



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜLERİ
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa POYRAZ

**DÖNEL BİR HALKASAL BOŞLUKTA
BULUNAN MANYETİK AKIŞKANIN
GALERKİN SOLENOİDAL YÖNTEMİ
İLE DOĞRUSAL KARARLILIK ANALİZİ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OSMANİYE – 2016

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**DÖNEL BİR HALKASAL BOŞLUKTA BULUNAN
MANYETİK AKIŞKANIN GALERKİN SOLENOİDAL
YÖNTEMİ İLE DOĞRUSAL KARARLILIK ANALİZİ**

Mustafa POYRAZ

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**OSMANİYE
AĞUSTOS-2016**

TEZ ONAYI

DÖNEL BİR HALKASAL BOŞLUKTA BULUNAN MANYETİK AKIŞKANIN GALERKİN SOLENOİDAL YÖNTEMİ İLE DOĞRUSAL KARARLILIK ANALİZİ

Mustafa POYRAZ tarafından Yrd. Doç. Dr. Durmuş YARIMPABUÇ danışmanlığında, Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalı'nda hazırlanan bu çalışma, aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği/çokluğu ile **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Durmuş YARIMPABUÇ
Matematik Anabilim Dalı, OKÜ

Üye: Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM
Matematik Anabilim Dalı, KSÜ

Üye: Yrd.Doç. Dr. Baran AYDIN
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Adana BTÜ

Yukarıdaki jüri kararı Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve/..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdullah Ali GÜRTEN
Enstitü Müdürü, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Bu Çalışma OKÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi Tarafından Desteklenmiştir.

Proje No: OKÜBAP-2014-PT3-003

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler,şekil,çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, bu çalışma sonucunda elde edilmeyen her türlü bilgi ve ifade için ilgili kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını ve bu tezin Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Mustafa POYRAZ



ÖZET

DÖNEL BİR HALKASAL BOŞLUKTA BULUNAN MANYETİK AKIŞKANIN GALERKİN SOLENOİDAL YÖNTEMİ İLE DOĞRUSAL KARARLILIK ANALİZİ

Mustafa POYRAZ

Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı

Danışman :Yrd. Doç. Dr. Durmuş YARIMPABUÇ

Ağustos 2016, 45 sayfa

Bu çalışmada, sabit bir Ω açısal hızında dönen ve halkanın iç ve dış yüzeyleri arasında sıcaklık farkı bulunan bir halkasal boşluktaki elektriksel olarak iletken akışkanın homojen bir B manyetik alan altındaki konveksiyon hareketinin başladığı an sayısal benzetim yoluyla modellenmektedir. Halkanın iç ve dış yüzeylerinin kapalı sınır şartını sağladığı kabul edilmiştir. Sayısal yöntem hız ve indüklenmiş manyetik alan değişkeninin sınır şartlarını sağlayan solenoidal baz fonksiyonları cinsinden yazılmasına dayanmaktadır. Sıcaklık değişkeni de sınır şartlarını sağlayan baz fonksiyonları cinsinden yazılmıştır. Hareketi modelleyen kısmi diferansiyel denklemler, çifte baz fonksiyonları tarafından karşılanan alt uzaya Galerkin yöntemiyle yansıtılarak zamana bağlı açılım katsayılarının evrimini modelleyen adi diferansiyel denklem sistemine indirgenmiştir. Bu işlem sırasında, momentum denkleminde bulunan basınç terimi ortadan kalkmaktadır. Bu sistem, doğrusal akış rejiminde Solenoidal baz ve yansıtma prosedürünü test etmek için çeşitli sayısal deneylerde kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Termal konveksiyon, Dönen halka, Manyetik alan, Solenoidal bazlar, Legendre polinomları.

ABSTRACT

LINEAR STABILITY ANALYSIS OF THE MAGNETIC FLUID IN A ROTATING CYLINDRICAL ANNULUS BY USING SOLENOIDAL GALERKIN METHOD

Mustafa POYRAZ
M.Sc., Department of Mathematics
Supervisor :Assist.Prof.Dr. Durmuş YARIMPABUÇ

August 2016, 45 pages

In this study, onset of convection motion of a electrically conducting fluid in an annular space, which rotates with a certain angular velocity Ω and has a temperature difference between the inner and outer surface of the annulus, is numerically simulated under a homogeneous magnetic field B . The rigid boundary conditions are considered to provide both the inner and outersurfaces of annulus. The numerical technique is based on solenoidal basis functions satisfying the boundary conditions for both velocity and induced magnetic field. The expansion bases for the thermal field are also constructed to satisfy the boundary conditions. The governing partial differential equations are reduced to a system of ordinary differential equations governing the time evolution of the expansion coefficients under Galerkin projection on to the subspace spanned by the dual bases. In the process, the pressure term in the momentum equation is eliminated. This system is used in various numerical experiments in the linear flow regime to test the solenoidal basis and reflect the procedure.

Key Words: Thermal convection, Rotating annulus, Magnetic fields, Solenoidal bases, Legendre polynomials.



Sevgili Aileme

TEŐEKKÖR

Yüksek Lisans tez konumun belirlenerek tez alışmamın yürütölmesini üstlenen, alışmalarım süresince değerli bilgi, tecrübe ve katkılarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Do. Dr. Durmuş Yarımpabu'a ve bu süreçte desteğini esirgemeyen hayat arkadaşım Kübra Poyraz'a teőekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

TEZ ONAYI	
TEZ BİLDİRİMİ	
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İTHAF SAYFASI	iii
TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1 GİRİŞ	1
1.1 Maxwell Denklemleri ve Lorentz Kuvveti	1
1.2 Coriolis Kuvveti	5
1.3 Önceki Çalışmalar	6
2 TEMEL FORMÜLASYON	12
3 SOLENOİDAL BAZ FONKSİYONLARI	16
3.1 Hız için Solenoidal Bazlar	16
3.2 Yansıtma için Çifteş (Dual) Bazların Oluşturulması	19
3.3 Manyetik Alan için Solenoidal Bazlar	22
3.4 Manyetik Solenoidal Bazların Analitik Çözümü	24
3.5 Sıcaklık için Solenoidal Bazlar	27
4 DENKLEMLERİN ZAYIF FORMU	28
4.1 Sayısal Yöntem	31
5 DOĞRUSAL KARARLILIK ANALİZİ	34
6 SONUÇLAR	40
KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ	45

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1.1 Maxwell denklemlerinin toplam yük ve akımlar cinsinden integral ve diferansiyel formları	2
Çizelge 1.2 Maxwell denklemlerinin serbest yük ve akımlar cinsinden integral ve diferansiyel formları	2
Çizelge 1.3 Maxwell denklemlerinde bulunan sembollerin anlamları ve birimleri . . .	3
Çizelge 5.1 Coriolis ve Chandrasekhar parametreleri için kritik Rayleigh değerleri, Ra_c .	37
Çizelge 5.2 Coriolis ve Chandrasekhar parametreleri için kritik dalga sayıları, k_c .	38



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Dönen halkasal sistemin şematik gösterimi.	12
Şekil 2.2	Periyodik konvektif alan geometrisi	12
Şekil 5.1	Farklı Coriolis ve Chandrasekhar parametreleri için kritik Rayleigh değerleri.	37
Şekil 5.2	Farklı Coriolis ve Chandrasekhar parametreleri için kritik dalga sayıları. .	38
Şekil 5.3	Artan Coriolis ve Chandrasekhar parametreleri için doğrusal kararlılık eğrisi.	39



SİMGELER VE KISALTMALAR

d	soğuk ve sıcak plaka arasındaki uzaklık
B_0	manyetik alan
\mathbf{b}	indüklenmiş manyetik alan
g	yerçekim ivmesi
Π	basınç
\mathbf{u}	hız vektörü
t	zaman
x, y, z	boyutsuz koordinatlar
Θ	lineer iletken sıcaklıktan sapma
Ω	açısal hız
β	termal genişleme katsayısı
ν	kinematik akışmazlık (viskozite)
ρ	yoğunluk
μ	manyetik geçirgenlik
λ	manyetik difüzyon
κ	termal difüzyon
ζ	özdeğerler
ΔT	plakalar arasındaki ısı farkı
k_c	kritik dalga sayısı
k	dalga sayısı
Ra_c	kritik Rayleigh sayısı
Ra	Rayleigh sayısı
Q	Chandrasekhar sayısı
Pr	Prandtl sayısı
τ	Coriolis sayısı

1. GİRİŞ

1.1 Maxwell Denklemleri ve Lorentz Kuvveti

1800'lü yılların sonunda James Clerk Maxwell'in maddenin elektrik ve manyetik alanlardaki etkileşimini incelemesi sonucunda, bugün hala geçerliliğini koruyan ve birçok çalışmanın temelini oluşturup kendi adıyla da isimlendirilen vektör gösteriminde dört tane Maxwell denklemi mevcuttur. Bu denklemler o kadar düzenlidir ki, Lorentz dönüşümleri altında değişmez (invariant) kalırlar.

Lorentz kuvveti, fizikte, özellikle elektromanyetizmada, elektromanyetik alanların oluşturduğu noktasal yük üzerindeki elektrik ve manyetik kuvvetlerin bileşkesidir. Eğer q yük içeren bir parçacık bir elektriksel E ve B manyetik alanın var olduğu bir ortamda v hızında ilerliyor ise bir güç hissedecektir. Oluşturulan herhangi bir kuvvet için, bir de reaktif kuvvet vardır. Manyetik alan için reaktif kuvvet anlamlı olmayabilir, fakat her durumda dikkate alınmalıdır. Bu temel denklemdeki farklılıklar, akım taşıyan teldeki manyetik alan kuvvetini tanımlamaktadır (Bazen Laplace kuvveti olarak da anılır). Manyetik alan içinde ilerleyen kapalı tel döngü üzerindeki elektromotiv kuvveti ve ışık hızında hareket eden yük taşıyan bir parçacık üzerindeki kuvveti tanımlar (Lorentz kuvvetinin relativite formudur). Tarihçiler her ne kadar ilk çalışmaları 1865 yılında James Clerk Maxwell yazdığı bir makaleyle ilişkilendirilerde Lorentz kuvvetinin ilk geliştirilmesi, 1889 yılında Oliver Heaviside'a atfedilmektedir. Hendrik Lorentz denklemi Heaviside'dan birkaç yıl sonra geliştirmiştir.

Elektrik ve manyetik alanlardan türetilen ve elektromanyetizma için büyük önem arzeden Maxwell denklemlerinin gerek serbest gerekse toplam yük ve akımlar cinsinden, gerek birimsel gösterimleri cinsinden, gerekse ele alınan fiziksel sistemin makroskopik ya da mikroskopik olması yönünden farklı türde integral ve diferansiyel yazılımları mevcuttur.

Maxwell denklemlerinin integral formları ile diferansiyel formlarının tanımlamaları birbirleriyle aynı anlamı taşımaktadır. Diferansiyel formları, integral formlarından yola çıkılarak sırasıyla diverjans ve Stokes teoremlerinin uygulanmasıyla elde edilmektedir. Sonuç olarak Maxwell denklemlerinin diferansiyel şekillerinin daha kısa ve anlaşılır

gösterimlerinin olduğu, ancak noktasal veya sürekli yük dağılımlarının ele alındığı sistemler için integral formlarının daha kullanışlı oldukları söylenebilir. Maxwell denklemlerinin toplam yük ve akımlar cinsinden integral ve diferansiyel formları Çizelge 1.1 özetlenmiştir.

Çizelge 1.1 Maxwell denklemlerinin toplam yük ve akımlar cinsinden integral ve diferansiyel formları

$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{i\zeta}}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$	Elektrik Alanları için Gauss yasası
$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Manyetik Alanlar için Gauss yasası
$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Faraday yasası
$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \vec{I} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Ampere-Maxwell Yasası

Serbest yük ve akımlar cinsinden Maxwell denklemlerinin integral ve diferansiyel formları ise, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ ile $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ yapı denklemleri ve $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ kabulüyle Çizelge 1.2'deki gibi yazılmaktadır.

Çizelge 1.2 Maxwell denklemlerinin serbest yük ve akımlar cinsinden integral ve diferansiyel formları

$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{serbest}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{serbest}$	Elektrik Alanları için Gauss yasası
$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Manyetik Alanlar için Gauss yasası
$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Faraday yasası
$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{serbest} + \frac{d\Phi_E}{dt}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{serbest} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	Ampere-Maxwell Yasası

Maxwell denklemlerinin her iki gösteriminde bulunan terim ve semboller ile bu sembollerin anlam ve birimleri Çizelge 1.3’de gösterilmiştir.

Çizelge 1.3 Maxwell denklemlerinde bulunan sembollerin anlamları ve birimleri

Sembol	Anlam	Birim(SI birim sisteminde)
Q	Elektriksel Yük	C
Φ_E	Elektriksel Akı	$N.m^2/C$
Φ_B	Manyetik Akı	$T.m^2$ veya Wb
\vec{E}	Elektriksel Alan Vektörü	V/m veya N/C
\vec{H}	Manyetik Alan Vektörü	A/m
\vec{D}	Elektrik Akı Yoğunluğu veya Elektriksel Deplasman Vektörü	C/m^2 veya $N/V.m$
\vec{B}	Manyetik Akı Yoğunluğu veya Manyetik indüksiyon Vektörü	T veya Wb/m^2
ρ_e	Elektrik Yük Yoğunluğu	C/m^3
\vec{J}	Elektrik Akım Yoğunluğu Vektörü	A/m^2
ϵ_0	Boş Uzayın Elektriksel Geçirgenlik Sabiti	F/m veya $C/N.m^2$
μ_0	Boş Uzayın Manyetik Geçirgenlik Sabiti	H/m veya N/A^2

Maxwell denklemlerinin fiziksel sistemler için ne anlama geldikleri de şöyle özetlenebilir. Elektrik alanlar için Gauss yasası, herhangi kapalı bir S yüzeyinden geçen toplam elektrik akısının, bu yüzeyin içinde kalan toplam yükün ϵ_0 ’a bölümüne eşit olduğunu söylemektedir. Yani, kapalı bir yüzeyin içindeki toplam yük, yüzey içinde kalan elektrik alan çizgilerinin sayısı ile orantılıdır. Statik alanlar için bu kanun Coulomb kanununa eşittir. Gauss yasası, diğer bir deyişle, kapalı bir yüzeydeki elektrik alan akısının, bu yüzey tarafından çevrelenmiş olan hacimde bulunan net yük ile orantılı olduğunu ifade eder.

Manyetik alanlar için Gauss yasası, herhangi kapalı bir S yüzeyinden geçen net manyetik akının sıfır olduğunu ifade etmektedir. Başka bir deyişle, kapalı S yüzeyiyle çevrelenmiş V hacmine giren manyetik alan çizgilerinin sayısı hacmi terk eden manyetik alan çizgilerinin sayısına eşittir. Bu durum ise manyetik alan çizgilerinin herhangi bir noktadan başlayıp belli bir noktada son bulmayacağını anlatmaktadır. Bu duruma en önemli örnek ise çubuk mıknatıs ile verilebilir. Yani, N ve S kutbuna sahip çubuk bir mıknatıs, ne kadar ikiye bölünürse bölünsün her zaman yine N ve S kutbu oluşmaktadır; kısacası manyetik tek kutup yoktur. Kapalı bir yüzeydeki manyetik alan akısının sıfır olduğunu ve dolayısıyla manyetik yüklerin var olmadığını belirtir.

Faraday yasasına göre, herhangi kapalı bir yol boyunca elektrik alanın çizgi integrali (yani elektromotor kuvveti), kapalı yol boyunca çevrelenen herhangi bir yüzey alanından geçen manyetik akının zamanla değişim hızına eşittir. Bu denklemlerle zamanla değişen manyetik alanların bir elektrik alan ürettiği anlaşılmaktadır.

Ampere-Maxwell yasası, Ampere yasasının Maxwell tarafından düzenlenmiş halidir. Maxwell bu denklemi geliştirmiş ve denkleme, denklemin sağ tarafındaki ikinci terimi eklemiştir. Bu denklem, kapalı bir ilmek boyunca manyetik alanın çizgi integralinin iki terimin toplamına eşit olduğunu göstermektedir. Bu iki terimden ilki, kapalı ilmeğin sınırladığı yüzeyden geçen net akımı ihtiva eder. Maxwell tarafından eklenen ikinci terim ise bu kapalı ilmeğin sınırladığı yüzeydeki elektrik alan akısının zamanla değişimini ifade eder. Maxwell'in bu düzenlemesi ile elektrik alandaki zamanla değişimin manyetik alan oluşturduğunu göstermektedir. Maxwell'in denkleme yaptığı bu katkı, elektromanyetik teoremin temel çatısını oluşturmaktadır. Bu denklem, Elektrik akımlarının ve zamanla değişen elektrik alanlarının bir manyetik alan oluşturacağını söylemektedir. Şöyle ki, herhangi kapalı bir yol boyunca manyetik alanın çizgi integrali, kapalı yol boyunca geçen elektrik akımı ile ϵ_0 'ın çarpımı ve bu kapalı yol boyunca sınırlanmış herhangi bir yüzeyden geçen elektrik akısının $\epsilon_0\mu_0$ ile çarpımının toplamına eşittir.

Maxwell denklemlerinin bulunmasının ardından bu denklemlerin boşlukta ve maddesel ortamlardaki tanımlamaları yapılmıştır. Bu tanımlar yapılırken ele alınan ortamların anizotropluk, izotropluk ve bi-izotropluk gibi özellikleri icelenebilir. $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ ve $\vec{B} = \mu\vec{H}$ ile ifade edilen yapı denklemlerinde ortamın elektrik ve manyetik geçirgenlik

sabitleri maddesel ortamlarda herhangi ε ve μ gibi değerler alırken, boş uzayda ise ε_0 ve μ_0 şeklinde sabitler olurlar. O halde herhangi bir ortamda en genel Maxwell denklemleri SI birim sisteminde,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon} \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

şeklinde verilebilir. Maxwell bu dört denklemden yararlanarak zamanla değişen elektrik ve manyetik alanlarının birbirleri ile ilişkili olduğunu; yani zamanla değişen elektrik alanın (1.4) denklemine göre hemen yanında bir manyetik alan yarattığını, bu bölgede zamanla değişen manyetik alanın (1.3) denklemine göre bir elektrik alan doğurduğunu, böylece elektrik ve manyetik alanların birbirlerini yarata yarata elektromanyetik dalganın uzayda yayıldığını, herhangi bir anda elektrik ve manyetik alanın bir yayılma doğrultusuna ve birbirlerine dik olduğunu, elektromanyetik dalgaların boşlukta ışık hızında yayıldıklarını, enerji ve momentumu bir bölgeden diğerine taşıdıklarını ispatlamıştır.

1.2 Coriolis Kuvveti

Dünyanın kendi eksenini etrafında dönmesinden dolayı meydana gelen saptırıcı kuvvette Coriolis kuvveti denir. [Fransız matematik ve fizikçisi, Gustave Gaspard Coriolis (1792-1843) onuruna atfen bu ad verilmiştir.] Coriolis kuvveti, hareket halindeki nesnelerin kuzey yarımkürede sağa doğru sapmasına neden olur. Güney yarımküre için de sola doğru sapma meydana gelir. Bu saptırıcı kuvvetin şiddeti özellikle "hız"a ve "enlem derecesi"ne bağlıdır. Coriolis kuvveti ekvatorda sıfırdır. Kuvvet kutuplara doğru gidildikçe artar ve kutuplarda maksimum değerini alır. Yeryüzünün herhangi bir noktasındaki hareketsiz (sabit) nesne için Coriolis

kuvveti sıfırdır. Coriolis kuvveti, dönen bir platformun merkezinden karşı tarafa yürümeye çalışan birisi tarafından anlaşılabilir. Bu kişi, yürümek istediği tarafa doğru dik açıyla itildiğini görür. Havaya doğru düşey atılan bir topun dönen dünyanın merkezine olan mesafesi büyüyecektir. Tekrar yerine düşmesinde ve atıldığı noktanın aynı zaman aralığında aldığı mesafeden daha büyük bir yay boyunca hareket eder. Bu, topun bir çeşit ivmelendirilmiş olması gerektiği ve dolayısıyla kuvvet etkisi altında bulunduğunu gösterir. Bu tür kuvvetler, meteorolojide ve okyanus biliminde önemlidir. Genel olarak dönen bir referans sistemindeki hareket eden cismin yörüngesine dik olarak etki eder. Bunlar görünen zahiri kuvvetlerdir. Mesela; dönen bir plak üzerine düz bir çizgi eğri şeklinde belirir. Eğer plak ortasında bir gözleyici bulunursa, o kimse tepesinin bir kuvvetle kenara doğru itildiğini sanmasına yol açar. Benzer olay, dünya gibi üç boyutlu dönen bir sisteme nazaran hareket ettiğinde müşahade edilir. Rüzgar ve okyanus akımlarında bu kuvvetin etkisi görülür. Yörüngelerine dik hareket etme eğilimi gösterirler, bu kuvvetler uzun menzilli füzelerin yörüngelerinin hesaplanmasında önemli rol oynar. Benzer şekilde, dönen yer kürenin yüzeyi üzerinde hareket eden hava, kuzey yarım kürede hareket yönünün sağına, güney yarım kürede soluna saptırır. Bu durumda Coriolis kuvveti ($F = 2V\Omega \sin \phi$) denklemi ile verilir. Burada; V rüzgar hızı, Ω yerin açısal hızı, ϕ enlem derecesidir.

1.3 Önceki Çalışmalar

Bir çok astrofizik ve jeofizik olayında, dönen bir akışkan tabakasındaki hidromanyetik konveksiyon önemli bir rol oynar. Astrofizik ve gezegensel fizik uygulamalarından dolayı, elektriksel iletken bir akışkanda dönele hidromanyetik konveksiyon sistemi ile hidromanyetik problemlerinde sıklıkla karşılaşılmaktadır. Bu hidromanyetik konveksiyon problemlerinde, yıldızsal ve gezegensel akışkan dinamiği problemlerine benzerliğinden dolayı, dönme, manyetik alan ve yerçekimi etkisinin birbirine dik olduğu durum en çok rastlanılanıdır. Özel olarak alttan ısıtılıp üstten soğutulan akışkan tabakalar üzerinde birbirlerine ve yerçekimi vektörüne dik uygulanan dönme ve manyetik alanın etkisi, geometrinin basitliği ve kararsızlığın başlangıcının kolayca hesaplanabilmesi sebebiyle konvektif akımların en çok çalışılan problemlerinden birisidir. Alttan ısıtılıp üstten soğutulan akışkan tabakalara örnek verecek olursak bir

cezvenin içerisine su koyup alttan ısıtıgımızda, ısı alttan su taneciklerinin birbirine teması ile iletim yoluyla yukarıya doğru taşınır ve belli bir süre sonra kabarcıklar çıkar ve taşınım başlamış olur işte bu taşınımın başladığı an bizim sistemimizde manyetik akışkanlar için kritik Rayleigh sayısının değeridir. Burada Rayleigh sayısı, kaldırma kuvvetinin akmazlığa olan oranını gösterir.

Düzgün manyetik alan ve dönme etkisi altında Bénard tabakalarındaki termal kararsızlığın başlaması için ilk teorik çalışmalar Chandrasekhar [1, 2, 3] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalarda, farklı sınır koşulları için doğrusal teori, manyetik alan ve dönme etkisinin sisteme ayrı ayrı ve birlikte uygulanması şeklinde geniş ölçüde tartışılmıştır. Konveksiyon başlangıcı üzerinde döndürmenin ve manyetik alanın ayrı ayrı önleyici etkisi olmasına rağmen, birlikte uygulandıklarında sistemde negatif yönde etki oluşturdukları görülmüştür. Buna ek olarak, her iki etkinin sisteme aynı anda uygulandığında konveksiyonun başlangıcını gösteren kritik Rayleigh sayısının değeri, sisteme ayrı ayrı uygulanan döndürme ve manyetik alan durumundan daha küçük olduğu görülmüştür.

Nakagawa [4], sayısal ve teorik yaklaşımların sınırlı olduğu zamanlarda, bir katmandaki istikrarsızlığı anlamak için manyetik alan ve dönme etkisi altında alttan ısıtılan civa üzerinde bazı deneysel çalışmalar gerçekleştirmiştir. Kararsızlığın başladığı, kararlılığın üstünde ve hücrel konveksiyon anındaki kritik Rayleigh sayılarını farklı Coriolis ve Chandrasekhar sayıları için belirlemiştir. Chandrasekhar'ın yaptığı teorik çalışmadaki öngörülerine benzer şekilde deneysel verilerle de kararlılığın üstünde ve konveksiyon arasında kritik bir alanda süreksiz geçişlerin olduğunu tespit etmiştir. Ayrıca, teoride olduğu gibi kritik Rayleigh sayısının Coriolis ve Chandrasekhar sayısına bağlılığını deneysel olarak da göstermiştir.

Nakagawa [5], hem tek başına manyetik alanın etkisinde hem de manyetik alan ve döndürmenin etkisi altında alttan ısıtılan civa akışkanının marjinal kararlılık durumunda konveksiyon rulolarının boyutlarının belirlenmesi için birtakım deneyler yapmıştır. Deneylerle, marjinal kararlılıkta görünen düzensiz dalga sayısı ile ilgili Chandrasekhar'ın teorik tahminleri doğrulanmıştır. Özellikle, akış hem manyetik alan hem döndürmenin etkisinde iken kontrol parametresinin yükselmesi ile birlikte hücrel konveksiyondan kararlılığın üstündeki konveksiyona geçişte dalga sayısında süreksiz

değişiklikler olduğu doğrulanmıştır.

Alttan ısıtılıp üstten soğutulan elektriksel olarak iletken vizkoz bir akışkanın doğrusal kararlılığı, sıkıştırılmayan dönel ve magnetokonveksiyon modelleri düzlemsel kartezyen geometride Boussinesq yaklaşımı altında Eltayeb [6, 7] tarafından incelenmiştir. Farklı sınır koşulları altında, bir çok farklı manyetik alan ve döndürme eksenleri ele alınmıştır. Kutup bölgelerini modellemek için yerçekim kuvveti ile döndürme eksenini birbirlerine paralel seçilirken, ekvatora yakın bölgeleri modellemek için birbirlerine dik oldukları durum ele alınmıştır. Yapılan bu çalışmalarda, büyük Coriolis ve manyetik alan değerleri çalışılmıştır. Hidromanyetik durumlarda Taylor-Proudman teoremi ve bu teoremin uzantılarının geçerli olmadığını göstermiştir. Bununla birlikte tabakanın iç kısmında, konvektif hareketlere maruz kalan Coriolis kuvvetinin Lorentz kuvveti ile dengelendiği gösterilmiştir. Eltayeb'in yaptığı bu çalışmanın sıkıştırılabilir akışkanlara genişletilmiş hali Jones vd. [8] tarafından çalışılmıştır.

Dünya ve gezegenlerin manyeto-hidrokinamik yapısını daha iyi anlamak için Eltayeb ve Kumar [9], hidromanyetik dönen sistemlerinde konvektif hareketleri üzerine yaptıkları çalışmada, azimutal yönde uygulanan manyetik alan etkisinde dönel küresel bir geometride termal konveksiyon problemini sayısal olarak çözmüşlerdir. Çalışmada tüm olası manyetik alan kuvvetleri ele alınmıştır. Elde ettikleri sonuçların, Eltayeb'in [6, 7] düzlem geometride yaptığı çalışmalarla uyum içinde olduğunu gözlemlemişlerdir.

Fearn [10], azimutal yönde uygulanan küçük manyetik alan etkisinde halkasal modelin geçerli olduğu hızla dönen küresel bir geometride termal konveksiyon problemini Boussinesq yaklaşımı altında analitik olarak çözmüştür. Küçük ancak sıfır olmayan manyetik alan etkisindeki sistemler için, halkasal modelin küresel modelle uyum içinde olduğunu göstermiştir.

Longbottom vd. [11], Dünya'nın dış çekirdek dinamiklerini anlamak için manyetik alana sahip olan dönel küresel kabuğun, konveksiyonun başladığı andaki durumunu incelemişlerdir. İç çekirdekte sonlu iletim olduğu, iç ve dış çekirdekte de kaymazlık sınır koşullarını sağladığı göz önünde bulundurularak sayısal olarak çözümlenmiştir. Sonuçların belli modlarda geomanyetik verilerle çakıştığını gözlemlemişlerdir. Ayrıca sonuçlarının büyük ölçekli konveksiyonun dünyanın dış

çekirdeğinde meydana geldiği hipotezini de desteklediğini gözlemlemişlerdir.

Friedrich vd. [12], alttan ısıtılan elektriksel olarak yalıtkan duvarlara sahip silindirik bir kap içindeki elektriksel olarak iletken bir eriyik akışkan üzerine etki eden döndürme ve manyetik alan etkilerini deneysel ve sayısal olarak incelemişlerdir. Taylor sayısının Grashof sayısına oranının onda birden (0,1) değerden küçük olması durumunda dönme yönüyle aynı yönde ilerleyen düzenli termal dalgaların varlığını gözlemlemişlerdir. Daha büyük oran değerleri için küçük genlikli ve yüksek frekanslı dikey silindir duvarlarında üretilen Taylor girdapları ile ilişkilendirilebilen termal dalgalanmaları elde etmişlerdir. Ayrıca, kararlılık diyagramında farklı salınım modlarını özetlemişlerdir.

Aurnou ve Olson [13], rijid plakalar arasındaki düşük Prandtl sayısına sahip akışkana (galyum) dikey yönde yerçekimine paralel olarak uygulanan döndürme ve manyetik alanın doğrusal ve doğrusal olmayan analizini, yüksek rotasyon ve manyetik alan parametreleri için ele almışlardır. Manyetik alan ve döndürmenin taşınımın başladığı an ve taşınımın evreleri üzerindeki etkilerini incelemişlerdir. Bu deneysel çalışmada, Rayleigh-Bénard konveksiyonu, manyetokonveksiyon ve döndürmenin magnetokonveksiyon üzerinde uygulanması durumları için Rayleigh sayısı ile Nusselt sayısı arasında empirik bağıntılar elde etmişlerdir. Chandrasekhar'da bahsedildiği gibi dikey yönde uygulanan manyetik alanın ve döndürmenin ayrı ayrı sisteme uygulanması sonucunda taşınımı geciktirdiği, aynı anda uygulanması ile bu gecikmenin azaldığını da göstermişlerdir.

Jeofizik ve astrofizik ile alakalı olmasından dolayı Brito and Cardin [14], sıvı sodyum kullanarak bir azimut manyetik alana sahip, halka şeklinde bir konfigürasyonda konveksiyon problemine yönelik bazı deneysel çalışmalar yapmışlardır. Sıvı metalin düşük viskozitesi, yerçekimi kuvvetini yeteri kadar büyük bir farkla aşabilmek için yüksek Coriolis değerlerinde deneyler yapılmasını zorunlu kılmış ancak bu durum, eksenal bir rulo yapısından sapan konveksiyon yapıları elde etmek için gerekli olan yüksek manyetik parametre değerine ulaşmalarını engellemiştir.

Julien vd [15], rijid plakalar arasındaki akışkana dikey yönde yerçekimine paralel olarak uygulanan döndürme ve manyetik alanın doğrusal ve doğrusal olmayan analizi, yüksek rotasyon ve manyetik alan parametreleri için incelemiştir.

Kurt vd. [16, 17] çalışmalarında, dönen silindirik bir halka içerisinde ve azimutal yönde uygulanan homojen bir manyetik alan etkisinde ve halkanın iç ve dış yüzeyleri arasında sıcaklık farkı bulunan elektriksel olarak iletken akışkanın radyal kaldırma kuvveti ile indüklendiği konveksiyon problemini ele almışlardır. Rijid silindirik sınırları ile birlikte küçük boşluk yaklaşımı (small gap approximation) kullanarak, Galerkin projeksiyonu ile birlikte üç boyutlu doğrusal ve doğrusal olmayan sayısal çözümleme yapmışlardır. Sonuç olarak, doğrusal ve doğrusal olmayan kararlılık bölgeleri elde edilmiş ve küçük bir parametre bölgesinde konveksiyonu incelenmelerine rağmen büyük bir çeşitlilik içeren uzay-zamansal desenleri (spatio-temporal patterns) elde etmişlerdir. Ayrıca, sonlu genişliklerde üç boyutlu hücrelere ve uzay-zamansal kaoslara ikincil geçişler (secondary transitions) elde etmişlerdir.

Gillet vd. [18], elektriksel olarak iletken sıvı galyum içinde termal manyetik konveksiyonu, hızla dönen küresel kabuk içinde sayısal ve deneysel olarak incelemişlerdir. Konveksiyon başlangıcındaki kritik parametrelerin değişiminden dolayı manyetik alanın stabilize edici etkisi olduğunu göstermişlerdir. Manyetik alanın olmadığı konveksiyon durumunda görüldüğü gibi, karakteristik uzunluk ölçeklerinin güçlü jet bölgelerinin akışkan dinamiklerinde baskın olduğunu gözlemlemişlerdir. Ayrıca, manyetik konveksiyon akışında, konvektif hücrelerin sisteme etki eden manyetik alan yönünde nasıl bir uzama oluşturduğunu analiz etmişlerdir.

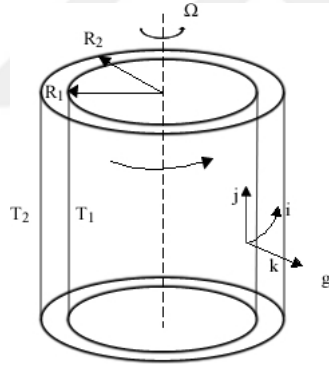
Rijid plakalar arasındaki akışkana dikey yönde yerçekimine paralel olarak uygulanan döndürme ve manyetik alanın doğrusal ve doğrusal olmayan analizi, rotasyon ve manyetik alan parametreleri için Yarım pabuç vd. [20] tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada, hız ve manyetik alanın süreklilik denklemlerini ve sınır koşullarını sağlayan ve solenoidal baz fonksiyonlarına dayanan Solenoidal-Galerkin yöntemi kullanılmıştır. Projeksiyondaki solenoidal bazlar da, sınır koşulu olmayan basınç terimini sistemden yok edecek şekilde elde edilmişlerdir. Süreklilik koşulları analitik olarak sağlandığından sayısal yöntem üzerinde yükün azaldığı ve buna bağlı olarak iri örgülü (coarse mesh) modellemeler de bile doğru sonuçlar elde edildiği vurgulanmıştır.

Bu sayısal çalışmada, homojen bir B manyetik alan altında elektriksel olarak iletken bir akışkanın belirli açısız hızda dönen ve halkanın iç ve dış yüzeyleri arasında sıcaklık farkı bulunan bir halkasal boşluktaki geometri için doğrusal kararlılık

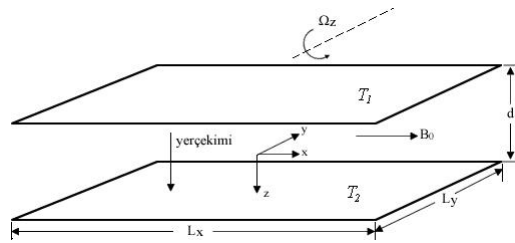
analizi ele alınmıştır. Yıldızsal ve gezegensel hesaplamalı akışkan dinamiği problemlerinde sıklıkla karşılaşılan, dönme eksenini ile uygulanan homojen manyetik alanın doğrultusunun birbirine dik ve bu iki etkinin yerçekimine dik olduğu durum incelenmiştir. Çalışmanın giriş bölümünde manyetik alan ve Coriolis kuvveti hakkında bilgiler verilmiş, bu konu ile ilgili yapılmış önceki çalışmalar anlatılmıştır. İkinci bölümde, temel formülasyon, sistemin geometrisi ve sınır koşulları anlatılmıştır. Üçüncü bölümde, solenoidal baz açılımı incelenmiş, süreklilik koşulu ile sınır koşullarını sağlayan hız için solenoidal baz fonksiyonları türetilmiştir. Basınç teriminin sistemden yok edilmesi için Galerkin yansıtma prosedüründe kullanılacak çiftes (dual) bazlar elde edilmiştir. Ayrıca sınır koşullarını sağlayan sıcaklık değişkeni içinde solenoidal bazlar oluşturulmuştur. Son olarak, manyetik alan ile hız arasındaki yarı-durağan ilişkiyi sağlayan bağıntı kullanılarak manyetik alan için solenoidal bazlar analitik olarak elde edilmiştir. Dördüncü bölümde, Galerkin yansıtma prosedürü ile model denklemleri zayıf forma indirgenmiş ve daha sonra matris forma dönüştürülmüş sayısal yöntem hakkında detaylı bilgiler verilmiştir. Beşinci bölümde, doğrusal kararlılık analizi yapılmış, sonuçlar tablolar ve grafikler halinde sunulmuştur. Son bölümde çalışmanın sonuçları verilmiştir.

2. TEMEL FORMÜLASYON

Bu çalışmada, dönen bir halkasal boşlukta bulunan elektriksel olarak iletken viskoz ve sıkıştırılmaz bir akışkanın homojen bir manyetik alan altındaki doğrusal kararlılık analizi sayısal olarak incelenecektir. Yerçekimi, döndürme ve manyetik alan etkisindeki bu sistem şematik olarak Şekil 2.1 ve Şekil 2.2'de gösterilmiştir. Bu geometride yerçekim kuvveti g , \mathbf{k} birim vektörü yönünde olup merkezlidir. Sisteme uygulanan manyetik alan B_0 , \mathbf{i} birim vektörü yönünde, dönme eksenini \mathbf{j} birim vektörü yönünde seçilerek dönme eksenini ile uygulanan manyetik alanın doğrultusunun birbirine dik ve bu iki etkinin yerçekimine dik olduğu durum oluşturulmuştur. Yatay bir katmanda yüksekliği d kadar olan, iki tam iletken levha arasındaki sıvı alttan ısıtılıp üstten soğutulurken, $T_2 > T_1$ olmak kaydıyla, $T_2 - T_1 = \Delta T$ sabit olacak şekilde sisteme büyüklüğü B_0 olan manyetik alan yatay x yönünde, rotasyonda yatay y yönünde uygulanmaktadır.



Şekil 2.1 Döner halkasal sistemin şematik gösterimi.



Şekil 2.2 Periyodik konvektif alan geometrisi

Döndürme ve manyetik alan kontrol parametreleri altındaki taşınım için matematiksel bir model, akışkan hareketi, klasik elektromanyetizma denklemleri ve açısal dönmenin

birleştirilmesi ile elde edilir. Başka bir deyişle, Navier-Stokes denklemleri ile açılal dönmenin neden olduğu Coriolis kuvveti ve Maxwell denklemleri ile Ohm yasasından türetilen Lorentz kuvveti manyetohidrodinamik denklemlerini oluşturur. Coriolis kuvveti genel olarak hıza bağılıdır. Dönen sistemlerde Coriolis kuvvetinin yanı sıra sisteme etkileyen ve sistemin en-boy oranına bağılı olan bir merkezkaç kuvveti de vardır. Küçük en-boy oranları için yerçekiminden kaynaklanan kuvvete kıyasla merkezkaç kuvveti küçüktür [22]. Yapılan bu çalışma, küçük en-boy oranları içeren geometriler ile sınırlı olduğu için Coriolis kuvvetinin yanında merkezkaç kuvveti ihmal edilmiştir.

Bu sistemin denklemleri, iki plaka arasındaki küçük sıcaklık farkı varsayımı altında Boussinesq yaklaşımı kullanılarak elde edilir. Bu yaklaşımda, sıcaklık değışimi akış boyunca küçüktür, dolayısı ile yoğunluk değışimi de küçüktür. Bu yüzden sistem içindeki hareket sıcaklık farkına bağılı olarak kaldırma kuvveti ile oluşur. Bundan dolayı, yoğunluk değışimi kaldırma kuvveti dışında her yerde ihmal edilir. Burada, yoğunluğu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$\rho = \rho_2[1 - \beta(T_1 - T_2)] \quad (2.1)$$

Burada, T_1 ve T_2 sırasıyla plakanın üst ve alt sıcaklıklarını, ρ_2 , T_2 sıcaklığındaki yoğunluğu, gaz ve sıvılar için küçük olduğu Chandrasekhar(1961) [3] ve Davidson(2001) [23] tarafından gösterilen β ise termal genleşme katsayısını göstermektedir.

Bu durumda döndürme ve manyetik alan etkisinde, sıkıştırılmaz akışkanlar için kütle ve momentum korunumu denklemlerinin Boussinesq yaklaşımı altında kartezyen koordinatlardaki temel denklemlerinin boyutsuz halleri, hesaplama kolaylığı için yarı derinlik hariç ($d_h = \frac{1}{2}d$), boyutsuzlaştırma Chandrasekhar [3] (1961)'deki gibi uygulanmıştır. Buna göre düşey yöndeki $[-1/2, 1/2]$ aralığı $[-1, 1]$ aralığına dönüştürülmüş olur ki bu da düşey yönde Legendre polinomunun kullanılmasına olanak sağlar. Bu durumda sistemin boyutsuz denklemleri aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \Pi + PrRa_h \Theta \mathbf{e}_z + Pr \nabla^2 \mathbf{u} + Q_h Pr \left(\mathbf{e}_x + \frac{\kappa}{\lambda} \right) \cdot \nabla \mathbf{b} - 2Pr \Omega_h (\mathbf{e}_y \times \mathbf{u}), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z}{2} + \nabla^2 \Theta, \quad (2.4)$$

$$\frac{\kappa}{\lambda} \left[\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u} \right] = (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla^2 \mathbf{b} \quad (2.5)$$

$$\nabla \mathbf{b} = 0. \quad (2.6)$$

Burada tüm gradyant terimleri, basınç terimi olan $\nabla \Pi$ içinde toplanmıştır. \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z sırası ile x , y , z yönündeki birim vektörlerdir. $\mathbf{u} = (u, v, w)$ hız vektörünü, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ indüklenmiş manyetik alan vektörünü ve Θ lineer iletken sıcaklık profilinden sapmayı ifade eder.

Elde edilen boyutsuz parametreler, Rayleigh ($Ra = 8Ra_h$), Chandrasekhar ($Q = 4Q_h$), Coriolis ($\Omega = 4\Omega_h$) ve Prandtl (Pr) sayıları sırası ile

$$Ra = \frac{g\Delta T d^3 \beta}{\kappa \nu}, \quad Q = \frac{B_0^2}{\rho \mu \nu \lambda}, \quad \Omega = \frac{\Omega d^2}{\nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (2.7)$$

şeklinde verilmektedir. Burada, Rayleigh sayısı, kaldırma kuvvetinin viskoziteye oranını, Chandrasekhar manyetik alan şiddetini, Prandtl akma zılgın, termal difüzyona oranını göstermektedir. β termal genişleme katsayısı, κ termal difüzyon sabiti, ν kinematik viskozite, μ manyetik geçirkenlik ve λ manyetik difüzyon sabitini göstermektedir.

Sistemde boyutsuz formda bulunan manyetik alan en genel halde

$$B = \mathbf{e}_x + \frac{\kappa}{\lambda} \mathbf{b} \quad (2.8)$$

ile verilmektedir. $\kappa \ll \lambda$ özelliğine sahip bir akışkanda indüklenmiş manyetik alan b , dışarıdan uygulanan ve \mathbf{e}_x birim vektörü yönündeki manyetik alan ile karşılaştırıldığında önemsizdir. Ayrıca indüklenmiş manyetik alan \mathbf{b} , yarı-durağan ilişkide (2.5) belirtildiği gibi, hız vektörel alanı tarafından belirlenmiş bağımlı bir değişken olarak görülebilir. Sıvı metaller ve eriyikler bu sınırdaki karakterize edilir. Sıvı metaller için $\frac{\kappa}{\lambda}$ niceliği 10^{-5} mertebesinde. Bu çalışmada sıvı metaller düşünüldüğünden (2.5) denkleminin sol tarafı ihmal edilir.

Akışın $s_x \times s_y \times 2$ veya $\Gamma[1/2s_x : 1/2s_y]$ oranı ile Şekil 2.2'deki gibi iki kat periyodik üç boyutlu dikdörtgen bölgesinde yer aldığını varsayarsak,

$$0 \leq x \leq s_x, \quad 0 \leq y \leq s_y, \quad -1 \leq z \leq 1$$

olur. Burada $s_x = L_x/d_h$ ve $s_y = L_y/d_h$ sırasıyla x ve y yatay yönündeki boyutsuz periyotları göstermektedir. Periyodik sınır koşulları yatay yönde tüm bağımlı değişkenler için

$$\mathbf{u}(x + ms_x, y + ns_y, z, t) = \mathbf{u}(x, y, z, t)$$

$$\Theta(x + ms_x, y + ns_y, z, t) = \Theta(x, y, z, t)$$

$$\mathbf{b}(x + ms_x, y + ns_y, z, t) = \mathbf{b}(x, y, z, t)$$

şeklindedir. Burada m ve n tam sayılardır. Tam iletken plakalarda dikey yöndeki sınır şartları, kaymazlık ve sabit sıcaklık olarak

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{db_x}{dz} = \frac{db_y}{dz} = b_z = \Theta = 0, \quad z = \mp 1$$

formunu alır.

3. SOLENOİDAL BAZ FONKSİYONLARI

Sıkıştırılmaz akışların sayısal çözümleri yapılırken yüksek doğruluk derecesinde ve hassas sonuçlar elde etmek için, akışın üzerindeki solenoidal şartı ile süreklilik kısıtlaması üstesinden gelinmesi gereken önemli bir handikaptır. Bu amaçla literatürde kesirli adım [24], etki matrisi [25] ve şaşırtmalı ağ [26] metodları gibi bir çok yöntem mevcuttur. Bu yöntemlerde sınır şartları olmayan ve akış denklemindeki solenoidal şartını zorlayan basınç değişkeni sayısal olarak çözülmektedir. Dolayısı ile solenoidal şartı sınırlı bir doğruluk derecesine kadar sağlanmaktadır. Akışın karakter değiştirdiği hidrodinamik kararlılık çalışmalarında geçiş rejimleri arasındaki kiritik parametrelerin belirlenmesinde solenoidal şartının sağlanması önemlidir. Bununla birlikte, sisteme bir kontrol parametresi olarak eklenen manyetik alan değişkeni de ek bir solenoidal şartı getirir [27, 28].

Bu çalışmada solenoidal değişkenlerini modellemek için, bu yöntemlere alternatif bir yöntem olan solenoidal baz fonksiyonları kullanılmıştır. Bu yöntem ile hem hız ve manyetik alan için süreklilik denklemi analitik olarak sağlanır hem de Galerkin yansıtma yöntemi ile sistemde sınır koşulu olmadan bulunan basınç terimi sistemden yok edilir. Böylece hem denklem sayısı hem de bilinmeyen sayısı azalmış olur. Bu durum sayısal yöntem üzerindeki yükü azaltırken yöntemin doğruluğunu artırır.

Bu çalışmada, hız için solenoidal bazlar sadece süreklilik denklemi kullanılarak türetilirken, manyetik alan için solenoidal bazlar, hız ile manyetik alan arasındaki yarı-durağan ilişki (2.5) kullanılarak türetilir. Dolayısı ile manyetik alan için hem süreklilik denklemi otomatik olarak sağlanır hem de hız için kullanılacak olan zamana bağlı katsayılar manyetik alan için de geçerli olur ki bu işlem bu yaklaşımdaki en önemli adımdır. Burada, Legendre polinomlarına düşey (z) yönde bağlı olan solenoidal baz fonksiyonları sınır koşullarını sağlayacak şekilde seçilmiştir.

3.1 Hız için Solenoidal Bazlar

Hız için türetilen solenoidal bazlar, hem süreklilik denklemini hem de sınır koşullarını analitik olarak sağlayacak şekilde elde edilebilirler. Dolayısı ile, solenoidal

baz fonksiyonlarının sağlaması gereken koşullar

$$\nabla \cdot V_p = 0, \quad V_p(\mathbf{x}) \Big|_{z=\mp 1} = 0 \quad (3.1)$$

şekilde tanımlanır. Burada V_p hız için solenoidal baz ve $\mathbf{x} = (x, y, z)$ dir. Kullanılan geometrinin yatay yönde periyodiklik koşulunu sağlamasından dolayı, x ve y yönünde Fourier serisi kullanılmasına olanak verir. O halde hız için solenoidal baz

$$V_p(\mathbf{x}) = V_p(z)e^{(ik_x x + ik_y y)} \quad (3.2)$$

şeklinde yazılır. Solenoidal baz ifadesi (3.1) denkleminde yerine yazılırsa, süreklilik denklemi

$$ik_x U + ik_y V + \mathbb{D}W = 0 \quad (3.3)$$

formuna indirgenir. Burada $\mathbf{V}(z) = (U, V, W)$ ve $\mathbb{D} = d/dz$ türev operatörüdür. Süreklilik denklemi, üç hız bileşenini birbirine bağlayarak, bileşenlerin seçiminde serbestlik derecesini ikiye düşürür. Böylece,

$$V_p^{(j)}(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2 \quad (3.4)$$

solenoidal baz fonksiyonlar çifti elde edilir.

Hız için elde edilen süreklilik bağıntısından (3.3) yola çıkarak, solenoidal baz fonksiyonları aşağıdaki şekilde elde edilir:

Durum 1: $k_x \neq 0, k_y = 0$ için:

$$ik_x U + \mathbb{D}W = 0 \quad \Rightarrow \quad U = -\frac{\mathbb{D}W}{ik_x}$$

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\mathbb{D}W}{ik_x} \\ V \\ W \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \frac{i\mathbb{D}h}{k_x} \\ 0 \\ h \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow V_p^{(1)}(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_p^{(2)}(z) = \begin{bmatrix} \frac{i\mathbb{D}h}{k_x} \\ 0 \\ h \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Bu durum için, bazların diklik özelliğini sağladığı gösterilebilir ($V_p^{(1)} \cdot V_p^{(2)} = 0$).

Durum 2: $k_x = 0$, $k_y \neq 0$ için:

$$ik_y V + \mathbb{D}W = 0 \quad \Rightarrow \quad V = -\frac{\mathbb{D}W}{ik_y}$$

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ -\frac{\mathbb{D}W}{ik_y} \\ W \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{i\mathbb{D}h}{k_y} \\ h \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$V_p^{(1)}(z) = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_p^{(2)}(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{i\mathbb{D}h}{k_y} \\ h \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Bu durum için, bazların diklik özelliğini sağladığı gösterilebilir ($V_p^{(1)} \cdot V_p^{(2)} = 0$).

Durum 3: $k_x = 0$, $k_y = 0$ için

$$\mathbb{D}W = 0 \quad \Rightarrow \quad W = 0$$

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$V_p^{(1)}(z) = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_p^{(2)}(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Bu durum için, bazların diklik özelliğini sağladığı gösterilebilir ($V_p^{(1)} \cdot V_p^{(2)} = 0$).

Durum 4: $k_x \neq 0$, $k_y \neq 0$ için

$$ik_x U + ik_y V + \mathbb{D}W = 0 \quad \Rightarrow \quad U = -\frac{(ik_y V + \mathbb{D}W)}{ik_x}$$

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(ik_y V + \mathbb{D}W)}{ik_x} \\ V \\ W \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} (-\frac{k_y}{k_x})g \\ g \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \frac{i\mathbb{D}h}{k_x} \\ 0 \\ h \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Bu durum için, bazlar diklik özelliğini sağlamamaktadır ($V_p^{(1)} \cdot V_p^{(2)} \neq 0$). Gram-Schmidt prosedürünü kullanarak bu bazlardan birbirine dik iki baz elde edilebilir.

Dolayısı ile bu prosedür uygulanırsa,

$$V_p^{(1)}(z) = \begin{bmatrix} -\left(\frac{k_y}{k_x}\right)g \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_p^{(2)}(z) = \begin{bmatrix} ik_x \mathbb{D}h \\ k_y \mathbb{D}h \\ \gamma^2 h \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

şeklinde birbirine dik bazlar bulunur.

Burada, $\gamma^2 = k_x^2 + k_y^2$ yatay yönündeki dalga sayılarının toplamının karesini göstermektedir. $g(z)$ ve $h(z)$ fonksiyonları, Legendre polinomları ($L_p(z)$) cinsinden ve hız için türetilen solenoidal bazların sınır koşullarını sağlayacağı şekilde aşağıdaki gibi oluşturulmuşlardır.

$$g(z) = (1 - z^2)L_p(z)$$

$$h(z) = (1 - z^2)^2 L_p(z)$$

3.2 Yansıtma için Çifteş (Dual) Bazların Oluşturulması

Galerkin yansıtma prosedüründe kullanılacak çifteş bazlar, sadece süreklilik denklemini sağlamak zorundadırlar. Bunun yanında, sınır koşulu olmayan ve sıkıştırılmaz akışkanların çözümünde büyük bir sorun olan basınç terimi, çifteş bazlara, genelliği bozmadan, basit bir sınırlama getirilerek sistemden elimine edilebilir. Getirilecek bu sınırlamanın altında çifteş bazların sağlaması gereken koşullar:

$$\nabla \cdot \bar{V}_q = 0, \quad \bar{V}_q^{(j)} \cdot e_z \Big|_{z=\mp 1} = 0 \quad (3.13)$$

şeklinindedir. Galerkin yansıtma prosedürü basınç terimine uygulanırsa,

$$(\bar{V}, \nabla_p) = \iiint_{\Omega} \bar{V} \cdot \nabla_p d\Omega = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (p\bar{V}) d\Omega - \iiint_{\Omega} p \nabla \cdot \bar{V} d\Omega \quad (3.14)$$

şeklinde üç katlı integraller elde edilir. Çifteş baz (\bar{V}) süreklilik koşulunu sağladığından dolayı

$$\iiint_{\Omega} p \nabla \cdot \bar{V} d\Omega = 0 \quad (3.15)$$

integral ifadesi sıfıra eşit olur. Kalan integral ifadesi Gauss teoremi kullanılarak yüzey integraline dönüştürülürse

$$(\bar{V}, \nabla_p) = \iint_s p \bar{V} \cdot n dS \quad (3.16)$$

eşitliği elde edilir. Çiftleş bazların sağlanması gereken ikinci koşul $(\bar{V}_q^{(j)} \cdot e_z|_{z=\mp 1} = 0)$ ile yüzey integral terimi sıfır olur. Dolayısı ile basınç terimi galerkin projeksiyon altında momentum denkleminde düşer.

$$(\bar{V}, \nabla_p) = 0 \quad (3.17)$$

Navier-Stokes problemlerinin çözümünde büyük sorun olarak karşımıza çıkan süreklilik denklemi, solenoidal baz açılımının kullanılması ile analitik olarak sağlanmış ve sınır koşulu olmadan sistemde bulunan basınç terimi sistemden düşürülmüştür. Bu yöntem, Navier-Stokes problemi üzerindeki yükü azaltarak daha doğru çözüm elde edilmesinin yolunu açmıştır.

Çiftleş bazlar, hız için türetilmiş olan solenoidal bazlara benzer yöntem ile (3.13) koşullarını sağlayacak şekilde elde edilebilirler. Hız için elde edilen süreklilik bağıntısından (3.3) yola çıkarak, çiftleş bazlar için solenoidal baz fonksiyonları aşağıdaki şekilde elde edilir:

Durum 1: $k_x \neq 0, k_y = 0$ için:

$$ik_x \bar{U} + \mathbb{D}\bar{W} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{U} = -\frac{\mathbb{D}\bar{W}}{ik_x}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\mathbb{D}\bar{W}}{ik_x} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \frac{i\mathbb{D}g}{k_x} \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\Rightarrow \bar{V}_q^{(1)}(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{V}_q^{(2)}(z) = \begin{bmatrix} \frac{i\mathbb{D}g}{k_x} \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Bu durum için, çiftleş bazların diklik özelliğini sağladığı gösterilebilir $(\bar{V}_p^{(1)} \cdot \bar{V}_p^{(2)} = 0)$.

Durum 2: $k_x = 0, k_y \neq 0$ için:

$$ik_y \bar{V} + \mathbb{D}\bar{W} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{V} = -\frac{\mathbb{D}\bar{W}}{ik_y}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{U} \\ -\frac{\mathbb{D}\bar{W}}{ik_y} \\ \bar{W} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{i\mathbb{D}g}{k_y} \\ g \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\bar{V}_q^{(1)}(z) = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{V}_q^{(2)}(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{i\mathbb{D}g}{k_y} \\ g \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Bu durum için, çiftes bazların diklik özelliğini sağladığı gösterilebilir ($\bar{V}_p^{(1)} \cdot \bar{V}_p^{(2)} = 0$).

Durum 3: $k_x = 0$, $k_y = 0$ için

$$\mathbb{D}\bar{W} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{W} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\bar{V}_q^{(1)}(z) = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{V}_q^{(2)}(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Bu durum için, çiftes bazların diklik özelliğini sağladığı gösterilebilir ($\bar{V}_p^{(1)} \cdot \bar{V}_p^{(2)} = 0$).

Durum 4: $k_x \neq 0$, $k_y \neq 0$ için

$$ik_x\bar{U} + ik_y\bar{V} + \mathbb{D}\bar{W} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{U} = -\frac{(ik_y\bar{V} + \mathbb{D}\bar{W})}{ik_x}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(ik_y\bar{V} + \mathbb{D}\bar{W})}{ik_x} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} (-\frac{k_y}{k_x})f \\ f \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \frac{i\mathbb{D}g}{k_x} \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Bu durum için, çiftes bazlar diklik özelliğini sağlamamaktadır ($\bar{V}_q^{(1)} \cdot \bar{V}_q^{(2)} \neq 0$). Gram-Schmidt prosedürünü kullanarak bu bazlardan birbirine dik iki çiftes baz elde edilebilir.

Dolayısı ile bu prosedür uygulanırsa,

$$\bar{V}_q^{(1)}(z) = \begin{bmatrix} -(\frac{k_y}{k_x})f \\ f \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{V}_q^{(2)}(z) = \begin{bmatrix} ik_x\mathbb{D}g \\ k_y\mathbb{D}g \\ \gamma^2 g \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

şeklinde birbirine dik çiftes bazlar bulunur.

Burada, $\gamma^2 = k_x^2 + k_y^2$ yatay yönündeki dalga sayılarının toplamının karesini göstermektedir. $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları, Legendre polinomları ($L_q(z)$) cinsinden ve

hız için türetilen solenoidal bazların sınır koşullarını sağlayacağı şekilde aşağıdaki gibi ifade edilmişlerdir.

$$\begin{aligned} f(z) &= L_q(z) \\ g(z) &= (1 - z^2)L_q(z) \end{aligned}$$

Galerkin projeksiyon prosedüründe ortaya çıkan iç çarpım integrallerinin sayısal çözümlemesi için, Gauss-Legendre-Lobatto (GLL) kuadratur kullanılmıştır:

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f^*(z) \cdot g(z) dz \approx \sum_{j=0}^{N_z} w_q f^*(z_q) \cdot g(z_q) \quad (3.26)$$

Burada (w_q, z_q) sırasıyla GLL ağırlıkları ve noktalarını göstermektedir.

Doğrusal olmayan terimlerin dahil edilmesi ile hız için solenoidal bazların derecesi $M + 4$ ($V_p^{(1,2)}(z) \in P_{M+4}$) olur ve çiftes bazlar için bu değer $M + 2$ ($\bar{V}_q^{(1,2)}(z) \in P_{M+2}$) olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla lineer olmayan terimlerin Gauss kuadratur kullanılarak gerçek değere yakın olması için, kuadratur noktalarının sayısı N_z ile solenoidal bazlarının sayısı M arasında

$$2N_z - 1 \geq (M + 3) + (M + 4) + (M + 2) = 3M + 9 \rightarrow N_z \geq (3M + 10)/2. \quad (3.27)$$

bağıntısı olmalıdır. Dolayısıyla, Doğrusal terimler için, sayısal kuadraturun gerçek değere yakın olması için, kuadratur noktalarının sayısı N_z ile solenoidal bazlarının sayısı M arasında en azından

$$N_z = M + 4$$

bağlantısının sağlaması gerektiği Gauss-Legendre-Lobatto (GLL) kuadratur kullanılarak kolayca gösterilebilir.

3.3 Manyetik Alan için Solenoidal Bazlar

Manyetik alan için solenoidal bazları ayrıca üretmeye gerek yoktur. Manyetik bazlar, hız ile manyetik alan arasındaki yarı-durağan ilişki (2.5) kullanılarak hız için üretilen solenoidal bazlardan türetilir. Bu durumda, hız için türetilen solenoidal bazlar süreklilik ilişkisini sağladığından, manyetik alan için de süreklilik

şartı (2.6) otomatik olarak sağlanmış olur. x ve y yönünde periyodikliğin kabulü ile Fourier serisinin kullanılması ile yarı-durağan ilişki, manyetik alan ile hız arasındaki denklemi sadece z yönünde sınır değer problemine dönüştürür. Elde edilen bu diferansiyel denklem analitik olarak çözülebilir. Bu şekilde yapılan çözüm, sayısal çözümün doğruluk derecesini de arttıracaktır. Hız ile manyetik alan arasındaki yarı-durağan ilişki (2.5)

$$\nabla^2 \mathbf{b} = -\mathbf{e}_x \cdot (\nabla u) \quad (3.28)$$

şeklinde elde edilmiştir. Hız ve manyetik alanın Fourier serisi cinsinden açılımları bu denklemde yerine yazılırsa:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2 \right] \hat{\mathbf{b}}(m, n, z, t) = -ik_x \hat{\mathbf{u}}(m, n, z, t) \quad (3.29)$$

$$\frac{db_x}{dz} = \frac{db_y}{dz} = b_z = 0, \quad z = \mp 1 \quad (3.30)$$

koşulları altında sınır değer problemi elde edilir. Burada $\gamma^2 = k_x^2 + k_y^2$ dir. $k_x = k_y = 0$ için, Neumann tip sınır koşullarından dolayı tekil çözüm ortaya çıkar. Bu tekil çözüm, genelliği bozmadan

$$b_x(z=0) = b_y(z=0) = 0 \quad (3.31)$$

seçilerek ortadan kaldırılabilir. Manyetik alan için solenoidal bazlar

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(z) e^{(ik_x x + ik_y y)} \quad (3.32)$$

ve hız için solenoidal bazlar bu denklemde (3.29) yerine yazılırsa, manyetik bazlar için

$$D^2 \mathbf{B} - \gamma^2 \mathbf{B} = -ik_x \mathbf{V} \quad (3.33)$$

diferansiyel denklemi

$$DB_x = DB_y = B_z = 0, \quad z = \mp 1 \quad (3.34)$$

sınır koşulları altında elde edilir. Bu koşullar altında bu sınır değer problemi $\mathbf{B}(z)$ için çözümlenerek her bir $\mathbf{V} = \mathbf{V}_p^{(j)}(z)$ için manyetik solenoidal bazlar elde edilir. Burada $\mathbf{B}(z) = (B_x, B_y, B_z)$ 'dir.

3.4 Manyetik Solenoidal Bazların Analitik Çözümü

Manyetik alan ve hız için elde edilen sınır değer problemi (3.33)

$$\frac{d^2}{dz^2}\mathbf{B} - \gamma^2\mathbf{B} = -ik_x\mathbf{V} \quad (3.35)$$

(3.34) sınır şartları altında ele alınıp $\mathbf{B}(z) = (B_x, B_y, B_z)$ ve $\mathbf{V}(z) = (V_x, V_y, V_z)$ için bu sınır değer problemi yatay ve düşey yöndeki bileşenler için ayrı ayrı yazılırsa;

$$\frac{d^2}{dz^2}B_x - \gamma^2B_x = -ik_xV_x = f_x(z), \quad DB_x(z = \mp 1) = 0 \quad (3.36a)$$

$$\frac{d^2}{dz^2}B_y - \gamma^2B_y = -ik_xV_y = f_y(z) \quad DB_y(z = \mp 1) = 0 \quad (3.36b)$$

$$\frac{d^2}{dz^2}B_z - \gamma^2B_z = -ik_xV_z = f_z(z) \quad B_z(z = \mp 1) = 0 \quad (3.36c)$$

sabit katsayılı homojen olmayan üç tane diferansiyel denklem elde edilir. Yatay yöndeki bileşenler için hem diferansiyel denklemler hem de sınır koşulları aynı olduğundan (3.36a, 3.36b), sadece bir tanesi için çözüm bulmak yeterlidir. z yönündeki diferansiyel denklem (3.36c) için de çözüm aynı sadece sınır koşulu farklıdır.

Sabit katsayılı (3.36a) diferansiyel denklemin homojen çözümü

$$B_x^h(z) = C_1e^{\gamma z} + C_2e^{-\gamma z} \quad (3.37)$$

şeklinde elde edilir. Özel çözüm de, parametrelerin değişimi metodu kullanılarak,

$$B_x^p = c_1(z)e^{\gamma z} + c_2(z)e^{-\gamma z} \quad (3.38)$$

şeklinde yazılabilir. Bu özel çözümün katsayıları $c_1(z)$ ve $c_2(z)$ 'de

$$c_1'(z)e^{-\gamma z} + c_2'(z)e^{+\gamma z} = 0$$

$$-\gamma c_1'(z)e^{-\gamma z} + \gamma c_2'(z)e^{+\gamma z} = f_x(z)$$

denklemleri oluşturularak bulunabilir. Bu denklem sistemi Cramer yöntemi kullanılarak çözümlürse;

$$c_1'(z) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{\gamma z} \\ f_x & \gamma e^{\gamma z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-\gamma z} & e^{\gamma z} \\ -\gamma e^{-\gamma z} & \gamma e^{\gamma z} \end{vmatrix}} \Rightarrow c_1'(z) = -\frac{f_x(z)e^{\gamma z}}{2\gamma}$$

bulunur ve her iki tarafın integrali alınarak,

$$c_1(z) = -\frac{1}{2\gamma} \int f_x(z) e^{\gamma z} dz$$

katsayısı elde edilmiş olur. Benzer şekilde,

$$c_2'(z) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-\gamma z} & 0 \\ -\gamma e^{-\gamma z} & f_x(z) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-\gamma z} & e^{\gamma z} \\ -\gamma e^{-\gamma z} & \gamma e^{\gamma z} \end{vmatrix}} \Rightarrow c_2'(z) = \frac{f_x(z) e^{-\gamma z}}{2\gamma}$$

bulunur ve her iki tarafın integrali alınarak,

$$c_2(z) = \frac{1}{2\gamma} \int f_x(z) e^{-\gamma z} dz$$

katsayısı elde edilmiş olur. O halde bu adi diferansiyel denklemin çözümü, homojen ve özel çözümün toplamı olarak

$$B_x = B_x^h + B_x^p$$

$$B_x = C_1 e^{-\gamma z} + C_2 e^{+\gamma z} - \frac{e^{-\gamma z}}{2\gamma} \int f_x(z) e^{\gamma z} dz + \frac{e^{\gamma z}}{2\gamma} \int f_x(z) e^{-\gamma z} dz \quad (3.39)$$

şeklinde bulunur. Sınır koşulları kullanılarak da C_1 ve C_2 sabit katsayıları kolayca elde edilebilir.

- $z = 1$ için $DB_x = 0$ koşulu kullanılarak

$$-\gamma C_1 e^{-\gamma} + \gamma C_2 e^{+\gamma} + \frac{e^{-\gamma}}{2} \left[\int f(z) e^{\gamma z} dz \right]_{z=1} + \frac{e^{\gamma}}{2} \left[\int f(z) e^{-\gamma z} dz \right]_{z=1} = 0$$

denklemini,

- $z = -1$ için $DB_x = 0$ koşulu kullanılarak

$$-\gamma C_1 e^{\gamma} + \gamma C_2 e^{-\gamma} + \frac{e^{\gamma}}{2} \left[\int f(z) e^{-\gamma z} dz \right]_{z=-1} + \frac{e^{-\gamma}}{2} \left[\int f(z) e^{\gamma z} dz \right]_{z=-1} = 0$$

denklemini elde edilir.

Bu iki denklemlerden C_1 ve C_2 çözümlürse B_x için çözüm

$$\begin{aligned}
B_x &= \frac{\frac{1}{2}e^{3\gamma} \left[\int f_x(z)e^{-\gamma} dz \right]_{z=-1} + \frac{1}{2}e^{\gamma} \left[\int f_x(z)e^{\gamma} dz \right]_{z=-1}}{\gamma e^{3\gamma} - \gamma e^{-\gamma}} e^{-\gamma z} \\
&+ \frac{-\frac{1}{2}e^{-\gamma} \left[\int f_x(z)e^{\gamma} dz \right]_{z=1} - \frac{1}{2}e^{\gamma} \left[\int f_x(z)e^{-\gamma} dz \right]_{z=-1}}{\gamma e^{3\gamma} - \gamma e^{-\gamma}} e^{-\gamma z} \\
&+ \frac{-\frac{1}{2}e^{\gamma} \left[\int f_x(z)e^{-\gamma} dz \right]_{z=-1} - \frac{1}{2}e^{-\gamma} \left[\int f_x(-1)e^{\gamma} dz \right]_{z=-1}}{\gamma e^{-\gamma} - \gamma e^{3\gamma}} e^{\gamma z} \\
&+ \frac{\frac{1}{2}e^{\gamma} \left[\int f_x(z)e^{\gamma} dz \right]_{z=1} - \frac{1}{2}e^{3\gamma} \left[\int f_x(z)e^{-\gamma} dz \right]_{z=1}}{\gamma e^{-\gamma} - \gamma e^{3\gamma}} e^{\gamma z} \\
&\quad - \frac{1}{2\gamma} e^{-\gamma z} \int f_x(z)e^{\gamma z} dz + \frac{1}{2\gamma} e^{\gamma z} \int f_x(z)e^{-\gamma z} dz
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde (3.36b) adi diferansiyel denklemin çözümü de

$$\begin{aligned}
B_y &= \frac{\frac{1}{2}e^{3\gamma} \left[\int f_y(z)e^{-\gamma} dz \right]_{z=-1} + \frac{1}{2}e^{\gamma} \left[\int f_y(z)e^{\gamma} dz \right]_{z=-1}}{\gamma e^{3\gamma} - \gamma e^{-\gamma}} e^{-\gamma z} \\
&+ \frac{-\frac{1}{2}e^{-\gamma} \left[\int f_y(z)e^{\gamma} dz \right]_{z=1} - \frac{1}{2}e^{\gamma} \left[\int f_y(z)e^{-\gamma} dz \right]_{z=-1}}{\gamma e^{3\gamma} - \gamma e^{-\gamma}} e^{-\gamma z} \\
&+ \frac{-\frac{1}{2}e^{\gamma} \left[\int f_y(z)e^{-\gamma} dz \right]_{z=-1} - \frac{1}{2}e^{-\gamma} \left[\int f_y(-1)e^{\gamma} dz \right]_{z=-1}}{\gamma e^{-\gamma} - \gamma e^{3\gamma}} e^{\gamma z} \\
&+ \frac{\frac{1}{2}e^{\gamma} \left[\int f_y(z)e^{\gamma} dz \right]_{z=1} - \frac{1}{2}e^{3\gamma} \left[\int f_y(z)e^{-\gamma} dz \right]_{z=1}}{\gamma e^{-\gamma} - \gamma e^{3\gamma}} e^{\gamma z} \\
&\quad - \frac{1}{2\gamma} e^{-\gamma z} \int f_y(z)e^{\gamma z} dz + \frac{1}{2\gamma} e^{\gamma z} \int f_y(z)e^{-\gamma z} dz
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Manyetik alanın üçüncü bileşen için (3.36b) adi diferansiyel denklemin çözümü, (3.39) denkleminin çözümüne benzer olup

$$B_z = C_3 e^{-\gamma z} + C_4 e^{+\gamma z} - \frac{1}{2\gamma} e^{-\gamma z} \int f_z(z)e^{\gamma z} dz + \frac{1}{2\gamma} e^{\gamma z} \int f_z(z)e^{-\gamma z} dz$$

şeklinde bulunabilir. Ancak, sınır koşulları (3.36a, 3.36b) denklemlerinden farklıdır.

Bu sınır koşulları kullanılarak da C_3 ve C_4 sabit katsayıları kolayca elde edilebilir.

- $z = 1$ için $B_z = 0$ koşulu kullanılarak

$$C_3 e^{-\gamma} + C_4 e^{\gamma} - \frac{1}{2\gamma} e^{-\gamma} \left[\int f_z(z)e^{\gamma} dz + \frac{1}{2\gamma} e^{\gamma} \int f_z(z)e^{-\gamma} dz \right]_{z=1} = 0$$

denklemini,

- $z = -1$ için $B_z = 0$ koşulu kullanılarak

$$C_3 e^\gamma + C_4 e^{-\gamma} - \frac{1}{2\gamma} e^\gamma \left[\int f_z(z) e^{-\gamma} dz + \frac{1}{2\gamma} e^{-\gamma} \int f_z(z) e^\gamma dz \right]_{z=-1} = 0$$

denklemini elde edilir.

Bu denklemler C_3 ve C_4 için çözümlerse B_z diferansiyel denkleminin çözümü;

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\frac{1}{2\gamma} e^{-\gamma} \left[\int f_z(z) e^\gamma dz \right]_{z=1} - \frac{1}{2\gamma} e^\gamma \left[\int f_z(z) e^{-\gamma} dz \right]_{z=-1}}{e^{-\gamma} - e^{3\gamma}} e^{-\gamma z} \\ &+ \frac{-\frac{1}{2\gamma} e^{3\gamma} \left[\int f_z(z) e^{-\gamma} dz \right]_{z=-1} + \frac{1}{2\gamma} e^\gamma \left[\int f_z(z) e^\gamma dz \right]_{z=-1}}{e^{-\gamma} - e^{3\gamma}} e^{-\gamma z} \\ &+ \frac{\frac{1}{2\gamma} e^\gamma \left[\int f_z(z) e^{-\gamma} dz \right]_{z=-1} - \frac{1}{2\gamma} e^{-\gamma} \left[\int f_z(z) e^{-\gamma} dz \right]_{z=-1}}{e^{-\gamma} - e^{3\gamma}} e^{\gamma z} \\ &+ \frac{-\frac{1}{2\gamma} e^\gamma \left[\int f_z(z) e^\gamma dz \right]_{z=1} + \frac{1}{2\gamma} e^{3\gamma} \left[\int f_z(z) e^{-\gamma} dz \right]_{z=1}}{e^{-\gamma} - e^{3\gamma}} e^{\gamma z} \\ &\quad - \frac{1}{2\gamma} e^{-\gamma z} \int f_z(z) e^{\gamma z} dz + \frac{1}{2\gamma} e^{\gamma z} \int f_z(z) e^{-\gamma z} dz \end{aligned}$$

3.5 Sıcaklık için Solenoidal Bazlar

Termal bazlar, diğer solenoidal bazlar gibi Legendre polinomları kullanılarak sınır koşullarını sağlayacak şekilde kolayca oluşturulabilir. O halde sıcaklıktan sapma için solenoidal baz açılımı

$$\hat{\Theta}(m, n, z, t) = \sum_{p=0}^M b_p(t) T_p(z) \quad (3.40)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $T_p(z) = (1 - z^2)L_p(z)$ şeklindedir. Sıcaklıktan sapma için türetilen olan çiftleş bazların herhangi bir koşulu sağlamasına gerek olmadığı için $\bar{T}_q(z) = T_p(z)$ olarak seçilebilir.

4. DENKLEMLERİN ZAYIF FORMU

Bu sayısal çalışmada, belirli açısal hızda dönen ve halkanın iç ve dış yüzeyleri arasında sıcaklık farkı bulunan bir halkasal boşluktaki elektriksel olarak iletken akışkanın homojen bir B manyetik alan altındaki akışın doğrusal kararlılık analizi ele alınmaktadır. Bu sayısal modellemede Galerkin projeksiyon yöntemi ile kısmi diferansiyel denklemler çifteş uzaya yansıtılarak, açılım katsayıları zaman yönünde değişen adi diferansiyel denklem formunda denklemlerin zayıf formu elde edilmektedir. Bu yöntemde önceki bölümde de gösterildiği gibi, akış değişkenleri ve çifteş uzaylar belli bir toplam değerine kadar temsil edilmişlerdir.

Rezidü değerinin küçük olması ilkesine dayanan Galerkin yansıtma prosedürü kullanılarak sistemin temel denklemleri (2.2)-(2.6) çifteş uzaya yansıtılır. Hız için oluşturulan solenoidal bazlar hem süreklilik hem de sınır koşullarını sağladığından ve manyetik alan için kullanılacak solenoidal bazlarda yarı-durağan ilişki denklemi (2.5) kullanıldığından, sistemdeki (2.2), (2.5) ve (2.6) denklemleri otomatik olarak sağlanır. Geriye sadece enerji ve moment denklemi kalır ki buda denklem sayısı dokuzdan dörde düşürür. Bu durum sayısal yöntem üzerindeki yükü azaltacağından, yöntemin daha doğru sonuç vermesini sağlar. Böylece, çözülmesi gereken residü denklemleri aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$R_u = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} - Pr \nabla \Pi - Pr \Theta \mathbf{e}_z + Pr \nabla^2 \mathbf{u} + Pr Q_h (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) \mathbf{b} - 2\Omega_h (\mathbf{e}_y \times \mathbf{u}) \quad (4.1)$$

$$R_\Theta = -\frac{\partial \Theta}{\partial t} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Theta - Ra_h \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u} + \nabla^2 \Theta \quad (4.2)$$

Hız, termal ve manyetik alan bileşenlerinin Fourier serisi ve solenoidal bazlar cinsinden açılımları aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{u}(m, n, z, t) = \sum_{|m| \leq N_x/2} \sum_{|n| \leq N_y/2} e^{(ik_x^m x + ik_y^n y)} \sum_{p=0}^M \left[a_p^{(1)}(t) V_p^{(1)}(z) + a_p^{(2)}(t) V_p^{(2)}(z) \right] \quad (4.3)$$

$$\mathbf{b}(m, n, z, t) = \sum_{|m| \leq N_x/2} \sum_{|n| \leq N_y/2} e^{(ik_x^m x + ik_y^n y)} \sum_{p=0}^M \left[a_p^{(1)}(t) B_p^{(1)}(z) + a_p^{(2)}(t) B_p^{(2)}(z) \right] \quad (4.4)$$

$$\Theta(m, n, z, t) = \sum_{|m| \leq N_x/2} \sum_{|n| \leq N_y/2} e^{(ik_x^m x + ik_y^n y)} \sum_{p=0}^M b_p(t) T_p(z) \quad (4.5)$$

Burada $V_p^{(1,2)}(z)$ hız için solenoidal bazları, $B_p^{(1,2)}(z)$ manyetik alan için solenoidal bazları ve $T_p(z)$ sıcaklıktan sapma için solenoidal bazı göstermektedir. Manyetik alan

için solenoidal bazlar yarı-durağan ilişki (2.5) kullanılarak elde edildiğinden, hız ve manyetik alan için zamana bağlı katsayılar $a_p^{(1,2)}(t)$ aynıdır.

Bu akış değişkenleri, (4.1) ve (4.2) rezidü denklemlerinde yerine yazılıp Galerkin yansıtma prosedürü ile çiftes bazlar $\bar{V}_p^{(1,2)}$, T_p kullanılarak yansıtılırsa

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_{-1}^1 \bar{V} \cdot R_u dz = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_{-1}^1 \bar{V} \cdot \left[-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - Pr \nabla \Pi - Pr \Theta \mathbf{e}_z + Pr \nabla^2 \mathbf{u} \right] dx dy dz + \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_{-1}^1 \bar{V} \cdot [Pr Q_h(\mathbf{e}_x \cdot \nabla) \mathbf{b} - 2Pr \tau_h(\mathbf{e}_y \times \mathbf{u})] dx dy dz = 0$$

ve

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_{-1}^1 \bar{T} R_\Theta dz = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_{-1}^1 \bar{T} \cdot \left[-\frac{\partial \Theta}{\partial t} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Theta - Ra_h \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u} - \nabla^2 \Theta \right] dx dy dz = 0$$

integralleri elde edilir. Bu integral değerleri hesaplanırsa matris formunda aşağıdaki şekilde yazılabilirler:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, V_p^{(1)}) & (\bar{V}_q^{(1)}, V_p^{(2)}) \\ (\bar{V}_q^{(2)}, V_p^{(1)}) & (\bar{V}_q^{(2)}, V_p^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a}_p^{(1)} \\ \dot{a}_p^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c^{(1)} \\ c^{(2)} \end{bmatrix} = -Pr \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, T_p e_z) \\ (\bar{V}_q^{(2)}, T_p e_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_p \end{bmatrix} \\ & + Pr \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, \nabla^2 V_p^{(1)}) & (\bar{V}_q^{(1)}, \nabla^2 V_p^{(2)}) \\ (\bar{V}_q^{(2)}, \nabla^2 V_p^{(1)}) & (\bar{V}_q^{(2)}, \nabla^2 V_p^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p^{(1)} \\ a_p^{(2)} \end{bmatrix} \\ & + Pr Q_h \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) B_p^{(1)}) & (\bar{V}_q^{(1)}, (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) B_p^{(2)}) \\ (\bar{V}_q^{(2)}, (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) B_p^{(1)}) & (\bar{V}_q^{(2)}, (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) B_p^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p^{(1)} \\ a_p^{(2)} \end{bmatrix} \\ & - 2Pr \tau_h \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, \mathbf{e}_y \times V_p^{(1)}) & (\bar{V}_q^{(1)}, \mathbf{e}_y \times V_p^{(2)}) \\ (\bar{V}_q^{(2)}, \mathbf{e}_y \times V_p^{(1)}) & (\bar{V}_q^{(2)}, \mathbf{e}_y \times V_p^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p^{(1)} \\ a_p^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.6) \end{aligned}$$

$$(\bar{T}_q, T_p) \dot{b}_p + d = -Ra_h (\bar{T}_q, V_p^{(1)} \cdot \mathbf{e}_z) a_p^{(1)} - Ra_h (\bar{T}_q, V_p^{(2)} \cdot \mathbf{e}_z) a_p^{(2)} + (\bar{T}_q, \nabla^2 T_p) b_p. \quad (4.7)$$

Burada $c^{(1,2)}$ ile d ifadeleri

$$c^{(1,2)} = (\bar{V}, (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_{-1}^1 (\bar{V} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) dx dy dz$$

$$d = (\bar{T}, (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Theta) = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_{-1}^1 (\bar{T} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Theta) dx dy dz$$

şeklinde olup doğrusal olmayan terimlerdir.

Galerkin yansıtma prosedüründe, basınç terimi sistemden otomatik olarak düşecek şekilde çiftleş bazlar (3.19), (3.21), (3.23) ve (3.25) oluşturuldu. Buna ek olarak hız için türetilen solenoidal bazların yapısından dolayı

$$V_p^{(1)} \cdot \mathbf{e}_z = 0 \quad (4.8)$$

terimi sıfır olur. Bu yüzden enerji denklemindeki (4.7) yansıtma prosedüründe $a_p^{(1)}$ katsayısı termal denklemden düşecektir. Ayrıca, solenoidal bazların ve çiftleşlerinin birbirine dik olarak oluşturulmasından dolayı da solenoidal bazlar ile çiftleşlerinin çarpaz çarpımı sıfır olacaktır. $(\bar{V}_q^{(i)}, V_p^{(j)}) = \delta_{ij}$ öyle ki δ_{ij} kronecker deltayı göstermektedir. O halde yukarıda elde edilmiş olan (4.6) ve (4.7) ile ifade edilen matris sistemleri

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, V_p^{(1)}) & 0 \\ 0 & (\bar{V}_q^{(2)}, V_p^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a}_p^{(1)} \\ \dot{a}_p^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c^{(1)} \\ c^{(2)} \end{bmatrix} = -Pr \begin{bmatrix} 0 \\ (\bar{V}_q^{(2)}, T_p \mathbf{e}_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_p \end{bmatrix} \\ & + Pr \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, \nabla^2 V_p^{(1)}) & 0 \\ 0 & (\bar{V}_q^{(2)}, \nabla^2 V_p^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p^{(1)} \\ a_p^{(2)} \end{bmatrix} \\ & + Pr Q_h \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) B_p^{(1)}) & 0 \\ 0 & (\bar{V}_q^{(2)}, (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) B_p^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p^{(1)} \\ a_p^{(2)} \end{bmatrix} \\ & - 2Pr \tau_h \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, \mathbf{e}_y \times V_p^{(1)}) & 0 \\ 0 & (\bar{V}_q^{(2)}, \mathbf{e}_y \times V_p^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p^{(1)} \\ a_p^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.9) \end{aligned}$$

$$(\bar{T}_q, T_p) \dot{b}_p + d = -Ra_h (\bar{T}_q, V_p^{(2)} \cdot \mathbf{e}_z) a_p^{(2)} + (\bar{T}_q, \nabla^2 T_p) b_p. \quad (4.10)$$

formuna indirgenirler. Matris formunda ayrı ayrı yazılmış olan bu denklemler (4.9)-(4.10) tek bir matris olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, V_p^{(1)}) & 0 & 0 \\ 0 & (\bar{V}_q^{(2)}, V_p^{(2)}) & 0 \\ 0 & 0 & (\bar{T}_q, T_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a}_p^{(1)} \\ \dot{a}_p^{(2)} \\ \dot{b}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c^{(1)} \\ c^{(2)} \\ d \end{bmatrix} = \\ Pr & \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, \nabla^2 V_p^{(1)}) + Q_h (\bar{V}_q^{(1)}, (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) B_p^{(1)}) & 0 & 0 \\ -2\Omega_h (\bar{V}_q^{(1)}, \mathbf{e}_y \times V_p^{(1)}) & 0 & 0 \\ 0 & (\bar{V}_q^{(2)}, \nabla^2 V_p^{(2)}) + Q_h (\bar{V}_q^{(2)}, (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) B_p^{(2)}) & -(\bar{V}_q^{(2)}, T_p \mathbf{e}_z) \\ 0 & -2\Omega_h (\bar{V}_q^{(2)}, \mathbf{e}_y \times V_p^{(2)}) & 0 \\ 0 & -Ra_h (\bar{T}_q, V_p^{(2)} \cdot \mathbf{e}_z) / Pr & (\bar{T}_q, \nabla^2 T_p) / Pr \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p^{(1)} \\ a_p^{(2)} \\ b_p \end{bmatrix}. \quad (4.11) \end{aligned}$$

4.1 Sayısal Yöntem

Yatay yönlerde periyodik varsayımı olduğundan, yatay yöndeki değişkenler için Fourier seri açılım yaklaşımı kullanılmıştır. Düşey yönde geometrinin $[-1, 1]$ aralığında olması, ağırlık fonksiyonunun bir olması ($w_q = 1$) ve polinomlarının diklik özelliğini sağlandığından, düşey bileşen için Legendre polinomları yaklaşımı kullanılmıştır. Bağımlı akış değişkenlerinin verilen bu yaklaşımlara göre açılımları aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\mathbf{u}(m, n, z, t) = \sum_m \sum_n \hat{\mathbf{u}}(m, n, z, t) e^{(ik_x^m x + ik_y^n y)} \quad (4.12)$$

$$\Theta(m, n, z, t) = \sum_m \sum_n \hat{\Theta}(m, n, z, t) e^{(ik_x^m x + ik_y^n y)} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{b}(m, n, z, t) = \sum_m \sum_n \hat{\mathbf{b}}(m, n, z, t) e^{(ik_x^m x + ik_y^n y)} \quad (4.14)$$

burada

$$k_x^m = \frac{2\pi m}{s_x}, \quad (4.15)$$

$$k_y^n = \frac{2\pi n}{s_y} \quad (4.16)$$

yatay yönlerdeki dalga sayılarını göstermek üzere, m ve n tamsayıları

$$1 - \frac{1}{2}N_x \leq m \leq \frac{1}{2}N_x, \quad (4.17)$$

$$1 - \frac{1}{2}N_y \leq n \leq \frac{1}{2}N_y \quad (4.18)$$

aralıklarında tanımlıdır. Ayrıca, N_x ve N_y yatay yönlerdeki çözünürlüğü göstermek üzere, kolokasyon noktaları x ve y

$$x_i = \frac{s_x i}{N_x}, \quad 0 \leq i \leq N_x \quad (4.19)$$

$$y_j = \frac{s_y j}{N_y}, \quad 0 \leq j \leq N_y \quad (4.20)$$

şeklinde tanımlıdır.

Düşey yöndeki (z) aralık $[-1, 1]$ aralığına dönüştürüldüğü için, düşey yönde Gauss-Legendre-Lobatto (GLL) kolokasyon noktaları kullanılabilir. GLL noktaları

$$q(z) = (1 - z^2) \mathbb{D}L_{N_z}(z) \quad (4.21)$$

polinomunun kökleri olarak bulunabilir. Burada $\mathbb{D} = \frac{d}{dz}$ ve $L_{N_z}(z)$, derecesi N_z olan Legendre polinomunu göstermektedir. Legendre polinomları Rodrigues formüllerini kullanarak

$$L_{N_z}(z) = \frac{1}{2^{N_z} N_z!} \mathbb{D}^{N_z} (1 - z^2)^{N_z}. \quad (4.22)$$

bağıntısından elde edilebilir. Bu kuadratür noktaları sınır noktaları olan $z_0 = -1$ ve $z_{N_z} = 1$ noktaları ile birlikte $N_z - 1$ adet iç nokta içerir. Bu iç noktalar $\mathbb{D}L_{N_z}(z)$ Legendre polinomunun kökleridir. Ancak bu kökleri hesaplamak için açık bir formül yoktur. Bu kökler, lineer olmayan denklem sistemleri için kullanılan sayısal yöntemler ile Legendre polinomlarının tekrarlama bağıntılarından sayısal olarak elde edilebilir.

Legendre polinomları, Jacobi Polinomlarının genel bir özelliği olan, üçlü yineleme bağıntısını sağlar. Bu bağıntılar, Legendre polinomları kullanılarak aşağıdaki gibi türetilir:

$$zL_{N_z}(z) = \frac{N_z}{2N_z + 1} L_{N_z-1}(z) + \frac{N_z + 1}{2N_z + 1} L_{N_z+1}(z), \quad (4.23)$$

$$L_{N_z}(z) = \frac{1}{2N_z + 1} \mathbb{D}L_{N_z+1}(z) - \frac{1}{2N_z + 1} \mathbb{D}L_{N_z-1}(z). \quad (4.24)$$

$$(1 - z^2) \mathbb{D}L_{N_z}(z) = \frac{N_z(N_z + 1)}{2N_z + 1} L_{N_z-1}(z) - \frac{N_z(N_z + 1)}{2N_z + 1} L_{N_z+1}(z). \quad (4.25)$$

GLL kuadratür noktaları için Legendre polinomları cinsinden bir bağıntı, (4.25) denkleminin (4.21) denkleminde yerine konması ile

$$q(z) = \frac{N_z(N_z + 1)}{2N_z + 1} L_{N_z-1}(z) - \frac{N_z(N_z + 1)}{2N_z + 1} L_{N_z+1}(z) \quad (4.26)$$

şeklinde elde edilebilir. $q(z)$ 'nin türevi, (4.26) denkleminin türevi alınarak

$$\mathbb{D}q(z) = \frac{N_z(N_z + 1)}{2N_z + 1} \mathbb{D}L_{N_z-1}(z) - \frac{N_z(N_z + 1)}{2N_z + 1} \mathbb{D}L_{N_z+1}(z) \quad (4.27)$$

şeklinde elde edilir. (4.24) denklemi ile verilen tekrarlama bağıntısının (4.27) denkleminde yerine yazılması ile daha yalın formda

$$\mathbb{D}q(z) = -N_z(N_z + 1)L_{N_z}(z) \quad (4.28)$$

denklemi elde edilir. Bu noktadan sonra $q(z) = 0$ denkleminin kökleri, Newton iterasyon yöntemi kullanılarak

$$z_i^{n+1} = z_i^n - \frac{q(z_i^n)}{\mathbb{D}q(z_i^n)} = z_i^n - \frac{L_{N_z-1}(z) - L_{N_z+1}(z)}{(2N_z + 1)L_{N_z}(z)} \quad (4.29)$$

şeklinde elde edilir. Bu yöntemde tahmin noktaları olarak

$$z_i^o = \cos\left(\frac{i\pi}{N_z}\right) \quad \text{for } 1 \leq i \leq N_z - 1 \quad (4.30)$$

Chebyshev noktaları kullanılmıştır. Bu noktalara karşılık gelen ağırlık fonksiyonunun değerleri de

$$w_i = \begin{cases} \frac{2}{N_z(N_z+1)}, & \text{eğer } i = 0, N_z \\ \frac{2(L_{N_z}(z_i))^{-2}}{N_z(N_z+1)}, & \text{eğer } i = 1, \dots, N_z - 1 \end{cases} \quad (4.31)$$

şeklindedir.



5. DOĞRUSAL KARARLILIK ANALİZİ

Belirli bir açısal hızda dönen elektriksel olarak iletken akışkanın manyetik alan altındaki doğrusal kararlılık analizi ilk defa Chandrasekhar [3] tarafından incelenmiştir. Daha sonra Kurt vd. [16, 17] belirli açısal hızında dönen ve halkanın iç ve dış yüzeyleri arasında sıcaklık farkı bulunan bir halkasal boşluktaki elektriksel olarak iletken akışkanın, homojen bir manyetik alan altındaki akışının doğrusal kararlılık analizini ele almışlardır. Döndürme ve manyetik alan kontrol parametrelerinin sistemde olmadığı durum için, Chandrasekhar [3] kritik dalga sayısı ve kritik Rayleigh sayısının konveksiyon eşiğinde Prandtl sayısından bağımsız olduğunu bulmuştur. Rigid iki plaka arasında bulunan viskoz bir akışkan için Reid ve Harris [29] istikrar eğrisinde, 3,117 kritik dalga sayısı ve buna karşılık 1707,8 kritik Rayleigh sayısında bir tane minimum değere sahip olduğunu göstermişlerdir. Kritik değer altında hiçbir hareket yoktur ve bu durumda ısı iletim yoluyla aktarılır.

Bu sayısal modellemede Galerkin projeksiyon yöntemi ile, kısmi diferansiyel denklemler çiftes uzaya yansıtılarak açılım katsayıları zaman yönünde değişen adi diferansiyel denklemlerin zayıf formu elde edilmektedir. Solenoidal baz ve yansıtma prosedürünü test etmek için, hareketin başladığı anda hareketsiz durumun bozulduğu en küçük kritik parametre değeri ele alınmıştır. Bu iletim durumunda, hız ve sıcaklık perturbasyonları oldukça küçüktür. Dolayısı ile hareket olmaması durumuna göre doğrusallaştırılmış residü denklemleri (4.1)-(4.2) aşağıdaki formu alır:

$$R_u = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - Pr \nabla \Pi - Pr \Theta \mathbf{e}_z + Pr \nabla^2 \mathbf{u} + Pr Q_h (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) \mathbf{b} - 2Pr \Omega_h (\mathbf{e}_y \times \mathbf{u}) \quad (5.1)$$

$$R_\Theta = -\frac{\partial \Theta}{\partial t} - Ra_h \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u} + \nabla^2 \Theta. \quad (5.2)$$

Akış değişkenleri, (5.1) ve (5.2) rezidü denklemlerinde yerine yazılıp Galerkin yansıtma prosedürü ile çiftes bazlar $\tilde{V}_p^{(1,2)}$, \tilde{T}_p kullanılarak yansıtılırsa

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_{-1}^1 \tilde{V} \cdot R_u d_z = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_{-1}^1 \tilde{V} \cdot \left[-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - Pr \nabla \Pi - Pr \Theta \mathbf{e}_z + Pr \nabla^2 \mathbf{u} \right] dxdydz + \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_{-1}^1 \tilde{V} \cdot [Pr Q_h (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) \mathbf{b} - 2Pr \Omega_h (\mathbf{e}_y \times \mathbf{u})] dxdydz = 0$$

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_{-1}^1 \bar{T} R_{\Theta} dz = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_{-1}^1 \bar{T} \cdot \left[-\frac{\partial \Theta}{\partial t} - Ra_h \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u} - \nabla^2 \Theta \right] dx dy dz = 0$$

integralleri elde edilir. Bu integral değerleri hesaplanırsa matris formunda aşağıdaki şekilde yazılabilirler:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, V_p^{(1)}) & (\bar{V}_q^{(1)}, V_p^{(2)}) \\ (\bar{V}_q^{(2)}, V_p^{(1)}) & (\bar{V}_q^{(2)}, V_p^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a}_p^{(1)} \\ \dot{a}_p^{(2)} \end{bmatrix} &= -Pr \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, T_p \mathbf{e}_z) \\ (\bar{V}_q^{(2)}, T_p \mathbf{e}_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_p \end{bmatrix} \\ &+ Pr \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, \nabla^2 V_p^{(1)}) & (\bar{V}_q^{(1)}, \nabla^2 V_p^{(2)}) \\ (\bar{V}_q^{(2)}, \nabla^2 V_p^{(1)}) & (\bar{V}_q^{(2)}, \nabla^2 V_p^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p^{(1)} \\ a_p^{(2)} \end{bmatrix} \\ &+ Pr Q_h \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) B_p^{(1)}) & (\bar{V}_q^{(1)}, (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) B_p^{(2)}) \\ (\bar{V}_q^{(2)}, (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) B_p^{(1)}) & (\bar{V}_q^{(2)}, (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) B_p^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p^{(1)} \\ a_p^{(2)} \end{bmatrix} \\ &- 2Pr \tau_h \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, \mathbf{e}_y \times V_p^{(1)}) & (\bar{V}_q^{(1)}, \mathbf{e}_y \times V_p^{(2)}) \\ (\bar{V}_q^{(2)}, \mathbf{e}_y \times V_p^{(1)}) & (\bar{V}_q^{(2)}, \mathbf{e}_y \times V_p^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p^{(1)} \\ a_p^{(2)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$(\bar{T}_q, T_p) \dot{b}_p = -Ra_h (\bar{T}_q, V_p^{(1)} \cdot \mathbf{e}_z) a_p^{(1)} - Ra_h (\bar{T}_q, V_p^{(2)} \cdot \mathbf{e}_z) a_p^{(2)} + (\bar{T}_q, \nabla^2 T_p) b_p \quad (5.4)$$

Bir önceki bölümde bahsedildiği gibi, solenoidal bazların özelliğinden dolayı yansıtma prosedüründe basınç terimi, termal denklemde (5.4) bulunan $a_p^{(1)}$ katsayısı sistemden otomatik olarak düşecektir. Ayrıca solenoidal bazların bir özelliği olarak, solenoidal bazlar ile çiftleşlerinin çarpaz çarpımı sıfır olacağı anlatılmıştı. Bu bilgiler ışığında yukarıda elde edilen iç çarpım denklemleri (5.3)-(5.4) sonucunda ortaya çıkan adi diferansiyel denklem sistemleri matris formunda

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, V_p^{(1)}) & 0 \\ 0 & (\bar{V}_q^{(2)}, V_p^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a}_p^{(1)} \\ \dot{a}_p^{(2)} \end{bmatrix} &= -Pr \begin{bmatrix} 0 \\ (\bar{V}_q^{(2)}, T_p \mathbf{e}_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_p \end{bmatrix} \\ &+ Pr \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, \nabla^2 V_p^{(1)}) & 0 \\ 0 & (\bar{V}_q^{(2)}, \nabla^2 V_p^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p^{(1)} \\ a_p^{(2)} \end{bmatrix} \\ &+ Pr Q_h \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) B_p^{(1)}) & 0 \\ 0 & (\bar{V}_q^{(2)}, (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) B_p^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p^{(1)} \\ a_p^{(2)} \end{bmatrix} \\ &- 2Pr \tau_h \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, \mathbf{e}_y \times V_p^{(1)}) & 0 \\ 0 & (\bar{V}_q^{(2)}, \mathbf{e}_y \times V_p^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p^{(1)} \\ a_p^{(2)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$(\bar{T}_q, T_p)\dot{b}_p = -Ra_h(\bar{T}_q, V_p^{(2)} \cdot \mathbf{e}_z)a_p^{(2)} + (\bar{T}_q, \nabla^2 T_p)b_p. \quad (5.6)$$

şeklinde yazılabilir. Matris formunda ayrı ayrı yazılmış olan (5.5)-(5.6) adi diferansiyel denklem sistemleri tek bir matris denklemi olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

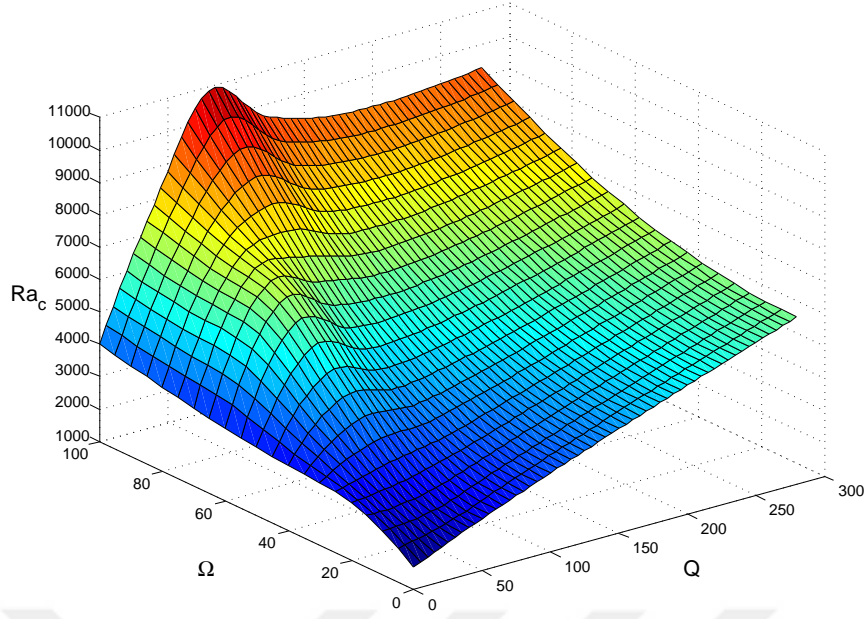
$$Pr \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(1)}, \nabla^2 V_p^{(1)}) + Q_h(\bar{V}_q^{(1)}, (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) B_p^{(1)}) \\ -2\Omega_h(\bar{V}_q^{(1)}, \mathbf{e}_y \times V_p^{(1)}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{V}_q^{(2)}, \nabla^2 V_p^{(2)}) + Q_h(\bar{V}_q^{(2)}, (\mathbf{e}_x \cdot \nabla) B_p^{(2)}) \\ -2\Omega_h(\bar{V}_q^{(2)}, \mathbf{e}_y \times V_p^{(2)}) \\ -Ra_h(\bar{T}_q, V_p^{(2)} \cdot \mathbf{e}_z)/Pr \\ (\bar{T}_q, \nabla^2 T_p)/Pr \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\bar{T}_q, T_p) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p^{(1)} \\ a_p^{(2)} \\ \dot{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_p^{(1)} \\ a_p^{(2)} \\ b_p \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Bu elde edilen adi diferansiyel denklem sistemindeki zamana bağımlılık varsayımını aşağıdaki şekilde ifade edersek

$$[a^{(1)}; a^{(2)}; b] \propto \zeta^t \quad (5.8)$$

ζ özdeğerleri için sistem genel özdeğer problemine indirgenerek çözülür.

Farklı Q ve τ değerleri için en sağdaki özdeğerin imajiner eksenindeki kritik Rayleigh (Ra_c) sayılarına karşılık gelen kritik dalga sayısı (k_c) değerleri (4.12, 4.13, 4.14) eşitliklerinde $n = 0$ ve $m = 1$ seçilerek elde edilmiştir. Chandrasekhar ve Coriolis parametrelerinin değişimine göre kritik Rayleigh sayıları, Ra_c Çizelge 5.1'de listelenmiştir. Bu kritik Rayleigh sayılarının büyüklükleri Rayleigh Bénard değeri olan $Ra_c = 1707,3$ değerinden daha büyük değerler olarak artmaktadır. Ancak Çizelge 5.1 ve Şekil 5.1 bakıldığında bu artışın monotonik olmadığı görülmüştür.



Şekil 5.1 Farklı Coriolis ve Chandrasekhar parametreleri için kritik Rayleigh değerleri.

Çizelge 5.1 Coriolis ve Chandrasekhar parametreleri için kritik Rayleigh değerleri, Ra_c .

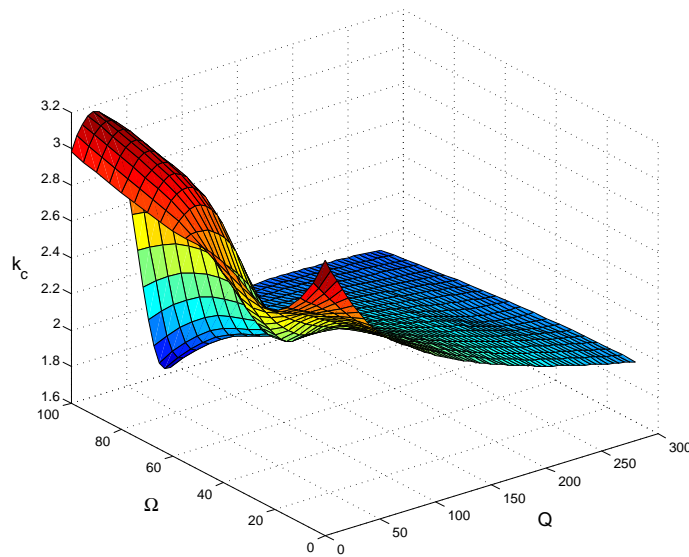
$\Omega \backslash Q$	0	40	80	120	160	200	240	280
0	1707.3	2444.7	3118.0	3757.6	4374.5	4974.7	5561.6	6137.6
20	2798.43	3007.27	3460.91	4007.2	4573.0	5140.9	5705.6	6265.5
40	2999.8	4640.9	4469.2	4746.9	5163.4	5636.4	6139.3	6647.6
60	3251.8	6655.2	6098.7	5953.6	6132.3	6452.6	6845.4	7278.9
80	3595.9	7181.7	8305.5	7600.7	7462.2	7577.1	7825.9	8152.6
100	4027.3	7841.7	10895.1	9663.5	9135.3	8996.7	9066.4	9259.9

Sisteme manyetik alan ve döndürmenin ayrı ayrı uygulanması sonucunda kritik Rayleigh sayısının arttığı yani konveksiyonu geciktirdiği ancak her ikisinin aynı anda sisteme uygulanması durumunda bu gecikmenin artmak yerine aynı seviyede kaldığı ve hatta bazı durumlarda azaldığı yani bu artışın monotonik olmadığı Çizelge 5.1 görülmüştür [3, 16, 17, 20]. Bu kritik Rayleigh değerlerinin inişli çıkışlı davranışı Şekil 5.1'de daha net görülmektedir.

Benzer şekilde, artan Q ve τ değerleri için kritik Rayleigh (Ra_c) sayılarına karşılık gelen kiritik dalga sayı (k_c) değerleri Çizelge 5.2’de listelenmiştir. Kritik dalga sayısının büyüklüğü Rayleigh Bénard değeri olan $k_c = 3,117$ değerinden daha küçük değerler olarak azalmaktadır. Kritik Rayleigh sayısında olduğu gibi manyetik alan ve döndürmenin ayrı ayrı konveksiyonu geciktirme etkisi olmasına karşın sisteme aynı anda uygulanmaları ters yönde bir etki yaparak kritik dalga sayısındaki bu azalmanın monotonik olmasını engellediği Çizelge 5.2 görülmektedir [3, 16, 17, 20]. Ayrıca bu kritik dalga sayılarının inişli çıkışlı davranışı Şekil 5.2’de daha net görülmektedir.

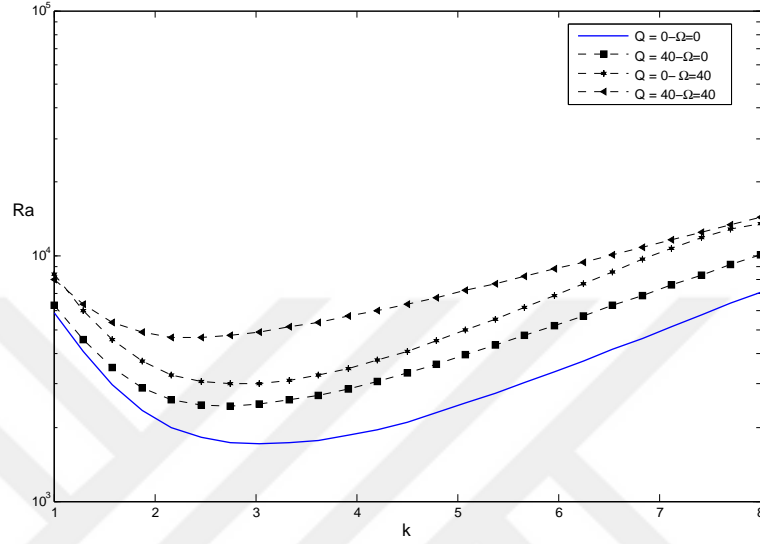
Çizelge 5.2 Coriolis ve Chandrasekhar parametreleri için kritik dalga sayıları, k_c .

$\Omega \backslash Q$	0	40	80	120	160	200	240	280
0	3.117	2.6880	2.4840	2.3470	2.2440	2.1620	2.0940	2.0360
20	2.691	2.578	2.431	2.318	2.226	2.151	2.086	2.030
40	2.817	2.346	2.303	2.241	2.177	2.117	2.039	2.013
60	2.842	2.856	2.147	2.137	2.106	2.068	2.027	1.988
80	2.903	2.994	1.995	2.026	2.025	2.008	1.983	1.955
100	2.984	3.006	1.672	1.917	1.941	1.944	1.935	1.918



Şekil 5.2 Farklı Coriolis ve Chandrasekhar parametreleri için kritik dalga sayıları.

Artan Chandrasekhar ve Coriolis değerleri iin marjinal istikrar eğrisi Şekil 5.3’de gösterilmiştir. Sisteme manyetik alan ve döndürme ayrı ayrı uygulandığında kritik Rayleigh sayısının arttığı yani konveksiyonu geciktirdiği ancak her ikisinin aynı anda sisteme uygulanması durumunda bu gecikmenin artmak yerine aynı seviyede kaldığı ve hatta bazı durumlarda azaldığı görülmüştür [3, 16, 17, 20].



Şekil 5.3 Artan Coriolis ve Chandrasekhar parametreleri iin doğrusal kararlılık eğrisi.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada, dönel halkasal boşlukta ve sabit bir manyetik alan etkisi altında bulunan elektriksel olarak iletken bir akışkanın konveksiyon hareketinin başladığı an sayısal olarak hesaplanmaktadır. Bu halkanın iç ve dış yüzeylerinin kapalı sınır şartını sağladığı kabul edilmiştir. Alt ve üst plakalardaki rijitlik ve yatay yöndeki peryodiklik varsayımlarından, hız ve sıcaklık için düşey yönde kaymazlık (no-slip) sınır koşulları, yatay yönlerde ise periyodik sınır koşulları kullanılmıştır. Manyetik alan ve döndürmenin doğal konveksiyona aynı anda uygulanması üzerine literatürde birçok analitik ve sayısal çalışma yapılmıştır. Solenoidal baz yaklaşımı da farklı şekillerde ve konfigürasyonlarda kullanılmıştır. Bu çalışmada kullanılan solenoidal baz yaklaşımı daha önce farklı tip problemlere Yarım-pabuç vd. [19, 20, 21] tarafından uygulanmıştır. Ancak, yatay yönde hem yerçekimine dik hem de birbirine dik olarak uygulanan manyetik alan ile dönmenin etkisi altındaki doğal konveksiyona ilk defa bu çalışma ile uygulanmıştır.

Bu çalışmadaki önemli aşamalardan biri, solenoidal baz yaklaşımında Legendre polinomları ile bununla bağıntılı olan Gauss-Legendre-Lobatto (GLL) kuadratürün kullanılması ve bir diğeri ise hız ile manyetik alan arasındaki ilişki kullanılarak, manyetik alan için solenoidal bazların hız için oluşturulan solenoidal bazlardan analitik olarak elde edilebilmesidir. Legendre polinomlarının ağırlık fonksiyonunun bir ve sayısal olarak kararlı interpolasyon polinomu olması, solenoidal bazların ve çiftleşlerinin bu polinomlar cinsinden oluşturulmasında kolaylık sağlamaktadır. Ayrıca, Legendre polinomları ile ilintili olan GLL kullanılarak denklemlerin zayıf formlarının oluşturulmasında karşılaşılan integraller yüksek doğruluk derecesinde elde edilebilmektedir. Solenoidal baz yaklaşımı kullanılarak hem hız hem de manyetik alan için süreklilik denkleminin otomatik olarak sağlanması ve manyetik alan için oluşturulan bazlarda yarı-durağan ilişkinin kullanılması ile sistemdeki denklem sayısı azalmış olur. Bu durum sayısal yöntem üzerindeki yükü azaltırken yöntemin doğruluğunu artırır. Buna ek olarak, çiftleş bazlar oluşturulurken bu bazlara birtakım koşullar eklenerek sistemde sınır koşulları olmadan bulunan ve bu tip problemlerde çözülmesi için özel algoritmalar oluşturulan basınç terimi sistemden kolaylıkla elimine edilebilmektedir.

Yapılan bu çalışmada kullanılan yaklaşım hız, sıcaklık ve indüklenmiş manyetik

alan değişkeninin sınır şartlarını sağlayan solenoidal baz fonksiyonları cinsinden yazılmasına dayanmaktadır. Bu metot manyetik alan ve döndürmenin etkisindeki sıkıştırılmaz akışkanlar modellenmesinde basınç değişkeninin çözümlenmesi ve solenoidal şartlarının sağlanması ile kullanılan gelen sayısal tekniklere yeni bir alternatif oluşturmaktadır. Bu yaklaşım, yatay yönde hem yerçekimine dik hem de birbirine dik olarak uygulanan manyetik alan ile dönmenin etkisi altında iletken rejimin istikrarını kaybettiği taşınım rejimine geçtiği doğrusal kararlılık analizi yapılarak test edilmiştir. Manyetik alan ve döndürme aynı anda sisteme uygulandığında konveksiyondaki gecikmenin artmak yerine aynı seviyede kaldığı ve hatta bazı durumlarda azaldığı görülmüştür. Bu çalışmada kullanılan yaklaşım Solenoidal bazların oluşturulması ve uygulanması açısından yeni bir methodtur. Basınç değişkeninin çözümlenmesi ve solenoidal şartlarının sağlanması ile kullanılan gelen sayısal tekniklere yeni bir alternatif oluşturmaktadır. Bu yaklaşım ile, yatay yönde hem yerçekimine dik hem de birbirine dik olarak uygulanan manyetik alan ile dönmenin etkisi altında iletken rejimin istikrarını kaybettiği taşınım rejimine geçtiği doğrusal kararlılık analizi yapılarak test edilmiş, elde edilen sonuçların literatürle birebir örtüştüğü gözlenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Chandrasekhar, S., The instability of a layer of fluid heated below and subject to the simultaneous action of a magnetic field and rotation. Proc.Roy.Soc. A225, 173–184, 1954c.
- [2] Chandrasekhar, S., The instability of a layer of fluid heated below and subject to the simultaneous action of a magnetic field and rotation II. Proc.Roy.Soc. A225, 173–184, 1956a.
- [3] Chandrasekhar, S., Hydrodynamics and Hydromagnetic Instability, Oxford: Clarendon Press, United Kingdom, 1961.
- [4] Nakagawa, Y., Experiments on the instability of a layer of mercury heated from below and subject to the simultaneous action of a magnetic field and rotation, Proc. R. Soc. Lond. A, 242(1228), 81–88, 1957.
- [5] Nakagawa, Y., Experiments on the instability of a layer of mercury heated from below and subject to the simultaneous action of a magnetic field and rotation II, Proc. R. Soc. Lond. A, 249(1256), 138–145, 1959.
- [6] Eltayeb, I.A., Hydromagnetic Convection in a Rapidly Rotating Fluid Layer, Proc. R. Soc. Lond. A, 326(1565), 229–254, 1972.
- [7] Eltayeb, I.A., Overstable hydromagnetic convection in a rotating fluid layer, Journal of Fluid Mechanics, 71(01), 161–179, 1975.
- [8] Jones, C.A, Roberts, P.H. ve Galloway, D.J., Compressible convection in the presence of rotation and a magnetic field, Geophys. Astrophys. Fluid Dynam., 53, 145–182, 1990.
- [9] Eltayeb, I.A., Kumar, S., Hydromagnetic Convective Instability of a Rotating, Self-Gravitating Fluid Sphere Containing a Uniform Distribution of Heat Sources, Proc. R. Soc. Lond. A, 353, 145–162, 1977.
- [10] Fearn D.R., Thermally driven Hydromagnetic convection in a rapidly rotating sphere, Proc. R. Soc. Lond. A, 369, 227–242, 1979.

- [11] Longbottom A.W., Jones C.A., and Hollerbach R., Linear magnetoconvection in a rotating spherical shell, incorporating a finitely conducting inner core, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 80(3), 205–227, 1995.
- [12] Friedrich J., Lee Y.S., Fischer B. and Kupfer C., Vizman D., Müller G., Experimental and numerical study of Rayleigh-Benard convection affected by a rotating magnetic field, *Physics of Fluids*, 11(4), 1999.
- [13] Aurnou, J. M. and Olson, P. L., Experiments on Rayleigh Benard convection, magneto convection and rotating magneto convection in liquid gallium, *J. Fluid Mech.*, 430, 283–307, 2001.
- [14] Brito, D., Cardin, P., private communication, 2003.
- [15] Julien K., Knobloch E., and Tobias S.M., Rotating magnetoconvection with magnetostrophic balance, *World Scientific Series on Nonlinear Science Series B*, 12 , 78–101, 2004.
- [16] Kurt E., Busse F. H. and Pesch W., Hydrodynamic convection in a rotating annulus with an azimuthal magnetic field, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 18, 251–263, 2004.
- [17] Kurt E., Dönen bir halkasal boşlukta bulunan manyetik akışkanın konum–zamansal kaotik yapıları, *Tübav Bilim Dergisi*, 1(2), 63–71, 2008.
- [18] Gillet N., Brito D., Jault and Nataf H.C., Experimental and numerical studies of magnetoconvection in a rapidly rotating spherical shell, *J. Fluid Mech.*, 580, 123–143, 2007.
- [19] Yarımabuç, D., Tarman, H. I. and Yıldırım, C., A Spectral Solenoidal-Galerkin Method for Rotating Thermal Convection between Rigid Plates, *Math. Probl. Eng.*, 2013. (DOI: 10.1155/2013)
- [20] Yarımabuç, D., Tarman, H. I. and Yıldırım, C., A Spectral Solenoidal-Galerkin Method for Thermal Convection under the Influence of Rotation and Oblique Magnetic Field, *Pamir International Conference Fundamental and Applied MHD Thermo acoustic and Space technologies*, Riga, Latvia, June, 2014.

- [21] Yarımpabuç, D., Tarman, H. I. and Yıldırım, C., Numerical Simulations of Thermal Convection under the Influence of an Inclined Magnetic Field by Using Solenoidal Bases, *Math. Methods Appl. Sci.*, 37-18, 2829–3076, 2014. (DOI: 0.1002/mma.3034)
- [22] Becker, N., Scheel, J.D., Cross, M.C., Effect of the centrifugal force on domain chaos in Rayleigh-Bénard convection, *Physical Review*, E73, 066309, 2006.
- [23] Davidson, P. A., *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press, United Kingdom, 2001.
- [24] Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A. and Zang, T.A., *Spectral Methods: Evolution to Complex Domains and Applications to Fluid Dynamics*, Springer, New York, 2007.
- [25] Kleiser, L. and Schumann, U., Treatment of incompressibility and boundary conditions in 3-D numerical spectral simulations of plane channel flows, in Hirschel, In proceedings of the E.H. ed.: *Third GAMM Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics*, Vieweg, Braunschweig, 165–173, 1980.
- [26] Orszag, S.A. and Kells, L.C., Transition to turbulence in plane Poiseuille flow and plane Couette flow, *J. Fluid Mech.*, 96, 159–205, 1980.
- [27] Möbner, R. and Müller, U., A numerical investigation of three dimensional magneto convection in rectangular cavities, *Int. J. Heat Mass Transf.*, 42, 1111–1121, 1999.
- [28] Güray, E. and Tarman, I. H., Thermal convection in the presence of a vertical magnetic field, *ACTA Mechanica*, 194, 33–46, 2007.
- [29] Reid, W. H. and Harris, D. L., Some further results on the Bénard problem, *Phys. Fluids*, 1, 102–110, 1958.

ÖZGEÇMİŞ

1. **Adı Soyadı** : Mustafa POYRAZ
2. **Doğum Tarihi** : 30 Aralık 1986
3. **Ünvanı** : Öğretmen
4. **Öğrenim Durumu** :

Derece	Alan	Üniversite	Yıl
Lisans	Matematik Bölümü	Atatürk Üniversitesi	2008
Yüksek Lisans	Matematik Bölümü	Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi	2013–

5. **Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında basılan bildiriler:**
Yarımpabuç, D. and Poyraz M., Dönen bir Halkasal Boşlukta Bulunan Manyetik Akışkanın Galerkin Solenoidal Yöntemi ile Doğrusal Kararlılık Analizi, ULIBTK 2015 Konferansı, Balıkesir, Türkiye, (Eylül 2015).