



T.C.
OSMANIYE KORKUT ATA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ökkeş EGE

ALTERNATİF FAZ FONKSİYONU VE II. TİP
CHEBYSHEV POLİNOMLARIYLA TRANSPORT
DENKLEMİNİN KRİTİK KALINLIK PROBLEMİ İÇİN
ÇÖZÜMÜ

FİZİK ANABİLİM DALI

OSMANIYE – 2016

**T.C.
OSMANIYE KORKUT ATA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ALTERNATİF FAZ FONKSİYONU VE II. TİP
CHEBYSHEV POLİNOMLARIYLA TRANSPORT
DENKLEMİNİN KRİTİK KALINLIK PROBLEMİ İÇİN
ÇÖZÜMÜ**

Ökkeş EGE

**FİZİK
ANABİLİM DALI**

**OSMANIYE
EYLÜL-2016**

TEZ ONAYI

ALTERNATİF FAZ FONKSİYONU VE II. TİP CHEBYSHEV POLİNOMLARIYLA TRANSPORT DENKLEMİNİN KRİTİK KALINLIK PROBLEMİ İÇİN ÇÖZÜMÜ

Ökkeş EGE tarafından Prof. Dr. Hakan ÖZTÜRK danışmanlığında Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Fizik** Anabilim Dalı'nda hazırlanan bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği/çokluğu ile **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman:Prof. Dr. Hakan ÖZTÜRK
Fizik Anabilim Dalı, OKÜ

.....

Üye:Prof. Dr. Mustafa ÜBEYLİ
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, OKÜ

.....

Üye:Prof. Dr. Faruk KARADAĞ
Fizik Anabilim Dalı, Çukurova Üniversitesi

.....

Yukarıdaki jüri kararı Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve /..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdullah Ali GÜRTEN
Enstitü Müdürü, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

.....

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, bu çalışma sonucunda elde edilmeyen her türlü bilgi ve ifade için ilgili kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını ve bu tezin Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

(İmza)

Ökkeş EGE

ÖZET

ALTERNATİF FAZ FONKSİYONU VE II. TİP CHEBYSHEV POLİNOMLARIYLA TRANSPORT DENKLEMİNİN KRİTİK KALINLIK PROBLEMİ İÇİN ÇÖZÜMÜ

Ökkeş EGE
Yüksek Lisans, Fizik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Hakan ÖZTÜRK

Eylül 2016, 135 sayfa

Bu tez çalışmasında, nötron transport denkleminde bulunan saçılma fonksiyonu yerine alternatif faz fonksiyonu olarak Anlı-Güngör (AG) fonksiyonu kullanılarak kritik yarı kalınlık hesaplamaları yapılmıştır. Önce geleneksel Legendre polinomları yaklaşımı (P_N yöntemi) daha sonra ise ikinci tip Chebyshev polinomları yaklaşımı (U_N yöntemi) kullanılarak, genişliği $x = -a$ 'dan a 'ya uzanan tek boyutlu dilim geometride, kaynağın olmadığı homojen bir ortamda nötron transport denklemi kritik kalınlık problemi için çözülmüştür.

Saçılma fonksiyonunun sistemin kritikliği üzerine etkileri son derece önemli olup sistemin kritik kalınlıkları bu fonksiyonun parametrelerine bağlı olarak hesaplanmıştır. Böylece, hem P_N yöntemi hem de U_N yöntemi kullanılarak farklı c ve t parametreleri için sistemin kritik kalınlıkları sayısal olarak hesaplanmıştır. Bu çalışmada kullanılan U_N yöntemiyle elde edilen sonuçların tutarlılığının incelenmesi için, sayısal sonuçlar çizelgeler ile verilmiş ve her iki polinom yaklaşımı yardımıyla elde edilen sonuçlar birbiriyle karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: AG faz fonksiyonu, kritik kalınlık, U_N yöntemi, P_N yöntemi.

ABSTRACT

SOLUTION OF THE TRANSPORT EQUATION FOR CRITICAL THICKNESS PROBLEM WITH ALTERNATIVE PHASE FUNCTION AND SECOND KIND OF THE CHEBYSHEV POLYNOMIALS

Ökkeş EGE
M.Sc., Department of Physics
Supervisor: Prof. Dr. Hakan ÖZTÜRK

September 2016, 135 pages

In this study, Anlı-Güngör (AG) phase function as an alternative phase function is used instead of the scattering function placed in neutron transport equation to calculate the critical half thicknesses. The neutron transport equation is solved for the critical thickness problem by using first the traditional Legendre polynomials approximation (P_N method) and then the second of the Chebyshev polynomials approximation (U_N method) in a homogeneous source free slab extending from $x = -a$ to a .

Since the effect of the scattering function on the criticality of the system is very important, the critical thicknesses of the system are calculated as functions of the parameters of this function. Thus, the critical thicknesses of the system are calculated for various values of the c and t parameters using both P_N and U_N methods. In order to investigate the consistency of the results obtained from U_N method, the numerical results are given in the tables and the results obtained from both polynomial approximations are compared with each other.

Key Words: AG phase function, critical thickness, U_N method, P_N method.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tez konumun belirlenerek tez çalışmamın yürütölmesini üstlenen, çalışmalarım süresince değerli bilgi ve tecrübeleriyle katkılarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Hakan ÖZTÜRK'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bölümdeki çalışmalarım süresince beni destekleyen diğer bölüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAYI	
TEZ BİLDİRİMİ	
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	20
3. MALZEME VE YÖNTEM.....	33
3.1 Nötronların Yayılması.....	33
3.2 Gazların Kinetik Teorisi.....	33
3.3 Nötronların Madde ile Etkileşimi.....	34
3.4 Bölünme Tepkimeleri.....	36
3.5 Tesir Kesitleri.....	37
3.6 Ortalama Serbest Yol	39
3.7 Çarpışma Yoğunluğu ve Nötron Akısı.....	41
3.8 Süreklilik Denklemi	43
3.9 Nötron Transport Denklemi	48
3.10 Legendre Polinomları.....	55
3.11 Chebyshev Polinomları	61
3.12 Alternatif (Anlı-Güngör, AG) Saçılma Fonksiyonu	72
3.13 Anlı-Güngör (AG) faz fonksiyonu ile P_N yaklaşımı ve kritiklik problemi.....	73
3.13.1 Sınır ve Simetri Koşulları.....	83
3.13.2 Kritik Kalınlıkların Hesaplanması	84
3.14 Anlı-Güngör (AG) faz fonksiyonu ile U_N yaklaşımı ve kritiklik problemi.....	87
3.14.1 Sınır ve Simetri Koşulları.....	96
3.14.2 Kritik Kalınlıkların Hesaplanması.....	96

4. BULGULAR VE TARTIŞMA	101
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	126
KAYNAKLAR	128
ÖZGEÇMİŞ	134

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. İlk altı Legendre polinomu	59
Çizelge 3.2. İlk Altı Adet Birinci Tip Chebyshev polinomu	66
Çizelge 3.3. İlk altı adet ikinci tip Chebyshev polinomu	70
Çizelge 3.4. U_N yaklaşımı ile $c = 1,01$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	103
Çizelge 3.5. U_N yaklaşımı ile $c = 1,02$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	104
Çizelge 3.6. U_N yaklaşımı ile $c = 1,03$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	105
Çizelge 3.7. U_N yaklaşımı ile $c = 1,05$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	106
Çizelge 3.8. U_N yaklaşımı ile $c = 1,10$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	107
Çizelge 3.9. U_N yaklaşımı ile $c = 1,20$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	108
Çizelge 3.10. U_N yaklaşımı ile $c = 1,30$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	109
Çizelge 3.11. U_N yaklaşımı ile $c = 1,40$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	110
Çizelge 3.12. U_N yaklaşımı ile $c = 1,50$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	111
Çizelge 3.13. U_N yaklaşımı ile $c = 1,60$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	112
Çizelge 3.14. U_N yaklaşımı ile $c = 1,70$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	113
Çizelge 3.15. U_N yaklaşımı ile $c = 1,80$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	114
Çizelge 3.16. U_N yaklaşımı ile $c = 1,90$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	115

Çizelge 3.17. U_N yaklaşımı ile $c = 2,00$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	116
Çizelge 3.18. P_N yaklaşımı ile $c = 1,01$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	117
Çizelge 3.19. P_N yaklaşımı ile $c = 1,02$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	118
Çizelge 3.20. P_N yaklaşımı ile $c = 1,05$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	119
Çizelge 3.21. P_N yaklaşımı ile $c = 1,20$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	120
Çizelge 3.22. P_N yaklaşımı ile $c = 1,50$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	121
Çizelge 3.23. P_N yaklaşımı ile $c = 1,80$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	122
Çizelge 3.24. P_N yaklaşımı ile $c = 2,00$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması	123
Çizelge 3.25. P_N ve U_N yaklaşımları ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($c = 1,01 - 1,20$)	124
Çizelge 3.26. P_N ve U_N yaklaşımları ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($c = 1,50 - 2,00$)	125

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Parçacık başına bağlanma enerjisi	3
Şekil 1.2. k çoğaltma sabitin kritik, kritik altı ve kritik üstü durumları	14
Şekil 3.1. Nötron demetinin çarpışma ile zayıflaması	41
Şekil 3.2. Farklı doğrultularda yönlendirilmiş zayıflamaya uğrayacak nötron demetleri	42
Şekil 3.3. Net nötron akımı	43
Şekil 3.4. $+x$ yönünde gerçekleşen nötron akışı	44
Şekil 3.5. Keyfi bir V hacmi	45
Şekil 3.6. (d) uzatılmış mesafe sınırı	48
Şekil 3.7. Nötron transportunun şematik görünümü	49
Şekil 3.8. Nötron saçılması ile farklı değişken açılar arasındaki ilişki	51
Şekil 3.9. İlk altı Legendre polinomlarının grafiği	59
Şekil 3.10. Birinci tip Chebyshev polinomları	66
Şekil 3.11. İkinci tip Chebyshev polinomları	71

SİMGELER ve KISALTMALAR

a	Sistemin kritik yarı kalınlığı
$T_N(\mu)$	Birinci tip Chebyshev polinomları
$U_N(\mu)$	İkinci tip Chebyshev polinomları
Ω'	Nötronun çarpışmadan önceki hızı yönündeki birim vektör
Ω	Nötronun çarpışmadan sonraki hızı yönündeki birim vektör
$d\Omega'$	Katı açısı
$\psi(r, \Omega)$	r noktasında ve Ω doğrultusundaki açısal nötron akısı
μ	Açı değişkeni
$\psi(x, \mu)$	Nötron açısal akı fonksiyonu (x eksen boyunca ve μ doğrultusundaki nötron açısal akısı)
$\sigma_S(\Omega' \cdot \Omega)$	Nötronların sistem içinde yaptıkları saçılmaları ya da etkileşim olasılıklarını veren saçılma fonksiyonu (makroskobik saçılma tesir kesiti)
$\mu_0 = \Omega \cdot \Omega'$	Saçılma açısının kosinüsü
$\Phi(x)$	Nötron skaler akısı (nötron/(cm ² s))
E	Enerji
r	Konum
k_B	Boltzmann sabiti ($1,38 \times 10^{-23}$ J/K)
c	Çarpışma başına açığa çıkan ikincil nötron sayısı
t	Saçılma parametresi
σ_T	Makroskobik toplam tesir kesiti(1/cm)
σ_S	Saçılma tesir kesiti
σ_a	Yutma tesir kesiti
σ_e	Esnek çarpışma tesir kesiti
σ_{in}	Esnek olmayan çarpışma tesir kesiti
σ_γ	Işınsal yakalama tesir kesiti
σ_f	Fisyon tesir kesiti
σ_α	(n, α) tepkimesi tesir kesiti
σ_p	(n,p) tepkimesi tesir kesiti
N	Birim yoğunluktaki çekirdek sayısı (çekirdek/cm ³)
τ	Ortalama serbest yol (cm)

F	Birim yoğunlukta gerçekleşen nötron-çekirdek çarpışmalarının hızı
n	Hedefe çarpan toplam nötron yoğunluğu (nötron/cm ³)
J	Net nötron akımı (nötron/(cm ² s))
ν	Fisyon başına yayınlanan ani nötron ve daha sonra yayınlanabilecek gecikmiş nötronların ortalama sayısı
D	Yayıma katsayısı (cm)
L	Yayıma uzunluğu (cm)
$\delta_{n,m}$	Kroniker delta fonksiyonu
ν	Özdeğer
$G_n(\nu, t)$	Legendre polinomları için ν özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon
$A_n(\nu, t)$	Chebyshev polinomları için ν özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon
$\sigma_S^{AG}(\mu_0)$	Alternatif (Anlı-Güngör, AG) Saçılma Fonksiyonu
$\sigma_S^{HG}(\mu_0)$	Henye-Greenstein Saçılma Fonksiyonu

1.GİRİŞ

Çevremizdeki her şey aslında gözle gözlenemeyecek kadar küçük boyutlarda atom denilen küçük nesnelere oluşmuştur. Maddenin yapısını oluşturan ve gözle görülmeyen parçacıktır, atom. Maddelerin en küçük parçacıklarına kadar bölünebilmesinin de bir sınırıdır. Atom fikri, bunu ilk olarak ortaya atan M.Ö. 440'larda yaşamış Yunanlı filozof Democritos'tan ondokuzuncu yüzyılın başlarına kadar tam 2400 yıl boyunca da sadece bir varsayımdan ibaret kalmıştır. İlk deneysel bilimcilerin (Dalton, Avagadro, Faraday,...) ondokuzuncu yüzyıl başlarından itibaren çalışmaları bu fikri bir varsayımdan öteye taşımıştır. İlk kez 1803 yılında John Dalton, kimyasal tepkimeler neticesinde maddelerin tam sayılarla belirlenen oranlarda tepkimeye girdiğini göstermiş, atom kütlelerini ortaya koyan bir tablo hazırlamış ve böylelikle atomların varlığını kanıtlamış olmasının yanında, atomların sayılabilir ama bölünemez olduğunu ifade etmiştir. J.J. Thomson'un 1897'de katot ışını tüpleri ile yaptığı çalışmalar neticesi elektronu keşfetmesi takibinde Ernest Rutherford' un atom çekirdeğinin varlığını öneren savı günümüz atom fikrinin oluşmasında en önemli aşamalardan biridir. Daha 1896'da Antonie Henri Becquerel' in radyoaktifliği keşfi ve ardından Curie'lerin radyoaktiflik alanındaki çalışmaları çekirdek fiziği alanındaki çalışmaların başlaması için bir dönüm noktası olmuştur. Atom çekirdeği fikrinin kabulü, Rutherford, Geiger ve Marsden'in çalışmaları çekirdek fiziği adıyla yeni bir bilim dalının temellerini şekillendirmiş, yapılan kuramsal ve deneysel çalışmalar, nötronun keşfi ve ardından 1940'lı yıllarda ise atom içerisinde çekirdek ve elektrondan başka daha ileri ve temel düzeyde başka bir yapının olduğunu ortaya koymuştur. Günümüzde bu yapı ve parçacıkları ile ilgili çalışmalar temel parçacık (yüksek enerji fiziği) alanında gerçekleştirilmektedir [1].

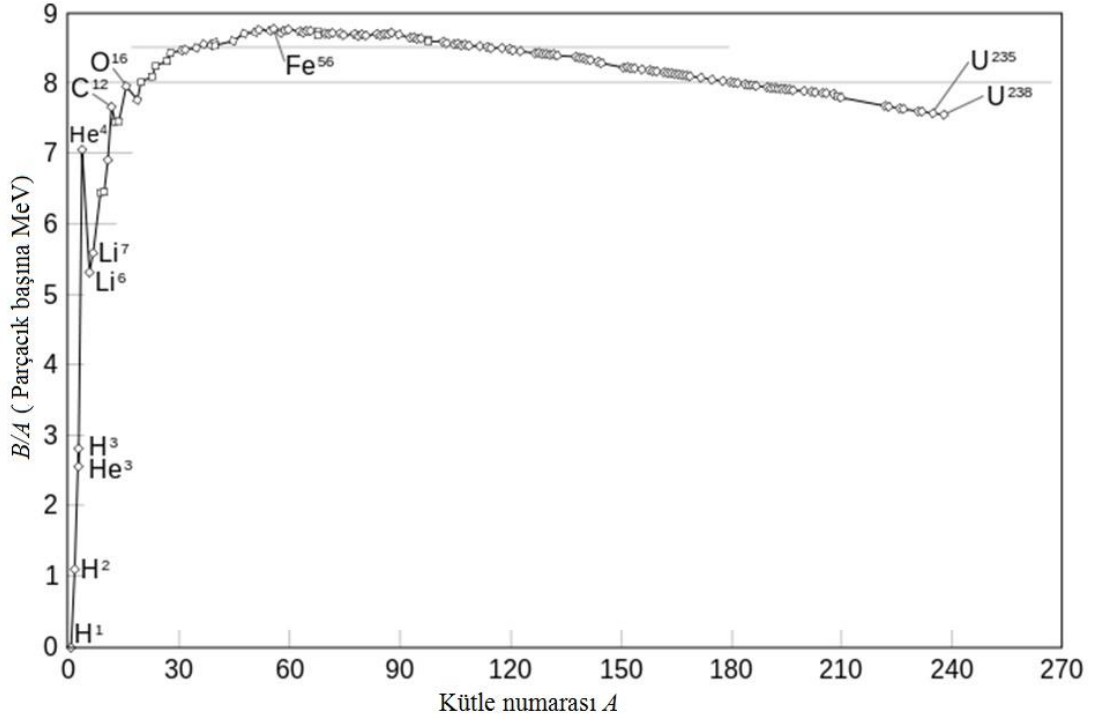
Atomlar bir elektron bulutu, kütlelerin yoğunlaştığı bir çekirdek ve boyutlarına göre kıyaslandığında koskocaman bir boşluktan ibarettir. Çekirdek büyüklüğü tek nükleon için yaklaşık 1 fm (10^{-15} m)'den 7 fm'ye kadar değişmektedir. Her atomun bir çekirdeği vardır ve atomun hemen hemen bütün kütlesi bu çekirdeğinde toplanmıştır. Bir atom çekirdeği, çekirdek içindeki artı yüklerin toplamı (atom numarası) ve toplam kütle sayısı (kütle numarası) ile tanımlanır. Bugüne kadar 118 tane farklı atom numarasına sahip çekirdek belirlenmiştir. Çekirdek, içerisinde eksi yüklü

elektronlar barındırmaz; proton ve nötronları barındırır. Çekirdekte artı yüklü temel parçacık protondur. Nötronlar yüksüzdür. Proton ve nötronların her ikisi birden nükleon olarak isimlendirilir. Bağlı bir çekirdeğin toplam enerjisi, kendisini oluşturan proton ve nötronların (nükleonların) toplam enerjilerinden daha küçüktür. Enerjideki bu fark bağlanma enerjisi olarak adlandırılmaktadır. Bir çekirdeğin B bağlanma enerjisi, A_ZX çekirdeği ile bunu oluşturan Z proton ve N nötronun kütle enerjileri arasındaki farka eşdeğerdir. Buna göre, enerjinin korunumu ve Einstein kütle-enerji eşdeğerliliği denklemi ile $m({}^AX)$ kütleli çekirdeğin bağlanma enerjisi,

$$B = \{Zm_p + Nm_n - [m({}^AX) - Zm_e]\}c^2(1.1)$$

ifadesi ile verilebilir. Burada m_p , m_n ve m_e sırasıyla; proton, nötron ve elektronun kütleleridir. Buna göre bir çekirdeği proton ve nötronlarına ayırmak için sisteme (çekirdeğe) enerji verilmelidir. Buradan, bir çekirdeği kendisini oluşturan nükleonlarına ayırmak için gereken enerji miktarının bağlanma enerjisi olduğu anlaşılabilir. Kısacası, bir çekirdeği parçalamak istiyorsak, en az bağlanma enerjisi kadar bir enerjiyi çekirdeğe vermek gerekir diyebiliriz. Bu enerjinin miktarı da oldukça fazladır [2].

Çekirdek bağlanma enerjisinin sistematik bir şekilde incelenmesi nükleer yapı hakkında bizlere fikirler verebilmektedir. Bağlanma enerjisinin kütle numarasına (A) bağlı olarak artışı hemen hemen doğrusaldır. Bundan dolayı nükleon başına ortalama bağlanma enerjisi olan B/A 'nın, farklı kararlı çekirdekler için artışını A 'nın bir fonksiyonu olarak gösterimi “Şekil 1.1’deki” gibidir.



Şekil 1.1. Parçacık başına bağlanma enerjisi

“Şekil 1.1’de” eğri, çok hafif çekirdekler hariç, oldukça sabittir. Birçok çekirdeğin ortalama bağlanma enerjisi nükleon başına 8 MeV olup, yaklaşık %10 değişmektedir. Eğri, $A=60$ civarında en yüksek değere sahiptir. Yani, eğrinin bu bölgesinde çekirdekler çok sıkı bağlıdır. Kütle numarası 60’tan büyük ve küçük çekirdekler, periyodik cetvelin orta kısmındaki çekirdeklere göre daha az karardır. Daha kararsız çekirdekleri daha kararlı hale getirmek için $A=60$ ’tan küçük çekirdekler için birleşme tepkimeleri (nükleer füzyon), yada $A=60$ ’ın üzerindeki daha ağır çekirdekleri daha kararlı hale getirebilmek için bölünme (nükleer fisyon) tepkimeleri gerçekleştirilmektedir. Her iki durumda da enerji açığa çıkmaktadır.

Bu kadar büyük bir enerjinin açığa çıkma şekli iki farklı çekirdek tepkimeleri ile gerçekleşmektedir. Çekirdek enerjisi ya da nükleer enerji olarak adlandırılan, büyük atom çekirdeklerinin bölünmesi (çoğunlukla uranyum çekirdeği) ile fisyon; küçük atom çekirdeklerinin birleşerek daha büyük kütleli çekirdekler oluşturması (hidrojen ile helyum çekirdekleri) ise çekirdek birleşmesi (füzyon) neticesinde ortaya çıkan bir enerji türüdür.

Atomların periyodik cetveldeki dizilimlerini, atom numarası olan çekirdeğindeki proton sayısı belirler. Örneğin, hidrojen atomunun artı yüklü çekirdek ve etrafında bu yükü dengeleyecek eksi birim yük ($-e$)'ten oluştuğunu söyleyebiliriz. 1932 yılında, Fransa'da Joliot-Curie ve İngiltere'de Ernest Rutherford'un (1871-1937) öğrencisi Sir James Chadwick, atom çekirdeğinin biri $+e$ yüklü proton, diğeri elektriksel açıdan yüksüz olan (nötron) iki tanecikten oluştuğunu keşfetmişlerdir [3].

Nötron adı verilen bu temel parçacığın kütlesinin çok az farkla bir proton kütlesine eşdeğer olup çekirdek içine kolayca girebildiğini anladılar. Nötronun net elektrik yükü yoktu. Ve atom çekirdeğinin bünyesinde barınan elektrik yükü olmayan böyle bir parçacığın (nötronun)varlığının gözlemlenmesi; nötronu nükleer enerji alanındaki çalışmalarda başrol oyuncusu olarak belirleyecek ve nükleer alandaki çalışmalara bir ivme kazandıracaktı [4].

Bu süreci anlayabilmek için birbiriyle telaşlı bir yarışa giren atom fizikçileri (ya da nükleer fizikçiler) çalışmalarında Uranyum atomunun bölünmesinin -Albert Einstein' in ünlü kütle ile enerjiiyi birbirine bağlayan denklemini $E=mc^2$ ile, yani boşluklu ortamda ışık hızının karesi ile kilogram başına ne kadar nükleer enerji düşeceği belirlenebileceği ile de öngöröldüğü üzere- bir enerji açığa çıkarttığını tespit etmişlerdir [5].

Bu bağlamda geriye dönüp geçen yüzyıldaki gelişmelere baktığımızda, atomun parçalanması ile beraberinde getirdiği atom bombası ve nükleer enerjinin, görebileceğimiz en göze çarpan gelişmeleri olarak dikkatimizi çekmektedir.

Öncelikle nükleer fizikçilerin, onlarca kısa süre içerisinde doğanın bir gizemini birbirleriyle sıkı bir rekabet içerisinde çözebilme inancı ve keşiflerinin sonuçları olan, atom bombası ve diğeri nükleer silahların yıkıcı etkilerinin dünya sahnesinde dehşetle izlenmesi ve insanoğlunun artan enerji ihtiyacına karşılık nükleer enerjinin önümüzde fosil yakıtlara nazaran alternatif bir seçenek olarak durması bizler için her zaman göz ardı edilmeyecek bir durum olarak karşımıza bulunmaktadır.

Bilindiği üzere doğadaki en ağır ve kararsız doğal çekirdek olan Uranyum çekirdeğinin bölünerek daha kararlı ve kütle olarak daha küçük iki farklı çekirdeğe ayrılması ve her bölünmede yaklaşık 200 MeV gibi bir enerjinin açığa çıkması, bölünme tepkimesi yada fisyon olarak adlandırılmaktadır. İkinci olarak ta kütlece iki küçük çekirdeğin bir araya gelip birleşmesi ile daha büyük kütleli bir çekirdeğin oluşması birleşme tepkimesi ya da füzyon olarak adlandırılmaktadır. Fisyon tepkimelerinden bilindiği üzere her atomun bölünmesi ve enerji açığa çıkarması mümkün olmadığı gibi, her küçük atom çekirdeği de rastgele füzyon yapamamaktadır. Füzyon tepkimeleri ile gerekli enerjiyi elde edebilmek için tepkimelerin düşük sıcaklıkta gerçekleştirilerek yüksek enerji açığa çıkarmak, tepkimeye giren maddelerin kolaylıkla bulunabilmesi ve büyük bir tesir kesitine sahip olması, plazmanın yeniden ısıtılması için yüklü parçacıklar elde edilmesi, farklı etkileşimleri önlemek için enerjisi yüksek olan nötronların açığa çıkarılması gereklidir. Bu şartları karşılayacak aşamalar henüz kaydedilmemiş olup, füzyon tepkimelerini ticari olarak gerçekleştirmek, günümüz için mümkün değildir. Gelecek yıllara ait olacak nükleer süreçte eğer füzyon tepkimeleri kontrol edilebilir ise insanlığın enerji ihtiyacını çözmeye yine ayrıcalıklı bir seçenek olarak görülmektedir.

Her fisyon tepkimesi neticesinde bir nötron Uranyum atomu gibi bir ağır element atomu çekirdeğine çarptırılarak yutulur ve bunun neticesinde de bu atom kısa süreli olarak uyarılmış durumu neticesinde iki veya daha fazla farklı küçük çekirdeğe bölünür. Bu tepkime egzotermik bir tepkimedir. Her bölünme sonrasında ise ortama, bölünen çekirdekten ortalama 2-3 nötron salınır. Fisyon neticesi ortama salınan bu nötronlar, ortamdaki fisyon yapabilecek diğer atom çekirdekleri tarafından yutulur ve onlar da tepkimeye katar ve bu tepkimeler ardışık olarak tekrarlanır ise zincirleme çekirdek tepkimesi olarak adlandırılır.

Yukarıda sayılan nedenlerden ötürü fisyon tepkimeleri iki açıdan çok önemlidir denilebilir:

Birincisi; alışılmadık ölçekte çok büyük bir enerjinin açığa çıkması. İkincisi; zincir tepkimenin gerçekleşmesi, yani bu tepkimelerde birden fazla nötron serbest kaldığı için, tepkimenin kendi kendine devam edebilmesidir [1].

Zincirleme tepkime kontrolsüz bir şekilde gerçekleşecek olursa, birkaç nano saniyelik süre içinde oldukça büyük bir enerjiyi açığa çıkarır. Atom bombasının patlama mekanizması öz olarak bu şekilde gerçekleşir. Atom bombası olarak isimlendirilen fisyonu dayalı patlayıcılar, konvansiyonel olmayan bir bomba modelidir. Parçalar halinde hazırlanan Uranyum atom bombasında yakıt, Uranyum parçaları halinde hazırlanıp bir araya getirilmiştir. Her parça zincirleme tepkimeyi başlatamayacak kadar küçük, ama hepsi bir araya getirilince oluşan kütlesi, böyle bir tepkimeyi fazlasıyla başaracak kadar büyüktür. Yani “süperkritiktir”. Çekirdek çok büyük bir enerji, patlama ile beraberinde şok dalgası oluşturur.

Nükleer güç santrallerinde ise zincirleme tepkime çok daha yavaş ve kontrollü biçimde gerçekleşir. Reaktörler biraz daha karmaşık yapıdadır. Tepkimenin kontrolünün kaybedilmesi nükleer yakıtın bir bomba olarak patlaması fiziksel olarak olanaksızdır. Bir atom bombasının vereceği enerjiye denk bir enerji verecek şekilde tasarlanmış bir nükleer reaktör, atom bombasının nano-saniyede açığa çıkaracağı enerjiyi 2-3 yılda kontrollü bir şekilde açığa çıkarmaktadır.

Nötronun keşfini izleyen yıllarda Enrico Fermi nötronlar ile ilgili deneylerinde ilginç sonuçlara ulaşmıştır. Bazı büyük çekirdekleri nötron bombardımanına tutmuş ve yeni izotoplar elde etmişti. Nötronların uygun malzemeler ile yavaşlatılabildiğini ortaya çıkarmış, yavaş nötronların hızlı olanlara göre daha çabuk yakalandığı sonucuna ulaşmıştır. Yavaş hareket eden bir nötron çekirdek yakınlarında hızlı olanlara göre daha uzun süre geçirebilmekte ve bundan dolayı da çekirdek ile tepkime yapma olasılığı artmaktadır [5].

Reaktör içerisinde nötronlar üretildiğinde enerjileri oldukça yüksek olabilir. Nötronların yüksek olan enerjileri yavaşlatıcı malzemeler ile azaltılır. Nötron kaynağından çıkan hızlı nötronlar yavaşlatıcı maddenin içinden geçerken yavaşlatıcı maddenin molekülleri ile etkileşir ve yavaşlar. Yavaşlatıcı madde sıcaklığı ve

kalınlığı nötronların son hızını belirler. Yavaşlatıcı maddeler olarak su, sıvı hidrojen, ağır su, grafit, döteryum, katı metan, polietilen kullanılmaktadır.

Nötronlar nötr oldukları için, hedef olarak kullanılacak bir çekirdeğin etrafını saran elektrostatik yük engelinden etkilenmezler. Neredeyse sıfır kinetik enerjili (termal, yani enerjileri 0,025 eV mertebesinde) nötronlar bir hedefe gönderildiğinde diğer yüklü parçacıkların aksine, atomun etrafındaki elektrostatik yük engelini aşmada hızlı nötronlara kıyasla daha etkilidirler. Enerjisi yüksek olsa bile uygun çekirdekler ile elastik çarpışmalar yapan nötronlar yavaşlar. Nükleer reaktörlerde kaynak fisyonun kendisidir. Dolayısıyla fisyon yapan çekirdeklerin bölünmesi sonucu açığa çıkan nötronlar ortamda bulunan yavaşlatıcı bir malzeme ile genellikle esnek ve esnek olmayan çarpışmalar yapması ile yavaşlar yani enerjileri termal seviyeye düşer. Böylece fisyon tepkimelerinin miktarı ve hızı kontrol altına alınmış olur [1].

1932'de fisyonun, 1934'te yapay radyoaktifliğin bulunması neticesinde fizikçiler, yavaş nötronları mermi olarak kullanmak suretiyle Uranyum ötesi yapay elementler elde etmeye çalışmışlardır. Bu denemeler sürerken tesadüf eseri çekirdeği bölmüşlerdir. 1939 yılında Alman Otto Hahn ve arkadaşı Fritz Strassman, Uranyum-238 çekirdeğini yavaşlatılmış nötronlarla bombardıman ederek ilk fisyonu gerçekleştirmişlerdir [3].

İngiliz ve Amerikan bilim insanlarının nükleer bir silahın yapılabileceğinde anlaşmış olmaları, 1939 yılında Alman topraklarında keşfedilen fisyonun, 1942 yılında Atlantiğin öte yakasında Chicago Üniversitesinde pile (yığın) adı verilen CP1 (Chicago Pile 1) ilk nükleer reaktörün yapımı ile kullanılabilen bir enerji üretme yöntemi olarak nükleer enerji ortaya çıkmaya başlamıştır. Chicago Üniversitesinin bahçesinde yapılan bu ilk reaktör ile ilk kritik kütle oluşturulmuştur. Grafit yavaşlatıcılı, doğal UO₂ yakıtlı, soğutmasız ve zırhsız olup, 0,5 W gücünde çalıştırılmış ve 12 Aralık 1942' de 200 W güce çıkarıldıktan sonra durdurulmuş ve sökülüştür [3].

1940 yılının ortalarında, uranyum, toryum, protaktinyum ağır çekirdeklerinin fisyon yapabildiği, fisyon ürünlerinin atom sayısı 34 ile 57 olan radyoaktif çekirdekler olduğu biliniyordu.

1941 yılında Milli Bilimler Akademisinin atom komitesi raporuna göre sanıldığından aksine bomba yapmak için tonlarca Uranyum'un aksine 2 ile 100 kg Uranyum-235 ile bir bomba yapılabilmesinin mümkün olduğu biliniyordu [3].

İlk araştırma reaktörleri ABD'de 28 MW gücünde, grafik yavaşlatıcılı ve hava soğutmalı Brookhaven Reaktörü ile İngiltere'de 6 MW gücünde aynı tipteki BEPO Reaktörüdür.

Plütonyum üretmek maksadı ile yapılmış reaktörlere "üretim reaktörü" adı verilmiştir. Dünyada Plütonyum üreten ilk reaktör ABD'de 1943'de işletilmiş olan Oak Ridge X reaktörüdür.

1944 yılından itibaren Rusya, ABD, Fransa, İngiltere gibi bazı ülkelerde izotop üretimi ve araştırma amaçlı reaktörlerin sayısı artmış ve 1954 yılına gelindiğinde Rusya'nın Obninsk şehri yakınlarındaki bir çiftlikte ilk defa elektrik enerjisi üretmek amacıyla 5 MW gücünde bir reaktör enerji üretimine başlamıştır. Bu reaktör % 5 zenginleştirilmiş Uranyum yakıtlı, basınçlı su soğutmalı ve grafit yavaşlatıcılıdır. 26 Haziran 1954'de yüzde 55 kapasite ve 1500 kW güçle, çalışmaya başlamış olup dördüncü ayında 5000 kW tam kapasiteye çıkarılmış, 48 yıl hizmet verdikten sonra 29 Nisan 2002'de kapatılmıştır. Santral, 2004'te "Bilim ve Teknik Anıtı" ilan edilmiş müze ve eğitim tesisine dönüştürülmüştü.

1957'de işletmeye başlayan ilk ticari elektrik üretim amaçlı nükleer güç santrali Pensilvanya'da (ABD) kurulmuş olup, Shippingport 68 MW gücünde basınçlı su tipi, zengin Uranyum yakıtlı reaktördür.

1961'de Westinghouse tarafından Massachusetts ABD'de inşa edilmiş 175 MW gücündeki Yankee nükleer santrali, bugün kullanılan türlerin ilk örneğidir. Zenginleştirilmiş Uranyumlu ve PWR (basınçlı su reaktörü) tipindedir.

Zenginleştirilmiş Uranyum ve buharlaştırılmalı H₂O içeren BWR (kaynar sulu reaktör) tipi nükleer santrallerin ilk örneği ise, 1956 yılında Argonne N.L. ABD’nde kurulmuş olan EBWR reaktörüdür. 320 MW ton ve 5 MW elektrik gücünde olan bu reaktör, % 5 Zr ve % 1,5 Nb ihtiva eden metal Uranyumlu levha tipi yakıtlar kullanılmıştır [3].

Bugün enerji üretiminde kullanılan reaktörlerde çekirdek bölünmesi sonunda açığa çıkan enerji kullanılmaktadır. Halen aktif 430’dan fazla reaktör fisyonu dayalı reaktörleridir. Bir fisyon reaktöründe, zincir tepkimenin oluşmasına elverişli kritik kütle kontrol altında tutularak, sürekli ve kontrollü biçimde istenilen güçte enerji üretilmesini temin eden son derece karmaşık yapılardır. Zincir tepkime, reaktör içerisinde reaktör kalbi olarak adlandırılan bir ortamda sürdürülür. Yakıt olarak reaktör kalbine konulan Uranyum çoğunlukla zenginleştirilmiştir. Doğadaki Uranyumun çoğunlukla iki tip izotopu (U-238 ve U-235) bir aradadır. U-235 izotopunun payı tüm cevherler içerisinde sadece % 0,72 olup, bu izotop yavaş (ya da düşük enerjili) nötronlarla fisyonu daha yatkındır. Kolayca parçalanabilir, yani “fisil” dir. Zenginleştirilmiş Uranyumda kritik kütle içerisindeki U-235 oranı kimyasal işlemlerle arttırılmıştır. Reaktör kalbindeki Uranyum kritik kütlelerinin uygun büyüklük ve şekilde belirlenmesi oldukça önemlidir. Eğer kütle yeterince büyük değilse kalpten nötron kaçağı çok olacak, zincirleme tepkime başlayamadan sonlanacaktır. Eğer kritik kütlesi gereğinden büyük oluşturulur ise zincirleme tepkimeler kendiliğinden gerçekleşebilir. Çünkü Uranyum her zaman bölünmeye yatkındır. Ülkelerin bütçesini sarsacak kadar büyük yatırımlar gerektiren nükleer reaktörlerin planlanması, yatırımı, iş gücü ve alt yapı özellikleri bu açıdan oldukça karmaşık hesaplamaları da beraberinde getirmektedir.

Bir nükleer santraldaki sistemlerin çalışma mantığı geleneksel güç santralleri ile aynıdır. Termik santrallerdeki gibi ısı enerjisi elde edildikten sonra edilen buharın üreteç türbinlerini çalıştırması ve bu yolla elektrik üretim şekli nükleer santraller için de aynıdır. Reaktör içerisindeki nükleer süreçte elde edilen ürünlerden biri ısı olmak üzere, yakıt Uranyumun kütlesi zincirleme tepkimede fisyon geçirdikçe değişir ve ortaya çıkan enerjinin bir bölümü ısı olarak ortaya çıkmaktadır. Nükleer santral

kurmak için amaç bu ısı enerjisinin buharlı türbini çalıştırmak için kullanılması olacaktır. Bir nükleer güç reaktörü fisyon ürünlerinin kinetik enerjilerini ısı olarak çıkaran ve bununla suyu kaynatıp buhar üretilen bir türbini çalıştıran sistemlerden oluşmaktadır. Kısacası, nükleer reaktörde amaç buhar gücünü elde edebilecek belli bir yüksek sıcaklığa ulaşmaktır. Kaynayan sudan elde edilen buhar türbine gider ve türbinin dönmesini sağlar. Böylece ısı enerjisi hareket enerjisine dönüştürülmüş olur. Reaktör içerisinde gerçekleşen Uranyum fisyonunun kesintisiz zincirleme tepkimesi yeni radyoaktif ürünlerin oluşması ile neticelenir. Yani nükleer bir santralde radyoaktif olan yakıt ürünleri de radyoaktiftir, denilebilir. Zenginleştirilmiş Uranyum parçaları kullanıldıktan sonra, ısı üretmede artık faydası olmayan yüksek derecede radyoaktif ürünler içerirler. Kullanılmış yakıt yüksek derecede radyoaktiftir. Bu ürünler artık reaktör için yararlı değildir. Yerlerinden çıkarılarak reaktör kabına tekrar yakıt koyulması zorunludur. Reaktör durdurulur ve bakım işleri ile birlikte tekrar yakıt yüklemesi yapılır. Birçok nükleer santraldeki birincil ve ikincil soğutma sistemleri olarak kullanılan sistemler kapalı birer döngü üzerine kurgulanır. Doğaya salınması son derece riskli olan yakıt artıkları da rastgele bırakılmaz. Bu atıkların çoğu binlerce yıl boyunca radyoaktivitelerini korurlar. Uzun süreli bir radyoaktif artık idaresi işlemlerine tutulurlar. Günümüzde atık yönetimi işlemleri belli bir yerde depolama şeklinde kalıcı olmayan, geçici çözümlerin dışına çıkmamaktadır. Bu da nükleer enerjinin kamuoyunda en çok tepki çeken konularının başında gelmektedir.

Santrallerin birincil sistemlerindeki farklılıkları nükleer reaktörün ismini de belirler. Örneğin, basınçlı su reaktörlerinin (PWR) kullanım alanı oldukça yaygındır. Dünyada 400'den fazla sayıda nükleer santralden yarıya yakını basınçlı su reaktörü (PWR) olarak üretilmiştir. Basınçlı su reaktörlerinde reaktör kabının içinde bulunan su kaynamadan yüksek sıcaklıklara çıkarılır. Çok kullanılan diğer reaktör tiplerine de kaynar sulu (BWR), basınçlı ağır sulu (CANDU), reaktörler en çok kullanılan nükleer reaktör tipleri olarak sıralanabilir.

Reaktör kalbi olarak adlandırılan bölümde zincirleme fisyon tepkimeleri gerçekleşir. Yakıt çubukları, kontrol çubukları, yavaşlatıcı, yansıtıcı yüzey ve ısılı zırh reaktör kalbinde bulunur.

Reaktör kalbinde, üretilmiş ısı enerjisi suya aktarılır, ve suyu kızgın buhar haline getirir. Elde edilmiş buhar ile türbinler çevrilir ve böylelikle elektrik elde edilir. Türbinden geçtikten sonra sahip olduğu ısı enerjisi azalmış (basınç ve sıcaklığı azalmış olan buharı, sistemden dışarı atılmaz ve yeniden yoğuşturulup su haline dönüştürülerek reaktör kalbine gönderilir. Faz dönüşümü için çevredeki deniz, göl gibi su kaynaklarını soğutucu olarak kullanır.

Günümüzde Nükleer Güç Santralleri (NGS) ile güvenilir ve temiz, kesintisiz ve ileri teknoloji ile elektrik üretilmesine rağmen, pek çok ülkede yoğun kamuoyu tepkilerine sebep olmaktadır. Olumsuz tutumların kökeninde ise endişe ve korku bulunduğu gözlenmektedir. Çünkü gizli nükleer silah kuşkuları halen nükleer endüstrinin zayıf karnıdır. Nükleer atom bombalarının yok etme potansiyeline tarih sahnesinde seyirci kalmış insanoğlu bu gücün barışçıl amaçlarla kullanılabileninden şüphelidir. Dünya kamuoyunda olduğu gibi ülkemizde de aynı tartışmalar süregelmektedir. Ancak insanoğlunun enerji darboğazında, nükleer enerji gerçeği yadsınamaz bir seçenek olarak durmaktadır.

Sayısal verilere dayalı olarak 1 kilogram Uranyumdan elde edilebilecek enerjinin eşdeğer miktarı için 3 000 ton kömür kullanmak gerekmektedir.

Bir kilogram kömür yandığında yaklaşık 6,8 kW·h, bir kilogram petrolün yandığında yaklaşık 7 kW·h, bir kilogram U-235'in fisyonunda açığa çıkan enerji yaklaşık 21 milyon kW·h'tir. Elde edilen enerji miktarları arasındaki bu yadsınamaz fark, insanlığı nükleer enerjiden faydalanabilme yollarını geliştirmeye, askeri ve barışçı amaçlarla faydalanma yoluna sürüklemiştir.

Günümüzde, Uluslararası Enerji Ajansı verilerine göre nükleer enerji, dünya elektrik üretiminin % 13' ünü karşılamaktadır. Dünya elektrik ihtiyacının 2010 ile 2035 yılları arasında yıllık ortalama %2,2 oranında, toplamda ise %70 artacağı tahmin edilmektedir. Dünyada yenilenebilir ve yenilenemez enerji kaynakları ile elektrik üretimi yıllık 21431 TW·h, Türkiye'de ise 240 TW·h'tir.

Ülkemizde ise, fosil yakıtlar ve yenilenebilir enerji kaynaklarına dayalı olarak net elektrik üretimimiz %28 ve net elektrik ithalatımız %72 olup, elektrik tüketim talebi yıllık ortalama % 7-8 oranında artmaktadır. 2023 yılında tahmini enerji ihtiyacımızın 500 milyar kWh olacağı öngörülmektedir. Buna göre mevcut kurulu enerji üretim tesislerimizin üretim kapasitesini yıllık 4000-5000 MW arttırabilirsek ancak enerji ihtiyacımıza karşılık verebilecektir.

Özetle, tüm dünyada olduğu gibi ülkemizin de elektrik üretim talebi sürekli olarak artmaktadır. Mevcut enerji kaynaklarımız dışa bağımlı ve kısıtlı iken, nükleer enerji kullanıcı ülkelerin önünde bir seçenek olarak bulunmaktadır. Bununla birlikte dünya atmosferini tehdit eden karbonlu bileşiklerin kontrolsüz salınımı ve kontrol edilemeyeşi, aynı şekilde fark yapacak bir etki olarak bulunmaktadır. Örneğin, bu açıdan nükleer enerjinin çevre dostu bir teknoloji olduğuna salık verebiliriz. Nükleer santrallerin güvenlik değerlendirilmesi bağımsız lisanslama kuruluşları tarafından son derece tutucu varsayımlara göre yapılmaktadır. Bu nedenle de nükleer santrallerin çevreye ve canlı yaşamına zarar verebilecek şekilde kaza yapma riski, kullandığımız diğer teknolojik ürünlere göre, yok denecek kadar azdır.

Bir nükleer santralin çevresinde yaşadığı varsayılacak insanın, santralin normal zamanında alacağı radyasyon dozu 0,05 mSv/Yıl iken, diğer radyasyon kaynaklarından alacağı toplam doz miktarı 2,7 mSv/Yıl (sadece tıbbi tetkiklerde yüklediği 2,7 mSv/Yıl) yıllık dozun oldukça altında kalmaktadır.

Yeryüzünde halen faaliyetteki 400' den fazla nükleer santral, yılda 2300 milyon ton CO₂ salımı ile 42 milyon ton SO₂ salımını ve yılda 9 milyon ton NO_x salımının atmosfere yayılmasını engellemektedir. Ayrıca atık kül üretimine engel olmakla beraber yılda havadan 210 milyon ton külü de uzaklaştırmış olur.

Dünya nüfusunun nükleer santrallere yaklaşımında, Çernobil kazası ve Fukuşima nükleer reaktörlerindeki sızıntı gibi olumsuzlukların etkileri süregelse de, yukarıda yazılan sonuçları ve reaktör güvenliği üzerine gelişen teknolojiler, toplumdaki yaygın kanının aksine hâlâ dünyanın vazgeçemeyeceği bir enerji üretim yöntemi olarak görülmektedir.

Reaktörlerin güvenli çalışabilmesi için reaktörün yapıma fikrinden planlanmasına, inşaa sürecinden, kullanılacak malzeme kalitesinden, topografî bilgilerinden, işgücü kalitesine, yakıt yönetimine kadar en ince ayrıntılarıyla kusursuz olmalıdır. Planlama, yapılacak hesaplamalar için geliştirilecek yöntem ve teknikler son derece pahalı olan reaktör inşası için ülke kaynaklarının israf edilmemesi, inşaa edilecek reaktörün tasarımı ile kalitesini ön plana çıkarmaktadır. Reaktörün boyutları ve yakıtın ekonomik kullanımı, zincirleme tepkimede nötron kullanımı ve reaktörün kontrol edilebilirliği ile ilgili hesaplamaları ön plana çıkarmaktadır. Örneğin, bir reaktörün mevcut durumunu belirlemek için reaktör kalbindeki nötron nüfusunun değişimi önemlidir. Zincirleme çekirdek tepkimeleri sonucu her fisyonunda, fisyon ürünü kız çekirdekler ile serbest kalan 2-3 nötron zincirleme tepkimenin nesilden nesile devamını sağlar. Bu ikinci nesil nötronların her biri tekrardan fisyon ve daha çok nötronun ortaya çıkmasına neden olur. Her bir nesilde açığa çıkan (doğın) nötron sayısının bir önceki nesilde yutulan nötron sayısına oranı nötron çoğaltma faktörü ya da sonsuz ortamda çoğaltma katsayısı (k_{∞}) olarak adlandırılmaktadır.

Ancak, reaktörün boyutları bellidir ve tabii ki fisyon sonunda açığa çıkan her nötron zincirleme tepkimeye katılmamakta; bazı nötronlar hiç tepkimeye girmediği gibi, bazıları da sistem dışına kaçabilmektedir.

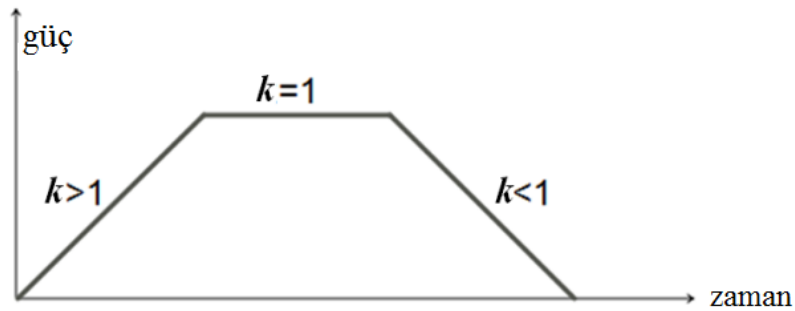
k , reaktör kalbinde nötronların çoğalmalarının bir ölçüsüdür. Bu nedenle önemlidir. Kontrollü tepkime gerçekleştirildiğinden k çoğaltma katsayısı da kontrol edilebilir. Örneğin; nötron nüfusu arttırılmak istendiğinde kontrol çubukları reaktör kalbinden dışarı hareket ettirilir. Soğutucu sıvı ile soğutucudaki sıcaklık değişimi ya da nükleer yakıt yanma oranındaki değişiklik reaktör kritikliğini etkiler.

k 'nın 1'e eşit olması ($k = 1$ durumu) en uygun durumdur. Sistemin kritik durumda olduğunun ifadesidir "Şekil 1.2".

k 'nın 1'den küçük olması ($k < 1$) durumunda reaktör sistemi kritik altıdır. Zincirleme tepkimeyi devam ettirecek nötron sayısı azalmış durumdadır. Reaktör sistemi istenen verimi vermeyecek ve reaktör kalbi soğuyacaktır.

k 'nin 1'den büyük olması ($k > 1$) durumu sistemin kritik üstü olduğunu ifade eder. Reaktör dinamiği artacaktır. Yani fisyon nedeniyle ortaya çıkan her nötron bir miktar enerjinin daha ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Bu enerji miktarı nötronun yutulma ya da ortam atomlarıyla tepkime vermesi ve yayılımı yoluyla, dikkate alınmış ortam atomlarına ilettiği kinetik enerjiye kıyasla oldukça büyüktür. Bu nedenle çoğaltıcı ortamlar açığa çıkaracağı enerji ve bu enerjinin yadsınmaz büyüklüğü sayesinde oldukça önem arz etmektedir. Reaktör fiziğine duyulan ihtiyaç bu enerjinin kullanımının sağladığı yararların yanı sıra, ortaya çıkacak olumsuz durumların mevcut canlı nüfusu varlığına getirebileceği olumsuzlukların gerçekleşmeden önlenmesine yöneliktir. Reaktör kalbinde tepkime yapan nötron sayısını arttıracak, reaktörde güç yükselmesi gerçekleşecektir. Ancak gücün yükselmesi yeterli soğutma, yani soğutucu akışının ayarlanması ile beraber senkronize edilmez ise yakıt sıcaklığı da artacağından reaktör güvenliğini tehlikeye atacak riskleri de beraberinde getirecektir.

Reaktör koru serbest nötronları barındıran bir ortamdır. Nötron davranışına etki eden önemli bir unsur ise ortamın özelliğidir. Ortamın belirgin bir özelliği yutucu olması, yayıcı ya da nötron çoğaltıcı (çoğaltkan) olması olarak gösterilebilir. Ortamın özelliğini belirleyen sayılan niteliklerden hangisi baskınsa ortam o şekilde açıklanmaktadır. Kor içerisinde yeterli miktarda bölünme yapabilecek ^{235}U çekirdeği bulunuyorsa reaktör ortamı çoğaltıcı ortamdır. Serbest nötronlar bu çekirdekler ile etkileşime girerek zincirleme tepkimenin devamını sağlayabilmektedir.



Şekil 1.2. k çoğaltma sabitin kritik, kritik altı ve kritik üstü durumları

Bir fisyon reaktörünün oluşturulması ve kritikliğe yakın bir durumda çalıştırılması, ancak aşağıdaki işlemlerin dengeye getirilmesine bağlıdır.

- Bir nötron ile başlayıp birden fazla nötron açığa çıkartan zincir tepkimesi,
- Fisyon nötronlarının uranyum tarafından fisyonlu ve fisjonsuz tutulması,
- Nötronların yakıt dışındaki malzemeler tarafından yutulması,
- Nötronların reaktör kalbinden dışarı kaçması.

Reaktör içindeki nötron dağılımı bir yayılma olayı olarak düşünülebilir. Dengeli bir reaktör sisteminde nötron sayısının zamanın bir fonksiyonu olarak değişmediği varsayılmaktadır. Reaktör kalbindeki üretilen nötron sayısı kaçaklar ve yutulmalar ile dengelenmektedir. Reaktör yakıtında oluşan zincirleme fisyon tepkimeleri bir nötron kaynağıdır ve net bir nötron akısı oluşturmaktadır. Sayının korunabilmesi için ise reaktör sınırlarında net akının sıfır olması gerekecektir. Böyle bir ortamdaki nötron dağılımını ifade edebilmek için oluşturulacak denklemler transport denklemleridir.

Reaktör içerisinde zincir tepkimenin devamı için reaktör kalbindeki tepkime yapacak nötron sayısının korunması çok önemlidir. Reaktör içerisinde toplam nötron sayısı azaldığında zincir tepkime sayısı da azalacak ve yavaşlayarak durmasına sebep olacaktır. Nükleer reaktörün sağlıklı çalışabilmesi için zincirleme tepkimenin sürekliliğinin kontrol altında tutulması, tepkimeler sonucu ortama salınan nötronların reaktör içerisindeki dağılımının kontrol altında tutulması ile mümkündür. Kayıpların azaltılabilmesi için reaktörün son derece kusursuz ve dışarıya radyasyon sızdırmasının önlenmesinin yanı sıra, tepkimeler sonucu açığa çıkan nötronların reaktör içindeki fisyon yapabilen ve yapmayan atomlarla yaptıkları çok farklı çeşitlilikteki tepkimelerin (Bunlar, elastik ve elastik olmayan saçılmalar, yutulmalar, ışımsal yakalamalar olarak sıralanabilir.) kontrol altında tutulması gereklidir. Bu tepkime çeşitliliğinin çok fazla olması sebebiyle nötronların reaktör içerisindeki dağılımlarının tam olarak belirlenebilmesi kolay değildir. Bunun yanı sıra, nötronların reaktör içinde dağılımlarının tam olarak belirlenememesinde, nötron enerjilerinin farklı büyüklüklerde olması, reaktör içindeki konumlarının farklı olması, reaktör içinde fisyon yapabilecek yakıt atom çekirdeklerinin yanında aynı zamanda reaktör kalbini oluşturan malzemelerle de çarpışma yapabiliyor olmaları,

nötr olduklarından reaktörden kaçabilmelerinin kolaylığı, atomlarla yaptıkları çarpışmaların çok farklı sayıda açılarda saçılmayla sonuçlanabilmesi, yük değişimleri sürecindeki sıcaklık değişimleri ile zamana bağlı olarak nötron sayısının değişimi gibi bir çok sebep de sayılabilir.

Reaktör içerisinde zincirleme tepkimelerin devamı için sızıntı ve yakalamayla kaybedilen nötronların sayısını dengeli sayılabilecek bir durumda tutulabilmesi için, yeterince serbest nötronun olduğu bir durumda, fisyon tepkimesi kendi kendini devam ettirebilecek bir duruma gelir ve reaktör sistemi bu noktada kritiklik durumuna ulaşmış olur. Zincirleme tepkimenin sürdürülebilmesi için fisyon yapabilecek gerekli olan en düşük nötron sayısının ve kolaylıkla fisyon yapabilecek fisil çekirdek sayısının hesaplanması bizlere iki durum hakkında yol göstermektedir. Birincisi, dolaylı olarak reaktör boyutlarının belirlenmesini; ikincisi, kullanılacak reaktör yakıtı miktarının belirlenmesini mümkün kılmaktadır. Nükleer reaktörler tasarlanırken ikincil nötron sayısına bağlı olan reaktör kritik kalınlığının belirlenmesi transport kuramında kritik kalınlık problemi olarak adlandırılmaktadır. Kritik durumda çalışan bir reaktörün ($k = 1$ durumu) içerisinde ortaya çıkan nötronların reaktör kalbinin sınırlarından dışarı çıkmaması için oluşturulacak ortamın büyüklüğüne ilişkin hesaplamalardır.

Buna göre, nükleer reaktörlerin tasarımında reaktör içerisindeki yakıt miktarı, nötron dağılımı ve reaktörlerin bileşenlerinin belirlenmesi çok fazla önem kazanmaktadır. Dolayısıyla reaktörlerinin sürekli ve kontrollü bir şekilde güç üretimini sağlayacak nötron dağılımının korunmasını anlatan transport denkleminin çözümü, bu alanda en çok çalışılan konuların başında gelmektedir.

Nötron transport denklemi, serbest nötronların reaktör kuru gibi nötron-çekirdek etkileşimleri ve bu etkileşimlerin neden olabileceği sonuçların kestirilebileceği uygun ortamlarda hareketlerini inceleyen ve sonuçlarını istatistiki olarak yöntemli bir biçimde açıklamaya çalışan bir tümlev-türev denklemdir. Tümlev-türev denklem ile kor içerisindeki mevcut nötronların korunumu reaktör değişkenlerine bağlı olarak açıklamaktadır. Kor içindeki değişkenler, yakıtın kalitesi, reaktör hacmini sınırlayan malzemenin niteliği, yavaşlatıcı olarak kullanılan maddenin özellikleri ve zincirleme

tepkimenin gerekleŖtiđi kor ortamının sınırları olarak sınıflandırabilmektedir. Denklemın tümlev-türev olarak türetilmesi de, denklemın oldukça karmaŖık bir yapıya sahip olmasından kaynaklanmaktadır. Reaktör koru zincirleme tepkimenin gerekleŖtiđi bir ortamdır ve zincirleme tepkimenin kontrolünü sağlamak reaktörün güvenli alıŖtırılması anlamına gelmektedir. Zincirleme fisyon tepkimelerinin sonuçlarını tahmin edebilmek istatistiki bir bilgi olup; reaktörün mevcut güncel alıŖma durumunun sürekli ve anlık olarak takip edilerek güvenlik tedbirlerinin alınması gerekmektedir.

Nötron transport denklemine dayalı olarak nötronların mevcut durumlarının belirlenmesi bir bütün olarak nötron transport kuramının konusunu oluŖturmaktadır. Reaktör kalbinde, yakıt yavaŖlatıcı malzemesi ve kontrol ubuklarının bulunduğu bir ortamda tek baŖına bir nötron iki konum arasında hareketini sürdürürken, mevcut ortamındaki diğer atom ekirdekleri ve serbest nötronlarla da arpıŖacaktır. Transport kuramı, tek bir nötronun arpıŖma sonuçlarından değerlendirmeler yaparak, zincirleme tepkimeler neticesinde ok sayıda nötron için belli bir yönde (ok sayıda nötronun kor içinde belli bir yönde hareketi nötron akımını oluŖturmaktadır.) oluŖacak nötron akımını; bu sonuçlardan da hareketle reaktör genelinde oluŖacak reaktör akılarını (Reaktör koru için her yöndeki akımların toplamı nötron akısını oluŖturur.) istatistiksel olarak incelemektedir. Bu sayede reaktör ierisinde hem nötron davranıŖları takip edilebilmekte, hem de nötron davranıŖlarına müdahale edilebilerek reaktör alıŖması kontrol altında tutulmaktadır.

Sonuçta, ilkel tasarımlara sahip ilk reaktörlerden günümüz modern reaktörlerine yeterlilikleri ve oluŖturacađı tehlikeleri dünya kamuoyunda sürekli sorgulanmakta olan nükleer gü santrallerinin tasarımlarının dayandığı temel ilkeler nötron transport denklemi ve denkleminin özüm yöntemleri ile belirlenebilmektedir.

Nötron transport kuramı nötron davranıŖlarını konuma, aıya, zamana ve hıza bağlı olarak inceler. Nötron davranıŖlarının bu sayılan erevede incelenmesinde gruplar kuramı kullanılır. Reaktör ortamında hareketli olan serbest nötronların tamamı aynı hıza sahip olduğu varsayılırsa tek hızlı grup kuramı, nötronların enerji değerimleri de hesaba katılarak ve ortam belli sayıdaki aralıklara bölünüp birden fazla grup

belirlenerek çözüm arayışı yapıldığında çok hızlı grup kuramı adı altında sınıflandırılmaktadır. Transport denklem çözümlerinde belirlenen gruplar kuramı dönüşümleri kullanılarak saçılma olasılıklarına karşı gelen çözümler arasında genel geçerliliği olan bağıntılar elde edilmektedir.

Transport denklemin çözümü ile saçılma olasılıkları bulunabilmektedir. Saçılma olasılıkları ise uygun bir saçılma fonksiyonun tespiti ile belirlenmektedir. Uygun bir saçılma fonksiyonu kullanarak saçılma olasılıklarına karşı gelen çözümler bulunur. Elde edilen çözümlerin genel geçerliliği olması gerekmektedir.

Transport denklem gibi karmaşık problemleri, kısa zamanda ve en ekonomik biçimde çözümünü yapabilmek için koşulların ve yaklaşım yöntemlerinin iyi tespit edilmesi ve analitik ve sayısal çözüm yöntemlerinin farklı problemler için geliştirilmesini gerekli kılmaktadır. Tarihsel süreç içerisinde, nötron transport denkleminin analitik ve sayısal çözümlerine ulaşabilmek amacıyla bir çok analitik ve sayısal çözüm yöntemi denenmiştir. Çözüm yöntemleri Case, Legendre(P_N) ve Chebyshev (T_N , U_N), tekil öz fonksiyonları yöntemi gibi yöntemlerdir. Bu yöntemlerde, transport denkleminde kullanılmak üzere belirlenen bir saçılma fonksiyonu transport denkleminde yerine yazılır ve fonksiyonların diklik özelliklerinden yararlanarak seriye açılır. Açılımın katsayıları konuma bağlıdır. Elde edilen akı momentleri ile ilgili türevsel denklemler Legendre veya Chebyshev polinomları kullanılarak elde edilmektedir. Her iki yaklaşımdan elde edilen türevsel denklemler Legendre polinomları kullanılarak elde edilmişse kullanılan yöntem P_N yaklaşımı, I. Tip Chebyshev polinomları kullanılarak elde edilmişse T_N yaklaşımı, II. Tip Chebyshev polinomları kullanılarak elde edilmişse U_N yaklaşımı olarak adlandırılmaktadır.

II. Tip Chebyshev polinom yaklaşımı, konvansiyonel yöntemler olarak kullanılan Legendre polinom yaklaşımı ve I. Tip Chebyshev polinom yaklaşımı ile benzer sonuçlar verebilmektedir. Bu nedenle, II. tip Chebyshev dik polinomlarını kullanmak da bu çözüm yöntemlerinden biri olarak tercih edilebilmektedir ve bazı reaktör fiziği problemleri için de daha gerçekçi sonuçları verebilmektedir. II. Tip Chebyshev polinomlarını, diklik özelliklerini ve tekrarlama bağıntılarını bu çalışmamızda çözüm

yöntemi olarak kullanacağız. II. Tip Chebyshev polinomları “ U ” ile gösterilmekte ve yöntem “ U_N ” yaklaşımı olarak adlandırılmaktadır.

Bu tez çalışmasında transport denkleminde yazılacak uygun saçılma fonksiyonu için bir alternatif faz fonksiyonu olarak Anlı-Güngör (AG) faz fonksiyonu kullanılarak önce geleneksel Legendre polinomları yaklaşımı (P_N yöntemi), daha sonra ise ikinci tip Chebyshev polinomları yaklaşımı (U_N yöntemi) kullanılarak, genişliği $x=-a'$ dan a' ya uzanan tek boyutlu dilim geometride, kaynağın olmadığı homojen bir ortamda nötron transport denklemi kritik kalınlık problemi için çözülecektir.

P_N ve U_N yaklaşımları akı momentleri (Φ_n) elde edilecektir. Elde edilecek akı momentlerine genel olarak $\Phi_n = G_n e^x$ şeklinde çözümler önerilecek ve özdeğer (v) spektrumlarına bağlı denklemler elde edilerek özdeğer spektrumları hesaplanacaktır. Elde edilen özdeğer spektrumları tabloya aktarılacak P_N ve U_N yaklaşımı ile elde edilen sonuçların literatür sonuçları ile karşılaştırılması yapılacak, uyumluluğu incelenecektir.

Saçılma fonksiyonunun sistemin kritikliği üzerine etkileri son derece önemli olup, ayrıca sistemin kritik kalınlıkları bu fonksiyonun parametrelerine bağlı olarak hesaplanacaktır. Böylece hem P_N yöntemi, hem de U_N yöntemi kullanılarak farklı c ve t parametreleri için sistemin kritik kalınlıkları sayısal olarak hesaplanacaktır. Bu çalışmada kullanılacak U_N yöntemiyle elde edilen sonuçların tutarlılığının incelenmesi için sayısal sonuçlar tablolarda verilecek ve her iki polinom yaklaşımı yardımıyla elde edilen sonuçlar karşılaştırılacaktır.

Denklemlerin sayısal çözümlerine ulaşabilmek için çözümlerde kolaylaştırıcı bir araç olarak Maple bilgisayar programı kullanılacaktır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Nükleer reaktörlerin son derece karmaşık yapılar olduğu herkesçe bilinmektedir. Günümüz teknolojisiyle inşa edilmiş son derece karmaşık altyapı barındıran nükleer reaktörlere kıyasla, daha basit teknoloji barındıran ilk reaktörlerden itibaren, reaktör güvenliğinin kontrol altında tutulması, son derece pahalı alt yapı ile birlikte; özellikle nötron dağılımının istatistiksel incelenmesi, sürekli dinamik bir yöntem geliştirme sürecini de beraberinde getirmiştir. Bu sürecin işleyişi, özelliklerini ileriki paragraflarda ele alacağımız nötronların dağılımını inceleyen matematiksel yöntemlerin geliştirilmesi bunların çözüm yöntemlerinin geliştirilmesi ile mümkün olmuştur. Gazların yayılımı ve yayılım teorisini açıklayabilen süreklilik denklemleri ile nötronların yayılımı ve nötron yayılımını açıklayabilen nötron transport denklemleri reaktör fiziğinin ele aldığı başlıca konulardır. Reaktör fiziğinde sıkça kullanılan nötron transport denklemi, reaktör içerisinde nötron dağılımını istatistiksel olarak ifade edebilmek için oluşturulmuştur. Böyle bir olaya bakış açımız, nötronların reaktör içerisindeki rastgele dağılımını aslında bir yayılım olayı olarak kabul etmemizle şekillenmektedir. Reaktör içerisinde çeşitli nedenlerle üretilmiş ya da mevcut bulunan serbest nötronların istatistiksel incelenmesi, aynı serbest nötronlar gibi rastgele hareketler yapabilecek gazların yayılımı ile benzer matematiksel denklemler içermektedir.

Transport denklemin oluşturulma sürecinde doğrusal Boltzmann denklemi temel dayanaktır. Boltzmann denklemi, gazların kinetiği kuramını ifade eden bir denklemdir ve bu denklem ile, aynı nötron gibi yüksüz olup moleküler parçacıkların yayılımını anlatan ideal gazın dinamiği incelenmektedir. Bu denklemde, prensip olarak gaz parçacıklarının, verilen sınır koşullarındaki dinamiği tanımlanır.

Boltzmann'ın, bu eşitliği 1872 yılında yayınlaması ile transport kuramı çalışmaları artmış ve yaygınlaşmıştır. Boltzmann denklemi doğrusal olmayan bir tümlev-türev denklemdir. Bazı yaklaşımlar ile doğrusal hale getirilip çözülebilmektedir. Denklem çözüm yöntemleri nükleer reaktör tasarımlarına uygulanmakta yeterli ve dengeli sonuçları verebilmektedir [6].

Gazların kinetik teorisini belli yaklaşımlarla sınırlandırıldığında bir alt konusu gibi sayılabilecek transport kurama ulaşılır. Parçacık dağılımının yoğunluğunu tespit edebilmek için istatistiksel mekaniğe uygun olarak dağılım fonksiyonunu belirleyecek denklemler üretilerek çalışılır. Bir seyreltik gaz için kinetik denklemleri yada transport denklemleri Boltzmann denklemiyle açıklanır. Yoğun sistemler için elde edilmiş olan kinetik yada transport denklemlerinin matematiksel özellikleri, transport kuramının bilinen özelliklere dikkate değer derecede benzerdir [7].

Transport denklemleri gazların kinetik kuramı yanında, reaktör fiziği, plazma transport kuramı, astrofizik alanları ve radyoaktif kaynakların zırhlaması ile radiatif transferde, kullanımı oldukça yaygındır [8,9]. Reaktör dinamiğinde transport denklemleri saçılma, Albedo, Milne problemleri ile kritik kütle problemlerinde farklı geometriler için (bunlar küresel ve silindirik geometriler) kullanılmaktadır. Böylece transport teori için incelenen konu alanında çok küçük parçacıkların hareketlerinin matematiksel modellenmesi yapılmaktadır, denilebilir. Başlangıçta transport teori ile ilgili çalışmalar astrofizik problemlerinin incelenmesi ile başlamıştır. gezegen veya uydu atmosferlerindeki ışınal enerji transportunun incelenmeye başlanması, yani ışık fotonlarının yayılımı (radiatif transfer) ve sonrasında nükleer enerji sistemlerinin nötron ve gama ışını transportunun incelenmesi takip etmiştir. Sıcak yıldızların spektrumlarının incelenmesi ile yıldız fotosferlerinde ısı dağılımı ve gerçekleşen ışınımların analizi bu alandaki en klasik problemlerdendir. Başlarda çalışma alanları bu yönde iken, bu çalışmalar artan transport teori çalışmalarını şekillendirmiş ve transport denklemin çözümüne yönelik çeşitli yöntemler bu sayede geliştirilmiştir [10-12].

Transport kuramı çalışmaları aynı zamanda ısı iletimi ve taşınımı problemlerinde de kullanılmaktadır. İncelenen olayla ilgili fiziksel özelliklerin kabullenimleri ve yaklaşımları doğrultusunda uygun sınır şartları belirlenir, fiziki ortam özelliklerinin dışına çıkılmadan matematiksel modeller zorluk derecelerine göre hazırlanır ve nötron transport denkleminin çözümü belirli sınır şartları için yapılır. Sistem için tüm olası durumlar faz uzayında temsil edilmektedir. Bu denklem ile faz uzayında belirli bir birim hacim içerisinde belirlenen nötron sayısının istatistiki olarak denge durumlarının zamanla değişimi, üretilen nötron sayısı da göz önüne alınarak yazılır.

Belirlenen birim hacim içerisinde belirli sayıda nötronun girmesi ve içeri giren nötronlardan bir kısmının hacim içerisindeki yakıt çekirdekleri ile çarpışmaları neticesinde ikincil nötronların üretilmesi ve üretilen yeni nötronlar ile birlikte belirli bir sayıda nötronun hacim elemanından çıkması düşünülür. Söz konusu birim hacim içerisindeki nötron sayısının, nötron enerjileri ya da hızları ile konumlarına bağlı olarak değişmesinin takip edilmesi faz uzayı koordinatlarına bağlı olarak yapılır. Kısacası, birim hacmin koordinatlarında nötron enerjilerinin belli bir aralıkta olduğu düşünülerek, nötron transport denklemi elde edilmektedir [13].

Nötron transport teorisi ile ilgili çalışmalar tarihsel süreçte birçok farklı çalışmada kullanılmakla beraber, nükleer reaktör tasarımlarındaki problemlerde de kullanım alanı oldukça geniştir. Bir nükleer reaktörün tasarımından kullanımına ve sonrasında da yakıt yönetimi ile ilgili çalışmaların kusursuz bir şekilde uygulanması kaçınılmaz bir zorunluluktur. Tasarım ve uygulamada nötron akısının reaktör kalbindeki dağılımının takip edilmesi gerekmektedir. Bunun neticesinde, yakıt çekirdekleriyle etkileşme durumları çerçevesinde nötron akısını konum ve açı bağlantılı olarak çözümleyen çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Dilim ve tek boyutlu küresel geometride transport teoride özellikle kritiklik problemi ile uğraşan birçok farklı araştırmacı, doğru analizleri veren farklı yöntemler ile çalışmıştır. Nötronların birbirleriyle ve çevrelerindeki diğer atomlarla etkileşimlerinde her yöne eşit olmayan bir olasılıkla saçılmalarını ifade eden anizotropik bir şekilde saçılmaları ve bu saçılmaların kritik boyuta etkisi transport teorisinde bugüne kadar yapılan en klasik çalışmalardan birisidir. İzotropik yayılmanın gerçekleştiği ortamdaki nötron akısının ve nötronların maddeyle çeşitli ara etkileşmelerine tekabül eden tesir kesitlerinin yöne bağlı olmadıkları kabulüne dayanmaktadır. Hâlbuki bir nötronun sonlu bir kütle ile çarpışması tam olarak izotropik değildir ve nötron akısı da kuvvetli nötron yutucu bölgelerin ve ortamın boşlukla çevrili sınırlarının civarlarında da izotropik bir dağılım arz edemez. Zira bir ortamın izotropikliği, ortamın her bir noktasına her yönden aynı sayıda nötron gelmesi buradan da her yöne eşit sayıda nötron yönelmesi ile oluşmaktadır. Çoğaltıcı bir ortamda kuvvetli bir nötron yutucu bölgenin varlığında veya boşlukla çevrili bir dış yüzeyin civarındaki rastgele bir noktaya böyle bir bölgeden gelen nötronların sayısı ya sıfırdır ya da ortamın diğer yönlerinden gelenlerin yanında çok küçüktür. Dolayısıyla bu çeşit bölgeler civarında nötron akısı

mecburen anizotropik yani yöne tabi olmaktadır. Bu nedenlerle nötronların çoğaltıcı ortamlardaki dağılımlarını daha gerçekçi olarak inceleyebilmek için transport denklemlerin çözüm yöntemlerinin geliştirilmesi ihtiyacı doğmuştur [14].

Nötron çekirdek etkileşiminde anizotropi durumunun nötron dağılımına etkisi, halen transport teorisinin en önemli problemlerinden birisidir. Mika, izotropik olmayan saçılma için tek hızlı denklemin çözümünü elde etmiştir [15].

Nötronların reaktör içindeki etkileşimleri sonucunda izotropik veya anizotropik saçılmalarını temsil eden bir saçılma fonksiyonu veya bazı kaynaklarda belirtildiği gibi faz fonksiyonu olması transport denkleminin gerçeğe en yakın şekilde çözülmesinde yardımcı olacaktır. Özellikle anizotropik ortamlarda transport denkleminin çözümünde çok doğru sonuçlar bulmak oldukça güçtür. Bu problem, nötronların reaktör içindeki etkileşme olasılıklarını temsil eden uygun bir dağılım fonksiyonunun transport denklemine yerleştirilmesi ile aşılabılır. Bugüne kadar yapılan çalışmaların önemli bir kısmında nötronların izotropik saçıldıkları düşünülse de son yıllarda problemin çözümünün daha gerçekçi olmasını sağlamak için anizotropik saçılmalı ortamlarda da çözümler elde edilmiştir. Birçok çalışmada saçılma fonksiyonunun, değişkeni $\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}$ olan Legendre polinomları; $P_n(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega})$, cinsinden seriye açılacağı belirtilmiştir [16].

$$\sigma_S(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^N (2n + 1) b_n P_n(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}) \quad (2.1)$$

Burada $\mathbf{\Omega}'$ ve $\mathbf{\Omega}$ sırasıyla bir saçılma olayı öncesinde ve sonrasında nötron hız vektörünün doğrultusunu göstermektedir. Normalizasyon gereği $b_0 = 1$ iken, b_1 saçılma açısının ortalama kosinüsüdür. Bununla beraber, nötronların izotropik olarak saçıldıkları düşünüldüğünde denklem (2,1)'deki serinin sadece ilk terimi kullanılır; doğrusal anizotropik olarak saçıldıkları düşünüldüğünde ise serinin ilk iki terimi kullanılır. Serinin bundan sonraki terimleri kuadratik, triplet ve kuadropol anizotropik saçılma gibi adlandırılmakta, ancak anizotropik saçılmanın derecesi arttıkça denklemin çözümü bazı matematiksel zorluklar nedeniyle kolay olmamaktadır. Bu nedenle anizotropik saçılmalı ortamlarda transport teorisine ilgili çalışmalar çoğunlukla doğrusal anizotropi seviyesinde olmaktadır. Nötronların

saçıldığı ortamın doğrusal anizotropik olarak kabul edildiği ve transport teorisindeki bazı problemlerin en temel düzeyde incelendiği çalışmalar, takip eden ileri çalışmalara da büyük ölçüde kaynak oluşturmuştur [17-20].

Saçılma fonksiyonunda doğrusal anizotropi teriminin alınması transport denklemindeki hesaplamalara ciddi matematiksel zorluklar getirmektedir. Örneğin, doğrusal anizotropik saçılmalı bir ortam için nötron akısı ile ilgili bir integral denklem elde etmek oldukça zordur. Dahası, doğrusal anizotropik saçılmalar için yapılmış analitik çalışmalar oldukça sınırlı düzeyde kalmıştır. Anizotropik saçılma için, saçılma fonksiyonuna ileri saçılma parametresi α ve geri saçılma parametresi β eklenerek saçılma fonksiyonu farklı bir biçimde yazılabilir:

$$\sigma_S(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}) = \frac{1-\alpha-\beta}{4\pi} + \frac{\alpha}{2\pi} \delta(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega} - 1) + \frac{\beta}{2\pi} \delta(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega} + 1), \quad (2.2)$$

Burada, α ve β parametreleri sırasıyla; ileri ve geri saçılma olasılığı veya ileri ve geri saçılma parametreleridir ve 0 ile 1 arasında değişen değerler alabilirler. δ ise Dirac delta fonksiyonudur. Denklem (2.2) ile verilen şekliyle bir saçılma modeli ilk defa Fermi tarafından ileri-geri-izotropik saçılma modeli olarak önerilmiş, daha sonra bu model İnönü tarafından geliştirilmiştir [21,22]. Ayrıca, birçok araştırmacı bu saçılma modelini kullanarak benzer çalışmalar yapmışlardır [23,25]. Bazı tam çözümler ise Sahni ve ark. tarafından yapılmıştır [26].

Sahni ve ark., denklem (2.2) ile verilen ileri-geri-izotropik saçılma modeline doğrusal anizotropik saçılma terimini eklemiş -denklem (2.3)- ve ayırık ordinatlar (S_N) yöntemini kullanarak dilim geometride tek-gruplu nötronlar için kritik kalınlık ve zaman özdeğerleri hesaplamaları yapmışlardır [26].

$$\sigma_S(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}) = \frac{1-\alpha-\beta}{4\pi} (1 + 3b_1 \mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}) + \frac{\alpha}{2\pi} \delta(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega} - 1) + \frac{\beta}{2\pi} \delta(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega} + 1). \quad (2.3)$$

Burada, $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ ve $\alpha + \beta \leq 1$ değerlerini almaktadır. Denklem (2.3)'de verilen saçılma fonksiyonu genellikle artı varsayılır ve bu durumda $|b_1| \leq 1/3$ sağlanmaktadır. Bu durumda, b_1 'in eksi değerleri için c (çarpışma başına ortalama

ikincil nötron sayısı) değerleri gerçek ve yaklaşık $2mfp$ (ortalama serbest yol, nötronun yaptığı iki ardışık çarpışma sonucu katettiği ortalama mesafe) kalınlığındaki büyük sistemlerde daima reel olmaktadır. Öte yandan, birçok c değeri karmaşıktır [27-29].

Genellikle kritiklik problemleri için transport denkleminin tümlev-türev formuna dayanan analitik teknikler kullanılmaktadır. Bu yöntemler yüksek derecede doğru sonuçlar verirler ancak, bunlar sadece düşük mertebeden anizotropik saçılmalar için uygulanabilirler. Gerçek sisteme en yakın sonuçların elde edilebilmesi için özellikle reaktör hesaplamalarında denklem (2,1)'de verilen serinin mümkün olduğunca çok teriminin alınması gerektiği düşünülmektedir. Ancak, ilk iki terimden sonrasının alınması yani kuvvetli anizotropik durumların eklenmesi büyük matematiksel karmaşıklıklara neden olmaktadır. Buna ek olarak, kuvvetli geri saçılma teriminin eklenmesi durumunda, analitik olarak denklemin tam çözümünün bulunabilmesi için denklemi kanonik forma getiren bir dönüşüm gerekmektedir [21]. Analitik yöntemlerin kullanımını zorlaştıran veya izin vermeyen böyle sorunlar, transport denklemini çözmek için sayısal yöntemler gibi daha doğru sonuçların alınabileceği yöntemlerin denenmesine neden olmuştur. Bu sayısal yöntemler arasında ayırık ordinatlar (S_N) yöntemi ve küresel harmonikler (P_N) yöntemi reaktör tasarımını geliştirmede kullanılan en yaygın ve etkili yöntemler arasındadırlar. Özellikle sayısal transport denklemindeki yüksek mertebeden hesaplamalarda, S_N yöntemi çok iyi bilinen bir yöntem olmasına rağmen, P_N yöntemi doğrudan uygulanabilen olduğu kadar en güçlü yaklaşımlardan birisidir [20].

Bu konuda gerçekleştirilen çalışmalar, saçılma fonksiyonu Legendre polinomları serisine açılarak yapılmıştır. Legendre polinomları yöntemi çalışmalarında nötron akısının açısız veya doğrusal bağımlılığı temel bir fonksiyon setine, bir Legendre polinom serisi olarak açılır. Fonksiyonların yapısı gereği düzlem veya küresel geometride daha çok tercih edilir. Geleneksel bir yöntem olarak, anizotropi durumunda saçılma fonksiyonunu Legendre polinomları cinsinden seriye açarak yapılan çözümler de bir yöntemdir. Seriyeye açıldığında, serinin ilk iki terimi izotropik saçılma durumu, üçüncü terim de alınarak kuadratik anizotropi durumunu temsil eder [26].

Legendre polinomları, küresel harmonikler veya P_N yöntemi olarak adlandırılan yöntem, transport denkleminin çözümünde kullanılan en geleneksel yöntemdir. Saçılma fonksiyonu küresel harmonikler cinsinden seriye açılarak transport (denge) denkleminde yerleştirilir ve bu yolla çözüme ulaşılır. Transport denklemi nötronları hem uzay koordinatlarına, hem de hareket yönlerine bağlılıklarını temel alan bir denklem olduğundan, bu yöntem ile de, açılmalı nötron akısı uzaysal ve açılmalı kısımların çarpımı şeklinde seriye açılmakta ve çözüm kümesinin açılmalı kısmı için Legendre polinomları kullanılmaktadır. Küresel harmonikler yöntemi her hangi bir geometri için oldukça karmaşık olmasına karşın özellikle düzlem ve küresel geometriler için küresel harmoniklerin tekrarlama özelliklerinden ötürü kullanım kolaylığı vardır ve bu yolla transport eşitliği daha basit bir hale indirgenebilmektedir. Küresel harmonikler yöntemi dik bir sistem için en çok kullanılan ve en basit çözüm yöntemlerinden biridir [30]. Küresel simetrik bir sistem için nötron akısı sistemin yarıçapına ve saçılma açısına bağlıdır. $\Psi(\mathbf{r},\mu)$ gibi bir fonksiyon ile temsil edilen açılmalı nötron dağılımı, (r,μ) sisteminin küre merkezine göre dönmesinden dolayı ve \mathbf{r} yarıçapına göre azimutal simetri nedeni ile değişmemektedir. Transport denklemi sağlayan eşit enerjili nötronların akısı Legendre polinomları cinsinden sonsuz bir seriye açılarak moment denklemleri elde edilir ve seriye açılmış fonksiyonlar, denge denklemi içerisinde yazılarak çözüme gidilir. Bu şekilde çözümlenmiş serilerin keyfi n . mertebesine kadar düzenlenir ve kalan kısımları ihmal edilir. Bu yöntem karmaşık bir türev-türev denklem çözümü için herhangi bir geometride oldukça karmaşık görülebilir; fakat düzlem ile küresel geometrilerde küresel harmoniklerin tekrarlama yapmasından dolayı ifadeler daha basit hale indirgenmesini sağlamaktadır. Böylece problem çözümlerinde kolaylık sağlanmaktadır. Bu şekilde çözümlerini ve nötron transport denkleminde Legendre polinomları ile kritik kalınlık hesaplamalarını ilk olarak uygulayan Davison'dur [16]. Başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümünde tekil özfonksiyonların kullanılması fikri Davison ve Wigner tarafından önerilmiş; Van Kampen tarafından ilk olarak uygulanmıştır [31].

Bununla birlikte, P_N yöntemi transport denklemindeki birçok probleme başarıyla uygulanabilmesine rağmen kritik kalınlık, Albedo, Milne problemleri gibi diğer bütün problemlerin çözümünde etkili ve geçerli bir yöntem değildir. Dolayısıyla P_N

yöntemine alternatif olarak S_N , T_N , U_N , F_N , C_N , H_N gibi yöntemler de transport kuramındaki problemlerin çözümünde rahatlıkla tercih edilmektedir [32-36].

Bu yöntemlerden etkili olanlardan bazıları ilk olarak Aspelund, Conkie ve Yabushita tarafından geliştirilen daha sonra ve özellikle son zamanlarda nötron açısız akısının birinci tip Chebyshev polinomları cinsinden seriye açıldığı T_N yöntemi ve ikinci tip Chebyshev polinomları cinsinden seriye açıldığı U_N yöntemi reaktör kritik kalınlığı ve nötronların yayılım mesafesi gibi problemlerin çözümünde başarıyla uygulanmış yaklaşımlardır [32-34].

Bilindiği gibi, Chebyshev polinomları ve Legendre polinomları aynı polinom ailesinden (Jacobi polinomları) olmalarından dolayı transport denklemindeki problemlerin çözümlerinde Legendre polinomlarıyla çok yaklaşık sonuçlar verebilmektedir. Hatta yukarıda belirtildiği gibi Legendre polinomlarının etkili sonuçlar vermediği anizotropik saçılmalı ortamlarda, ekstrapolasyon mesafesi hesabı gibi problemlerde nötron açısız akısındaki açığa bağlı terimde Chebyshev polinomları kullanılmıştır.

Case ve Zweifel'in çalışmalarına kadar nötron transport denklemindeki problemlerin çoğu Fourier veya Laplace dönüşümü teknikleriyle çözülmüyordu [37,38]. Bir Fourier serisi, bir fonksiyonun farklı sıklıktaki sin ve/veya kosinüslü fonksiyonların sabit katlarının toplamı şeklindeki bir seri gösterim olarak açılabilirdi ve Laplace dönüşüm teknikleri de yayılma olaylarının analizinde, kısmi diferansiyel denklemleri de içeren sınır değer problemlerinin çözümünde oldukça etkiliydi [39]. Dönüşüm fonksiyonları, nötron yoğunluğunu veren denklemlerden hareketle ve bunların sadece Laplace dönüşümü ile yazılanlarını kullanmak suretiyle elde edilirler ve böylelikle çözümleme sonrasında da her terim için ters Laplace dönüşümleri alınır. Eğer reaktörde nötron akısının yönelmesi denge değeri üzerinde ortaya çıkıyor ve zamanla sönümlenen bir yaklaşık çözüm (pertürbasyon) olarak ortaya çıkıyor ise dengeli rejimde bir reaktör, eğer ufak bir yaklaşık çözüm nötron akısının zamanla reaktör sınırının ötesinde artmasını sağlıyorsa, o zaman da reaktördeki dengesizliği arz ettiği sonucuna ulaşılır. Fourier dönüşümü bir yaklaşım olmasının yanı sıra çok

gruplu problemlere de uygulanabiliyordu. 1940'tan sonra da birçok araştırmacı tarafından transport kuramının genel durumu yeniden tanımlanmıştır [16,40-42].

Transport denkleminde düzlem (dilim) geometrideki ilk analitik çözüm yaklaşımı Case yöntemidir. Denklem düzlem geometride, homojen bir uzay için yazılan, tek hızlı nötron denge denkleminin çözümü için geliştirilmiştir. Case yaklaşımı ile transport denkleminin genel bir çözümü elde edilebilmektedir. Case, homojen denklemin tekil çözümlerini düşünmüş ve öz fonksiyonlar için diklik ve tamlık teoremleri geliştirmiş, sonsuz veya yarı sonsuz ortamda izotropik saçılmalı tek hızlı transport denkleminde çözüm getirerek, tek hızlı nötron transport denklemini çözen yeni bir yöntem geliştirmiştir. Case yöntemi, kısmi diferansiyel denklemlerin değişkenlerine ayrılması yöntemiyle çözülmesi ile aynı mantığa sahiptir. Bu yöntemle birden fazla çözüm bulunabilmekte ve çözümlerin birleşiminin sınır şartlarını sağlaması gerekmektedir. Elde edilen çözümler transport denkleminde yazılarak fiziksel anlam kazanırlar. Case yöntemi, transport denkleminde getirilmiş ilk analitik çözüm yaklaşımıdır. Daha sonra Case yöntemi geliştirilip genelleştirilerek daha karmaşık olan problemlerin çözümü yapılabilmifitir [37,38].

Milne problemi, Milne tarafından esas itibariyle yıldız atmosferlerinin fiziki yapısını inceleyen bulunmuştur. Gerek yıldız atmosferlerindeki radyasyon transferi ve gerekse nötronların transport teorisi bazı özel şartlar ve yaklaşımlar altında aynı matematik yapıya ait iki kuram olup, birinin temel denklemlerinden diğerine kolayca geçilebilmektedir. Zaten nötron transport denkleminde ait birçok özel problem ve bunların çözümleri için önerilmiş matematik kuramlar, uzunca bir süre kuramsal olarak çalışan astrofizikçiler tarafından yıldız atmosferlerindeki radyasyon transferi kavramı çerçevesinde çözümlenmeye çalışılmış ve aynı zamanda dahice çözüm önerileri her iki alanda da kullanılmıştır. Milne denkleminin çözümü yutucu olmayan homojen bir yarım düzlemdeki nötron akısının ortamın sınırında nasıl davrandığını vermesi ve transport teorisinin yayılım teorisinden farkını göstermesi bakımından önemlidir. Milne denkleminin/probleminin çözümlenmesi ile extrapole uzunluğun değeri bulunmaktadır [14]. Extrapolasyon mesafesi, Milne problemi kullanılarak hesaplanabilir. Milne problemi ile sonsuz uzaklıkta kabul edilen bir nötron kaynağından yayılan nötron akısının azalarak bittiği yer tespit edilir.

Dahl ve Sjöstrand, anizotropik ortam için sayısal yöntem sonuçlarını karmaşık özdeğerler kullanarak elde etmişler; Brockmann, anizotropik saçılma için dilim geometride anizotropik ortam için birkaç yöntemin derlemesini yapmıştır [18,43]. Brockmann, sayısal yöntemler ile homojen problemler için çözüm ile birlikte heterojen problemler için de elde edilen nötron transport denklemi için kritiklik sonuçlarının birbiriyle uyumlu olduğunu göstermiş ve güvenilirliği kanıtlanmıştır. Bu çalışmadan elde ettiği veriler diğer yöntemlerle elde edilen verilerle uyumlu olduğunu göstermiştir [44].

Reaktör hesaplamalarında sık olarak kullanılan yöntemlerden biri de ayrık ordinat yöntemi (S_N) dir. Bu yöntemle denklem sadece ayrık doğrultularda çözülebilmektedir. Transport denklemdeki açısal integraller ayrık doğrultular üzerinden toplamlara, açısal türevler farklara dönüştürülür. Bu sonuçların güvenilirliği de ayrık doğruyu sayısının artırılması ile arttırılmaktadır. Düzlem (dilim) geometride bazı yaklaşımlar için S_N ve P_N yöntemleri denktir.

Transport denklemin çözümünde kullanılan bir diğer yöntem de olasılık kuramına dayalı sayısal bir yöntem olan Monte Carlo yöntemidir [45]. Monte Carlo yöntemi ile rastgele sayılar baz alınarak tahmini sistem modellenir ve istatistiksel benzetimler uygulanır. Bugün geniş bir bilimsel çalışma alanına sahip olup, doğa olaylarının benzetilmesinden, ekonomiye, nükleer ve yüksek enerji fiziği alanlarına kadar geniş ve geçerli çalışma alanına sahiptir. Benzetimleri, raslantısal değişkenlerin rastgele sayılar üreten bir algoritma üretmesi ile çalışmaktadır. İlk defa nötron denge denklemi çözümünde denenmiş bir yöntemdir. 1930'lerden sonra hızla gelişmeye başlamış ve Los Alamos Laboratuvarlarında nükleer silah geliştirilmesi projesinde çalışan bilim adamları tarafından ilk kez kullanılmıştır. Basit sayısal integral hesaplama yöntemleri, günümüz istatistik kuramının Bayes çıkarılma yöntemleri ile kolaylıkla uygulanabilir hale getiren modern benzetim tekniklerine ulaşan bir gelişim izlemiştir. Analitik yollarla çözülemeyen problemler, Monte Carlo benzetim teknikleri ile “yaklaşık” olarak çözümlenir. Örneğin, bir reaktör dışına sızacak radyasyonu en aza etmek için yapılacak duvarın kalınlığının hesaplanması, reaktör kabı içindeki nötronların karmaşık hareketlerinden dolayı analitik olarak mümkün

değildir. Ancak, Monte Carlo yöntemleri ile nötronların hareketlerini basitleştirmeye gerek olmadan “yaklaşık” olarak çözümlenebilmekte, bu yaklaşık çözüm basitleştirilmiş analitik çözümden daha fazla, gerçeğe yakın sonuçlar vermektedir [46].

Transport denklemin çözümünde kullanılan bir diğer yöntem de varyasyon yöntemidir. Varyasyonel ya da sonlu elemanlar yöntemi kabul edilebilir yaklaşımla çözüm arayan bir sayısal çözüm yöntemidir. Varyasyonel yöntemde çözüm bölgesi alt bölgelere ayrıklaştırılır ve her alt bölgede aranan fonksiyonun ifadesi polinom olacak şekilde seçilir ve bu yolla her alt bölgede polinom olarak belirlenen çözümün katsayıları belirlenmeye çalışılır. Pomraning ve Clark bu yöntemi tek enerjili Boltzmann eşitliğine uygulamayı başarmışlardır. Varyasyonel yöntemler son yıllarda da transport teoride büyük başarıyla kullanılmıştır.

H_N yöntemi, nötron transport denkleminin çözümünde kullanılan ve yeni kabul gören bir yöntemdir. Daha önceki yöntemler kullanılarak geliştirilmiş ve özellikle Case yöntemi esas alınmıştır. H_N yöntemi ile tek, homojen uzayda hızlı yaklaşım için nötron denge denklemi için genel çözüme ulaşılır. Genel çözümde yer alan katsayıların belirlenmesi için ise F_N yöntemi kullanılır. F_N yönteminde, Placzek lemması kullanılarak, sonlu problemler sonsuz gibi çözümlenir. Açılım katsayıları Case'nin öz fonksiyonları ve bu öz fonksiyonlar cinsinden yazılan Sonsuz ortam Green fonksiyonu ile sınır şartlarına bağlı olarak belirlenmekte ve Case yönteminde kullanılan diklik bağıntıları ile çözüme ulaşılmaktadır [47].

Albedo problemi de, ortamdan dışarı çıkan nötron sayısının dışarıdan ortama giren nötron sayısına oranı bulunarak hesaplanabilir. Birbirlerinden bir ara yüzey ile ayrılmış bir çoğaltıcı ortamdan bir yayıcı iki ortama doğru sürekli bir nötron akımı gerçekleşir. Bir Albedo problemi, bir yüzeyden çıkan net nötron akımı ile bu yüzeye giren net nötron akımlarının oranıdır. Fisyon sonucu nötronların bir kısmının zincirleme tepkimeye dâhil olmadan dışarı sızması, ortamdaki nötron dengesine ve dolayısıyla kritik kütleyle dolaylı olarak tesir edecektir. Dışarı sızan nötronların bir kısmının ortam içine dâhil edilebilmesi de yine kritik kütle şartlarını etkileyecektir. İyi bir yavaşlatıcının nötronun enerjisini soğurarak nötronu yavaşlatması ve nötronu

yutmaması gerekir. Bu amaçla iyi bir yavaşlatıcı için albedonun “1” olması hedeflenir. Bir yavaşlatıcının albedosu maddenin yutuculuğu hakkında bilgi verir. Albedo problemi için daha gerçekçi bir yaklaşım da dilim Albedo problemidir. Dilim Albedo probleminde ise, bir yüzeyden yansıyan ve bu yüzeyden içeri giren nötron akısı hesaplanarak, yüzeyin yansıtıcılığı ve yine yutuculuğu belirlenir [48].

Doğrusal transport denklemi çeşitli geometrilerde farklı durumlar için çözüldükten sonra Kritiklik, Albedo, Extrapolasyon mesafesi gibi bazı fiziksel problemlerin de çözümü yapılabilmektedir. Daha önce yapılmış çalışmalarda dilim geometride bu fiziksel parametreler hesaplanmış olduğu için silindirik ve küresel geometrilerde de transport denklemin çözümü yapılırsa bu parametreler hesaplanabilmektedir. Sınır şartları ve farklı saçılma fonksiyonları ele alındığı için her hangi bir fiziksel parametrenin bütün yöntemlerle kolaylıkla bulunması mümkün değildir. Farklı yöntemlerin geliştirilmesine bu gibi nedenlerle ihtiyaç duyulmuştur.

Bir diğer problem olan kritiklik problemi yine reaktör mühendisliği için önemli bir problemidir. Kritiklik problemi reaktör kritik kalınlığının oluşan ikincil nötron sayısına ne derecede bağlı olduğunu gösteren hesaplamadır. Reaktör kritik kalınlığı ile fisyon tepkimeleri sonrası oluşan ikincil nötronlar arasındaki ilişkiler belirlenir. Reaktör duvarının olması gereken en büyük kalınlığı bu şekilde belirlenir. Başlangıç değer problemlerine yakınlıkları ve yakınsaklık özellikleri itibariyle Legendre polinomları ile benzer ve transport denklem çözümlerinde kullanılabilen bir diğer polinom grubu, Jacobi polinom ailesine mensup diklik özellikleri bulunan, yineleyen ilişkiler elde edilebilmesi ve sayısal hesaplamalara yakınlığına haiz Chebyshev polinomları da denge denklemi çözümlerinde kullanılabilen bir diğer polinom yaklaşımıdır. Transport denklemin I. Tip Chebyshev polinomları kullanılarak çözümlenebileceğini ilk defa Conkie önermiştir [33]. Yabushita, çalışmasında durulma sabitinin Chebyshev polinomlarının birinci tipi ile ilişkisini incelemiştir. Reaktör kritikliği için gerekli şartları belirlemiştir [34]. Bulgularını kullanarak elde ettiği son nokta uzunluklarının P_N yaklaşımından elde edilen sonuçlarla uyum içinde olduğunu göstermiştir. Conkie, çalışmasında nötron açılma akısını Chebyshev polinomları cinsinden seriye açarak soğurma tesir kesitlerinin varlığında Milne problemini çözümlenmiştir. T_N ve P_N yöntemi yaklaşımları ile

yapılan çözümlerin geleneksel yöntem sonuçları ve literatürdeki sonuçlar ile uyumlu olduğu görülmüştür.

Bilindiği gibi, Chebyshev polinomları ve Legendre polinomları aynı polinom ailesinden (Jacobi polinomları) olmalarından dolayı transport denklemindeki problemlerin çözümlerinde kullanılmakta ve Legendre polinomlarıyla çok yaklaşık sonuçlar verebilmektedir. Chebyshev polinomları, Legendre polinomlarının etkili sonuçlar vermediği anizotropik saçılmalı ortamlar için yapılan hesaplamalarda da kullanılmıştır. Ekstrapolasyon mesafesi hesabı problemlerinde nötron açısız akısındaki açığa bağlı terimlerin seriye açılmasında Chebyshev polinomları kullanılmıştır. Bu ve buna benzer nedenlerden dolayı, önceki bazı çalışmalarda olduğu gibi bu çalışmada da, alternatif bir faz fonksiyonu (Anlı-Güngör) ile birlikte ikinci tip Chebyshev polinomları yaklaşımı (U_N) kullanılması tercih edilmiştir. Böyle bir çalışma ile literatüre bir katkı sağlanması planlanmıştır.

Bu çalışmanın temelini oluşturacağı düşünülen U_N yönteminde transport denkleminde nötron açısız akısı yerine, Chebyshev polinomları cinsinden seriye açılmış hali kullanılacaktır. Saçılma fonksiyonunun sistemin kritikliği üzerine etkisi önemlidir. Sistemin kritik kalınlığı saçılma fonksiyonun parametrelerine bağlı olarak hesaplanacaktır. Böylece, hem P_N yöntemi hem de U_N yöntemi kullanılarak farklı c ve t parametreleri için sistemin kritik kalınlıklar sayısal olarak hesaplanacaktır. Bu çalışmada U_N yöntemiyle elde edilen sonuçların tutarlılığının incelenmesi için sayısal sonuçlar çizelgelerde verilecek ve her iki polinom yaklaşımı yardımıyla elde edilen sonuçlar karşılaştırılacaktır.

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1. Nötronların Yayılması

Bir nükleer reaktörün mevcut durumunun belirlenmesi reaktör kalbindeki nötronların dinamiğine, nötronların reaktör içerisindeki dağılımına bağlıdır. Nötron dağılımı reaktörün davranışını yönlendiren temel fiziksel aktördür. Nötron dağılımının takip edilmesi ile reaktör kalbinde bulunan nötron kaynağının bulunduğu yutucu ve yayıcı bir ortam içindeki nötronların durumunu incelenmektedir. Bor, gümüş, indiyum, kadmiyum ve hafniyum gibi ortamdaki nötronları yakalayan ve yutan nötron yutucu malzemeler ile imal edilen kontrol çubukları gerektiğinde nötron sayısını azaltarak fisyon tepkimelerinin durdurulması ile yutucu ortamı oluşturmaktadır. Fisyon yapabilecek bir radyoaktif çekirdek tarafından, reaktör dinamiğindeki baş aktör olan ortamdaki mevcut nötronların yakalanarak zincirleme fisyon tepkimelerin devamlılığını sağlayan bölünebilir radyoaktif Uranyum izotopları ise yayıcı ortamı oluşturmaktadır. Yutucu ve yayıcı ortamlar reaktör kalbinde bir aradadır. Yutucu ve yayıcı bir ortamda bulunan çok sayıda nötronlar kendi aralarında etkileşmeleri yok varsayılan, herhangi bir yönde ve hızda hareket edebilen bir gaz benzetilir. Reaktör içerisindeki nötron yoğunluğu ($\sim 10^{10} \text{ cm}^{-3}$), atomik yoğunlukla karşılaştırıldığında ($\sim 10^{23} \text{ cm}^{-3}$) çok küçük bir değerde olduğundan, nötronların kendi aralarındaki etkileşmeler ihmal edilerek davranışları mükemmel gazların davranışlarına benzetilebilir. Gerçek gazlar bir kap içinde tutulurlar, fakat nötronlar için böyle bir kaba ihtiyaç yoktur ve nötronlar kapalı bir kap içindeki gaz gibi kalıcı değildir. Yutucu ve yayıcı ortam sayesinde kalpteki nötron miktarı sürekli olarak değişkenlik göstermektedir. Bu nedenle, nötronlar için kaynaktaki üretim ile yutulmalar ve kaçaklar arasında istatistiksel bir denge söz konusudur.

3.2. Gazların Kinetik Kuramı

Kinetik kuram veya gazların kinetik kuramı, gazların basınç, sıcaklık, hacim gibi makroskobik özelliklerini moleküler bileşim ve hareketlerine bağlı olarak açıklayan bir kuramdır. Gazların kinetik kuramı nötronların incelenmesinde kullanılır. Reaktör içerisindeki nötronların istatistiksel incelenmesini sağlayan nötron denge denklemi,

mükemmel gazların incelenmesinde kullanılan Boltzmann denkleminin doğrusal hale getirilmiş bir durumudur. Gerçek gazların incelenmesinde basınç, hacim ve sıcaklık gibi üç parametre kullanılmaktadır. Nötron miktarının incelenmesinde ise bunların yerine nötron skaler akısı (Φ), enerji (E), ve konum (r) gibi üç parametre kullanılmaktadır.

Nötron enerjisi aynen gazlardaki sıcaklık kavramına eşdeğerdir. Nötron, göreceli bir parçacık olmadığından onun kinetik enerjisi klasik olarak düşünülüp, m kütleli ve v hızlı bir parçacığın sahip olduğu kinetik enerji $(1/2)mv^2$ ile eşdeğer olarak görülmektedir. Benzer şekilde T mutlak sıcaklığındaki bir gaz molekülünün de sahip olduğu kinetik enerji klasik bir parçacığın kinetik enerjisine eşdeğer olup, $(3/2)k_B T$ ile verilmektedir. Burada k_B Boltzmann sabitidir; $1,38 \times 10^{-23} \text{J/K}$.

Reaktör içerisindeki nötron akışını yöneten nötronların temel denklemleri gazların kinetik teorisine dayanan Boltzmann denklemleridir. Reaktör içerisinde nötron hızlarının açısal dağılımı değişkenlik göstermektedir. Ancak nötron dağılım probleminin çözümünü kolaylaştırmak için, yavaşlatıcı içerisindeki nötronların açısal dağılımı izotropik ortamda ve yavaşlatıcının konumundan bağımsız ve hızları aynı kabul edilerek nötron davranışları basitleştirilerek incelenmektedir.

3.3.Nötronların Madde ile Etkileşimi

Nötronlar nükleon ailesinin yüksüz bir üyesidir. Atom çekirdeğine bağımlı olarak çekirdek içerisinde bulunan bir atom altı parçacıktır. Bağlı kütlesi, çekirdekte beraber bulunduğu yüklü bir protonun kütlesi ile yaklaşık olarak aynıdır ($1u$). Nötronun çekirdek içerisinde bulunması ile bulunduğu atomun kimyasal özellikleri de belirlenmiş olur. Hidrojen dışında bütün atom çekirdeklerinde bulunup, standart modele göre baryon sınıfındadır. Serbest bir nötron 10,6 dakikalık bir yarı ömürle β ışını yayınlamaya bozulan, kararsız bir parçacıktır. Çekirdek içindeki bağlı nötron çok uzun (hatta kararlı) veya çok kısa ömürlü olabilmektedir. Serbest nötrona ilişkin bilgiler kararsız olmasına rağmen yüksek hassasiyetle ölçülebilmektedir.

Herhangi bir atomun çekirdeğine yönlendirilen nötronlar yüksüz olduklarından atomun elektron bulutundan ve çekirdekdeki protonlardan kaynaklanan elektrostatik engelinden etkilenmezler. Çok düşük enerjili nötronlar (eV ve altında enerjili) bile doğrudan çekirdek ile etkileşime girerler. Kısacası nötronlar, atomlar ile değil çekirdekler ile etkileşme yaparlar. Bu etkileşme yolları, esnek ve esnek olmayan saçılmalar, ışınsal (radiative) yakalama, yüklü parçacık tepkimeleri, nötron üreten tepkimeler ve fisyon tepkimeleri olarak sıralanabilmektedir.

Esnek saçılma tepkimelerinde nötron, temel durumda bulunan bir çekirdeğe çarpar ve esnek olarak saçılır (çekirdek bu nötronu tutup bileşik çekirdek oluşturur, sonra tekrar gelen nötronla aynı enerjiye sahip bir nötron yayınlayıp çekirdek temel durumuna dönüyorsa esnek saçılmaz). Bu olay sonucunda çekirdek yine temel durumda kalır. Esnek saçılmalarda nötronun kinetik enerjisi değişmez. Bu tür tepkimeler (n,n) tepkimeleri olarak bilinmektedir.

Esnek olmayan tepkimeler, esnek saçılma ile benzerdir. Fakat burada ilk önce temel durumda bulunan çekirdek, nötron saçıldıktan sonra uyarılmış bir durumda bulunur. Çünkü bir miktar enerji çekirdek tarafından yutulmaktadır, yani açıkça bu bir ısı alan tepkimedir. Bu tür tepkimelerde, çekirdek üzerine gelen nötronu önce yutar daha sonra farklı enerjili bir nötron yayınlar. Bu nedenle böyle tepkimeler (n,n') tepkimeleri olarak bilinir. Uyarılmış çekirdek daha sonra γ -ışınları yayarak bozunur, bunlara esnek olmayan γ -ışınları denilmektedir.

Işınsal yakalama tepkimeleri ısı veren tepkimeler olup, böyle tepkimelerde, nötron çekirdek tarafından yakalanmaktadır (yutulmaktadır) ve bir veya daha fazla γ -ışını yayınlanır. Işınsal yakalama olayı bir ekzotermik tepkimedir ve (n, γ) ile gösterilir. Bu olayda gelen nötron hedef çekirdek tarafından yutulduğundan, bir yutulma tepkimesi olarak değerlendirilmektedir.

Yüklü parçacık tepkimelerinde nötronlar aynı zamanda (n, α) ve (n,p) gibi yutulma tepkimeleri sonucu da kaybolabilirler. Bu tür tepkimeler ısı alan veya ısı veren olabilmektedir.

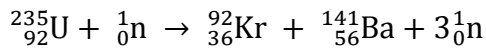
Nötron-çekirdek etkileşmelerinde, gelen nötron enerjisi yüksek ise (n,2n) ve (n,3n) gibi nötron üreten tepkimeler de görülmektedir ve bu tür tepkimeler de ısı alandır. Çünkü (n,2n) tepkimesinde bir nötron, (n,3n) tepkimesinde ise iki nötron çekirdekten sökülür. (n,2n) tepkimesi özellikle ağır sulu veya berilyumlu reaktörlerde önemlidir. Çünkü ^2H ve ^9Be kolaylıkla koparılabilen gevşek nötronlara sahiptirler.

Nötron demetleri çeşitli nükleer tepkimeler yardımıyla elde edilebilmektedir. Nötronlar, yüklü parçacıklar gibi hızlandırılmamakta fakat yüksek enerjili (100 keV - 10 MeV) nötronların enerjileri farklı çekirdekler ile yaptırılan saçılmalar yoluyla azaltılabilmektedir. Bu işleme 'yavaşlatma' işlemi denir.

Bir nötron demeti katı madde içinden geçirilirken, nötron akım şiddeti (belirli bir doğrultuda akan nötron akısı), nötronların nükleer tepkimeler aracılığıyla demetten ayrılması ile zayıflatılır. Hızlı nötronlar için (n,p), (n, α) veya (n,2n) gibi birçok tepkime mümkün olmaktadır. Ancak yavaş veya termal nötronların ortadan kaybolmalarının başlıca sebebi (n, γ) yakalama tepkimesidir [1].

3.4. Bölünme Tepkimeleri

Reaktör içerisinde nötronlar bazı çekirdekler ile çarpışınca o çekirdeğin bölünmesine, yani nükleer enerjinin kaynağı olan fisyonu uğramasına neden olabilmektedirler. Nötron ve çekirdek etkileşmelerinde saçılma ve yutulmalar olacaktır. Birçok nötron çekirdek etkileşmesi iki adımda gerçekleşmektedir. Nötron çekirdek etkileşmesinde nötron önce çekirdek tarafından soğurulmakta ve birinci adım olan bu durumda bileşik çekirdek oluşmaktadır. Bu durumda çekirdeğin atom numarası aynı kalmakla beraber kütle numarası "1" artacaktır. Daha sonra çekirdek bir nötron yayınlayacak ve temel ya da uyarılmış durumda kalacaktır. Bileşik çekirdeğin bozunuma uğraması ikinci adımdır. İkinci adımda esnek ve esnek olmayan saçılma tepkimeleri, ışınal yakalama veya bölünme olaylarından bir tanesi gerçekleşebilir. Tipik bir nötron-etkilemeli fisyon tepkimesi,



şeklinde bir tepkime vermektedir. Görüldüğü gibi, $^{92}_{36}\text{Kr}$ ve $^{141}_{56}\text{Ba}$ çekirdekleri ve beraberinde ortalama üç nötron ve gama ışınları açığa çıkarmaktadır. Bu tepkime düşük (termal) enerjili nötronlarla mümkün olmaktadır. Böyle bir tepkimede fisyon ürünleri tek tek belirlenememektedir. Fisyon genellikle simetrik değil, hemen hemen her zaman asimetrik olmaktadır. Dolayısıyla iki fisyon ürününün kütleleri farklıdır. Gelen nötronun enerjisi arttıkça, fisyon daha simetrik olmaktadır. Gelen nötron eğer yüksek enerjili ise bölünme daha çok eşit kütleli çekirdekler açığa çıkarmaktadır. Fisyondan hemen sonra oluşan fisyon ürünleri ($^{92}_{36}\text{Kr}$ ve $^{141}_{56}\text{Ba}$) ilk anlarda nötronca zengindir. Bu nötron fazlalığı kararlı olmaları için gerekli nötrondan daha fazladır. Bu kütle bölgesinde en kararlı çekirdekler için $Z/A=0,41$ iken bu fisyon ürünleri için $Z/A=0,39$ 'dur. Fisyon ürünleri bu nötron fazlalığını fisyon sırasında (10^{-16} s içinde) bir veya daha fazlasını yayımlayarak atarlar. Fisyonda salınan nötronların çoğu (genellikle % 99'dan daha fazla) temelde fisyon anında yayınlanmaktadır. Bu nötronlar ani nötronlar olarak adlandırılır. Ani nötronların ortalama sayısı " ν " ile gösterilmektedir (ν : Fisyon başına yayınlanan ani nötron ve daha sonra yayımlanabilecek gecikmiş nötronların ortalama sayısı). Bazı fisil çekirdeklerin fisyonu sonucu açığa çıkan ani nötron sayısı tepkime öncesi gelen nötron enerjisi ve iki fisyon ürününe bağlı olarak ortalama gözlenen değerleri: ^{233}U için 2,48; ^{235}U için 2,42; ^{239}Pu için 2,86'dır. Ortaya çıkacak ani nötron sayısı belirli bir fisyon tepkimesinin karakteristik özelliği olarak istatistiksel bir davranış olarak gerçekleşmektedir. Uyarılmış durumda olan ürün çekirdekler ortalama ν kadar ani nötronlarla birlikte, bir β bozunumunun ardından çok kısa gecikme süreleri ile (birkaç saniye) gecikmiş nötronlar da yayımlayabilirler. Bir fizyonda açığa çıkan nötronların %1'inden daha az sayıda olmalarına rağmen, gecikmiş nötronlar, nükleer reaktörlerin kontrolünde önemli rol oynarlar. Sonuçta; β -ışınları ve bunları takiben γ -ışınları yayarak bozunurlar.

3.5.Tesir Kesitleri

Nötronların tepkime tesir kesitleri fisyon reaktörlerinin tasarımında önemli bir yer tutmaktadır. Nötronlar tek tek çekirdekler ile ara etkileşmeler yapabilmektedir. Tesir kesiti kavramı, bir hedef çekirdeğe gelen düşük ya da yüksek enerjili bir nötronun hedef çekirdekle etkileşime girme ihtimalini ifade eder. Tesir kesitini

ölçmek için kullanılan standart birim, çekirdeğin kesit alanına eşdeğer birim olarak 10^{-28} m^2 veya 10^{-24} cm^2 'dir. Bu büyüklük 1 barn olarak tanımlanır: $1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$.

Bir nötron demeti herhangi bir hedefe yönlendirildiği zaman, nötronların hedefte yaptığı etkileşmeleri belirleyen fazla sayıda parametre vardır. Ancak bunlardan en önemlilerinden bir tanesi, nötron yoğunluğudur. Çünkü hedefteki çekirdek atomları ile etkileşme olasılığının artması için önce hedefe yönelen nötron sayısının artırılması gerekmektedir. Buna göre, demetin cm^3 'ünde n tane nötron varsa ve bu nötronlar ortalama v hızı ile hareket ediyorsa (bu ortalama hız, bütün nötronların aynı hıza sahip oldukları anlamına da gelmektedir), nötron yoğunluğu,

$$I = nv, \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Nötronların tek bir çekirdekle çarpışma yapmasının olasılığı, aynı zamanda birim yoğunluk başına tek bir çekirdekte saniyede meydana gelecek çarpışma sayısı, çekirdeğin kesit alanına eşdeğer olarak (σ) mikroskobik tesir kesiti olarak tanımlanmaktadır.

Bir nötron duran bir çekirdekten esnek olarak saçılırsa, çekirdek çarpışma noktasından geri teper. Saçılan nötronun kinetik enerjisi gelen nötronun enerjisinden, geri tepen çekirdeğin aldığı enerji kadar daha azdır. Bu şekilde, çekirdeğin iç enerjisi değişmediği halde, nötronlar esnek çarpışmalarda enerji kaybederler.

Nötronların çekirdekle etkileşmesinde ya saçılma ya da yutulma olacaktır. Bu nedenle toplam tepkime yapma olasılığı anlamına gelen toplam tesir kesiti (σ_t), saçılmalar için tesir kesiti (σ_s) ve yutulmalar için (σ_a) olmak üzere,

$$\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a, \quad (3.2)$$

ile ifade edilebilir. Nötronlar bir hedef çekirdeğe çarptığında gerçekleşmesi mümkün bütün tesir kesitleri toplamı, toplam tesir kesitini (σ_t) verecektir.

$$\sigma_s = \sigma_e + \sigma_i \quad (3.3)$$

$$\sigma_t = \sigma_e + \sigma_{in} + \sigma_\gamma + \sigma_f + \sigma_\alpha + \sigma_p + \dots \quad (3.4)$$

burada σ_e ve σ_{in} sırasıyla, esnek ve esnek olmayan çarpışma tesir kesiti, σ_γ ışınsal yakalama tesir kesiti, σ_f fisyon tesir kesiti, σ_α (n, α) tepkimesi tesir kesiti ve σ_p ise (n,p) tepkimesi tesir kesitini göstermektedir. Bütün nötron tesir kesitleri, tepkimenin türüne, gelen nötronun enerjisine ve hedef çekirdeğin yapısına bağlıdır.

3.6.Ortalama Serbest Yol

Nötronlar, aynı zamanda reaktörde yakıt dışındaki malzemeler ile de ara etkileşme yapabilmektedirler. Birim yoğunluktaki çekirdek sayısı ($N = \text{çekirdek/cm}^3$) ile nötronların çarpışma sayısı veya birim uzunlukta bir nötronun bir etkileşme yapma olasılığı; σ_T (1/cm) makroskobik toplam tesir kesiti olarak tanımlanmaktadır:

$$\sigma_T = N\sigma_t. \quad (3.5)$$

Bu tanımlama bütün makroskobik tesir kesitleri için benzer şekilde yapılabilir; örneğin, saçılmalar için makroskobik tesir kesiti,

$$\sigma_s = N\sigma_s. \quad (3.6)$$

şeklinde yazılabilir. Bu çalışmada toplam makroskobik tesir kesitleri σ_T ile gösterilecektir.

Hedef çekirdekte x kadar mesafede çarpışma yapmadan ilerleyen $I(x)$ yoğunluğuna sahip aynı yönlü ve aynı enerjili nötronlar, hedef çekirdekte dx mesafe daha ilerleyince çarpışma yapacak ve çarpışma yapmadan ilerleyen nötron sayısında bir

azalma olacaktır. Bir nötronun çarpışma yapmadan x kadar mesafede ilerleme olasılığı $e^{-\sigma_T x}$; dx kadar kalınlıkta ilerlerken etkileşme olasılığı ($\sigma_T dx$) olmak üzere,

$$\begin{aligned} p(x)dx &= e^{-\sigma_T x} \times \sigma_T dx. \\ &= \sigma_T e^{-\sigma_T x} dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

elde edilebilir. Denklem (3.7) ile verilen ifade bir nötronun dx içinde ilk çarpışmasını yapma olasılığıdır. Buna göre, başlangıçta I_0 yoğunluğuna sahip bir nötron demetinin, kalınlığı x kadar olan bir hedefe yönelmesi sonucunda, bu nötronlardan bir kısmı hedefte hiç çarpışma yapmadan hedefi delip geçerken, bir kısmı da hedefte bölüm (3.5)'te de tarif edilen saçılma veya yutulma tepkimelerinden bir veya daha fazlasını yapıp kaybolacaktır. Öyleyse, nötronların hedefte ilerlerken yoğunluğundaki değişim, hedefin kalınlığına bağlı olacak şekilde,

$$I(x) = I_0 e^{-\sigma_T x}, \quad (3.8)$$

ifade edilebilir.

Saçılma ve yutulmaların olduğu bir ortamda, nötronların diğer çekirdeklerle yaptığı çarpışmalar arasında katettiği yola ortalama serbest yol; τ (cm) adı verilmektedir. Bir nötronun çarpışmalar arasında aldığı ortalama mesafe veya bir nötronun çarpışma yapmadan aldığı veya ardışık iki çarpışma arasında aldığı ortalama mesafe olarak da tanımlanabilir. Nötronun ortalama serbest yolu, aldığı x yollarının ortalaması olduğuna göre,

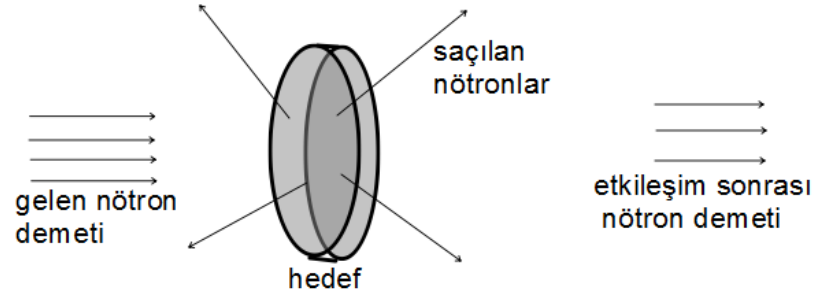
$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^{\infty} x p(x) dx \\ &= \sigma_T \int_0^{\infty} e^{-\sigma_T x} x dx \\ &= \frac{1}{\sigma_T}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

olarak bulunur. Başka bir ifadeyle, makroskobik toplam tesir kesiti aynı zamanda ortalama serbest yolun tersi olarak adlandırılabilir:

$$\sigma_T = \frac{1}{\tau} \quad (3.10)$$

3.7. Çarpışma Yoğunluğu ve Nötron Akısı

Çarpışma yoğunluğu ve nötron akısı kavramları belli bir yönde ilerleyen nötron demetinin bir hedefle karşılaştığında yaptığı etkileşimler incelenerek anlaşılabilir. Tek enerjili nötron demetinin x kalınlığındaki hedefe yönlendirildiğinde, hedefte çarpışma yapmadan ilerleyen nötron sayısı, hedef kalınlığının (x) artışı ile azalacaktır “Şekil 3.1”.



Şekil 3.1. Nötron demetinin çarpışma ile zayıflaması

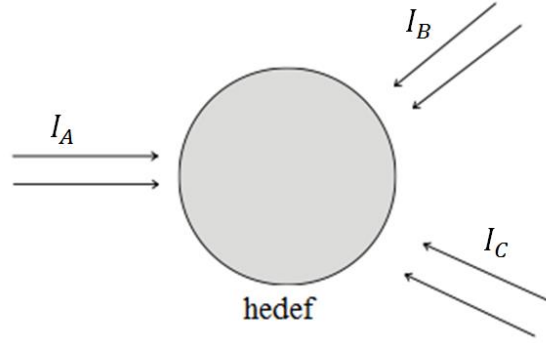
Böyle bir durumda çarpışma yapmadan ilerleyen nötron yoğunluğu da zamanla azalacaktır. Birim yoğunlukta gerçekleşen nötron-çekirdek çarpışmalarının hızı (F),

$$F = NI\sigma_t,$$

$$F = I\sigma_T, \quad (3.11)$$

olarak tanımlanabilir [49].

Hedefe farklı doğrultulardan yönlendirilecek nötron yoğunlukları (I_A, I_B, I_C, \dots) için “Şekil 3.2” çarpışma hızı,



Şekil 3.2. Farklı doğrultuda yönlendirilmiş zayıflamaya uğrayacak nötron demetleri

$$F = \sigma_T(I_A + I_B + I_C + \dots), \quad (3.12)$$

şeklinde yazılabilir.

Bütün nötronlar aynı enerjili ise, hedefe çarpan toplam nötron yoğunluğu n olmak üzere,

$$n = n_A + n_B + n_C + \dots \quad (3.13)$$

denklem (3.1) ile verilen nötron yoğunluğu ifadesi kullanılarak, denklem (3.12) ile verilen çarpışma hızı için,

$$F = \sigma_T n v = \sigma_T (n_A + n_B + n_C + \dots) v \quad (3.14)$$

yazılabilir.

Bir reaktörde gerçekleşen nötron çekirdek etkileşimleri, yüksek yoğunluk bölgesinden düşük yoğunluk bölgesine doğrudur ve bu olay denklem (3.1)'de ifade edildiği gibi, birim yoğunlukta v hızı ile ilerleyen nötron sayısıdır. Bu ifade aynı zamanda nötron akısı (Φ) olarak adlandırılır. Dolayısıyla daha önce denklem (3.1)'de tanımlanan nötron demet yoğunluğu ile nötron akısı aynı birime sahiptirler.

$$\Phi = I = n v = \frac{\text{nötron cm}}{\text{cm}^3 \text{ s}} = \frac{\text{nötron}}{\text{cm}^2 \text{ s}} \quad (3.15)$$

Denklem (3.15)'de akı (Φ) ve çarpışma yapmadan ilerleyen nötron sayısı ifadelerinin aynı birimler ile ifade edildiği görülmektedir. Bu sonuç ile tepkime hızı ifadesine ulaşılır:

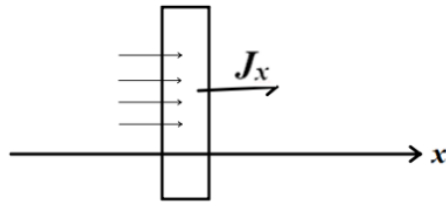
$$F = \sigma_T I = \sigma_T \Phi, \quad (3.16)$$

denklemini yazılabilir. Bu şekilde ifade edilen nötronların durumu, nötronların yayılması, nötronların yavaşlatılması ve termal nötronların özellikleri sürekli olarak takip edilerek reaktörün güvenli çalışması sağlanmaktadır.

3.8. Süreklilik Denklemi

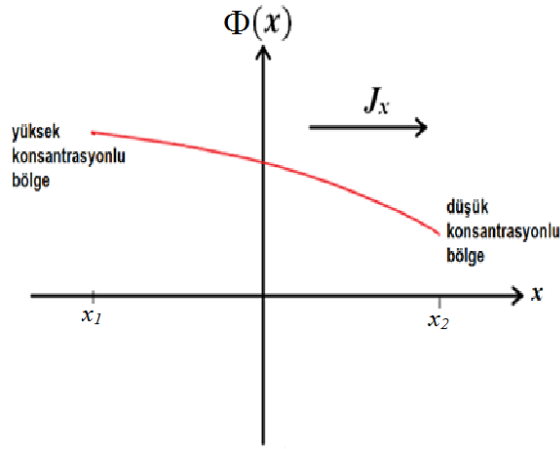
Bir nükleer reaktörün tasarımındaki en zor problemlerden biri de kor içerisindeki nötron dağılımını belirlemektir. Çünkü reaktör içerisindeki nötronların davranışları tekrar eden nükleer çarpışmalar ve zincirleme çekirdek bölünmeleri sonucu oldukça karmaşıktır. Bu sıkıntılı duruma bir çözüm getirebilmek için ilk yaklaşım, nötronların reaktör içinde gazların yayılmasına benzer yayıldığı şeklindedir. Dolayısıyla nötron dağılımının yaklaşık değeri, yayılma denklemi çözülerek bulunabilmektedir. Bu yöntem, tasarlanmış ilk reaktör hesaplamalarında kullanılmış ve sonuç alınmış bir yöntemdir.

Yayılma teorisinin temel dayanağı da Fick Kanunu'dur. Bir çözelti içerisindeki madde dağılımının yüksek yoğunluklu bölgeden düşük yoğunluklu bölgeye olması gibi, kor içerisindeki nötron davranışı da yüksek yoğunluklu bölgeden düşük yoğunluklu bölgeye olacak şekilde net bir nötron akımı (J) oluşturacaktır. Herhangi bir x doğrultusundaki net nötron akımını (J),



Şekil 3.3. Net nötron akımı

x doğrultusuna dik, birim alandan birim zamanda geçen net nötron sayısı olarak tanımlayabiliriz “Şekil 3.3”.



Şekil 3.4. +x yönünde gerçekleşen nötron akışı

Soldaki nötron akısı (konsantrasyonu) sağdan daha fazla olduğundan, sol tarafta, sağ taraftakinden daha fazla çarpışma olmaktadır. Dolayısıyla soldan sağa daha fazla nötron saçılır ve sonuçta artı x eksenini yönünde net bir nötron akımı (belli bir doğrultuda gerçekleşen ya da “Şekil 3.4’de” verildiği gibi + x yönünde olan nötron akışı),

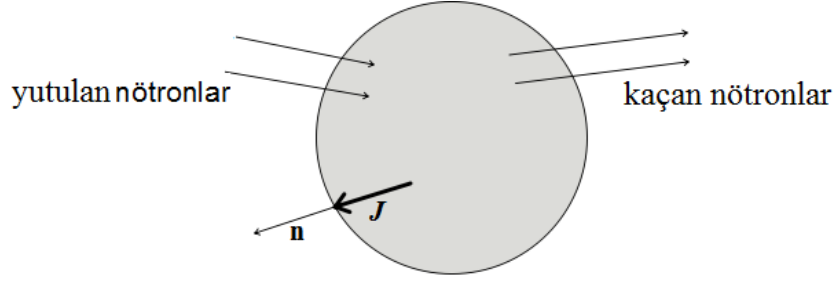
$$J = -D \frac{d\Phi}{dx}, \quad (3.17)$$

ile verilmektedir. Denklem (3.17)’de D katsayısı, birimi cm boyutunda olan yayılma katsayısıdır.

“Şekil 3.4’te” sol taraftaki nötron akısı sağ taraftakinden daha fazla görülmektedir. İfade edildiği gibi sol tarafta, sağ taraftakinden daha fazla nötron etkileşimi gerçekleşeceği için akım için hareketlilik yönü + x yönünde olacak ve daha fazla nötron saçılacaktır ve neticede + x yönünde net bir nötron akışı gerçekleşecektir.

Böyle bir yaklaşım reaktör ilk hesaplamalarında kullanılabilir de, çok yutucu ortamlar, kuvvetli anizotropik saçılma ile kaynak veya ortam yüzeyine yaklaşık 3 ortalama serbest yol mesafe yakın yerlerde geçerli olmamaktadır.

Nötron davranışlarını açıklayacak en geçerli yöntem ise kor içerisindeki nötron sayısının korunumuna yönelik nötron transport denkleminin oluşturulması, sınır şartlarının belirlenmesi ve belli yaklaşımlar ile çözüm arayışlarının yapılmasıdır. Nötron transport denkleminin ifade biçimi, asıl yayılma yasası olarak tanımlayabileceğimiz süreklilik denklemine dayanır.



Şekil 3.5. Keyfi bir V hacmi

Keyfi bir V hacim elemanı ile zamanla V içine ve dışına net bir nötron akımı oluştuğunda, “Şekil 3.5” nötron davranışlarını takip için oluşturulacak süreklilik denklemini matematiksel bir denklem olarak ifade edilebilmektedir. Süreklilik denklemini, denklem faz uzayında küçük bir hacim elemanı içinde,

$$\boxed{\text{nötron sayısının değişim hızı}} = \text{Kaynakta üretilen nötronlar} - \text{Yutulan nötronlar} - \text{Kaçan nötronlar}$$

biçiminde ve nötron sayısının korunumu göz önüne alınarak türetilir. Reaktör koru içerisinde sebepsiz olarak nötronlar kaybolmayacağına göre denklemde yazılacak ifadeler, V hacmindeki nötron sayısının zamanla değişim hızı $\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)$ ile ifade edilecek olursa bu hacimden dışarı kaçanlarla bu hacme girenler ilişkili olmalıdır. Buna göre, kaynakta üretilen nötronlar; fisyonun kendisi yeni nötron üretilen kaynak olarak görülmektedir ve bu denklemde S ile gösterilecektir.

Yutulmuş nötronlar; nötronların çevrede bulunan atom çekirdekleriyle tepkimeye girmesi neticesinde yutulma yolu ile kaybolduklarını temsil etmektedir. Bu miktar çekirdeklerin yutulma tesir kesitleri ile orantılı olacaktır, $\sigma_a \Phi$.

Kaçan nötronlar, hiçbir tepkime yapmadan ortamdan kaçan nötronları temsil etmektedir. Bu miktar da nötron akışının yüzey elemanı ile skaler çarpıyla orantılı olacaktır, $\nabla \cdot \mathbf{J}$. Bütün bu açıklamalar, yukarıda bahsedilen eşitlikte yerlerine yazılırsa,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = S - \sigma_a \Phi - \nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (3.18)$$

şeklinde bir ifade oluşmuş olacaktır. Denklem (3.18)'de elde edilen ifadeye süreklilik denklemini denilmektedir. Eğer V hacmindeki nötron yoğunluğu zamanın bir fonksiyonu olarak değişmiyorsa,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 0, \quad (3.19)$$

olacaktır. Son ifade denklem (3.18)'de yazılacak olursa,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \sigma_a \Phi - S = 0, \quad (3.20)$$

biçiminde kararlı durum süreklilik denklemini elde edilir. Denklem (3.15) ile verilen skaler akı,

$n = \frac{\Phi}{v}$ olarak süreklilik denkleminde yazılabilir. Eğer v hızı değişmiyorsa ya da tek gruplu nötronlarla ilgileniliyorsa ise denklem (3.18),

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = S - \sigma_a \Phi - \nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (3.21)$$

olarak yazılabilir. Denklem 3.21' de sızan nötronlar için $(\nabla \cdot \mathbf{J})$ yazılan ifade, Fick Kanunu ile verilen denklem (3.17) ifade ile birlikte düzenlenirse $\nabla \cdot \mathbf{J}$ yerine,

$$\nabla \cdot J = D\nabla^2\Phi, \quad (3.22)$$

yazılabilir. Denklem (3.22)'de gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = S - \sigma_a \Phi - D\nabla^2\Phi, \quad (3.23)$$

yayıma denklemi olarak elde edilir. Nötron yoğunluğu zamanla değişmiyorsa denklem (3.20)'ye benzer şekilde,

$$D\nabla^2\Phi - \sigma_a\Phi + S = 0, \quad (3.24)$$

kararlı durum yayılma denklemi elde edilir. Denklem (3.24) düzenlenerek,

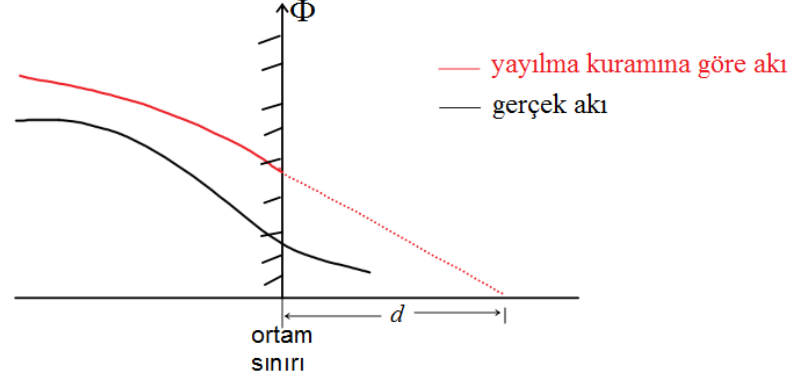
$$\nabla^2\Phi - \frac{\sigma_a}{D}\Phi = -\frac{S}{D}, \quad (3.25)$$

yazılabilir. Denklem (3.25)'te verilen $\frac{\sigma_a}{D}$ ifadesinin deneysel değeri,

$$\frac{\sigma_a}{D} = \frac{1}{L^2}, \quad (3.26)$$

ile yazılabilmektedir [49]. Denklem (3.26)'da geçen L değeri yayılma uzunluğudur. Yayılma uzunluğu (L), kaynaktan çıkan nötronun yutuluncaya kadar x doğrultusunda alabileceği mesafedir. Fick Kanunu kaynaktan ve sınıra yakın yerlerde geçersiz olmaktadır. Dolayısıyla Fick Kanununa dayalı yayılma yaklaşımı reaktör ortamı için her durumda geçerli olmamaktadır. Benzer şekilde yayılma denklemi de kaynağın olduğu yerler ile sınıra yakın yerlerde geçersiz olacaktır.

Gerçek bir reaktör ortamı fiziksel bir ortamdır. Süreklilik denkleminde nötron skaler akısı (Φ), reel, sonlu ve eksi olmayınca fiziksel olarak bir anlam taşımaktadır. Yayılma denkleminin gerçek bir reaktör ortamında kullanılabilmesi için, reaktör ortamı için “Şekil 3.6’da” gösterilen uzatılmış mesafe sınırı kullanılmaktadır.



Şekil 3.6. (d) Uzatılmış mesafe sınırı

Reaktör içerisinde nötronların hareketleri, reaktör kabı ile sınırlandırılmıştır. Reaktör dışına nötronların sızması ise istenmeyen bir durumdur. Denklem (3.17) ile verilen Fick kanunu kaynaktan ve reaktör duvarları sınırında geçersiz olacaktır. Denklem (3.25) ile verilen yayılma denklemi de aynı şekilde reaktör sınırında geçersiz olduğundan, süreklilik denkleminde yararlanılarak nötron davranışının tespit edilebilmesi için, ortamın sınırı gerçek sınırdan d mesafesi kadar uzatılınca gerçek sınır bölgesi uzatılmış sınırdan uzaklaşmış olduğundan artık gerçek sınır bölgesinde yayılma denkleminin geçerli olduğu söylenebilmektedir. Gerçekte bu, fiziksel olmayan bir yaklaşımdır, ancak sadece matematiksel olarak sonuca yaklaşmak için yapılan bir kabullenmedir.

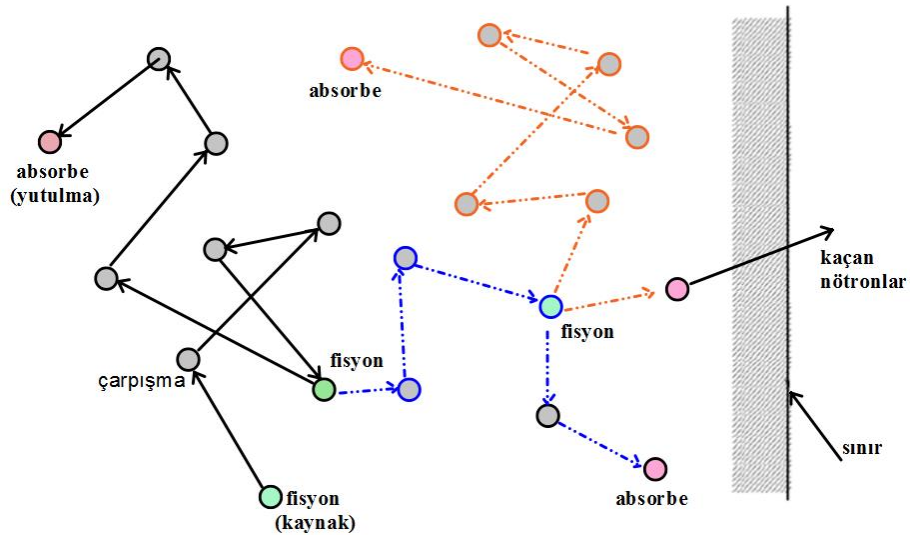
3.9. Nötron Transport Denklemi

Nötron transport denklemi reaktör içerisindeki nötron davranışlarını açıklayan bir denklem olup, faz uzayında küçük bir hacim elemanı içindeki nötron sayısının korunumu göz önüne alınarak türetilen bir denklemdir. Böyle bir denklemin türetilmesinde hesaplamalarda kolaylıklar sağlaması açısından bazı kabullenmeler yapılması gerekliliği vardır. Bunlar:

- Nötronlar noktasal birer parçacık olarak düşünülmektedir. Kuantum mekaniksel dalga boyu atomik çapa göre küçük olan parçacıklar olarak düşünülmektedir. Buradan hareketle nötronların çarpışmalar arası alacakları ortalama serbest yolların atomik boyuttan çok daha büyük olacağı sonucu

çıkılmaktadır ve böylelikle noktasal olarak konumları ve enerjileri belirlenebilmektedir.

- Nötronların yapmış oldukları çarpışmalar noktasal kabul edilmektedir. Böyle bir kabulün nedeni çekirdek yarıçaplarının $\sim 10^{-12}$ cm iken, bir katı için iki atom arası mesafe $\sim 10^{-8}$ cm kadardır. Yüksüz olan nötronların yapmış oldukları noktasal çarpışmalardan sonra doğrusal yollar izledikleri kabul edilmektedir.
- Nötronların yaptıkları etkileşmeler arasında aldığı ortalama serbest yollar atomik boyuttan büyüktür ve noktasal olarak konumları ve hızları belirlenebilmektedir. Çok düşük enerjili nötronlar ise birer dalga gibi davranacağından konumunda önemli belirsizliklere yol açacaktır. Reaktör uygulamalarında bu tür durumlara nadiren rastlandığı için ihmal edilebilmektedir.
- Parçacık yoğunlukları atomik yoğunluklara göre oldukça küçük olduğundan, nötron-çekirdek etkileşimleri dikkate alınarak; nötron-nötron etkileşimleri ihmal edilmektedir “Şekil 3.7”.



Şekil 3.7. Nötron taşınımının şematik görünümü

- Etkileşmeler ani olarak gerçekleşmektedir. Etkileşme neticesi açığa çıkan parçacıklar ani olarak salıverilmektedir.
- Kor içerisindeki ortamın izotropik olduğu düşünülmektedir. Bu kabullenim reaktör ortamları için genellikle geçerlidir.
- Ortamdaki maddeler ve bileşenlerinin ve çekirdek özelliklerinin bilindiği düşünülmektedir. Eğer parçacık yoğunluğu önemli derecede artacak olursa nötron yayılması da önemli derecede artacak, reaktör korunun sıcaklığı da önemli derecede artacak; ortamın nötronik özellikleri de ciddi şekilde değişebilecektir.
- Nötron yoğunluğu dağılımının, sadece ortalama ve beklenen değeri alınmaktadır [50].

Sayılan bu kabullenmeler, denklem çözümlerine ulaşabilmek ve karmaşık matematiksel ifadelerden kurtulabilmek amacıyla yapılmaktadır.

Zamandan bağımsız, kaynağın olmadığı ancak nötron sayısının korunduğu homojen bir ortamda nötron transport denklemi,

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi(r, \boldsymbol{\Omega}) + \sigma_T \psi(r, \boldsymbol{\Omega}) = \int_{\boldsymbol{\Omega}'} \psi(r, \boldsymbol{\Omega}') \sigma_S(\boldsymbol{\Omega}' \cdot \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}' \quad (3.27)$$

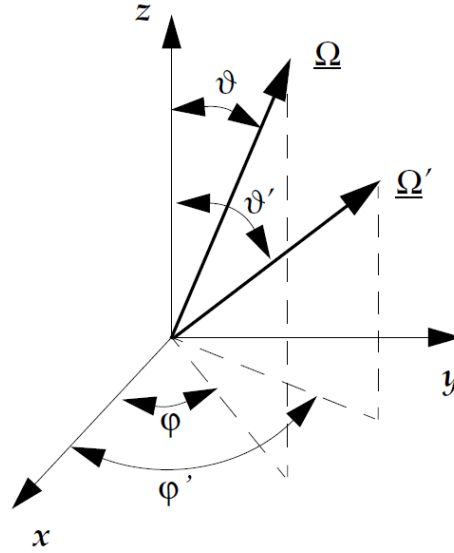
şeklinde verilmektedir [12]. Bu denklemdeki terimler daha önce denklem (3.23)'de türetilen yayılma denklemi ile büyük oranda örtüşmektedir. Buna göre, denklem (3.27)'nin sol tarafındaki ilk terim tıpkı yayılma denkleminde olduğu gibi hiç tepkimeye girmeden ortamdan kaçan nötronları, ikinci terim ise tepkimeler (saçılma veya yutulma) yaparak kaybedilen nötronları temsil etmektedir. Yayılma denkleminde olmayan ancak transport denkleminde var olan tek terim ise incelenen bölgenin dışında saçılmaya uğrayıp içeriye giren nötronları temsil eden denklem (3.27)'nin sağ tarafındaki terimdir [16].

Denklem (3.27)'de,

- $\underline{\Omega}'$: nötronun çarpışmadan önceki hızı yönündeki birim vektör
 $\underline{\Omega}$: nötronun çarpışmadan sonraki hızı yönündeki birim vektör
 $d\Omega'$: katı açı
 $\psi(r, \underline{\Omega})$: r noktasında ve $\underline{\Omega}$ doğrultusundaki açısal nötron akısı
 σ_T : makroskopik toplam tesir kesiti
 $\sigma_S(\underline{\Omega}' \cdot \underline{\Omega})$: nötronların sistem içinde yaptıkları saçılmaları ya da etkileşim olasılıklarını veren saçılma fonksiyonu (makroskopik saçılma tesir kesiti)

olarak ifade edilmektedirler.

Küresel koordinat sisteminde $\underline{\Omega}'$ ve $\underline{\Omega}$ birim vektörlerinin bileşenleri “Şekil 3.8’deki” gibidir.



Şekil 3.8. Nötron saçılması ile farklı değişken açıları arasındaki ilişki

Küresel geometri için konum vektörü ise,

$$\mathbf{r} = |\mathbf{r}|\sin\theta\cos\varphi\mathbf{i} + |\mathbf{r}|\sin\theta\sin\varphi\mathbf{j} + |\mathbf{r}|\cos\theta\mathbf{k} \quad (3.28)$$

eşitliği ile verilmektedir. Etkileşme sonrası birim vektörü ise,

$$\underline{\Omega} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \sin\theta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k} \quad (3.29)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Denklem (3.29)'da $\mu = \cos\theta$ olmak üzere $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \mu^2}$ olarak ifade edilmektedir. Bu ifadeler, denklem (3.29)'da yazılırsa,

$$\mathbf{\Omega} = \sqrt{1 - \mu^2}\cos\varphi\mathbf{i} + \sqrt{1 - \mu^2}\sin\varphi\mathbf{j} + \mu\mathbf{k}, \quad (3.30)$$

olarak ifade edilmektedir. Benzer şekilde etkileşim öncesi hedef çekirdeğe geliş doğrultusundaki birim vektör,

$$\mathbf{\Omega}' = \sqrt{1 - \mu'^2}\cos\varphi'\mathbf{i} + \sqrt{1 - \mu'^2}\sin\varphi'\mathbf{j} + \mu'\mathbf{k}, \quad (3.31)$$

olarak yazılabilmektedir. Bu arada, $0 \leq \theta \leq \pi$ ve $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ aralıklarında tanımlı olmakla beraber $d\mathbf{\Omega}'$ katı açısı,

$$d\mathbf{\Omega}' = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \quad (3.32)$$

ile verilmektedir. $\mathbf{\Omega}'$ ve $\mathbf{\Omega}$ birim vektörleri arasındaki açının kosinüsü olan,

$$\mu_0 = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}', \quad (3.33)$$

şeklinde ifade edilir ve $\mathbf{\Omega}'$ ve $\mathbf{\Omega}$ birim vektörleri denklem (3.33)'de verilen skaler çarpım işlemi gerçekleştirilirse,

$$\mu_0 = \cos\theta = \mu\mu' + \sqrt{1 - \mu^2}\sqrt{1 - \mu'^2}\cos(\varphi - \varphi'), \quad (3.34)$$

olarak yazılmaktadır[51]. Denklem (3.34)'te saçılma açısının kosinüsü olan μ_0 ' ın “Şekil 3.8’de” ifade edilen azimutal değişkenler φ ve φ' a bağlılığı ifade edilmektedir [52].

Denklem (3.27)'de yer alan ve nötronların sistem içinde yaptıkları saçılmaları ya da etkileşim olasılıklarını veren saçılma fonksiyonu $\sigma_S(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega})$;

$$\sigma_S(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}) = \sigma_S(\mu_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \sigma_{sn} P_n(\mu_0), \quad (3.35)$$

olarak ifade edilebilmektedir [12]. Bu denklemde $n = 0$ izotropik saçılmalı bir durumu, $n = 1$ doğrusal anizotropik saçılmalı bir durumu, $n = 2$ kuadratik anizotropik saçılmalı bir durumu, vb. temsil etmektedirler. Burada ayrıca $P_n(\mu_0)$, Legendre polinomlarının eklem kuramı ile

$$P_n(\mu_0) = P_n(\mu)P_n(\mu') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\mu)P_n^m(\mu') \cos m(\varphi - \varphi'), \quad (3.36)$$

olarak yazılabilmektedir [53]. Denklem (3.35) ile verilen saçılma fonksiyonu bugüne kadar transport teori ile ilgili yapılan çalışmaların birçoğunda kullanılmıştır. Hatta bu saçılma fonksiyonuna ek olarak ileri-geri izotropik saçılma, ileri-geri anizotropik saçılma fonksiyonu gibi farklı saçılma fonksiyonları da geliştirilmiş ve bunlar da transport denkleminin farklı problemler için çözümlerinde sıklıkla kullanılmışlardır [21,54,55].

Denklem (3.35) ile verilen saçılma fonksiyonu, belirtildiği gibi Legendre polinomları cinsinden genişletilerek, Denklem (3.27)'deki transport denkleminde yazılabilir ve seriye açılarak kullanılabilir. Bu durumda, ileri-geri saçılma ile birlikte serideki ilk terimin alınması izotropik saçılmaya, ilk iki terimin alınması doğrusal anizotropik saçılmaya karşılık gelmektedir. Serinin ikinci terimden daha sonraki terimlerinin alınması problemi daha gerçekçi bir noktaya çekmekle beraber, denklemin çözümünde ciddi matematiksel zorlukların ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Denklem (3.35)'de belirtilen $\sigma_S(\mu_0)$ ifadesi matematiksel kısıtlamaların aşabileceği kullanışlı bir fonksiyon olarak kabul edilmektedir. Saçılma fonksiyonun transport denkleminde yazılmasından sonra yöntem gereği hangi mertebeden yaklaşım yapılırsa

yapılsın, Legendre polinomlarının parite, tekrarlı ve diklik koşulları gibi özellikleri çözümde kullanılan önemli özelliklerden bazılarıdır.

Denklem (3.35)'de verilen ve daha sonra ileri-geri saçılma teriminin eklendiği saçılma fonksiyonları transport teorisindeki pek çok problemin çözümünde başarılı bir şekilde kullanılmış ve oldukça yeterli sonuçlar verdiği kabul görmüştür [21,54-59].

Yukarıda belirtildiği gibi, her ne kadar bu güne kadarki çalışmalarda transport denklemindeki saçılma fonksiyonu yerine farklı yaklaşımlar saçılma fonksiyonu olarak başarılı bir şekilde uygulanmış olsa da, bir yaklaşım fonksiyonu yerine tam bir fonksiyonun denenmesi ile daha iyi sonuçların alınabileceğine dair bilimsel bir heyecan oluşturmaktadır. Bu maksatla, saçılma fonksiyonu yerine bir çeşit üretme fonksiyonu olan doğrudan bir fonksiyon kullanılması hem problemlerin çözüm algoritmalarında hem de sayısal sonuçların hesaplanmasında etkileyici bir yöntem olarak dikkate değer görülmektedir.

Bu tür üretme fonksiyonlarından bir tanesi olan Henyey-Greenstein fonksiyonu,

$$\sigma_S^{HG}(\mu_0) = \frac{\sigma_S(1-t^2)}{4\pi(1-2\mu_0 t+t^2)^{3/2}} \quad (3.37)$$

ile verilmektedir. Burada σ_S eksi olmayan bir sabiti temsil ederken t ise $0 \leq t \leq 1$ aralığında tanımlı bir parametre ve $\mu_0 = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}'$ saçılma açısının kosinüsüdür.

Gerçekte t parametresinin hangi saçılma veya diğer tür fonksiyonları ne derecede ve anizotropik saçılmayı nasıl temsil ettiği bilinmemektedir; bu konuda kesin hükümler verilmesi de mümkün görülmemektedir. Ancak bu güne kadarki tecrübelerden ve yapılan bazı çalışmalardan t 'nin eksi değerlerinin geri saçılmayı, artı değerlerinin ise ileri saçılmayı (hangi oranda olduğu kesin olarak bilinmemekle beraber) temsil ettiği söylenebilir.

Bu fonksiyon ilk olarak evrendeki radyasyon dağılımı probleminin çözümünde kullanılmış ve daha sonra ışınım transferi ve ışığın farklı ortamlardaki saçılması gibi problemlere de uygulanmıştır [60].

Daha sonra Anlı ve ark., P_N yaklaşımı olarak bilinen Legendre polinomları yaklaşımını kullanarak ve Henyey-Greenstein denklemine benzer bir alternatif saçılma fonksiyonunu önerdikleri bu yeni saçılma fonksiyonunu daha sonra Anlı-Güngör saçılma fonksiyonu (kerneli) olarak adlandırdılar-tek boyutlu dilim geometri transport denklemine uygulamışlar ve özdeğer ve kritik yarı kalınlık hesaplamaları yapmışlardır [61-63]. Son olarak yapılan çalışmaların birinde ise Öztürk ve Anlı, Legendre ve Chebyshev polinomlarını kullanarak dilim geometride nötron yayılma uzunluğunu hesaplamışlardır [64]. Bir diğer çalışmada ise Öztürk, Henyey-Greenstein ve Anlı-Güngör saçılma fonksiyonlarının her ikisiyle beraber P_N yöntemini kullanarak yansıtmalı bir dilimde kritik kalınlık problemini çözmüş ve her iki saçılma fonksiyonundan elde edilen sonuçları kıyaslama yapmak için çizelgelerde yan yana vermiştir. Böylece Anlı-Güngör saçılma fonksiyonun transport teorideki problemlerde Henyey-Greenstein fonksiyonuna göre daha tutarlı sonuçlar verdiği paylaşılmıştır [65].

Bu çalışmada, daha önce Giriş bölümünde açıklandığı gibi Anlı-Güngör saçılma fonksiyonu kullanılarak transport denkleminin kritik kalınlık problemi için çözümü incelenecektir. Bunu yaparken Anlı-Güngör saçılma fonksiyonu transport denklemine yerleştirildikten sonra önce konvansiyonel bir yöntem olan Legendre polinomları yaklaşımı (P_N yöntemi), daha sonra ise bu çalışmanın özgün bir çalışma olduğunu belirten ikinci tip Chebyshev polinomları yaklaşımı (U_N yöntemini) kullanılacaktır. Ancak, burada yönteme isimlerini veren bu polinomların özelliklerinden kısaca bahsedilme gereği duyulmuştur.

3.10. Legendre Polinomları

Birçok bilimsel problemde doğrusal diferansiyel denklemler kullanılmaktadır. Pek çok doğrusal diferansiyel denklem için genel çözümler elde etmek zordur. Bir diferansiyel denklem için çözümün olup olmadığı araştırılırken, çözümün hangi

başlangıç koşulları ve şartlar altında gerçekleşebileceği ve çözüm var ise çözümün özellikleri, türetilmiş olan diferansiyel denklem fonksiyonunun yapısına dayalı olmaktadır. Diferansiyel denklem, yüksek mertebeden değişken katsayılı ya da tümlev-türev formda ise çözümleri ancak yaklaşık çözümler olarak bulunmaktadır.

Legendre polinomları, Adrien-Marie Legendre (1752-1833) tarafından türetilmiştir. Legendre, sayılar kuramı ve eliptik tümlev serisi üzerine çalışmalarını yapmış; 1780 yılında Laplace'in potansiyel kuramı üzerinde çalışırken Legendre polinomları olarak bilinecek olan bu fonksiyonlar sınıfı ile karşılaşmıştır. Legendre polinomları, elektrik, yerçekimi ve akışkan potansiyelini açıklamaya dönük kısmi bir diferansiyel denklem olan Laplace denkleminin Legendre polinomları olarak bilinen bir fonksiyonlar sınıfıdır. Bu fonksiyonlar sınıfı,

$$((1 - \mu^2)y')' + \lambda y = 0, \quad |\mu| < 1 \quad (3.38)$$

ile verilen Legendre diferansiyel denkleminin çözümleri olan ve Legendre polinomları adını alan özel fonksiyonlar sınıfıdır. Denklem (3.38) ile verilen Legendre diferansiyel denklemi λ büyüklüğünü içermektedir. λ , $[-1,1]$ sınırlı çözüm aralığında Legendre diferansiyel denkleminin sıfırdan farklı olan ve y 'ye ait çözümlerini içeren özdeğerleridir. Herhangi bir λ özdeğeri için böyle bir çözüm λ özdeğerine karşılık gelen öz fonksiyondur [39].

Denklem (3.38) ile verilmiş olan Legendre diferansiyel denkleminin $[-1,1]$ aralığında sınırlı olan çözümlerini bulabilmek için "0" noktası civarında açılmış olan,

$$y = \sum_{n=0}^n a_n \mu^n \quad (3.39)$$

kuvvet serisi çözümü önerilmektedir. Bu seri çözüm, (3.38) Legendre denkleminde yerine yazılarak ve gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n \mu^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n \mu^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n \mu^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n \mu^n = 0 \quad (3.40)$$

elde edilir. Denklem (3.40)'daki seri açılımları yapılarak, serinin katsayıları olan $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ veren bir tekrarlarma ifadesi olarak,

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (3.41)$$

elde edilir. Denklem (3.41) ile a_{n+1} inci katsayı, kendinden önce gelen a_{n-1} inci katsayılarından yararlanarak bulunabilir. Bu ifade a_{n+2} terimini λ ve a_n cinsinden veren bir tekrarlarma bağıntısıdır. a_2 ve a_3 katsayıları, λ, a_0 ve a_1 cinsinden bilindiği için (a_0 ve a_1 keyfi sabitler olmak üzere), örneğin, $n = 2$ için bir tekrarlarma denklemi olan denklem (3.41)'den,

$$a_4 = \frac{6 - \lambda}{(3)(4)} a_2 = -\frac{\lambda}{2} \frac{6 - \lambda}{(3)(4)} a_0 = \frac{-\lambda(6 - \lambda)}{4!} a_0 \quad (3.42)$$

bulunur. Diğer katsayıları da tekrarlarma bağıntısı ile benzer şekilde yazılabilir ve bu şekilde devam edilerek katsayıları bulunabilmektedir. Genel çözüm için bulunan katsayılar ve x 'in kuvvetlerinin çarpımı seriye açılarak,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu^n = a_0 \left(1 - \frac{\lambda}{2} \mu^2 - \frac{\lambda(6 - \lambda)}{4!} \mu^4 - \frac{\lambda(6 - \lambda)(20 - \lambda)}{6!} \mu^6 + \dots \right) + a_1 \left(\mu + \frac{2 - \lambda}{3!} \mu^3 + \frac{(2 - \lambda)(12 - \lambda)}{5!} \mu^5 + \frac{(2 - \lambda)(6 - \lambda)(30 - \lambda)}{7!} \mu^7 + \dots \right) \quad (3.43)$$

yazılabilir. Denklem (3.43) ile verilmiş olan genel çözüm denkleminde büyük parantezler içerisindeki biri μ 'nün tek kuvvetlerini diğeri de çift kuvvetlerini içeren iki seri çözüm doğrusal bağımsızdır. a_0 ve a_1 keyfi sabitler olmak üzere denklem (3.43) ile verilen ifade Legendre diferansiyel denkleminin genel çözümüdür.

Denklem (3.43)'de λ sabiti, $n(n+1)$ formunda seçilerek ve a_0 ya da a_1 'den biri sıfır alınarak polinom çözümler elde edilebilmektedir. Polinom çözümler için $P_n(\mu)$; $\lambda=n(n+1)$ alındığında Legendre diferansiyel denklemini sağlamaktadır.

$$n = 0, a_1 = 0 \text{ alınarak } \lambda = 0 \text{ ve } y(\mu) = a_0 = \text{sabit} \quad (3.44)$$

bulunmaktadır.

Denklem (3.30)'da ifade edilen nötron hızları doğrultusundaki birim vektör için değişken, x eksenine ile arasındaki açının kosinüsü olan μ 'dür. Denklem (3.38) ile verilmiş olan $[-1,1]$ aralığında tanımlı Legendre diferansiyel denkleminin, $[-1,1]$ aralığında sınırlı olan polinom çözümleri için, sabit daima $y(1) = 1$ olarak seçilerek elde edilen, denklem (3.38) çözümüne uygun $n=1,2,3,4,5$ değerleri için ilk altı polinom “Çizelge 3.1’de” verilmektedir.

Çizelge 3.1 İlk altı Legendre polinomu

$$P_0(\mu) = 1,$$

$$P_1(\mu) = \mu,$$

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1),$$

$$P_3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu),$$

$$P_4(\mu) = \frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3),$$

$$P_5(\mu) = \frac{1}{8}(63\mu^5 - 70\mu^3 + 15\mu),$$

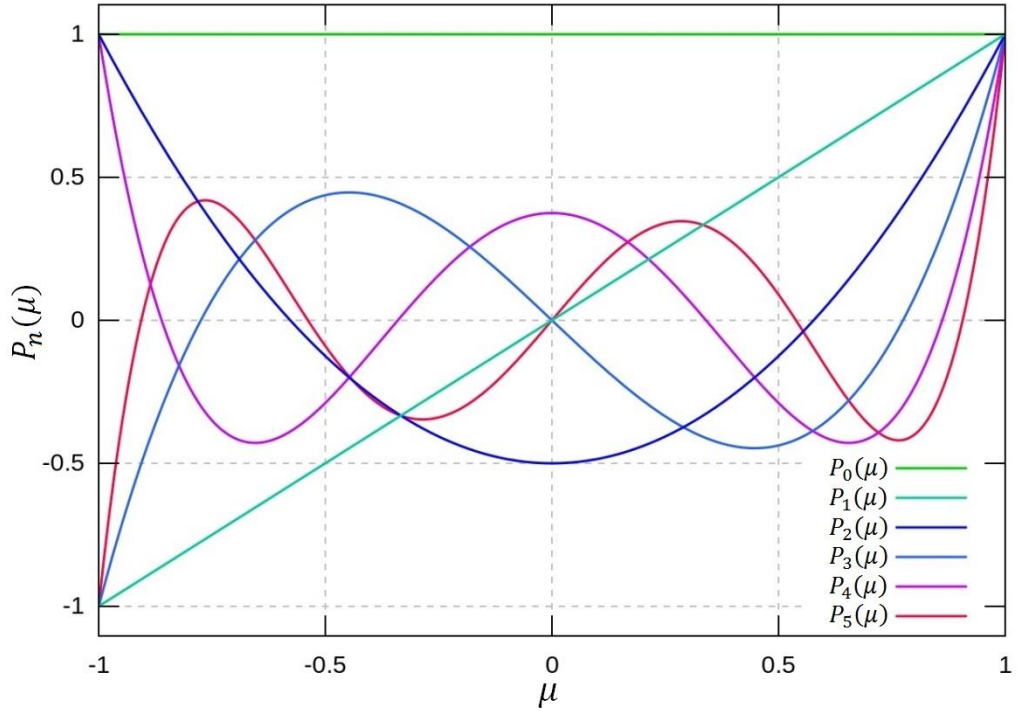
$$P_6(\mu) = \frac{1}{16}(231\mu^6 - 315\mu^4 + 105\mu^2 - 5),$$

“Çizelge 3.1’deki” Legendre polinomları, bir $P_{n+1}(\mu)$ polinomunun $P_n(\mu)$ ve $P_{n-1}(\mu)$ olarak verilen bir tekrarlama bağıntısı ile,

$$(n + 1)P_{n+1}(\mu) - (2n + 1)\mu P_n(\mu) + nP_{n-1}(\mu) = 0, \quad (3.45)$$

yazılabilmektedir. Legendre polinomları cinsinden öz fonksiyon açılımlarında “Çizelge3.1’deki” gibi $P_n(\mu)$ polinomlarının μ^n ’lerin katsayılarını bulmamız gerektiğinden, tekrarlama bağıntısını kullanarak katsayıları bulunabilmektedir [53].

“Çizelge 3.1” ile verilmiş polinomlar için bu ilk altı polinoma ait grafik “Şekil 3.9’da” verilmektedir.



Şekil 3.9. İlk altı Legendre polinomlarının grafiği

($n = 1, 2, 3, 4, 5$) için “Şekil 3.9’daki” $P_n(\mu)$ grafiğinin $[-1,1]$ aralığında x eksenini n kere kestiği görülmektedir. Bu, fonksiyonların her birinin -1 ve 1 arasında n adet sifıra sahip olduğu anlamına gelmektedir. $P_n(\mu)$ $[-1,1]$ aralığında en az bir sifıra sahip olduğu için,

$$\int_{-1}^1 P_0(\mu)P_n(\mu)d\mu = \int_{-1}^1 P_n(\mu)d\mu = 0, \quad (3.46)$$

olmaktadır. Eğer; $P_n(\mu)$; $[-1,1]$ üzerinde hep artı ya da hep eksi olsaydı, o zaman denklem (3.46) ile verilen integral de, ona göre artı ya da eksi olurdu.

Özetle, $n = 0,1,2,\dots$ için $\lambda = n(n+1)$ sayıları Legendre denkleminin özdeğerleridir (karakteristik değerleridir). Özdeğer kavramı (ya da özvektörler), fiziksel bir sistem için, sistemin sahip olabileceği özel değerlerinde nasıl davranacağını belirleyebilmek için önemlidir [81]. Her bir n değeri için elde edilecek $f(\mu) = P_n(\mu)$ polinomu özfonksiyondur. Bu özfonksiyonlar; n tek ise tek polinom ve n çift ise çift polinomdur.

Legendre polinomları $[-1,1]$ tanım aralığında, n ve m tamsayıları eksi olmayan ayrık tamsayılar olmak üzere,

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu)P_m(\mu)d\mu = 0, \quad n \neq m \quad (3.47)$$

şeklinde $p(\mu) = 1$ ağırlık fonksiyonuna diklik özelliği gösterir. Denklem (3.47)'teki integral ifadesi öz fonksiyonların $y(1) = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre diklik bağıntısı olarak tanımlanmaktadır. $p(\mu) = 1$ ağırlık fonksiyonu doğrudan Legendre diferansiyel denklemindeki y 'nin katsayısından okunabilir. Denklem (3.47)'teki ifade, tıpkı vektörlerin nokta çarpımı gibi davranmasından çıkarılmaktadır. Yukarıda açıklandığı gibi $[-1,1]$ gibi bir aralıktaki fonksiyonların nokta çarpımı şu şekilde oluşturulabilmektedir: Verilen aralıktaki $p(\mu) > 0$ olacak şekilde $[-1,1]$ üzerinde sürekli olan bir p fonksiyonu seçilirse; $P_n(\mu)$ ve $P_m(\mu)$ yine $[-1,1]$ 'deki fonksiyonlar olmak üzere,

$$P_n(\mu) \cdot P_m(\mu) = \int_{-1}^1 p(\mu) P_n(\mu)P_m(\mu)d\mu, \quad (3.48)$$

işlemi p ağırlık fonksiyonuna göre nokta çarpım olarak adlandırılmaktadır. Bilindiği gibi iki vektör nokta çarpımları sıfır olduğunda dik olarak adlandırılmaktadır.

n ve m tamsayılarının birbirine eşit olması durumunda ise diklik özelliği,

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu)P_m(\mu)d\mu = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}, \quad n = 0,1,2, \dots \quad (3.49)$$

olarak yazılabilmektedir. Burada $\delta_{n,m}$, kroniker delta fonksiyonu olarak bilinir ve $n = m$ için 1'e eşit iken, diğer bütün durumlarda sıfıra eşittir.

Denklem (3.47) ve (3.49) ile verilen özellikler her $f(\mu) = P(\mu)$ fonksiyonunu Legendre polinomları cinsinden seriye açmada oldukça kullanışlı olmaktadır. $[-1,1]$ aralığında parçalı olan bir f fonksiyonunun özfonksiyon açılımı,

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\mu), \quad (3.50)$$

ile yazılabilmektedir. Denklem (3.46)'da c_n katsayıları $f(\mu)$ ' nün $[-1,1]$ aralığındaki katsayılarıdır. $f(\mu)$ fonksiyonunun denklem (3.50) ile verilen seri açılımı, $f(\mu)$ 'in $[-1,1]$ aralığındaki Fourier-Legendre açılımıdır.

Çizelge 3.1'deki gibi $P_n(\mu)$ polinomlarının μ^n 'lerin katsayılarını Denklem (3.44)'de $P_n(\mu)$ değerleri, denklem (3.45) ile verilen tekrarlama bağıntısı ile bilindiğinden $f(\mu)$ 'in c_n ile verilen Fourier-Legendre katsayı değerleri,

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(\mu) P_n(\mu) d\mu, \quad (3.51)$$

ile bulunabilmektedir. Böyle bir yöntem uygulanarak, bir $f(\mu)$ fonksiyonu Legendre polinomları cinsinden seriye açılmış olmaktadır. Denklem (3.51)'de keyfi bir n hali için c_n katsayısına ulaşmak, basit bir ifade değildir. Ancak c_n katsayıları için c_0, c_1, \dots, c_5 ile verilen ilk altı terim analitik olarak hesaplanabilmektedir.

3.11. Chebyshev Polinomları

Chebyshev polinomları da Legendre polinomları gibi birçok sayısal hesaplamada kullanılan ve Legendre polinomları ile aynı polinom ailesi içerisinde olan Jacobi polinomlarından biridir. Diklik ve tekrarlama özelliklerine sahip olmalarından dolayı matematiksel işlemlerde bilgisayar programlamaya yatkındırlar. Chebyshev polinomları, Rus matematikçisi Chebyshev tarafından ilk kez yaklaşık 100 yıl önce

kullanılmıştır. Daha sonra Lanczos ve Clenshaw iki farklı yöntemle Chebyshev polinomları yardımıyla yaklaşım polinomları oluşturmuşlardır. Chebyshev polinomları, Aspelund, Conkie ve Yabushita tarafından uzatılmış sınır mesafesi problemlerinde kullanılmış ve oldukça geçerli sonuçları vermiştir [32-34]. Chebyshev diferansiyel denklemi,

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 y}{d\mu^2} - \mu \frac{dy}{d\mu} + \alpha^2 y = 0, \quad |\mu| < 1, \quad \alpha \geq 0 \quad (3.52)$$

ile verilmektedir [53].

Denklem (3.52) ile verilen Chebyshev diferansiyel denkleminin -1 , 1 ve ∞ 'da düzenli tekil noktaları vardır. Bu noktalarda,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu^n, \quad (3.53)$$

seri açılımları ile özgün denklemin çözümüne ulaşılabilmektedir. Denklem (3.53) ile verilen seri açılımları denklem (3.52) ile verilen Chebyshev denklemi içerisinde yazılarak,

$$(1 - \mu^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} \mu^n - \mu \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} \mu^n + \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu^n = 0 \quad (3.54)$$

seri çözümü yapılabilir. Denklem (3.54) ile verilen seri çözüm denkleminde a_n 'li terimler için bir tekrarlı bağıntısı,

$$a_{n+2} = \frac{n^2 - \alpha^2}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n \geq 2, \quad (3.55)$$

olarak yazılabilmektedir. Denklem (3.55)'den diferansiyel denklemin $a_0, a_1, a_3, a_5, \dots$ olarak belirtilebilecek tek katsayılı terimleri için,

$$a_{2n-1} = \frac{[(2n-1)^2 - \alpha^2][(2n-3)^2 - \alpha^2] \dots [1^2 - \alpha^2]}{(2n+1)!} a_1, \quad (3.56)$$

denklemini yazılabilir. Çift katsayılı terimleri için de,

$$a_{2n} = \frac{[(2n)^2 - \alpha^2][(2n-2)^2 - \alpha^2] \dots (-\alpha^2)}{(2n)!} a_0, \quad (3.57)$$

olarak yazılabilmektedir. Bu çift katsayılı terimleri için $k=2n$ olmak üzere,

$$a_{k \text{ çift}} = a_0 \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}} (k-2j)^2 - \alpha^2 = \frac{2^{k-1} \pi \alpha \operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2} \pi \alpha\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}\alpha\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}\alpha\right)} a_0, \quad (3.58)$$

kapalı formunda ve tek katsayılı terimleri de $k=2n-1$ kapalı formunda,

$$a_{k \text{ tek}} = a_1 \prod_{j=1}^{(k-1)/2} (k-2j)^2 - \alpha^2 = \frac{2^{k-1} \pi \alpha \operatorname{sec}\left(\frac{1}{2} \pi \alpha\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}\alpha\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}\alpha\right)} a_1, \quad (3.59)$$

biçiminde yazılabilmekte ve tek ve çift katsayılı terimlerin toplanmasıyla,

$$y = a_0 \left[1 + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{a_{k \text{ çift}}}{k!} \mu^k \right] + \left[\mu + \sum_{k=3,5,\dots}^{\infty} \frac{a_{k \text{ tek}}}{k!} \mu^k \right], \quad (3.60)$$

denklemin genel çözümü bulunabilmektedir. Saçılma açısının kosinüsü olan μ değişkeninin değişim aralığı $[-1,1]$ 'dir ve Chebyshev polinomları trigonometrik fonksiyonlar ile tanımlanmaktadır. $[-\pi, \pi]$ aralığında tanımlı bir θ değişkeni ile $\mu = \cos\theta$ ve $\sin\theta = \sqrt{1 - \mu^2} \geq 0$ olmak üzere değişken dönüşümü yapılır ve denklem (3.60) ile verilen seri çözüm ifadesi düzenlenerek diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$y = a_0 \cos(\alpha \sin^{-1} \mu) + \frac{a_1}{\alpha} \sin(\alpha \sin^{-1} \mu). \quad (3.61)$$

elde edilebilmektedir ve genel çözümün diğer bir eşdeğer formu bazı değişken değişiklikleri yapılarak,

$$y = b_1 \cos(\alpha \cos^{-1} \mu) + b_2 \sin(\alpha \cos^{-1} \mu), \quad (3.62)$$

ile yazılabilmektedir. Chebyshev diferansiyel denkleminin çözüm kümesi olarak tanımlanan birinci tip dik polinomların kümesi $T_n(\mu)$ ile ve ikinci tip polinomların kümesi de $U_n(\mu)$ ile gösterilmektedir. $n \geq 0, \mu \in [-1,1]$ olmak üzere,

$$T_n(\mu) = \cos(n \cos^{-1} \mu) \quad (3.63)$$

ile tanımlanan polinoma birinci tip Chebyshev polinomu denmektedir [66].

Denklem (3.62) ile yazılan genel çözüm ifadesi Chebyshev polinomları ile,

$$y = b_1 T_\alpha(\mu) + b_2 \sqrt{1 - \mu^2} U_{\alpha-1}(\mu) \quad (3.64)$$

olarak yazılabilmektedir. c_1 ve c_2 katsayılar olmak üzere başka bir eşdeğer çözüm de,

$$y = c_1 \cosh\left[\alpha \ln(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1})\right] + i c_2 \sinh\left[\alpha \ln(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1})\right] \quad (3.65)$$

olarak bulunabilmektedir [53,67,68].

(3.52) denklemi ile verilen Chebyshev diferansiyel denklemi küresel geometrik bir fonksiyon olup, takip eden ifadelerde denklemin iki bağımsız çözümü ortaya çıkmaktadır. Chebyshev diferansiyel denkleminin çözümü olarak, dik polinomlar kümesi içerisinde tanımlanan bu iki bağımsız çözüm, $n \geq 0$ olmak üzere, birinci tip Chebyshev $T_n(\mu)$ ve ikinci tip Chebyshev (U_N) polinomları adlarıyla bilinirler.

Birinci tip Chebyshev polinomları; $\alpha = 0$ için Gegenbauer polinomlarının özel bir halidir. Gegenbauer polinomları ya da ultraküresel olarak bilinen polinomlar $[-1,1]$

aralığında tanımlı, ağırlık fonksiyonu $(1 - \mu^2)^{\alpha-1/2}$ olan Jacobi polinomları ailesine ait dik polinomlardır.

Chebyshev polinomlarının birinci tipinin çözüm kümesi, daha önce belirtildiği gibi dik polinomların çözüm kümesi içerisinde tanımlıdır. İlk altı polinom için $n = 0, \dots, 5$ değerleri yazılır ve $T_n(\mu) = 1$ olarak normalize edilir. Birinci tip Chebyshev polinomları kapalı integral içerisinde,

$$T_n(\mu) = \frac{1}{4\pi i} \oint_{-1}^1 \frac{(1-t^2)t^{-n-1}}{(1-2\mu t+t^2)} dt, \quad n \geq 1, \quad (3.66)$$

ile verilmektedir [53]. n . dereceden bir polinom olan $T_n(\mu)$, $\forall n \geq 0$ için $[-1, 1]$ için,

$$T_n(\mu) = \cos(ncos^{-1}\mu), \quad (3.67)$$

ile tanımlanmaktadır [69].

Denklem (3.66)'den, $T_0(\mu) = \cos 0 = 1$ ve $T_1(\mu) = \cos(cos^{-1}\mu) = \mu$ olduğu açıkça görülebilmektedir. Benzer şekilde diğer polinomlar da üretilebilmektedir.

Denklem (3.62)'de, $n \geq 1$ için, $\mu = \cos\theta$ değişken dönüşümü yapılarak,

$$T_n(\cos\theta) = \cos(ncos^{-1}(\cos\theta)) = \cos(n\theta), \quad (3.68)$$

ifadesi elde edilmektedir. Denklem (3.68)'de n mertebesi yerine, $n+1$ ve $n-1$ inci mertebeler ile yazılarak birlikte toplamından,

$$T_{n+1}(\cos\theta) + T_{n-1}(\cos\theta) = 2 \cos(n\theta) \cos\theta, \quad (3.69)$$

denklemini elde edilmektedir. Denklem (3.69)'da $\theta = \cos^{-1}\mu$ ters dönüşümü yapılarak yeniden düzenlendikten sonra Chebyshev polinomlarına ait bir tekrarlı bağıntısı olan,

$$T_{n+1}(\mu) = 2\mu T_n(\mu) - T_{n-1}(\mu), \quad (3.70)$$

denklemleri elde edilmektedir. Bu şekilde elde edilebilecek, birinci tip ilk altı Chebyshev polinomları “Çizelge 3.2’de” verilmiş ve bu polinomların grafikleri “Şekil 3.10’da” verilmiştir.

Çizelge 3.2. İlk altı adet birinci tip Chebyshev polinomu

$$T_0(\mu) = 1$$

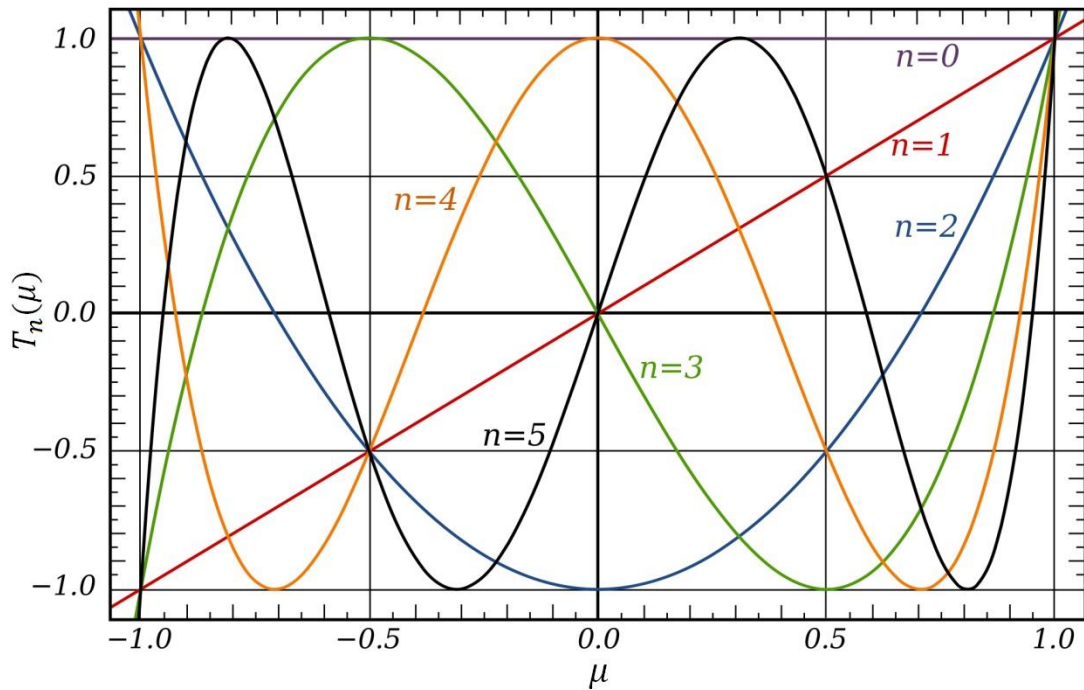
$$T_1(\mu) = \mu$$

$$T_2(\mu) = 2\mu^2 - 1$$

$$T_3(\mu) = 4\mu^3 - 3\mu$$

$$T_4(\mu) = 8\mu^4 - 8\mu^2 + 1$$

$$T_5(\mu) = 16\mu^5 - 20\mu^3 + 5\mu.$$



Şekil 3.10. Birinci tip Chebyshev polinomları

Kosinüs fonksiyonları için diklik ilişkileri,

$$\int_0^\pi \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi/2 & (m = n \neq 0) \\ \pi & (m = n = 0) \end{cases} \quad (3.71)$$

ile yazılabilmektedir. $\mu = \cos\theta$ değişken dönüşümü ile $T_n(\mu) = \cos(n\theta)$ olarak yazıldığında,

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(\mu)T_n(\mu)d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi/2 & (m = n \neq 0) \\ \pi & (m = n = 0) \end{cases} \quad (3.72)$$

olarak $[-1,1]$ aralığında birinci tip Chebyshev polinomlarının diklik ilişkileri elde edilmektedir. Ayrıca $n \times n$ kare matrisin determinatı alınarak,

$$T_n(\mu) = \det \begin{vmatrix} \mu & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 2\mu & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\mu & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\mu & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\mu \end{vmatrix} \quad (3.73)$$

birinci tip Chebyshev polinomları elde edilebilmektedir [70].

Denklem (3.73)'den 2×2 kare matris alındığında,

$$T_2(\mu) = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2\mu \end{vmatrix} = 2\mu^2 - 1, \quad (3.74)$$

elde edilirken 3×3 kare matris alındığında,

$$T_3(\mu) = \det \begin{vmatrix} \mu & 1 & 0 \\ 1 & 2\mu & 1 \\ 0 & 1 & 2\mu \end{vmatrix} = 4\mu^3 - 3\mu, \quad (3.75)$$

bulunmaktadır. "Çizelge 3.2'de" verilen birinci tip Chebyshev polinomları bu şekilde elde edilmektedir.

Hem Legendre hem de Chebyshev polinomları Gegenbauer polinomlarının özel bir halidir. Bu polinom ailesinin bütün üyelerinin bir üretme fonksiyonu vardır. Ultraküresel veya Gegenbauer polinomları için genel olarak üretme fonksiyonu,

$$g(t, \mu) = \frac{1}{(1 - 2\mu t + t^2)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\alpha(\mu) t^n, \quad |\mu| \leq 1, \quad |t| < 1 \quad (3.76)$$

olarak verilmektedir [71]. Denklem (3.76) ile verilen üretme fonksiyonunda $\alpha = 1/2$ alındığında Legendre polinomlarının üretme fonksiyonu elde edilebilmektedir. Denklem (3.76)'de $\alpha = 0$ yazıldığında ifade 1'e eşit olacağından, denklemin t 'ye göre türevi alınır ve

$$T_n(\mu) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \frac{n}{2} C_n^0(\mu), & n > 0 \end{cases} \quad (3.77)$$

tanımlaması yapılırsa, birinci tip Chebyshev polinomlarının üretme fonksiyonu,

$$g(t, \mu) = \frac{1 - t^2}{(1 - 2\mu t + t^2)} = T_0(\mu) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\mu) t^n, \quad |\mu| \leq 1, \quad |t| < 1 \quad (3.78)$$

olarak yazılabilmektedir ve ikinci tip Chebyshev polinomlarının üretme fonksiyonu denklem (3.78)'de $\alpha = 1$ alınır ve $C_n^1(\mu) = U_n(\mu)$ dönüşümü uygulandığında,

$$\frac{1}{1 - 2\mu t + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\mu) t^n, \quad |\mu| \leq 1, \quad |t| < 1 \quad (3.79)$$

şeklinde kullanılabilir [72]. İkinci tip Chebyshev polinomları $U_n(\mu)$ ile belirtilmektedir ve $\alpha = 1$ için Gegenbauer polinomlarının özel bir hali olup çoklu açılış formülleri ile birbirine bağlanmaktadır. Denklem (3.78)'te $T_n(\mu)$ birinci tip Chebyshev denkleminde $\frac{\partial g}{\partial t}$ alınması ile denklem (3.79) ile verilen $U_n(\mu)$ ikinci tip Chebyshev polinomu arasındaki ilişki gözlemlenebilir.

Hem Legendre hem de Chebyshev ve diğer dik polinomları genişletmek için kullanılan Rodrigues formülü olarak bilinen denklem, birinci tip Chebyshev polinomları için,

$$T_n(\mu) = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{(-1)^n(2n-1)(2n-3)\dots 1} \frac{d^n}{d\mu^n} \left[(1-\mu^2)^{n-\frac{1}{2}} \right], \quad n \geq 0 \quad (3.80)$$

İkinci tip Chebyshev polinomları için,

$$U_n(\mu) = \frac{(-1)^n(n+1)\sqrt{\mu}}{2^{n+1}(n+\frac{1}{2})!(1-\mu^2)^{1/2}} \frac{d^n}{d\mu^n} \left[(1-\mu^2)^{n+\frac{1}{2}} \right], \quad n \geq 0 \quad (3.81)$$

ile verilmektedir [73]. Burada $(1-\mu^2)^{1/2}$ ifadesi ağırlık fonksiyonudur. Denklem (3.81) ile verilen $U_n(\mu)$ ifadesi seriye açıldıktan sonra,

$$U_n(\mu) = 2^n \prod_{k=1}^n \left[\mu - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \right] \quad (3.82)$$

şeklinde yazılabilmektedir [73]. $U_n(\mu)$ polinomları aynı zamanda,

$$U_n(\mu) = \det \begin{vmatrix} 2\mu & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 2\mu & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\mu & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\mu & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\mu \end{vmatrix} \quad (3.83)$$

kare matrisinin determinantları alınarak bulunabilmektedir. $\mu \in [-1,1]$ ve $n \geq 1$ için, $\mu = \cos\theta$ değişken dönüşümü yapılarak,

$$U_n(\mu) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad (3.84)$$

şeklindeki polinomlar, İkinci tip Chebyshev polinomları olarak tanımlanmaktadır [66,74].

Denklem (3.84) ile yazılan ifade ile,

$$U_n(\mu) = 2\mu U_{n-1}(\mu) - U_{n-2}(\mu), \quad (3.85)$$

ikinci tip Chebyshev polinomları tekrarlama bağıntısı elde edilmektedir.

Denklem (3.72)'de verildiği gibi, benzer şekilde $[-1,1]$ aralığında ve ağırlık fonksiyonu $\sqrt{1-\mu^2}$ ile verilen ikinci tip Chebyshev polinomları için diklik ilişkileri,

$$\int_{-1}^1 U_n(\mu)U_m(\mu)\sqrt{1-\mu^2}d\mu = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{\pi}{2}\delta_{n,m} & n = m \end{cases} \quad (3.86)$$

olarak yazılabilmektedir [53].

İkinci tip Chebyshev polinomlarına ait parite özelliği,

$$U_n(-\mu) = (-1)^n U_n(\mu), \quad (3.87)$$

olarak yazılmaktadır [53].

İlk altı adet ikinci tip Chebyshev polinomu “Çizelge 3.3’te” ve bu polinomların ilk altısının davranışlarını gösteren grafik “Şekil 3.11’de” verilmiştir.

Çizelge 3.3. İlk altı adet ikinci tip Chebyshev polinomu

$$U_0(\mu) = 1$$

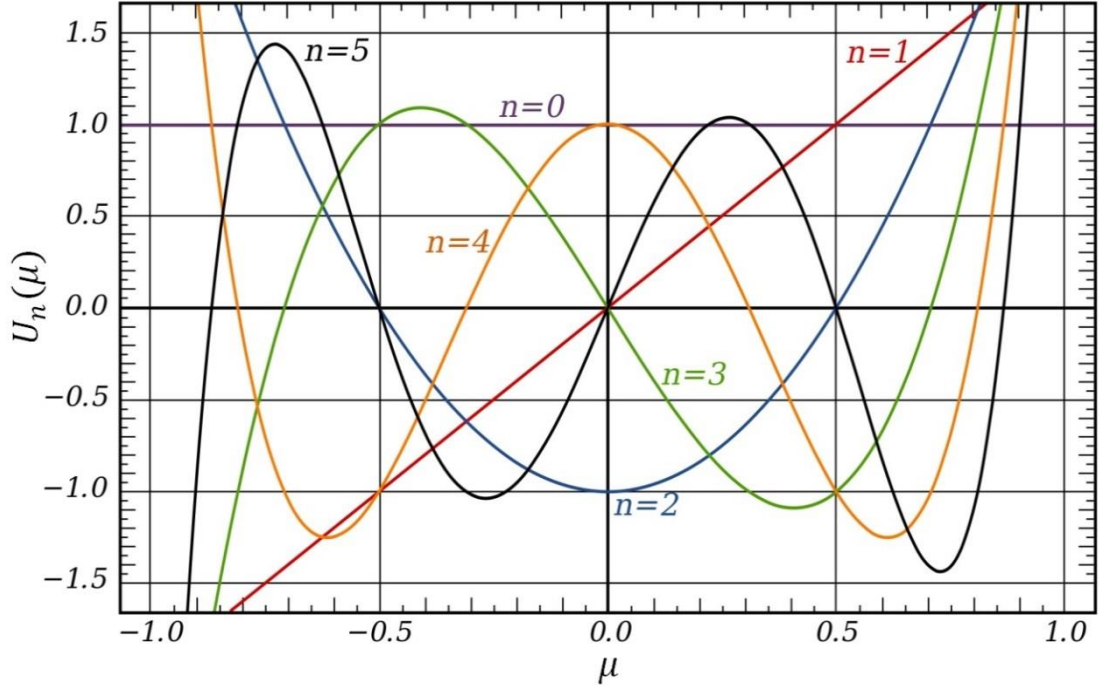
$$U_1(\mu) = 2\mu$$

$$U_2(\mu) = 4\mu^2 - 1$$

$$U_3(\mu) = 8\mu^3 - 4\mu$$

$$U_4(\mu) = 16\mu^4 - 12\mu^2 + 1$$

$$U_5(\mu) = 32\mu^5 - 32\mu^3 + 6\mu$$



Şekil 3.11. İkinci tip Chebyshev polinomları

Chebyshev polinomlarının diklik özellikleri $[-1,1]$ aralığında, keyfi bir $f(\mu)$ fonksiyonunu Chebyshev polinomları cinsinden seriye açıldığında bir f fonksiyonunun özfonksiyon açılımı,

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n U_n(\mu), \quad |\mu| \leq 1 \quad (3.88)$$

olarak yazılabilmektedir. c_n katsayıları $f(\mu)$ 'nün $[-1,1]$ aralığındaki katsayıları,

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(\mu) d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}, \quad n = 0 \quad (3.89)$$

ve

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(\mu) T_n(\mu) d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.90)$$

olarak yazılabilmektedir. Denklem (3.89) ve (3.90) ile bulunabilecek katsayı değerleri denklem (3.88)'de yazılarak $f(\mu)$ fonksiyonu Chebyshev polinomları cinsinden seriye açılmış olmaktadır.

3.12. Alternatif (Anlı-Güngör, AG) Saçılma Fonksiyonu

Reaktör içerisindeki nötron saçılmaları, nötron sayısındaki değişimin takibi açısından büyük önem taşımaktadır. Bilindiği üzere nötronun etkileştiği çekirdek kütlelerinin artışı ile nötron saçılımı daha anizotropik bir hal almakta ve bu durum hem saçılma hem de nötronların yavaşlatılması sürecini doğrudan etkilemektedir [75,76]. Çekirdek ile etkileşime giren nötronun, yutulma öncesinde nötronların katettiği ortalama mesafede yaptığı çarpışma sayısı, dağınık haldeki nötronların açılma dağılımına bağlı olmaktadır. Bu nedenle de reaktör ortamında nötronun yapabileceği çok çeşitli etkileşim türleri (saçılma, yakalama, fisyon) bulunmaktadır. Reaktör içerisindeki parçacıkların ortalama bir davranışının iyi tespit edilebilmesi, gerçekleşebilecek etkileşim parametrelerinin sayısının oldukça tutarlı tespit edilmesini gerektirmektedir.

Böyle bir durumda ise nötron sayısının takibinin yapılabilmesi oldukça zorlaşmakta ve hatta olanaksız bir duruma yol açmakta ve nötron sayısının takibinin gerçekleştirilebilmesi ise olağanüstü bir durum halini alabilmektedir. Bu nedenle, nötron sayısının takibinin yapılabilmesi, gerçekleşmesi olası saçılmaların daha ayrıntılı bir takibini zorunlu kılmaktadır.

Nötron davranışlarının takibi ile nükleer sistemin geleceği hakkında bilgi edinilebilmektedir. Bununla birlikte en iyi nötronik durumun hesabı için, nötron transport denkleminde kullanılacak saçılma fonksiyonunun iyi bilinen tam bir fonksiyon olması gerekmektedir. Çünkü transport teorisindeki birçok problemin çözümünde saçılma fonksiyonu için genellikle dik polinomlar cinsinden seriye açılmış yaklaşımlar tercih edilmiş ve başarılı sonuçlar elde edilmiş olmasına rağmen, saçılma fonksiyonu yerine bir çeşit üretme fonksiyonu olan doğrudan bir fonksiyon kullanılması hem problemlerin çözüm algoritmalarında hem de sayısal sonuçların hesaplanmasında etkileyici bir yöntem olarak düşünülmektedir.

Bu tür üretme fonksiyonlarından bir tanesi denklem (3.37) ile verilmiş olan Henyey-Greenstein fonksiyonudur [60].

Kullanışlı bir saçılma fonksiyonu üretme arayışı ile benzer problemlerde denenene ve oldukça iyi sonuçlar alınan alternatif bir saçılma fonksiyonu olan, Anlı ve arkadaşlarının çalışmalarında kullandığı ve Anlı-Güngör faz fonksiyonu olarak bilinen saçılma fonksiyonu,

$$\sigma_S^{AG}(\mu_0) = \frac{\sigma_S}{4\pi(1 - 2\mu_0 t + t^2)^{1/2}}, \quad (3.91)$$

ile verilmektedir [62]. Burada σ_S eksi olmayan bir sabiti temsil ederken t ise $-1 \leq t \leq 1$ aralığında tanımlı bir parametre ve $\mu_0 = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}'$ saçılma açısının kosinüsüdür.

Bu alternatif saçılma fonksiyonuna literatürdeki bazı çalışmalarda Anlı-Güngör saçılma fonksiyonu denilerek ve o çalışmalarda Legendre ve Chebyshev polinomları kullanılarak nötron transport teorisindeki yayılma mesafesi ve kritik kalınlık gibi problemler çözülmüştür [63,65].

3.13. Anlı-Güngör (AG) Faz Fonksiyonu ile P_N Yaklaşımı ve Kritiklik Problemi

Reaktör içerisindeki nötron davranışının ne şekilde gerçekleşeceğinin kestirilebilmesinin, nötron transport denklemlerinin çözümü ile mümkün olabileceği daha önce açıklanmıştı. Çözüm için önerilen yöntemler arasında, konvansiyonel bir yöntem olarak kullanılan Legendre polinomları ile seriye açma işlemi, P_N yaklaşımı olarak adlandırılmakta ve en güçlü yaklaşımlardan biri olarak kullanılmaktadır. Örneğin; nötron transport denkleminin çözümü bu şekilde hem analitik hem de sayısal olarak yapılabilmekte ve nötron akı değişimi hakkında fikir verebilmektedir.

Bu tez çalışmasının ilk bölümünde, gerekçeleri ve hedefleri daha önce de belirtildiği gibi, denklem (3.27) ile verilen zamandan bağımsız, kaynağın olmadığı homojen bir

ortamda nötron transport denkleminin kritik kalınlık problemi için öncelikle P_N yaklaşımı kullanılacaktır.

Denklem (3.27) ile verilen transport denklemin çözümü, konvansiyonel bir yöntem olarak kullanılan ve kısaca P_N yaklaşımı olarak da belirtilebilen Legendre polinomları yaklaşımı ile akı momentlerinin elde edilmesidir.

Kaynağın olmadığı bir ortam için P_N yaklaşımı şu şekilde yapılmaktadır:

Denklem (3.27) ile verilen transport denklemdeki ilk terim bir boyutlu dilim geometride,

$$\Omega \cdot \nabla \psi(r, \Omega) = \mu \frac{d\psi(x, \mu)}{dx}, \quad (3.92)$$

olarak yazılabilmektedir.

Denklem (3.92)'de $\psi(x, \mu)$, x eksenini boyunca ve μ doğrultusundaki nötron açısal akısı ile tanımlanan fonksiyonu temsil etmekte ve tekrarlı ve diklik gibi benzer özellikler gösteren Legendre ya da birinci ya da ikinci Chebyshev polinomları ile seriye açılabilir. Buna göre $\psi(x, \mu)$ açısal akısı doğrusal ve açısal -örneğin Legendre polinomları cinsinden- parametrelerin bir fonksiyonu olarak,

$$\psi(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (2m + 1) P_m(\mu) \Phi_m(x), \quad |a| \leq 1, \quad |\mu| \leq 1 \quad (3.93)$$

şeklinde yazılabilmektedir [12,16,37].

Denklem (3.93)'ün seri açılımındaki $\Phi_m(x)$ ifadeleri akı momentleri olarak adlandırılmaktadır. Denklem (3.93)'ün seri açılımı ile çözümlenmesinde $\Phi_m(x)$ 'ler için $m=0,1,2,\dots,N$ olmak üzere sonlu sayıda ve birbiriyle ilişkili $N+1$ adet denklem mevcuttur. Polinom açılımının özelliği olarak $P_{N+1}(\mu)$ polinomu, büyük N değerleri için gerçekleşen $N+1$ 'inci terim için,

$$\Phi_{N+1}(\mu) = 0, \quad (3.94)$$

akı momenti sıfır olmaktadır. $m = 0$ değeri için, P_0 yaklaşımı, $m = 1$ değeri için P_1 yaklaşımı, $m = 2$ değeri için P_2 yaklaşımı,... olarak adlandırılmaktadır ve yukarıdaki açıklama doğrultusunda yöntem gereği örneğin P_0 yaklaşımı için $\Phi_1(\mu) = 0$ olduğu gibi $\Phi_2(\mu), \Phi_3(\mu), \dots$ değerleri de sıfır olmaktadır.

Denklem (3.93)'de skaler nötron akısı,

$$\Phi_n(x) = \int_{-1}^1 \psi(x, \mu) P_n(\mu) d\mu, \quad (3.95)$$

olarak tanımlanmaktadır. Denklem (3.27)'de verilen nötron transport denkleminde, saçılma fonksiyonu olan $\sigma_s(\mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega})$ için, yaptığımız bu çalışmada denklem (3.91) ile verilen Anlı-Güngör saçılma fonksiyonu $\sigma_s^{AG}(\mu_0)$ kullanılacağından, bu fonksiyon da transport denkleminde sağ tarafta yerine yazılmaktadır.

Denklem (3.27) ile verilen nötron transport denklemi, genişliği $x = -a$ 'dan a 'ya uzanan tek boyutlu dilim geometride, zamandan ve dış kaynaktan bağımsız olarak (nötron sayısının korunabildiği durum) ve tek gruplu nötronlar (aynı hız veya enerjili nötronlar) için, gerekli dönüşümler yapıldıktan sonra,

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \sigma_T \psi(x, \mu) \\ = \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu' \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_s}{4\pi(1 - 2\mu_0 t + t^2)^{1/2}} d\varphi', \end{aligned} \quad (3.96)$$

olarak düzenlenebilmektedir [67].

Denklem (3.96)'da $x = \frac{\sigma_T x}{v}$ dönüşümü uygulanır ve denklemin her iki tarafı $\frac{v}{\sigma_T}$ ile çarpılarak denklemde yazıldığında,

$$\mu \frac{\sigma_T}{\nu} \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \sigma_T(x, \mu) = \frac{\nu}{\sigma_T} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu' \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_s}{4\pi(1 - 2\mu_0 t + t^2)^{1/2}} d\varphi', \quad (3.97)$$

elde edilmektedir. Burada ν özdeğerleri temsil etmektedir. Denklem (3.97)'nin sağ tarafında $\frac{\sigma_s}{\sigma_T} = c$, tesir kesitlerinin oranını c ikincil nötron sayısına bağlayan bir ifade olmak üzere denklemde yazılarak düzenlendiğinde,

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \nu \psi(x, \mu) = \frac{\nu c}{4\pi} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu' \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 - 2\mu_0 t + t^2)^{1/2}} d\varphi', \quad (3.98)$$

olarak elde edilmektedir. Denklem (3.98)'de yer alan saçılma fonksiyonunun integrali, Legendre polinomlarının ekleme kuramı ile,

$$\int_0^{2\pi} \sigma_s^{AG}(\mu_0) d\varphi' = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(\mu) P_n(\mu'), \quad (3.99)$$

olarak seriye açılabilir [62]. Denklem (3.99) ile verilen ifade denklem (3.98)'de yazıldığında,

$$\frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \nu \psi(x, \mu) = \frac{\nu c}{2} \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(\mu) \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') P_n(\mu') d\mu', \quad (3.100)$$

olarak elde edilmektedir. Skaler nötron akısını, denklem (3.93) ile verilen açılmalı nötron akısına bağlayan denklem (3.95) içerisinde denklem (3.93) yazılarak seriye açıldığında, ilk iki terimi $\Phi_0(x)$ ve $\Phi_1(x)$ olmak üzere,

$$\Phi_0(x) = \int_{-1}^1 \psi(x, \mu) P_0(\mu) d\mu, \quad n = 0 \quad (3.101)$$

olarak $\Phi_0(x)$ skaler akısı, toplam nötron skaler akısıdır. Denklem (3.100)'de $P_0(\mu) = 1$ olması nedeniyle bu ifade,

$$\Phi_0(x) = \int_{-1}^1 \psi(x, \mu) d\mu, \quad n = 0 \quad (3.102)$$

olarak yazılabilmektedir. Benzer şekilde ikinci terimi ise $P_1(\mu) = \mu$ olmak üzere,

$$\Phi_1(x) = \int_{-1}^1 \mu \psi(x, \mu) d\mu, \quad n = 1 \quad (3.103)$$

herhangi bir x noktasındaki nötron akımı olarak elde edilebilmektedir. Nötron skaler akısı ve nötron akımı birbiri ile denklem (3.17) ile verildiği gibi Fick Kanunu ile bağlanabilmektedir.

Akı momentleri diferansiyel denklemlerini elde edebilmek için, denklem (3.93) ile verilen açılal akı fonksiyonu, denklem (3.100) ile verilen transport denkleminde yazılarak elde edilebilmektedir. Bu şekilde uygulanan yöntemin adı Legendre polinomları yaklaşımı ya da P_N yaklaşımı olarak adlandırılmaktadır. Bu durumda P_N yaklaşımı için denklem (3.45) ile verilen Legendre polinomlarının tekrarlama bağıntısı ve denklem (3.49) ile verilen diklik özelliklerinden yararlanılmaktadır. Yöntem gereği son elde edilen (3.100) denklemi, $P_m(\mu)$ ile çarpılarak $[-1,1]$ aralığında integrali alınmaktadır. Her bir n değeri için $n = 0,1,2,\dots$ olmak üzere yaklaşımın adı, $P_0(\mu), P_1(\mu), P_2(\mu), \dots$ yaklaşımları olarak adlandırılmaktadır.

Buna göre bu yöntemle elde edilebilecek akı momentleri örneğin $n = 0$ için $P_0(\mu)$ yaklaşımı olmak üzere, (3.100) denkleminin her iki tarafı $P_0(\mu)$ ile çarpılıp $[-1,1]$ aralığında integrali alınırsa; daha önce tanımlanan akı momentleri ve ekleme kuramı da kullanılarak,

$$\frac{d\Phi_1(x)}{dx} + \nu \Phi_0(x) = \nu c \Phi_0(x), \quad (3.104)$$

moment denklemleri elde edilmektedir. Benzer şekilde, $n = 1$ için $P_1(\mu)$ yaklaşımı ile, (3.100) denkleminin her iki tarafı $P_1(\mu)$ ile çarpılıp $[-1,1]$ aralığında integrali alınırsa; daha önce tanımlanan akı momentleri ve ekleme kuramı da kullanılarak,

$$2 \frac{d\Phi_2(x)}{dx} + \frac{d\Phi_0(x)}{dx} + 3v\Phi_1(x) = vct\Phi_1(x), \quad (3.105)$$

moment denklemi elde edilmektedir. Daha yüksek mertebeden yapılacak bazı yaklaşımlarda da benzer bir yol izlenerek moment denklemleri,

$$3 \frac{d\Phi_3(x)}{dx} + 2 \frac{d\Phi_1(x)}{dx} + 5v\Phi_2(x) = vct^2\Phi_2(x), \quad (3.106)$$

$$4 \frac{d\Phi_4(x)}{dx} + 3 \frac{d\Phi_2(x)}{dx} + 7v\Phi_3(x) = vct^3\Phi_3(x), \quad (3.107)$$

$$5 \frac{d\Phi_5(x)}{dx} + 4 \frac{d\Phi_3(x)}{dx} + 9v\Phi_4(x) = vct^4\Phi_4(x), \quad (3.108)$$

$$6 \frac{d\Phi_6(x)}{dx} + 5 \frac{d\Phi_4(x)}{dx} + 11v\Phi_5(x) = vct^5\Phi_5(x), \quad (3.109)$$

$$7 \frac{d\Phi_7(x)}{dx} + 6 \frac{d\Phi_5(x)}{dx} + 13v\Phi_6(x) = vct^6\Phi_6(x), \quad (3.110)$$

$$8 \frac{d\Phi_8(x)}{dx} + 7 \frac{d\Phi_6(x)}{dx} + 15v\Phi_7(x) = vct^7\Phi_7(x), \quad (3.111)$$

$$9 \frac{d\Phi_9(x)}{dx} + 8 \frac{d\Phi_7(x)}{dx} + 17v\Phi_8(x) = vct^8\Phi_8(x), \quad (3.112)$$

olarak elde edilebilmekte ve elde edilen bu moment denklemlerine göre herhangi bir n değeri için üretilebilecek moment denklemi için,

$$(n+1) \frac{d\Phi_{n+1}(x)}{dx} + n \frac{d\Phi_{n-1}(x)}{dx} + (2n+1)v\Phi_n(x) = vc[t^n\Phi_n(x)], \quad (3.113)$$

şeklinde bir genel terim ifadesi yazılabilmektedir. Denklem (3.113)'de her yaklaşım mertebesi için, $n=0, 1, 2, \dots, N$ olmak üzere $N+1$ tane akı moment denklemi elde edilebileceği açıktır. Denklem (3.113)'daki genel terim ifadesinin çözümü için,

$$\Phi_n(x) = G_n(v, t) \exp(x), \quad (3.114)$$

şeklinde bir çözüm önerisi kabul edilebilmektedir [16]. Denklem (3.114)'te $G_n(v, t)$, v özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon olarak ifade edilmektedir. Verilen bu çözüm önerisi akı momentleri genel denkleminde, denklem (3.113)'de yazılarak her bir n değerine karşılık olarak,

$$G_0(v, t) = 1, \quad (3.115)$$

$$G_1(v, t) + vG_0(v, t) = vcG_0(v, t), \quad (3.116)$$

$$2G_2(v, t) + 3vG_1(v, t) + G_0(v, t) = vc(tG_1(v, t)), \quad (3.117)$$

$$3G_3(v, t) + 5vG_2(v, t) + 2G_1(v, t) = vc(t^2G_2(v, t)), \quad (3.118)$$

$$4G_4(v, t) + 7vG_3(v, t) + 3G_2(v, t) = vc(t^3G_3(v, t)), \quad (3.119)$$

$$5G_5(v, t) + 9vG_4(v, t) + 4G_3(v, t) = vc(t^4G_4(v, t)), \quad (3.120)$$

$$6G_6(v, t) + 11vG_5(v, t) + 5G_4(v, t) = vc(t^5G_5(v, t)), \quad (3.121)$$

$$7G_7(v, t) + 13vG_6(v, t) + 6G_5(v, t) = vc(t^6G_6(v, t)), \quad (3.122)$$

$$8G_8(v, t) + 15vG_7(v, t) + 7G_6(v, t) = vc(t^7G_7(v, t)), \quad (3.123)$$

$$9G_9(v, t) + 17vG_8(v, t) + 8G_7(v, t) = vc(t^8G_8(v, t)), \quad (3.124)$$

özfonksiyonları elde edilmektedir. $G_n(v, t)$ 'ler için genel bir ifade denklem (3.113)'e benzer olarak,

$$(n + 1)G_{n+1}(v, t) + (2n + 1)vG_n(v, t) + nG_{n-1}(v, t) = vct^nG_n(v, t), \quad |x| \leq a \quad (3.125)$$

tanımlanmaktadır. Elde edilecek özfonksiyon denklemlerinden özdeğerleri elde edebilmek için denklem (3.94)'da belirtildiği gibi P_N yaklaşımında N ' inci terim için $N+1$ inci terimin sıfıra eşitlenmesine benzer şekilde,

$$G_{N+1}(v, t) = 0, \quad (3.126)$$

yaklaşımı kabul edilebilmektedir [16]. Örneğin; $n = 1$ için denklem (3.94)'teki ifadeye benzer şekilde $G_2(v, t) = 0$ olacak ve bu değer denklem (3.117)'de yazılarak buradan,

$$G_1(v, t) = -\frac{G_0(v, t)}{v(3 - ct)} \quad (3.127)$$

ifadesi denklem (3.116)'de yerine yazılırsa,

$$-\frac{G_0(v, t)}{v(3 - ct)} + vG_0(v, t) = vcG_0(v, t) \quad (3.128)$$

elde edilir. Denklem (3.128) v özdeğerleri için çözümlerse,

$$v_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{(1 - c)(3 - ct)}}, \quad (3.129)$$

olarak bir çift halinde $P_1(\mu)$ yaklaşımına ait özdeğerler bulunmuş olmaktadır. Benzer yöntem takip edilerek sırasıyla, $P_3(\mu), P_5(\mu), P_7(\mu), \dots$ yaklaşımlarıyla çiftler halinde dört, altı, sekiz, ... adet farklı özdeğerler elde edilebilmektedir. Verilen bu yöntem aracılığıyla yapılacak $n=2,4,6,\dots$ çift sayıları için yapılacak $P_2(\mu), P_4(\mu), P_6(\mu), \dots$ yaklaşımlarından elde edilecek özdeğerlerden bir tanesi her zaman sıfır olmakta, diğer özdeğerleri ise çiftler halinde bulunmaktadır.

Herhangi bir yaklaşıma ait özdeğerleri elde etmenin farklı bir yöntemi olarak ise, özfonksiyon denklemlerinin bir doğrusal denklem sistemi meydana getirdikleri

gerçeğinden hareketle, bu denklemler alt alta yazılıp bir matris eşitliği şekline getirilebilmektedir. Örneğin, denklem (3.116) ve (3.117),

$$\nu(1 - c)G_0(\nu, t) + G_1(\nu, t) = 0 \quad (3.130)$$

$$G_0(\nu, t) + \nu(3 - ct)G_1(\nu, t) + 2G_2(\nu, t) = 0, \quad (3.131)$$

olarak düzenlenebilmektedir ve $P_1(\mu)$ yaklaşımında $G_2(\nu, t) = 0$ olmaktadır. Bu denklemler için katsayılar matrisi oluşturularak,

$$\begin{bmatrix} \nu(1 - c) & 1 \\ 1 & \nu(3 - ct) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0(\nu, t) \\ G_1(\nu, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.132)$$

şeklinde bir matris eşitliği ile de gösterilebilmektedir. Bu matris eşitliğindeki ilk çarpan matris katsayılar matrisi olarak adlandırılmakta ve katsayılar matrisinin determinanı sıfıra eşitlenerek denklem (3.129) elde edilebilmektedir.

Denklem (3.132) ile verilen örneğe benzer olarak, her yaklaşım için bulunacak özfonksiyonlar, denklem (3.130) ve (3.131)'dekine benzer şekilde düzenlenerek katsayılar matrisi oluşturulduğunda,

$$\begin{bmatrix} \nu(1 - c) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \nu(3 - ct) & 2 & \ddots & 0 \\ 0 & 2 & \nu(5 - ct^2) & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu(2n + 1 - ct^n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0(\nu, t) \\ G_1(\nu, t) \\ G_2(\nu, t) \\ \vdots \\ G_n(\nu, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.133)$$

elde edilmektedir. $G_n(\nu, t)$ 'lerin katsayıları ile $(N+1) \times (N+1)$ kare matrisi oluşturularak, kare matrisin determinanı,

$$|\mathbf{M}(\nu, t)| = \mathbf{0}, \quad (3.134)$$

olarak sıfıra eşitlenmektedir. Bu yöntemle elde edilecek özdeğerler çarpışma başına ikincil nötron sayısı c ve saçılma parametresi t 'ye değer verilerek hesaplanmaktadır.

Denklem (3.129) ile bulunan özdeğerler, denklem (3.114) ile önerilen çözümde yazılarak, her özdeğere karşılık bir özvektör elde edilmektedir. Denklem (3.129)'a göre,

$$v_2 = -v_1, \quad (3.135)$$

yazılabilmekte ve elde edilecek doğrusal bağımsız çözümler,

$$\Phi_1(x) = \alpha_1 G_n(v_1, t) \exp(x), \quad (3.136)$$

$$\Phi_2(x) = \alpha_2 G_n(-v_1, t) \exp(x), \quad (3.137)$$

şeklinde yazılmaktadır. Denklem (3.136) ve (3.137)'te verilen doğrusal bağımsız çözümlerin doğrusal bileşimi de bir çözüm olduğundan, genel çözüm,

$$\Phi_n(x) = \alpha_1 G_n(v_1, t) \exp(x) + \alpha_2 G_n(-v_1, t) \exp(x), \quad (3.138)$$

olarak bulunmaktadır. Denklem (3.138)'de $x \rightarrow \frac{\sigma_T x}{v}$ dönüşümü uygulanır ve parite ilişkisi, $G_n(-v, t) = (-1)^n G_n(v, t)$, kullanılırsa genel çözüm,

$$\Phi_n(x) = G_n(v_1, t) \left[\alpha_1 \exp\left(\frac{\sigma_T x}{v}\right) + \alpha_2 (-1)^n G_n(v_1, t) \exp\left(-\frac{\sigma_T x}{v}\right) \right], \quad (3.139)$$

şeklinde elde edilmektedir. Buna benzer şekilde, daha yüksek mertebeden yaklaşımlar için elde edilecek genel çözüm,

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^{\frac{N+1}{2}} G_n(v_k, t) \alpha_k \left[\exp\left(\frac{\sigma_T x}{v_k}\right) + (-1)^n \exp\left(-\frac{\sigma_T x}{v_k}\right) \right], \quad (3.140)$$

olarak yazılabilmektedir.

3.13.1. Sınır ve Simetri Koşulları

Nötron transport denkleminin çözümü için kullanılan Legendre ya da Chebyshev polinomları yaklaşımları tanım aralığı $[-1,1]$ olup, bu aralık için polinomların özel ve genel çözümleri sınırlı ve süreklidir. Bu durum, aynı şekilde $|\mu| \leq 1$ için tanımlı açısız akısı $\psi(x, \mu)$ 'nin ve nötron akımının gerçek bir sistem dahilinde sürekli ve sınırlı olmasını gerektirmektedir. Ancak açısız akı $\psi(x, \mu)$ dilim geometri için, $-1 \leq \mu \leq 0$ ve $0 \leq \mu \leq 1$ yarımsız açısız aralığında süreklidir ve sadece $\mu = 0$ yönü için sürekli değildir [84]. Bu nedenle, dilim geometride akının sürekli olmadığı noktalarda, P_N , T_N ya da U_N yaklaşımları ile seriye açılan açısız akı kaynak ve yüzey sınırı yakınlarında, tercih edilmemektedir. Yapılan bu seri çözümleri için akının süreklilik göstereceği serbest yüzey ve simetri koşullarının belirlenmesi ve belirlenen şartlar için çözüm aranması gerekmektedir [57]. Açısız akı $\psi(x, \mu)$ 'nin serbest uzay sınır koşulu,

$$\psi(x, \mu) = 0, \quad (3.141)$$

ve simetri koşulu,

$$\psi(x, \mu) = \psi(-x, \mu), \quad \mu > 0 \quad (3.142)$$

olarak belirlenmektedir.

P_N ile yapılan çözümler için en yaygın kullanılan iki çözüm Mark ve Marshak tarafından önerilmiştir [16,40,41,57,77,78]. Marshak sınır koşulu, boşluk sınır koşulu olarak da bilinmekte olup, dilim boyunca seçilecek boşluk ile çevrili bir yüzey elemanın dışarısından içerisine ve içerisinden dışarısına nötron geçişlerinin olabileceğini ve her türlü etkileşimin gerçekleşebileceğini belirtmektedir. Yani bazı açılardaki saçılmalar ile nötronlar yüzey içerisine girebilecek; bazı açılardaki saçılmalarda ise giremeyecektir. Bu açı aralıkları $0 < \mu < -1$ ve $0 < -\mu < 1$ olmaktadır. Böyle bir yüzeyde sisteme nötron giriş akımı sıfır olabilecektir. Bu durum,

$$\int_{-1}^1 P_k(-\mu)\psi(a, -\mu)d\mu = 0, \quad k = 1,3,5, \dots, N \quad (3.143)$$

veya,

$$\int_{-1}^1 P_{2k-1}(\mu)\psi(a, -\mu)d\mu = 0, \quad k = 1,3,5, \dots, \frac{N+1}{2} \quad (3.144)$$

ile ifade edilmektedir [12, 20].

Yapılan yaklaşımın mertebesi büyüdükçe Marshak sınır koşulları, Mark sınır koşullarından iyi sonuçlar vermektedir. Bu nedenle bu çalışmada, Marshak sınır koşulları tercih edilmiş ve Mark sınır koşullarından bahsedilmemiştir. Sınır koşulları ile ilgili detaylı bilgiye Davison, Bell ve Glasstone ile Case ve Zweifel gibi kaynaklardan ulaşılabilir [12,16,37,38]. Denklem (3.143) ile verilen Marshak sınır koşulları kullanılarak kritik kalınlık hesaplanabilmektedir.

3.13.2. Kritik Kalınlıkların Hesaplanması

Denklem (3.143) ya da (3.144)'da Marshak sınır şartları kullanılarak sistemin kritik kalınlıkları hesaplanabilmektedir. Legendre polinomlarının parite özelliği, diklik ilişkileri ve denklem (3.93) ile verilen açısız akı ifadesi Legendre polinomları ile seriye açılarak kullanılabilir.

Denklem (3.93) ile verilen açısız akı ifadesi Legendre polinomları ile seriye açıldığında, içerisinde $\Phi_m(x)$ 'li skaler akı terimlerini de içermektedir. Denklem (3.140)'da α_k katsayılarının belirlenmesi, fiziksel sistemin sınır koşulları ve parite ilişkisi $G_n(v_k, t) = (-1)^n G_n(v, t)$ kullanılarak mümkün olmaktadır. Denklem (3.140) ile verilen skaler akı ifadesi, denklem (3.93) ile verilen açısız akı ifadesinde yazılarak ve denklem (3.144) ile verilen Marshak sınır şartı ile Legendre polinomları parite özelliği de kullanılarak,

$$\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)(-1)^{m+k} \int_0^1 \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{N+1}{2}} G_m(v_k, t) \alpha_k \left[\exp\left(\frac{\sigma_T a}{v_k}\right) + (-1)^m \exp\left(-\frac{\sigma_T a}{v_k}\right) \right] \right\} P_m(\mu) P_k(\mu) d\mu = 0, \quad (3.145)$$

elde edilmektedir. Denklem (3.145)'deki integral terimi $I_{m,k}$ ile gösterilerek integralin değeri,

$$I_{m,k} = \int_0^1 P_m(\mu) P_k(\mu) d\mu = \begin{cases} 1/(2k+1) & m = k \\ 0 & m \neq k, \quad m, k \text{ her ikisi çift veya tek ise} \\ f_{m,k} & m \text{ çift, } k \text{ tek ise} \\ f_{m,k} & m \text{ tek, } k \text{ çift ise} \end{cases}, \quad (3.146)$$

$$f_{m,k} = \frac{(-1)^{(m+k+1)/2} m! k!}{2^{m+k-1} (m-k)(m+k+1) \left[\left(\frac{1}{2} m \right) ! \right]^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} (n-1) \right] ! \right\}^2}, \quad (3.147)$$

şeklinde ifade edilmekte [79] ve denklem (3.145),

$$\sum_{m=0}^N (2m+1) \sum_{k=1}^{\frac{N+1}{2}} (-1)^{m+k} G_m(v_k, t) \alpha_k \left[\exp\left(\frac{\sigma_T a}{v_k}\right) + (-1)^m \exp\left(-\frac{\sigma_T a}{v_k}\right) \right] I_{m,k} = 0, \quad (3.148)$$

olarak yazılabilmektedir. Denklem (3.148) ile verilen ifadeye kritiklik denklemi adı verilmektedir. Denklem (3.148)'de $N = 1$ yapılarak $P_1(\mu)$ yaklaşımı ile,

$$-G_0 \alpha_1 \left(\exp\left(\frac{\sigma_T a}{v_1}\right) + \exp\left(-\frac{\sigma_T a}{v_1}\right) \right) I_{0,1} + 3G_1 \alpha_1 \left(\exp\left(\frac{\sigma_T a}{v_1}\right) - \exp\left(-\frac{\sigma_T a}{v_1}\right) \right) I_{1,1} \quad (3.149)$$

elde edilebilir. Denklem (3.149)'da,

$$\left\{ \exp\left(\frac{\sigma_T a}{v_1}\right) - \exp\left(\frac{-\sigma_T a}{v_1}\right) \right\} = 2 \sinh\left(\frac{\sigma_T a}{v_1}\right), \quad (3.150)$$

ve

$$\left\{ \exp\left(\frac{\sigma_T a}{v_1}\right) + \exp\left(\frac{-\sigma_T a}{v_1}\right) \right\} = 2 \cosh\left(\frac{\sigma_T a}{v_1}\right), \quad (3.151)$$

dönüşümleri kullanılarak,

$$G_0 2 \cosh\left(\frac{\sigma_T a}{v_1}\right) \frac{1}{2} = 3 G_1 2 \sinh\left(\frac{-\sigma_T a}{v_1}\right) \frac{1}{3}, \quad (3.152)$$

yazılabilir ve taraf tarafa bölünürlerse,

$$-\frac{1}{2v_1(1-c)} = \tanh\left(\frac{\sigma_T a}{v_1}\right), \quad (3.153)$$

elde edilir. Denklem (3.129)'da $P_1(\mu)$ yaklaşımı ile verilen v_1 özdeğeri, denklem (3.153)'de kullanılarak sistemin kritik yarı kalınlığı a ,

$$a = \frac{1}{\sigma_T \sqrt{(1-c)(3-ct)}} \tanh^{-1} \left(-\sqrt{\frac{(3-ct)}{4(1-c)}} \right), \quad (3.154)$$

olarak bulunmaktadır. Daha yüksek mertebeden yaklaşımlar için elde edilecek akı momentleri ile denklem çözüm önerilerinden elde edilecek denklem (3.135)'e benzer şekilde oluşturulacak kare matris için kritiklik şartı,

$$[\mathbf{M}_m^k(a)] \boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{0}, \quad m, k = 1, 2, \dots, \frac{N+1}{2}, \quad (3.155)$$

olarak yazılmaktadır. Denklem (3.151)'de ifade edilen $\boldsymbol{\alpha}_k$, vektörü $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{(N+1)/2}]^T$ elemanlarını barındıran sütun vektörüdür. $[\mathbf{M}_m^k(a)]$, $(N+1)/2 \times (N+1)/2$ elemanlı bir kare matris olup katsayılar matrisidir ve $\mathbf{0}$ ise sıfır

matrisidir. Denklem (3.148) için basit olmayan farklı çözümleri katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek bulunmaktadır.

3.14. Anlı-Güngör (AG) Faz Fonksiyonu ile U_N Yaklaşımı ve Kritiklik Problemi

Nötron açısal akısı $\psi(x, \mu)$ 'yi ikinci tip Chebyshev polinomları ile seriye açma, U_N yaklaşımı olarak adlandırılmaktadır. Bu yaklaşıma göre çözüm için önerilen nötron açısal akısı $\psi(x, \mu)$ 'nin seriye açılımı U_N yaklaşımı ile yapılarak konuma bağlı moment denklemleri $\Phi_n(x)$ elde edilmektedir.

Denklem (3.27)'de verilen bir boyutlu nötron transport denkleminde $\psi(x, \mu)$ nötron açısal akısı yerine daha önceki çalışmalarda uygulanmış ve etkili sonuçların alındığı,

$$\psi(x, \mu) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \mu^2} \sum_{n=0}^N \Phi_n(x) U_n(\mu), \quad |x| \leq a \quad |\mu| \leq 1, \quad (3.156)$$

şeklinde Chebyshev polinomları cinsinden seriye açılmış hali kullanılmaktadır [34,35].

Denklem (3.156) ile verilen açısal akı ifadesi denklem (3.100)'deki transport denkleminde yazılarak seriye açılmaktadır. Seri açılımında, denklem (3.85) ile verilen ikinci tip Chebyshev polinomlarının tekrarlama bağıntısı ve denklem (3.86) ile verilen Chebyshev polinomlarının diklik ilişkileri de kullanılarak yöntem gereği, U_0 yaklaşımı için, elde edilen denklemin her iki tarafı $U_0(\mu)$ ile çarpılarak $[-1,1]$ aralığında integre edilerek moment denklemleri elde edilmekte, U_1 yaklaşımı için, elde edilen denklemin her iki tarafı $U_1(\mu)$ ile çarpılarak $[-1,1]$ aralığında integre edilerek moment denklemleri elde edilmekte ve daha yüksek mertebeden yaklaşımlar için benzer yöntemle elde edilecek moment denklemleri,

$$\frac{1}{2} \frac{d\Phi_1(x)}{dx} + \nu \Phi_0(x) = \nu c \Phi_0(x), \quad (3.157)$$

$$\frac{d\Phi_2(x)}{dx} + \frac{d\Phi_0(x)}{dx} + 2\nu\Phi_1(x) = \frac{2}{3}\nu ct\Phi_1(x), \quad (3.158)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_3(x)}{dx} + \frac{d\Phi_1(x)}{dx} + 2\nu\Phi_2(x) \\ = -2\nu c \left\{ \frac{1}{15}(t^2 - 5)\Phi_0(x) - \frac{t^2}{5}\Phi_2(x) \right\}, \end{aligned} \quad (3.159)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_4(x)}{dx} + \frac{d\Phi_2(x)}{dx} + 2\nu\Phi_3(x) \\ = -2\nu c \left\{ \frac{1}{105}(6t^3 - 14t)\Phi_1(x) - \frac{t^3}{7}\Phi_3(x) \right\}, \end{aligned} \quad (3.160)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_5(x)}{dx} + \frac{d\Phi_3(x)}{dx} + 2\nu\Phi_4(x) \\ = -2\nu c \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{35} \left(\frac{2}{9}t^4 + t^2 - 7 \right) \Phi_0(x) \\ + \frac{1}{35} \left(\frac{5}{3}t^4 - 3t^2 \right) \Phi_2(x) \\ - \frac{t^4}{9} \Phi_4(x) \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (3.161)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_6(x)}{dx} + \frac{d\Phi_4(x)}{dx} + 2\nu\Phi_5(x) \\ = -2\nu c \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{7} \left(\frac{5t^5}{99} + \frac{8}{45}t^3 - \frac{3t}{5} \right) \Phi_1(x) \\ + \frac{4}{9} \left(\frac{t^5}{11} - \frac{t^3}{7} \right) \Phi_3(x) \\ - \frac{1}{11} \frac{t^5}{9} \Phi_4(x) \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (3.162)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\Phi_7(x)}{dx} + \frac{d\Phi_5(x)}{dx} + 2\nu\Phi_6(x) \\
&= -2\nu c \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{5t^6}{3003} + \frac{2t^4}{693} + \frac{2t^2}{105} - \frac{1}{7} \right) \Phi_0(x) \\ & + \left(\frac{t^6}{143} + \frac{5t^4}{231} - \frac{2t^2}{35} \right) \Phi_2(x) \\ & + \left(\frac{5t^6}{143} - \frac{5t^4}{99} \right) \Phi_4(x) \\ & - \frac{t^6}{13} \Phi_6(x) \end{aligned} \right\}, \tag{3.163}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\Phi_8(x)}{dx} + \frac{d\Phi_6(x)}{dx} + 2\nu\Phi_7(x) \\
&= -2\nu c \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{14t^7}{6435} + \frac{10t^5}{3003} + \frac{4t^3}{231} - \frac{4t}{63} \right) \Phi_1(x) \\ & + \left(\frac{14t^7}{2145} + \frac{8t^5}{429} - \frac{10t^3}{231} \right) \Phi_3(x) \\ & + \left(\frac{2t^7}{65} - \frac{6t^5}{143} \right) \Phi_5(x) \\ & - \frac{t^7}{15} \Phi_7(x) \end{aligned} \right\}, \tag{3.164}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\Phi_9(x)}{dx} + \frac{d\Phi_7(x)}{dx} + 2\nu\Phi_8(x) \\
&= -2\nu c \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{14t^8}{21879} + \frac{t^6}{1287} + \frac{2t^4}{1001} - \frac{10t^2}{693} - \frac{1}{9} \right) \Phi_0(x) \\ & + \left(\frac{28t^8}{12155} + \frac{7t^6}{2145} + \frac{15t^4}{1001} - \frac{10t^2}{231} \right) \Phi_2(x) \\ & + \left(\frac{4t^8}{663} + \frac{7t^6}{429} - \frac{5t^4}{143} \right) \Phi_4(x) \\ & + \left(\frac{7t^8}{255} - \frac{7t^6}{195} \right) \Phi_6(x) \\ & - \frac{t^8}{17} \Phi_8(x) \end{aligned} \right\} \tag{3.165}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\Phi_{10}(x)}{dx} + \frac{d\Phi_8(x)}{dx} + 2\nu\Phi_9(x) \\
& = -2\nu c \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{42t^9}{46189} + \frac{112t^7}{109395} + \frac{t^5}{429} + \frac{40t^3}{3003} - \frac{5t}{99} \right) \Phi_1(x) \\ & + \left(\frac{48t^9}{20995} + \frac{112t^7}{36465} + \frac{28t^5}{2145} - \frac{100t^3}{3003} \right) \Phi_3(x) \\ & + \left(\frac{9t^9}{1615} + \frac{16t^7}{1105} - \frac{21t^5}{715} \right) \Phi_5(x) \\ & + \left(\frac{8t^9}{323} - \frac{8t^7}{255} \right) \Phi_7(x) \\ & - \frac{t^9}{19} \Phi_9(x) \end{aligned} \right\}, \quad (3.166)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\Phi_{11}(x)}{dx} + \frac{d\Phi_9(x)}{dx} + 2\nu\Phi_{10}(x) \\
& = -2\nu c \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{14t^{10}}{46189} + \frac{14t^8}{46189} + \frac{4t^6}{7293} + \frac{2t^4}{1287} + \frac{5t^2}{429} - \frac{1}{11} \right) \Phi_0(x) \\ & + \left(\frac{30t^{10}}{29393} + \frac{252t^8}{230945} + \frac{28t^6}{12155} + \frac{5t^4}{429} - \frac{5t^2}{143} \right) \Phi_2(x) \\ & + \left(\frac{5t^{10}}{2261} + \frac{12t^8}{4199} + \frac{28t^6}{2431} - \frac{35t^4}{1287} \right) \Phi_4(x) \\ & + \left(\frac{5t^{10}}{969} + \frac{21t^8}{1615} - \frac{28t^6}{1105} \right) \Phi_6(x) \\ & + \left(\frac{3t^{10}}{133} - \frac{9t^8}{323} \right) \Phi_8(x) \\ & - \frac{t^{10}}{21} \Phi_{10}(x) \end{aligned} \right\}, \quad (3.167)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\Phi_{12}(x)}{dx} + \frac{d\Phi_{10}(x)}{dx} + 2\nu\Phi_{11}(x) \\
& = -2\nu c \left\{ \begin{aligned}
& \left(\frac{44t^{11}}{96577} + \frac{20t^9}{46189} + \frac{168t^7}{230945} + \frac{40t^5}{21879} + \frac{14t^3}{1287} - \frac{6t}{143} \right) \Phi_1(x) \\
& + \left(\frac{55t^{11}}{52003} + \frac{32t^9}{29393} + \frac{504t^7}{230945} + \frac{224t^5}{21879} - \frac{35t^3}{1287} \right) \Phi_3(x) \\
& + \left(\frac{110t^{11}}{52003} + \frac{6t^9}{2261} + \frac{216t^7}{20995} - \frac{56t^5}{2431} \right) \Phi_5(x) \\
& + \left(\frac{44t^{11}}{9177} + \frac{80t^9}{6783} - \frac{36t^7}{1615} \right) \Phi_7(x) \\
& + \left(\frac{10t^{11}}{483} - \frac{10t^9}{399} \right) \Phi_9(x) \\
& - \frac{t^{11}}{23} \Phi_{11}(x)
\end{aligned} \right\}, \quad (3.168)
\end{aligned}$$

olarak yazılmaktadır.

Denklem (3.113) ile P_N yaklaşımında herhangi bir n değeri için moment denklemlerinin türetilbileceği bir genel terim yazılabildiği halde, U_N yaklaşımı için bir genel terim ifadesi yazılamamaktadır. U_N yaklaşımı için verilen akı moment denklemlerinin çözümü için, denklem (3.114) ile verilen çözüm önerisine benzer şekilde bir çözüm önerisi,

$$\Phi_n(x) = A_n(\nu, t) \exp(x), \quad (3.169)$$

olacak şekilde, akı moment denklemlerinde yazılarak özfonksiyon denklemleri elde edilebilmektedir [51].

Denklem (3.169) ile verilen çözüm önerisi denklem (3.157) akı moment denkleminde yazılarak,

$$A_1(\nu, t) + 2\nu A_0(\nu, t) = 2\nu c A_0(\nu, t), \quad (3.170)$$

elde edilmektedir. Denklem (3.158)'deki akı moment denkleminde yazılarak,

$$A_2(v, t) + A_0(v, t) + 2vA_1(v, t) = \frac{2}{3}vctA_1(v, t), \quad (3.171)$$

şeklindeki özfonksiyon denklemleri elde edilmektedir. Yöntem gereği denklem (3.94)'te verilen $\Phi_{N+1}(x) = 0$ ya da $\frac{d\Phi_{N+1}(x)}{dx} = 0$ ifadesi, U_1 yaklaşımı için, $\Phi_2(x) = 0$ şeklindedir. Çözüm önerisi için $A_2(v, t) = 0$ olduğu da aşikardır.

Denklem (3.170) ve (3.171) düzenlenerek,

$$2v(1 - c)A_0(v, t) + A_1(v, t) = 0, \quad (3.172)$$

$$A_0(v, t) + 2v(1 - \frac{1}{3}ct)A_1(v, t) = 0, \quad (3.173)$$

elde edilmektedir. Denklem (3.172) ve (3.173) birlikte çözülerek özdeğerler bulunabilmektedir. Bunun için diğer yüksek mertebeden yaklaşımlarda kolaylık sağladığı için matris denklemlerinden faydalanılmıştır. Buna göre, denklem (3.172) ve (3.173)'ten katsayılar matrisi oluşturularak,

$$\begin{bmatrix} 2v(1 - c) & 1 \\ 1 & 2v(1 - \frac{1}{3}ct) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0(v, t) \\ A_1(v, t) \end{bmatrix} = 0, \quad (3.174)$$

elde edilmektedir ve 2×2 katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek özdeğerler,

$$v_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{(1 - c)(3 - ct)}}, \quad (3.175)$$

olarak yazılmaktadır. Denklem (3.172) ve denklem (3.173)'e benzer şekilde daha üst mertebeden öz fonksiyonlar,

$$\frac{2vc}{15}(t^2 - 5)A_0(v, t) + A_1(v, t) + 2v\left(1 - \frac{ct^2}{5}\right)A_2(v, t) + A_3(v, t) = 0, \quad (3.176)$$

$$\frac{2vc}{105}(6t^3 - 14t)A_1(v, t) + A_2(v, t) + 2v\left(1 - \frac{ct^3}{7}\right)A_3(v, t) + A_4(v, t) = 0, \quad (3.177)$$

$$\begin{aligned} \frac{2vc}{35}\left(\frac{2}{9}t^4 + t^2 - 7\right)A_0(v, t) + \frac{2vc}{35}\left(\frac{5}{3}t^4 - 3t^2\right)A_2(v, t) + A_3(v, t) \\ + 2v\left(1 - \frac{ct^4}{9}\right)A_4(v, t) + A_5(v, t) = 0, \end{aligned} \quad (3.178)$$

$$\begin{aligned} \frac{2vc}{7}\left(\frac{5}{99}t^5 + \frac{8}{45}t^3 - \frac{3}{5}t\right)A_1(v, t) + \frac{8vc}{9}\left(\frac{1}{11}t^5 - \frac{1}{7}t^3\right)A_3(v, t) + A_4(v, t) \\ + 2v\left(1 - \frac{ct^5}{11}\right)A_5(v, t) + A_6(v, t) = 0, \end{aligned} \quad (3.179)$$

$$\begin{aligned} \frac{2vc}{7}\left(\frac{5}{99}t^5 + \frac{8}{45}t^3 - \frac{3}{5}t\right)A_1(v, t) + \frac{8vc}{9}\left(\frac{1}{11}t^5 - \frac{1}{7}t^3\right)A_3(v, t) + A_4(v, t) \\ + 2v\left(1 - \frac{ct^5}{11}\right)A_5(v, t) + A_6(v, t) = 0, \end{aligned} \quad (3.180)$$

$$\begin{aligned} 2vc\left(\frac{5}{3003}t^6 + \frac{2}{693}t^4 + \frac{2}{105}t^2 - \frac{1}{7}\right)A_0(v, t) + 2vc\left(\frac{1}{143}t^6 + \frac{5}{231}t^4 - \frac{2}{35}t^2\right)A_2(v, t) \\ + 2vc\left(\frac{5}{143}t^6 - \frac{5}{99}t^4\right)A_4(v, t) + A_5(v, t) + 2v\left(1 - \frac{ct^6}{13}\right)A_6(v, t) \\ + A_7(v, t) = 0, \end{aligned} \quad (3.181)$$

$$\begin{aligned} 2vc\left(\frac{14}{6435}t^7 + \frac{10}{3003}t^5 + \frac{4}{231}t^3 - \frac{4}{63}t\right)A_1(v, t) \\ + 2vc\left(\frac{14}{2145}t^7 + \frac{8}{429}t^5 - \frac{10}{231}t^3\right)A_3(v, t) \\ + 2vc\left(\frac{2}{65}t^7 - \frac{6}{143}t^5\right)A_5(v, t) + A_6(v, t) + 2v\left(1 - \frac{ct^7}{15}\right)A_7(v, t) \\ + A_8(v, t) = 0, \end{aligned} \quad (3.182)$$

$$\begin{aligned}
& 2\nu c \left(\frac{14}{21879} t^8 + \frac{1}{1287} t^6 + \frac{2}{1001} t^4 + \frac{10}{693} t^2 - \frac{1}{9} \right) A_0(\nu, t) \\
& + 2\nu c \left(\frac{28}{12155} t^8 + \frac{7}{2145} t^6 + \frac{15}{1001} t^4 - \frac{10}{231} t^2 \right) A_2(\nu, t) \\
& + 2\nu c \left(\frac{4}{663} t^8 + \frac{7}{429} t^6 - \frac{5}{143} t^4 \right) A_4(\nu, t) \\
& + 2\nu c \left(\frac{7}{255} t^8 - \frac{7}{195} t^6 \right) A_6(\nu, t) + A_7(\nu, t) + 2\nu \left(1 - \frac{ct^8}{17} \right) A_8(\nu, t) \\
& + A_9(\nu, t) = 0, \tag{3.183}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\nu c \left(\frac{42}{46189} t^9 + \frac{112}{109395} t^7 + \frac{1}{429} t^5 + \frac{40}{3003} t^3 - \frac{5}{99} t \right) A_1(\nu, t) \\
& + 2\nu c \left(\frac{48}{20995} t^9 + \frac{112}{36465} t^7 + \frac{28}{2145} t^5 - \frac{100}{3003} t^3 \right) A_3(\nu, t) \\
& + 2\nu c \left(\frac{9}{1615} t^9 + \frac{16}{1105} t^7 - \frac{21}{715} t^5 \right) A_5(\nu, t) \\
& + 2\nu c \left(\frac{8}{323} t^9 - \frac{8}{255} t^7 \right) A_7(\nu, t) + A_8(\nu, t) + 2\nu \left(1 - \frac{ct^9}{19} \right) A_9(\nu, t) \\
& + A_{10}(\nu, t) = 0, \tag{3.184}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\nu c \left(\frac{14}{46189} t^{10} + \frac{14}{46189} t^8 + \frac{4}{7293} t^6 + \frac{2}{1287} t^4 + \frac{5}{429} t^2 - \frac{1}{11} \right) A_0(\nu, t) \\
& + 2\nu c \left(\frac{30}{29393} t^{10} + \frac{252}{230945} t^8 + \frac{28}{12155} t^6 + \frac{5}{429} t^4 - \frac{5}{143} t^2 \right) A_2(\nu, t) \\
& + 2\nu c \left(\frac{5}{2261} t^{10} + \frac{12}{4199} t^8 + \frac{28}{2431} t^6 - \frac{35}{1287} t^4 \right) A_4(\nu, t) \\
& + 2\nu c \left(\frac{5}{969} t^{10} + \frac{21}{1615} t^8 - \frac{28}{1105} t^6 \right) A_6(\nu, t) + 2\nu c \left(\frac{3}{133} t^{10} - \frac{9}{323} t^8 \right) A_8(\nu, t) \\
& + A_9(\nu, t) + 2\nu \left(1 - \frac{ct^{10}}{21} \right) A_{10}(\nu, t) + A_{11}(\nu, t) \\
& = 0, \tag{3.185}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\nu c \left(\frac{44}{96577} t^{11} + \frac{20}{46189} t^9 + \frac{168}{230945} t^7 + \frac{40}{21879} t^5 + \frac{14}{1287} t^3 - \frac{6}{143} t \right) A_1(\nu, t) \\
& + 2\nu c \left(\frac{55}{52003} t^{11} + \frac{32}{29393} t^9 + \frac{28}{12155} t^6 + \frac{504}{230945} t^7 + \frac{224}{21879} t^5 \right. \\
& \quad \left. - \frac{35}{1287} t^3 \right) A_3(\nu, t) \\
& + 2\nu c \left(\frac{110}{52003} t^{11} + \frac{6}{2261} t^9 + \frac{216}{20995} t^7 - \frac{56}{2431} t^5 \right) A_5(\nu, t) \\
& + 2\nu c \left(\frac{44}{9177} t^{11} + \frac{80}{6783} t^9 \right. \\
& \quad \left. - \frac{36}{1615} t^7 \right) A_7(\nu, t) + 2\nu c \left(\frac{10}{483} t^{11} - \frac{10}{399} t^9 \right) A_9(\nu, t) + A_{10}(\nu, t) \\
& + 2\nu \left(1 - \frac{ct^{11}}{23} \right) A_{11}(\nu, t) + A_{12}(\nu, t) \\
& = 0, \tag{3.186}
\end{aligned}$$

Bulunan bu özdeğerler çözüm için önerilen denklem (3.169)'da yazılarak, her özdeğere karşılık bir özvektör bulunabilmektedir. Denklem (3.175)'e göre $\nu_2 = -\nu_1$ 'dir ve denklem (3.169)'da $x \rightarrow \frac{\sigma_T x}{\nu}$ değişken dönüşümü yapılarak,

$$\Phi_1(x) = \beta_1 A_n(\nu_1, t) \exp\left(\frac{\sigma_T x}{\nu_1}\right), \tag{3.187}$$

$$\Phi_2(x) = \beta_2 A_n(-\nu_1, t) \exp\left(-\frac{\sigma_T x}{\nu_1}\right), \tag{3.188}$$

şeklinde yazılmaktadır. Burada β_1 ve β_2 katsayıları sistemin fiziksel sınır koşullarından bulunabilir. Denklem (3.188) ve (3.189) ile verilen her bir özdeğere karşılık gelen doğrusal bağımsız çözümlerin toplamı da bir çözüm olarak yazılabileceğinden,

$$\Phi_n(x) = \beta_1 A_n(\nu_1, t) \exp\left(\frac{\sigma_T x}{\nu_1}\right) + \beta_2 A_n(-\nu_1, t) \exp\left(-\frac{\sigma_T x}{\nu_1}\right), \tag{3.189}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Polinomların parite ilişkisine benzer şekilde $A_n(-v_1, t) = (-1)^n A_n(v_1, t)$ parite ilişkisi kullanılarak denklem (3.189) yeniden düzenlenirse,

$$\Phi_n(x) = A_n(v_1, t) \left[\beta_1 \exp\left(\frac{\sigma_T x}{v_1}\right) + \beta_2 (-1)^n A_n(v_1, t) \exp\left(-\frac{\sigma_T x}{v_1}\right) \right], \quad (3.190)$$

elde edilmektedir. Daha yüksek mertebeden yaklaşımlar için, v_1, v_2, v_3, \dots bulunacağından, bu özdeğerlerin hepsine karşılık gelen çözümlerin toplamı genel çözüm olarak yazılabilmektedir. Buna göre genel çözüm,

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^{(N+1)/2} A_n(v_k, t) \beta_k \left[\exp\left(\frac{\sigma_T x}{v_k}\right) + (-1)^n \exp\left(-\frac{\sigma_T x}{v_k}\right) \right], \quad (3.191)$$

şeklinde yazılmaktadır.

3.14.1. Sınır ve Simetri Koşulları

U_N yaklaşımı ile akı moment denklemlerinin bulunması ve ardından özfonksiyon denklemleri ile özdeğerlerin bulunması sonrasında, artık U_N yaklaşımı için Marshak sınır koşulu,

$$\int_0^1 \psi(a, -\mu) U_k(-\mu) d\mu = 0, \quad k = 1, 3, 5, \dots, N \quad (3.192)$$

kullanarak kritik yarı kalınlıklar hesaplanabilmektedir. Bununla birlikte, ikinci tip Chebyshev polinomlarının parite özelliği “denklem (3.87)”, diklik ve tekrarlama ilişkileri kullanılmaktadır.

3.14.2. Kritik Kalınlıkların Hesaplanması

Denklem (3.192)’deki Marshak sınır şartını uygulayabilmek için denklem (3.156)’daki nötron açısal akısı,

$$\psi(a, -\mu) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \mu^2} \sum_{n=0}^N \Phi_n(a) U_n(-\mu), \quad (3.193)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Böylece denklem (3.193) denklem (3.192)'de yerine yazılırsa,

$$\int_0^1 \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \mu^2} \sum_{n=0}^N \Phi_n(a) U_n(-\mu) U_k(-\mu) d\mu = 0, \quad (3.194)$$

Şimdi denklem (3.194)'te denklem (3.191) ile verilen akı momentleri $x = a$ için yerine yazılırsa,

$$\int_0^1 \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \mu^2} \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^{(N+1)/2} \beta_k A_n(v_k, t) \left[\exp\left(\frac{\sigma_T a}{v_k}\right) + (-1)^n \exp\left(-\frac{\sigma_T a}{v_k}\right) \right] U_n(-\mu) U_k(-\mu) d\mu = 0, \quad (3.195)$$

elde edilir. İkinci tip Chebyshev polinomlarının parite özelliği, “denklem(3.82)”, kullanılarak denklem (3.195) yeniden,

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^N (-1)^{n+k} \left\{ \sum_{k=1}^{(N+1)/2} \beta_k A_n(v_k, t) \left[\exp\left(\frac{\sigma_T a}{v_k}\right) + (-1)^n \exp\left(-\frac{\sigma_T a}{v_k}\right) \right] \right\} I_{n,k} = 0, \quad (3.196)$$

olarak düzenlenmektedir. Burada $I_{n,k}$ integrali,

$$I_{n,k} = \int_0^1 U_n(\mu) U_k(\mu) \sqrt{1 - \mu^2} d\mu = \begin{cases} \pi/4 & n = k, \\ \frac{\sin[(n-k)\pi/2]}{2(n-k)} + \frac{\sin[(n+k)\pi/2]}{2(n+k+2)} & n \neq k, \end{cases} \quad (3.197)$$

ve

$$\int_0^1 U_n(-\mu)U_k(-\mu)\sqrt{1-\mu^2}d\mu = (-1)^{n+k}I_{n,k}. \quad (3.198)$$

şeklinde alınmaktadır. Denklem (3.196)'ya kritiklik denklemi adı verilmektedir ve bu denklem aynı zamanda matris formunda da yazılabilmektedir. Bu durumda,

$$[\mathbf{M}_m^k(a)]\boldsymbol{\beta}_k = \mathbf{0}, \quad m, k = 1, 2, \dots, \frac{N+1}{2}, \quad (3.199)$$

yazılabilir. Denklem (3.199)'da ifade edilen $\boldsymbol{\beta}_k$, vektörü $[\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{(N+1)/2}]^T$ elemanlarını barındıran sütun vektörüdür. $[\mathbf{M}_m^k(a)]$, $(N+1)/2 \times (N+1)/2$ elemanlı bir kare matris olup katsayılar matrisidir ve $\mathbf{0}$ isesifir matrisidir. Denklem (3.199) ile verilen kare matrisin determinantı alınarak kritik yarı kalınlıklar hesaplanabilmektedir.

Denklem (3.196)'da $N = 1$ için $U_1(\mu)$ yaklaşımı yapılırsa $n = 0, 1$ ve $k = 1$ alındığı zaman,

$$\begin{aligned} (-1)^{0+1} \left\{ \beta_1 A_0(v_1, t) \left[\exp\left(\frac{\sigma_T a}{v_1}\right) + (-1)^0 \exp\left(-\frac{\sigma_T a}{v_1}\right) \right] \right\} I_{0,1} \\ + (-1)^{1+1} \left\{ \beta_1 A_1(v_1, t) \left[\exp\left(\frac{\sigma_T a}{v_1}\right) + (-1)^1 \exp\left(-\frac{\sigma_T a}{v_1}\right) \right] \right\} I_{1,1} = 0, \end{aligned} \quad (3.200)$$

elde edilmektedir. Denklem (3.200)'de $I_{0,1} = \frac{2}{3}$ ve $I_{1,1} = \frac{\pi}{4}$ olarak, integral değerleri denklem (3.197)'deki gibi elde edilmektedir. Yine denklem (3.200)'de, denklem (3.150) ve denklem (3.151)'deki hiperbolik fonksiyon ifadeleri de kullanılıp denklem (3.200) düzenlenerek,

$$-\beta_1 A_0(v_1, t) 2 \cosh\left(\frac{\sigma_T a}{v_1}\right) \frac{2}{3} + \beta_1 A_1(v_1, t) 2 \sinh\left(\frac{\sigma_T a}{v_1}\right) \frac{\pi}{4} = 0, \quad (3.201)$$

elde edilebilmektedir. Denklem (3.172) özfonksiyon denklemi,

$$A_1(v, t) = -2v_1(1 - c)A_0(v, t), \quad (3.202)$$

şeklinde düzenlenebilir. Denklem (3.201)'deki ifade düzenlenerek,

$$\beta_1 A_0(v_1, t) 2 \cosh\left(\frac{\sigma_T a}{v_1}\right) \frac{2}{3} = \beta_1 A_1(v_1, t) 2 \sinh\left(\frac{\sigma_T a}{v_1}\right) \frac{\pi}{4}, \quad (3.203)$$

şeklindeki eşitlikte karşılıklı yazılır ve denklem (3.202), denklem (3.203)'de yerine yazılarak,

$$A_0(v_1, t) 2 \cosh\left(\frac{\sigma_T a}{v_1}\right) \frac{2}{3} = -2v_1(1 - c)A_0(v_1, t) 2 \sinh\left(\frac{\sigma_T a}{v_1}\right) \frac{\pi}{4}, \quad (3.204)$$

şeklinde düzenlenmektedir. Denklem (3.204) düzenlenerek,

$$\tanh\left(\frac{\sigma_T a}{v_1}\right) = \frac{-4}{3\pi v_1(1 - c)}, \quad (3.205)$$

elde edilmektedir. Denklem (3.205)'den kritik yarı kalınlık ifadesi olan a ,

$$a = \frac{v_1}{\sigma_T} \tanh^{-1}\left\{-\frac{4}{3\pi v_1(1 - c)}\right\}, \quad (3.206)$$

olarak elde edilmektedir. Denklem (3.175)'de verilmiş olan v_1 özdeğeri denklem (3.206)'da yerine yazılarak U_1 yaklaşımı olarak da bilinen birinci mertebeden yaklaşım ile elde edilecek kritik yarı kalınlık,

$$a = \frac{1}{2\sigma_T} \sqrt{\frac{3}{(1 - c)(3 - ct)}} \tanh^{-1}\left\{-\frac{8}{3\pi} \sqrt{\frac{(3 - ct)}{3(1 - c)}}\right\}, \quad (3.207)$$

şeklinde c ve t parametrelerine bağlı olarak elde edilmektedir. Daha yüksek mertebeden yaklaşımlardan da kritik yarı kalınlık için ifade türetmek mümkündür. Ancak mertebenin derecesi arttıkça matematiksel işlemler artmakta ve bu durum

denklemlerin el ile yürütülmesini zorlaştırmaktadır. Bu nedenle daha yüksek mertebeden yaklaşımlarda bir matematik programından (Matematica, Matlab, Maple, vb; bu çalışmadaki hesaplamalarda Maple programı tercih edilmiştir.) yardım alınması akılcıdır. Birinci ve daha yüksek mertebelerden bulunan kritik yarı kalınlık ifadeleri c ve t parametrelerine bağlı olduklarından, farklı c ve t parametrelerine bağlı olarak kritik yarı kalınlıkların değişimlerinin gösterildiği çizelgeler dördüncü bölümde verilmiştir. Bu çizelgelerden kritik yarı kalınlığın c ve t 'nin artan ve azalan değerlerinde nasıl değiştiğinin gözlenmesi mümkündür.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, bir boyutlu nötron transport denkleminde saçılma fonksiyonu olarak Anlı-Güngör (AG) faz fonksiyonu kullanarak kritik yarı kalınlık hesabı yapılmıştır. Transport denklemin çözümünde öncelikle Legendre polinomları yaklaşımı (P_N yöntemi) ve sonrasında ikinci tip Chebyshev polinomları yaklaşımı (U_N yöntemi) kullanılmış ve özellikle düşük mertebeden seri açılımların yapıldığı yaklaşımlarda Mark'tan daha iyi sonuçlar verdiği düşünülen Marshak sınır koşulları tercih edilmiştir[12]. Her iki yaklaşımdan elde edilen sonuçlar, ikincil nötron sayısı olan c ve her türlü saçılmayı temsil eden t parametresinin farklı değerleri için yirmi bir adet çizelgede gösterilmiştir. Hem Legendre hem de Chebyshev polinomları yaklaşımında $N = 1, 3, 5, 7$ ve 9 mertebelerine kadar hesaplamalar yapılmış ve ayrıca bu iki yaklaşıma ait sonuçlar (P_9 ve U_9 için) yeni bir çizelgede karşılaştırılmıştır. Denklem çözümlerinin sayısal hesaplamasında Maple programı kullanılmış ve makroskobik toplam tesir kesiti $\sigma_T = 1 \text{ cm}^{-1}$ olarak normalize edilmiştir.

Kritik kalınlık problemi için, daha önce Legendre polinomları ve AG faz fonksiyonunun kullanılmış olması bu problemin Legendre polinomları ile aynı aileden olan aynı tanım aralığına sahip diğer polinom gruplarıyla da yapılabileceği fikri oluşmuştur. Bu nedenle daha önce transport teorideki kritik kalınlık problemine belirli saçılma fonksiyonları birlikte uygulanmış ve başarılı sonuçların alındığı ikinci tip Chebyshev polinomlarının AG faz fonksiyonu ile birlikte kullanılarak kritik kalınlık probleminin incelenebileceği düşüncesinden yola çıkılmıştır. Bu yönüyle bu tez çalışmasının literatürde yer alabilecek özgün değere sahip bir çalışma olması planlanmıştır.

Öncelikle, saçılma fonksiyonu olarak AG faz fonksiyonu transport denkleminde yazılarak ve nötron açılma akısının terimleri Legendre polinomları ile seriye açılarak P_N yaklaşımı ile akı momentleri, sonrasında ise ikinci tip Chebyshev polinomları ile açılarak U_N yaklaşımı ile akı momentleri elde edilmiştir.

Akı momentleri için elde edilecek $N+1$ 'inci terim için skaler akı yöntem gereği $\Phi_{N+1}(x) = 0$ olarak kabul edilmekte ve akı momentlerinden elde edilecek özfonksiyon denklemi için de $N+1$ 'inci terim $G_{N+1}(v, t) = 0$ olarak kabul edilmiştir. Benzer özfonksiyon denklemleri U_N yaklaşımı için $A_{N+1}(v, t)$ ile gösterilmiştir. Böyle bir yaklaşım yöntemi kullanmak doğru bir yaklaşım olarak kabul edilmektedir. Akı moment denklemlerinin çözümü ile bu denklemleri biçimlendiren özdeğerler (v) elde edilmiştir. Kullanılan her yaklaşım mertebesi için elde edilecek özdeğerler reaktör kritik kalınlıklarının hesabında yer almaktadır. Bu çalışmanın esası olan AG faz fonksiyonu kullanarak U_N yaklaşımı ile elde edilen kritik yarı kalınlıkların, yine aynı şekilde AG faz fonksiyonu kullanarak daha önce P_N yaklaşımı ile yapılmış başka çalışmalar ile elde edilen kritik yarı kalınlıkların karşılaştırması da Çizelge 3.25 ve 3.26'de verilmiştir.

Reaktör kritikliğinin olduğu $k=1$ 'e yakın değerler için kritik kalınlıkların hesaplanması, ikincil nötron sayısı c 'nin çoğunlukla 1'e yakın değerlerinde olmak üzere 1,01 - 2,00 değerleri için hesaplanmıştır. Hesaplanan kritik yarı kalınlık değerleri Çizelge 3.4 - 3.17'de bu tez çalışması ile ilk defa hesaplanan değerlerdir. Çizelge 3.18 - 3.24'de ise karşılaştırma yapmak amacıyla önceki çalışmalarda denenmiş bir yöntem olan P_N yaklaşımı ile yeniden hesaplanmış sonuçlardır.

Çizelge 3.4 - 3.17'de c parametresi reaktör kritikliğinin oldukça yakın değerleri olan 1,01-2,00 aralığında artan değerler olarak alınmış ve t parametresi de -1 ile 1 aralığında her türlü saçılmayı temsil edecek şekilde seçilmiştir. Bu aralıkta $t = 0$ olduğu durum, saçılmanın her yöne aynı olasılıkla gerçekleştiği izotropik saçılmayı temsil etmektedir. Saçılma parametresi t 'nin artı değerleri, benzer çalışmalarla ulaşılmış bir sonuç olarak çoğunlukla ileri saçılmayı, t 'nin eksi değerleri ise aynı şekilde çoğunlukla geri saçılmayı temsil etmekte ve değiştirilen t değerleri ile öncelikle özdeğerlerin ve sonucunda da kritik yarı kalınlıkların değiştiği görülmektedir [62]. Bu çizelgelerde bahsedilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Çizelge 3.4. U_N yaklaşımı ile $c = 1,01$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	U_1	U_3	U_5	U_7	U_9
-1	6,354092420	7,299734919	7,272434355	7,274991859	7,273689576
-9/10	6,429986993	7,388949007	7,361342928	7,363997233	7,362677452
-4/5	6,508730609	7,481011334	7,453356295	7,456076499	7,454475231
-3/4	6,549227825	7,528190277	7,500585066	7,503330693	7,501945846
-2/3	6,618475332	7,608636371	7,581198450	7,583977964	7,582524193
-1/2	6,763989554	7,776915961	7,750007980	7,752827596	7,751016807
-2/5	6,856158472	7,883078692	7,856531117	7,859384922	7,857971451
-3/10	6,952295014	7,993537732	7,967320748	7,970196362	7,968332644
-1/4	7,001942458	8,050489856	8,024413477	8,027294963	8,025285316
-1/5	7,052695222	8,108653819	8,082694729	8,085603031	8,083871887
-1/10	7,157687185	8,228820937	8,203006927	8,205917571	8,204211384
0	7,267635700	8,354471758	8,328660610	8,331588183	8,329565687
1/10	7,382947717	8,486083486	8,460109349	8,463062196	8,461229461
1/5	7,504078864	8,624185367	8,597865312	8,600825498	8,598935385
1/4	7,566984189	8,695851834	8,669287500	8,672262370	8,667620338
3/10	7,631541231	8,769367378	8,742509535	8,745490072	8,740479451
2/5	7,765912724	8,922290931	8,894698204	8,897698952	8,895758297
1/2	7,907848440	9,083701841	9,055175250	9,058207761	9,053977277
2/3	8,163292062	9,373932393	9,343408568	9,346468544	9,340660000
3/4	8,300948364	9,530214725	9,498489480	9,501584398	9,499566581
4/5	8,387063060	9,627943648	9,595434881	9,598575815	9,596795126
9/10	8,567907563	9,833093521	9,798881811	9,802108243	9,799321434
1	8,761365875	10,05244269	10,01637315	10,01973489	10,01661532

Çizelge 3.5. U_N yaklaşımı ile $c = 1,02$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	U_1	U_3	U_5	U_7	U_9
-1	4,360992538	4,987728275	4,958632815	4,961410525	4,959984881
-9/10	4,411753714	5,048347318	5,019021792	5,021890756	5,020411401
-4/5	4,464387232	5,110579741	5,081280771	5,084210142	5,082694573
-3/4	4,491443053	5,142362994	5,113151183	5,116101401	5,114563495
-2/3	4,537685958	5,196408710	5,167424807	5,170403147	5,168820854
-1/2	4,634773851	5,308947961	5,280609301	5,283623947	5,281998408
-2/5	4,696209653	5,379646758	5,351731527	5,354761925	5,353080301
-3/10	4,760240664	5,453001806	5,425475015	5,428517813	5,426819270
-1/4	4,793288192	5,490750544	5,463390680	5,466439678	5,464712827
-1/5	4,827057551	5,529255686	5,502037550	5,505092605	5,503381835
-1/10	4,896871345	5,608669468	5,581641166	5,584705010	5,582931524
0	4,969916360	5,691525885	5,664537004	5,667610658	5,665814255
1/10	5,046453607	5,778133128	5,751009664	5,754090672	5,752231108
1/5	5,126774878	5,868829292	5,841380661	5,844472807	5,842608586
1/4	5,168455296	5,915825859	5,888139665	5,891233859	5,889278060
3/10	5,211207595	5,963987760	5,936012947	5,939110807	5,937114031
2/5	5,300120639	6,064023602	6,035316728	6,038427225	6,036384676
1/2	5,393931410	6,169401359	6,139754209	6,142876709	6,140849333
2/3	5,562485510	6,358355259	6,326678739	6,329838380	6,327644866
3/4	5,653169269	6,459829405	6,426923129	6,430110868	6,427821057
4/5	5,709846061	6,523188932	6,489477628	6,492695782	6,490329118
9/10	5,828737004	6,655953361	6,620486066	6,623787120	6,621399743
1	5,955721310	6,797553591	6,760157367	6,763597417	6,761126789

Çizelge 3.6. U_N yaklaşımı ile $c = 1,03$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	U_1	U_3	U_5	U_7	U_9
-1	3,478297251	3,961140400	3,930946601	3,933944529	3,932469457
-9/10	3,518005946	4,009310370	3,978940121	3,982022848	3,980499321
-4/5	3,559159991	4,058521917	4,028227311	4,031362810	4,029798454
-3/4	3,580307231	4,083574408	4,053390217	4,056543753	4,054963948
-2/3	3,616439331	4,126065212	4,096145883	4,099320924	4,097707964
-1/2	3,692249867	4,214167825	4,184961992	4,188160386	4,186499542
-2/5	3,740186969	4,269299329	4,240554524	4,243759884	4,242059925
-3/10	3,790120391	4,326355952	4,298034899	4,301245185	4,299515606
-1/4	3,815880443	4,355665946	4,327528373	4,330739127	4,328989533
-1/5	3,842195086	4,385530308	4,357550321	4,360762303	4,358993025
-1/10	3,896571333	4,447026618	4,419266133	4,422479231	4,420672277
0	3,953426912	4,511063119	4,483368921	4,486582593	4,484745857
1/10	4,012959636	4,577874840	4,550069519	4,553282710	4,551399222
1/5	4,075390390	4,647716872	4,619606415	4,622818860	4,620890542
1/4	4,107768738	4,683860401	4,655521144	4,658734696	4,656796762
3/10	4,140966734	4,720868245	4,692248177	4,695461601	4,693494019
2/5	4,209967222	4,797636481	4,768296807	4,771512259	4,769472684
1/2	4,282706616	4,878363159	4,848091535	4,851312682	4,849210217
2/3	4,413240572	5,022764417	4,990466674	4,993713286	4,991515064
3/4	4,483383713	5,100130048	5,066598509	5,069874512	5,067608368
4/5	4,527192326	5,148372358	5,114030743	5,117333528	5,115064113
9/10	4,619013492	5,249301134	5,213187177	5,216571905	5,214175486
1	4,716971055	5,356711653	5,318640897	5,322172941	5,319659804

Çizelge 3.7. U_N yaklaşımı ile $c = 1,05$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	U_1	U_3	U_5	U_7	U_9
-1	2,593920614	2,929741070	2,898238649	2,901652852	2,900081841
-9/10	2,622658311	2,965708588	2,934108613	2,937595534	2,935979429
-4/5	2,652420651	3,002114205	2,970653577	2,974180088	2,972526978
-3/4	2,667705725	3,020533978	2,989211693	2,992749272	2,991080136
-2/3	2,693808436	3,051622095	3,020607095	3,024154137	3,022461112
-1/2	2,748521114	3,115561035	3,085334754	3,088880263	3,087141003
-2/5	2,783079159	3,155275369	3,125552073	3,129089168	3,127322442
-3/10	2,819044756	3,196177629	3,166919088	3,170444701	3,168650163
-1/4	2,837586352	3,217119571	3,188064909	3,191583660	3,189773752
-1/5	2,856518244	3,238413386	3,209836756	3,213048505	3,211223648
-1/10	2,895610401	3,282132601	3,253516340	3,257012581	3,255155444
0	2,936443891	3,327491361	3,298982238	3,302461599	3,300570052
1/10	2,979154980	3,374653756	3,346074360	3,349536192	3,347607475
1/5	3,023895550	3,423793978	3,394949802	3,398393886	3,396423327
1/4	3,047079210	3,449163562	3,554137518	3,423545907	3,421552652
3/10	3,070835505	3,475098760	3,445784486	3,449211903	3,447196596
2/5	3,120165631	3,528770209	3,498774424	3,502187395	3,500120912
1/2	3,172101069	3,585029172	3,554137518	3,557540542	3,555419097
2/3	3,265126566	3,685218240	3,652353574	3,655761933	3,653535989
3/4	3,315021261	3,738665639	3,704588557	3,708018603	3,705731238
4/5	3,346150393	3,771912687	3,737035903	3,740488834	3,738158106
9/10	3,411313055	3,841270088	3,804633603	3,808167867	3,805747837
1	3,480706556	3,914788399	3,876189900	3,879881612	3,877339122

Çizelge 3.8. U_N yaklaşımı ile $c = 1,10$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	U_1	U_3	U_5	U_7	U_9
-1	1,707258982	1,891857574	1,858922034	1,863179726	1,861322571
-9/10	1,725209309	1,916091110	1,883198807	1,887505287	1,885614846
-4/5	1,743776697	1,940107580	1,907439805	1,911761106	1,909846577
-3/4	1,753303279	1,952088172	1,919588078	1,923907592	1,921983421
-2/3	1,769557781	1,972079157	1,939923016	1,944229895	1,942291929
-1/2	1,803569542	2,012421139	1,981105570	1,985363764	1,983402224
-2/5	1,825011386	2,037041940	2,006259850	2,010479481	2,008503766
-3/10	1,847292831	2,062109148	2,031828847	2,036004992	2,034014114
-1/4	1,858766279	2,074842870	2,044788610	2,048941439	2,046942427
-1/5	1,870471782	2,087727004	2,057875802	2,062004405	2,059996798
-1/10	1,894611991	2,113996505	2,084465189	2,088542656	2,086515781
0	1,919783843	2,141016656	2,111665294	2,115688659	2,113639612
1/10	1,946065295	2,168885577	2,139550017	2,143517180	2,141442421
1/5	1,973542954	2,197701613	2,168199876	2,172109779	2,170005602
1/4	1,987760104	2,212495894	2,182838821	2,186720275	2,184599694
3/10	2,002313373	2,227564553	2,197702441	2,201555809	2,199417578
2/5	2,032484594	2,258576933	2,228152282	2,231952021	2,229775173
1/2	2,064177983	2,290845555	2,259650800	2,263403219	2,261182309
2/3	2,120762904	2,347728735	2,314776027	2,318478454	2,316167390
3/4	2,151015077	2,377776162	2,343714195	2,347416338	2,345049807
4/5	2,169854717	2,396364524	2,361560164	2,365275076	2,362870044
9/10	2,209205447	2,434893114	2,398423091	2,402207647	2,399708650
1	2,250982204	2,475377583	2,436986084	2,440935737	2,438307041

Çizelge 3.9. U_N yaklaşımı ile $c = 1,20$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	U_1	U_3	U_5	U_7	U_9
-1	1,088419943	1,167468362	1,133475064	1,138429003	1,135966838
-9/10	1,099121621	1,183952160	1,150229780	1,155240084	1,152774916
-4/5	1,110173945	1,199754201	1,166344065	1,171369192	1,168907094
-3/4	1,115837867	1,207456309	1,174225030	1,1792446216	1,176787629
-2/3	1,125491102	1,220063569	1,187165059	1,192167237	1,189716539
-1/2	1,145646262	1,244678389	1,212547756	1,217478278	1,215047000
-2/5	1,158322020	1,259230770	1,227590434	1,232461569	1,230042211
-3/10	1,171469004	1,273734021	1,242570204	1,247371268	1,244962942
-1/4	1,178228805	1,280992840	1,250052190	1,254814360	1,252411037
-1/5	1,185118296	1,288269053	1,257536266	1,262257045	1,259858256
-1/10	1,199303984	1,302908662	1,272530675	1,277161447	1,274770035
0	1,214063570	1,317718628	1,287591261	1,292123168	1,289736277
1/10	1,229438408	1,332758535	1,302753506	1,307179055	1,304793180
1/5	1,245474249	1,348082489	1,318051484	1,322365128	1,319976048
1/4	1,253755699	1,355866567	1,325761696	1,330018085	1,327625584
3/10	1,262221871	1,363739826	1,333518037	1,337719804	1,335319589
2/5	1,279737819	1,379775903	1,349184260	1,353268526	1,350857455
1/2	1,298085285	1,396233126	1,365078499	1,369053007	1,366621225
2/3	1,330708821	1,424709085	1,392139045	1,395958391	1,393470516
3/4	1,348079648	1,439490195	1,405956849	1,409723521	1,407192046
4/5	1,358872322	1,448549134	1,414342636	1,418090761	1,415525519
9/10	1,381352827	1,467132723	1,431328665	1,435083899	1,432425477
1	1,405126471	1,486412761	1,448595719	1,452451951	1,449645099

Çizelge 3.10. U_N yaklaşımı ile $c = 1,30$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	U_1	U_3	U_5	U_7	U_9
-1	0,8207910946	0,8574945273	0,8232403639	0,8277964378	0,8247464742
-9/10	0,8285024117	0,8706546379	0,8368537887	0,8415432851	0,8385308578
-4/5	0,8364580891	0,8829862660	0,8495448260	0,8543006892	0,8513203735
-3/4	0,8405318084	0,8888965709	0,8556252341	0,8603969750	0,8574326816
-2/3	0,8474696537	0,8984313580	0,8654475911	0,8702270248	0,8672899797
-1/2	0,8619342856	0,9165653692	0,8842014869	0,8889441690	0,8860632992
-2/5	0,8710165708	0,9270030921	0,8950344615	0,8997283858	0,8968816707
-3/10	0,8804244604	0,9372117614	0,9056366213	0,9102636344	0,9074509237
-1/4	0,8852569345	0,9422528372	0,9108668181	0,9154537306	0,9126578265
-1/5	0,8901787584	0,9472626239	0,9160565488	0,9205990110	0,9178196895
-1/10	0,9003022224	0,9572177656	0,9263313848	0,9307722830	0,9280251002
0	0,9108198175	0,9671311890	0,9364900847	0,9408135581	0,9380964497
1/10	0,9217589980	0,9770496078	0,9465555258	0,9507475091	0,9480574605
1/5	0,9331500449	0,9870131434	0,9565456683	0,9605945033	0,9579274533
1/4	0,9390253482	0,9920227401	0,9615168673	0,9654906446	0,9628332097
3/10	0,9450264560	0,9970560447	0,9664738863	0,9703708150	0,9677215232
2/5	0,9574254086	1,007207571	0,9763485842	0,9800881363	0,9774499568
1/2	0,9703883059	1,017493225	0,9861722134	0,9897525567	0,9871168135
2/3	0,9933745683	1,034998548	1,002413457	1,005735847	1,003074882
3/4	1,005580640	1,043953156	1,010450570	1,013653911	1,010958219
4/5	1,013152641	1,049402034	1,015235879	1,018373354	1,015645685
9/10	1,028895505	1,060501881	1,024696473	1,027720896	1,024891396
1	1,045500654	1,071940685	1,033960477	1,036910189	1,033895274

Çizelge 3.11. U_N yaklaşımı ile $c = 1,40$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	U_1	U_3	U_5	U_7	U_9
-1	0,6653544105	0,6802848317	0,6463762579	0,6499632690	0,6463360127
-9/10	0,6713946295	0,6914293486	0,6581027624	0,6619348527	0,6583947810
-4/5	0,6776214034	0,7017132796	0,6687677090	0,6727380537	0,6692599514
-3/4	0,6808079179	0,7065835725	0,6737924673	0,6778056834	0,6743549244
-2/3	0,6862317865	0,7143565745	0,6818010093	0,6858579525	0,6824505587
-1/2	0,6975277008	0,7288425231	0,6967500479	0,7008187242	0,6974955134
-2/5	0,7046118346	0,7369998737	0,7051992897	0,7092367667	0,7059642066
-3/10	0,7119429445	0,7448509247	0,7133472538	0,7173278562	0,7141065243
-1/4	0,7157058718	0,7486821249	0,7173243448	0,7212671725	0,7180716508
-1/5	0,7195364215	0,7524602265	0,7212435478	0,7251425045	0,7219728618
-1/10	0,7274090715	0,7598833403	0,7289239603	0,7327174364	0,7295994033
0	0,7355792896	0,7671678779	0,7364139032	0,7400795373	0,7370120972
1/10	0,7440672605	0,7743542914	0,7437306820	0,7472482374	0,7442291019
1/5	0,7528951964	0,7814765881	0,7508848579	0,7542366974	0,7512620222
1/4	0,7574442125	0,7850227451	0,7544025837	0,7576658158	0,7547113671
3/10	0,7620876086	0,7885631088	0,7578808287	0,7610520629	0,7581161537
2/5	0,7716716287	0,7956375310	0,7647167195	0,7676949475	0,7647897627
1/2	0,7816773907	0,8027202735	0,7713836427	0,7741582724	0,7712724381
2/3	0,7993838596	0,8145966293	0,7820683722	0,7844812827	0,7815866766
3/4	0,8087672578	0,8205970546	0,7871730002	0,7893926340	0,7864615762
4/5	0,8145815112	0,8242282893	0,7901450049	0,7922433028	0,7892739947
9/10	0,8266532493	0,8315914394	0,7958502460	0,7976890259	0,7945868803
1	0,8393616041	0,8391590273	0,8011779748	0,8027242235	0,7993638045

Çizelge 3.12. U_N yaklaşımı ile $c = 1,50$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	U_1	U_3	U_5	U_7	U_9
-1	0,5620505880	0,5644904334	0,5313589449	0,5338055704	0,5296373353
-9/10	0,5670158735	0,5742138339	0,5417446764	0,5445525598	0,5405243933
-4/5	0,5721313759	0,5830932902	0,5510097592	0,5540275345	0,5500889388
-3/4	0,5747479640	0,5872626142	0,5553164150	0,5584029516	0,5545008464
-2/3	0,5791998024	0,5938639767	0,5621049766	0,5652686900	0,5614215860
-1/2	0,5884634317	0,6059744693	0,5745395145	0,5777576410	0,5740120601
-2/5	0,5942675367	0,6126739818	0,5814384724	0,5846401014	0,5809547314
-3/10	0,6002694848	0,6190349138	0,5880077019	0,5911605860	0,5875365321
-1/4	0,6033483842	0,6221071998	0,5911850281	0,5943019342	0,5907090837
-1/5	0,6064813578	0,6251162960	0,5942975210	0,5973709152	0,5938096107
-1/10	0,6129163281	0,6309687694	0,6003431905	0,6033076764	0,5998101730
0	0,6195887862	0,6366355575	0,6061683875	0,6089963538	0,6055626689
1/10	0,6265144990	0,6421532284	0,6117875681	0,6144537816	0,6110822365
1/5	0,6337107805	0,6475524119	0,6172074805	0,6196893640	0,6163764353
1/4	0,6374162694	0,6502157154	0,6198429240	0,6222071079	0,6189390968
3/10	0,6411967015	0,6528586135	0,6224279727	0,6246608214	0,6214445884
2/5	0,6489933258	0,6580932651	0,6274421725	0,6294963208	0,6262779142
1/2	0,6571239976	0,6632752139	0,6322360808	0,6340480330	0,6308572649
2/3	0,6714892839	0,6718460754	0,6396720998	0,6410288089	0,6378286915
3/4	0,6790899698	0,6761294645	0,6430880928	0,6441831186	0,6409342478
4/5	0,6837953414	0,6787101257	0,6450255167	0,6459479071	0,6426471776
9/10	0,6935542685	0,6839266184	0,6486134827	0,6491420003	0,6456599233
1	0,7038123128	0,6892858576	0,6517631881	0,6518060351	0,6479713944

Çizelge 3.13. U_N yaklaşımı ile $c = 1,60$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	U_1	U_3	U_5	U_7	U_9
-1	0,4877669090	0,4825907574	0,4504931620	0,4518384865	0,4471970284
-9/10	0,4919807128	0,4912311911	0,4598392830	0,4616500927	0,4571991374
-4/5	0,4963198300	0,4990648722	0,4680524992	0,4701354202	0,4657972436
-3/4	0,4985384401	0,5027203123	0,4718288710	0,4740022925	0,4697071753
-2/3	0,5023118228	0,5084733388	0,4777276322	0,4800054016	0,4757722997
-1/2	0,5101582314	0,5188985540	0,4883622802	0,4907268974	0,4866026930
-2/5	0,5150705917	0,5245828215	0,4941697331	0,4965280212	0,4924672894
-3/10	0,5201472952	0,5299182880	0,4996395097	0,5019539989	0,4979581782
-1/4	0,5227503264	0,5324724840	0,5022641818	0,5045434292	0,5005808944
-1/5	0,5253982100	0,5349591995	0,5048220328	0,5070574264	0,5031287582
-1/10	0,5308340797	0,5397521369	0,5097521240	0,5118748754	0,5080154088
0	0,5364666256	0,5443368967	0,5144524233	0,5164311068	0,5126417951
1/10	0,5423086694	0,5487472130	0,5189357636	0,5207415382	0,5170214216
1/5	0,5483742719	0,5530114577	0,5232067867	0,5248134737	0,5211589394
1/4	0,5514956788	0,5550963983	0,5252621451	0,5267601552	0,5231360144
3/10	0,5546788919	0,5571534502	0,5272629334	0,5286463868	0,5250503665
2/5	0,5612395790	0,5611935194	0,5310948794	0,5322314477	0,5286822979
1/2	0,5680751895	0,5651499844	0,5346864398	0,5355503979	0,5320299895
2/3	0,5801367118	0,5716099234	0,5400701134	0,5404043462	0,5368619200
3/4	0,5865102608	0,5748063066	0,5424371592	0,5424551489	0,5388457472
4/5	0,5904530565	0,5767247829	0,5437385069	0,5435432021	0,5398649950
9/10	0,5986232751	0,5805940309	0,5460418389	0,5453480316	0,5414348095
1	0,6072008460	0,5845728648	0,5478968959	0,5465732731	0,5422143467

Çizelge 3.14. U_N yaklaşımı ile $c = 1,70$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	U_1	U_3	U_5	U_7	U_9
-1	0,4314924031	0,4215023822	0,3905666320	0,3909361616	0,3859059859
-9/10	0,4351507677	0,4292795171	0,3990667633	0,3999876248	0,3951924153
-4/5	0,4389163582	0,4362945606	0,4064488831	0,4076919810	0,4030277145
-3/4	0,4408411023	0,4395528887	0,4098132576	0,4111638913	0,4065468785
-2/3	0,4441137122	0,4446573361	0,4150290009	0,4165046453	0,4119527986
-1/2	0,4509148705	0,4538175069	0,4243070807	0,4258926119	0,4214493813
-2/5	0,4551700996	0,4587528893	0,4293049623	0,4308906114	0,4265094349
-3/10	0,4595654487	0,4633406299	0,4339677541	0,4355121863	0,4311947071
-1/4	0,4618182329	0,4655200544	0,4361897739	0,4376990250	0,4334144555
-1/5	0,4641092115	0,4676307712	0,4383454544	0,4398101709	0,4355592953
-1/10	0,4688104050	0,4716664078	0,4424723468	0,4438210114	0,4396396534
0	0,4736788586	0,4754844814	0,4463703061	0,4475689885	0,4434589385
1/10	0,4787253076	0,4791164462	0,4500511435	0,4510686732	0,4470295607
1/5	0,4839615112	0,4825889405	0,4535182747	0,4543261347	0,4503544583
1/4	0,4866547569	0,4842725827	0,4551707597	0,4558636896	0,4519231640
3/10	0,4894003807	0,4859245739	0,4567678467	0,4573392285	0,4534273222
2/5	0,4950561336	0,4891429641	0,4597893792	0,4600971744	0,4562317934
1/2	0,5009444698	0,4922621729	0,4625659309	0,4625795060	0,4587395038
2/3	0,5113233313	0,4972924042	0,4665813966	0,4660117249	0,4621313516
3/4	0,5168018657	0,4997580971	0,4682614886	0,4673363077	0,4633695400
4/5	0,5201889289	0,5012330122	0,4691507935	0,4679832464	0,4639309952
9/10	0,5272024890	0,5042026303	0,4706334870	0,4688939462	0,4645575512
1	0,5345582631	0,5072616756	0,4716790531	0,4692127075	0,4643528639

Çizelge 3.15. U_N yaklaşımı ile $c = 1,80$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	U_1	U_3	U_5	U_7	U_9
-1	0,3872429915	0,3741509080	0,3444214804	0,3439634502	0,3386309362
-9/10	0,3904740063	0,3812196327	0,3522130738	0,3523729875	0,3473124432
-4/5	0,3937985441	0,3875722018	0,3589167635	0,3594372545	0,3545210692
-3/4	0,3954973843	0,3905125008	0,3619499027	0,3625906673	0,3577240247
-2/3	0,3983851684	0,3951021659	0,3666226010	0,3674034068	0,3626022577
-1/2	0,4043836290	0,4032741570	0,3748403772	0,3757467206	0,3710488187
-2/5	0,4081345934	0,4076337751	0,3792149672	0,3801252814	0,3754850252
-3/10	0,4120073996	0,4116528574	0,3832625109	0,3841327848	0,3795519545
-1/4	0,4139916954	0,4135494295	0,3851796607	0,3860145390	0,3814646748
-1/5	0,4160091690	0,4153777324	0,3870321918	0,3878218595	0,3833039168
-1/10	0,4201476385	0,4188484520	0,3905576300	0,3912286645	0,3867772795
0	0,4244312312	0,4220994946	0,3938600421	0,3943770734	0,3899947963
1/10	0,4288691389	0,4251603790	0,3969505277	0,3972810884	0,3929681182
1/5	0,4334714181	0,4280562955	0,3998317547	0,3999460181	0,3956990397
1/4	0,4358376015	0,4294492607	0,4011927338	0,4011881926	0,3969715385
3/10	0,4382490966	0,4308088614	0,4024991818	0,4023687655	0,3981797116
2/5	0,4432143029	0,4334371146	0,4049418584	0,4045374501	0,4003918447
1/2	0,4483804143	0,4359588812	0,4071427967	0,4064304651	0,4023047642
2/3	0,4574779795	0,4399771235	0,4102082450	0,4088778035	0,4046924612
3/4	0,4622758337	0,4419290720	0,4114200914	0,4097082612	0,4054188983
4/5	0,4652405474	0,4430930387	0,4120317314	0,4100584324	0,4056692242
9/10	0,4713758034	0,4454334749	0,4129694667	0,4103766432	0,4056633786
1	0,4778049060	0,4478498992	0,4134894997	0,4101098466	0,4048154363

Çizelge 3.16. U_N yaklaşımı ile $c = 1,90$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	U_1	U_3	U_5	U_7	U_9
-1	0,3514593723	0,3363577161	0,3078285647	0,3066855507	0,3011299298
-9/10	0,3543514269	0,3428331649	0,3150155444	0,3145395749	0,3092853174
-4/5	0,3573262863	0,3486367917	0,3211526886	0,3210653149	0,3159647692
-3/4	0,3588460831	0,3513157508	0,3239128892	0,3239549113	0,3189047865
-2/3	0,3614289598	0,3554855226	0,3281425669	0,3283351070	0,3233489247
-1/2	0,3667918019	0,3628624534	0,3355087157	0,3358369338	0,3309456671
-2/5	0,3701437255	0,3667653596	0,3393896219	0,3397239572	0,3348842929
-3/10	0,3736032426	0,3703378650	0,3429542506	0,3432489852	0,3384628078
-1/4	0,3753752724	0,3720138964	0,3446336299	0,3448927246	0,3401347056
-1/5	0,3771765732	0,3736230093	0,3462507076	0,3464641009	0,3417353467
-1/10	0,3808704687	0,3766581597	0,3493118448	0,3494050253	0,3447380295
0	0,3846922746	0,3794756329	0,3521582614	0,3520952276	0,3474932338
1/10	0,3886499982	0,3821032526	0,3548005132	0,3545482789	0,3500120488
1/5	0,3927523914	0,3845649416	0,3572407920	0,3567689925	0,3522954824
1/4	0,3948607996	0,3857401440	0,3583839136	0,3577914162	0,3533465595
3/10	0,3970090419	0,3868814395	0,3594742114	0,3587537108	0,3543346659
2/5	0,4014304833	0,3890712424	0,3614897189	0,3604899686	0,3561100760
1/2	0,4060283194	0,3911518995	0,3632706316	0,3619556564	0,3575896340
2/3	0,4141188187	0,3944286351	0,3656547408	0,3637017173	0,3592585389
3/4	0,4183822587	0,3960064537	0,3665371572	0,3641874012	0,3596256964
4/5	0,4210155841	0,3969445514	0,3669557906	0,3643331939	0,3596603341
9/10	0,4264622034	0,3988288033	0,3675205930	0,3642505708	0,3592239444
1	0,4321654986	0,4007794496	0,3676897096	0,3635994483	0,3579529858

Çizelge 3.17. U_N yaklaşımı ile $c = 2,00$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	U_1	U_3	U_5	U_7	U_9
-1	0,3218799753	0,3054891295	0,2781252172	0,2764234624	0,2707129616
-9/10	0,3244966629	0,3114601045	0,847893972	0,2837889266	0,2784021461
-4/5	0,3271875565	0,3168005699	0,2904453861	0,2898529595	0,2846259380
-3/4	0,3285619987	0,3192605380	0,2929764492	0,2925196210	0,2873429052
-2/3	0,3308974072	0,3230806114	0,2968374796	0,2965380764	0,2914226006
-1/2	0,3357446419	0,3298031056	0,3035048720	0,3033472521	0,2983169176
-2/5	0,3387730578	0,3333347838	0,3099858661	0,3068354108	0,3018499419
-3/10	0,3418976708	0,3365476050	0,3101625587	0,3099726011	0,3050339741
-1/4	0,3434977547	0,3380471893	0,3116520548	0,3114262988	0,3065126480
-1/5	0,3451239888	0,3394816896	0,3130818141	0,3128101144	0,3079226767
-1/10	0,3484579860	0,3421720218	0,3157756434	0,3153831107	0,3105517831
0	0,3519061564	0,3446489973	0,3182640458	0,3177146322	0,3129432918
1/10	0,3554755744	0,3469389314	0,3205571278	0,3198178862	0,3151078476
1/5	0,3591739649	0,3490646086	0,3226567665	0,3216973443	0,3170459069
1/4	0,3610741361	0,3500721689	0,3236327114	0,3225522404	0,3179274247
3/10	0,3630097836	0,3510459603	0,3245579262	0,3233490236	0,3117474884
2/5	0,3669923108	0,3529009531	0,3262496576	0,3247601908	0,3201936578
1/2	0,3711317605	0,3546468071	0,3277157504	0,3259086249	0,3213502216
2/3	0,3784107228	0,3573648220	0,3295980759	0,3271442137	0,3224940258
3/4	0,3822439247	0,3586623439	0,3302426947	0,3273845988	0,3226047633
4/5	0,3846106071	0,3594316057	0,3305237857	0,3273871689	0,3224878882
9/10	0,3895034950	0,3609753756	0,3308272956	0,3270295103	0,3217560487
1	0,3946237036	0,3625783307	0,3307572182	0,3261242298	0,3202079605

Çizelge 3.18. P_N yaklaşımı ile $c = 1,01$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	P_1	P_3	P_5	P_7	P_9
-1	7,347077917	7,280671539	7,278248005	7,277521947	7,277227343
-9/10	7,434969236	7,369625065	7,367165904	7,366426230	7,366154614
-4/5	7,526163765	7,461487575	7,458975862	7,458210127	7,457817735
-3/4	7,573065905	7,508589827	7,506046786	7,505266301	7,504993829
-2/3	7,653267819	7,588941615	7,586340591	7,585539855	7,585234852
-1/2	7,821811142	7,757146907	7,754414435	7,753566754	7,753180516
-2/5	7,928573723	7,863325374	7,860507304	7,859623757	7,859008628
-3/10	8,039937969	7,973832669	7,970925651	7,970014269	7,969590497
-1/4	8,097451733	8,030817373	8,027864664	8,026935906	8,026498136
-1/5	8,156247603	8,089017478	8,086018187	8,085065475	8,084400009
-1/10	8,277883614	8,209261211	8,206165911	8,205190034	8,204741353
0	8,405269635	8,334983457	8,331786942	8,330780803	8,330404494
1/10	8,538878339	8,466648164	8,463343566	8,462306626	8,462040429
1/5	8,679238971	8604770841	8,601349115	8,600283515	8,600278942
1/4	8,752134327	8,676431181	8,672945851	8,671845966	8,670760707
3/10	8,826946450	8,749927073	8,746376085	8,745261652	8,744821980
2/5	8,982672250	8,902762530	8,899068472	8,897915999	8,897582439
1/2	9,147177618	9,064005079	9,060151215	9,058957390	9,058767745
2/3	9,443274777	9,353716065	9,349552499	9,348258948	9,348222228
3/4	9,602857542	9,509591253	9,505252096	9,503915232	9,504228274
4/5	9,702695639	9,607015989	9,602564112	9,601204390	9,600970298
9/10	9,912376756	9,811392306	9,806701213	9,805265708	9,803928391
1	10,13670858	10,02968897	10,02474308	10,02321988	10,02129767

Çizelge 3.19. P_N yaklaşımı ile $c = 1,02$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	P_1	P_3	P_5	P_7	P_9
-1	5,045520468	4,967389452	4,964791937	4,964046736	4,963713171
-9/10	5,104386393	5,027794703	5,025173426	5,024412576	5,024073126
-4/5	5,165427493	5,089871099	5,087206437	5,086422045	5,086077060
-3/4	5,196806717	5,121598695	5,118906598	5,118109214	5,117759372
-2/3	5,250441482	5,175584098	5,172839578	5,172018909	5,171655652
-1/2	5,363058834	5,288113392	5,285246070	5,284376670	5,283992156
-2/5	5,434328582	5,358864240	5,355915482	5,355016836	5,354620718
-3/10	5,508614883	5,432301858	5,429267418	5,428338604	5,427933655
-1/4	5,546957725	5,470099539	5,467020741	5,466075069	5,465651970
-1/5	5,586139743	5,508656592	5,505532349	5,504571123	5,504121659
-1/10	5,667148930	5,588176539	5,584957906	5,583965851	5,583513475
0	5,751915364	5,671131056	5,667811978	5,666785526	5,666306623
1/10	5,840743130	5,757814687	5,754387327	5,753327796	5,752858036
1/5	5,933972225	5,848551451	5,845005452	5,843908556	5,843402398
1/4	5,982354713	5,895550326	5,891940349	5,890826152	5,890341751
3/10	6,031984235	5,943699942	5,940022470	5,938887688	5,938377268
2/5	6,135209173	6,043659074	6,039834247	6,038658072	6,038135253
1/2	6,244133700	6,148874961	6,144884347	6,143661975	6,143107442
2/3	6,439878658	6,337307607	6,332992981	6,331681502	6,331098330
3/4	6,545210363	6,438366920	6,433865520	6,432500722	6,431860445
4/5	6,611048854	6,501415083	6,496793522	6,495395260	6,494769742
9/10	6,749175511	6,633385028	6,628505150	6,627032840	6,626416751
1	6,896731021	6,773901445	6,768742314	6,767188349	6,766387693

Çizelge 3.20. P_N yaklaşımı ile $c = 1,05$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	P_1	P_3	P_5	P_7	P_9
-1	3,004727513	2,908422843	2,904978309	2,904163886	2,903813357
-9/10	3,038152021	2,944226959	2,940819333	2,939993349	2,939635412
-4/5	3,072772201	2,980525716	2,977121187	2,976275422	2,975906162
-3/4	3,090553685	2,998913932	2,995501357	2,994643867	2,994268699
-2/3	3,120922038	3,029981200	3,026544293	3,025665496	3,025278780
-1/2	3,184585915	3,093986539	3,090471419	3,089546412	3,089137327
-2/5	3,224804959	3,133797169	3,130221932	3,129267995	3,128845346
-3/10	3,266668095	3,174825083	3,171182207	3,170198469	3,169761798
-1/4	3,288252483	3,195837083	3,192157716	3,191158737	3,190714963
-1/5	3,310292914	3,217203653	3,213485962	3,212471376	3,212019641
-1/10	3,355809285	3,261069914	3,257269513	3,256223030	3,255757400
0	3,403361062	3,306566669	3,302674034	3,301594003	3,301113122
1/10	3,453108099	3,353844506	3,349847657	3,348732168	3,348235061
1/5	3,505228635	3,403063815	3,398947764	3,397794576	3,397281360
1/4	3,532240380	3,428454848	3,424272473	3,423099438	3,422578337
3/10	3,559922130	3,454396927	3,450143110	3,448949245	3,448418744
2/5	3,617412665	3,508030388	3,503616331	3,502377854	3,501827915
1/2	3,677953018	3,564167473	3,559566496	3,558278686	3,557710566
2/3	3,786426722	3,663908271	3,658924052	3,657538440	3,656930384
3/4	3,844626123	3,716982717	3,711767371	3,710323783	3,709692138
4/5	3,880943352	3,749946251	3,744577833	3,743096449	3,742453102
9/10	3,956983445	3,818573455	3,812863195	3,811297481	3,810617718
1	4,037986562	3,891089103	3,884984306	3,883324926	3,882604128

Çizelge 3.21. P_N yaklaşımı ile $c = 1,20$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	P_1	P_3	P_5	P_7	P_9
-1	1,264877612	1,151817196	1,140696919	1,138919701	1,138396923
-9/10	1,277432839	1,167935272	1,157443529	1,155753864	1,155241714
-4/5	1,290402902	1,183486276	1,173419172	1,171780640	1,171269584
-3/4	1,297050975	1,191101140	1,181191735	1,179570224	1,179057787
-2/3	1,308383702	1,203613986	1,193907543	1,192305937	1,191789492
-1/2	1,332054429	1,228205358	1,218747509	1,217164956	1,216636431
-2/5	1,346947432	1,242830557	1,233453560	1,231873301	1,231335588
-3/10	1,362399289	1,257457016	1,248123640	1,246540100	1,245991857
-1/4	1,370346275	1,264792624	1,255468652	1,253881467	1,253327471
-1/5	1,378447195	1,272153822	1,262831198	1,261239016	1,260678911
-1/10	1,395131985	1,286982430	1,277637497	1,276031156	1,275457709
0	1,412498606	1,301997973	1,292593781	1,290967407	1,290379108
1/10	1,430596678	1,317250216	1,307742823	1,306089945	1,305485152
1/5	1,449481148	1,332784318	1,323119947	1,321433194	1,320810081
1/4	1,459237096	1,340670081	1,330903206	1,329196338	1,328563276
3/10	1,469213057	1,348641486	1,338753671	1,337024258	1,336380665
2/5	1,489860451	1,364859632	1,354665979	1,352883035	1,352216314
1/2	1,511499470	1,381474139	1,370872253	1,369021843	1,368328734
2/3	1,550005336	1,410138088	1,398555143	1,396548947	1,395801104
3/4	1,570524138	1,424968972	1,412709637	1,410597146	1,409814652
4/5	1,583278346	1,434040468	1,411299118	1,419110624	1,418304308
9/10	1,609858810	1,452602684	1,438685383	1,436309267	1,435446770
1	1,637989539	1,471783842	1,456330812	1,453702188	1,452770358

Çizelge 3.22. P_N yaklaşımı ile $c = 1,50$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	P_1	P_3	P_5	P_7	P_9
-1	0,6551958155	0,5582031940	0,5378483701	0,5321168027	0,5302517911
-9/10	0,6610746579	0,5672379099	0,5482613312	0,5430335715	0,5413499320
-4/5	0,6671339464	0,5756149565	0,5575563107	0,5526417712	0,5510673664
-3/4	0,6702343116	0,5795930827	0,5618682871	0,5570664221	0,5555317750
-2/3	0,6755108590	0,5859536551	0,5686463720	0,5639894050	0,5625073332
-1/2	0,6864972063	0,5978313662	0,5809896622	0,5765199651	0,5751102879
-2/5	0,6933853114	0,6045232620	0,5877999876	0,5834005224	0,5820201139
-3/10	0,7005120336	0,6109576002	0,5942672455	0,5899149931	0,5885556770
-1/4	0,7041694533	0,6140930048	0,5973917470	0,5930554030	0,5917038868
-1/5	0,7078921826	0,6171809328	0,6004517458	0,5961264031	0,5947809519
-1/10	0,7155419227	0,6232331507	0,6063974044	0,6020794683	0,6007411082
0	0,7234789424	0,6291484050	0,6121345079	0,6078039425	0,6064659700
1/10	0,7317226454	0,6349558392	0,6017174050	0,6133167069	0,6119720993
1/5	0,7402943802	0,6406802799	0,6230475460	0,6186229233	0,6172638818
1/4	0,7447105242	0,6435181341	0,6256626229	0,6211971297	0,6198275902
3/10	0,7492176955	0,6463429761	0,6282315229	0,6237165856	0,6223339880
2/5	0,7585186523	0,6519625186	0,6332250307	0,6285805107	0,6271629480
1/2	0,7682261839	0,6575561115	0,6380120487	0,6331858774	0,6317181788
2/3	0,7853981634	0,6668704014	0,6454678445	0,6401685576	0,6385655064
3/4	0,7944948520	0,6715514294	0,6489162462	0,6432632639	0,6415538784
4/5	0,8001302550	0,6743783043	0,6508862023	0,6449687055	0,6431766004
9/10	0,8118277544	0,6801013242	0,6545912291	0,6479892968	0,6459697920
1	0,8241379245	0,6859767309	0,6579863521	0,6504196780	0,6480438730

Çizelge 3.23. P_N yaklaşımı ile $c = 1,80$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	P_1	P_3	P_5	P_7	P_9
-1	0,4521743388	0,3717613762	0,3499946891	0,3419652032	0,3385908587
-9/10	0,4560198975	0,3781188774	0,3578095185	0,3505195717	0,3475140236
-4/5	0,4599788077	0,3839379384	0,3645999362	0,3577511934	0,3549632624
-3/4	0,4620026200	0,3866697965	0,3676826260	0,3609954522	0,3582753527
-2/3	0,4654440777	0,3909886854	0,3724342388	0,3659397992	0,3633140777
-1/2	0,4725978000	0,3988670554	0,3807682521	0,3745013782	0,3719984763
-2/5	0,4770747904	0,4031841077	0,3851784218	0,3789847703	0,3765284450
-3/10	0,4817001828	0,4072442047	0,3892360106	0,3830822407	0,3806576261
-1/4	0,4840712661	0,4091889879	0,3911492827	0,3850045691	0,3825908762
-1/5	0,4864828284	0,4110822404	0,3929924574	0,3868499593	0,3844441195
-1/10	0,4914323600	0,4147284858	0,3964841552	0,3903259053	0,3879267898
0	0,4965592826	0,4182092078	0,3997350057	0,3935335359	0,3911292588
1/10	0,5018750817	0,4215472112	0,4027584340	0,3964839388	0,3940619342
1/5	0,5073923465	0,4247624019	0,4055590340	0,3991771706	0,3967232343
1/4	0,5102307988	0,4263295251	0,4068751589	0,4004245305	0,3979486154
3/10	0,5131249121	0,4278724308	0,4081340342	0,4016029566	0,3991003083
2/5	0,5190880262	0,4308935244	0,4104746253	0,4037409800	0,4011683183
1/2	0,5252985458	0,4338416039	0,4125673858	0,4055609337	0,4028897148
2/3	0,5362509241	0,4386410088	0,4154600518	0,4077738338	0,4048403127
3/4	0,5420352002	0,4410146430	0,4166084322	0,4084326829	0,4052956869
4/5	0,5456123601	0,4424406153	0,4171989503	0,4086654375	0,4053718091
9/10	0,5530222333	0,4453219996	0,4181623603	0,4087328616	0,4050168342
1	0,5607976582	0,4482935921	0,4188671504	0,4082432871	0,4038950248

Çizelge 3.24. P_N yaklaşımı ile $c = 2,00$ ve farklı t değerleri için kritik yarı kalınlık hesaplaması.

t	P_1	P_3	P_5	P_7	P_9
-1	0,3761373441	0,3043987531	0,2831648293	0,2745312965	0,2705186259
-9/10	0,3792593262	0,3096958768	0,2898461645	0,2820020593	0,2784335429
-4/5	0,3824716242	0,3145245215	0,2956002364	0,2882300953	0,2849105698
-3/4	0,3841130919	0,3167823416	0,2981919636	0,2909846994	0,2877500334
-2/3	0,3869033269	0,3203368715	0,3021565965	0,2951479535	0,2920193102
-1/2	0,3926990817	0,3267613149	0,3019249908	0,3022196153	0,2992229481
-2/5	0,3963232515	0,3302409006	0,3125610527	0,3058429780	0,3028935154
-3/10	0,4000651277	0,3334816237	0,3157862935	0,3090985445	0,3061788393
-1/4	0,4019823364	0,3350218341	0,3172893674	0,3106052361	0,3076947196
-1/5	0,4039316011	0,3365131558	0,3187256025	0,3120378898	0,3091329438
-1/10	0,4079301610	0,3393614874	0,3214114975	0,3146954572	0,3117915003
0	0,4120689623	0,3420494112	0,3238651211	0,3170920429	0,3141752461
1/10	0,4163569068	0,3445969657	0,3260981440	0,3192369849	0,3162927938
1/5	0,4208037347	0,3470219132	0,3281143840	0,3211294869	0,3181415112
1/4	0,4230900295	0,3481934753	0,3290406249	0,3219782141	0,3189613756
3/10	0,4254201329	0,3493403114	0,3299113027	0,3227593058	0,3197080237
2/5	0,4302178565	0,3515672370	0,3314814779	0,3241072452	0,3209678432
1/2	0,4352098759	0,3537177745	0,3328141419	0,3251454994	0,3218848789
2/3	0,4440013740	0,3571783303	0,3344748753	0,3260870278	0,3225114000
3/4	0,4486381268	0,3588765655	0,3350312057	0,3261345390	0,3223190743
4/5	0,4499578089	0,3598946427	0,3352767256	0,3260122585	0,3220144080
9/10	0,4558638854	0,3619517502	0,3355781131	0,3254065242	0,3209249531
1	0,4620532181	0,3640815291	0,3356640634	0,3243129662	0,3191301480

Çizelge 3.25. P_N ve U_N yaklaşımları ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($c = 1,01 - 1,20$)

t	$c = 1,01$		$c = 1,02$		$c = 1,05$		$c = 1,20$	
	P_9	U_9	P_9	U_9	P_9	U_9	P_9	U_9
-1	7,277227343	7,273689576	4,963713171	4,959984881	2,903813357	2,900081841	1,138396923	1,135966838
-9/10	7,366154614	7,362677452	5,024073126	5,020411401	2,939635412	2,935979429	1,155241714	1,152774916
-4/5	7,457817735	7,454475231	5,086077060	5,082694573	2,975906162	2,972526978	1,171269584	1,168907094
-3/4	7,504993829	7,501945846	5,117759372	5,114563495	2,994268699	2,991080136	1,179057787	1,176787629
-2/3	7,585234852	7,582524193	5,171655652	5,168820854	3,025278780	3,022461112	1,191789492	1,189716539
-1/2	7,753180516	7,751016807	5,283992156	5,281998408	3,089137327	3,087141003	1,216636431	1,215047000
-2/5	7,859008628	7,857971451	5,354620718	5,353080301	3,128845346	3,127322442	1,231335588	1,230042211
-3/10	7,969590497	7,968332644	5,427933655	5,426819270	3,169761798	3,168650163	1,245991857	1,244962942
-1/4	8,026498136	8,025285316	5,465651970	5,464712827	3,190714963	3,189773752	1,253327471	1,252411037
-1/5	8,084400009	8,083871887	5,504121659	5,503381835	3,212019641	3,211223648	1,260678911	1,259858256
-1/10	8,204741353	8,204211384	5,583513475	5,582931524	3,255757400	3,255155444	1,275457709	1,274770035
0	8,330404494	8,329565687	5,666306623	5,665814255	3,301113122	3,300570052	1,290379108	1,289736277
1/10	8,462040429	8,461229461	5,752858036	5,752231108	3,348235061	3,347607475	1,305485152	1,304793180
1/5	8,600278942	8,598935385	5,843402398	5,842608586	3,397281360	3,396423327	1,320810081	1,319976048
1/4	8,670760707	8,667620338	5,890341751	5,889278060	3,422578337	3,421552652	1,328563276	1,327625584
3/10	8,744821980	8,740479451	5,938377268	5,937114031	3,448418744	3,447196596	1,336380665	1,335319589
2/5	8,897582439	8,895758297	6,038135253	6,036384676	3,501827915	3,500120912	1,352216314	1,350857455
1/2	9,058767745	9,053977277	6,143107442	6,140849333	3,557710566	3,555419097	1,368328734	1,366621225
2/3	9,348222228	9,340660000	6,331098330	6,327644866	3,656930384	3,653535989	1,395801104	1,393470516
3/4	9,504228274	9,499566581	6,431860445	6,427821057	3,709692138	3,705731238	1,409814652	1,407192046
4/5	9,600970298	9,596795126	6,494769742	6,490329118	3,742453102	3,738158106	1,418304308	1,415525519
9/10	9,803928391	9,799321434	6,626416751	6,621399743	3,810617718	3,805747837	1,435446770	1,432425477
1	10,02129767	10,01661532	6,766387693	6,761126789	3,882604128	3,877339122	1,452770358	1,449645099

Çizelge 3.26. P_N ve U_N yaklaşımları ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($c = 1,50 - 2,00$)

t	$c = 1,50$		$c = 1,80$		$c = 2,00$	
	P_9	U_9	P_9	U_9	P_9	U_9
-1	0,5302517911	0,5296373353	0,3385908587	0,3386309362	0,2705186259	0,2707129616
-9/10	0,5413499320	0,5405243933	0,3475140236	0,3473124432	0,2784335429	0,2784021461
-4/5	0,5510673664	0,5500889388	0,3549632624	0,3545210692	0,2849105698	0,2846259380
-3/4	0,5555317750	0,5545008464	0,3582753527	0,3577240247	0,2877500334	0,2873429052
-2/3	0,5625073332	0,5614215860	0,3633140777	0,3626022577	0,2920193102	0,2914226006
-1/2	0,5751102879	0,5740120601	0,3719984763	0,3710488187	0,2992229481	0,2983169176
-2/5	0,5820201139	0,5809547314	0,3765284450	0,3754850252	0,3028935154	0,3018499419
-3/10	0,5885556770	0,5875365321	0,3806576261	0,3795519545	0,3061788393	0,3050339741
-1/4	0,5917038868	0,5907090837	0,3825908762	0,3814646748	0,3076947196	0,3065126480
-1/5	0,5947809519	0,5938096107	0,3844441195	0,3833039168	0,3091329438	0,3079226767
-1/10	0,6007411082	0,5998101730	0,3879267898	0,3867772795	0,3117915003	0,3105517831
0	0,6064659700	0,6055626689	0,3911292588	0,3899947963	0,3141752461	0,3129432918
1/10	0,6119720993	0,6110822365	0,3940619342	0,3929681182	0,3162927938	0,3151078476
1/5	0,6172638818	0,6163764353	0,3967232343	0,3956990397	0,3181415112	0,3170459069
1/4	0,6198275902	0,6189390968	0,3979486154	0,3969715385	0,3189613756	0,3179274247
3/10	0,6223339880	0,6214445884	0,3991003083	0,3981797116	0,3197080237	0,3117474884
2/5	0,6271629480	0,6262779142	0,4011683183	0,4003918447	0,3209678432	0,3201936578
1/2	0,6317181788	0,6308572649	0,4028897148	0,4023047642	0,3218848789	0,3213502216
2/3	0,6385655064	0,6378286915	0,4048403127	0,4046924612	0,3225114000	0,3224940258
3/4	0,6415538784	0,6409342478	0,4052956869	0,4054188983	0,3223190743	0,3226047633
4/5	0,6431766004	0,6426471776	0,4053718091	0,4056692242	0,3220144080	0,3224878882
9/10	0,6459697920	0,6456599233	0,4050168342	0,4056633786	0,3209249531	0,3217560487
1	0,6480438730	0,6479713944	0,4038950248	0,4048154363	0,3191301480	0,3202079605

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bilindiği üzere nötronların ileri saçılması nötron kütlesi ile etkileşen çekirdek kütlesi birbirine yakın olduğu durumlarda en büyük değerleri almaktadır. t parametresinin artı ve büyük olduğu durumlarda, çizelgelerin tamamında gözleendiği gibi, dilimde t 'nin artı büyük değerleri için ileri saçılmaların daha büyük değerler alması nedeniyle kritik kalınlıklar da daha büyük değerler almıştır ve bu değerler P_N ve U_N yaklaşımlarında uyum içerisinde görülmektedir.

t parametresinin eksi olduğu ve geri saçılmayı temsil ettiği düşüncesiyle hesaplanan değerlerin bizlere verdiği sonuçlar, çizelgelerde t 'nin 0 ile -1 arasındaki değerlere ait sonuçlardır. t 'nin değeri -1 'e yaklaştıkça kritik yarı kalınlıklar azalma göstermektedir. Böyle bir durumun gözlenmesi ise yaygın kanıtı destekleyecek şekilde t 'nin eksi değerlerinin artışı geri saçılmayı ifade ettiği düşüncesini desteklemektedir. t 'nin 0 ile 1 arasındaki artan değerlerinde, c 'nin bütün değerleri için kritik yarı kalınlıkların arttığı çizelgelerin tamamında görülmektedir. Bu durum t 'nin artı değerleri için ileri saçılmayı temsil ettiği düşüncesini desteklemektedir.

Kritik yarı kalınlık için bulunan ifadelerde $t = 0$ yazılırsa, bu durum daha önceki çalışmalarda da bulunan izotropik duruma karşılık gelmektedir. Başka bir ifadeyle, $t = 0$ durumu izotropik duruma karşılık gelirken, t 'nin hangi değer ya da değerlerinin anizotropik duruma karşılık geldiği konusunda kesin bir şeylerin söylenmesi mümkün değildir. Daha önce de belirtildiği gibi t 'nin artı değerleri ileri saçılmayı temsil ederken, eksi değerleri ise geri saçılmayı temsil etmektedir. Ancak hangi oranda ileri ve geri saçılmanın olduğu konusunda t 'ye bakılarak kesin ifadeler kullanılması pek mümkün görülmemektedir. Çizelgelerin tamamına bakılarak, artan t değerlerine karşılık kritik kalınlığın artması ve azalan t değerlerine karşılık da kritik kalınlığın azalması, daha önce ileri saçılmalı ortamlarda kritik kalınlığın geri saçılmalı ortamlardaki kritik kalınlık değerlerinden her zaman daha büyük olduğu gerçeğini desteklemektedir.

Çizelgelerde gözleendiği gibi, herhangi bir c ve t değeri için yaklaşım mertebesinin artışıyla kritik yarı kalınlıkların azaldığı görülmektedir. Bu durum nötron akısının tek

boyutta x eksenini boyunca, reaktör sınırlarına doğru azaldığı gerçeği ile uyum içerisindedir.

Yine çizelgelerde gözlemlendiği gibi, herhangi bir t değeri için c değerlerinin artışıyla kritik yarı kalınlıkların azaldığı gözlenmektedir. Herhangi bir t değeri için c değerlerinin artışı, nötron sayısının artmasını ve reaktör kritikliğinin azalmasını ifade etmektedir. Böyle bir durum için düşünüldüğünde, c değerlerinin artışı ile reaktör kritikliğinin azalması ve kritik yarı kalınlıkların azalması arasında bir ilişkilendirme yapılabilmektedir.

Yukarıda açıklanan ve yapılan bu değerlendirmeler sonucunda görüldüğü gibi kritiklik problemi için bu çalışmada kullanılan AG faz fonksiyonu ve ikinci tip Chebyshev polinomları yaklaşımı ile elde edilen kritik yarı kalınlıklar, daha önceki benzer çalışmalarda elde edilen kritik yarı kalınlık değerleri ile uyum içerisindedir. Bu sonuç, hem AG faz fonksiyonunun kullanışlı bir saçılma fonksiyonu olduğunu ve transport denklemin çözümünde tercih edilmesinin önemini arttırmış, hem de kritiklik probleminin çözümü için ikinci tip Chebyshev polinomları yaklaşımının da benzer yaklaşımlar ile uyum içerisinde aynı sonuçları yakalayabileceğini fark ettirmiştir. Ayrıca, bu problemin çözümünden elde edilen sonuçlar çizelgelerden incelendiğinde, ikinci tip Chebyshev polinomları kullanılarak bulunan sayısal sonuçların geleneksel olarak kabul görmüş Legendre polinomları kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlarla uyum içerisinde olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, hem AG faz fonksiyonunun transport denklemindeki saçılma fonksiyonu yerine kullanışlı bir fonksiyon olduğu hem de ikinci tip Chebyshev polinomlarının da Legendre polinomları gibi transport teorisindeki problemlere kolaylıkla uygulanabileceği söylenebilir. Ayrıca çizelgelerde verilen sonuçların gösterdiği uyum, burada kullanılan faz fonksiyonunun, problemin çözümü için kullanılan Chebyshev polinomları yaklaşımıyla beraber hem transport teorisindeki diğer problemlere hem de fen ve mühendisliğin diğer alanlarındaki benzer problemlere kolaylıkla uygulanabileceğini göstermektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Krane, K.S., Nükleer fizik, (Editör: Şarer, B.), Palme Yayıncılık, Ankara, 2002.
- [2] Serway, R.A., Beichner, R.J., Fen ve mühendislik için fizik, (Editör: Çolakoğlu, K.), Palme Yayıncılık, Ankara, 2005.
- [3] Aybers, N., Bayülken, A., Nükleer reaktör mühendisliği, İstanbul teknik üniversite matbaası, Gümüşsuyu, 1990.
- [4] Çetin, M., Tek boyutlu dilim geometride nötron transport denkleminin T_N yaklaşımı ile çözümü, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek lisans tezi, Kahramanmaraş, 44, 2006.
- [5] Aczel, A.D., Uranyum savaşları, Alfa Yayıncılık, İstanbul, 2012.
- [6] Yaşa, F., Küresel geometride transport denkleminin spektral Green fonksiyonu metodu ile çözümü, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi, Adana, 62s, 2002.
- [7] Manisa, K., Boltzmann denkleminin alternatif eldesi ve çözümü, Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, (4), 115-122, 2003.
- [8] Agoshkov, V.I., Boundary Value Problems for Transport Equations, Birkhauser, Boston, 1998.
- [9] Case, K.M., Zweifel, P.F., Linear Transport Theory, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1967.
- [10] Chandrasekhar, S., Radiative transfer, Clarendon press, Oxford, 1950.
- [11] Sobolev, V.V., Radiative transfer in atmospheres of stars and planets, Gostekhizdat, Moskow, 1956.
- [12] Bell, G.I., Glasstone, S., Nuclear Reactor Theory, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1970.
- [13] Gölgeleyen, İ., İntegral geometri problemleri ve transport denklemleri için ters problemler, Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi, 3(2), 48-55, 2013.
- [14] Özemre A.Y., Nötronların difüzyon teorisi, Matbaa teknisyenleri basımevi, İstanbul, 1969.
- [15] Mika, J.R., Neutron transport with anisotropic scattering, Nucl. Sci. Eng., 11(4), 415-427, 1961.
- [16] Davison, B. Neutron transport theory, Oxford University Press, London, 1958.

- [17] Sjöstrand, N.G., Complex Eigenvalues of the Monoenergetic Neutron Transport Equation with Anisotropic Scattering, *J. Nucl. Sci. Technol.*, 13,81-84, 1976.
- [18] Sjöstrand, N.G., *Atomkernenergie*, 31,16,1978.
- [19] Sjöstrand, N.G., The discrete ordinates method compared to Carlvik's and Syros's methods for anisotropic neutron scattering in slabs *Ann. Nucl. Energy*, 7, 435-437, 1980.
- [20] Yıldız, C., Variation of the critical slab thickness with the degree of strongly anisotropic scattering in one-speed neutron transport theory, *Ann. Nucl. Energy*, 25(8), 529-540, 1998.
- [21] İnönü, E., A theorem on anisotropic scattering, *Transp. Theory Statist. Phys.*, 3, 137-146, 1973.
- [22] İnönü, E., Scalar and Time Inversion of the Linear Monoenergetic Boltzmann Equation, *Phys. Fluids* 19, 1332-1335, 1976.
- [23] Williams, M.M.R., The energy-dependent backward-forward-isotropic scattering model with some applications to the neutron transport equation, *Ann. Nucl. Energy*, 12(4), 167-176, 1985.
- [24] Pomraning G.C, The criticality problem for highly anisotropic scattering, *Transp. Theory Statist, Phys.*, 7(4), 161-171, 1978.
- [25] Tezcan, C., Yıldız, C., The Criticality Problems with the F_N Method for the FBIS Model, *Ann. Nucl. Energy*, 13(6), 345, 1986.
- [26] Sahni, D.C., Sjöstrand, N.G., Garis, N.S., Criticality and time eigenvalues for one-speed neutrons in a slab with forward and backward scattering, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 25, 1381, 1992.
- [27] Dahl, E.B., Sjöstrand, N.G., Eigenvalue Spectrum of Multiplying Slabs and Spheres for Monoenergetic Neutrons with Anisotropic Scattering, *Nucl. Sci. Eng.*, 69(1), 114-125, 1979.
- [28] Dahl, E.B., Sjöstrand, N.G., Time-eigenvalue spectra for one-speed neutrons in systems with vacuum boundary conditions, *Ann. Nucl. Energy*, 16(10), 527, 1989.
- [29] Sjöstrand, N.G., Approximate high-order eigenvalues in two-medium one-speed neutron transport. CTH-Rf-67, Chalmers Uni., Sweden, 1989.
- [30] Weinberg, A.M., Wigner, E.P., The physical theory of neutron chain reactors, Hardcover, 1958.
- [31] Anlı, F., Yaşa, F., Nötron transportu için küresel geometride özdeğer hesaplaması, *KSÜ Fen ve Mühendislik Dergisi*, 6(2), 28-33, 2003.

- [32] Aspelund, O., On a new method for solving the (Boltzmann) equation in neutron transport theory. PICG 16, 530, 1958.
- [33] Conkie, W.R., Polynomial approximations in neutron transport theory. Nucl. Sci. Eng. 6, 260, 1959.
- [34] Yabushita, S., TsChebyscheff polynomials approximations method of the neutron transport equation. J. Math. Phys. 2, 543, 1961.
- [35] Anli, F., Yasa, F., Güngör, S., Öztürk, H., T_N approximation to reflected slab and computation of the critical half thickness. J. Quant Spectrosc. Radiat. Transfer, 101, 135, 2006.
- [36] Öztürk, H., Anli, F., Güngör, S., TN method for the critical thickness of one-speed neutrons in a slab with forward and backward scattering. J. Quant. Spectros. Radiat. Trans. 105, 211, 2007.
- [37] Case, K.M., Zweifel, P.F., Existence and uniqueness theorems for the neutron transport equation, Journal of Mathematical Physics, 4(11), 1376-1385, 1963.
- [38] Case, K.M., Zweifel, P.F., Linear Transport Theory, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1967.
- [39] O'Neil, P.V., İleri mühendislik matematiği, (Editör: Pala, Y.), Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, 2013.
- [40] Mark, J.C., The neutron density near a plane surface, Phy.Rev., 72, 558, 1947.
- [41] Marshak, R.E., note on the spherical harmonic method as applied to the milne problem for a sphere, Phy.Rev., 71, 443-446, 1947.
- [42] Case, K.M., De Hoffmann, F., Placzek, G., Introduction to the theory of neutron diffusion, U.S. Government Printing Office, Washington, 1953.
- [43] Brockmann, H., Treatment of anisotropic scattering in numerical neutron transport theory, Nuclear Science and Engineering, 77(4), 377-414, 1981.
- [44] Ulutaş, M., Yansıtımlı dilim geometride kritik kalınlıkların U_N yaklaşımı ile hesaplanması, KSÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek lisans tezi, Kahramanmaraş, 45, 2005.
- [45] Spanier, J., Gelbard, E.M., Monte carlo principles and neutron transport problems, Dover Publications, New York, 1969.
- [46] Hançerlioğulları, A., Monte Carlo simülasyon metodu ve mcnp kod sistemi, Kastamonu Eğitim Fakültesi Dergisi, 14(2), 545-556, 2006.

- [47] Akgün, Y., Erdoğan, F., Tezcan, C., $c > 1$ değerleri için H_N yönteminin Milne problemine uygulanması, 22. Fizik Kongresi, Bodrum/Türkiye, Eylül 2004.
- [48] Türeci, D., Nötron transport denkleminin çözümünde kullanılan yar-analitik yöntemler ve uygulamaları, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara, 107, 2010.
- [49] Lamarsh, J.R., Baratta, A.J., Introduction to nuclear engineering, Prentice Hall, Inc., 2001.
- [50] Öztürk, H., Silindirik geometride nötron transport denkleminin spektral green fonksiyonları metodu ile çözümü, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi, Adana, 107, 2003.
- [51] Lewis, E.E., Miller, W.F.Jr., Computational methods of neutron transport, American Nuclear Society, Illinois, 1993.
- [52] Pazsit, I., Transport Theory and Stochastic Processes, Department of nuclear engineering, Chalmers University of Technology, Göteborg, 2007.
- [53] Arfken, G.B., Weber, H.J. Mathematical methods for physicists, Harcourt/Academic Press, London, s.739-850, 2001.
- [54] İnönü, E., Scaling and Time Inversion for the linear mono-energetic Boltzmann Equation, The Phys. Of Fluids, 19(9), 1332-1335, 1975.
- [55] İnönü, E., Scalar and Time Inversion of the Linear Monoenergetic Boltzmann Equation, Phys. Fluids 19, 1332-1335, 1976.
- [56] Williams, M.M.R., A synthetic scattering kernel for particle transport in absorbing media with anisotropic scattering. J. Phys. D. Appl. Phys., 11, 2455, 1978.
- [57] Lee, C. E., Pan, W.C.P., Dias, M. P., Analytical solutions to the moment transport equations-II. Ann. Nucl. Energy, 12 (11), 613-632, 1985.
- [58] Sahni, D. C., Dahl, B., Sjöstrand, N. G., Behaviour of criticality eigenvalues of one-speed transport operator with linearly anisotropic scattering. Annals of Nuclear Energy, 24:135-145, 1997.
- [59] Aranson, R., Critical problems for bare and reflected slabs and spheres, Nucl. Sci. Eng., 86, 150–156, 1984.
- [60] Henyey, L.G., Greenstein, J.L., Diffuse radiation in the galaxy, Astropys. J., 93, 70, 1941.
- [61] Öztürk H., Anli, F., Güngör, S., Application of the UN method to the reflected critical slab problem for one-speed neutrons with forward and backward scattering, Kerntechnik 72, 74, 2007.

- [62] Anlı, F., Yaşa, F., Güngör, S.: General eigenvalue spectrum in a one-dimensional slab geometry transport equation. Nucl.Sci. Eng., 150, 72, 2005.
- [63] Yaşa, F., Anlı, F., A model for calculation of forward isotropic scattering with application to transport equation in slab geometry, Kerntechnik, 74, 320, 2009.
- [64] Öztürk, H., Anlı F., Diffusion approximation for certain scattering parameters of the Anli-Güngör phase function, Kerntechnik, 77, 381, 2012.
- [65] Öztürk, H., Application of the Henyey-Greenstein and Anli Güngör phase functions for the solution of the neutron transport equation with Legendre polynomials: Reflected critical slab problem, Kerntechnik, 78, 447-453, 2013.
- [66] Mason, J.C., Handscomb, D.C., Chebyshev Polynomials. Chapman and Hall/Crc, Washington, 2003.
- [67] Boyce, W. E. and DiPrima, R. C. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, New York, Wiley, pp. 232 and 252, 1986.
- [68] Zwillinger, D., Handbook of Differential Equations, 3rd ed. Boston, MA: Academic Press, p. 127, 1997.
- [69] Fox L., Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis, Oxford University Press, London, 1968.
- [70] Nash, P. L. "Chebyshev Polynomials and Quadratic Path Integrals." J. Math. Phys. 27, 2963, 1986.
- [71] Stein, E., Weiss, G., Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1971.
- [72] Beeler, M.; Gosper, R. W.; and Schroepel, R. HAKMEM. Cambridge, MA: MIT Artificial Intelligence Laboratory, Memo AIM-239, 1972.
- [73] Zwillinger, D. (Ed.). CRC Standard Mathematical Tables and Formulae. Boca Raton, FL: CRC Press, 1995.
- [74] Mason, J.C., Chebyshev Polynomial Approximations for the I-membrane eigenvalue problem. SIAM J. Appl. Math., 15(1), 172-186, 1967.
- [75] Brockmann, H., "Comparison of Different Anisotropic Scattering Techniques in Neutron Transport Codes," Proc. 8th Symp. Fusion Technology, Noordwijkerhout, The Netherlands, June 17-21, 1974.
- [76] Attia, E.A., Harms, A.A., "A New Expansion for Highly Anisotropic Neutron-Nucleus Scattering," Nucl. Sci. Eng., 59, 319, 1976.

- [77] Lee, C.E., Dias, M.P., Analytical solutions to the moment transport equations-I; one-group one-region slab and sphere criticality, Ann. Nucl. Energy, 11, 515, 1984.
- [78] Garcia, R.D.M., Siewert, C.E., A stable shifted-legendre projection scheme for generating P_N boundary conditions, Ann Nucl. Energy, 23(4-5), 321-332, 1996.
- [79] Byerly, W. E., Zonal Harmonics. Ch. 5 in An Elementary Treatise on Fourier's Series, and Spherical, Cylindrical, and Ellipsoidal Harmonics, with Applications to Problems in Mathematical Physics, New York, Dover, 144-194, 1959.

ÖZGEÇMİŞ

1. Adı Soyadı : Ökkeş EGE
2. Doğum Tarihi : 11/11/1977
3. Unvanı : -
4. Öğrenim Durumu : Lisans

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Bitirme Yılı
Lisans	Fizik Eğitimi	Balıkesir Üniversitesi, Necatibey Eğitim Fak.	1999
Yüksek Lisans	Fizik	Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü	2016

5. İş Tecrübesi:

Görev Unvanı	Görev Yeri	Yıl
Öğretmen	Kuskan İ.Ö.O. / Mersin	2000
Öğretmen	Evrenpaşa İ.Ö.O. / Bitlis	2004
Öğretmen	Hasanbeyli Lisesi / Osmaniye	2010
Öğretmen	Ahmet Cevdet Paşa A.L. / Osmaniye	2014

6. Ulusal hakemli dergilerde yayımlanan makaleler:

Ege, Ö., Öztürk, H., Bülbül A., Diffusion approximation to neutron transport equation with first kind of Chebyshev polynomials, SDÜ Journal of Science (e-journal), 10(2), 92-96, 2015.

7. Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında basılan bildiriler:

Öztürk, H., Ege, Ö., Application of the Henyey-Greenstein phase function for the backward scattering of one-speed neutrons in slab geometry, Theoretical and

Experimental Studies in Nuclear Applications and Technology,basımda, Hatay, 2016.

Öztürk, H., **Ege, Ö.**, An alternative phase function for the eigenvalue problem to one-dimensional transport equation, Theoretical and Experimental Studies in Nuclear Applications and Technology,basımda, Hatay, 2016.