir.

Verilen bir S yarıgrubunun bütün alt yarıgruplarının kesişiminin de, S nin bir alt yarıgrubu olduğu açıktır. Bir S yarıgrubunun bir A alt kümesi verilsin. O halde S nin A yı içeren tüm alt yarıgruplarının arakesiti de bir yarıgruptur. Bu yarıgruba A tarafından doğurulan yarıgrup denir ve $\langle A \rangle$ ile gösterilir. $\langle A \rangle$ yarıgrubu S nin A yı içeren (kapsamaya göre) en küçük alt yarıgrubudur.

Tanım 2.8 $S = \langle A \rangle$ ise S ye A tarafından doğurulmuş ve A ya da S nin bir *doğuray kümesi* denir.

$$S = \langle S \rangle$$

olacağı açıktır.

Tanım 2.9 $S = \langle A \rangle$ ve A nın S yi doğuracak şekilde hiçbir özalt kümesi yok ise S ye A tarafından *minimal olarak doğurulmuş* ve A ya da S nin bir *minimal doğuray* kümesi denir.

Tanım 2.10 Eğer S nin, $S = \langle A \rangle$ olacak şekilde sonlu bir A alt kümesi varsa S ye *sonlu doğuraylı* denir.

Tanım 2.11 S ve T iki yarıgrup ve f de S den T ye bir dönüşüm (fonksiyon) olsun. Eğer her $x, y \in S$ için

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

ise f ye bir *homomorfizm* denir.

Tanım 2.12 S bir yarıgrup olsun. Eğer $SL \subseteq L$ $(RS \subseteq R)$ ise S nin boştan farklı L (R) alt kümesine S nin *sol ideali* (*sağ ideali*) denir. Eğer S nin boştan farklı bir I alt kümesi hem sağ hem de sol ideal ise I ya S nin bir *ideali* (*iki yanlı ideali*) denir.

Dikkat edilecek olursa bir yarıgrubun iki yanlı her ideali bir alt yarıgruptur. Fakat bir alt yarıgrubun bir ideal olması gerekmez.

Tanım 2.13 S bir yarıgrup ve T de S nin bir alt yarıgrubu olsun. S nin kardinalitesine T nin S deki indeksi denir ve $[S : T]$ ile gösterilir. Eğer T nin S deki indeksi sonlu ise S ye T nin bir küçük genişlemesi (ya da T ye S nin bir büyük alt yarıgrubu) denir.

Tanım 2.14 S bir yarıgrup I da S nin bir ideali olsun. Eğer I, S nin bir büyük alt yarıgrubu oluyorsa I ya S nin bir *büyük ideali* denir.

Tanım 2.15 S bir yarıgrup olsun. Eğer S, ayrık alt yarıgruplarının bir birleşimi ise S ye *yarıgrupların birleşimi* denir.

Tanım 2.16 S bir yarıgrup, Y bir band ve $\alpha \in Y$ için S_α lar S nin ayrık alt yarıgrupları olsun. Eğer $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ ve her $\alpha,\ \beta \in Y$ için $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$ ise S ye *yarıgrupların bir bandı* denir ve $\mathcal{B}[Y, S_\alpha]$ ile gösterilir.

Tanım 2.17 S bir monoid olsun. Eğer S, ayrık alt monoidlerin bir birleşimi ise S ye *monoidlerin birleşimi* denir.

Tanım 2.18 S bir monoid, Y bir band ve $\alpha \in Y$ için S_α lar S nin ayrık alt monoidleri olsun. Eğer $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ ve her $\alpha,\ \beta \in Y$ için $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$ ise S ye *monoidlerin bir bandı* denir ve $\mathcal{B}[Y, S_\alpha]$ ile gösterilir.

Tanım 2.19 $\mathcal{B}[Y, S_\alpha]$ yarıgrupların (monoidlerin) bir bandı olsun. Eğer Y ayrıca bir yarılatis ise S ye yarıgrupların (monoidlerin) yarılatisi denir ve $\mathcal{S}[Y, S_\alpha]$ ile gösterilir.

2.2 Bağıntılar, Denklikler ve Kongrüanslar

Tanım 2.20 X boştan farklı bir küme olmak üzere $X \times X$ in bir ρ alt kümesine X üzerinde bir *bağıntı* denir. Tüm bağıntıların kümesi $B(X)$ ile gösterilir.

Örnek 2.21 , $1_X = \{(x,x) : x \in X\}$ ve $X \times X$ kümeleri X üzerinde birer bağıntıdır.

ρ, X üzerinde bir bağıntı olmak üzere $(x,y) \in \rho$, $x\rho y$ şeklinde veya $x \equiv y(mod\rho)$ şeklinde de yazılabilir. Ayrıca, her $\rho \in B(X)$ için ρ nun ters bağıntısı (tersi)

$$\rho^{-1} = \{(y,x) \in X \times X : (x,y) \in \rho\}$$

olarak tanımlanır.

$B(X)$ üzerindeki çarpma işlemi herhangi iki $\rho,\ \sigma \in B(X)$ elemanı için

$$\rho \circ \sigma = \{(x,y) \in X \times X : z \in X,\ (x,z) \in \rho,\ (z,y) \in \sigma\}$$

olarak tanımlanır. $B(X)$, $\circ$ ikili işlemi ile bir yarıgruptur. Ayrıca $(B(X),\circ)$, birim elemanı 1_X olan bir monoiddir.

Tanım 2.22 ρ, X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. Eğer

1. $1_X \subseteq \rho$ ise ρ ya *yansımalı*;
2. $\rho^{-1} = \rho$ ise ρ ya *simetrik*;
3. $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ ise ρ ya *geçişmeli*; bağıntı denir.

Tanım 2.23 Eğer ρ bağıntısı yansımalı, simetrik ve geçişmeli bağıntı ise ρ ya X üzerinde bir *denklik bağıntısı* denir. $x\rho = \{y \in X : (x,y) \in \rho\}$ olarak tanımlanan bu kümeye x in *denklik sınıfı* denir. Ayrıca

$$X/\rho = \{x\rho : x \in X\}$$

kümesine X in ρ vasıtasıyla oluşturulan *bölüm kümesi* denir.

Eğer $\{\rho_i : i \in I\}$, X kümesi üzerindeki denklik bağıntılarının boştan farklı bir ailesi ise

$$\bigcap_{i\in I} \rho_i$$

de X üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

R, X kümesi üzerinde herhangi bir bağıntı ise $R \subseteq X \times X$ olduğundan R yi içeren denklik bağıntılarının ailesi boştan farklıdır. O halde R yi içeren tüm denklik bağıntılarının kesişimi yine R yi içeren bir denklik bağıntısı olup, bu denklik bağıntısı R yi içeren en küçük denklik bağıntısıdır. Bu en küçük denklik bağıntısına *R tarafından doğrulan denklik bağıntısı* denir.

Tanım 2.24 S bir yarıgrup ve R de S üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer her $a \in S$ ve $(s,t),\ (s',t') \in R$ için

1. $(as,at) \in R$ ise R bağıntısına *sol uyumlu*;
2. $(sa,ta) \in R$ ise R bağıntısına *sağ uyumlu*;
3. $(ss',tt') \in R$ ise R bağıntısına *uyumlu* bağıntı denir.

Ayrıca, sol uyumlu denklik bağıntısına bir *sol kongrüans*, sağ uyumlu denklik bağıntısına bir *sağ kongrüans* ve uyumlu denklik bağıntısına bir *kongrüans* denir.

Tanım 2.25 R, bir S yarıgrubu üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. S üzerinde R yi içeren en küçük kongrüansa *R nin doğurduğu kongrüans* denir ve $R^{\#}$ ile gösterilir. Bu durumda R bağıntısına, *$R^{\#}$ kongrüansının doğuray kümesi* denir.

Tanım 2.26 S bir yarıgrup ve ρ da S üzerinde bir kongrüans olsun. S nin ρ vasıtasıyla oluşturulan bölüm kümesi S/ρ üzerinde çarpma işlemi, her $x\rho,\ y\rho \in S/\rho$ için

$$(x\rho)(y\rho) = (xy)\rho$$

şeklinde tanımlansın. S/ρ, bu çarpma işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba S nin ρ vasıtasıyla oluşturulan *bölüm yarıgrubu* denir.

Tanım 2.27 S ve T iki yarıgrup ve ρ da S üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer

$$S/\rho \cong T$$

ise S ye T nin ρ ile bir *genişlemesi* denir.

2.3 Takdimler

Bu kısımda yarıgrup ve monoid takdimleri ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

Tanım 2.28 A boş olmayan bir küme (alfabe) olsun. Her $1,\ldots,n \in A$ için

$$w \equiv a_1 a_2 \cdots a_n$$

ifadesine uzunluğu(boyu) n olan bir kelime denir ve kelimenin uzunluğu (boyu) $l(w)$ ile gösterilir. Eğer $l(w)$ sonlu bir tamsayı ise w kelimesine bir sonlu kelime denir. Eğer $l(w) = 0$ ise w kelimesine boş kelime denir ve boş kelime 1 ile gösterilir.

Tanım 2.29 A boş olmayan bir küme olmak üzere, A üzerindeki tüm boş olmayan sonlu kelimelerin kümesi A^+ ile gösterilir. Diğer bir ifade ile;

$$A^+ = \left\{ a_1 a_2 \cdots a_n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } a_1, a_2, \ldots, a_n \in A \right\}$$

olur. Ayrıca

$$A^* = \left\{ a_1 a_2 \cdots a_n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \text{ ve } a_1, a_2, \ldots, a_n \in A \right\} = A^+ \cup \{1\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.30 A^+ üzerindeki çarpma her $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_m \in A^+$ için

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)(b_1 b_2 \cdots b_m) = a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m$$

olarak tanımlanırsa, bu durumda A^+ kümesi üzerinde tanımlanan çarpma işlemi ile bir yarıgrup olur. A^+ yarıgrubuna, A üzerindeki serbest yarıgrup denir.

Tanım 2.31 A bir alfabe ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olmak üzere, $\langle A|R \rangle$ ikilisine bir yarıgrup takdimi denir ve ρ , A^+ üzerinde R tarafından doğrulmuş kongrüans olmak üzere, $\langle A|R \rangle$ tarafından takdim edilen yarıgrup A^+/ρ bölüm yarıgrubudur. Eğer S yarıgrubu A^+/ρ ya izomorfik ise $\langle A|R \rangle$ ye S nin bir yarıgrup takdimi denir.

Eğer A ve R sonlu kümeler ise $\langle A|R \rangle$ ye bir sonlu takdim ve eğer bir S yarıgrubunun bir sonlu takdimi var ise S ye sonlu takdimli yarıgrup denir.

Tanım 2.32 A bir alfabe, A^*, A üzerindeki serbest monoid, $R \subseteq A^* \times A^*$, ρ da R nin doğurduğu kongrüans olsun. $\langle A|R \rangle$ ikilisine bir monoid takdimi denir. A^*/ρ bölüm monoidine de $\langle A|R \rangle$ takdiminin tanımladığı monoid denir. Eğer M bir monoid ve $M \cong A^*/\rho$ ise, $\langle A|R \rangle$ ye M nin bir monoid takdimi denir.

M bir monoid ve $\langle A|R\rangle$ de M nin bir monoid takdimi olsun. O zaman $e \notin A$ için $\langle A,\ e|\overline{R},\ ae = a,\ ea = a,\ e^2 = e,\ (a \in A)\rangle$ yarıgrup takdimi M yi bir yarıgrup gibi tanımlar. Burada $\overline{R}$, R den $r = 1$ ya da $1 = s$ şeklindeki ilişkilerin $r = e$ ya da $e = s$ ile değiştirilmesiyle elde edilmiştir.

Her yarıgrup takdimi aynı zamanda bir monoid takdimidir. P herhangi bir S yarıgrubunu tanımlayan bir yarıgrup takdimi ise, P bir monoid takdimi olarak düşünüldüğünde P, $S \cup \{e\}$ gibi bir monoidi tanımlar. S nin içinde birim eleman varsa artık bu $S \cup \{e\}$ de birim eleman olmayacaktır (Howie, 1995).

Tanım 2.33 $\langle A|R\rangle$ bir yarıgrup takdimi ve $w_1, w_2 \in A^+$ olsun. Eğer $w_1 \equiv \alpha u \beta$ ve $w_2 \equiv \alpha v \beta$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in A^*$ ve $(u,v) \in R$ (veya $(v,u) \in R$) varsa w_2 , R deki bir ilişki bir kez kullanılarak w_1 den elde edilmiştir denir. Eğer $w_1 \equiv w_2$ ise veya $i = 1,2,\ldots,n-1$ için α_{i+1}, R deki bir ilişki bir kez kullanılarak α_i den elde edilmiş olmak üzere, kelimelerin sonlu bir

$$w_1 \equiv \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \equiv w_2$$

dizisi varsa w_2, R deki ilişkiler kullanılarak w_1 den elde edilmiştir denir. Ayrıca, $w_1 = w_2$ ilişkisi $\langle A|R\rangle$ nin bir sonucudur veya sadece R nin bir sonucudur da denilebilir.

Teorem 2.34 S bir yarıgrup, $A \subseteq S$ ve $S = \langle A\rangle$ olsun. O zaman, $\langle A|R\rangle$ takdiminin S nin bir takdimi olabilmesi için gerek ve yeter koşul

i) R deki tüm ilişkilerin S de sağlanıyor olması ve

ii) her $u, v \in A^+$ için $u = v$ S de sağlanıyor iken $u = v$ bağıntısının R nin bir sonucu olmasıdır.

İspat: İspat için (Ruskuc, 1995) e bakınız.

Tanım 2.35 ρ , S yarıgrubu üzerinde bir kongrüans ve $(x_1,x_2) \in \rho$ olsun. Her bir $i = 1,\ 2$ için $\varphi_i(x_1,x_2) = x_i$ olarak tanımlanan dönüşüme ρ dan S ye i. izdüşüm denir.

Tanım 2.36 ρ , S yarıgrubu üzerinde bir kongrüans ve X de ρ için bir doğuray kümesi olsun. Eğer her $(x,y) \in X$ için $(x,x),\ (y,y) \in X$ ise X kümesine ρ için bir yansımalı doğuray kümesi denir.

Tanım 2.37 G ve H iki grup ve N de G nin bir normal alt grubu olsun. Eğer G/N bölüm grubu H ye izomorfik, yani $G/N \cong H$ ise G ye H nin N ile olan genişlemesi denir.

Eğer H ve N sonlu takdimli gruplar ise G de sonlu takdimli bir gruptur (Johnson, 1990). Bu sonuçtan hareketle S bir yarıgrup ve ρ da S üzerinde bir kongrüans olmak üzere, ρ yu $S \times S$ nin bir alt yarıgrubu olarak ele alınabilir. Yarıgruplar da normal alt grupların gördüğü işlemi kongrüanslar yaptığından, ρ nun sonlu takdimli olması durumda S ve S/ρ nun sonlu takdimli olup olmadığı (Ayık vd., 2005) tarafından araştırılmıştır.

Lemma 2.38 S bir yarıgrup ve ρ da S üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer X kümesi, ρ için bir doğuray kümesi ise φ_i de i. izdüşüm olmak üzere $\varphi_i(X)$ $(i = 1,2)$ S için bir doğuray kümesidir.

İspat: İspat için (Ayık, vd., 2005a) Lemma 2.1 e bakınız.

Lemma 2.39 ρ, S yarıgrubu üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer ρ sonlu doğuraylı ise ρ için sonlu yansımalı bir doğuray kümesi vardır.

İspat: İspat için (Ayık, vd., 2005a) Proposition 2.3 e bakınız.

2.4 Yeniden Yazma Sistemleri

Tanım 2.40 A bir küme, $\rightarrow$ (indirgeme bağıntısı) A^* üzerinde bir ikili işlem, $\rightarrow^{-1}$:$\rightarrow$ nin tersi ve

$\circ$, bağıntıların bileşke işlemi olsun.

1. $\overset{\circ}{\rightarrow}$: birim bağıntı
2. $\overset{n}{\rightarrow} = \rightarrow \circ \overset{n-1}{\longrightarrow}$ $\quad ,n > 0$ için
3. $\overset{*}{\rightarrow} = \bigcup_{n\geq 0} \overset{n}{\rightarrow}$ ve $\overset{+}{\rightarrow} = \bigcup_{n>0} \overset{n}{\rightarrow}$
4. $\leftrightarrow = \rightarrow \cup \rightarrow^{-1}$
5. $\overset{\circ}{\leftrightarrow}$: birim bağıntı
6. $\overset{n}{\leftrightarrow} = \leftrightarrow \circ \overset{n-1}{\leftrightarrow}$ $\quad ,n > 0$
7. $\overset{+}{\leftrightarrow} = \bigcup_{n>0} \overset{n}{\leftrightarrow}$ ve $\overset{*}{\leftrightarrow} = \bigcup_{n\geq 0} \overset{n}{\leftrightarrow}$

yukarıda tanımlanan özellikler ile $\overset{*}{\rightarrow}$ yansımalı ve geçişken ve $\overset{*}{\leftrightarrow}$ A^* üzerinde bir denklik bağıntısı olup $R = (A^*, \rightarrow)$ yapısına A üzerinde bir *yeniden yazma sistemi* ve $\rightarrow$ bağıntısına da *yeniden yazma bağıntısı* denir (Book ve Otto, 1993).

1. Eğer $x \in A^*$ ve hiç bir $y \in A^*$ için $x \to y$ olmuyorsa x'e *indirgenemez*, aksi takdirde *indirgenebilir* denir. A^*'ın $\to$ bağıntısına göre indirgenemez olan tüm elemanlarının oluşturduğu küme $irr(R)$ ile gösterilir.
2. $x \in A^*$ için x'in denklik sınıfı $[x]$ ile gösterilir ve $[x] = \{y | y \overset{*}{\leftrightarrow} x\}$ dir. Ayrıca her $B \subseteq A^*$ için $[B] = \bigcup_{x \in B}[x]$ olarak tanımlanır.
3. $(A^*, \to)$ bir yeniden yazma sistemi olsun. $x, y \in A^*$ için, eğer $x \overset{*}{\leftrightarrow} y$ iken y indirgenemez ise bu durumda y, x için bir *normal form*dur.

Tanım 2.41 $R = (A^*, \to)$ bir yeniden yazma sistemi olsun.
Eğer her $w, x, y \in A^*$ için $w \overset{*}{\to} x$ ve $w \overset{*}{\to} y$ iken $x \overset{*}{\to} z$ ve $y \overset{*}{\to} z$ olacak şekilde bir $z \in A^*$ varsa R'ye *confluent* denir.

$$\begin{tikzcd} & w \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\ x \arrow[dr, "*"'] & & y \arrow[dl, "*"] \\ & z & \end{tikzcd}$$

Şekil 2.1 Confluent.

Tanım 2.42 $R = (A^*, \to)$ olsun. $w \in A^*$ için

$$w \to w_1 \to w_2 \to \cdots$$

şeklinde bir sonsuz dizi bulunmuyorsa R ye *Noetherian* (sonlanan) yeniden yazma sistemi denir.

Tanım 2.43 R hem Noetherian, hem de confluent ise R ye A üzerinde bir *tam yeniden yazma sistemi* (complete rewriting system) denir.

A bir küme ve A^*, A üzerindeki serbest monoid olsun. A^* ın elemanları A nın elemanlarının oluşturduğu sonlu diziler (kelimeler)dir. Boş kelime ε ile gösterilir.

$R \subseteq A^* \times A^*$ olsun. $x, y \in A^*$ için $x = urv$ ve $y = usv$ olacak şekilde $u, v \in A^*$ ve $(r, s) \in R$ varsa $x \to y$ yazılır. $\overset{*}{\to}$ ve $\overset{+}{\to}$ notasyonları daha önce tanımlandığı gibi olsun. $\to$ tarafından doğurulan denklik bağıntısı $\overset{*}{\leftrightarrow}$, yansımalı, simetrik ve geçişkendir; diğer bir deyişle $\rightarrow$ bağıntısını içeren en küçük denklik bağıntısıdır. Buradan $\overset{*}{\leftrightarrow}$, A^* üzerinde bir kongrüanstır. Bu yüzden, A^* altındaki denklik sınıflarının kümesi bir S monoidini oluşturur; $\langle A, R \rangle$ ikilisine S nin bir *takdimi* denir.

Eğer bir monoid bir sonlu tam yeniden yazma sistemi ile takdim edilebilir ise bu monoid için kelime problemi çözülebilirdir (Squier, 1987).

2.5 Grafikler

Bu bölümde herhangi bir $P = \langle A \,|R \rangle$ monoid takdiminin belirttiği bir sonsuz grafik $\Gamma = \Gamma(P)$ nin nasıl tanımlandığı ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

Tanım 2.44 V : köşeler kümesi,
E : kenarlar kümesi,
$\iota, \tau : E \rightarrow V$ dönüşümleri, her $e \in E$ için
$\iota(e)$: başlangıç köşesi,
$\tau(e)$: bitiş köşesi olarak tanımlansın,
$^{-1} : E \rightarrow E$ dönüşümü her $e \in E$ için $e^{-1} \neq e$, $(e^{-1})^{-1} = e$, $\iota(e^{-1}) = \tau(e)$, $\tau(e^{-1}) = \iota(e)$ koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$\Gamma = (V, E, \iota, \tau, ^{-1})$$

beşlisine bir grafik denir.

Tanım 2.45 $\Gamma = (V, E, \iota, \tau, ^{-1})$ bir grafik ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $v_0, v_1, \ldots, v_n \in V$ ve $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$ olmak üzere $\iota(e_i) = v_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ olacak şekildeki Γ daki bir

$$p = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n)$$

$2n+1$ lisine (n uzunluğunda) bir yol denir.

$P(\Gamma)$, Γ grafiğindeki tüm yolların kümesi olmak üzere

$$P^{(2)}(\Gamma) = \{(p, q) : p, q \in P(\Gamma)\}$$

kümesi $\iota(p) = \iota(q)$ ve $\tau(p) = \tau(q)$ olacak şekilde başlangıç ve bitiş köşeleri ortak olan (kapalı yol) tüm yolların kümesi gösterilsin.

Tanım 2.46 $P = \langle A \,|R \rangle$ bir monoid takdimi (A^* ın R nin doğurduğu en küçük kongrüans ile bölüm monoidi) olmak üzere, her bir $r \in R$ için $r : (r^{+1}, r^{-1}) \in R$ olsun.Bu takdimin belirttiği $\Gamma(P)$ grafiği aşağıdaki şekilde tanımlanır.

1. Köşeler kümesi V, A^* ın elemanlarından oluşur,
2. Kenarlar kümesi $E = \{(U, r, \varepsilon, V) : U, V \in A^* \,\text{ve}\, r \in R, \varepsilon = \pm 1\}$ biçiminde dörtlülerden oluşur.
3. Bir $e = (U, r, \varepsilon, V)$ kenarının başlangıcı, bitişi ve tersi sırasıyla $\iota(e) = Ur^{\varepsilon}V$, $\tau(e) = Ur^{-\varepsilon}V$ ve $e^{-1} = (U, r, -\varepsilon, V)$ şeklinde tanımlanır.

$\Gamma(P)$ nin Tanım 2.44 de verilen grafik tanımını sağladığı açıktır. Bununla birlikte $W, W' \in A^*$ ve $V \in \Gamma(P)$ da herhangi bir köşe ise $W.V.W' = WVW'$ (A^* daki çarpma) dır. Eğer $e = (U, r, \varepsilon, V)$ ise $W.e.W' = (WU, r, \varepsilon, VW')$ dır. Bu yüzden A^* $\Gamma(P)$ grafiği üzerinde bir iki yanlı hareket meydana getirir. Bu hareket Γ daki yollara genişletilebilir.

Tanım 2.47 Γ $P = \langle A \,|R \rangle$ monoid takdiminin belirttiği grafik olsun. Eğer bir $\simeq \subseteq P^{(2)}(\Gamma)$ denklik bağıntısı aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir homotopi bağıntısı olarak adlandırılır.

1. Eğer e_1, e_2 Γ nın iki kenarı ise, o zaman
$$(e_1.\iota(e_2))(\tau(e_1).e_2) \simeq (\iota(e_1).e_2)(e_1.\tau(e_2))$$
2. Eğer $p \simeq q$ $(p, q \in P(\Gamma))$ ise, o zaman her $U, V \in A^*$ için $U.p.V \simeq U.q.V$ dir.
3. Eğer $p, q_1, q_2, r \in P(\Gamma)$ yolları için $\tau(p) = \iota(q_1) = \iota(q_2)$, $\tau(q_1) = \tau(q_2) = \iota(r)$ sağlanıyor ve $q_1 \simeq q_2$ ise, o zaman $pq_1r \simeq pq_2r$ dır.
4. Eğer $p \in P(\Gamma)$ ise,o zaman $pp^{-1} \simeq 1_{\iota(p)}$ dır. ($1_{\iota(p)}$: başlangıç köşesi ve bitiş köşesi $\iota(p)$ ve tersi $1_{\iota(p)}^{-1} = 1_{\iota(p)}$ olan boş yol.)

$P(\Gamma)$ üzerindeki bütün homotopi bağıntılarının topluluğu, keşim işlemi ile kapalıdır ve $\mathrm{P}^{(2)}(\Gamma)$ nın kendisi de bir homotopi bağıntısıdır. Dolayısıyla, eğer $C \subseteq P^{(2)}(\Gamma)$ ise, $P(\Gamma)$ üzerinde C yi içeren bir tek en küçük $\simeq_C$ homotopi bağıntısı vardır.

Tanım 2.48 $\langle A\,|R\rangle$ bir sonlu yarıgrup takdimi ve Γ bu takdimin belirttiği grafik olsun. $P^{(2)}(\Gamma)$ yı bir homotopi bağıntısı olacak şekilde doğuran bir sonlu $C \subseteq P^{(2)}(\Gamma)$ varsa yani $\simeq_C = P^{(2)}(\Gamma)$ ise, $\langle A\,|R\rangle$ takdimi sonlu türetilmiş tip (FDT) özelliğine sahiptir denir. Eğer bir S yarıgrubunun en az bir sonlu takdimi FDT özelliğine sahip ise, S yarıgrubu da FDT özelliğine sahiptir (Squier vd., 1994).

3. KONGRÜANSLAR İÇİN SONLU TÜRETİLMİŞ TİP ÖZELLİĞİ

X bir küme, X^+, X üzerindeki serbest yarıgrup ve X^* da X üzerindeki serbest monoid olsun. $R \subseteq X^+ \times X^+$ ve $R^\#$, R nin doğurduğu en küçük kongrüans olmak üzere $S \simeq X^+/R^\#$ olsun. Bu durumda S yarıgrubu $\langle X \,|R \rangle$ takdimi tarafından tanımlanan yarıgruptur.

Köşeleri X^+ ın elemanları ve kenarları $e = (U, r, \varepsilon, V)$ şeklinde dörtlüler olan $\langle X \,|R \rangle$

takdiminin belirttiği grafik $\Gamma = \Gamma(X : R)$ olsun. Ayrıca $U, V \in X^*$, $r = \left(r^{+1}, r^{-1}\right) \in R$, $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere; herhangi bir kenarın;

başlangıcı

$$\iota(e) = Ur^{\varepsilon}V,$$

bitişi

$$\tau(e) = Ur^{-\varepsilon}V,$$

ve tersi

$$e^{-1} = (U, r, -\varepsilon, V)$$

ile gösterilsin. Her v köşesi için 1_v boş yol olmak üzere

$$\iota(1_v) = \tau(1_v) = v$$

$$1_v^{-1} = 1_v$$

dır.

Lemma 3.1 $\phi : \langle X_1 \,|R_1 \rangle \to \langle X_2 \,|R_2 \rangle$ takdimlerinin bir homomorfizmi,

$$B_1 \subseteq P^{(2)}(\Gamma_1)$$

ve

$$B_2 = \left\{(\phi(p), \phi(q)) \,|(p,q) \in B_1\right\} \subseteq P^{(2)}(\Gamma_2)$$

olsun.

Her $p, q \in P(\Gamma_1)$ için $p \simeq_{B_1} q$ olması $\phi(p) \simeq_{B_2} \phi(q)$ olmasını gerektirir.

Teorem 3.2 S bir yarıgrup ve ρ da S üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer ρ, $S \times S$ nin bir alt yarıgrubu olarak FDT özelliğine sahipse bu durumda S de FDT özelliğine sahiptir.

İspat: ρ nun $S \times S$ nin bir alt yarıgrubu olarak FDT özelliğine sahip olduğu kabul edilsin. Bu durumda ρ sonlu takdimlidir.

(Ayık, 2005a) Teorem 2.1 in ispatından $X \subseteq \rho$ olmak üzere her $(x,y) \in X$ için

$$(x,x),(y,y) \in X$$

olacak şekilde ρ, $\langle X \,|R\rangle$ şeklinde bir sonlu takdime sahiptir.

Benzer şekilde

$$X' = \varphi(X)$$

$$R' = \{\varphi(r)\,|r \in R\} = \{(\varphi(r_{+1}),\varphi(r_{-1}))\,|r = (r_{+1},r_{-1}) \in R\}$$

olmak üzere S nin $\langle X' \,|R'\rangle$ gibi bir sonlu takdimi vardır.

$\langle X' \,|R'\rangle$ takdiminin FDT özelliğine sahip olduğu gösterilmelidir.

$\Gamma = \Gamma\,(X : R)$ ve $\Gamma' = \Gamma\,(X' : R')$ grafikleri sırasıyla $\langle X \,|R\rangle$ ve $\langle X' \,|R'\rangle$ yarıgrup takdimlerinin belirttiği grafikler olsun.

Her $(U,r,\varepsilon,V) \in \Gamma$ ve 1 de boş kelime için φ nin, $\langle X \,|R\rangle$ takdiminden $\langle X' \,|R'\rangle$ takdimine

$$\varphi\,(U,r,\varepsilon,V) = (\varphi(U),\varphi(r),\varepsilon,\varphi(V))$$

$$\varphi(1) = 1$$

olacak şekilde bir homomorfizm olduğu açıktır.

ρ, FDT özelliğine sahip olduğundan $\langle X \,|R\rangle$ yarıgrup takdimi de FDT özelliğine sahiptir. Dolayısıyla

$$\simeq_C = P^{(2)}\,(\Gamma)$$

olacak şekilde $P^{(2)}\,(\Gamma)$ nın bir sonlu C alt kümesi vardır.

$$C_1 = \{(\varphi(p),\varphi(q))\,|(p,q) \in C\}$$

olsun. Bu durumda C_1, $P^{(2)}(\Gamma')$ nın bir sonlu alt kümesidir.

Her $x \in X'$ için, X ve X' nün tanımlarından dolayı $(x,x) \in X$ dir.

Dolayısıyla her $x_1x_2x_3\cdots x_m \in X'^+$ için

$$\psi(x_1x_2...x_m) = (x_1,x_1)(x_2,x_2)\cdots(x_m,x_m)$$

ve

$$\psi(1) = 1$$

olacak şekilde X'^* dan X^* a herhangi bir ψ homomorfizmi tanımlanabilir.

Herhangi bir $W' \in X'^*$ için $\varphi(\psi(W')) = W'$ olduğu açıktır.

Her $r' \in R'$ için S yarıgrubunda $r'_{+1} = r'_{-1}$ olduğundan (S de aynı elemanı temsil ederler onu s ile gösterilsin.)

Bu durumda ρ yarıgrubunda $\psi\left(r'_{+1}\right) = \psi\left(r'_{-1}\right)$ olduğu görülür. (ρ nun (s,s) elemanını temsil eder.)

Dolayısıyla

$$\iota(p_{r'}) = \psi\left(r'_{+1}\right)$$
$$\tau(p_{r'}) = \psi\left(r'_{-1}\right)$$

olacak şekilde bir $p_{r'} \in P(\Gamma)$ yolu vardır.

Bu durumda $\varphi(p_{r'}) \in P(\Gamma')$

$$\iota(\varphi(p_{r'})) = \varphi(\iota(p_{r'})) = \varphi\left(\psi\left(r'_{+1}\right)\right) = r'_{+1}$$

$$\tau(\varphi(p_{r'})) = \varphi(\tau(p_{r'})) = \varphi\left(\psi\left(r'_{-1}\right)\right) = r'_{-1}$$

dır.

$C_2 = \{((1,r',+1,1),\varphi(p_{r'}))\,|r' \in R'\}$ olsun.

Bu durumda C_2, $P^{(2)}(\Gamma')$ nin bir sonlu alt kümesidir.

$$\simeq_{C_1\cup C_2} = P^{(2)}\left(\Gamma'\right)$$

olduğu gösterilmelidir.

$U',V' \in X'^{*}$, $r' \in R'$ ve $\varepsilon = \mp 1$ olmak üzere $e' = (U',r',\varepsilon,V') \in \Gamma'$ kenarı için bir $p_{e'} = \psi(U').p_{r'}^{\varepsilon}.\psi(V') \in \Gamma$ yolu aşağıdakileri sağlayacak şekilde seçilebilir.

$$\varphi(p_{e'}) = \varphi\left(\psi(U')\right).\varphi(p_{r'})^{\varepsilon}.\varphi\left(\psi\left(V'\right)\right) = U'.\varphi(p_{r'})^{\varepsilon}.V' \simeq_{C_2} e',$$

$$\iota(p_{e'}) = \psi\left(U'\right)\psi\left(r'_{\varepsilon}\right)\psi\left(V'\right) = \psi\left(U'r'_{\varepsilon}V'\right) = \psi\left(\iota\left(e'\right)\right),$$

$$\tau(p_{e'}) = \psi\left(U'\right)\psi\left(r'_{-\varepsilon}\right)\psi\left(V'\right) = \psi\left(U'r'_{-\varepsilon}V'\right) = \psi\left(\tau\left(e'\right)\right).$$

Böylece her $p' \in \Gamma'$ yolu için bir $p \in \Gamma$ yolu aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$\varphi(p) \simeq_{C_2} p'$$

$$\iota(p) = \psi\left(\iota\left(p'\right)\right)$$

$$\tau(p) = \psi\left(\tau\left(p'\right)\right)$$

Şimdi herhangi bir $(p',q') \in P^{(2)}(\Gamma')$ için p ve q yolları

$$\varphi(p) \simeq_{C_2} p'$$

$$\varphi(q) \simeq_{C_2} q'$$

ve

$$\iota(p) = \iota(q)$$

$$\tau(p) = \tau(q)$$

olacak şekilde seçilsin.

$\simeq_C = P^2(\Gamma)$ ve $(p,q) \in P^{(2)}(\Gamma)$ olduğundan $p \simeq_C q$ dur. Lemma 3.1 den dolayı $\varphi(p) \simeq_{C_1} \varphi(q)$ dır.

Bu durumda

$$p' \simeq_{C_1 \cup C_2} \varphi(p) \simeq_{C_1 \cup C_2} \varphi(q) \simeq_{C_1 \cup C_2} q'$$

dır. Dolayısıyla

$$\simeq_{C_1 \cup C_2} = P^{(2)}\left(\Gamma'\right)$$

dır.

Bu yüzden $\langle X' | R' \rangle$ takdimi FDT özelliğine sahiptir. Buradan S de FDT özelliğine sahiptir.

4. MONOİDLERİN KÜÇÜK GENİŞLEMESİ İÇİN SONLU TÜRETİLMİŞ TİP ÖZELLİĞİ

Bu bölümde S bir monoid ve T de S nin bir sonlu indeksli alt monoidi olmak üzere eğer T sonlu türetilmiş tip özelliğine sahipse T nin bir küçük genişlemesi S monoidinin de sonlu türetilmiş tip özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir. Daha detaylı bilgi için (Wang, 1998) e bakılabilir.

Teorem 4.1 S bir yarıgrup, A, S nin bir doğuray kümesi ve T, S nin bir büyük alt yarıgrubu olsun.

$$X = \left\{s_1as_2 \ : \ s_1,\, s_2 \in S^1 \setminus T,\, a \in A,\, s_1a,\, s_2a \in T\right\}$$

kümesi T için bir doğuray kümesidir.

İspat: İspat için (Campbell vd., 1995) Teorem 3.1 e bakınız.

Teorem 4.2 S bir yarıgrup ve T, S nin bir büyük alt yarıgrubu olsun. S nin sonlu doğuraylı olması için gerek ve yeter koşul T nin sonlu doğuraylı olmasıdır (Ruskuc, 1998).

İspat: $(\Rightarrow)$ Teorem 4.1 den

$$X = \left\{s_1as_2 \ : \ s_1,\, s_2 \in S^1 \setminus T,\, a \in A,\, s_1a,\, s_2a \in T\right\}$$

kümesi T için bir doğuray kümesidir. Eğer A ve $S \setminus T$ sonlu ise X in de sonlu olduğu açıktır.

$(\Leftarrow)$ Kabul edilsin ki B, T için bir sonlu doğuray kümesi olsun. O zaman $Y = B \cup (S \setminus T)$ kümesi S için bir doğuray kümesidir. Eğer B ve $S \setminus T$ sonlu ise Y de sonludur.

Teorem 4.3 Bir sonlu takdimli yarıgrubun bir küçük genişlemesi de sonlu takdimlidir (Ruskuc, 1998).

İspat: T, $\langle A|R_1\rangle$ takdimine sahip sonlu takdimli bir yarıgrup ve S, T nin bir küçük genişlemesi olsun. Teorem 4.2 de olduğu gibi S, $A \cup (S \setminus T)$ (sonlu) kümesi tarafından doğurulur ve S için bu doğuray kümesinin elemanlarına göre bir takdim bulunabilir.

$s \in S \setminus T$ ve $a \in A$ herhangi iki eleman olsun. sa elemanı ya T de dir, ki bu durumda sa, A^+ daki bir kelime ile temsil edilir, ya da $S \setminus T$ ye aittir. $\rho(s,a) \in A^+ \cup (S \setminus T)$, $sa = \rho(s,a)$

bağıntısı S de sağlanacak şekilde bir kelime olsun. (Burada A ve $S \setminus T$ Snin alt kümeleri olarak değil formal doğuray kümeleri olarak düşünülmektedir.) Benzer şekilde $\lambda(a,s) \in A^+ \cup (S \setminus T)$ elemanı $as = \lambda(a,s)$ bağıntısı S de sağlanacak şekilde seçilsin. Son olarak, herhangi iki $s,t \in S \setminus T$ için $\pi(s,a) \in A^+ \cup (S \setminus T)$ yi $st = \pi(s,t)$ bağıntısı S de sağlanacak şekilde seçilsin.

İddia

$$P = \langle A,\ S \setminus T \,|R_1,$$

$$sa = \rho(s,a) \tag{4.1}$$

$$as = \lambda(a,s) \tag{4.2}$$

$$ss' = \pi(s,s') \tag{4.3}$$

$$\big(s,s' \in (S \setminus T),\ a \in A\big)$$

takdimi S yi tanımlar.

$$R_2 = \big\{(sa = \rho(s,a)), (as = \lambda(a,s)), (ss' = \pi(s,s')) : (s,s' \in (S \setminus T),\ a \in A)\big\}$$

olarak gösterilsin. Bağıntıların tümünün S de sağlandığı açıktır. $u,v \in (A \cup (S \setminus T))^+$ elemanları $u = v$ bağıntısı S de sağlanacak şekilde iki keyfi eleman olsun. $u = v$ nin P takdiminin bir sonucu olduğu gösterilmelidir.

İlk olarak, dikkat edilirse (4.1), (4.2) ve (4.3) bağıntıları kullanılarak $u = u_1$ ve $v = v_1$ bağıntılarının P nin bir sonucu olacak şekilde $u_1, v_1 \in A^+ \cup (S \setminus T)$ kelimeleri bulunabilir. $u_1 = v_1$ bağıntısı S de sağlandığından ya $u_1 \equiv v_1 \in S \setminus T$ ya da $u_1,\ v_1 \in A^+$ olmalıdır. İlk durumda, $u = u_1 \equiv v_1 = v$, P nin bir sonucudur. İkinci durumda ise $u_1 = v_1$ T de sağlanır ve böylece R_1 bağıntıları kullanılarak elde edilebilir ve yine $u = u_1 \equiv v_1 = v$, P, P nin bir sonucu olarak elde edilir.

S bir yarıgrup, T de S nin bir büyük alt yarıgrubu (S, T nin küçük genişlemesi), $P_T = \langle A|R_1\rangle$ ve $P_S = \langle A, S \setminus T|R_1, R_2\rangle$ takdimleri T ve S yarıgruplarının takdimleri ve Γ_T ve Γ_S grafikleri bu takdimlerin belirttiği grafikler olsun. (Burada Γ_T, Γ_S nin bir alt grafiği olarak ele alınabilir.)

Γ, Γ_S nin aynı köşelerine sahip bir alt grafiği olsun. Ama $r \in R_2$, $u,v \in (A \cup (S \setminus T))^*$, $\varepsilon = \pm 1$ için Γ_S nin (U,r,ε,V) kenarlarını içersin. $P_+(\Gamma)$ (ya da $P_-(\Gamma)$) Γ da $(U,r,+1,V)$

(ya da $(U,r,-1,V)$) şeklinde kenarları içeren yolları göstersin. Bu durumda aşağıdaki gibi bir lemma yazılabilir.

Lemma 4.4 Herhangi bir $U \in (A \cup (S \setminus T))^*$ için en az bir $U' \in A^* \cup (S \setminus T)$ vardır. Öyle ki U dan U' ye bir $p \in P_+(\Gamma)$ yolu vardır.

İspat: $U \in (A \cup (S \setminus T))^*$ olsun. Bu durumda $W_1, W_2, \ldots, W_{n+1} \in A^*$ ve $s_1, s_1, \ldots, s_n \in S \setminus T$ olmak üzere

$$U \equiv W_1 s_1 W_2 s_2 \cdots W_n s_n W_{n+1}$$

şeklinde olup, burada $i = 1, 2, \ldots, n+1$ ve $a \in A$, W_i', $W_i'' \in A^*$ için

$$W_i \equiv W_i' a$$

ya da

$$W_i \equiv a W_i''$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$U \equiv W_1' a s_1 W_2' a s_2 \cdots W_n' a s_n W_{n+1}' a$$

ya da

$$U \equiv a W_1'' s_1 a W_2'' s_2 \cdots a W_n'' s_n a W_{n+1}''$$

kelimesinde ortaya çıkan

$$a s_j \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

ya da

$$s_j a \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

elemanları R_2 bağıntılarının bir sonucu olduğundan $U_i \in (A \cup (S \setminus T))^*$, $U_i' \in A^*$ için

$$e_i = (U_i, r_i, +1, U_i')$$

olacak şekilde $e_i \in \Gamma$ kenarları vardır. Dolayısıyla U dan $U' \equiv U_1' U_2' \cdots U_m'$ ye bir $p \equiv e_1 e_2 \cdots e_m \in P_+(\Gamma)$ yolu vardır.

Herhangi bir $r \in R_1 \cup R_2$ ve $s_1,\ s_2 \in (S \setminus T) \cup \{\emptyset\}$ için Lemma 4.4 den $s_1 r^{+1} s_2$ den $V \in A^* \cup (S \setminus T)$ ye bir $P_{s_1, r^{+1}, s_2} \in P_+(\Gamma)$ yolu ve $s_1 r^{-1} s_2$ den $V' \in A^* \cup (S \setminus T)$ ye bir $p_{s_1, r^{-1}, s_2} \in P_+(\Gamma)$

yolu seçilebilir. Çünkü $s_1r^{+1}s_2 = s_1r^{-1}s_2$ S de sağlanır. Dolayısıyla $V \equiv V' \in S \setminus T$ ya da $V,\ V' \in A^*$ ve $V = V'$ bağıntısı T de sağlanır. Bu yüzden V den V' ye $\overline{P(\Gamma_T)} = P(\Gamma_T) \cup \{1_s : s \in A^*\}$ olacak şekilde bir $q_{s_1,r,s_2} \in \overline{P(\Gamma_T)}$ yolu vardır.

$$C_1 \quad = \quad \left\{ \left((s_1, r, +1, s_2), p_{s_1,r^{+1},s_2} q_{s_1,r,s_2} p^{-1}_{s_1,r^{-1},s_2} \right) : s_1,\ s_2 \in (S \setminus T) \cup \{\emptyset\}, r \in R_1 \cup R_2 \right\}$$

alınırsa bu durumda

$$C_1 \subset P^{(2)}(\Gamma_S)$$

dır.

Herhangi bir $s \in S \setminus T$, $x,\ x' \in A \cup (S \setminus T)$ ve $s_1,\ s_2 \in (S \setminus T) \cup \{\emptyset\}$ için

$$\phi(x,s) = \begin{cases} \lambda(x,s), & x \in\ A \text{ ise} \\ \pi(x,s), & x \in\ S \setminus T \text{ ise} \end{cases}$$

$$\psi(s,x') = \begin{cases} \rho(s,x'), & x' \in\ A \text{ ise} \\ \pi(s,x'), & x' \in\ S \setminus T \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $s_1\phi(x,s)x's_2$ den en az bir $V' \in A^* \cup (S \setminus T)$ ye bir $p_{s_1,\phi(x,s),x',s_2} \in P_+(\Gamma)$ yolu ve $s_1x\psi(s,x')s_2$ den en az bir $V' \in A^* \cup (S \setminus T)$ ye bir $p_{s_1,x,\psi(s,x'),s_2} \in P_+(\Gamma)$ yolu seçilebilir. Çünkü $s_1\phi(x,s)x's_2 = s_1x\psi(s,x')s_2 (= s_1xsx's_2)$ bağıntısı S de sağlanır. Buradan $V = V' \in S \setminus T$ ya da $V, V' \in A^*$ ve $V = V'$ bağıntısı T de sağlanır. Dolayısıyla V' den V ye bir q_{s_1,x,s,x',s_2} yolu vardır.

$$\begin{aligned} p'_{s_1,x,s,x',s_2} &= \quad (s_1, (xs, \phi(x,s)), +1, x's_2)\, p_{s_1,\phi(x,s),x',s_2} \\ p''_{s_1,x,s,x',s_2} &= \quad (s_1x, (sx', \psi(s,x')), +1, s_2)\, p_{s_1,x,\psi(s,x'),s_2} q_{s_1,x,s,x',s_2} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$C_2 = \left\{ \left(p'_{s_1,x,s,x',s_2}, p''_{s_1,x,s,x',s_2} \right) :\ s \in S \setminus T,\ x,x' \in A \cup (S \setminus T),\ s_1,s_2 \in (S \setminus T) \cup \{\emptyset\} \right\}$$

alınırsa

$$C_2 \subset P^{(2)}(\Gamma_s)$$

olduğu görülür.

Herhangi bir $s,\ s' \in S \setminus T$ $, a \in A,\ s_1,s_2 \in (S \setminus T) \cup \{\emptyset\}$ için $s_1\rho(s,a)s's_2$ den en az bir $V \in A^* \cup (S \setminus T)$ ye bir $p_{s_1,\rho(s,a),s',s_2} \in P_+(\Gamma)$ yolu ve $s_1s\lambda(a,s')s_2 (= s_1sas's_2)$ den en az bir $V' \in A^* \cup (S \setminus T)$ ye bir $p_{s_1,s,\lambda(a,s'),s_2} \in P_+(\Gamma)$ yolu vardır. Çünkü $s_1\rho(s,a)s's_2 =$

$s_1 s\lambda(a,s')s_2\,(= s_1 sas's_2)$ S de sağlanır. Buradan $V \equiv V' \in S\setminus T$ ya da $V, V' \in A^*$ ve $V = V'$, T de sağlanır. Dolayısıyla V' den V ye bir $q_{s_1,s,a,s',s_2} \in \overline{P(\Gamma_T)}$ yolu vardır.

$$\begin{aligned} q'_{s_1,s,a,s',s_2} &= (s_1,(sa,\rho(s,a)),+1,s's_2)\,p_{s_1,\rho(s,a),s',s_2}, \\ q''_{s_1,s,a,s',s_2} &= (s_1s,(as',\lambda(a,s')),+1,s_2)\,p_{s_1,s,\lambda(a,s'),s_2}q_{s_1,s,a,s',s_2} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$C_3 = \left\{\left(q'_{s_1,s,a,s',s_2}, q''_{s_1,s,a,s',s_2}\right) :\ a \in A,\ s,s' \in S\setminus T,\ s_1,s_2 \in (S\setminus T)\cup\{\emptyset\}\right\}$$

alınırsa

$$C_3 \subset P^{(2)}(\Gamma_s)$$

olduğu görülür.

En az bir $B \subset P^{(2)}(\Gamma_T)$ için

$$\simeq_B = P^{(2)}(\Gamma_T)$$

olduğu kabul edilsin.

$$C = B \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 \subset P^{(2)}(\Gamma_S)$$

olsun.

Bu durumda

$$\simeq_C = P^{(2)}(\Gamma_S)$$

olduğu gösterilmelidir.

Lemma 4.5 Herhangi bir $e \in \Gamma_S$ için

$$\tau(p_+), \iota(p_-) \in A^* \cup (S\setminus T)$$

ve

$$e \simeq_C p_+ q p_-$$

olacak şekilde $p_+ \in P_+(\Gamma),\ p_- \in P_-(\Gamma)$ yolları ve $q \in \overline{P(\Gamma_T)}$ yolu vardır.

İspat: U, $V \in (A\cup(S\setminus T))^*$, $r \in R_1 \cup R_2$, $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere $e = (U,r,\varepsilon,V)$ herhangi bir kenar olsun.

Lemma 4.4 den dolayı U köşesinden en az bir $U' \in A^* \cup (S\setminus T)$ köşesine bir $p_1 \in P_+(\Gamma)$ yolu ve V köşesinden en az bir $V' \in A^* \cup (S\setminus T)$ köşesine bir $p_2 \in P_+(\Gamma)$ yolu vardır.

$\simeq_C$ bir homotopi bağıntısı olduğu için

$$e \simeq_C (p_1.r^{\varepsilon}V)\left(U'r^{\varepsilon}.p_2\right)\left(U',r,\varepsilon,V'\right)\left(p_1^{-1}.r^{-\varepsilon}V'\right)\left(Ur^{-\varepsilon}.p_2^{-1}\right)$$

olduğu elde edilir.

C_1 in elde edilişinden dolayı $p_3,\ p_4 \in P_+(\Gamma)$ ve $q \in \overline{P(\Gamma_T)}$ olmak üzere

$$\left(U',r,\varepsilon,V'\right) \simeq_C p_3 q p_4^{-1}$$

olduğu görülür.

Dolayısıyla

$$p_+ = (p_1.r^{\varepsilon}V)\left(U'r^{\varepsilon}.p_2\right)p_3 \in P_+(\Gamma)$$

ve

$$p_- = p_4^{-1}\left(p_1^{-1}.r^{-\varepsilon}V'\right)\left(Ur^{-\varepsilon}.p_2^{-1}\right) \in P_-(\Gamma)$$

olmak üzere

$$e \simeq_C p_+ q p_-$$

elde edilir.

Lemma 4.6 Herhangi iki kenar $e_1,\ e_2 \in P_+(\Gamma)$ için eğer $\iota(e_1) = \iota(e_2)$ ise bu durumda $\tau(p),\ \tau(p') \in A^* \cup (S \setminus T)$ ve $e_1 p \simeq_C e_2 p' q$ olacak şekilde $p,\ p' \in P_+(\Gamma)$ ve $q \in \overline{P(\Gamma_T)}$ yolları vardır.

İspat: $e_1 = e_2$ ise sonuç doğrudur.

$e_1 \neq e_2$ olduğunu kabul edilsin.

$\iota(e_1) = \iota(e_2)$ olduğundan aşağıdaki üç durum ortaya çıkacaktır.

1. $e_1 = \left(U_1,\ r_1,\ +1,\ U_2 r_2^{+1} U_3\right)$, $e_2 = \left(U_1 r_1^{+1} U_2,\ r_2,\ +1,\ U_3\right)$ $U_1,\ U_2,\ U_3 \in (A \cup (S \setminus T))^*$, $r_1, r_2 \in R_2$
2. $e_1 = (U_1,\ (xs, \phi(x,s)),\ +1,\ x'U_2)$, $e_2 = (U_1 x, (sx', \psi(s,x')),\ +1,\ U_2)$ $U_1,\ U_2, \in (A \cup (S \setminus T))^*$, $x,\ x', \in A \cup (S \setminus T)$, $s \in S \setminus T$,

   Eğer $x \in A$ ise $\phi(x,s) = \lambda(x,s)$ ya da $x \in S \setminus T$ ise $\phi(x,s) = \pi(x,s)$

   Eğer $x' \in A$ ise $\psi(s,x') = \rho(s,x')$ ya da $x' \in S \setminus T$ ise $\psi(s,x') = \pi(s,x')$

3. $U_1, U_2, \in (A \cup (S \setminus T))^*$, $a \in A$, $s, s' \in S \setminus T$ olmak üzere

$$e_1 = \left(U_1,\ (sa, \rho(s,a)),\ +1,\ s'U_2\right),\ e_2 = \left(U_1 s,\ (as', \lambda(a,s')),\ +1,\ U_2\right)$$

dır.

1. durum için;

$e_1' = \left(U_1 r_1^{-1} U_2,\ r_2,\ +1,\ U_3\right) \in P_+(\Gamma), e_2' = \left(U_1,\ r_1,\ +1,\ U_2 r_2^{-1} U_3\right) \in P_+(\Gamma)$ olmak üzere

$$e_1 e_1' \simeq_C e_2 e_2'$$

dır. Lemma 4.4 den dolayı en az bir $V \in A^* \cup (S \setminus T)$ için

$$\tau(e_1') = \tau(e_2')$$

olacak şekilde bir $p_1 \in P_+(\Gamma)$ yolu vardır.

$$p = e_1' p_1 \in P_+(\Gamma) \text{ ve } p' = e_2' p_1 \in P_+(\Gamma)$$

olsun. Bu durumda

$$\tau(p),\ \tau(p') \in A^* \cup (S \setminus T)$$

ve

$$e_1 p \simeq_C e_2 p'$$

dır.

2. durum için ;

U_1 den en az bir $V_1 \in A^* \cup (S \setminus T)$ ye bir $p_1 \in P_+(\Gamma)$ yolunu ve U_2 den en az bir $V_2 \in A^* \cup (S \setminus T)$ ye bir $p_2 \in P_+(\Gamma)$ yolu seçilsin.

Bu durumda

$$e_1 \left(U_1 \phi(x,s) x'.p_2\right) \left(p_1.\phi(x,s) x' V_2\right) \simeq_C p_3 \left(V_1, (xs, \phi(x,s)), +1, x'V_2\right)$$

olmak üzere $p_3 = (p_1.xsx'U_2)(V_1 xsx'.p_2) \in P_+(\Gamma)$ ve

$$e_2 \left(U_1 x \psi(s,x').p_2\right) \left(p_1.x\psi(s,x') V_2\right) \simeq_C p_3 \left(V_1 x,\ (sx',\ \psi(s,x')), +1, V_2\right)$$

elde edilir.

C_2 oluşturulmasından dolayı

$$\big(V_1,\,(xs,\phi(x,s)),\,+1,\,x'V_2\big)\,p_4 \simeq_C \big(V_1x,\,(sx',\psi(s,x')),\,+1,\,V_2\big)\,p_5q$$

olacak şekilde $p_4,\, p_5 \in P_+(\Gamma)$ ve $q \in \overline{P(\Gamma_T)}$ yolları vardır.

$$p = \big(U_1\phi(x,s)x'.p_2\big)\,\big(p_1.\phi(x,s)x'V_2\big)\,p_4 \in P_+(\Gamma)$$

ve

$$p' = \big(U_1x\psi(s,x').p_2\big)\,\big(p_1.x\psi(s,x')V_2\big)\,p_5 \in P_+(\Gamma)$$

olsun.

Bu durumda,

$$e_1p \simeq_C e_2p'q$$

ve

$$\tau(p), \tau(p') \in A^* \cup (S \setminus T)$$

dır.

3. durum için;

C_3 ün elde edilişinden dolayı, (2) deki uygulamaya benzer yöntem ile aynı sonuca ulaşılabilir.

$$K = mak\left\{1,\, L(\rho(s,a)),\, L(\lambda(a,s)),\, L(\pi(s,s'))\ :\ s,s' \in S \setminus T,\, a \in A\right\}$$

olsun. Herhangi bir $V \in (A \cup (S \setminus T))^*$ için $V_i \in A^*$, $s_i \in S \setminus T$ olmak üzere

$$V \equiv V_1s_1V_2s_2\cdots V_ns_nV_{n+1}$$

olsun.

$$f(V) = K_n + L(V_1) + L(V_2) + \cdots + L(V_n) + L(V_{n+1})$$

olarak tanımlansın. Herhangi iki $V,\, V' \in (A \cup (S \setminus T))^*$ için

$$f(VV') = f(V) + f(V')$$

olduğu açıktır. Herhangi bir $e = (U,\ r,\ +1,\ V) \in P_+(\Gamma)$ için $r \in R_2$ olduğundan

$$f(r^{+1}) \geq K + 1 > K \geq f(r^{-1})$$

dır. Dolayısıyla

$$f(Ur^{+1}V) = f(U) + f(r^{+1}) + f(V) > f(U) + f(r^{-1}) + f(V) = f(Ur^{-1}V)$$

dır. Bu yüzden

$$f(\iota(e)) > f(\tau(e))$$

dır.

Lemma 4.7 $p_1,\, p_2 \in P_+(\mathit{\Gamma})$ herhangi iki yol olsun. Eğer $\iota(p_1) = \iota(p_2)$ ise bu durumda $\tau(p'_1),\, \tau(p'_2) \in A^* \cup (S \setminus T)$ ve $p_1 p'_1 \simeq_C p_2 p'_2 q$ olacak şekilde $p'_1,\, p'_2 \in P_+(\mathit{\Gamma})$ ve $q \in \overline{P(\mathit{\Gamma}_T)}$ yolları vardır.

İspat: İspat $f\,(\iota(p_1))$ negatif olmayan tamsayısı üzerinden tümevarım yöntemi ile yapılır.

Eğer $f\,(\iota(p_1)) = 0$ ise, sonuç doğrudur.

$f\,(\iota(p_1)) < n$ için sonucun doğru olduğu kabul edilsin. $f\,(\iota(p_1)) = n$ durumu dikkate alınmalıdır.

Eğer p_i lerden biri boş yol ise, sonuç doğrudur. Dolayısıyla $\overline{p_i} \in P_+(\mathit{\Gamma})$ yollar ve e_i ler kenarlar olmak üzere $p_1 = e_1\overline{p_1}$ ve $p_2 = e_1\overline{p_2}$ alınsın. Lemma 4.6 den $\tau(p'),\, \tau(p'') \in A^* \cup (S \setminus T)$ ve

$$e_1 p'_1 \simeq_C e_2 p''_2 q' \tag{4.4}$$

olacak şekilde $p',\, p'' \in P_+(\mathit{\Gamma})$ ve $q' \in \overline{P(\mathit{\Gamma}_T)}$ yolları vardır.

Şimdi $\overline{p_1},\, p' \in P_+(\mathit{\Gamma})$, $\iota(\overline{p_1}) = \iota\,(p')$ ve $f\,(\iota(\overline{p_1})) = f\,(\tau(e_1)) < f\,(\iota(e_2)) = f\,(\iota(p_1)) = n$ dır, dolayısıyla tümevarım hipotezinden ve $\tau(p') \in A^* \cup (S \setminus T)$ gerçeğinden dolayı $\tau(p'_1) \in A^* \cup (S \setminus T)$ ve

$$\overline{p_1} p'_1 \simeq_C p' q_1 \tag{4.5}$$

olacak şekilde $p'_1 \in P_+(\mathit{\Gamma})$ ve $q_1 \in \overline{P(\mathit{\Gamma}_T)}$ yolları vardır.

Benzer şekilde $\tau(p'_2) \in A^* \cup (S \setminus T)$ ve

$$\overline{p_2} p'_2 \simeq_C p'' q_2 \tag{4.6}$$

olacak şekilde $p'_2 \in P_+(\Gamma)$ ve $q_2 \in \overline{P(\Gamma_T)}$ yolları vardır.

Şimdi (4.4), (4.5) ve (4.6) den dolayı

$$p_1 p'_1 = e_1 \overline{p_1} p'_1 \simeq_C e_1 p' q_1 \simeq_C e_2 p'' q' q_1,$$

$$p_2 p'_2 = e_2 \overline{p_2} p'_2 \simeq_C e_2 p'' q_2$$

dır.

$q = q_2^{-1} q' q_1$ olsun. Bu durumda $q \in \overline{P(\Gamma_T)}$ ve

$$p_1 p'_1 \simeq_C e_2 p'' q_2 q_2^{-1} q' q_1 \simeq_C p_2 p'_2 q$$

olur.

Sonuç 4.8 $p_1,\ p_2 \in P_+(\Gamma)$ herhangi iki yol olsun. Eğer $\iota(p_1) = \iota(p_2)$ ve $\tau(p_1),\ \tau(p_2) \in A^* \cup (S \setminus T)$ ise bu durumda

$$p_1 \simeq_C p_2 q$$

olacak şekilde bir $q \in \overline{P(\Gamma_T)}$ yolu vardır.

Lemma 4.9 Herhangi bir $p \in \Gamma_S$ yolu için $\tau(p_+),\ \iota(p_-) \in A^* \cup (S \setminus T)$ ve $p \simeq_C p_+ q p_-$ olacak şekilde $p_+ \in P_+(\Gamma)$, $p_- \in P_-(\Gamma)$ ve $q \in \overline{P(\Gamma_T)}$ yolları vardır.

İspat: $e_1, e_2, \ldots, e_m \in \Gamma_S$ kenarlar olmak üzere $p = e_1 e_2 \cdots e_m$ olsun. Lemma 4.6 den dolayı

$$\tau(p_i),\ \tau(p'_i) \in A^* \cup (S \setminus T)$$

ve

$$e_i \simeq_C p'_i q_i p_i^{-1}\ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

olacak şekilde $p_i,\ p'_i \in P_+(\Gamma)$ ve $q_i \in \overline{P(\Gamma_T)}$ yolları vardır. Dolayısıyla

$$p \simeq_C p'_1 q_1 p_1^{-1} p'_2 q_2 p_2^{-1} \cdots p'_m q_m p_m^{-1}$$

dır.

$\iota(p_i) = \iota(p'_{i+1})$ ve $\tau(p_i)$, $\tau(p'_{i+1}) \in A^* \cup (S \setminus T)$ olduğundan dolayı, Sonuç 4.8 den

$$p'_{i+1} \simeq_C p_i q'_i$$

olacak şekilde bir $q'_i \in \overline{P(\Gamma_T)}$ yolu vardır. Bu yüzden $p_i^{-1} p'_{i+1} \simeq_C q'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ elde edilir.

Dolayısıyla, $q = q_1 q'_1 q_2 q'_2 \cdots q'_{m-1} q_m \in \overline{P(\Gamma_T)}$ olmak üzere

$$p \simeq_C p'_1 q p_m^{-1}$$

dır.

Lemma 4.10 $\simeq_C = P^{(2)}(\Gamma_S)$ dır.

İspat: Herhangi bir $(p_1, p_2) \in P^{(2)}(\Gamma_S)$ için Lemma 4.9 den

$$\tau(p_+),\ \tau(p'_+),\ \iota(p_-),\ \iota(p'_-) \in A^* \cup (S \setminus T)$$

,

$$p_1 \simeq_C p_+ q_1 p_-$$

ve

$$p_2 \simeq_C p'_+ q_2 p'_-$$

olacak şekilde p_+, $p'_+ \in P_+(\Gamma)$, p_-, $p'_- \in P_-(\Gamma)$ ve q_1, $q_2 \in \overline{P(\Gamma_T)}$ yolları vardır.

Eğer $\tau(p_+)$, $\tau(p'_+)$, $\iota(p_-)$, $\iota(p'_-)$ lardan biri $S \setminus T$ de ise bu durumda

$$\tau(p_+) = \tau(p'_+) = \iota(p_-) = \iota(p'_-) = s \in S \setminus T$$

dır, ve $\big(\iota(p_+) = \iota(p'_+),\ \tau(p_-) = \tau(p'_-)$ için$\big)$, $q_1 = q_2 = 1_S$ olur.

Sonuç 4.8 den dolayı

$$p_+ \simeq_C p'_+$$

,

$$p_- \simeq_C p'_-$$

dır. Dolayısıyla

$$p_1 \simeq_C p_+p_- \simeq_C p'_+p'_- \simeq_C p_2$$

dır.

Şimdi $\tau(p_+)$, $\tau(p'_+)$, $\iota(p_-)$, $\iota(p'_-) \in A^*$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda q_1, $q_2 \in \overline{P(\Gamma_T)}$ dır. Sonuç 4.8 den dolayı

$$p_+ \simeq_C p'_+q_3$$

ve $p_- \simeq_C q_4^{-1}p'_-$

olacak şekilde q_3, $q_4 \in P(\Gamma_T)$ yolları vardır.

$$(q_1, q_3^{-1}q_2q_4) \in P^{(2)}(\Gamma_T)$$

ve

$$\simeq_B = P^{(2)}(\Gamma_T)$$

olduğundan $q_1 \simeq_C q_3^{-1}q_2q_4$ dır. Dolayısıyla

$$p_1 \simeq_C p_+q_1p_- \simeq_C p'_+q_3q_3^{-1}q_2q_4q_4^{-1}p'_- \simeq_C p'_+q_2p'_- \simeq_C p_2$$

dır.

Bundan dolayı

$$\simeq_C = P^{(2)}(\Gamma_S)$$

olduğu elde edilir.

Teorem 4.11 *S* bir monoid ve *T* de *S* nin bir sonlu indeksli alt monoidi olsun. Eğer *T* FDT özelliğne sahip ise, *T* nin bir küçük genişlemesi olan *S* monoidi de FDT özelliğne sahiptir.

İspat: Eğer *T* FDT özelliğne sahip ise, *B* sonlu seçilebilir. Bu durumda *C* sonludur ve dolayısıyla

$$\simeq_C = P^{(2)}(\Gamma_S)$$

dır ve *S* nin de FDT özelliğne sahip olduğu gösterilmiş olur.

5. YARIGRUPLARIN GÜÇLÜ YARILATİSİ İÇİN SONLU TÜRETİLMİŞ TİP ÖZELLİĞİ

Y bir yarılatis ve S_α $(\alpha \in Y)$ ayrık yarıgrupların bir ailesi olsun. Herhangi iki eleman $\alpha, \beta \in Y$ için $\beta \leq \alpha$ $(\beta \leq \alpha \Leftrightarrow \alpha\beta = \beta)$, $\lambda_{\alpha,\beta} : S_\alpha \to S_\beta$ homomorfizmi olsun ve bu homomorfizmler aşağıdaki koşulları sağlasın.

1. Her $\alpha \in Y$, $\lambda_{\alpha,\alpha}$ üzerinde birim dönüşüm 1_{S_α};

2. Her $\alpha, \beta, \gamma \in Y$ için $\gamma \leq \beta \leq \alpha$ olacak şekilde $\lambda_{\alpha,\beta}\lambda_{\beta,\gamma} = \lambda_{\alpha,\gamma}$.

$S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ üzerindeki çarpma S_α bileşenlerindeki çarpma ve $\lambda_{\alpha,\beta}$ homomorfizmleri vasıtasıyla her $x \in S_\alpha$ ve $y \in S_\beta$ için

$$xy = (x\lambda_{\alpha,\alpha\beta})(y\lambda_{\beta,\alpha\beta})$$

tanımlanır. Bu çarpmaya göre bir yarıgruptur. Bu yarıgruba yarıgrupların güçlü yarılatisi denir ve $\mathcal{S}[Y, S_\alpha, \lambda_{\alpha,\beta}]$ ile gösterilir.

Teorem 5.1 $S = \mathcal{S}[Y, S_\alpha]$ yarıgrupların bir yarılatisi olsun. Eğer Y sonlu ve her S_α $(\alpha \in Y)$ FDT özelliğine sahip ise S de FDT özelliğine sahiptir.

İspat: İspat için (Malheiro, 2012) Teorem 1 e bakınız.

Teorem 5.2 $S = \mathcal{S}[Y, S_\alpha, \lambda_{\alpha,\beta}]$ yarıgrupların bir güçlü yarılatisi olsun. S nin sonlu doğuraylı (sonlu takdimli) olabilmesi için gerek ve yeter koşul Y sonlu ve her S_α $(\alpha \in Y)$ yarıgrubunun sonlu doğuraylı (sonlu takdimli) olmasıdır.

İspat: İspat için (Araujo vd., 2001) Teorem 6.1 e bakınız.

Teorem 5.3 S bir yarıgrup ve T de S nin bir büyük ideali olsun. Eğer S yarıgrubu FDT özelliğine sahip ise T de FDT özelliğine sahiptir.

İspat: İspat için (Malheiro, 2009) Teorem 1 e bakınız.

Teorem 5.4 $S = \mathcal{S}[Y, S_\alpha, \lambda_{\alpha,\beta}]$ yarıgrupların bir güçlü yarılatisi olsun. S nin FDT özelliğine sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul Y nin sonlu ve her S_α $(\alpha \in Y)$ yarıgrubunun FDT özelliğine sahip olmasıdır.

İspat: ($\Leftarrow$:) $S = \mathcal{S}[Y, S_\alpha, \lambda_{\alpha,\beta}]$ yarıgrupların bir güçlü yarılatisi olsun. Teorem 5.1 den dolayı Y sonlu ve her S_α $(\alpha \in Y)$ yarıgrubu FDT özelliğine sahip olduğundan S de FDT özelliğine sahiptir.

($\Rightarrow$:) S nin FDT özelliğine sahip olduğu kabul edilsin. Dolayısıyla S sonlu takdimlidir. Teorem 5.2 den dolayı Y sonludur.

S_α^1 $(\alpha \in Y)$ monoidi, S_α yarıgrubuna 1_α birim elemanının ilave edilmesiyle elde edilen monoidler olsun. Her α, $\beta \in Y$ ve $\alpha\beta = \beta$ için

$$\lambda_{\alpha,\beta}^1 : S_\alpha^1 \to S_\beta^1$$

dönüşümü her $x \in S_\alpha$ ve $\lambda_{\alpha,\beta}(1_\alpha) = 1_\beta$ için

$$\lambda_{\alpha,\beta}^1(x) = \lambda_{\alpha,\beta}(x)$$

olarak tanımlansın.

Bu tanımlar, S yi bir alt yarıgrup olarak içeren

$$T = \mathcal{S}[Y, S_\alpha^1, \lambda_{\alpha,\beta}^1]$$

monoidlerin bir güçlü yarılatisinin elde edilmesini sağlar. Burada

$$T \setminus S = \{1_\alpha : \alpha \in Y\}$$

kümesinin sonlu bir küme olduğu açıktır.

Bu yüzden S, T nin bir büyük alt yarıgrubu (ya da T, S nin bir küçük genişlemesi) dur. Teorem 4.11 den dolayı T yarıgrubu da FDT özelliğine sahiptir.

Bir güçlü yarılatis, özel olarak monoidlerin bir bandı olup (Malheiro, 2007) Teorem 5.1 den dolayı tüm S_α^1 $(\alpha \in Y)$ ler FDT özelliğine sahiptir.

Son olarak herhangi bir $(\alpha \in Y)$ için S_α yarıgrubu, S_α^1 için bir ideali olan bir büyük alt yarıgrubudur. Dolayısıyla Teorem 5.4 den dolayı her S_α da FDT özelliğine sahip olduğu sonucu elde edilir.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Squier'in (Squier, 1994) deki çalışmasında literatüre kazandırdığı sonlu ve tam yeniden yazma sistemine sahip bir monoidin sağlaması gerektiği FDT özelliğinin bazı cebirsel yapılarda nasıl sağlandığı ile ilgili araştırmalar yapılmıştır. Bu çalışmalarda izlenen metot genellikle sonlu takdimli monoidlerin belirttiği grafikler üzerinde tanımlı homotopi bağıntıları için sonlu doğuray kümesi bulmaya dayanmaktadır.

İlk olarak, ρ kongrüansı bir S yarıgrubu üzerinde $S \times S$ direk çarpım yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olarak ele alındığında, eğer ρ FDT özelliğine sahip ise S nin de FDT özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir.

Daha sonra ise, M monoidi T alt monoidinin bir küçük genişlemesi olmak üzere, eğer T, FDT özelliğine sahip ise M nin de FDT özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir.

Son olarakta $S = \mathcal{S}[Y, S_\alpha, \lambda_{\alpha,\beta}]$ yarıgrupların bir güçlü yarılatisi olmak üzere S yarıgrubunun FDT özelliğine sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşulun Y yarılatisinin sonlu ve her S_α $(\alpha \in Y)$ yarıgrubunun FDT özelliğine sahip olması gerektiği gösterilmiştir.

FDT ile ilgili araştırmalar özellikle matematikçiler ve biligisayar bilimciler tarafından hızlı bir şekilde devam etmektedir. Üzerinde çalışılan bir açık problem aşağıda belirtilmiştir.

SORU : S yarıgrubu FDT özelliğine sahip olsun. $S \times S$ nin ideallerinin de FDT özelliğine sahip olabilmesi için gerekli koşullar nelerdir (Wang, 2007)?

KAYNAKLAR

ARAUJO, I.M., BRANCO, M.J.J., FERNANDES, V.H., GOMES, G.M.S., RUSKUC, N. 2001. On generators and relations for unions of semigroups, Semigroup Forum, 63(1), 4962.

AYIK, G., AYIK, H., ÜNLÜ, Y., 2005a. Presentations for S and S/ρ from a given presentation, Semigroup Forum, 70, 146-149.

AYIK, G., AYIK, H., ÜNLÜ, Y., 2005b. Presentations and word problem for strong semilattices of semigroups, Algebra & Discrete Mathematics, 4, 1-8.

BOOK R.V., OTTO F., 1993. String-Rewriting Systems, Springer-Verlag, ed: Gries D., New York, Pp:189.

CAIN, A. J., GRAY, R., MALHEIRO, A., On finite complete rewriting systems, finite derivation type, and automaticity for homogeneous monoids, submitted.

CAMPBELL, C. M., ROBERTSON E. F., RUSKUC, N. and THOMAS, R. M., 1995. Reidemeister-Schreier type rewriting for semigroups, Semigroup Forum, 51, 47-62.

HOWIE, J. M., 1995. Fundamentals of Semigroup Theory. Clarendon Press, Oxford.

JOHNSON, D. L., 1995. Presentations of Groups. Cambridge University Pres, Cambridge 228s.

KARPUZ, E. G., 2009. Geometrik Metotlar Altnda Kelime Problemi ve Sonular, (Doktora Tezi), Balkesir niversitesi.

KATSURA, M., KOBAYASHI, Y., 1997. Constructing finitely presented monoids which have no finite complete presentation, Semigroup Forum, 54(3), 292302. doi: 10.1007/BF02676612.

KOBAYASHI, Y., 1990. Complete rewriting systems and homology of monoid algebras, Journal of Pure and Appl. Algebra, 65, 263.

MALHEIRO, A., 2006. Finite derivation type for Rees matrix semigroups, Theoretical Computer Science, 355, 274-290.

MALHEIRO, A., 2009. Finite derivation type for large ideals, Semigroup Forum, 78(3), 450485.

MALHEIRO, A., 2012. Finite derivation type for semilattices of semigroups, Semigroup Forum, 84, 515–526.

MALHEIRO, A., 2007. On trivializers and subsemigroups, Semigroups and Formal Languages, 204, 188 204. World Sci. Publ., Hackensack.

OTTO, F., 1999. Modular properties of monoids and string-rewriting systems. In: Nehaniv, C., Ito, M. (eds.) Algebraic Engineering, World Scientific, Singapore, 538554.

PRIDE, S.J., WANG, J., 2000. Rewriting systems, finiteness conditions, and associated functions. In: Birget, J.C., Margolis, S., Meakin, J., Sapir, M. (eds.) Algorithmic Problems in Groups and Semigroups, Birkhuser, Boston, 195216.

RUSKUC, N., 1998. On large subsemigroups and finiteness conditions of semigroups, Proc. London Math. Soc., 76, 383-405.

SIMS C.C., 1994. Computation With Finitely Presentations Groups. Cambridge University Press, Great Britain, Pp:604.

SQUIER, C., 1987. Word problems and a homological finiteness condition for monoids, J. Pure Appl. Algebra, 49, 201-217.

SQUIER, C., OTTO, F., KOBAYASHI, Y., 1994. A finiteness condition for rewriting systems, Theoretical Computer Science, 131, 271-294.

TOKER K., 2008. Baz Yargrup Yaplarnn Sonlu Takdim Edilebilirlii, (Yksek Lisans Tezi), ukurova niversitesi, Fen Bilimleri Enstits, 59s.

WANG, J., 1998. Finite complete rewriting systems and finite derivation type for small extensions of monoids, Journal of Algebra, 204, 493-503.

WANG, J., 2007. Finite derivation type for semigroups and congruences, Semigroup Forum, 75, 388-392.

ÖZGEÇMİŞ

1. **Adı Soyadı** : Vesile İNCESU
2. **Doğum Tarihi** : 20.05.1978
3. **Ünvanı** : Matematik Öğretmeni
4. **Ö ğrenim Durumu :**

Derece	**Alan**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik	Selçuk Üniversitesi	1998

5. **İş Tecrübesi:**

Görev Ünvanı	**Görev Yeri**	**Yıl**
Matematik Öğretmeni	Hacı Hasan Doğru Fen Lisesi, Osmaniye	2012–
Matematik Öğretmeni	Üçgül Fen Lisesi, Adana	2004 – 2012
Matematik Öğretmeni	Güventaş Anadolu Lisesi, Konya	1998 – 2004