FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜLERİ
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet ÇOLAK

OTOMOTO YARIGRUPLARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OSMANİYE – 2016

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

OTOMOTO YARIGRUPLARI

Mehmet ÇOLAK

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

OSMANİYE
AĞUSTOS-2016

TEZ ONAYI

OTOMOTO YARIGRUPLARI

Mehmet ÇOLAK tarafından Yrd. Doç. Dr. Basri ÇALIŞKAN danışmanlığında, Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalı'nda hazırlanan bu çalışma, aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği/çokluğu ile **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Basri ÇALIŞKAN ....
Matematik Anabilim Dalı, OKÜ

Üye: Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM ....
Matematik Anabilim Dalı, KSÜ

Üye: Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN ....
Matematik Anabilim Dalı, GAÜN

Yukarıdaki jüri kararı Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..../......./........ tarih ve ..../........... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdullah Ali GÜRTEN ....
Enstitü Müdürü, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Bu Çalışma OKÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi Tarafından Desteklenmiştir.

Proje No: OKÜBAP-2015-PT3-005

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, bu çalışma sonucunda elde edilmeyen her türlü bilgi ve ifade için ilgili kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını ve bu tezin Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Mehmet ÇOLAK

ÖZET

OTOMOTO YARIGRUPLARI

Mehmet ÇOLAK
Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı
Danışman :Yrd. Doç. Dr. Basri ÇALIŞKAN

Ağustos 2016, 58 sayfa

Bu tezde öncelikle otomoto yarıgrubu ve otomoto grubu tanımlanmış, tüm sonlu yarıgrupların otomoto yarıgrubu olduğu gösterilmiştir. S bir otomoto yarıgrubu olmak üzere S ye 0 elemanı (1 birim eleman) eklenerek elde edilen S^0 (S^1) yarıgrubunun da bir otomoto yarıgrubu olduğu ve her otomoto yarıgrubunun artıksal sonlu olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, herhangi bir $n \geq 2$ ve $n \in \mathbb{N}^*$ için rankı n olan serbest değişmeli yarıgrubun bir otomoto yarıgrubu olduğu gösterilmiştir.

Bunlara ilave olarak, Cayley otomotosu ve Cayley otomoto yarıgrubu tanımlanmış ve ilgili bazı teoremler ispatlanmıştır.

Son olarak, (3,2)-yarıgrubu, (3,2)-otomotosu ve (3,2)-yarıgrup otomotosu tanımlanmış, bir (3,2)-otomotosunun bir (3,2)-yarıgrup otomotosunu nasıl ürettiği incelenmiş ve bu yöntem için bir algoritma verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Otomoto yarıgruplar, Cayley otomoto yarıgrubu, (3,2)-yarıgruplar, (3,2)-yarıgrup otomotosu

ABSTRACT

AUTOMATON SEMIGROUPS

Mehmet ÇOLAK
M.Sc., Department of Mathematics
Supervisor :Assist. Prof. Dr. Basri ÇALIŞKAN

Agust 2016, 58 pages

In this thesis, the automaton semigroups and the automaton groups are defined and it is shown that every finite semigroup is an automaton semigroup. If S is an automaton semigroup and S^0 $\left(S^1\right)$ is the semigroup formed by adjoining a zero (identity) to S, then it is shown that S^0 $\left(S^1\right)$ is also an automaton semigroup and every automaton semigroup is residually finite. Also, it is shown that for any $n \geq 2$ with $n \in \mathbb{N}^*$, the free commutative semigroup of rank n is an automaton semigroup.

In addition, the Cayley automatons and the Cayley automaton semigroups are defined and some relevant theorems are proved.

Finally, (3,2)-semigroups, (3,2)-automata and (3,2)-semigroup automata are defined; the method of generating a (3,2)-semigroup automata from a (3,2)-automata is investigated and an algorithm for this method is given.

Key Words: Automaton semigroups, Cayley automaton semigroup, (3,2)-semigroups, (3,2)-semigroup automata

Değerli Eşim ve Çocuklarıma

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tez konumun belirlenerek tez çalışmamın yürütülmesini üstlenen, çalışmalarım süresince değerli bilgi ve tecrübelerini katkılarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Basri ÇALIŞKAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca manevi desteği ile daima yanımda duran değerli eşim Ayşe ÇOLAK'a, çalışmama katkılarından dolayı OKÜ Matematik Bölüm Başkanı Sayın Yrd. Doç. Dr. Cennet ESKAL'a ve OKÜ Matematik Bölümü'nün diğer akademik ve idari personellerine teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

S^1	S yarıgrubuna 1 elemanı eklenerek elde edilen monoid
$\langle A \mid R \rangle$	Monoid (ya da yarıgrup) takdimi
$S \times S$	S kümesinin kartezyen çarpımı
$\mathcal{S}[Y, S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}]$	Yarıgrupların güçlü yarılatisi
$\langle A \rangle$	A kümesi tarafından doğrulan yarıgrup
$\mathcal{B}[Y, S_\alpha]$	Yarıgrupların bandı
A^+	A kümesinden oluşturulan en az bir uzunluklu kelimelerin kümesi
A^*	$A^+ \cup \{1\}$
$R^\#$	R yi içeren en küçük kongrüans
A^+/ρ	A^+ yarıgrubunun ρ kongrüansı ile bölüm yarıgrubu
A^*/ρ	A^* monoidinin ρ kongrüansı ile bölüm yarıgrubu
$l(w)$	w kelimesinin uzunluğu
$x\rho$	x elemanının ρ kongrüansına göre denklik sınıfı
$w_1 \equiv w_2$	w_1 ve w_2 kelimeleri özdeş
$w_1 \equiv \alpha_1, \alpha_{2,\ldots}, \alpha_n \equiv w_2$	w_1 kelimesinden w_2 kelimesine sonlu bir dizi
$\mathscr{A}$	Otomoto
δ	Geçiş fonksiyonu
$EndB^*$	B^* ağacının endomorfizm yarıgrubu
$\sum(\mathscr{A})$	$\mathscr{A}$ otomotosunun belirlediği yarıgrup
B^n	B üzerindeki sonlu diziler
B^ω	B üzerindeki sonsuz diziler
$AutB^*$	B^* ın otomorfizm grubu
$\Gamma(\mathscr{A})$	$AutB^*$ ın bir alt grubu
$\mathscr{C}(S)$	S yarıgrubunun Cayley otomotosu
$\sum(\mathscr{C}(T))$	Bir sonlu T yarıgrubunun belirlediği Cayley otomoto yarıgrubu
$\{\}$	$B^3 \longrightarrow B^2$ tanımlanan bir (3,2)-işlem
$(B, \{\})$	(3,2)-yarıgrup
(S, B, f)	(3,2)-otomoto
$(S, (B, \{\}), f)$	(3,2)-yarıgrup otomotosu

1. GİRİŞ

Otomotolar matematiğin bir çok alanında özellikle cebir ve bilgisayar bilimlerinde çok sayıda uygulamaları olan kavramlardır. Bir otomotonun en önemli işlevi kümelerin tanıtılmaları ve dönüştürülmeleridir. Bu bakımdan alıcılar (acceptors) ve dönüştürücüler (transducers) olarak iki sınıfa ayrılırlar. Her ikisi de cebir ve dinamik sistemler teorisinde oldukça önemli role sahiptirler. Otomoto hakkında matematiğin bu alanları ile ilgili çok sayıda çalışmalar ve kitaplar bulunmaktadır [1-10].

Otomoto, gruplarla yakından bağlantılı olup, otomoto tarafından doğurulan gruplar ilk olarak 1960 yıllarında çalışılmaya başlanmıştır [7, 11]. Fakat 1980 lerde grup teoride varsayımlara karşı aksine örnekler sağlamalarından sonra çok daha ilgi çeken bir alan olmuştur. Örneğin, 1902 de William Burnside'ın "Bir sonlu üreteçli torsion grubu sonlu olmalı mıdır?" (Burnside Problemi) sorusunu 1962 de negatif olarak ilk cevabı Golod, Golod-Shafarevich Teoremi kullanılarak vermiştir [12]. 1970 lerde Alesin ve 1980 lerin başlarında Grigorchuk tarafından bu problemin daha basit ve şık bir çözümü otomoto kullanılarak yapılmıştır [13, 14]. Dolayısıyla grupların bu sınıfı genel Burnside Problemine önemli katkılar sağlamıştır. Bu dönemde Grigorchuk'un [14] de verdiği sonsuz periyodik grup örneği ve Gupta ve Sidki'nin [15] de verdiği grup örneği ile bunlara ilaveten Nekrashevych'in [16] daki kitabı, Bartholdi, Grigorchuk ve Nekrashevych'in [17] deki kitabı ve Bartholdi, Grigorchuk ve Sunik'in [18] deki kitabı, Grigorchuk ve Sunik'in [19] daki notları önemli bir teorinin gelişmesine katkı sağlamıştır. Temel teorinin ana hatları Grigorchuk, Nekrashevich ve Sushchanski'nin [20] deki çalışması ile belirlenmiştir.

Otomoto tarafından doğrulan gruplar, sadece grup teorideki varsayımlara aksine örnekler sağlamakla kalmayıp, matematiğin diğer alanlarında da ortaya çıkmıştır. Örneğin, bu alanda son yıllarda en parlak keşiflerin olduğu holomorfik dinamik araçlarla olan bağlantısı genellikle yinelemeli (monodromi) grup olarak adlandırılır [21].

Sonlu otomotonun gruplar, dinamik sistemler ve grafikler ile ilgili çalışmalarda kullanılması otomoto teorisinin gelişiminde başlangıç çalışmalar olarak kabul edilir. Bu alanla ilgili çözülmemiş çok sayıda problemler ve yeni uygulama alanları bulunmaktadır.

Otomoto grup kavramının yarıgruplara genelleştirilmesi sayesinde otomoto yarıgrupları ile ilgili çalışmalar başlamıştır.

Silva ve Steinberg [23] de lamplither grupların genellemesi olan bir yarıgrup sınıfını çalıştılar. Maltcev [24] de Cayley Otomotonun doğurduğu otomoto yarıgruplarını çalışmıştır. Bu otomoto yarıgrupları kısmen [25] da Cain tarafından da çalışıldı. Ayrıca otomoto yarıgruplarının sonluluk probleminin karar verilemez olduğu [26] de yapılan algoritmik problemelerin çalışılmasıyla elde edilmiştir.

Otomoto yarıgrupları araştırmacılar tarafından genellikle iki nedenden dolayı çalışılır. Birincisi grupların otomoto teorideki tanımlamaları ile ilgili çalışmaların yarıgruplara genellendiğinde daha kolay ispatlanabilmesi, daha önemli olan ikincisi ise otomoto yarıgruplarının daha genel durumlarına çalışmak, otomoto gruplarının özel durumlarını belirlemede yol gösterici olmasıdır, yani yarıgruplar için zayıf gibi görünen bir durum gruplar için ileride çok daha güçlü durum olabilmektedir.

Bu tezin ikinci bölümünde öncelikle tezde kullanılacak yarıgrup ve otomoto teorisi ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, öncelikle otomoto yarıgrubunun ve otomoto grubunun tanımları yapılmıştır. S bir otomoto yarıgrubu olmak üzere S ye 0 elemanı (1 birim eleman) eklenerek elde edilen S^0 (S^1) yarıgrubunun da bir otomoto yarıgrubu olduğu gösterilmiştir. Her otomoto yarıgrubunun artıksal sonlu olduğu ve tüm sonlu yarıgrupların otomoto yarıgrubu olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, herhangi bir $n \geq 2$ ve $n \in \mathbb{N}^*$ için rankı n olan serbest değişmeli yarıgrubun bir otomoto yarıgrubu olduğu gösterilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde, Cayley otomotosu ve Cayley otomoto yarıgrubu tanımlanmış ve ilgili bazı teoremler ispatlanmıştır.

Tezin son bölümünde ise öncelikle (3,2)-yarıgrubu, (3,2)-otomotosu ve (3,2)-yarıgrup otomotosu tanımlanmıştır. Daha sonra ise bir (3,2)-otomotosunun bir (3,2)-yarıgrup otomotosunu nasıl ürettiği incelenmiş ve bu yöntem için bir algoritma verilmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR VE SONUÇLAR

Bu bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan yarıgrup ve otomoto teorilerdeki temel tanım ve teoremlerden bazıları ve bunlarla ilgili örnekler verilmiştir. Bu konularla ilgili daha detaylı bilgiler [27, 28, 29, 30] kaynaklarından elde edilebilir.

2.1 Yarıgruplar

Tanım 2.1 S boş kümeden farklı bir küme olsun. $S \times S$ den S ye tanımlı bir fonksiyona *ikili işlem* denir. Bu ikili işlem $x, y \in S$ için $x \cdot y$ şeklinde gösterilir. Genelde $x \cdot y$ yerine kısaca xy yazılır. Eğer "$\cdot$", S üzerinde bir ikili işlem ise $(S, \cdot)$ ikilisine bir *grupoid* denir.

Tanım 2.2 $(S, \cdot)$ bir grupoid olsun. Eğer "$\cdot$" ikili işlemi S üzerinde birleşme özelliğine sahip, yani her $x, y \in S$ için

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

ise $(S, \cdot)$ grupoidine bir *yarıgrup* denir.

Genellikle $(S, \cdot)$ yerine kısaca S yazılır ve "ikili işlem" yerine "çarpma işlemi" kullanılır.

Tanım 2.3 S yarıgrubu değişme özelliğine sahip, yani her $x, y \in S$ için

$$xy = yx$$

ise S ye *değişmeli yarıgrup* denir.

Tanım 2.4 S bir yarıgrup olsun. Eğer bir $e \in S$ için $e^2 = e$ oluyorsa e ye *idempotent eleman* denir. Eğer S yarıgrubunun tüm elemanları idempotent ise S yarıgrubuna bir *band* denir. Eğer bir S yarıgrubu hem band hem de değişmeli ise S ye bir *yarılatis* denir.

Tanım 2.5 S bir yarıgrup olsun. Eğer her $s \in S$ için

$$1s = s = s1$$

olacak şekilde bir $1 \in S$ varsa, 1 elemanına S nin *birim elemanı* ve S ye de bir *monoid* denir.

Bir S yarıgrubunun en fazla bir tane birim elemanı vardır. Eğer S birim elemana sahip değil ise ekstra bir birim eleman kolayca eklenebilir. Her $s \in S$ için

$$s1 = 1s = s \text{ ve } 1 \cdot 1 = 1$$

olarak tanımlanırsa $S \cup \{1\}$ bir monoid olur. S^1 kümesi

$$S^1 = \begin{cases} S, & S \text{ birim elemana sahip ise} \\ S \cup \{1\}, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. S^1 kümesine (eğer gerekli ise) *birim eleman eklenerek S den elde edilen monoid* denir.

Tanım 2.6 Bir $(S, \cdot)$ monoidinde her $a \in S$ için $ab = 1$ olacak şekilde bir $b \in S$ varsa $(S, \cdot)$ ikilisine bir *grup* denir.

Eğer bir monoidde bir elemanının tersi varsa tektir. Bir a elemanının tersi a^{-1} ile gösterilir.

Tanım 2.7 S bir yarıgrup ve $H \subseteq S$ olsun. Her $a, b \in H$ için $ab \in H$ ise H ye S nin bir *alt yarıgrubu* denir. S birim elemanı 1_S olan bir monoid ve H de S nin bir alt yarıgrubu olsun. Eğer $1_S \in H$ ise H de bir monoid olup, bu monoide S nin bir *alt monoidi* denir.

Verilen bir S yarıgrubunun bütün alt yarıgruplarının kesişiminin de, S nin bir alt yarıgrubu olduğu açıktır. Bir S yarıgrubunun bir A alt kümesi verilsin. O halde S nin A yı içeren tüm alt yarıgruplarının arakesiti de bir yarıgruptur. Bu yarıgruba A tarafından doğurulan yarıgrup denir ve $\langle A \rangle$ ile gösterilir. $\langle A \rangle$ yarıgrubu S nin A yı içeren (kapsamaya göre) en küçük alt yarıgrubudur.

Tanım 2.8 $S = \langle A \rangle$ ise S ye A tarafından doğurulmuş ve A ya da S nin bir *doğuray kümesi* denir.

$$S = \langle S \rangle$$

olacağı açıktır.

Tanım 2.9 $S = \langle A \rangle$ ve A nın S yi doğuracak şekilde hiçbir özalt kümesi yok ise S ye A tarafından *minimal olarak doğurulmuş* ve A ya da S nin bir *minimal doğuray* kümesi denir.

Tanım 2.10 Eğer S nin, $S = \langle A \rangle$ olacak şekilde sonlu bir A alt kümesi varsa S ye *sonlu doğuraylı* denir.

Tanım 2.11 S ve T iki yarıgrup ve f de S den T ye bir dönüşüm (fonksiyon) olsun. Eğer her $x, y \in S$ için

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

ise f ye bir *homomorfizm* denir.

Tanım 2.12 S bir yarıgrup olsun. Eğer $SL \subseteq L$ ($RS \subseteq R$) ise S nin boştan farklı L (R) alt kümesine S nin *sol ideali* (*sağ ideali*) denir. Eğer S nin boştan farklı bir I alt kümesi hem sağ hem de sol ideal ise I ya S nin bir *ideali* (*iki yanlı ideali*) denir.

Dikkat edilecek olursa bir yarıgrubun iki yanlı her ideali bir alt yarıgruptur. Fakat bir alt yarıgrubun bir ideal olması gerekmez.

Tanım 2.13 S bir yarıgrup olsun. Eğer S, ayrık alt yarıgruplarının bir birleşimi ise S ye *yarıgrupların birleşimi* denir.

Tanım 2.14 S bir yarıgrup, Y bir band ve $\alpha \in Y$ için S_α lar S nin ayrık alt yarıgrupları olsun. Eğer $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ ve her $\alpha,\ \beta \in Y$ için $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$ ise S ye *yarıgrupların bir bandı* denir ve $\mathcal{B}[Y, S_\alpha]$ ile gösterilir.

Tanım 2.15 S bir monoid olsun. Eğer S, ayrık alt monoidlerin bir birleşimi ise S ye *monoidlerin birleşimi* denir.

Tanım 2.16 S bir monoid, Y bir band ve $\alpha \in Y$ için S_α lar S nin ayrık alt monoidleri olsun. Eğer $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ ve her $\alpha,\ \beta \in Y$ için $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$ ise S ye *monoidlerin bir bandı* denir ve $\mathcal{B}[Y, S_\alpha]$ ile gösterilir.

Tanım 2.17 $\mathcal{B}[Y, S_\alpha]$ yarıgrupların (monoidlerin) bir bandı olsun. Eğer Y ayrıca bir yarılatis ise S ye yarıgrupların (monoidlerin) yarılatisi denir ve $\mathcal{S}[Y, S_\alpha]$ ile gösterilir.

2.2 Bağıntılar, Denklikler ve Kongrüanslar

Tanım 2.18 X boştan farklı bir küme olmak üzere $X \times X$ in bir ρ alt kümesine X üzerinde bir *bağıntı* denir. Tüm bağıntıların kümesi $B(X)$ ile gösterilir.

Örnek 2.19 $1_X = \{(x,x) \,:\, x \in X\}$ ve $X \times X$ kümeleri X üzerinde birer bağıntıdır.

ρ, X üzerinde bir bağıntı olmak üzere $(x,y) \in \rho$, $x\rho y$ şeklinde veya $x \equiv y \pmod{\rho}$ şeklinde de yazılabilir. Ayrıca, her $\rho \in B(X)$ için ρ nun ters bağıntısı (tersi)

$$\rho^{-1} = \{(y,x) \in X \times X \,:\, (x,y) \in \rho\}$$

olarak tanımlanır.

$B(X)$ üzerindeki çarpma işlemi herhangi iki $\rho,\ \sigma \in B(X)$ elemanı için

$$\rho \circ \sigma = \{(x,y) \in X \times X \,:\, z \in X,\ (x,z) \in \rho,\ (z,y) \in \sigma\}$$

olarak tanımlanır. $B(X)$, $\circ$ ikili işlemi ile bir yarıgruptur. Ayrıca $(B(X),\circ)$, birim elemanı 1_X olan bir monoiddir.

Tanım 2.20 ρ, X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. Eğer

1. $1_X \subseteq \rho$ ise ρ ya *yansımalı*;
2. $\rho^{-1} = \rho$ ise ρ ya *simetrik*;
3. $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ ise ρ ya *geçişmeli*; bağıntı denir.

Tanım 2.21 Eğer ρ bağıntısı yansımalı, simetrik ve geçişmeli bağıntı ise ρ ya X üzerinde bir *denklik bağıntısı* denir. $x\rho = \{y \in X \,:\, (x,y) \in \rho\}$ olarak tanımlanan bu kümeye x in *denklik sınıfı* denir. Ayrıca

$$X/\rho = \{x\rho \,:\, x \in X\}$$

kümesine X in ρ vasıtasıyla oluşturulan *bölüm kümesi* denir.

Eğer $\{\rho_i \,:\, i \in I\}$, X kümesi üzerindeki denklik bağıntılarının boştan farklı bir ailesi ise

$$\bigcap_{i \in I} \rho_i$$

de X üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

R, X kümesi üzerinde herhangi bir bağıntı ise $R \subseteq X \times X$ olduğundan R yi içeren denklik bağıntılarının ailesi boştan farklıdır. O halde R yi içeren tüm denklik bağıntılarının kesişimi yine R yi içeren bir denklik bağıntısı olup, bu denklik bağıntısı R yi içeren en küçük denklik bağıntısıdır. Bu en küçük denklik bağıntısına *R tarafından doğurulan denklik bağıntısı* denir.

Tanım 2.22 S bir yarıgrup ve R de S üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer her $a \in S$ ve $(s,t),\ (s',t') \in R$ için

1. $(as, at) \in R$ ise R bağıntısına *sol uyumlu*;
2. $(sa, ta) \in R$ ise R bağıntısına *sağ uyumlu*;
3. $(ss', tt') \in R$ ise R bağıntısına *uyumlu* bağıntı denir.

Ayrıca, sol uyumlu denklik bağıntısına bir *sol kongrüans*, sağ uyumlu denklik bağıntısına bir *sağ kongrüans* ve uyumlu denklik bağıntısına bir *kongrüans* denir.

Tanım 2.23 R, bir S yarıgrubu üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. S üzerinde R yi içeren en küçük kongrüansa *R nin doğurduğu kongrüans* denir ve $R^{\#}$ ile gösterilir. Bu durumda R bağıntısına, *$R^{\#}$ kongrüansının doğuray kümesi* denir.

Tanım 2.24 S bir yarıgrup ve ρ da S üzerinde bir kongrüans olsun. S nin ρ vasıtasıyla oluşturulan bölüm kümesi S/ρ üzerinde çarpma işlemi, her $x\rho,\ y\rho \in S/\rho$ için

$$(x\rho)(y\rho) = (xy)\rho$$

şeklinde tanımlansın. S/ρ, bu çarpma işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba S nin ρ vasıtasıyla oluşturulan *bölüm yarıgrubu* denir.

2.3 Takdimler

Bu kısımda yarıgrup ve monoid takdimleri ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

Tanım 2.25 A boş olmayan bir küme (alfabe) olsun. Her $1,\ldots,n \in A$ için

$$w \equiv a_1 a_2 \cdots a_n$$

ifadesine uzunluğu (boyu) n olan bir *kelime* denir ve kelimenin uzunluğu (boyu) $l(w)$ ile gösterilir. Eğer $l(w)$ sonlu bir tamsayı ise w kelimesine bir *sonlu kelime* denir. Eğer $l(w) = 0$ ise w kelimesine *boş kelime* denir ve boş kelime 1 ile gösterilir.

Tanım 2.26 A boş olmayan bir küme olmak üzere, A üzerindeki tüm boş olmayan sonlu kelimelerin kümesi A^+ ile gösterilir. Diğer bir ifade ile;

$$A^+ = \{a_1 a_2 \cdots a_n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } a_1, a_2, \ldots, a_n \in A\}$$

olur. Ayrıca

$$A^* = \{a_1 a_2 \cdots a_n | n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \text{ ve } a_1, a_2, \ldots, a_n \in A\} = A^+ \cup \{1\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.27 A^+ üzerindeki çarpma her $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_m \in A^+$ için

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)(b_1 b_2 \cdots b_m) = a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m$$

olarak tanımlanırsa, bu durumda A^+ kümesi üzerinde tanımlanan çarpma işlemi ile bir yarıgrup olur. A^+ yarıgrubuna, A üzerindeki *serbest yarıgrup* denir.

Tanım 2.28 A bir alfabe ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olmak üzere, $\langle A|R\rangle$ ikilisine bir *yarıgrup takdimi* denir ve ρ , A^+ üzerinde R tarafından doğrulmuş kongrüans olmak üzere, $\langle A|R\rangle$ tarafından takdim edilen yarıgrup A^+/ρ bölüm yarıgrubudur. Eğer S yarıgrubu A^+/ρ ya izomorfik ise $\langle A|R\rangle$ ye *S nin bir yarıgrup takdimi* denir.

Eğer A ve R sonlu kümeler ise $\langle A|R\rangle$ ye bir *sonlu takdim* ve eğer bir S yarıgrubunun bir sonlu takdimi var ise S ye *sonlu takdimli yarıgrup* denir.

Tanım 2.29 A bir alfabe, A^*, A üzerindeki serbest monoid, $R \subseteq A^* \times A^*$, ρ da R nin doğurduğu kongrüans olsun. $\langle A|R\rangle$ ikilisine bir *monoid takdimi* denir. A^*/ρ bölüm monoidine de $\langle A|R\rangle$ takdiminin tanımladığı monoid denir. Eğer M bir monoid ve $M \cong A^*/\rho$ ise, $\langle A|R\rangle$ ye *M nin bir monoid takdimi* denir.

M bir monoid ve $\langle A|R\rangle$ de M nin bir monoid takdimi olsun. O zaman $e \notin A$ için $\langle A,\ e|\overline{R},\ ae = a,\ ea = a,\ e^2 = e,\ (a \in A)\rangle$ yarıgrup takdimi M yi bir yarıgrup gibi tanımlar. Burada $\overline{R}$, R den $r = 1$ ya da $1 = s$ şeklindeki ilişkilerin $r = e$ ya da $e = s$ ile değiştirilmesiyle elde edilmiştir.

Her yarıgrup takdimi aynı zamanda bir monoid takdimidir. P herhangi bir S yarıgrubunu tanımlayan bir yarıgrup takdimi ise, P bir monoid takdimi olarak düşünüldüğünde P, $S \cup \{e\}$ gibi bir monoidi tanımlar. S nin içinde birim eleman varsa artık bu $S \cup \{e\}$ de birim eleman olmayacaktır [28].

Tanım 2.30 $\langle A|R\rangle$ bir yarıgrup takdimi ve $w_1, w_2 \in A^+$ olsun. Eğer $w_1 \equiv \alpha u \beta$ ve $w_2 \equiv \alpha v \beta$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in A^*$ ve $(u,v) \in R$ (veya $(v,u) \in R$) varsa w_2 , *R deki bir ilişki bir kez kullanılarak* w_1 *den elde edilmiştir* denir. Eğer $w_1 \equiv w_2$ ise veya $i = 1, 2, \ldots, n-1$ için α_{i+1}, R deki bir ilişki bir kez kullanılarak α_i den elde edilmiş olmak üzere, kelimelerin sonlu bir

$$w_1 \equiv \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \equiv w_2$$

dizisi varsa w_2*, R deki ilişkiler kullanılarak* w_1 *den elde edilmiştir* denir. Ayrıca, $w_1 = w_2$ ilişkisi $\langle A|R\rangle$ nin bir *sonucudur* veya sadece *R nin bir sonucudur* da denilebilir.

Teorem 2.31 S bir yarıgrup, $A \subseteq S$ ve $S = \langle A\rangle$ olsun. O zaman, $\langle A|R\rangle$ takdiminin S nin bir takdimi olabilmesi için gerek ve yeter koşul

i) R deki tüm ilişkilerin S de sağlanıyor olması ve

ii) her $u, v \in A^+$ için $u = v$ S de sağlanıyor iken $u = v$ bağıntısının R nin bir sonucu olmasıdır.

İspat: İspat için [29] a bakınız.

Tanım 2.32 S bir yarıgrup $\langle A|R\rangle$ de S yarıgrubu için bir takdim olsun. S nin rankı

$$rank(S) = min\{|A| : S \cong \langle A|R\rangle\}$$

olarak tanımlanır.

2.4 Otomoto

Tanım 2.33 Bir deterministik sonlu otomoto (DFA) bir $\mathscr{A} = (Q, B, \delta, q_0, F)$ beşlisinden (veya $\mathscr{A} = (Q, B, \delta)$ üçlüsünden) oluşur.

1. Q : elemanları durumlar (state) olan sonlu bir küme.

2. B : sonlu bir alfabe (girişler alfabesi).

3. $\delta : Q \times B \to Q$ bir geçiş (transition) fonksiyonu ($Q \times B = \{(q,a) : q \in Q, a \in B\}$).

4. q_0 : başlangıç durumu.

5. F : Q'nun bir alt kümesi olup final (uç) durumları.

Tanım 2.34 Q sonlu bir küme ve M bir monoid olsun. Eğer $\alpha : Q \times M \to Q$ ya

1. $\alpha(q,1) = q \ (q \in Q)$

2. $\alpha(q,st) = \alpha(\alpha(q,s),t) \ (q \in Q, \ st \in M)$

olacak şekilde bir dönüşüm varsa α ya M nin Q üzerinde bir *etkisi* denir.

2.5 Grafikler

Tanım 2.35 V : köşeler kümesi, E : kenarlar kümesi, $\iota, \tau : E \to V$ dönüşümleri, her $e \in E$ için $\iota(e)$: başlangıç köşesi, $\tau(e)$: bitiş köşesi olarak tanımlansın, ${}^{-1} : E \to E$ dönüşümü her $e \in E$ için $e^{-1} \neq e$, $(e^{-1})^{-1} = e$, $\iota(e^{-1}) = \tau(e)$, $\tau(e^{-1}) = \iota(e)$ koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$G = (V, E, \iota, \tau, {}^{-1})$$

beşlisine bir *grafik* denir.

Tanım 2.36 $G = (V, E, \iota, \tau, {}^{-1})$ bir grafik ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $v_0, v_1, \ldots, v_n \in V$ ve $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$ olmak üzere $\iota(e_i) = v_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ olacak şekildeki G deki bir

$$p = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n)$$

$2n+1$ lisine (n uzunluğunda) bir *yol* denir.

Tanım 2.37 Tüm kenarları farklı olan yola *iz*, tüm köşeleri birbirinden farklı olan bir ize *patika* denir.

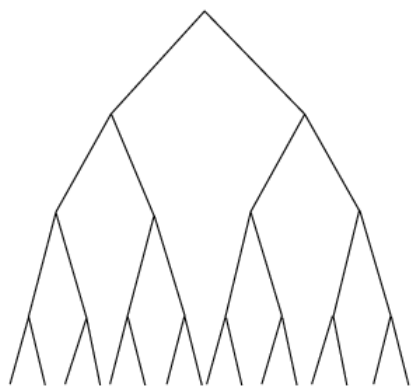
Tanım 2.38 Bir G grafiğinde bir köşeden kendisine olan herhangi bir yola *kapalı yol* denir. Tüm kenarları birbirinden farklı olan bir kapalı yola *kapalı iz*, tüm köşeleri farklı olan kapalı ize bir *devir* denir.

Tanım 2.39 G bir grafik olsun. Eğer G nin herhangi iki köşesini birleştiren bir patika var ise G ye *bağlantlı grafik* denir.

Tanım 2.40 Bağlantılı ve devirsiz bir G grafiğine *ağaç* denir.

Tanım 2.41 Belli bir köşeye sahip olan ağaca *köklü ağaç* denir. İki köşeyi birleştiren en kısa patikadaki kenar sayısına iki köşe arasındaki *uzunluk* denir. Ağacın kökünden n birim uzaklıkta bulunan köşelerin kümesi L_n ye ağacın n. *seviyesi* denir. Özel olarak sıfır seviyesi kök köşeden oluşur.

Tanım 2.42 Tüm köşe dereceleri aynı olan bir ağaca *düzgün ağaç* denir. Özel olarak köşe dereceleri 2 olan düzgün bir ağaca *ikili ağaç* denir.



Şekil 2.1 İkili ağaç

$\mathscr{A}$ otomotosu, köşeleri Q kümesinin durumları olan ve bir kenarı q dan r ye $x|y$ ile etiketlenmiş bir yönlendirilmiş etiketli bir grafik olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir. $\delta(q,x) = (r,y)$ nin grafiği

$$q \xrightarrow{x \mid y} r$$

dir. Anlamı ise, eğer $\mathscr{A}$ otomotosu q durumundaysa ve x girdisini okursa, bu durumda otomoto r durumuna geçer ve y çıktısını verir.

Örnek 2.43 $\mathscr{A} = (Q, B, \delta, q_0, F)$ otomotosu $Q = \{a, b\}$ durumlar kümesi, $B = \{0, 1\}$ girişler alfabesi ve geçiş fonksiyonu

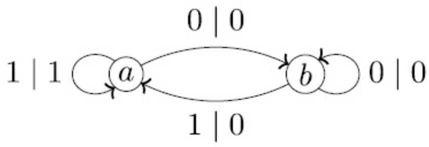
1. $\delta(a,0) = (b,0)$

2. $\delta(a,1) = (a,1)$

3. $\delta(b,0) = (b,0)$

4. $\delta(b,1) = (a,0)$

olarak tanımlansın. $\mathscr{A}$ otomotosunun diyagramı aşağıdaki gibidir.



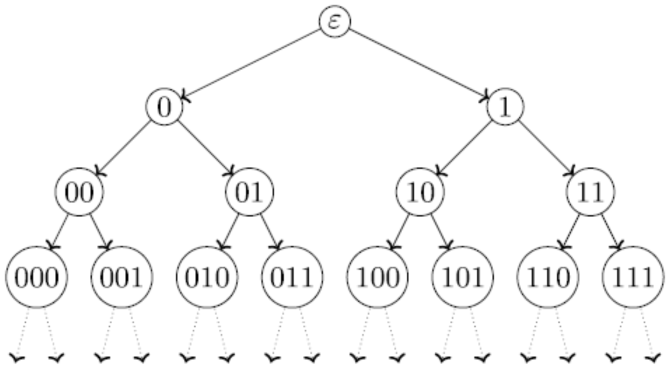
$\mathscr{A}$ otomotosu a durumunda iken 0110 girişler dizisini okuduğunda 0010 çıkış dizisini verecektir.

$$
\begin{aligned}
a.0110 \quad &= (a,0)110 \\
&= (b,0)110 \\
&= 0(b.110) \\
&= 0(b,1)10 \\
&= 0(a,0)10 \\
&= 00(a.10) \\
&= 00(a,1)0 \\
&= 00(a,1)0 \\
&= 001(a.0) \\
&= 001(a,0) \\
&= 001(b,0) \\
&= 0010
\end{aligned}
$$

3. BİR OTOMOTONUN BELİRLEDİĞİ YARIGRUP

Bu bölüm, Cain'nin [25] deki makalesinden alınmıştır. Burada otomoto yarıgrupların temel teorisi kısaca incelenmiş ve bilinen bazı yarıgruplarının bir otomoto yarıgrubu oldukları gösterilmiştir.

$\mathscr{A} = (Q, B, \delta)$ bir sonlu deterministik otomoto olsun. B^*, B kümesinin elemanlarından oluşan sonlu dizilerin kümesi olmak üzere, B^* kümesi derecesi $|B|$ olan bir sıralı düzgün ağaç olarak belirlenebilir. Aşağıda Şekil 3.1 de $B = \{0, 1\}$ olmak üzere B^* kümesi için bir ikili ağaç gösterilmiştir.



Şekil 3.1 $\{0, 1\}^*$ kümesinin bir ikili ağacı

Bu ağacın köşeleri B^* ın elemanları ile etiketlenmiştir. Kök köşe, ε boş kelimesi ile ve bir α ($\alpha \in B^*$) köşesi her $\beta \in B$ için $\alpha\beta$ etiketli $|B|$ kadar çocuğa sahiptir. Bir α köşesi için "köşe α ile etiketlenmiş" yerine sadece "α köşesi" ifadesi kullanılmaktadır.

Bir q durumunun B^* üzerindeki etkisi, bir w köşesini $q.w$ köşesine atayan B^* ın ilgili ağacının bir dönüşümü olarak görülebilir.

Bu tanıma dikkat edilecek olursa,

$$\alpha, \beta \in B^* \text{ ve } \alpha', \beta' \in B$$

olmak üzere eğer

$$\alpha\alpha'.q = \beta\beta'$$

ise, bu durumda

$$\alpha.q = \beta.q$$

dır. Yani, ağaç üzerindeki dönüşüme göre, eğer bir α köşesi bir diğer $(\alpha\alpha')$ köşesinin ebeveyni ise, bunların q nun etkisi altındaki görüntüleri de β köşesi $\beta\beta'$ köşesinin ebeveynidir. Bu yüzden q nun ağaç üzerindeki etkisi bitişik olmayı korur ve dolayısıyla ağacın bir endomorfizimidir. Ayrıca bu etkinin dizilerin uzunluklarını koruması, ağacın seviyesini koruması anlamına gelir.

Durumların etkisi kelimelerin etkisine genişletilebilir.

$w_i \in Q$ olmak üzere, $w = w_1 \cdots w_n \in Q^+$ ve $\alpha \in B^*$ olsun. w nun α üzerindeki etkisi

$$(\cdots((\alpha w_1).w_2)\cdots w_{n-1}).w_n$$

olarak tanımlansın. $EndB^*$, B^* ağacının endomorfizm yarıgrubu olmak üzere,

$$\Phi : Q^+ \to EndB^*$$

bir doğal homomorfizm vardır. Φ nin $EndB^*$ deki görüntüsü bir yarıgrup olup bu yarıgrup $\sum(\mathscr{A})$ile gösterilir.

Tanım 3.1 S bir yarıgrup olsun. Eğer $S \cong \sum(\mathscr{A})$ olacak şekilde bir $\mathscr{A}$ otomotosu varsa, S ye bir *otomoto yarıgrubu* denir.

B üzerindeki sonsuz diziler B^ω ile gösterilir. Sonlu $\alpha \in B^*$ kelimelerinin çok sayıdaki tekrarlarından oluşan sonsuz dizi α^ω ile gösterilir. Bu eş zamanlı otomoto için sonsuz diziler üzerindeki etki sonlu diziler üzerindeki etkiyi (veya tam tersi) belirler.

Aşağıdaki Lemma 3.2, Q^+ da w ve w' gibi herhangi iki kelimenin otomoto yarıgrubunda aynı elemanı temsil etmesi için gereken koşulları özetlemektedir.

Lemma 3.2 $w,\ w' \in Q^+$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirlerine denktirler.

1. w ve w' elemanları $\sum(\mathscr{A})$ nın aynı elemanını temsil ederler;
2. $w\Phi = w'\Phi$;
3. Her $\alpha \in B^*$ için $\alpha w = \alpha w'$;
4. $n \in \mathbb{N}^0$ için w ve w' elemanları B^n üzerinde aynı etkiye sahiptirler;
5. w ve w' elemanları B^ω üzerinde aynı etkiye sahiptirler.

Genellikle w ve $w\Phi$ gösterimleri arasında bir ayrım söz konusu değildir. w hem Q^+ nın elemanını göstermek hemde w nun $\sum(\mathscr{A})$ daki görüntüsünü göstermek için kullanılır. Bu yüzden $\sum(\mathscr{A})$ da $w = w'$ yazılırsa bu $w\Phi = w'\Phi$ anlamına gelir. Dolayısıyla bu durumda Q, $\sum(\mathscr{A})$ için bir doğuray kümesi olur.

NOT:

1. Q^+ nın elemanları bir kelime olup, bir kelime Q nun elemanları olan durumlar yada harflerden oluşur.

2. $B^* \cup B^\omega$ nın elemanları bir dizi olup, bir dizi B nin elamanları olan sembollerden oluşur.

Dolayısıyla kelimeler ve harfler, diziler ve semboller üzerinde bir etkiye sahiptirler. Kolaylık sağlaması açısından kullanılacak bazı gösterimler aşağıda tanımlanmıştır.

$$w \in Q^+ \text{ için } \tau_w : B \to B,\ b \mapsto b.w,$$

eğer en az bir $x \in B$ için $(q,b)\delta = (r,x)$ ise,

$$b \in B \text{ için } \pi_b : Q \to Q,\ q \mapsto r$$

yani $x = b\tau_q$.

Dolayısıyla $q\pi_b$ durumu, b ile etiketlenmiş q kenarından oluşan durumdur.

Bu yüzden

$$(q,b)\delta = (q\pi_b, b\tau_q)$$

dır.

Tanım 3.3 $\mathscr{A} = (Q,B,\delta)$ bir otomoto olsun. Eğer her $q \in Q$ için τ_q dönüşümü birebir ve örten ise $\mathscr{A}$ otomotosu bir tersinir otomotodur.

$\mathscr{A}$ bir tersinir otomoto olsun. Bu durumda $q \in Q$ ve $\beta \in B^*$ için $\alpha.q = \beta$ olacak şekilde bir tek $\alpha \in B^*$ vardır. q^{-1} elmanının B^* üzerindeki etkisi $\beta.q^{-1} = \alpha$ olması için gerek ve yeter koşul $\alpha.q = \beta$ olması şeklinde tanımlandığında, q^{-1} elemanlarının oluşturduğu küme Q^{-1} ile gösterilir. Dikkat edilecek olursa, $q \in Q$ ve $\alpha \in B^*$ için

$$\alpha q q^{-1} = \alpha q^{-1} q = \alpha$$

dır. Dolayısıyla $\Phi : \left(Q \cup Q^{-1}\right)^{+} \to EndB^{*}$ a bir doğal homomorfizm vardır. $AutB^{*}$, B^{*} ın otomorfizm grubu olmak üzere, Φ nin $EndB^{*}$ daki görüntüsü $AutB^{*}$ ın bir alt grubudur ve bu $\Gamma(\mathscr{A})$ ile gösterilir. Bu $\Gamma(\mathscr{A})$ grubu sadece $\mathscr{A}$ otomotosunun tersinir olduğu durumlarda tanımlanabilir.

Tanım 3.4 G bir grup olsun. Eğer $G \cong \Gamma(\mathscr{A})$ olacak şekilde bir tersinir $\mathscr{A}$ otomotosu varsa G ye bir *otomoto grubu* denir.

Teorem 3.5 G bir grup olsun. G nin bir otomoto grubu olabilmesi için gerek ve yeter koşul G nin bir otomoto yarıgrubu olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: G nin bir otomoto grubu olduğu ve $\mathscr{A} = (Q, B, \delta)$, G=$\Gamma(\mathscr{A})$ olacak şekilde bir tersinir otomoto olduğu kabul edilsin. Q dan Q' ne $q \longmapsto q'$ dönüşümü birebir ve örten bir dönüşüm ve geçiş fonksiyonu

$$\begin{array}{rl} \text{her } q \in Q \text{ için} & (q,b) \longmapsto (q,b)\delta \\ (q,c)\delta \longmapsto (q,b) \text{ olmak üzere} & (q',b) \longmapsto (p',c) \end{array}$$

şeklinde tanımlanmak üzere, yeni

$$\mathscr{B} = (Q \cup Q', B, \gamma)$$

otomotosu inşa edilsin.

$S = \sum(\mathscr{B})$ olsun. $Q' \times B$ üzerindeki γ geçiş fonksiyonunun tanımının bir sonucu olarak

$$\alpha q = \beta$$

olacak şekilde

$$\alpha,\ \beta \in B^{*}$$

ise bu durumda

$$\beta q' = \alpha$$

dır. Yani $q' \in S$ durumunun B^{*} üzerindeki etkisi, $q^{-1} \in G$ durumunun etkisi ile aynıdır. $q \in S$ ve $q \in G$ durumlarının etkileri tamamen aynıdır.

Bu yüzden S ve G $EndB^{*}$ ın aynı alt yarıgrubudur. Dolayısıyla G bir otomoto yarıgrubudur.

$(\Leftarrow)$: G grubu bir otomoto yarıgrubu, $\mathscr{A} = (Q, B, \delta)$, $G = \sum(\mathscr{A})$, $g \in G$ ve e, G nin birim elemanı olsun. Bu durumda $n \in \mathbb{N}$ için

$$B^n.e = (B^n.g^{-1}).g \subseteq B^n.g$$

ve

$$B^n.g = (B^n.g).e \subseteq B^n.e$$

dir.

Dolayısıyle

$$B^n.e = B^n.g$$

dir.

Bu yüzden G örten olup, $B^n.e$ üzerinde birebir ve örten bir dönüşümdür. Özel olarak

$$G \cong Sg\left\langle g|_{B^*.e} : g \in G \right\rangle$$

.

$$G \cong \Gamma(\mathscr{B})$$

olacak şekilde bir $\mathscr{B}$ otomotosu aşağıdaki gibi inşa edilsin. $Q' \cup \{i\}$ durumlar kümesi, Q dan Q' ne birebir ve örten bir dönüşüm $q \longmapsto q'$, B alfabe kümesi ve γ,

$$\begin{array}{rll} (q', b) \longmapsto \left((q\pi_b)',\ b\tau_q\right) & \text{eğer } b \in B.e \text{ ise} \\ (q', b) \longmapsto (i, b) & \text{eğer } b \notin B.e \text{ ise} \\ (i, b) \longmapsto (i, b) & \quad \text{her } b \in B \end{array}$$

şeklinde tanımlansın.

Esasen Q da birebir ve örten bir dönüşüm olarak etki etmeyen durumlar üzerindeki B nin bir kısmı bu yeni otomotonun batık i durumuna girişine sebep olur. Bütün bu diziler üzerinde birim olarak etki eder. Bu yüzden etkinin grup olmayan kısmı birimle örtüşür. Önceki paragraftaki gözlemler sonucuyla $\Gamma(\mathscr{B}) \cong G$ dir. Dolayısıyle G bir otomoto grubudur.

Teorem 3.6 S bir otomoto yarıgrubu olsun. S ye 0 elemanı eklenerek elde edilen S^0 yarıgrubu da bir otomoto yarıgrubudur.

İspat: $\mathscr{A} = (Q,B,\delta)$, $S = \sum(\mathscr{A})$ olacak şekilde bir otomoto olsun. 0, Q da bulunmayan yeni durum ve z de B de bulunmayan bir sembol (harf) olsun.

$Q' = Q \cup \{0\}$ ve $B' = B \cup \{z\}$ olmak üzere yeni $\mathscr{B} = (Q', B', \delta')$ otomotosu inşa edilsin. δ geçiş fonksiyonunun genişlemesiyle aşağıdaki gibi δ' tanımlansın.

$q \in Q'$ ve $b \in B'$ için

$$(q,z) \longmapsto (0,z)$$

$$(0,b) \longmapsto (0,z)$$

Q daki durumların β^{ω} daki kelimelerin üzerindeki etkisi değiştirilemez.

$\alpha \in B^*$ ve $\beta \in (B')^{\omega}$ ise bu durumda her $q \in Q$ için

$$(\alpha z \beta)\, q = (\alpha . q)\, z^{\omega}$$

dır. Bu yüzden herhangi bir $u \in Q^+$ için

$$(\alpha z \beta)\, u = (\alpha . u)\, z^{\omega}$$

olup Q tarafından doğurulan $\sum(\mathscr{B})$ nin alt grubu S ye izomorfiktir.

Herhangi bir $\alpha \in (B')^{\omega}$ için

$$\alpha . 0 = z^{\omega}$$

olup

$$0q = q0 = 0$$

dır. Bu yüzden $\sum(\mathscr{B}) = S^0$ dır.

Teorem 3.7 S bir otomoto yarıgrubu olsun. S ye birim eleman 1 in eklenmesiyle (S nin birim elemanı içerip içermediğine bakılmaksızın) elde edilen S^1 yarıgrubu da bir otomoto yarıgrubudur.

İspat: $\mathscr{A} = (Q,B,\delta)$, $S = \sum(\mathscr{A})$ olacak şekilde bir otomoto olsun. x ve y B de bulunmayan semboller ve $B' = B \cup \{x,y\}$ olsun. e, Q da bulunmayan yeni bir durum ve $Q' = Q \cup \{e\}$ olsun. δ geçiş fonksiyonunun aşağıdaki gibi genişlemesiyle δ' tanımlansın.

Herhangi bir $q \in Q$ için

$$(q,x)\,,\;(q,y) \longmapsto (e,y)$$

herhangi bir $b \in B'$ için

$$(e,b) \longmapsto (e,b)$$

$\mathscr{B} = (Q', B', \delta')$ olsun. (e $(B')^*$ üzerinde birim olarak etki eder ve e birim elemandır.) $\sum(\mathscr{B})$ deki Q durumları S ye izomorfik olan bir alt yarıgrup doğurur. Son olarak S nin elemanları x sembollerini sabit bırakmadığından e S nin bir elemanı olamaz. Dolayısıyla $\sum(\mathscr{A}) = S^1$ dır.

Teorem 3.8 Her otomoto yarıgrubu artıksal sonludur.

İspat: $\mathscr{A} = (Q, B, \delta)$ bir otomoto, u ve v $\sum(\mathscr{A})$ yarıgrubunun ayrık elemanları olsun. Bu kelimeler en az bir $n \in \mathbb{N}^*$ için B^* üzerinde farklı etki ederler.

$\mathscr{A}' = (Q', B', \delta')$ otomotosu $Q = Q'$ ve girdi ve çıktı alfabesi $B' = B^n$ olacak şekilde yeni bir otomoto olarak inşa edilsin. Aslında $\mathscr{A}'$ otomotosu $\mathscr{A}$ otomotosuna benzemektedir. Fakat eski sembollerin n li bir bloku yeni bir tek sembol gibi davranır. Dolayısıyla $\sum(\mathscr{A}) \cong \sum(\mathscr{A}')$ dır. Dahası bu yeni otomotoda $\tau_u \neq \tau_v$ dir.

$$\tau w : B' \longmapsto B' \neq v$$

$$A' = \left(Q', B', \delta'\right)$$

$$b' \longmapsto b.w$$

olarak tanımlandığından $u,\ w$ nun $B' \longmapsto B^n$ üzerindeki etkileri farklı olduğundan

$$\tau_u = b'.v$$

olup

$$\tau u \neq \tau v$$

dır.

Şimdi $T = \{\tau_w : w \in (Q)^+\}$ yarıgrubu sonludur ve $\sum(\mathscr{A})$ nın $w \longmapsto \tau_w$ dönüşümü altında bir homomorfik görüntüsüdür. Bu dönüşüm iyi tanımlı ve her farklı u ve v nin görüntüleri de farklı olup $\sum(\mathscr{A})$ artıksal sonludur.

Teorem 3.9 Herhangi bir $n \geq 2$ ve $n \in \mathbb{N}^*$ için rankı n olan serbest değişmeli yarıgrup bir otomoto yarıgrubudur.

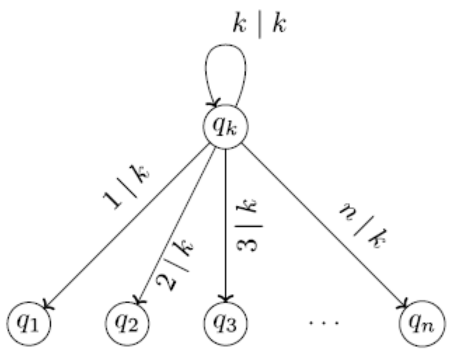
İspat: $n \geq 2$ olsun. $B = \{1,2,3,...n\}$ semboller kümesi üzerinde bir $\mathscr{A}$ otomotosu, durumlar kümesi

$$Q = \{qi : i \in B\},$$

$\delta : Q \times B \longrightarrow Q \times B$ geçiş fonksiyonu her $i, j = 1,2,\ldots,n$ için

$$(q_i, j) \longmapsto (q_j, i)$$

olsun. Aşağıdaki diyagram bu otomotoyu göstermektedir.



Şekil 3.2 Otomoto diyagramı

Eğer $\mathscr{A}$ otomotosu i sembolünü okursa bu durumda otomoto q_i durumuna geçerek ve bir sonraki çıktı olarak i sembolünü verecektir. Bu yüzden q_i nin etkisi bir α dizisini $i\alpha$ dizisine dönüştürür. Yani q_i nin α üzerindeki etkisi α dizisinin son sembolü kaldırılıp başına i yi getirmesidir. $i_j \in B$ olmak üzere $w = q_{i_1}, \ldots, q_{i_n}$ ise, bu durumda

$$1^{\omega}.w = i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1 1^{\omega}$$

ve

$$2^{\omega}.w = i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1 2^{\omega}$$

dır. Bu yüzden $1^{\omega}.w$ ve $2^{\omega}.w$ nun ortak ön ekleri w yı belirler ve dolayısıyle

$$\sum(\mathscr{A})$$

Q üzerinde serbest olmalıdır.

$$|Q| = |B| = n$$

dir.

Teorem 3.10 Tüm sonlu yarıgruplar otomoto yarıgrubudur.

İspat: S bir sonlu yarıgrup olsun. x de S nin bir minimal doğuray kümesi ve her $x \in X$ için, $s \in S$ olmak üzere τ_x, $T_{S\cup\{1\}}$ de $s\tau_x = sx$ olacak şekilde bir dönüşüm olsun. $x \longmapsto \tau_x$ dönüşümünün X deki tüm çarpımlara genişlemesi S nin $T_{S\cup\{1\}}$ deki sağ düzgün temsilini verir [22]. Dolayısıyla

$$\{\tau_x : x \in X\}$$

kümesi tarafından doğurulan $T_{S\cup\{1\}}$ nin alt yarıgrubu $T_S \cong S$ dir.

$\mathscr{A} = (X, S \cup \{1\}, \delta)$ otomotosu

$$(x,s)\,\delta = (x, s\tau_x)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\sum(\mathscr{A}) \cong T_S$$

dir.

4. CAYLEY OTOMOTO YARIGRUPLARI

Bu bölümde sonlu yarıgrupların bilinen özellikleriyle Cayley otomotosu tarafından belirlenen otomoto yarıgruplarının özellikleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu bölüm, Cain'nin [25] deki makalesinden alınmıştır.

Tanım 4.1 S bir sonlu yarıgrup olsun. Her $s,t \in S$ için

$$(s,t)\,\delta = (st, st)$$

olarak tanımlanmak üzere S yarıgrubunun Cayley otomotosu $\mathscr{C}(S) = (S,S,\delta)$ ile gösterilir ve

$$s \xrightarrow{t \mid st} st$$

Şekil 4.1 Cayley otomotosu

diyagramı ile tanımlanır.

Cayley otomotoda durumlar ve semboller aynı S kümesinden geldiği için durumlar, üzerine çizgi çekilerek gösterilir.

$$s = \bar{s}$$

Tanım 4.2 S bir yarıgrup olsun. Eğer $S \cong \sum(\mathscr{C}(T))$ olacak şekilde bir sonlu T yarıgrubu varsa S ye bir Cayley otomoto yarıgrubu denir.

Teorem 4.3 G aşikar olmayan bir sonlu grup olsun. Bu durumda $\sum(\mathscr{C}(G))$ grubu rankı $|G|$ olan bir serbest yarıgruptur.

İspat: İspat için [22] Teorem 2.2 ye bakınız.

Dolayısıyla rankı en az 2 olan sonlu ranklı serbest yarıgruplar bir Cayley otomoto yarıgrubudur. Teorem 3.9 dan dolayı bu tip yarıgrupların otomoto yarıgrubu olduğu açıktır.

Teorem 4.4 S sonlu bir yarıgrup olsun. Bu durumda $\sum\mathscr{C}\left(S^0\right) \cong \sum(\mathscr{C}(S))^0$ dır. Yani bir yarıgruba önce sıfır (0) elemanı eklenip sonra bu yarıgrubun belirtiği Cayley otomoto yarıgrubunu oluşturmak ile önce yarıgrubun belirttiği Cayley otomoto yarıgrubunu oluşturup sonra sıfır elemanını eklemek aynı şeydir.

İspat: $\alpha \in S^{\omega}$ olsun. Bu durumda

$$\alpha \cdot_{\mathscr{C}(S^0)} \bar{s} \cong \alpha \cdot_{\mathscr{C}(S)} \bar{s}$$

dir. (Burada indislerde bulunan $\mathscr{C}(S^0)$ ve $\mathscr{C}(S)$ ler hangi otomotonun α ya etki ettiğini göstermektedir.)

$\beta \in S^n$ ve $\gamma \in (S \bigcup \{0\})^{\omega}$ ise bu durumda

$$\beta 0 \gamma \cdot_{\mathscr{C}(S^0)} \bar{s} = \left(\beta \cdot_{\mathscr{C}(S^0)} \bar{s}\right) 0^{\omega} = \left(\beta \cdot_{\mathscr{C}(S)} \bar{s}\right) 0^{\omega}$$

ve

$$\gamma \cdot 0 = 0^{\omega}$$

dır. Dolayısıyla

$$\sum (\mathscr{C}(S^0)) \cong \sum (\mathscr{C}(S))^0$$

dır.

4.1 Clifford Yarıgrupları

Teorem 4.3 den dolayı eğer G aşikar olmayan bir sonlu grup ise bu durumda $\sum(\mathscr{C}(G))$, rankı $|G|$ olan bir serbest yarıgrup olduğu bilinmektedir. Bu bölümde bu sonucun Clifford yarıgruplarına bir genellemesi yapılmıştır. Clifford yarıgrubu grupların bir güçlü yarılatisi olarak ele alınmıştır.

Tanım 4.5 Y bir yarılatis ve S_{α} $(\alpha \in Y)$ ayrık yarıgrupların bir ailesi olsun. Herhangi iki eleman $\alpha,\ \beta \in Y$ için $\alpha \geq \beta$ $(\beta \leq \alpha \Leftrightarrow \alpha\beta = \beta)$,

$$\phi_{\alpha,\beta} : S_{\alpha} \longrightarrow S_{\beta}$$

homomorfizmi olsun ve bu homomorfizmler aşağıdaki koşulları sağlasın.

1. Her $\alpha \in Y$ için $\phi_{\alpha,\alpha}$ birim dönüşüm,

2. Her α, β, γ için $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ olacak şekilde

$$\phi_{\alpha,\beta} \cdot \phi_{\beta,\gamma} = \phi_{\alpha,\gamma}.$$

$\bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ üzerindeki çarpma S_α bileşenlerindeki çarpma ve $\phi_{\alpha,\beta}$ homorfizmleri vasıtasıyla her $x \in S_\alpha$ ve $y \in S_\beta$ için

$$xy = \left(x\phi_{\alpha,\alpha\beta}\right)\left(y\phi_{\beta,\alpha\beta}\right)$$

tanımlanır. Bu çarpmaya göre bir yarıgrup olup, bu yarıgruba yarıgrupların güçlü yarılatisi denir ve

$$S = \mathscr{S}\left[Y; S_\alpha; \phi_{\alpha,\beta}\right]$$

ile gösterilir.

Tanım 4.6 Bir Clifford yarıgrubu grupların bir güçlü yarılatisidir. Yani her G_α grubu için

$$\mathscr{S}\left[Y; G_\alpha; \phi_{\alpha,\beta}\right]$$

yarıgrubudur.

Teorem 4.7 Y bir yarılatis ve G_α $(\alpha \in Y)$ grupları aşikar olmayan gruplar olmak üzere

$$S = \mathscr{S}\left[Y; G_\alpha; \phi_{\alpha,\beta}\right]$$

bir Clifford yarıgrubu olsun. Bu durumda $\sum(\mathscr{C}(S))$ yarıgrupların bir güçlü yarılatisidir. Burada F_α, $\overline{G_\alpha}$ bazına sahip bir serbest yarıgrup ve

$$\Psi_{\alpha,\beta} : F_\alpha \longrightarrow F_\beta$$

$$\overline{g} \longmapsto \overline{g\phi_{\alpha,\beta}}$$

genişletilmiş bir dönüşümdür.

İspat: Herhangi bir $\alpha \in Y$ için $g \in G_\beta$ ise

$$\phi_\alpha : \bigcup_{\beta \geq \alpha} G_\beta \longrightarrow G_\alpha$$

$$g \longmapsto g\phi_{\beta,\alpha}$$

olarak tanımlansın. Clifford yarıgrubunun tanımından dolayı ϕ_α bir homomorfizmdir. İspatlanması gereken şey $w = \overline{w_1} \cdots \overline{w_n}$ $(w_i \in S)$, $\gamma \in S^\omega$ ve α, $\{\beta \in Y : W_i \in G_\beta\}$ kümesinin en büyük alt sınırı ise

$$\gamma.w = \gamma\left(\overline{w_1\phi_\alpha} \cdots \overline{w_n\phi_\alpha}\right)$$

(α tek türlü tanımlıdır) dır. İddianın $\overline{w_1} \cdots \overline{w_n}$ için doğru olduğu kabul edilsin.

$$\delta = \gamma \cdot (\overline{w_1} \cdots \overline{w_k}) = \gamma . \left(\overline{w_1\phi_\alpha} \cdots \overline{w_k\phi_\alpha}\right)$$

olsun. $w_{k+1} \in G_\beta$ ve $\zeta = \alpha\beta$, α ile β nın en büyük alt sınırı olsun.

$$\delta \cdot w_{k+1} = \delta \cdot (w_{k+1}\Phi_\zeta)$$

olduğu gösterilmelidir. $\eta = \delta \cdot w_{k+1}$ olsun. Tanımdan dolayı,

$$\eta = w_{k+1}\delta_1 \cdots \delta_i$$

$\delta_1 \cdots \delta_i$ çarpımının G_τ da olduğu kabul edilsin. Clifford yarıgruplarındaki çarpmanın tanımından dolayı, η_i, $G_{\tau\beta}$ dadır. Ama $\tau \leq \alpha$ (tümevarım hipotezinden dolayı) ve dolayısıyla

$$\tau\beta \leq \alpha\beta = \tau\zeta$$

dır. Dahası,

$$\zeta \leq \beta$$

dır. Dolayısıyla

$$\tau\zeta \leq \tau\beta$$

dır. Bu yüzden Clifford yarıgruplarındaki çarpmadan dolayı,

$$\eta = w_{k+1}\delta_1 \cdots \delta_i = (w_{k+1}\Phi_\zeta)\delta_1 \cdots \delta_i$$

dır. Dolayısıyla, $\Sigma(\mathscr{C}(S))$ de

$$\overline{w_1} \cdots \overline{w_n} = \overline{w_1\Phi_\alpha} \cdots \overline{w_n\Phi_\alpha}$$

dır. Bu yüzden,

$$\Psi_{\alpha,\beta} : F_\alpha \longrightarrow F_\beta$$

$$\overline{g} \longmapsto \overline{g\phi_{\alpha,\beta}}$$

olarak tanımlanan genişleme ile

$$\Sigma(\mathscr{C}(S)) = [Y; F_{\alpha}; \Phi_{\alpha\beta}]$$

olduğu görülür.

5. (3,2)-OTOMOTOSU TARAFINDAN DOĞURULAN (3,2)-YARIGRUPLARI

(3,2)-yarıgrup otomotosu ilk olarak A. Salomaa'nun [31] deki kitabı ile tanıtılmıştır. Bu bölüm, Manevska ve Dimovski'nin [32] deki makalelerinden ve Manevska'nın [33] deki makalesinden yararlanılarak hazırlanmış ve yarıgrup otomotosu, (3,2)-yarıgrup otomotosu ve bunlar arasındaki bazı ilişkiler incelenmiştir.

Tanım 5.1 S bir küme, $(B,\cdot)$ bir yarıgrup ve $f : S \times B \longrightarrow S$ her $s \in S$ ve $x,y \in B$ için

$$f\left(f\left(s,x\right),y\right) = f\left(s,xy\right)$$

koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda $(S,(B,\cdot),f)$ üçlüsüne bir *yarıgrup otomotosu* denir. Burada S, $(S,(B,\cdot),f)$ yarıgrup otomotosunun durumlar kümesi ve f de $(S,(B,\cdot),f)$ yarıgrup otomotosunun geçiş fonksiyonudur.

Tanım 5.2 B boş olmayan bir küme olmak üzere $\{\} : B^3 \longrightarrow B^2$ tanımlanan bir dönüşüme bir *(3,2)-işlemi* ve $(B,\{\})$ ikilisine de bir *grupoid* denir.

Tanım 5.3 $(B,\{\})$ bir grupoid olsun, eğer her $x,y,z,t \in B$ için

$$\{\{xyz\}t\} = \{x\{yzt\}\}$$

eşitliği sağlanıyorsa $(B,\{\})$ ikilisine bir *(3,2)-yarıgrubu* denir.

Örnek 5.4 $B = \{a,b\}$ olsun. $(B,\{\})$, (3,2)-yarıgrubu aşağıdaki Çizelge 5.1 de verilmiştir.

Çizelge 5.1 (3,2)-yarıgrubunun tablosu

$\{\ \}$	
aaa	(b,a)
aab	(a,a)
aba	(a,a)
abb	(b,a)
baa	(a,a)
bab	(b,a)
bba	(b,a)
bbb	(a,a)

Tanım 5.5 S boş olmayan bir küme ve $f : S \times B^2 \longrightarrow S \times B$ ye bir dönüşüm olsun, bu durumda (S, B, f) üçlüsüne bir *(3,2)-otomoto* denir. Eğer B ve S kümelerinin her ikisi de sonlu ise (S, B, f) (3,2)-otomotosu sonludur.

Tanım 5.6 S bir küme, $(B, \{\})$ bir (3,2)-yarıgrubu ve $f : S \times B^2 \longrightarrow S \times B$ ye her $s \in S$ ve $x, y, z \in B$ için

$$f(f(s,x,y), z) = f(s, \{xyz\})$$

eşitliğini sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda $(S, (B, \{\}), f)$ üçlüsüne bir *(3,2)-yarıgrup otomotosu* denir. Burada S, $(S, (B, \{\}), f)$ (3,2)-yarıgrup otomotosunun durumlar kümesi ve f de $(S, (B, \{\}), f)$ (3,2)-yarıgrup otomotosunun geçiş fonksiyonudur.

Örnek 5.7 $(S, (B, \cdot), \varphi)$ bir yarıgrup otomotosu olsun. $\{\} : B^3 \longrightarrow B^2$ bir (3,2)-işlemi her $x, y, z \in B$ için $\{x, y, z\} = (x \cdot y, z)$ ve f geçiş fonksiyonu $f : S \times B^2 \longrightarrow S \times B$

$$f(s,x,y) = (\varphi(s,x), y)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$(S, (B, \{\}), f)$$

bir (3,2)-yarıgrup otomotosudur.

Örnek 5.8 Eğer $(S, (B, \{\}), f)$ bir (3,2)-yarıgurup otomotosu ise, bu durumda

- **i)** Her (x, y) ve $(u, v) \in B^2$ için

  $$(x,y) * (u,v) = \{xyuv\}$$

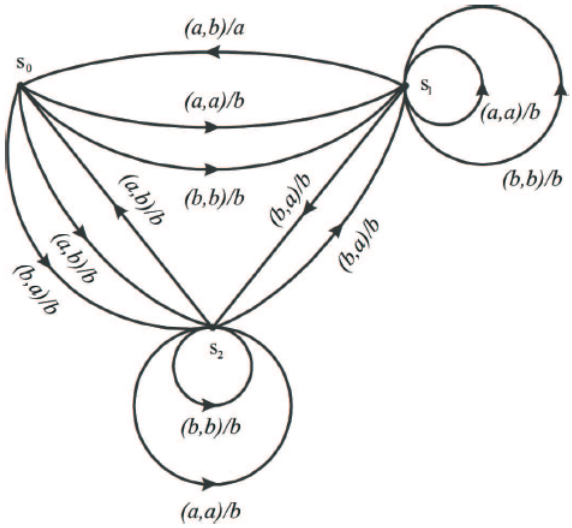
  olarak tanımlanan $*$ işlemi ile $(B^2, *)$ bir yarıgruptur.

- **ii)** $\psi((s,x),(y,z)) = f(s, \{xyz\})$ şeklinde tanımlanan $\psi : S \times B \times B^2 \longrightarrow S \times B$ geçiş fonksiyonu ile $\left(S \times B, \left(B^2, *\right), \psi\right)$ bir yarıgrup otomotosudur.

Örnek 5.9 $(B, \{\})$ Örnek 5.4 Çizelge 5.1 de verilen bir (3,2)-yarıgrup ve $S = \{s_0, s_1, s_2\}$ olsun. Bir $(S, (B, \{\}), f)$ (3,2)-yarıgrup otomotosunun geçiş fonksiyonu Çizelge 5.2 de ve diyagramı da Şekil 5.1 de verilmiştir.

Çizelge 5.2 (3,2)-yarıgrup otomotosunun geçiş fonksiyonunun tablosu

f	(a,a)	(a,b)	(b,a)	(b,b)
s_0	(s_1,b)	(s_2,b)	(s_2,b)	(s_1,b)
s_1	(s_1,b)	(s_0,a)	(s_2,b)	(s_1,b)
s_2	(s_2,b)	(s_0,b)	(s_1,b)	(s_2,b)



Şekil 5.1 (3,2)-yarıgrup otomotosunun diyagramı

5.1 (3,2)-Otomotosunun Doğurduğu (3,2)-Grupoidler

Bu bölümde verilen sonlu bir (S,B,f) (3,2)-otomotosunun bir (3,2)-yarıgrubunu nasıl doğurduğu ve (3,2)-yarıgrup otomotosu ile ilişkileri incelenmiştir.

Bir (3,2)-otomotosunun tanımında $f : S \times B^2 \longrightarrow S \times B$ yalnızca bir dönüşüm olarak tanımlanmıştır. f nin bir (3,2)-yarıgrup otomotosunda bir geçiş fonksiyonu olabilmesi için aşağıdaki özellikleri sağlaması gerekir.

$(B, \{\})$ bir (3,2)-yarıgrup olmak üzere, her $s \in S$ ve $x,y,z \in B$ için

$$f\left(f\left(s,x,y\right)z\right) = f\left(s,\{xyz\}\right) \tag{5.1}$$

ve her $x,y,z,t \in B$ için

$$\{\{xyz\}t\} = \{x\{yzt\}\}. \tag{5.2}$$

Tüm bunlar herhangi bir $x,y,z \in B$ ve her $s \in S$ için

$$f\left(f\left(s,x,y\right),z\right) = f\left(s,u,v\right) \tag{5.3}$$

eşitliğini sağlayan en az bir $(u,v) \in B^2$ çiftinin bulunması anlamına gelir.

(S,B,f) bir tablo ile birlikte verilen bir (3,2)-otomotosu olsun. Bu tablo $\{xyz\}$ ile gösterilen yeni sütunlar eklenerek genişletir ve bu yeni sütunlar (5.1) koşuluna göre doldurulur. (5.3) koşulu her $\{xyz\}$ üçlüsünün sütunlarının en az bir (u,v) ikilisine karşılık gelmesi gerektiğini belirtmektedir. Fakat (5.3) koşuluna uyan birden fazla (u,v) ikilisi olabileceği gibi bu koşula uyan hiç bir (u,v) ikilisi bulunmayabilir.

Örnek 5.10 $S = \{s_0, s_1, s_2\}$, $B = \{a,b\}$ olsun ve f dönüşümü aşağıdaki Çizelge 5.3 deki gibi verilsin,

Çizelge 5.3 f dönüşümünün tablosu

f	(a,a)	(a,b)	(b,a)	(b,b)
s_0	(s_2,b)	(s_1,b)	(s_1,b)	(s_2,a)
s_1	(s_1,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)
s_2	(s_2,b)	(s_1,b)	(s_1,b)	(s_2,a)

$$f(f(s_0,a,a),a) = f(s_2,b,a) = (s_1,b)$$

$$f(f(s_1,a,a),a) = f(s_1,b,a) = (s_2,a)$$

$$f(f(s_2,a,a),a) = f(s_2,b,a) = (s_1,b)$$

hesaplanır ve Çizelge 5.3 de görüldüğü gibi,

$$(s_1,b),\ (s_2,a),\ (s_1,b)$$

ikilileri, (a,b) ya da (b,a) ikililerinin herhangi birinin aracılığıyla $s_i,\ i = 0,1,2$ durumlarının geçişlerinden elde edilir. Ayrıca,

$$f(s_0,a,b) = f(s_0,b,a) = (s_1,b)$$

$$f(s_1,a,b) = f(s_1,b,a) = (s_2,a)$$

$$f(s_2,a,b) = f(s_2,b,a) = (s_1,b)$$

dir. Dolayısıyla,

$$f(f(s_0,a,a),a) = f(s_0,a,b) = f(s_0,b,a)$$

$$f(f(s_1,a,a),a) = f(s_1,a,b) = f(s_1,b,a)$$

$$f(f(s_2,a,a),a) = f(s_2,a,b) = f(s_2,b,a)$$

dır ve bir (3,2)-otomotosunun tanımının kullanılmasıyla

$$\{aaa\} = (a,b) = (b,a)$$

elde edilir.

Diğer üçlüler için benzer hesaplamalar yapılırsa, verilen (3,2)-otomotosu için dört tane grupoid elde edilir ve bu grupoidler aşağıda Çizelge 5.4 te verilmiştir.

Çizelge 5.4 (3,2)- otomotosunun doğurduğu grupoidler

$\{\ \}$	
aaa	(b,a)
aab	(b,b)
aba	(b,b)
abb	(a,a)
baa	(b,b)
bab	(a,a)
bba	(a,a)
bbb	(b,a)

Tablo 5.5.1

$\{\ \}$	
aaa	(b,a)
aab	(b,b)
aba	(b,b)
abb	(a,a)
baa	(b,b)
bab	(a,a)
bba	(a,a)
bbb	(a,b)

Tablo 5.5.2

$\{\ \}$	
aaa	(a,b)
aab	(b,b)
aba	(b,b)
abb	(a,a)
baa	(b,b)
bab	(a,a)
bba	(a,a)
bbb	(b,a)

Tablo 5.5.3

$\{\ \}$	
aaa	(a,b)
aab	(b,b)
aba	(b,b)
abb	(a,a)
baa	(b,b)
bab	(a,a)
bba	(a,a)
bbb	(a,b)

Tablo 5.5.4

Örnek 5.11 $S = \{s_0, s_1, s_2\}$, $B = \{a,b\}$ olsun ve f dönüşümü aşağıdaki Çizelge 5.5 deki gibi verilsin.

Çizelge 5.5 f dönüşümünün tablosu

f	(a,a)	(a,b)	(b,a)	(b,b)
s_0	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)
s_1	(s_0,a)	(s_2,b)	(s_2,a)	(s_2,a)
s_2	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)

$$f(f(s_0,a,a),a) = f(s_0,a,a) = (s_0,a)$$

$$f(f(s_1,a,a),a) = f(s_0,a,a) = (s_0,a)$$

$$f(f(s_2,a,a),a) = f(s_2,a,a) = (s_2,a)$$

hesaplanır ve Çizelge 5.5 de görüldüğü gibi,

$$(s_0,a),\ (s_0,a),\ (s_2,a)$$

ikilileri, (a,a) ikilisinin aracılığıyla $s_i,\ i = 0,1,2$ durumlarının geçişlerinden elde edilir ve bir (3,2)-otomotosunun tanımının kullanılmasıyla

$$\{aaa\} = (a,a)$$

elde edilir.

Diğer üçlüler için benzer hesaplamalar yapılırsa, verilen (3,2)-otomotosu için sadece bir tane grupoid elde edilir ve grupoid aşağıda Çizelge 5.6 da verilmiştir.

Çizelge 5.6 (3,2)- otomotosunun doğurduğu grupoid

$\{\ \}$	
aaa	(a,a)
aab	(a,a)
aba	(b,a)
abb	(a,b)
baa	(b,a)
bab	(b,a)
bba	(b,a)
bbb	(b,b)

Buraya kadar verilen örnekler yalnız bir veya birden fazla ikilinin bulunması durumlarına uygun olan örneklerdi. Fakat $x,y,z \in B$ olmak üzere verilen bir $\{xyz\}$ üçlüsü için (5.1) koşulunu sağlayan herhangi bir ikilinin bulunmadığı durumlarda olabilir.

Örnek 5.12 $S = \{s_0, s_1, s_2\}$, $B = \{a,b\}$ olsun ve f dönüşümü aşağıdaki Çizelge 5.7 deki gibi verilsin.

Çizelge 5.7 f dönüşümünün tablosu

f	(a,a)	(a,b)	(b,a)	(b,b)
s_0	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)
s_1	(s_0,a)	(s_2,b)	(s_2,a)	(s_2,a)
s_2	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)

$$f(f(s_0,a,a),a) = f(s_0,a,a) = (s_0,a)$$

$$f(f(s_1,a,a),a) = f(s_0,a,a) = (s_0,a)$$

$$f(f(s_2,a,a),a) = f(s_2,a,a) = (s_2,a)$$

hesaplanır ve Çizelge 5.7 de görüldüğü gibi,

$$(s_0,a),\ (s_0,a),\ (s_2,a)$$

ikilileri, (a,a) ikilisinin aracılığıyla $s_i,\ i=0,1,2$ durumlarının geçişlerinden elde edilir, ve (3,2)-otomotosunun tanımının kullanılmasıyla

$$\{aaa\}=(a,a)$$

elde edilir.

$$f(f(s_0,a,a),b)=f(s_0,a,b)=(s_0,b)$$

$$f(f(s_1,a,a),b)=f(s_0,a,b)=(s_0,b)$$

$$f(f(s_2,a,a),b)=f(s_2,a,b)=(s_2,b)$$

hesaplanır ve Çizelge 5.7 de görüldüğü gibi, her $s_i\in S$ için

$$f\left(f\left(s_i,a,a\right),b\right)=f\left(s_i,u,v\right)$$

koşulunu sağlayan $u,v\in B$ için bir $(u,v)\in B^2$ ikilisi bulunmamaktadır.

Benzer hesaplamar diğer üçlüler içinde yapılırsa, verilen (3,2)-otomotosu için $\{abb\}$, $\{baa\}$, $\{bba\}$ ve $\{bbb\}$ üçlülüleri için bir (3,2)-işlem tanımlanabiliyorken, $\{aab\}$, $\{aba\}$, $\{bab\}$ üçlülüleri için bir (3,2)-işlem tanımlanamamaktadır. Dolayısıyla bu örnek için bir kısmi (3,2)-işlemi aşağıdaki Çizelge 5.8 de verilmiştir.

Çizelge 5.8 Kısmi (3,2)-işleminin tablosu

$\{\ \}$	
aaa	(a,a)
aab	?
aba	?
abb	(a,b)
baa	(b,a)
bab	?
bba	(b,a)
bbb	(b,b)

5.2 B Alfabesi Üzerindeki (3,2)-Otomotosu Tarafından Doğurulan (3,2)-Yarıgruplar

Bir önceki bölümde bir (3,2)-otomotosunun B alfabesi üzerinde tanımlı bir (3,2)-grupoidini nasıl doğurduğu gösterildi. Bu bölümde ise (3,2)-otomotosunun doğurduğu bir (3,2)-grupoidinin ne zaman bir yarıgrup olup olmayacağı gösterilmiştir. Bunun için (3,2)-otomotosunun doğurduğu bir (3,2)-grupoidinin (5.2) deki birleşme özelliği koşulunu sağlayıp sağlamadığının kontrol edilmesi gerekmektedir.

Her $s_i \in S$, $t \in B$ için (3,2)-otomotosunun diyagramı (tablosu) yeni (s_i,t) satırları ile genişletilir ve f dönüşümü kullanılarak aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde doldurulur.

$$f((s_i,t),(u,v)) = f(f(s_i,t,u),v) \text{ ve } f((s_i,t),\{xyz\}) = f(f(f(s_i,t,x),y),z) \qquad (5.4)$$

Eğer, her $t \in B$, $s_i \in S$ için

$$f((s_i,t),(u,v)) = f((s_i,t),\{xyz\}) \qquad (5.5)$$

ise $\{xyz\} = (u,v)$ ve

$\{xyz\}$ üçlüsü için genişletilmiş sütun (u,v) çifti için genişletilmiş sütun ile aynı ise bu durumda (3,2)-otomotosu bir (3,2)-yarıgrubu doğurur. Genişletilmiş tablo (3,2)-yarıgrubunun nasıl tanımlandığını gösterir.

Örnek 5.13 Örnek 5.10 daki (3,2)-otomotosunun Çizelge 5.3 de verilen tablosunun yeni satır ve sütunlar ile genişletilmiş hali aşağıda Çizelge 5.9 da verilmiştir.

Çizelge 5.9 f dönüşümünün genişletilmiş tablosu

	(a,a)	(a,b)	(a,b) (b,a)	(b,b)
s_0	(s_2,b)	(s_1,b)	(s_1,b)	(s_2,a)
s_1	(s_1,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)
s_2	(s_2,b)	(s_1,b)	(s_1,b)	(s_2,a)
(s_0,a)	(s_1,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)
(s_0,b)	(s_2,a)	(s_2,b)	(s_2,b)	(s_1,b)
(s_1,a)	(s_2,a)	(s_2,b)	(s_2,b)	(s_1,b)
(s_1,b)	(s_2,b)	(s_1,b)	(s_1,b)	(s_2,a)
(s_2,a)	(s_1,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)
(s_2,b)	(s_2,a)	(s_2,b)	(s_2,b)	(s_1,b)

Aşağıdaki Çizelge 5.10 da görüldüğü gibi, her $\{xyz\}$ üçlüsünün sütunu $u,\ v \in B$ olmak üzere en az bir (u,v) ikilisinin sütunu ile aynıdır. Bu durum B alfabesi üzerinde tanımlı bir (3,2)-otomotosunun Tablo 5.5.1 de verilen bir (3,2)-yarıgrubunu doğurduğu anlamına gelir.

Çizelge 5.10 Doğurulan (3,2)-yarıgrubunun tablosu

	(a,b) $\{aaa\}$	(b,b) $\{aab\}$	(b,b) $\{aba\}$	(a,a) $\{abb\}$	(b,b) $\{baa\}$	(a,a) $\{bab\}$	(a,a) $\{bba\}$	(a,b) $\{bbb\}$
s_0	(s_1,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)	(s_2,a)	(s_2,b)	(s_2,b)	(s_1,b)
s_1	(s_2,a)	(s_2,b)	(s_2,b)	(s_1,b)	(s_2,b)	(s_1,b)	(s_1,b)	(s_2,a)
s_2	(s_1,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)	(s_2,a)	(s_2,b)	(s_2,b)	(s_1,b)
(s_0,a)	(s_2,a)	(s_2,b)	(s_2,b)	(s_1,b)	(s_2,b)	(s_1,b)	(s_1,b)	(s_2,a)
(s_0,b)	(s_2,b)	(s_1,b)	(s_1,b)	(s_2,a)	(s_1,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)
(s_1,a)	(s_2,b)	(s_1,b)	(s_1,b)	(s_2,a)	(s_1,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)
(s_1,b)	(s_1,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)	(s_2,a)	(s_2,b)	(s_2,b)	(s_1,b)
(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)	(s_2,b)	(s_1,b)	(s_2,b)	(s_1,b)	(s_1,b)	(s_2,a)
(s_2,b)	(s_2,b)	(s_1,b)	(s_1,b)	(s_2,a)	(s_1,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)

5.2.1 B Alfabesinin Genişletmesi

Eğer (5.3) ya da (5.5) koşullarından herhangi biri sağlanmazsa verilen (3,2)-otomotosu B alfabesi üzerinde bir (3,2)-yarıgrubu doğurmaz. Bundan dolayı bir sonraki adım, B alfabesinin yeni harflerle genişletilmesi olacaktır. $u,\ v \in B$ olmak üzere (5.1) koşulunu sağlayan bir (u,v) ikilisinin bulunmadığı $\{xyz\}$ üçlüsü için ve $\{xyz\} = (u,v)$ olacak şekilde (5.5) koşulunu sağlamayan $\{xyz\}$ üçlüsü için B alfabesine bir harf eklenir. Eğer p_j, $\{xyz\}$ üçlüsü ile ilişkilendirilmiş yeni bir harf ise, bu durumda bu üçlüyle (p_j, p_j) ikilisi ilişkilendirilir ve $\{xyz\} = (p_j, p_j)$ olarak tanımlanır.

Yukarıdaki genişlemeyle B' ile gösterilen yeni bir alfabe elde edilir. B' kümesinin elemanlarının sayısı $|B'|$, en fazla $|B| + |B|^3$ kadardır, dolayısıyla sonludur.

Bazı üçlülüler yeni ikililerle ilişkilendirildiğinden dolayı, tablo $x,y,z,t \in B$ için $\{xyzt\}$ ile gösterilen yeni sütunların eklenmesiyle genişletirilir ve tablo, (5.4) koşulu kullanılarak doldurulur.

Eğer her yeni sütun, öncekilerden en az biri ile aynı oluyorsa, yeni B' alfabesi tamamlanmış olur ve B' üzerinde (3,2)-yarıgrubu tanımlanır.

Örnek 5.14 Örnek 5.11, Çizelge 5.5 de verilen (3,2)-otomotosunun tablosuna yeni sütun ve satırların eklenmesiyle elde edilen f dönüşümünün genişletilmiş tablosu Çizelge 5.11 de ve (3,2)-otomotosunun üreteceği (3,2)-yarıgrubun tablosu ise Çizelge 5.12 de verilmiştir.

Çizelge 5.11 f dönüşümünün genişletilmiş tablosu

	(a,a)	(a,b)	(b,a)	(b,b)
s_0	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)
s_1	(s_0,a)	(s_2,b)	(s_2,a)	(s_2,a)
s_2	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)
(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)
(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)
(s_1,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_2,a)	(s_2,b)
(s_1,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
(s_2,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)

Çizelge 5.12 Üretilecek (3,2)-yarıgrubun tablosu

	(a,a) $\{aaa\}$	(a,a) $\{aab\}$	(c,c) $\{aba\}$	(a,b) $\{abb\}$	(b,a) $\{baa\}$	(b,a) $\{bab\}$	(b,a) $\{bba\}$	(b,b) $\{bbb\}$
s_0	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)
s_1	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_2,a)	(s_2,b)	(s_2,a)	(s_1,a)	(s_1,a)	(s_2,a)
s_2	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)
(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)
(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)
(s_1,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)
(s_1,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
(s_2,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)

Çizelge 5.12 de görüldüğü üzere, $\{aba\}$ üçlüsü için, $u,v \in B$ olmak üzere $\{aba\} = (u,v)$ olacak şekilde herhangi bir (u,v) ikilisi bulunmamaktadır. Bu yüzden yeni bir c harfi tanımlanır ve B alfabesi yeni bir alfabeye genişletilir. Bir sonraki adımda, Çizelge 5.12 deki tablo, Çizelge 5.13 teki tabloya genişletilir ve $x,y,z,t \in B$ olmak üzere her

$\{xyzt\}$ dörtlüsünün tanımlandığı görülür ve dolayısıyla B' alfabesi tanımlanmış olur. Dolayısıyla Çizelge 5.5 de tablosu verilen (3,2)-otomotosu tarafından doğurulan bir (3,2)-yarıgrubu B' üzerinde tanımlanmış olur.

Çizelge 5.13 Genişletilmiş tablo

	(b,a) $baaa$	(b,a) $baab$	(b,a) $baba$	(b,a) $babb$	(b,a) $bbaa$	(b,a) $bbab$	(b,a) $bbba$	(b,b) $bbbb$
s_0	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)
s_1	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
s_2	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)
(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)
(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)
(s_1,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)
(s_1,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
(s_2,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)

	(b,a) $baaa$	(b,a) $baab$	(b,a) $baba$	(b,a) $babb$	(b,a) $bbaa$	(b,a) $bbab$	(b,a) $bbba$	(b,b) $bbbb$
s_0	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)
s_1	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
s_2	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)
(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)
(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,a)
(s_1,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)
(s_1,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
(s_2,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)

Bir önceki örnekte B alfabesinin B' alfabesine genişletilmesinde eğer yeni sütunlardan bazıları öncekilerden en az biri ile aynı olmasaydı, bu durmda q_j yeni bir harf olmak üzere, bu sütuna (q_j,q_j) ikilisi ilişkilendirilirdi. Bu yeni bir B'' alfabesini oluştururdu ve yeni alfabenin elaman sayısı $|B''|$, en fazla $|B'|+|B'|^3$ kadar olurdu.

Bu işleme yeni sütunların öncekilerden en az biri ile aynı olana kadar devam edilirdi.

Örnek 5.15 Örnek 5.12 de verilen (3,2)-otomotosunun tablosuna yeni sütun ve satırların eklenmesiyle elde edilen yeni tablo Çizelge 5.14 te verilmiştir.

Çizelge 5.14 (3,2)-otomotosunun genişletilmiş yeni tablosu

	(a,a)	(a,b)	(b,a)	(b,b)
s_0	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)
s_1	(s_0,a)	(s_2,b)	(s_2,a)	(s_2,a)
s_2	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)
(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)
(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)
(s_1,a)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_2,a)	(s_2,b)
(s_1,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
(s_2,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)

	(a,a) $\{aaa\}$	(c,c) $\{aab\}$	(d,d) $\{aba\}$	(a,b) $\{aaa\}$	(b,a) $\{baa\}$	(e,e) $\{bab\}$	(b,a) $\{bba\}$	(b,b) $\{bbb\}$
s_0	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)
s_1	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_2,a)	(s_2,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
s_2	(s_1,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)
(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)
(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)
(s_1,a)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)
(s_1,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
(s_2,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)

Çizelge 5.14 te görüldüğü üzere, $\{aab\}$, $\{aba\}$ ve $\{bab\}$ üçlüleri için, $u,v \in B$ olmak üzere $\{aba\} = (u,v)$ olacak şekilde herhangi bir (u,v) ikilisi bulunmamaktadır. Bu yüzden c, d, e yeni harfler olmak üzere bu üçlüler sırasıyla (c,c), (d,d) ve (e,e) ikilileri ile ilşkilendirilir ve $B' = B \cup \{c,d,e\}$ yeni alfabesi elde edilir. Yeni sütunlar ve yeni satırlar eklenmesiyle aşağıda verilen Çizelge 5.15 deki tablo elde edilir.

Çizelge 5.15 Yeni harflerin eklenmesiyle elde edilen tablo

	(a,a) $aaaa$	(c,c) $aaab$	(a,a) $aaba$	(c,c) $aabb$	(d,d) $abaa$	(f,f) $abab$	(d,d) $abba$	(a,b) $abbb$
s_0	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)
s_1	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)
s_2	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)
(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)
(s_1,a)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)
(s_1,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
(s_2,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)

	(b,a) $baaa$	(e,e) $baab$	(b,a) $baba$	(e,e) $babb$	(b,b) $bbaa$	(e,e) $bbab$	(b,a) $bbba$	(b,b) $bbbb$
s_0	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)
s_1	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
s_2	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)
(s_0,a)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)
(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)	(s_0,a)	(s_0,b)
(s_1,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)
(s_1,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)
(s_2,b)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,a)	(s_2,b)

Çizelge 5.15 de görüldüğü üzere, $\{abab\}$ dörtlüsü için, $u,v \in B'$ olmak üzere $\{abab\} = (u,v)$ olacak şekilde herhangi bir (u,v) ikilisi bulunmamaktadır. Bu yüzden f yeni bir harf olmak üzere bu dörtlü (f,f) ikilisi ile ilşkilendirilir ve $B' = B \cup \{c,d,e,f\}$ yeni alfabesi elde edilir.

Şimdi ise $x,y,z,t,w \in B$ olmak üzere tüm $\{xyztw\}$ beşlileri, $u,v \in B'$ olmak üzere $\{xyztw\} = (u,v)$ olacak şekilde ele alınır. Dolayısıyla, B' alfabesi, üzerinde (3,2)-yarıgrubu tanımlanacak alfabeden biridir.

Bir önceki hesaplamalarda, her bir $(s_i, x) \in S \times B$ ikilisi için tablo yeni bir satır ile genişletildi. S ve B kümeleri sonlu olduğundan, bu şekilde genişletilmiş tablonun her bir sütunu $S + |S| \cdot |B|$ sonlu uzunluğa sahiptir ve sütundaki elemanlar $S \times B$ kümesinden geldikleri için sonlu sayıda farklı sütun bulunmaktadır (en fazla, $(|S| \cdot |B|)^{S+|S| \cdot |B|}$). Bu ise, sonlu sayıda yeni harflerin eklenmesinde sonra, yeni sütunların öncekilerden en az biri ile aynı olmasını gerektirir ve dolayısıyla bu işlem sonlu adımda tamamlanır. Bu yüzden elde edilen son B' alfabesi sonludur.

5.3 Kısmi (3,2)-İşlemininin Genişletilmesi

Bundan önceki bölümde, B alfabesinin, üzerinde (3,2)-yarıgrubu tanımlanacak şekilde bir B' alfabesine genişletilmesi incelendi. Buraya kadar $x, y, z \in B$ olmak üzere $\{xyz\}$ üçlüleri ve $x \in B$, $t \in B' \setminus B$ olmak üzere $\{xtt\}$ ve $\{ttx\}$ üçlüleri için bir (3,2)-işlemi bulunmaktaydı. Bu $|B'|^3$ tane üçlüden $|B|^3 + 2 \cdot |B| \cdot (|B'| - |B|)$ tane üçlü için (3,2)-işlemi olduğu anlamına gelir. Sonra ise, geriye kalan $|B'|^3 - \left[|B|^3 + 2 \cdot |B| \cdot (|B'| - |B|)\right]$ tane üçlü için (5.1) ve (5.2) koşulunu sağlayan (3,2)-işlemi tanımlanır. Örnek 5.11 de verilen (3,2)-otomotosunun kısmi (3,2)-işlemi Çizelge 5.16 da ve Örnek 5.12 de verilen (3,2)-otomotosunun kısmi (3,2)-işlemi Çizelge 5.17 de verilmiştir.

Çizelge 5.16 (3,2)-otomotosunun kısmi (3,2)-işlemi

$\{\ \}$	
aaa	(a,a)
aab	(a,a)
aac	
aba	(c,c)
abb	(a,b)
abc	
aca	
acb	
acc	(a,a)
baa	(b,a)
bab	(b,a)
bac	
bba	(b,a)
bbb	(b,b)
bbc	
bca	
bcb	
bcc	(b,a)
caa	
cab	
cac	
cba	
cbb	
cbc	
cca	(c,c)
ccb	(c,c)
ccc	

Çizelge 5.17 (3,2)-otomotosunun kısmi (3,2)-işlemi

$\{\ \}$		$\{\ \}$		$\{\ \}$		$\{\ \}$		$\{\ \}$		$\{\ \}$	
aaa	(a,a)	baa	(b,a)	caa		daa		eaa		faa	
aab	(c,c)	bab	(e,e)	cab		dab		eab		fab	
aac		bac		cac		dac		eac		fac	
aad		bad		cad		dad		ead		fad	
aae		bae		cae		dae		eae		fae	
aaf		baf		caf		daf		eaf		faf	
aba	(d,d)	bba	(b,a)	cba		dba		eba		fba	
abb	(a,b)	bbb	(b,b)	cbb		dbb		ebb		fbb	
abc		bbc		cbc		dbc		ebc		fbc	
abd		bbd		cbd		dbd		ebd		fbd	
abe		bbe		cbe		dbe		ebe		fbe	
abf		bbf		cbf		dbf		ebf		fbf	
aca		bca		cca	(a,a)	dca		eca		fca	
acb		bcb		ccb	(c,c)	dcb		ecb		fcb	
acc	(c,c)	bcc	(e,e)	ccc		dcc		ecc		fcc	
acd		bcd		ccd		dcd		ecd		fcd	
ace		bce		cce		dce		ece		fce	
acf		bcf		ccf		dcf		ecf		fcf	
ada		bda		cda		dda	(d,d)	eda		fda	
adb		bdb		cdb		ddb	(f,f)	edb		fdb	
adc		bdc		cdc		ddc		edc		fdc	
add	(a,a)	bdd	(b,a)	cdd		ddd		edd		fdd	
ade		bde		cde		dde		ede		fde	
adf		bdf		cdf		ddf		edf		fdf	
aea		bea		cea		dea		eea	(b,a)	fea	
aeb		beb		ceb		deb		eeb	(e,e)	feb	
aec		bec		cec		dec		eec		fec	
aed		bed		ced		ded		eed		fed	
aee	(f,f)	bee	(e,e)	cee		dee		eee		fee	
afa		bfa		cfa		dfa		efa		ffa	(d,d)
afb		bfb		cfb		dfb		efb		ffb	(f,f)
afc		bfc		cfc		dfc		efc		ffc	
afd		bfd		cfd		dfd		efd		ffd	
afe		bfe		bfe		dfe		efe		ffe	
aff	(c,c)	bff	(e,e)	cff		dff		eff		fff	

$(B',\{\})$ (3,2)-yarıgrubunu tanımlamak için işleme öncelikle aşağıdaki tanımlama ile başlanır.

$x \in B' \setminus B$ için

$$\{xxx\} = (x,x)$$

olarak tanımlanır. Eğer bu tanımlama önceki tanımlamaların hiçbiri ile çelişmiyorsa bu durumda (3,2)-kısmi işlem tablosundaki boşluklar aşağıdaki koşullar kullanılarak bu tanımlamalardan elde edilen sonuçlarla doldurulur.

- (i_1) $y \in B'$ için

$$\{\{xxx\}\,y\} = \{x\,\{xxy\}\}$$

$$\{y\,\{xxx\}\} = \{\{yxx\}\,y\}$$

- (i_2) her $s_i \in S$ için

$$f\left(s_i, \{xxx\}\right) = f\left(f\left(s_i, x, x\right), x\right)$$

Daha sonra aşağıdaki koşullar kullanılarak $a, b \in B$ ve $x \in B' \setminus B$ için $\{abx\}, \{axb\}, \{xab\}$ ler tanımlanır.

- (ii_1) $y \in B'$ için

$$\{y\,\{abx\}\} = \{\{yab\}\,x\}$$

$$\{y\,\{axb\}\} = \{\{yax\}\,b\}$$

$$\{y\,\{xab\}\} = \{\{yxa\}\,b\}$$

- (ii_2) her $s_i \in S$ için

$$f\left(s_i, \{abx\}\right) = f\left(f\left(s_i, a, b\right), x\right)$$

$$f\left(s_i, \{axb\}\right) = f\left(f\left(s_i, a, x\right), b\right)$$

$$f\left(s_i, \{xab\}\right) = f\left(f\left(s_i, x, a\right), b\right)$$

- (iii_3) (ii_1) ve (ii_2) koşulunu sağlayan birden fazla (u, v) ikilisi varsa $\{xyz\}$ üçlüsü için daha önce tanımlanmış olan seçilir.

Yukarıdaki tanımlamalardan sonra, (3,2)-işlemi ve f dönüşümü için bu sonuçlarla tabloda doldurulur.

Örnek 5.16 Örnek 5.11 ve Örnek 5.12 de verilen (3,2)-otomotosu için (3,2)-yarıgrupları sırasıyla Çizelge 5.18 de ve Çizelge 5.19 da verilmiştir.

Çizelge 5.18 (3,2)-otomotosu için (3,2)-yarıgrubu

$\{\ \}$	
aaa	(a,a)
aab	(a,a)
aac	(a,a)
aba	(c,c)
abb	(a,b)
abc	(c,c)
aca	(a,a)
acb	(a,a)
acc	(a,a)
baa	(d,d)
bab	(b,a)
bac	(b,a)
bba	(b,a)
bbb	(b,a)
bbc	(b,b)
bca	(b,a)
bcb	(b,a)
bcc	(b,a)
caa	(b,a)
cab	(c,c)
cac	(c,c)
cba	(c,c)
cbb	(c,c)
cbc	(c,c)
cca	(c,c)
ccb	(c,c)
ccc	(c,c)

Çizelge 5.19 (3,2)-otomotosu için (3,2)-yarıgrubu

{ }		{ }		{ }		{ }		{ }		{ }	
aaa	(a,a)	baa	(b,a)	caa	(a,a)	daa	(d,d)	eaa	(b,a)	faa	(a,a)
aab	(c,c)	bab	(e,e)	cab	(c,c)	dab	(f,f)	eab	(e,e)	fab	(c,c)
aac	(c,c)	bac	(e,e)	cac	(c,c)	dac	(f,f)	eac	(e,e)	fac	(c,c)
aad	(a,a)	bad	(b,a)	cad	(a,a)	dad	(d,d)	ead	(b,a)	fad	(a,a)
aae	(c,c)	bae	(e,e)	cae	(c,c)	dae	(f,f)	eae	(e,e)	fae	(c,c)
aaf	(c,c)	baf	(e,e)	caf	(c,c)	daf	(f,f)	eaf	(e,e)	faf	(c,c)
aba	(d,d)	bba	(b,a)	cba	(a,a)	dba	(d,d)	eba	(b,a)	fba	(d,d)
abb	(a,b)	bbb	(b,b)	cbb	(c,c)	dbb	(f,f)	ebb	(e,e)	fbb	(a,b)
abc	(f,f)	bbc	(e,e)	cbc	(c,c)	dbc	(f,f)	ebc	(e,e)	fbc	(f,f)
abd	(d,d)	bbd	(b,a)	cbd	(a,a)	dbd	(d,d)	ebd	(b,a)	fbd	(d,d)
abe	(f,f)	bbe	(e,e)	cbe	(c,c)	dbe	(f,f)	ebe	(e,e)	fbe	(f,f)
abf	(f,f)	bbf	(e,e)	cbf	(c,c)	dbf	(f,f)	ebf	(e,e)	fbf	(f,f)
aca	(a,a)	bca	(b,a)	cca	(a,a)	dca	(d,d)	eca	(b,a)	fca	(a,a)
acb	(c,c)	bcb	(e,e)	ccb	(c,c)	dcb	(f,f)	ecb	(e,e)	fcb	(c,c)
acc	(c,c)	bcc	(e,e)	ccc	(c,c)	dcc	(f,f)	ecc	(e,e)	fcc	(c,c)
acd	(a,a)	bcd	(b,d)	ccd	(a,a)	dcd	(d,d)	ecd	(b,a)	fcd	(a,a)
ace	(c,c)	bce	(e,e)	cce	(c,c)	dce	(f,f)	ece	(e,e)	fce	(c,c)
acf	(c,c)	bcf	(e,e)	ccf	(c,c)	dcf	(f,f)	ecf	(e,e)	fcf	(c,c)
ada	(a,a)	bda	(b,a)	cda	(a,a)	dda	(d,d)	eda	(b,a)	fda	(a,a)
adb	(c,c)	bdb	(e,e)	cdb	(c,c)	ddb	(f,f)	edb	(e,e)	fdb	(c,c)
adc	(c,c)	bdc	(e,e)	cdc	(c,c)	ddc	(f,f)	edc	(e,e)	fdc	(c,c)
add	(a,a)	bdd	(b,a)	cdd	(a,a)	ddd	(d,d)	edd	(b,a)	fdd	(a,a)
ade	(c,c)	bde	(e,e)	cde	(c,c)	dde	(f,f)	ede	(e,e)	fde	(c,c)
adf	(c,c)	bdf	(e,e)	cdf	(c,c)	ddf	(f,f)	edf	(e,e)	fdf	(c,c)
aea	(d,d)	bea	(b,a)	cea	(a,a)	dea	(d,d)	eea	(b,a)	fea	(d,d)
aeb	(f,f)	beb	(e,e)	ceb	(c,c)	deb	(f,f)	eeb	(e,e)	feb	(f,f)
aec	(f,f)	bec	(e,e)	cec	(c,c)	dec	(f,f)	eec	(e,e)	fec	(f,f)
aed	(d,d)	bed	(b,a)	ced	(a,a)	ded	(d,d)	eed	(b,a)	fed	(d,d)
aee	(f,f)	bee	(e,e)	cee	(c,c)	dee	(f,f)	eee	(e,e)	fee	(f,f)
aef	(f,f)	bef	(e,e)	cef	(c,c)	def	(f,f)	eef	(e,e)	fef	(f,f)
afa	(a,a)	bfa	(b,a)	cfa	(a,a)	dfa	(d,d)	efa	(b,a)	ffa	(a,a)
afb	(c,c)	bfb	(e,e)	cfb	(c,c)	dfb	(f,f)	efb	(e,e)	ffb	(c,c)
afc	(c,c)	bfc	(e,e)	cfc	(c,c)	dfc	(f,f)	efc	(e,e)	ffc	(c,c)
afd	(a,a)	bfd	(b,a)	cfd	(a,a)	dfd	(d,d)	efd	(b,a)	ffd	(a,a)
afe	(c,c)	bfe	(e,e)	bfe	(c,c)	dfe	(f,f)	efe	(e,e)	ffe	(c,c)
aff	(c,c)	bff	(e,e)	cff	(c,c)	dff	(f,f)	eff	(e,e)	fff	(c,c)

5.4 (3,2)-Yarıgrup Otomotosunun İnşası

Bir (3,2)-otomotosu $f : S\times B^2 \longrightarrow S\times B$ dönüşümü ile verildiğinde B alfabesi, B' alfabesine genişletildiğinden, (3,2)-otomotosu da yeni $(u,v) \in (B'\times B)\setminus(B\times B)$ ikililerinin tanıtılmasıyla ve $f'(s,x,y)$ nin tanımlanmsıyla genişletilir.

$(B',\{\})$ (3,2)-yarıgrubu üretilirken, verilen (S,B,f) (3,2)-otomotosu için her $x,\ y\in B$ olmak üzere

$$f'(s_i,x,y) = f(s_i,x,y)$$

olacak şekilde $f' : S\times B'^2 \longrightarrow S\times B$ dönüşümü ile (S,B',f') (3,2)-yarıgrup otomotosu da üretilir.

Bu $(B',\{\})$ (3,2)-yarıgrubu üretildikten sonra, $f'(s_i,x,y)$ lerin hepsinin tanımlanması mümkün olmayabilir. En az bir $u_1,\ u_2,\ v_1,\ v_2 \in B'$ için

$$\{xyz\} = (u_1,v_1)$$

ve

$$\{zxy\} = (u_2,v_2)$$

kullanılarak, daha önceden tanımlanan $f'(s_i,u_1,v_1)$ ve $f'(s_i,u_2,v_2)$ lerle

$$(iii_1)\quad f'(s_i,u_1,v_1) = f'(s_i,\{xyz\}) = f'\left(f'(s_i,x,y),z\right)$$

$$f'(s_i,u_2,v_2) = f'(s_i,\{zxy\}) = f'\left(f'(s_i,z,x),y\right)$$

koşulunu sağlayan $f'(s_i,x,y)$ tanımlanır.

(iii_1) koşulu kullanılarak, tüm $f'(s_i,x,y)$ ler tanımlanana kadar bu şekilde devam edilir. Yani (3,2)-yarıgrup otomotosu tanımlanana kadar bu işleme devam edilir.

Örnek 5.17 Örnek 5.11 ve Örnek 5.12 de verilen (3,2)-otomotoları için (3,2)-yarıgrup otomotoları Çizelge 5.20 de ve Çizelge 5.21 de verilmiştir.

Çizelge 5.20 (3,2)-yarıgrup otomotosu

f''	(a,a)	(a,b)	(a,c)	(b,a)	(b,b)	(b,c)	(c,a)	(c,b)	(c,c)
s_0	(s_0,a)	(s_0,b)		(s_0,a)	(s_0,a)				(s_0,a)
s_1	(s_0,a)	(s_2,b)		(s_2,a)	(s_2,a)				(s_2,a)
s_2	(s_2,a)	(s_2,a)		(s_2,a)	(s_2,b)				(s_2,a)

Çizelge 5.21 (3,2)-yarıgrup otomotosu

f''	(a,a)	(a,b)	(a,c)	(a,d)	(a,e)	(a,f)	(b,a)	(b,b)	(b,c)
s_0	(s_0,a)	(s_0,b)					(s_0,a)	(s_0,b)	
s_1	(s_0,a)	(s_2,b)					(s_2,a)	(s_2,a)	
s_2	(s_2,a)	(s_2,a)					(s_2,a)	(s_2,b)	

f''	(b,d)	(b,e)	(b,f)	(c,a)	(c,b)	(c,c)	(c,d)	(c,e)	(c,f)
s_0						(s_0,b)			
s_1						(s_0,b)			
s_2						(s_2,a)			

f''	(d,a)	(d,b)	(d,c)	(d,d)	(d,e)	(d,f)	(e,a)	(e,b)	(e,c)
s_0				(s_0,a)		(s_0,b)			
s_1				(s_2,a)		(s_0,b)			
s_2				(s_2,a)		(s_2,a)			

f''	(e,d)	(e,e)	(e,f)	(f,a)	(f,b)	(f,c)	(f,d)	(f,e)	(f,f)
s_0		(s_0,b)							(s_0,b)
s_1		(s_2,a)							(s_2,a)
s_2		(s_2,a)							(s_2,a)

5.5 (3,2)-Yarıgrup Otomotosunun Doğurulması İçin Algoritma

Durum 1

Adım 1.1 $x,y,z \in B$ için verilen (3,2)-otomotosunun tablosu yeni $\{xyz\}$ sütunları ile genişletilir ve

$$f\left(f(s,x,y),z\right) = f\left(s,\{xyz\}\right)$$

kuarlı ile doldurulur.

Adım 1.1.1 Eğer her $\{xyz\}$ üçlüsü için, $u,v \in B$ olmak üzere en an bir (u,v) ikilisi var ve her $s \in S$ için bu ikililerin sütunları

$$f\left(f(s,x,y),z\right) = f\left(s,u,v\right)$$

koşulu sağlanıyorsa bu durumda verilen (3,2)-otomotosu tarafından doğrulan en az bir (3,2)-grupoidi vardır.

Adım 1.1.2 Eğer bir $\{xyz\}$ üçlüsüne karşılık gelen bir (u,v) ikilisi bulunmuyorsa, bu durumda (3,2)-otomotosu B üzerinde bir (3,2)-grupoidi doğurmaz.

Adım 1.2 Her $x \in B$ ve her $s_i \in S$ için, tablo yeni (s_i,x) satırları ile genişletilir. Bu genişletilmiş tablo

$$f\left((s_i,a),(u,v)\right) = f\left(f(s_i,a,u),v\right)$$

$$f\left((s_i,a),\{xyz\}\right) = f\left(f\left(f(s_i,a,x),y\right),z\right)$$

kuralları ile doldurulur ve eğer $x,y,z \in B$ olmak üzere $\{xyz\}$ üçlüleri için genişletilmiş sütunlardan en az biri (u,v) ikilileri için genişletilmiş sütunlardan en az biri ile aynı oluyorsa, yani her $s_i \in S$ ve her $x \in B$ için

$$f\left((s_i,a),(u,v)\right) = f\left((s_i,a),\{xyz\}\right) \tag{5.6}$$

koşulu sağlanıyorsa tablo doldurulmaya devam edilir.

Adım 1.2.1 Eğer her $\{xyz\}$ üçlüsü için $u,v \in B$ olmak üzere sütunları aynı olan yani (5.6) koşulunu sağlayan en az bir (u,v) ikilisi varsa, bu durumda verilen (3,2)-otomotosu tarafından doğrulan B üzerinde en az bir (3,2)-yarıgrubu vardır. Genişletilmiş tablo (3,2)-yarıgrubunun ve (3,2)-yarıgrup otomotosunun nasıl tanımlandığını gösterir. Bu durumda algoritma burada son bulur.

Adım 1.2.2 Eğer Adım 1.2.1 deki gibi bir (u,v) ikilisine karşılık gelmeyen bir $\{xyz\}$ üçlüsü varsa, bu durumda (3,2)-otomotosu B üzerinde bir (3,2)-yarıgrubu doğurmaz. O zaman, adım 1.1.1 sağlanabilir fakat adım 1.2.1 sağlanmaz.

Adım 1.3 Adım 1.1.1 ya da Adım 1.2.1 sağlamayan her $\{xyz\}$ üçlüsü için, p ile gösterilen yeni bir harf (sembol) tanımlanır, B alfabesi yeni bir B' alfabesine genişletilir ve $\{xyz\} = (p,p)$ olarak tanımlanır. Sonra, $x,y,z,t \in B$ için yeni $\{xyzt\}$ sütunları ile önceden genişletilmiş olan tablo yeniden genişletilir ve kural (5.4) kullanılarak doldurulur. Daha sonra, yeni sütunlar eski sütunlarla karşılaştırılır.

Adım 1.3.1 Eğer yeni sütunların her biri eski sütunların en az biri ile aynı ise, Durum 2 ye gidilir.

Adım 1.3.2 Eğer yeni sütunlardan en az biri eski sütunlardan herhangi biri ile aynı değilse, q ile gösterilen yeni bir harf tanımlanır, alfabe genişletilir ve bu sütun (q,q) ikilisine atanır.

Adım 1.3, $x,y,z,t,u,v \in B$ için yeni sütunlar $\{xyztu\}$, $\{xyztuv\}$ bir öncekilerden en az biri ile aynı olana kadar bu şekilde sonlu sayıda bir çok kez tekrarlanır. En sonunda B' ile gösterilen yeni bir alfabe elde edilir.

Sonra Durum 2 ye gidilir.

Durum 2

Adım 2.1 Durum 1 deki genişletilmiş tablo $x,y,z \in B$ olmak üzere $\{xyz\}$ ile $x \in B$ ve $t \in B' \setminus B$ olmak üzere $\{xtt\}$ ve $\{ttx\}$ üçlüleri için (3,2)-işleminin tanımını verir.

Adım 2.2 Eğer en az bir $x \in B' \setminus B$ için, $\{xxx\}$ üçlüsü daha önce tanımlanmamışsa,

$$\{xxx\} = (x,x)$$

olarak tanımlanır ve sonra bu tanımdan elde edilen tüm sonuçlar

- (ii_1) her $y \in B'$ için
$$\{\{xxx\}y\} = \{x\{xxy\}\}$$
$$\{y\{xxx\}\} = \{\{yxx\}x\}$$
- (ii_2) her $s_i \in S$ için
$$f(s_i,\{xxx\}) = f(f(s_i,x,x),x)$$

  kurallarına göre tanımlanır.

Adım 2.3 $a,b \in B$ ve $x \in B' \setminus B$ için $\{abx\}$, $\{axb\}$ ve $\{xab\}$ ler,

- (iii_1) her $y \in B'$ için

$$\{y\{abx\}\} = \{\{yab\}x\}$$

$$\{y\{axb\}\} = \{\{yax\}b\}$$

$$\{y\{xab\}\} = \{\{yxa\}b\}$$

- (iii_2) her $s_i \in S$ için

$$f(s_i, \{abx\}) = f(f(s_i, a, b), x)$$

$$f(s_i, \{axb\}) = f(f(s_i, a, x), b)$$

$$f(s_i, \{xab\}) = f(f(s_i, x, a), b)$$

  kurallarına göre tanımlanır.

- (iii_3) Eğer (iii_1) ve (iii_2) koşullarını sağlayan birden fazla (u, v) ikilisi varsa, önceki adımlarda tanımlanan $\{xyz\}$ lerden en az birine eşit olan (u, v) ikilisi seçilir.

Bundan sonra, $\{\}$ (3,2)-işlemi ve f' geçiş fonksiyonunun genişlemesi için tüm sonuçlar tanımlanır.

B alfabesi $x \in B' \setminus B$ harfi ile genişletilir yani $B_1 = B \cup \{x\}$ olacak şekilde genişletilir ve yeni B_1 alfabesi için Adım 2.3 tekrarlanır. Bu $B = B'$ olana kadar yani her $x, y, z \in B'$ için tüm $\{xyz\}$ üçlülüleri tanımlanana kadar devam edilir.

Adım 2.4

$(B', \{\})$ (3,2)-yarıgrubunun tanımlanmasından sonra, geçiş fonksiyonu tanımlanmamış olabilir, yani en az bir $f'(s_i, x, y)$ tanımlanmamış olabilir. En az bir $u_1, u_2, v_1, v_2 \in B'$ için

$$\{xyz\} = (u_1, v_1)$$

ve

$$\{zxy\} = (u_2, v_2)$$

gerçeği kullanılarak, $f'(s_i, u_1, v_1)$ ve $f'(s_i, u_2, v_2)$ ler daha önceden tanımlanmış olmak üzere,

- (iii_1)

$$f'(s_i,u_1,v_1) = f'(s_i,\{xyz\}) = f'\left(f'(s_i,x,y),z\right)$$
$$f'(s_i,u_2,v_2) = f'(s_i,\{zxy\}) = f'\left(f'(s_i,z,x),y\right)$$

koşuluna göre tanımlanır.

Tüm $f'(s_i,x,y)$ ler tanımlanana kadar yani (3,2)-yarıgrup otomotosu tanımlanana kadar Adım 2.4 tekrarlanır.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada bir otomotonun belirlediği yarıgrubun tanımı, yapısı ve özellikleri araştırılımış ve bazı bilinen yarıgrupların bir otomoto yarıgrubu oldukları incelenmiştir. Ayrıca, özel olarak Cayley otomotosunun belirlediği yarıgruplar ve özellikleri araştırılımıştır. Bunlara ilaveten ise, (3,2) yarıgrup otomotosunun doğurulması için bir algoritma verilmiştir.

Bazı yarıgrup yapılarının otomoto yarıgrubu olup olamadıkları ile ilgili araştırmalar özellikle matematikçiler ve biligisayar bilimciler tarafından hızlı bir şekilde devam etmektedir. Üzerinde çalışılan bir kaç açık problem aşağıda belirtilmiştir.

SORU 1: [25] de, otomoto yarıgrıplarının serbest çarpımları yine bir otomoto yargrubu mudur?

SORU 2: [25] de, eğer mevcutsa, $\sum(\mathscr{C}(S))$ ile $\sum\left(\mathscr{C}\left(S^1\right)\right)$ arasındaki ilişkiler nelerdir?

SORU 3: [25] de, otomoto rank tanımlanabilir mi, bu bilinen ranka eşit midir?

KAYNAKLAR

[1] Algebraicheskaya teoriya automatou, yazykov i polugrupp (Algebraic Theory of Automata, Languages and Semigroups), (Editr: Arbib, M.A.), Statistika, Moscow, 1975.

[2] Eilenberg, S., Automata, Languages and Machines, Academic, New York, vol. A., 1974.

[3] Epstein, D.B.A., Cannon, J.W., Holt, D.F., Levy, S.V.F., Paterson, M.S., and Thurston, W.P., Word Processing and Group Theory, Jhones and Bartlett, Boston, 1992.

[4] Kitchens , B.P., Symbolic Dynamics, Springer, Berlin, 1998.

[5] Lind, D., and Marcus, B., Symbolic Dynamics and Coding, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[6] Kudryavtsev, V.M., Aleshin, S.V., and Podkolzin, A.S., Vuedenie u teoriya automatou (Introduction to the Theory of Automata), Nauka, Moscow, 1985.

[7] Gluskov, V., Abstract theory of automata, Uspekhi mat. nauk., 16, 3-62, 1961.

[8] Plotkin, B.I., Greenglaz, L.Ja, and Gvaramija, A.A., Algebraic Structures in Automata and Databases Theory, World Scientific, Singapore, 1992.

[9] Rhodes, J., Undecidability, Automata and Pseudovarieties of Finite Semigroups, Int. J. Alg. and Comput., 9(4), 455-473, 1999.

[10] Kharlampovich, O.G. and Sapir, M.V., Algorithmic Problems in Varieties, Int. J. Algebra and Comput., 5(4), 379-602, 1995.

[11] Jiri Horejs. Transformations defined by finite automata, Problemy Kibernet., 9, 23-26, 1963.

[12] Golod, E., On nil-algebras and nitely approximable p-groups, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 28, 273-276, 1964.

[13] Alesin, S., Finite automata and the burnside problem for periodic groups, Acta. Math., 11, 319-328, 1972.

[14] Grigorchuk, R. I., On Burnsides problem on periodic groups, Funktsional. Anal. Prilozhen., 14(1), 53-54, 1980.

[15] Gupta, N. and Sidki, S., On the Burnside problem for periodic groups, Math. Z., 182(3), 385-388, 1983.

[16] Nekrashevych, V., Self-similar groups, volume 117 of Mathematical Surveys and

Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[17] Bartholdi, L., Grigorchuk, R. I. and Nekrashevych, V., From fractal groups to fractal sets, In Fractals in Graz, Trends Math., 25-118. Birkhauser, Basel, 2003.

[18] Bartholdi, L., Grigorchuk, R. I. and Sunik, Z., Branch groups, In Hand-book of Algebra, North-Holland, Amsterdam, 3, 989-1112, 2003.

[19] Grigorchuk, R. I. and Sunik, Z., Self-similarity and branching in group theory, volume 339 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., 36-95. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

[20] Grigorchuk, R.I., Nekrashevich, V.V., Sushchanski, V.I., Automata, dynamical systems, and groups, Proc. Steklov Inst. Math. 231(4), 128-203, 2000.

[21] Nekrashevich, V.V., Self-similar groups, volume 117 of Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, (2005).

[22] Clifford, A.H., Preston, G.B., The Algebraic Theory of Semigroups, Mathematical Surveys, 7, American Mathematical Society, Providence, RI, 1961.

[23] Silva, P.V., Steinberg, B., On a class of automata groups generalizing lamplighter groups, Internat. J. Algebra Comput. 15(5-6), 1213-1234, 2005.

[24] Maltcev, V., Cayley automaton semigroups., Internat, J. Algebra Comput., 19(1), 79-95, 2009.

[25] Cain, A. J.. Automaton semigroups, Theoret. Comput. Sci., 410(47-49), 5022-5038, 2009.

[26] Klimann, I., Mairesse, J. and Picantin, M., Implementing computations in automaton (semi)groups, (Editrler: Moreira N. and Reis, R.) Implementation and Application of Automata, volume 7381 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin, 240-252, 2012.

[27] Mccune, D., Groups and Semigroups Generated by Automata, Dissertations, Theses, and Student Research Papers in Mathematics, University of Nebraska-Lincoln, 2011.

[28] Howie, J. M., Fundamentals of Semigroup Theory, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[29] Ruskuc N., Semigroup Presentations (Ph. D. Thesis), University of St Andrews, Great Britain, 1995.

[30] Sims C.C., Computation With Finitely Presentations Groups, Cambridge University Press, Great Britain, 1994.

[31] A. Salomaa, Theory of automata, Pergamon Press, Oxford, 1969.

[32] Manevska, V. and D. Dimovski, (3,2) Semigroups Generated by (3,2) Automata, Math Maced. 2, 65-81, 2004.

[33] Manevska, V., The Connection Between A (3,2)-Semigroup Automaton and A semigroup Automaton, Kragujevac J. Math. 30, 355-363, 2007.

ÖZGEÇMİŞ

1. **Adı Soyadı** : Mehmet ÇOLAK
2. **Doğum Tarihi** : 01.07.1963
3. **Ünvanı** : Matematik Öğretmeni
4. **Öğrenim Durumu :**

Derece	**Alan**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik	Atatürk Üniversitesi	1988

5. **İş Tecrübesi:**

Görev Ünvanı	**Görev Yeri**	**Yıl**
Matematik Öğretmeni	Hasan Aybaba And. Ls., Osmaniye	2010–
Matematik Öğretmeni	Rahime Hatun Kız Msk. Ls, Osmaniye	2009 – 2009
Matematik Öğretmeni	Ticaret Meslek Lisesi, Muş	2009 – 2009
Matematik Öğretmeni	Özel Bilim Koleji, Osmaniye	2008 – 2008
Matematik Öğretmeni	Final Dergisi Dershanesi, Osmaniye	2000 – 2008
Matematik Öğretmeni	Büyük Dershane, Osmaniye	1998 – 2000
Matematik Öğretmeni	Merkez Anadolu Lisesi, Osmaniye	1995 – 1998
Matematik Öğretmeni	Anadolu İmam Hatip Lisesi, Sivas	1994 – 1995
Matematik Öğretmeni	İmam Hatip Lisesi, Sivas	1993 – 1994
Asker Öğretmen	Yukarı Maden İlköğ. Ok., Artvin	1992 – 1993
Matematik Öğretmeni	İmam Hatip Lisesi, Sivas	1989 – 1992