



T.C.  
OSMANIYE KORKUT ATA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Ali YILDIRIM**

**FONKSİYONEL OLARAK  
DERCELENDİRİLMİŞ MALZEMEDEN  
YAPILMIŞ DAİRESEL KANATÇIKLARDA  
TERMAL GERİLME ANALİZİ**

**MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**OSMANIYE – 2017**

**T.C.  
OSMANIYE KORKUT ATA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**FONKSİYONEL OLARAK DERECELENDİRİLMİŞ  
MALZEMEDEN YAPILMIŞ DAİRESEL  
KANATÇIKLARDA TERMAL GERİLME ANALİZİ**

**Ali YILDIRIM**

**MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ  
ANABİLİM DALI**

**OSMANIYE  
ARALIK-2017**

## TEZ ONAYI

### FONKSİYONEL OLARAK DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMEDEN YAPILMIŞ DAİRESEL KANATÇIKLARDA TERMAL GERİLME ANALİZİ

Ali YILDIRIM tarafından Yrd. Doç. Dr. Kerimcan ÇELEBİ danışmanlığında Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Makine Mühendisliği** Anabilim Dalı'nda hazırlanan bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği/ çokluğu ile **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman:** Yrd. Doç. Dr. Kerimcan ÇELEBİ .....  
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, ABTÜ

**İkinci Danışman:** Yrd.Doç. Dr. Durmuş YARIMPABUÇ .....  
Matematik Anabilim Dalı, OKÜ

**Üye:** Prof. Dr. Hasan KURTARAN .....  
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, ABTÜ

**Üye:** Yrd.Doç.Dr. M. Ertuğrul CİHAN .....  
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, OKÜ

**Üye:** Yrd.Doç.Dr. M. Seha TATLIER .....  
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, OKÜ

Yukarıdaki jüri kararı Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ...../...../..... tarih ve ...../..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. COŞKUN ÖZALP .....  
Enstitü Müdürü, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

*Bu tezde kullanılan özgün bilgiler,şekil,çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.*

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, bu çalışma sonucunda elde edilmeyen her türlü bilgi ve ifade için ilgili kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını ve bu tezin Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Ali YILDIRIM



## ÖZET

### FONKSİYONEL OLARAK DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMEDEN YAPILMIŞ DAİRESEL KANATÇIKLARDA TERMAL GERİLME ANALİZİ

Ali YILDIRIM

Yüksek Lisans, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı  
Danışman :Yrd. Doç. Dr. Kerimcan ÇELEBİ

Aralık 2017, 75 sayfa

Bu tezde Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme'den (FDM) yapılmış ve kararlı durumu ulaşılmış dikdörtgen profilli dairesel bir kanatçıktaki sıcaklık dağılımı ve ısı gerilmeler incelenmiştir. Elastik modül, lineer ısı genleşme katsayısı ve ısı iletkenliğinin radyal yönde kuvvet fonksiyonu olarak değiştiği, Poisson oranının ise sabit olduğu dairesel bir kanatçıktaki sıcaklık dağılımı ve ısı gerilmeler analitik olarak elde edilmiştir. Poisson oranının değişken değil de sabit olarak alınmasının ısı gerilme sonuçlarını nasıl etkilediğini göstermek için Poisson oranının da değişken olduğu durum incelenmiştir. Elastik modül, lineer ısı genleşme katsayısı, ısı iletkenlik ve Poisson oranının radyal yönde kuvvet fonksiyonu olarak değiştiği dairesel bir kanatçıktaki ısı gerilmelerin analitik çözümü mümkün olmadığı için sayısal bir yöntem olan Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu (TFM) kullanılarak çözülmüştür. Yöntemin doğruluğu analitik çözümün elde edildiği durumun TFM ile çözülmesi ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması ile test edilmiştir. Homojensizlik katsayılarının sıcaklık dağılımı ve ısı gerilmeler üzerine olan etkileri tartışılmıştır. FDM'den yapılmış dairesel bir kanatçığın homojen malzemeye göre daha yüksek uç sıcaklığına sahip olmasına rağmen kanatçık üzerinde daha düşük gerilmelere maruz kalabileceği gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Dairesel kanatçık, fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme, ısı gerilme.

## ABSTRACT

### THERMAL STRESS ANALYSIS OF ANNULAR FIN MADE OF FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL

Ali YILDIRIM

M.Sc., Department of Mechanical Engineering  
Supervisor : Assist.Prof.Dr. Kerimcan ÇELEBİ

December 2017, 75 pages

In this thesis, the temperature distribution and the thermal stresses in a steady functionally graded annular fin with a rectangular profile are investigated. The temperature distribution and the thermal stress are investigated analytically in an annular fin in which modulus of elasticity, linear thermal expansion and thermal conductivity are assumed to vary along to radial direction as a power law function with constant Poisson's ratio. In order to show the effect of Poisson ratio on the thermal stresses, the case in which the Poisson's ratio is also changed radially as a power law function is handled. In this case, the analytical solution of the thermal stresses are not possible. Therefore, Complementary Function Method (CFM) is used to determine temperature distribution and thermal stresses in the steady functionally graded annular fin. The accuracy of the method was tested by comparing with the analytical results for constant Poisson's ratio. The effect of the inhomogeneity parameters on temperature distribution and thermal stresses are discussed. It has been shown that although the the steady functionally graded annular fin has higher tip temperature than annular homogeneous fin, it can be subjected to lower stresses.

**Key Words:** Annular fin, functionaly graded material, thermal stress.



*Değerli Aileme, Eşime ve Oğluma*

## TEŐEKKÖR

Yüksek lisans tez konumun belirlenerek tez alışmamın yürütölmesini üstlenen, alışmalarım süresince değerli bilgi, tecrübe ve katkılarını esirgemeyen danışman hocalarım Sayın Yrd.Doç.Dr Kerimcan elebi ve Yrd.Doç.Dr Durmuş Yarımpabuç'a teőekkürlerimi sunarım.





## İÇİNDEKİLER

### TEZ BİLDİRİMİ

ÖZET . . . . .	i
ABSTRACT . . . . .	ii
İTHAF SAYFASI . . . . .	iii
TEŞEKKÜR . . . . .	iv
İÇİNDEKİLER . . . . .	v
ÇİZELGELER DİZİNİ . . . . .	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . .	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR . . . . .	viii
1 GİRİŞ . . . . .	1
2 ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR . . . . .	3
3 SICAKLIK DAĞILIMININ BELİRLENMESİ . . . . .	16
4 ISIL GERİLMELERİN BELİRLENMESİ . . . . .	22
5 SICAKLIK DAĞILIMI VE ISIL GERİLMELERİN ANALİTİK İNCELENMESİ . . . . .	35
5.1 Sıcaklık dağılımının analitik çözümü . . . . .	35
5.2 Isıl gerilmelerin analitik çözümü . . . . .	40
6 SICAKLIK DAĞILIMI VE ISIL GERİLMELERİN NÜMERİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ . . . . .	49
6.1 Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu . . . . .	49
6.1.1 Sıcaklık dağılımının TFM İle elde edilmesi . . . . .	49
6.1.2 Isıl gerilmelerin TFM İle elde edilmesi . . . . .	51
7 BULGULAR VE TARTIŞMALAR . . . . .	54
7.1 Analitik ve nümerik sonuçların karşılaştırması . . . . .	54
7.2 Homojen ve FDM'den yapılmış dairesel kanatçıkların karşılaştırılması . . . . .	65
8 SONUÇLAR VE ÖNERİLER . . . . .	68
KAYNAKLAR . . . . .	69
ÖZGEÇMİŞ . . . . .	74

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 7.1 TFM ve analitik yöntem ile elde edilen sıcaklık ve gerilmelerin karşılaştırılması . . . . .	54
---	----



## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1	Dairesel bir kanatçığın şekli. . . . .	16
Şekil 4.1	Eksenel ve Teğetsel Gerilmeler . . . . .	23
Şekil 4.2	Normal ve Kayma Gerilmeleri . . . . .	25
Şekil 4.3	Eksenel ve Teğetsel Gerilmeler . . . . .	29
Şekil 7.1	FGM kanatçıkta radyal eksen boyunca elastisite modülü, ısı iletkenlik ve lineer ısı genleşmesindeki değişim. . . . .	55
Şekil 7.2	$\gamma$ 'nın sıcaklık dağılımı üzerine etkisi. $\beta = \lambda = \psi = 0$ . . . . .	56
Şekil 7.3	$\gamma$ 'nın radyal gerilme üzerine etkisi. $\beta = \lambda = \psi = 0$ . . . . .	56
Şekil 7.4	$\gamma$ 'nın teğetsel gerilme üzerine etkisi. $\beta = \lambda = \psi = 0$ . . . . .	57
Şekil 7.5	$\beta$ 'nın sıcaklık dağılımı üzerine etkisi. $\gamma = \lambda = \psi = 0$ . . . . .	58
Şekil 7.6	$\beta$ 'nın radyal gerilme üzerine etkisi. $\gamma = \lambda = \psi = 0$ . . . . .	59
Şekil 7.7	$\beta$ 'nın teğetsel gerilme üzerine etkisi. $\gamma = \lambda = \psi = 0$ . . . . .	59
Şekil 7.8	$\lambda$ 'nın sıcaklık dağılımı üzerine etkisi. $\beta = \gamma = \psi = 0$ . . . . .	60
Şekil 7.9	$\lambda$ 'nın radyal gerilme üzerine etkisi. $\beta = \gamma = \psi = 0$ . . . . .	61
Şekil 7.10	$\lambda$ 'nın teğetsel gerilme üzerine etkisi. $\beta = \gamma = \psi = 0$ . . . . .	61
Şekil 7.11	$\psi$ 'nın sıcaklık dağılımı üzerine etkisi. $\beta = \gamma = \lambda = 0$ . . . . .	63
Şekil 7.12	$\psi$ 'nın radyal gerilme üzerine etkisi. $\beta = \gamma = \lambda = 0$ . . . . .	63
Şekil 7.13	$\psi$ 'nın teğetsel gerilme üzerine etkisi. $\beta = \gamma = \lambda = 0$ . . . . .	64
Şekil 7.14	Homojen ve FDM kanatçıklardaki sıcaklık dağılımının karşılaştırılması. . . . .	66
Şekil 7.15	Homojen ve FDM kanatçıklardaki radyal gerilmelerin karşılaştırılması. . . . .	66
Şekil 7.16	Homojen ve FDM kanatçıklardaki teğetsel gerilmelerin karşılaştırılması. . . . .	67

## SİMGELER VE KISALTMALAR

$A$	Kesit alanı	$(m^2)$
$a, b$	Kanatçığın iç ve dış yarıçapları	$(m)$
$E(r)$	$r$ 'ye bağlı değişen elastisite modülü	$(GPa)$
$E_0$	$r=a$ daki elastisite modülü	$(GPa)$
$h$	Isı transfer katsayısı	$\left(\frac{W}{m^2 \cdot K}\right)$
$k(r)$	$r$ 'ye bağlı değişen ısı iletkenlik	$\left(\frac{W}{m \cdot K}\right)$
$k_0$	$r=a$ daki ısı iletkenlik	$\left(\frac{W}{m \cdot K}\right)$
$N$	Boyutsuz parametre $N^2 = 2ha^2/(\delta k_0)$	
$r, \phi$	Polar koordinatlar	
$R$	Boyutsuz dış yarıçap $R = b/a$	
$S_r, S_\phi$	Boyutsuz gerilmeler $S_r = \sigma_r/E_0$ ve $S_\phi = \sigma_\phi/E_0$	
$T$	Kanatçık sıcaklığı	$(K)$
$T_b$	Taban sıcaklığı	$(K)$
$T_\infty$	Çevre sıcaklığı	$(K)$
$u$	Radyal deplasman	$(m)$
$\bar{u}$	Boyutsuz radyal deplasman $\bar{u} = u/a$	
$\alpha(r)$	$r$ 'ye bağlı değişen lineer ısı genleşme katsayısı	$(10^{-6}C^{-1})$
$\alpha_0$	$r=a$ daki lineer ısı genleşme katsayısı	$(10^{-6}C^{-1})$
$\beta$	Elastik modül homojensizlik katsayısı	
$\gamma$	Isı iletkenlik homojensizlik katsayısı	
$\delta$	Kanatçık kalınlığı	$(m)$
$\epsilon_r, \epsilon_\phi$	Radyal ve teğetsel gerilmeler	
$\theta$	Boyutsuz sıcaklık $\theta = (T - T_\infty)/(T_b - T_\infty)$	
$\lambda$	Lineer ısı genleşme katsayısı homojensizlik katsayısı	
$\nu$	Poisson oranı	
$\xi$	Boyutsuz yarıçap $\xi = r/a$	
$\sigma_r, \sigma_\phi$	Radyal ve teğetsel gerilmeler	$(GPa)$
$\chi$	Boyutsuz lineer ısı genleşme katsayısı $\chi = \alpha_0(T_b - T_\infty)$	
$\psi$	Poisson oranı homojensizlik katsayısı	

## 1. GİRİŞ

Çeşitli uygulamalarda transfer edilen ısı miktarını artırmak için tasarlanan genişletilmiş yüzeylere kanatçık adı verilir. Bir çok endüstri uygulamasında ısı transfer elemanı olarak kullanılan kanatçıklar; ısının transfer edildiği yüzey boyunca paralel uzanan uzunlamasına kanatçıklar, belirli mesafelerle yerleştirilmiş dairesel ve düz kanatçıklar ile iğne tipi kanatçıklar gibi farklı kesitlerde ve dikdörtgen, üçgen, konkav, konveks gibi farklı profillerde olabilirler. Kompakt bir yapıya sahip olması, ısı performansının iyi olması ve bir çok kanatçık profillerine göre üretim maliyetlerinin düşük olması sebebi ile içten yanmalı motorlarda, kompresörlerde, ısı eşanjörü v.s. gibi bazı uygulamalarda dairesel kanatçıklar yoğun bir şekilde kullanılmaktadır [1-3].

Isı transferi esnasında kanatçıkta oluşan sıcaklık farkları kanatçık üzerinde ısıl gerilmelerin oluşmasına sebep olmaktadır. Isıl gerilmeler ise sünme, yorulma, çatlak ve çatlak ilerlemesi gibi kanatçık ömrünü azaltan mekanik kusurlara yol açmaktadır. Bu nedenle uygun malzeme seçimi ve doğru kanatçık tasarımı yapabilmek için ısıl gerilmelerin de belirlenmesi gerekir [4]. Kanatçıklarda ısıl gerilmeler, analitik yöntem, Pertübrasyon yöntemi gibi yaklaşım yöntemleri yada sayısal yöntemlerden birisi kullanılarak belirlenir [5].

Isı transfer elemanı olarak kullanılan malzemeler yüksek sıcaklık farklarına maruz kalması durumunda malzemede yüksek ısıl gerilmeler oluşacak, oluşan bu yüksek gerilmeler malzeme ömrünün azalmasına sebep olacaktır. Yüksek sıcaklık farklarının söz konusu olduğu ısıl bariyer gibi uygulamalarda kanatçık ömrünün artırmak için 1984 yılında Japonya'daki malzeme bilimciler tarafından Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FDM) kavramı ortaya atılmıştır. FDM; yüksek sıcaklık bölgesinde ısıl direnci yüksek olan seramik malzemenin, düşük sıcaklık bölgesinde ise ısıl iletkenliği yüksek olan metalik malzemenin kullanıldığı, seramikten metale geçişin dereceli bir şekilde sağlandığı malzemelerdir. Malzemenin yapısındaki dereceli değişim, malzemenin mekanik ve ısıl özelliklerinde de dereceli bir değişime sebep olmaktadır. Farklı özelliklere sahip en az iki malzemenin birleşmesi ile oluşan

FDM malzemeleri alışıla gelmiş kompozitlerden ayıran en büyük özellik; malzeme değişiminin aniden olmayıp dereceli bir şekilde gerçekleşmesidir [6].

Bu çalışmada dairesel kanatçık malzemesi FDM olarak düşünülmüş ve kanatçık uç sıcaklığı artırılırken kanatçık üzerindeki gerilmelerin düşürülmesi amaçlanmıştır. Elastisite modülü, lineer ısı genleşme katsayısı ve ısı iletkenliğin radyal yönde kuvvet fonksiyonu olarak değiştiği, Poisson oranının ise sabit olduğu düşünülen dairesel bir kanatçıktaki sıcaklık dağılımı ve ısı gerilmeler analitik olarak elde edilmiştir. Elastisite modülü, lineer ısı genleşme katsayısı, ısı iletkenlik ve Poisson oranının radyal yönde kuvvet fonksiyonu olarak değiştiği dairesel bir kanatçıktaki ısı gerilmeler ise analitik çözümü mümkün olmadığı için sayısal bir yöntem olan Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu (TFM) kullanılarak çözülmüştür. Yöntemin doğruluğu analitik çözümün elde edildiği durumun TFM ile çözülmesi ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması ile test edilmiştir. Homojensizlik katsayılarının sıcaklık dağılımı ve ısı gerilmeler üzerine olan etkileri tartışılmıştır. FDM'den yapılmış dairesel bir kanatçığın homojen malzemeye göre daha yüksek uç sıcaklığına sahip olmasına rağmen kanatçık üzerinde daha düşük gerilmelere maruz kalabileceği gösterilmiştir.

## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Literatürde kanatçıklarla ilgili oldukça fazla çalışma mevcut olup, bu çalışmalar; kanatçık verimi ve etkinliğinin incelenmesi, kanatçık ölçülerinin ve profilinin optimizasyonu, kanatçıklarda ısıl gerilme analizleri ve kanatçıkta bilinmeyen parametrelerin belirlenmesi için tersine mühendislik gibi çalışmaları içermektedir.

Kanatçıklarda ısı transferi ile ilgili analizler yapılırken birçok mühendislik probleminde olduğu gibi kabuller ve varsayımlar vasıtası ile problemin karmaşıklığından kurtuluruz. Gardner [7] bu kabul ve varsayımlardan bahsetmiş, değişik türdeki kanatçıkların verimlerini bulmuştur.

Düzgün dairesel bir kanatçıktaki en uygun ölçüler, Bessel fonksiyonları kullanılarak Brown [8] tarafından analitik olarak incelenmiştir. Hesaplanmış bazı sonuçlardaki kanatçık özelliklerini ifade eden parametreler ile ısı transfer katsayısını ifade eden parametreler grafiksel olarak verilmiş, grafiğin daha iyi yorumlanabilmesi için farklı kanatçık malzemelerin kullanıldığı bir uygulama yapılmıştır. Kanatçıkta kullanılan malzemenin fiziksel özellikleri ile bu kanatçıklardaki en uygun ölçüler tablo halinde verilmiştir. Bu tabloya göre kanatçık seçiminde ağırlığa yada hacme göre hangi malzemenin kullanılması gerektiği önerilmiştir.

Tabanında sıcaklığın periyodik olarak değiştiği düz bir kanatçıktaki ısı transferi, sıcaklık dağılımı ve kanatçık verimi Yang [9] tarafından analitik olarak incelenmiştir. Isı iletim sürecini yöneten fiziksel parametreleri tanımlamıştır. Periyodik sıcaklık değişiminin ısı akışına, kanatçık verimine ve kanatçıktaki sıcaklık dağılımına olan etkisi gösterilmiştir.

Yang'ın çalışması dairesel kanatçıklar için Aziz [10] tarafından genişletilmiştir. Bessel fonksiyonlarını kullanarak sıcaklık dağılımı, ısı akışı ve ortalama zaman kanatçık verimi için analitik sonuçlar elde etmiştir. Yang'ın çalışmasındaki fiziksel parametrelere ek olarak geometrik parametrenin de sıcaklık dağılımı, ısı akışı ve kanatçık verimine olan etkisini incelemiş ve grafiksel olarak gösterilmiştir.

Sıcaklıkla değişen ısıl iletkenliğe sahip, düz bir kanatçıktaki sıcaklık dağılımı ve

kanatçık verimi Aziz ve Hug [11] ile Krane [12] tarafından Pertübrasyon yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Pertübrasyon yönteminin doğruluğunu kontrol etmek için problem sayısal olarak da çözümlenip karşılaştırması grafiksel olarak verilmiştir. Ayrıca optimum kanatçık parametresi ile ısı iletkenlik parametresi arasındaki ilişki grafiksel olarak verilmiştir.

Aziz ve Hug'un [11] yapmış olduğu çalışma, Muzzio [13] tarafından Galerkin yöntemi kullanılarak incelenmiş ve bu tür problemin çözümünde farklı bir yöntem sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar pertübrasyon ve sayısal yöntemlerle grafiksel olarak karşılaştırılmıştır.

Değişken ısı iletkenliğe ve ısı iletim katsayısına sahip trapez profilli dairesel bir kanatçıktaki en uygun ölçüler Razelos ve Imre [14] tarafından Verner'in beşinci ve altıncı derece Runge-Kutta formülüne dayalı bir program yardımı ile sayısal olarak incelenmiştir. Belirli değerlerdeki ısı iletim katsayısı ve belirli aralıktaki ısı transfer katsayısı için sonuçlar grafiksel olarak elde edilmiş, bazı malzemelerin kullanıldığı kanatçıklardaki en uygun ölçüler, hem sabit kalınlıktaki kanatçık hem de trapez profile sahip kanatçık için tablo halinde sunulmuştur. Sabit ısı iletim katsayısı için en uygun taban kalınlığı ve kanatçık hacminin malzemenin ısı iletkenliği ile ters orantılı olduğu ve en uygun uzunluk ile kanatçık etkinliğinin kullanılan malzemelerin özelliklerinden bağımsız olduğu sonucuna varılmıştır.

Sabit ısı özelliklere sahip dört farklı tipteki kanatçıkta (sabit, üçgen, parabolik ve hiperbolik profilli) sıcaklık dağılımı, kanatçık verimi ve en uygun boyutları Ullmann ve Kalman [15] tarafından sayısal olarak incelenmiş, dört kanatçık modeli içerisinde en verimli olan kanatçıkların parabolik kanatçıklar olduğu sonucuna varılmıştır.

Düzgün yapıdaki dairesel kanatçıktaki kanatçık uç sıcaklıklarının daha hızlı ve kolay bir şekilde belirlenebilmesini sağlayan, termogeometrik parametre ve yarıçap oranına bağlı bir korelasyon denklemi Campo ve Harrison [16] tarafından oluşturulmuş ve bu korelasyon denklemindeki sabitlerin belirli yarıçap oranlarındaki değerleri tablo halinde verilmiştir.

Değişken profilli ve sıcaklığa bağlı değişen ısı iletkenliğe sahip dairesel kanatçığın



en uygun boyutları Zubair vd. [17] tarafından IMSL ve FSQP paket programları kullanılarak sayısal olarak incelenmiştir. Sonuçlar grafiksel olarak ve standart istatistiksel tekniklerle elde edilen regresyon denklemleri ile sunulmuştur. En uygun verimin parabolik profile sahip dairesel kanatçıklarda elde edildiğine ve değişken profilli kanatçıklar için ısı iletkenliğinin, boyutsuz olan en uygun ölçüler üzerindeki etkisinin ihmal edilebileceği sonucuna varılmıştır.

Dairesel bir kanatçıkta, kontrol parametreleri açısından kanatçık verimi ve uç sıcaklığı Campo ve Stuffle [18] tarafından sembolik hesaplamalı matematik kullanılarak kolay ve bütünlük korelasyon denklemleri şeklinde sunulmuştur.

Tabanında zamanın üstel fonksiyonu olarak azalan ısı akısına maruz kalan dairesel bir kanatçıktaki geçici ısı gerilmeleri Wu [5] tarafından incelenmiştir. Enerji denkleminde elde edilen boyutsuz kısmi diferansiyel denklem, Laplace dönüşümü kullanılarak adi diferansiyel denkleme dönüştürülmüştür. Boyutsuz sıcaklık dağılımı Laplace uzayında Keller ve Keller'in üstel benzeri çözüm tekniği ile elde edilmiştir.

Isı iletkenliğinin sıcaklıkla, ısı transfer katsayısının ise yarıçap ile değiştiği, yüzeyinde ve kanatçık ucunda konveksiyon ve ışıma ile ısı transfer durumunun olduğu dairesel bir kanatçıktaki ısı gerilmeleri Yu ve Chen [19] tarafından incelenmiştir. Kanatçıktaki sıcaklık dağılımı denklemi, enerji denge denkleminde elde edilen lineer olmayan diferansiyel denklemin Taylor dönüşüm metodu kullanılarak çözülmesi ile elde edilmiştir. Elde edilen sıcaklık denklemi elastisite teorisi ile birleştirilmesi neticesinde kanatçıktaki gerilmeler bulunmuştur.

Yüzeyinde ve kanatçık ucunda konveksiyon ve ışıma ile ısı transfer durumunun olduğu dairesel bir kanatçıktaki geçici ısı gerilmeleri Yu ve Chen [20] tarafından incelenmiştir. Kanatçıktaki sıcaklık dağılımı, enerji denge denkleminde elde edilen kısmi diferansiyel denklemin Taylor dönüşümü ve sonlu farklar yaklaşımının birleşimi olan hibrid bir yöntem kullanılarak elde edilmiştir. Sıcaklığın bir fonksiyonu olan gerilme denklemleri termoelastik teorisinin kullanılması ile elde edilmiştir. Elde edilen sıcaklık dağılımları, gerilme denklemlerinde yerlerine yazılarak sıcaklığa bağlı radyal ve teğetsel gerilmeler elde edilmiştir. Mevcut yöntemin uygulanabilirliğini göstermek için sayısal bir örnek verilmiş ve her üç ısı yayılımı mekaniz-

ması (sadece konveksiyon, sadece ışıma, konveksiyon-ışıma) için de bu sayısal örnekteki değerlere göre sıcaklık dağılımları, radyal ve teğetsel gerilmeleri grafiksel olarak verilmiştir.

Tabanında kademeli sıcaklık değişimine maruz kalan, konvektif-radiatif ısı transfer durumlarının olduğu dikdörtgen profilli dairesel bir kanatçıktaki geçici sıcaklık dağılımları Yu ve Chen [21] tarafından incelenmiştir. Enerji denge denkleminde elde edilen lineer olmayan diferansiyel denklem ile sınır koşulları Taylor dönüşümü ve sonlu farklar yaklaşımından oluşan hibrid bir yöntem kullanılarak çözülmüştür.

Kademeli kalınlık değişiminin olduğu dairesel bir kanatçıktaki sıcaklık dağılımı ve en uygun boyutları Kundu ve Das [22] tarafından incelenmiştir. Kanatçıktaki sıcaklık dağılımları Bessel fonksiyonları yardımı ile analitik olarak bulunmuştur. Belirli bir hacimde transfer edilecek en yüksek ısı miktarının elde edildiği boyutlar yada transfer edilen belirli bir ısı miktarında en düşük hacmin elde edildiği boyutlar Lagrange çarpanı tekniği ile elde edilmiştir. Belirli bir hacimde, sabit kalınlıktaki dairesel kanatçıklara göre kademeli kalınlık değişiminin olduğu dairesel kanatçıklarda daha fazla ısının transfer edildiğini kanıtlamışlardır.

Isıl iletkenliğin sıcaklıkla değiştiği dikdörtgen profilli uzunlamasına kanatçıklardaki sıcaklık dağılımı, verim ve en uygun uzunluk Chiu ve Chen [23] tarafından yaklaşık analitik sonuç veren Adomian Ayırıştırma yöntemi kullanılarak bulunmuştur. Elde edilen sonuçlar, Newton'un doğrusallaştırma şemasını kullanan sonlu farklar yöntemiyle elde edilmiş sayısal çözüm, Aziz ve Hug [11]'un Pertübrasyon çözümü ve Muzzio'nun [13] yaklaşık sonuç veren Galerkin çözümü ile karşılaştırılmış ve yüksek bir doğrulukla sonuçların elde edildiği görülmüştür.

Tabanında zamanın üstel bir fonksiyonu olarak azalan ısı akısına aniden maruz kalan dairesel bir kanatçığın termoelastik davranışı, Yang ve Chu [24] tarafından incelenmiştir. Enerji denge denkleminde termomekanik birleştirme etkisi göz önünde bulundurulmuştur. Enerji denge denkleminde elde edilen kısmi diferansiyel denklem Laplace dönüşümü ile adi diferansiyel denkleme dönüştürülmüş ve Bessel fonksiyonları yardımı ile Laplace uzayında sıcaklık dağılımı ve gerilmeler elde edilmiştir. Fourier dönüşümünü uygulanarak zaman uzayındaki sıcaklık dağılımı ve gerilmeler

elde edilmiştir. Bazı boyutsuz parametrelerin ve termomekanik birleştirme etkisinin sıcaklık dağılımı, radyal ve teğetsel gerilme üzerine olan etkileri incelenmiştir.

Isı transfer katsayısı kanatçık yarıçapına bağlı değişen, tabanında zamanın üstel bir fonksiyonu olarak azalan, ısı akısına aniden maruz kalan, termomekanik davranışının da dikkate alındığı dairesel bir kanatçıktaki geçici ısı gerilmeler Lee vd. [25] tarafından incelenmiştir. Kanatçık üzerindeki sıcaklık ve gerilme denklemleri Laplace dönüşümü ve sonlu farklar yönteminin birleşimi olan hibrid bir yöntem kullanılarak Laplace uzayında bulunmuş, daha sonra matris benzerlik dönüşümü yöntemi ve Fourier serileri kullanılarak gerçek uzaya dönülmüştür.

Isıl iletkenliğin sıcaklıkla değiştiği, yüzeyinde ve ucunda konveksiyon ve ışımayla ısı yayılımının olduğu, lineer olmayan sınır koşulları altındaki dairesel bir kanatçıktaki ısı gerilmeler Chiu ve Chen [26] tarafından incelenmiştir. Sıcaklık dağılımı, sınır değer problemini eşdeğer başlangıç formülasyonuna dönüştürebilen, Adomian Çift Ayrıştırma yöntemi ile çözülmüş ve literatürde mevcut olan çalışmalarla kıyaslanarak kullanılan metodun kullanışlı ve pratik bir metot olduğu sonucuna varılmıştır. Kanatçıktaki ısı gerilmeler ise doğrudan integrasyon yöntemi ile elde edilmiştir.

Isıl iletkenliğin sıcaklıkla değiştiği, periyodik ısı transferi sınır koşulu altındaki bir dairesel kanatçıkta geçici ısı gerilmeler Chiu ve Chen [27] tarafından incelenmiştir. Sıcaklık dağılımı Adomian Ayrıştırma yöntemi ile yaklaşık olarak çözülmüş, Aziz'in [10] sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Geçici ısı gerilmeler ise direk integrasyon yöntemi ile elde edilmiştir. Sıcaklık ve ısı gerilmelerdeki salınım, genliğine ve faz açısına etki eden parametreler tanımlanmış ve bunların etkileri tartışılmıştır.

Bölgesel olarak değişken ısı transferinin olduğu, doğal konveksiyona maruz kalan farklı profil tiplerindeki dairesel kanatçıkların ısı performansı sonlu farklar yöntemi ile sayısal olarak Mokheimer [28] tarafından incelenmiştir. Dört farklı profil(dikdörtgen, üçgen, hiperbolik, parabolik) için de bölgesel olarak değişen ısı transfer katsayısına bağlı boyutsuz parametre ve kanatçık boyutlarına göre kanatçık verimleri grafiksel olarak verilmiş, elde edilen sonuçlar literatürde bulunan analitik ve sayısal sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Elde edilen verim sonuçları literatürde mevcut olan sonuçlardan daha yüksek çıkmıştır.

Tabanında yoğuşma olan, dikdörtgen profilli, uzunlamasına bir kanatçıktaki sıcaklık dağılımı Bertola ve Cafaro [29] tarafından analitik yöntemler kullanılarak çözülmüştür. Kanatçığın her iki ucunda sıcaklığın sabit olup, tabanında sabit bir ısı akısı olduğu düşünülmüştür. Tabanındaki ısı akısına bağlı olarak kanatçığın uzunluğu için bir veya iki çözümün yada hiç çözümün olmadığı sonucuna varılmıştır. Kanatçık uzunluğunun tabandaki ısı akısına göre iki çözümünün olabileceği Soliman ve Elazhary [33] tarafından kanıtlanmıştır.

Dairesel bir kanatçığın tabanındaki azalan ısı akısı, tersine problemin Lee ve Yang [30] tarafından ekli denklemlerin kullanıldığı Birleşik Gradyanların Minimizasyon yöntemi ile çözümlenmiştir. Ortam içerisindeki herhangi bir noktadan ölçülen geçici sıcaklıklar kullanılarak tabandaki ısı akısı belirlenmiştir. Aynı zamanda sıcaklık dağılımları ve ısıl gerilme dağılımları da elde edilmiştir. Isı iletim denkleminde termomekanik birleştirme etkisi dikkate alınmış ve ısı transfer katsayısının kanatçık yarıçapının bir fonksiyonu olduğu düşünülmüştür. Tersine hesaplamaların doğruluğu ortamın içinde elde edilmiş, modellenen ve kesin olmayan ölçümler kullanılarak incelenmiş ve mükemmel sonuçlar verdiği belirtilmiştir.

Isıl olarak simetrik olmayan sınır koşullarında, dikdörtgen kesitli, iki boyutlu ısı transferinin olduğu dairesel kanatçıktaki en uygun ölçüler Arslantürk [31] tarafından araştırılmıştır. Sıcaklık dağılımı ve ısı transfer hızını analitik olarak hesaplamıştır.

Isıl olarak simetrik olmayan, dikdörtgen profilli, konvektif-radiatif ısı transfer durumundaki dairesel bir kanatçıktaki en uygun tasarım Kang ve Look [32] tarafından İki Boyutlu Analitik Metot ve Artımlı Araştırma Metoduna dayalı bir yöntemle incelemiştir. Sabit kanatçık yüksekliğinde en uygun ısı kaybı ve kanatçık uç yarıçapı, kanatçık üst konveksiyon karakteristik sayısının bir fonksiyonu olarak bir boyutlu ve iki boyutlu analitik yöntemle elde edilirken sabit hacim durumunda, kanatçık uç yarıçapının pratik sınırlardaki maksimum ısı kaybı Artımlı Araştırma Metodu kullanılarak bulunmuştur.

FDM'den yapılmış dikdörtgen profilli dairesel bir kanatçıktaki ısıl performans Aziz ve Rahman [34] tarafından incelenmiştir. Sıcaklık dağılımı, ısı transfer hızı, kanatçık verimi ve kanatçık etkinliği Airy dalga fonksiyonu, Bessel fonksiyonu, hiperbo-

lik fonksiyon yada kuvvet fonksiyonu şeklinde analitik olarak elde edilmiştir. Isıl iletkenliğin radyal yöndeki değişiminin performans üzerine olan etkileri gösterilmiş, en yüksek verimin ısıl iletkenliğin yarıçapın karesi ile ters orantılı olduğu durumda elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar ortalama bir ısıl iletkenliği kullanılarak türetilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Bazı durumlarda ortaya çıkan yüksek hatalar nedeni ile ortalama ısıl iletkenlik modelinin kullanılmaması tavsiye edilmiştir.

Dikdörtgen profilli dairesel bir kanatçıkta sıcaklık dağılımı ve kanatçık verimi Iborra ve Campo [35] tarafından ortalama değer teoremi kullanılarak yaklaşık olarak hesaplanmıştır. Ortalama değer teoremi ve Bessel fonksiyonlarının kullanıldığı analitik yöntemle elde edilen sonuçlar grafiksel olarak karşılaştırılmıştır. Kanatçık verimi ile ilgili literatürde bulunan yaklaşık çözümler ile ortalama değer teoreminin hata oranları tablo şeklinde verilmiş ve pratik uygulamalarda ortalama değer teoreminin uygulanabileceği sonucuna varılmıştır.

Trapez profilli dairesel bir kanatçığın optimizasyonu Kang ve Look [36] tarafından iki boyutlu analitik yöntemle yeni bir yaklaşım getirerek incelenmiştir. Dairesel kanatçıklarda iki boyutlu analiz yapılırken silindirik koordinatlardan oluşmuş bir denklem ve kartezyen koordinatlardan oluşan dört sınır koşulu varken yeni yaklaşımda, diferansiyel denklem ve üç sınır koşulu kartezyen koordinatlarda oluşurken bir sınır koşulu silindirik koordinatlarda oluşmuştur. Yeni yaklaşımın doğruluğunu göstermek için dikdörtgen profilli dairesel kanatçıklarda elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmış ve dairesel kanatçıklarda uygulanabileceği sonucuna varılmıştır. Trapez profilli dairesel kanatçıklarda en uygun tasarım üzerine etkisi olan bazı parametrelerden bahsedilmiş ve bu parametrelerin sabit hacimli bir kanatçıkta ısı kaybının artırılması için nasıl değişmesi gerektiğinden söz edilmiştir.

Isıl iletkenliğin sıcaklıkla değiştiği dairesel bir kanatçığın en uygun tasarımını için korelasyon denklemleri Arslantürk [37] tarafından oluşturulmuştur. Lineer olmayan diferansiyel denklem Adomian Ayrıştırma yöntemi ile çözümlenmiş sıcaklık dağılımı elde edilmiştir. Metodun doğruluğunu göstermek için sonlu farklar yönteminin kullanıldığı sayısal sonuçlar ile analitik çözüm karşılaştırılmıştır. En uygun kanatçık ölçüleri ve maksimum ısı transferini tanımlayan korelasyon denklemleri Biot sayısı,

boyutsuz kanatçık hacmi ve ısı iletkenlik parametresine bağlı olarak ifade edilmiştir. Bu sabitlerin farklı ısı iletkenlik parametresine göre değerleri tablolar halinde verilmiştir.

Tabanında yoğuşma olması sebebi ile tabanında sabit sıcaklığa ve sabit ısı akısına maruz kalan dikdörtgen, trapez, konkav ve parabolik uzunlamasına kanatçıklar da kanatçık ucunun izole edildiği ve izole edilmediği iki farklı durumdaki sıcaklık dağılımı Aziz ve Fang [38] tarafından Bessel fonksiyonları kullanılarak analitik olarak incelenmiştir. Kanatçık ucunun izole edildiği durumda üç farklı profil içinde boyutsuz ısı akısı, kanatçık parametresi ve boyutsuz uç sıcaklığı arasındaki analitik ilişki verilirken, kanatçık ucunun izole olmadığı durumda ise boyutsuz ısı akısı, kanatçık parametresi ve kanatçık ucu Biot sayısı arasındaki ilişki verilmiştir. Analitik çözümlerin doğruluğu her üç profil içinde sayısal yöntemler kullanılarak sağlanmıştır.

Isı iletkenliğin sıcaklıkla değiştii dairesel bir kanatçıktaki sıcaklık dağılımı Ganji vd. [39] tarafından yaklaşık analitik bir çözümler olan Homotopi Pertübrasyon yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Bulunan sonuçlar literatürdeki sayısal sonuçlar ile karşılaştırılmış ve homotopi pertübrasyon yönteminin doğrusal olmayan diferansiyel denklemler için oldukça doğru sonuçlar verdiği sonucuna varılmıştır.

Kuru, ıslak ve hafif nemli yüzey durumundaki dairesel bir kanatçıktaki sıcaklık, kanatçık verimi ve ısı transfer kapasitesi Qian [40] tarafından Düzenli Pertübrasyon yöntemi kullanılarak incelenmiştir.

Isı iletkenliğin sıcaklıkla değiştii, yüzeyinde ısı yayılımının konveksiyon ve ışınım ile olduğu dairesel bir kanatçıktaki sıcaklık dağılımı Peng ve Chen [41] tarafından diferansiyel dönüşüm ve sonlu farklar metodunun kullanıldığı hibrid bir sayısal yöntem ile incelemiştir.

Fonksiyonel derecelendirilmiş dairesel bir kanatçıkta, bazı ölçüm noktalarında ölçülen sıcaklık bilgisine göre tabanında zamana bağlı değişen ısı akısı Lee vd. [42] tarafından Birleşik Gradyanlar Metodu ve Farklılık prensibine dayanan bir ters algoritma kullanılarak elde edilmiştir. Aynı zamanda kanatçıktaki sıcaklık dağılımı da belirlenmiştir. Ölçüm hatalarının ve ölçüm bölgesinin hesaplanan sonuçlara etkisi

araştırılmıştır. Elde edilen sayısal sonuçlar, kullanılan yöntemin zamana bağlı değişen ısı akısı ve ortamdaki sıcaklık dağılımının kaçınılmaz ölçüm hatalarına rağmen doğru bir şekilde tahmin edildiğini göstermiştir.

FDM'den yapılmış, sabit alanlı, tabanında sıcaklık değişiminin kademeli olduğu, geçici durumdaki ısı performans Khan ve Aziz [43] tarafından sayısal olarak incelenmiştir. Kanatçık boyunca ısı iletkenliğinin lineer, quadratik yada eksponansiyel gibi üç farklı şekilde değiştiği düşünülmüştür. Maple paket programı ile elde edilen sayısal çözümlerin doğrulanması, problemin kararlı durumdaki analitik çözümü ve Maple programdaki sayısal çözümün karşılaştırılması ile sağlanmıştır. Isıl iletkenliğin üç farklı şekildeki derecelendirilmesi araştırılmış, eksponansiyel değişimin hem kararlı hem de değişken durumda daha iyi kanatçık verimi verdiği ortaya konulmuştur.

Tabanının konvektif olarak ısındığı, kanatçık yüzeyi ve ucunun konvektif-radiatif olarak soğuduğu, üniform iç ısı üretiminin olduğu, homojen malzemenin ve FDM'den yapılmış dairesel kanatçıklardaki ısı performansı Aziz vd. [44] tarafından diferansiyel dönüşüm metodu kullanılarak incelenmiştir. Homojen malzemenin yapılmış dairesel kanatçıktaki ısı iletkenlik sıcaklıkla değişirken, FDM malzemenin yapılmış kanatçıktaki ısı iletkenliğinin radyal koordinata göre değiştiği kabul edilmiştir. Diferansiyel dönüşüm metodunun doğruluğunu göstermek için daha basit modeldeki analitik çözüm diferansiyel dönüşüm yöntemi ile elde edilen sonuçla karşılaştırılmıştır. Değişik boyutsuz parametrelerin her iki malzeme için de kanatçıktaki ısı performansına olan etkisi gösterilmiştir.

Kanatçık yüzeyinde ve ucunda konveksiyon ve ışıma ile ısı yayılımının olduğu, ısı iletkenliğinin sıcaklıkla değiştiği, dikdörtgen profilli dairesel bir kanatçıktaki ısı gerilmeleri ve sıcaklık dağılımları Wang vd. [45] tarafından Hibrid Ara Değer Fark yöntemi kullanılarak sayısal olarak incelenmiştir.

Üniform olmayan sıcaklık değişimine maruz kalan FDM'den yapılmış dönen bir diskteki termoelastik analiz, Tütüncü ve Temel [46] tarafından incelenmiştir. Termomekaniksel özelliklerin, kalınlığın ve sıcaklığın konumsal olarak değiştiği olayı yöneten diferansiyel denklemler, değişken katsayılı olarak elde edilmiş ve bu diferan-

siyel denklemler sayısal bir yöntem olan Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu (TFM) ile çözülmüştür. Yöntemin doğruluğu, homojen malzemedeki yapılmış dönen diskteki analitik çözüm ile TFM çözümünü karşılaştırılması ile test edilmiştir. TFM'nin dönen disklerde ısı iletimi ve termoelastik analizinde verimli bir şekilde kullanılabilceği gösterilmiştir.

FDM'den yapılmış dairesel bir kanatçıktaki ısı performans Hassanzadeh ve Pekel [47] tarafından ortalama değer teoremini kullanılarak çözülmüştür. Yöntemin doğruluğunu göstermek için homojen malzemedeki analitik çözüm ile homojensizlik katsayısının sıfır olduğu FDM'deki yaklaşık çözüm karşılaştırılmıştır. Homojensizlik katsayısı ve termogeometrik parametrenin sıcaklık dağılımı, kanatçık verimi ve kanatçık uç sıcaklığına etkisi grafiksel olarak gösterilmiştir. Homojensizlik katsayısının ısı transferinin iyileştirilmesinde önemli bir rol oynadığı fakat büyük yarıçap oranlarında homojensizlik katsayısının etkisinin azaldığı sonucuna varılmıştır.

Elastisite modülünün, ısı iletkenliğinin, yoğunluğunun, özgül ısının ve genişleme katsayısının radyal yönde konuma göre değiştiği FDM'den yapılmış kalın cidarlı sonsuz uzunluktaki bir silindirde, hiperbolik ısı iletim teorisine dayanan ve zamana bağlı olarak değişen ısı gerilmeleri, Pekel [48] tarafından Laplace dönüşümü, Durbin'in ters Laplace dönüşüm yöntemi ve Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu kullanılarak çözülmüştür. FDM'den yapılmış sonsuz uzunluktaki silindirde ısı davranışı yöneten diferansiyel denklem, Laplace uzayında TFM kullanılarak sayısal olarak çözülmüş daha sonra Honig-Hirdes algoritmasını kullanan Durbin'in ters Laplace dönüşümü kullanılarak gerçek uzaydaki zamana bağlı sıcaklık dağılımları bulunmuştur. Isıl gerilmeleri yöneten diferansiyel denklemler ise yine TFM kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Radyal gerilmenin, radyal deplasmanın, sıcaklık ve ısı akısının zamana bağlı değişimleri grafiksel olarak sunulmuştur.

FDM'den yapılmış, sabit ağırlıklı, parabolik dairesel bir kanatçıktaki performans Gaba vd. tarafından kanatçık kalınlığının kuvvet kuralı [49] ve eksponansiyel [52] olarak değiştiği iki farklı durum için incelenmiştir. Kanatçık ağırlığı sabit tutulup derecelendirme parametreleri ile profil parametreleri değiştirilerek elde edilen farklı FDM kanatçıklardaki sıcaklık dağılımı, verim ve etkinlik belirlenmiş ve birbirleriyle



karşılaştırılmıştır. Bütün profiller ve derecelendirilmiş malzeme için ikinci dereceden adi diferansiyel denklemler türetilmiştir. Elde edilen diferansiyel denklemler Matlap paket programı kullanılarak çözülmüştür. Farklı profil ve derecelendirme kombinasyonundaki dairesel kanatçıkların verimleri ve etkinlikleri belirlenmiş ve grafikleri oluşturulmuştur. Profil ve derecelendirme parametrelerinin kanatçık performansına olan etkileri tartışılmıştır.

Dairesel bir kanatçıkta verilen bir ısı gerilmeyi karşılayabilecek Biot sayısı ve ısı genleşme gibi bilinmeyen parametreler Mallick ve Das [50] tarafından ters bir yaklaşım uygulanarak belirlenmiştir. Kanatçıktaki sıcaklık değişimi, enerji denge denkleminin düzenli pertübrasyon yöntemi ile uygun sınır koşullarında çözülmesiyle bulunmuştur. Sıcaklığa bağlı gerilmeler, elastik teori ve sıcaklığın yarı analitik çözümünün birleştirilmesi ile elde edilmiştir. ısı genleşme ve Biot sayısının sıcaklık dağılımı ve gerilmeler üzerine olan etkilerinden bahsedilmiştir. Mevcut yöntemle bulunan gerilme sonuçları Chiu ve Chen [26]'ın elde ettiği sonuçlar ile grafiksel olarak karşılaştırılmıştır. Elde edilen ısı gerilme verileri kullanılarak Biot sayısı ve ısı genleşme parametresinin farklı kombinasyonları Nelder-Mead Simplex Search metodunun kullanıldığı tersine bir teknikte bulunmuştur.

Tabanında zamanın eksponansiyel fonsiyonu olarak azalan ısı akısına maruz kalmış bir dairesel kanatçıkta geçici ısı gerilmeler Baş ve Keleş [51] tarafından incelenmiştir. Sıcaklık dağılımı Laplace uzayında analitik olarak çözülmüş, sayısal bir ters dönüşüm metodu olan modifiye Dürbin metodu kullanılarak gerçek uzaydaki sıcaklık dağılımları elde edilmiştir. Sıcaklığa bağlı gerilmeler elastik teori ve sıcaklık dağılımlarının birleştirilmesi ile elde edilmiştir. Bulunan sıcaklık dağılımları ve gerilmeler, Wu [5]'nin elde ettiği analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Isıl iletkenliğin sıcaklıkla değiştiği dairesel bir kanatçıktaki ısı gerilmeler, Mallick vd. [4] tarafından analitik bir yaklaşım ile çözülmüştür. Kanatçıktaki sıcaklık dağılımları Homotopi Pertübrasyon yöntemi kullanılarak bulunmuş ısı gerilmeler ise direk integrasyon ile elde edilmiştir. Bazı ısı ve geometrik parametrelerin sıcaklık dağılımları ve gerilmeler üzerine olan etkileri incelenmiştir. Kullanılan yöntemle elde edilen sıcaklık dağılımları ve gerilmeler literatürde mevcut olan sonuçlarla

karşılaştırılmış ve homotopi pertübrasyon yönteminin kullanışlı ve uygun bir yöntem olduğu sonucuna varılmıştır.

FDM'den yapılmış değişken kalınlıktaki dairesel bir kanatçıkta, sadece kanatçık ucundan alınan sıcaklık ölçümleri kullanılarak tabanında bilinmeyen, zamana bağlı değişen ısı akısı Haghghi [53] tarafından Birleşik Gradyanlar Metodu ve Artımlı Diferansiyel Quadrature Metodu yardımı ile ters bir ısı iletim prosedürü kullanılarak belirlenmiştir. Yüksek sıcaklık değişimleri ve yüksek ısı akılarının olduğu problemleri doğru bir şekilde modellemek için Fourier olmayan ısı transfer denklemine dayalı bir ısı iletim formülasyonu oluşturulmuştur. Çalışmada sunulan örnekler, kullanılan yöntemin geçerli bir doğrulukla ve daha az hesaplama zamanı ile bilinmeyen ısı akısını belirlediğini göstermiştir.

Isıl iletkenliğin sıcaklıkla değiştiği, hiperbolik profilli dairesel bir kanatçıktaki sıcaklık dağılımı ve ısı verimi Darwishi vd. [54] tarafından pseudospectral yöntem kullanılarak sayısal olarak hesaplanmıştır. Kanatçık boyutları, yüzey taşınım katsayısı ve ısı iletkenliğin ısı performans üzerine olan etkisi grafiklerle gösterilmiştir. Elde edilen sayısal sonuçlar literatürde mevcut olan sabit ısı iletkenliğe sahip analitik çözüm ile karşılaştırılarak yöntemin doğruluğu gösterilmiştir. Isıl iletkenliğin sıcaklık ile değişiminin, sıcaklık dağılımı ve ısı performansa etkisi grafiksel olarak gösterilmiştir.

Konveksiyon, ışıma yada bunların kombinasyonu olan konveksiyon-ışıma gibi farklı ısı yayılım mekanizmaları altında, ısı iletkenliğin sıcaklıkla değiştiği ve değişken termogeometrik kanatçık parametresinin olduğu dairesel bir kanatçıktaki sıcaklık dağılımı, ısı transferi ve kanatçık verimi Roy ve Ghosal [55] tarafından homotopi pertübrasyon yöntemini kullanılarak incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar her üç durum için de Peng ve Chen [32] ile Chiu ve Chen [26] 'nin sonuçları ile karşılaştırılırken, sadece konveksiyon olduğu durumda analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Optimizasyonda kullanılan boyutsuz parametreler tanımlanmış ve bunların kanatçık verimi üzerindeki etkileri tartışılmıştır.

Önceden bilinen belirli bir gerilme dağılımında, dairesel bir kanatçıktaki bilinmeyen ısı iletkenlik, termogeometrik ve ısı genişleme parametreleri Mallick vd. [56]

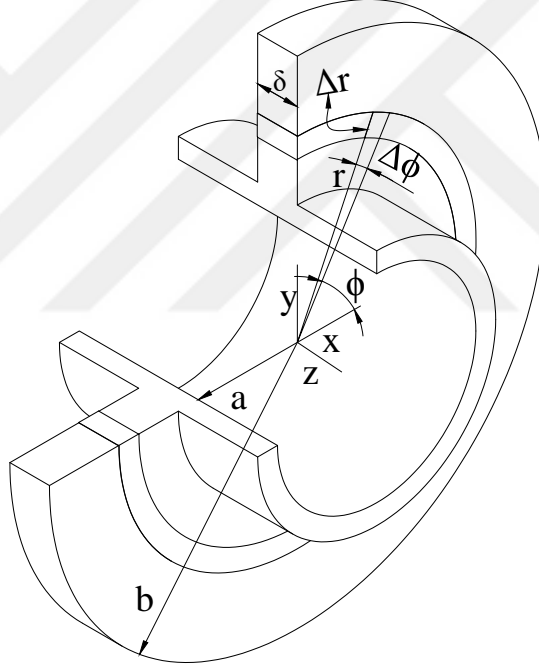
tarafından Nelder-Mead Minimizasyon tekniği kullanılarak tersine çözümler elde edilmiştir. Isıl iletkenliğin, bölgesel sıcaklığın lineer bir fonksiyonu olarak değiştirdiği düşünölmüştür. Kanatçıktaki ısıl gerilmeler, homotopi pertübrasyon çözümlerine dayalı sıcaklık dağılımlarının termoelastik teoriye entegrasyonu sonucunda elde edilmiştir. HPM sonuçları literatürde bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Isıl parametrelerin sıcaklık dağılımlarına ve gerilmelere olan etkisi incelenmiştir. Bulunan gerilmelerde bu ısıl parametrelerin farklı kombinasyonları oluşturulmuştur. Bu gerilmelerde fin verimliliği, kompaktlık ve uygun maliyetli kanatçık malzemesine dayanan, en uygun kanatçık parametrelerinin seçilebileceği belirtilmiştir.

Isı yayılımının konveksiyon ve ışıma ile olduğu, sıcaklıkla değişen hacimsel ısı üretimine sahip dairesel kanatçıktaki sıcaklık dağılımları, ısı transferi, kanatçık verimi ve kanatçık optimizasyonu Kundu [57] tarafından incelenmiştir. Enerji denkleminde bulunan doğrusal olmayan terim yaklaşık olarak doğrusallaştırılmış ve denklemin Bessel fonksiyonları yardımı ile tam çözümü elde edilmiştir. Aynı zamanda bu yaklaşık denklem Ortalama Değer Teoremi kullanılarak yaklaşık olarak çözülmüştür. Diğer taraftan lineerleştirme olmadan Diferansiyel Dönüşüm metodu kullanılarak sıcaklık dağılımlarının tam çözümü elde edilmiştir. Isı üretiminin olduğu kanatçıkta Fourier kanununa dayalı diferansiyel yaklaşım yerine integral yaklaşımını kullanarak transfer edilen ısı miktarı bulunmuştur. Kullanılan yöntemlerin doğruluğunu göstermek için mevcut çalışmadaki problem Sonlu Farklar Yöntemi, Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi, Bessel fonksiyonları ve Ortalama Değer Teoremi ile çözülmüş ve elde edilen verim sonuçları grafiksel olarak verilmiştir. Newton-Raphson yöntemi kullanılarak kanatçıktaki en uygun boyutsuz kalınlığı ve en uygun boyutsuz iç çapı veren denklemler oluşturulmuştur. Bir çok boyutsuz parametre tanımlanmış ve bu parametrelerin kanatçık performansına olan etkileri incelenmiştir.

### 3. SICAKLIK DAĞILIMININ BELİRLENMESİ

Sıcaklık farkı bulunan iki ortam arasında ısı transferini artırmak için kullanılan dairesel bir kanatçıktaki (Şekil 3.1) enerji denge denkleminin en genel hali, enerji korunumu yasası olarak da bilinen termodinamiğin birinci kanunundan aşağıdaki gibi elde edilir [58].

$$\left( \begin{array}{c} \text{Kanatçıkta} \\ \text{biriken enerji} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Kanatçığa giren} \\ \text{enerji} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Kanatçık içinde} \\ \text{üretilen enerji} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Kanatçıktan çıkan} \\ \text{enerji} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Kanatçıkta tüketilen} \\ \text{enerji} \end{array} \right)$$



Şekil 3.1 Dairesel bir kanatçığın şekli.

Kanatçık tabanından, kanatçığa giren enerji iletim yolu ile olurken, enerji çıkışı ise kanatçık yüzeyinden ışıma ve taşınım ile olur. Buna göre yukarıdaki ifade birim zamanda ve sembolik olarak düzenlenirse enerji denge denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\dot{Q}_{iletim} + \dot{Q}_u - \dot{Q}_{tasınım} - \dot{Q}_{ışıma} + \dot{Q}_t = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (3.1)$$

Burada,  $\dot{Q}_u$  birim zamanda kanatçık içinde üretilen enerjiyi,  $\dot{Q}_t$  ise birim zamanda kanatçık içinde tüketilen enerjiyi göstermektedir.

Şekil 3.1'de verilen dairesel kanatçıktaki enerji denge denklemini basitleştirmek için şu kabuller yapılmıştır.

1. Kanatçığın aksel olarak simetrik bir yapıya sahip olduğu,
2. Kanatçığın her yerinde kalınlığının aynı olduğu ve bu kalınlığının kanatçık çapına göre çok küçük olduğu,
3. Kanatçık yüzeyinde sadece taşıma ile ısı yayınımlı olduğu, ışıma ile ısı yayınımlının ihmal edildiği
4. Çevre sıcaklığı ve ısı transfer katsayısının sabit olduğu,
5. Kanatçığın herhangi bir noktasında zamana bağlı sıcaklık değişimi olmadığı, yani kanatçığın kararlı duruma ulaştığı,
6. Kanatçık içerisinde herhangi bir ısı kaybı yada üretimi olmadığı,

kabul edilmiştir. Daha önce Gardner [7] ile Ullmann ve Kalman [15]'in da yapmış olduğu bu kabullere ek olarak bu çalışmada ayrıca

7. Kanatçıktaki ısı iletkenliğinin boyutsuz kanatçık yarıçapının kuvvet fonksiyonu olarak derecelendirildiği farz edilmiştir.

3,5 ve 6 no'lu kabullere göre (3.1) no'lu denklem düzenlenirse yeni enerji denge denklemi;

$$\dot{Q}_{iletim} - \dot{Q}_{tasımm} = 0 \quad (3.2)$$

şeklinde elde edilir.

(3.2) no'lu denklemdeki üç boyutlu bir kanatçıkta birim zamanda iletilen ısı;

$$\dot{Q}_{iletim} = \dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} + \dot{Q}_\phi - \dot{Q}_{\phi+\Delta\phi} + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{z+\Delta z} \quad (3.3)$$

şeklindedir.

1 no'lu kabule göre kanatçığın aksenal olarak simetrik olması sebebi ile kanatçıktaki ısı iletimi teğetsel yöndeki iletimden bağımsız olmakta ve 2 no'lu kabule göre kalınlığının çok küçük olması sebebi ile z yönünde iletilen ısı ihmal edilmektedir. Buna göre ısı iletimi;

$$\dot{Q}_{iletim} = \dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} \quad (3.4)$$

şeklinde tek boyutlu ısı iletim denkleminde dönüşmektedir. 2 no'lu kabule göre kanatçık ucu alanının az olması sebebi ile kanatçık ucundan transfer edilen ısı ihmal edilmekte dolayısı ile ısı taşınımını kanatçığın yan yüzeyinde olmaktadır. Sabit çevre ve ısı transfer katsayısı (4 no'lu kabul) kabulünden kanatçıktaki ısı taşınımını;

$$\dot{Q}_{tasinim} = hA_{ts}(T - T_{\infty}) \quad (3.5)$$

şeklindedir. (3.4) ve (3.5) no'lu ısı iletimi ve ısı taşınımını veren denklemler (3.2) no'lu denklemde yazılırsa,

$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} - hA_{ts}(T - T_{\infty}) = 0 \quad (3.6)$$

denklemini elde edilir. Şekil 3.1 de r ile  $\Delta r$  arasında bulunan silindirik parçanın hacmi  $\Delta r$  ile radyal yöndeki yüzey alanı (A) çarpımına eşittir ve şu şekilde gösterilir.

$$V = A\Delta r \quad (3.7)$$

Aynı parçanın hacmi aynı zamanda kanatçık kalınlığı  $\delta$  ve r ile  $\Delta r$  arasında bulunan yan yüzey alanı  $A_s$ 'nin çarpımına eşit olup aşağıdaki gibi gösterilir.

$$V = A_s\delta \quad (3.8)$$

Buna göre kanatçık yan yüzey alanı ile radyal yöndeki yüzey alanı arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$A_s = \frac{A\Delta r}{\delta} \quad (3.9)$$

Isı ile taşınım kanatçığın her iki yüzeyinde olacağından taşınım ile ısının transfer edildiği yüzeyin alanı  $A_{ts}$ ,  $A_s$ 'in iki katına eşit olup,

$$A_{ts} = 2A_s = \frac{2A\Delta r}{\delta} \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilir ve (3.6) no'lu denklemde yerine yazılırsa enerji denklemi;

$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} - h \frac{2A\Delta r}{\delta} (T - T_\infty) = 0 \quad (3.11)$$

formunu alır. Bu denklemin her iki tarafı  $\frac{1}{A\Delta r}$  ile çarpılırsa,

$$\frac{1}{A} \frac{\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r}}{\Delta r} - \frac{2h}{\delta} (T - T_\infty) = 0 \quad (3.12)$$

denklemi elde edilir.  $\Delta r$ 'nin çok küçük olduğu değerlerde, yani

$$\Delta r \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r}}{\Delta r} = \frac{d\dot{Q}_r}{dr} \quad (3.13)$$

olur. Buna göre  $\Delta r$ 'nin çok küçük olduğu değerlerde enerji denklemi;

$$\frac{1}{A} \frac{d\dot{Q}_r}{dr} - \frac{2h}{\delta} (T - T_\infty) = 0 \quad (3.14)$$

şeklini alır. Fourier ısı iletim yasasına göre, radyal yönde iletilecek ısı: ısı iletiminin olduğu yüzey alanı, ısı iletim katsayısı ve ısı akısının çarpımına eşittir ve şu şekilde gösterilir.

$$\dot{Q}_r = kA \frac{dT}{dr} \quad (3.15)$$

(3.15) deki eşitlik (3.14) no'lu denklemde yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{A} \frac{d}{dr} \left( kA \frac{dT}{dr} \right) - \frac{2h}{\delta} (T - T_\infty) = 0 \quad (3.16)$$

denklemi elde edilir.  $r$  ile  $\Delta r$  arasında bulunan radyal yöndeki yüzey alanı  $A$ , bu aralıkta bulunan ortalama yarıçaptaki çemberin çevresi ile kanatçık kalınlığının çarpımına eşit olup aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$A = 2\pi \left( r + \frac{\Delta r}{2} \right) \delta \quad (3.17)$$

$\Delta r, 0$ ' a yaklaşırken radyal yöndeki alan,

$$A = 2\pi r \delta \quad (3.18)$$

değerine yaklaşmaktadır. Elde edilen bu yüzey alanı (3.16) no'lu denklemde A değeri yerine yazılırsa kanatçık iç çapı “a” ile kanatçık dış çapı “b” arasındaki enerji denklemi;

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( kr \frac{dT}{dr} \right) - \frac{2h}{\delta} (T - T_{\infty}) = 0 \quad a < r < b \quad (3.19)$$

şeklinde elde edilir.

Kanatçığın kararlı durumda olması ve kanatçık ucundan transfer edilen ısının ihmal edilmesi sebebi ile (3.19) no'lu denklemin sınır koşulları aşağıdaki gibidir.

$$r = a; T = T_b \quad (3.20)$$

$$r = b; \frac{dT}{dr} = 0 \quad (3.21)$$

7 no'lu kabulde göre ısı iletimi  $\kappa$ 'ya bağlı bir değişken olarak tanımlanır,

$$k(\kappa) = k_0 \kappa^{\gamma} \quad \kappa = \frac{r}{a} \Rightarrow$$

$$k\left(\frac{r}{a}\right) = k_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{\gamma} \quad (3.22)$$

şeklinde elde edilir.  $k\left(\frac{r}{a}\right)$  ifadesi (3.19) no'lu denklemde yerine yazılırsa,

$$\frac{k_0}{r} \frac{d}{dr} \left( \left(\frac{r}{a}\right)^{\gamma} r \frac{dT}{dr} \right) - \frac{2h}{\delta} (T - T_{\infty}) = 0 \quad a < r < b \quad (3.23)$$

elde edilir. Bulunan denklemin her iki tarafında  $k_0$  ile sadeleştirirsek enerji denklemi;

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \left(\frac{r}{a}\right)^{\gamma} r \frac{dT}{dr} \right) - \frac{2h}{\delta k_0} (T - T_{\infty}) = 0 \quad a < r < b \quad (3.24)$$

elde edilir. Bu denklem ve sınır koşulları simgeler dizininde bulunan boyutsuz yarıçap, boyutsuz dış yarıçap ve boyutsuz sıcaklığa göre boyutsuzlaştırılırsa, boyutsuz denklem ve sınır koşulları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{d}{d\xi} \left( \xi^{\gamma+1} \frac{d\theta}{d\xi} \right) - N^2 \theta \xi = 0 \quad 1 < \xi < R \quad (3.25)$$

$$\xi = 1 : \theta = 1 \quad (3.26)$$



$$\xi = R : \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \quad (3.27)$$

(3.25) no'lu denklemdeki türev işlemi yapılırsa,

$$\xi^{\gamma+1} \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + (\gamma+1) \xi^\gamma \frac{d\theta}{d\xi} - N^2 \theta \xi = 0 \quad (3.28)$$

elde edilir. Her iki tarafta  $\xi^{\gamma+1}$  ile bölünerek ikinci dereceden, lineer, adi homojen denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{\gamma+1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} - \frac{N^2}{\xi^\gamma} \theta = 0 \quad (3.29)$$



#### 4. ISIL GERİLMELERİN BELİRLENMESİ

Sıcaklık farkı bulunan iki ortam arasında transfer edilen ısı miktarını artırmak için kullanılan dairesel kanatçıklarda, sıcaklık farkı nedeni ile ısıl gerilmeler meydana gelir. Bu gerilmelerin belirlenmesi için 3. Bölüm’de yapılan kabullere ek olarak şu kabuller yapılmıştır.

1. Kanatçıkta iç kuvvetlerin olmadığı varsayılmıştır.
2. Kanatçık yüzeylerinde traksiyon olmadığı varsayılmıştır.

Homojen malzemeden yapılmış dairesel bir kanatçıkta ısıl gerilme analizi yapılırken yukarıdaki kabuller kullanılmıştır. Ayrıca bu çalışmada

3. Kanatçıktaki elastik modül ve lineer ısıl genişleme katsayısı boyutsuz kanatçık yarıçapının kuvvet fonksiyonu olarak derecelendirildiği, Poisson oranının ise sabit olduğu farz edilmiştir.

Şekil 3.1’de verilmiş olan üç boyutlu dairesel bir kanatçığın eksenlerinde meydana gelen gerilmeler, bu eksenlerdeki oluşan gerilmelere ve sıcaklık farkına bağlıdır ve aşağıdaki gibidir [59].

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^T \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_\phi = \varepsilon_\phi^e + \varepsilon_\phi^T \quad (4.2)$$

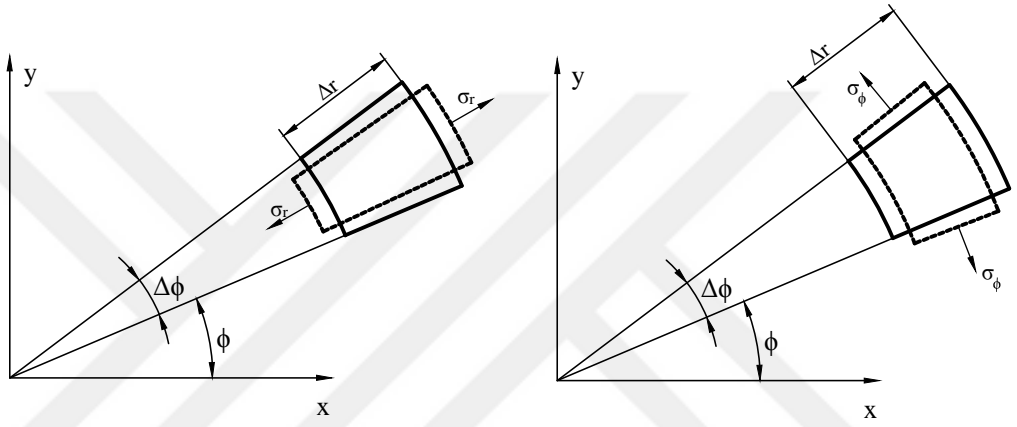
$$\varepsilon_z = \varepsilon_z^e + \varepsilon_z^T \quad (4.3)$$

Burada,  $(\varepsilon_r^T, \varepsilon_\phi^T, \varepsilon_z^T)$  sıcaklığın etkisi ile oluşan gerilmeleri,  $(\varepsilon_r^e, \varepsilon_\phi^e, \varepsilon_z^e)$  ise belirtilen yönlerdeki gerilmeler neticesinde oluşan gerilmeleri ifade etmektedir. Sıcaklık neticesinde oluşan gerilmeler, ısıl genişleme katsayısı ( $\alpha$ ) ile r’nin bir fonksiyonu olan sıcaklığın ( $T$ ) çarpımına eşittir ve aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\varepsilon_r^T = \varepsilon_\phi^T = \varepsilon_z^T = \alpha T \quad (4.4)$$

3. Bölüm’de kanatçıktaki ısı iletiminin tek boyutlu ve simetrik olması sebebi ile sıcaklık sadece  $r$  ye bağlı olarak değişmektedir.

Kanatçık kalınlığının çapına göre çok küçük olması sebebi ile  $z$  yönündeki gerilmeler ihmal edilip problem yüzey gerilme problemine dönüşmektedir. Böylece  $z$  yönünde gerilmeler neticesinde oluşan gerilme ihmal edilir. Aynı zamanda  $z$  yönündeki sıcaklık farkı, tek boyutlu ısı iletimi varsayımı sebebi ile ihmal edilmektedir. Bu nedenle  $z$  yönünde sıcaklık farkı sebebi ile oluşan gerilmelerde ihmal edileceğinden,  $z$  yönünde gerilme olmadığı düşünülmektedir.



Şekil 4.1 Eksenel ve Teğetsel Gerilmeler.

Şekil 3.1’de  $r$  ile  $\Delta r$  arasında kalan çok küçük parçanın üzerine etki eden gerilmeler ile bu gerilmelerin her iki yöndeki deformasyona olan etkileri Şekil 4.1’de verilmiştir.

Kanatçık malzemesinin elastik sınırları içerisinde radyal yönde etki eden gerilme ile bu yönde uzama meydana gelirken, teğetsel yönde Poisson oranı  $\nu$ ’ye bağlı olarak daralma meydana gelir ve Hooke yasası ile aşağıdaki gibi ifade edilirler.

$$\varepsilon_r^e = \frac{\sigma_r}{E} \text{ ve } \varepsilon_\phi^e = -\nu \frac{\sigma_r}{E} \quad (4.5)$$

Teğetsel gerilmenin, radyal ve teğetsel yöndeki gerilmeye etkisi Şekil 4.1’de verilmiştir. Kanatçık malzemesinin elastik sınırları içerisinde teğetsel yönde etki eden gerilme ile bu yönde uzama meydana gelirken, radyal yönde Poisson oranı  $\nu$ ’ye bağlı

olarak daralma meydana gelir ve aşağıdaki gibi ifade edilirler.

$$\varepsilon_{\phi}^e = \frac{\sigma_{\phi}}{E} \text{ ve } \varepsilon_r^e = -v \frac{\sigma_{\phi}}{E} \quad (4.6)$$

Radyal ve teğetsel yöndeki gerilmeler neticesinde oluşan radyal ve teğetsel gerinmeler;

$$\varepsilon_r^e = \frac{\sigma_r}{E} - v \frac{\sigma_{\phi}}{E} = \frac{1}{E}(\sigma_r - v\sigma_{\phi}) \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_{\phi}^e = \frac{\sigma_{\phi}}{E} - v \frac{\sigma_r}{E} = \frac{1}{E}(\sigma_{\phi} - v\sigma_r) \quad (4.8)$$

şeklinde elde edilirler. Gerilmeler neticesinde elde edilen (4.7) ve (4.8) no'lu gerinme ifadeleri ile sıcaklığın etkisi ile elde edilen (4.4) no'lu denklem, (4.1) ve (4.2) no'lu denklemlerde yerlerine yazılarak radyal ve teğetsel yöndeki gerilme-gerinme-sıcaklık ilişkileri;

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - v\sigma_{\phi}) + \alpha T \quad (4.9)$$

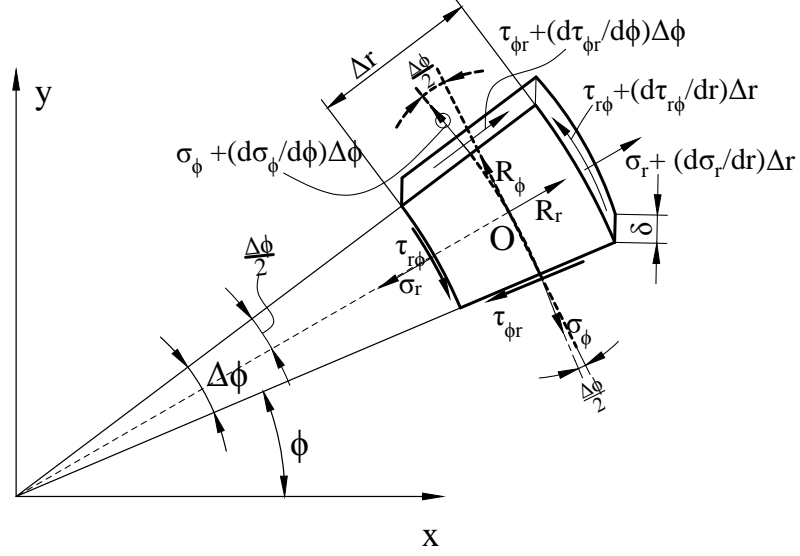
$$\varepsilon_{\phi} = \frac{1}{E}(\sigma_{\phi} - v\sigma_r) + \alpha T \quad (4.10)$$

gerilmeler ve sıcaklığa bağlı gerinme denklemleri şeklinde yada

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-v^2)}(\varepsilon_r + v\varepsilon_{\phi} - (1+v)\alpha T) \quad (4.11)$$

$$\sigma_{\phi} = \frac{E}{(1-v^2)}(\varepsilon_{\phi} + v\varepsilon_r - (1+v)\alpha T) \quad (4.12)$$

gerinme ve sıcaklığa bağlı gerilme denklemleri şeklinde elde edilir. Denge halinde, yani etki eden toplam kuvvetin ve toplam momentin sıfır olduğu bir kanatçıkta ( $\sum F = 0, \sum M = 0$ ) radyal ve teğetsel gerilme arasındaki ilişki Şekil 3.1 de verilen  $r$  ile  $\Delta r$  arasında kalan çok küçük parçanın incelenmesi ile elde edilir.



Şekil 4.2 Normal ve Kayma Gerilmeleri.

Kanatçıktan çıkarılan  $r$  ile  $\Delta r$  arasında kalan parça ve bu parçaya etki eden normal gerilmeler ( $\sigma_r, \sigma_\phi$ ), kayma gerilmeleri ( $\tau_{r\phi}, \tau_{\phi r}$ ) ve parçacık içerisindeki iç kuvvetler ( $R_r, R_\phi$ ) Şekil 4.2 'de verilmiştir.

Merkezden  $r$  birim uzaklıktaki bir noktada oluşacak gerilme  $\sigma_r$  ise bu noktadan  $\Delta r$  gibi çok küçük bir uzaklıkta oluşacak olan gerilme  $\sigma_{r+\Delta r}$ 'ye eşittir.  $r$  yönündeki gerilmeye değişim miktarı ise aşağıdaki gibidir.

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\sigma_{r+\Delta r} - \sigma_r}{\Delta r} = \frac{d\sigma_r}{dr} \quad (4.13)$$

Buna göre  $\Delta r$  birim uzaklığındaki normal gerilme aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sigma_{r+\Delta r} = \sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} \Delta r \quad (4.14)$$

Aynı şekilde  $\Delta r$  birim uzaklığındaki kayma gerilmesi de aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\tau_{r\phi+\Delta r} = \tau_{r\phi} + \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} \Delta r \quad (4.15)$$

Yukarıdaki yaklaşım kullanılarak teğetsel yönde de  $\Delta \phi$  gibi çok küçük bir açıdan sonraki normal ve kayma gerilmeleri aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\sigma_{\phi+\Delta \phi} = \sigma_\phi + \frac{d\sigma_\phi}{d\phi} \Delta \phi \quad (4.16)$$

$$\tau_{\phi r + \Delta\phi} = \tau_{\phi r} + \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \Delta\phi \quad (4.17)$$

Şekil 4.2 deki parçacık dengede olduğundan dolayı, parçacık üzerine etki eden radyal ve teğetsel yöndeki kuvvetlerin toplamı sifıra eşittir ve aşağıdaki gibi ifade edilirler.

$$\sum F_r = 0 \quad (4.18)$$

$$\sum F_\phi = 0 \quad (4.19)$$

Herhangi bir parça üzerine etki eden gerilmeler birim yüzey alandaki kuvvete eşit olduğundan, bu gerilmelere sebep olan kuvvetler aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\sigma = \frac{F}{A} \Rightarrow F = \sigma A \quad (4.20)$$

f

$$\tau = \frac{F}{A} \Rightarrow F = \tau A \quad (4.21)$$

Denge durumunda radyal yöndeki kuvvetlerin toplamı sıfırdır. Buna göre radyal yönde etki eden kuvvetlerin toplamı aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} \sum F_r = & \left( \sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} \Delta r \right) (r + \Delta r) \Delta\phi \delta + \left( \tau_{\phi r} + \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \Delta\phi \right) \Delta r \delta \cos \frac{\Delta\phi}{2} \\ & + R_r \frac{(r + r + \Delta r) \Delta\phi}{2} \Delta r \delta - \sigma_r r \Delta\phi \delta - \sigma_\phi \Delta r \delta \sin \frac{\Delta\phi}{2} \\ & - \left( \sigma_\phi + \frac{d\sigma_\phi}{d\phi} \Delta\phi \right) \Delta r \delta \sin \frac{\Delta\phi}{2} - \tau_{\phi r} \Delta r \delta \cos \frac{\Delta\phi}{2} = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

$\Delta\phi$  çok küçük değerler aldığıında  $\sin \frac{\Delta\phi}{2} \approx \frac{\Delta\phi}{2}$  ve  $\cos \frac{\Delta\phi}{2} \approx 1$  olarak alınabilir. Dolayısı ile bu değerler (4.22) no'lu denklemde yerine yazılıp denklem düzenlenirse,

$$\begin{aligned} 0 = & \sigma_r \Delta r \Delta\phi \delta + \frac{d\sigma_r}{dr} \Delta r (r + \Delta r) \Delta\phi \delta + \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \Delta\phi \Delta r \delta \\ & + R_r \frac{(2r + \Delta r) \Delta\phi}{2} \Delta r \delta - \sigma_\phi \Delta r \delta \Delta\phi + \frac{d\sigma_\phi}{d\phi} \Delta\phi \Delta r \delta \frac{\Delta\phi}{2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

elde edilir. Her iki tarafta  $\Delta r \Delta\phi \delta$  ile sadeleştirilirse,

$$\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} (r + \Delta r) + \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} + R_r \frac{(2r + \Delta r)}{2} - \sigma_\phi + \frac{d\sigma_\phi}{d\phi} \frac{\Delta\phi}{2} = 0 \quad (4.24)$$

elde edilir.  $\Delta r \rightarrow 0$  ve  $\Delta\phi \rightarrow 0$  limiti altında (4.24) no'lu denklem,

$$\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} r + \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} + R_r r - \sigma_\phi = 0 \quad (4.25)$$

ifadesine yaklaşır. Elde edilen ifadenin her iki tarafıda r ile sadeleştirilirse radyal yöndeki denge denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} + \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} + R_r = 0 \quad (4.26)$$

Denge durumunda teğetsel yöndeki kuvvetlerin toplamı sıfırdır. O halde teğetsel yöndeki kuvvetlerin toplamı aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} \sum F_\phi = & \left( \sigma_\phi + \frac{d\sigma_\phi}{d\phi} \Delta\phi \right) \Delta r \delta \cos \frac{\Delta\phi}{2} + \left( \tau_{\phi r} + \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \Delta\phi \right) \Delta r \delta \sin \frac{\Delta\phi}{2} \\ & + \tau_{\phi r} \Delta r \delta \sin \frac{\Delta\phi}{2} + R_\phi \frac{(r + r + \Delta r) \Delta\phi}{2} \Delta r \delta \\ & + \left( \tau_{r\phi} + \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} \Delta r \right) (r + \Delta r) \Delta\phi \delta - \sigma_\phi \Delta r \delta \cos \frac{\Delta\phi}{2} - \tau_{\phi r} r \Delta\phi \delta = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

$\Delta\phi$  çok küçük değerlerde olduğundan dolayı “ $\sin \frac{\Delta\phi}{2}$ ” yerine “ $\frac{\Delta\phi}{2}$ ” ve “ $\cos \frac{\Delta\phi}{2}$ ” yerine “1” yazılıp (4.27) no’lu denklem düzenlenirse,

$$\begin{aligned} 0 = & + \frac{d\sigma_\phi}{d\phi} \Delta\phi \Delta r \delta + \tau_{\phi r} \Delta r \delta \Delta\phi + \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \Delta\phi \Delta r \delta \frac{\Delta\phi}{2} \\ & + R_\phi \frac{(2r + \Delta r) \Delta\phi}{2} \Delta r \delta + \tau_{r\phi} \Delta r \Delta\phi \delta + \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} \Delta r (r + \Delta r) \Delta\phi \delta \end{aligned} \quad (4.28)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafta  $\Delta r \Delta\phi \delta$  sadeleştirilirse,

$$\frac{d\sigma_\phi}{d\phi} + \tau_{\phi r} + \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \frac{\Delta\phi}{2} + R_\phi \frac{(2r + \Delta r)}{2} + \tau_{r\phi} + \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} (r + \Delta r) = 0 \quad (4.29)$$

elde edilir.  $\Delta r \rightarrow 0$  ve  $\Delta\phi \rightarrow 0$  limiti altında (4.29) no’lu denklem,

$$\frac{d\sigma_\phi}{d\phi} + \tau_{\phi r} + R_\phi r + \tau_{r\phi} + \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} r = 0 \quad (4.30)$$

ifadesine yaklaşır. Elde edilen denklemin her iki tarafıda r ile sadeleştirilerek teğetsel yöndeki denge denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{1}{r} \frac{d\sigma_\phi}{d\phi} + \frac{1}{r} \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} + \frac{\tau_{\phi r} + \tau_{r\phi}}{r} + R_\phi r = 0 \quad (4.31)$$

Parçanın dengede olabilmesi için “O” noktasına etki eden toplam momentin sıfıra eşit olması gerekir. Şekil 4.2’de görüldüğü gibi normal gerilmeler “O” noktasından geçtiği için momentleri sıfır olup momenti kayma gerilmeleri oluşturmaktadır.

Radyal yöne dik olan kayma gerilmelerin ”O” noktasına olan dik uzaklığı  $\frac{\Delta r}{2}$  dir. Teğetsel yöne dik olan kayma gerilmelerinin ”O” noktasına olan dik uzaklığı ise yaklaşık olarak  $(r + \frac{\Delta r}{2}) \frac{\Delta\phi}{2}$  dir.

Denge durumundaki momentlerin toplamı sıfırdır ( $\sum M = 0$ ). O halde "O" noktasına etki eden toplam moment aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \sum M = & \left( \tau_{r\phi} + \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} \Delta r \right) (r + \Delta r) \Delta \phi \delta \frac{\Delta r}{2} + \tau_{\phi r} r \Delta \phi \delta \frac{\Delta r}{2} \\ & - \left( \tau_{\phi r} + \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \Delta \phi \right) \Delta r \delta \left( r + \frac{\Delta r}{2} \right) \frac{\Delta \phi}{2} - \tau_{\phi r} \Delta r \delta \left( r + \frac{\Delta r}{2} \right) \frac{\Delta \phi}{2} \end{aligned} \quad (4.32)$$

(4.32) no'lu denklemde bulunan  $\left( \tau_{r\phi} + \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} \Delta r \right)$  ve  $\left( \tau_{\phi r} + \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \Delta \phi \right)$  ifadelerindeki parantezler açılıp denklem düzenlenirse,

$$\begin{aligned} 0 = & \tau_{r\phi} \left( r + \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta \phi \delta \Delta r + \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} \Delta r \left( r + \Delta r \right) \Delta \phi \delta \frac{\Delta r}{2} \\ & - \tau_{\phi r} \Delta r \delta \left( r + \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta \phi - \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \Delta \phi \Delta r \delta \left( r + \frac{\Delta r}{2} \right) \frac{\Delta \phi}{2} \end{aligned} \quad (4.33)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafıda  $\Delta r \Delta \phi \delta$  ile sadeleştirilirse,

$$\tau_{r\phi} \left( r + \frac{\Delta r}{2} \right) + \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} \left( r + \Delta r \right) \frac{\Delta r}{2} - \tau_{\phi r} \left( r + \frac{\Delta r}{2} \right) - \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \left( r + \frac{\Delta r}{2} \right) \frac{\Delta \phi}{2} = 0 \quad (4.34)$$

ifadesi elde edilir.  $\Delta r, \Delta \phi \rightarrow 0$  (4.34) no'lu ifade düzenlendiğinde,

$$\tau_{r\phi} = \tau_{\phi r} \quad (4.35)$$

elde edilir. Bu iki kayma gerilmesi birbirine eşit olduğuna göre (4.26) no'lu radyal yöndeki denge denklemi ile (4.31) no'lu teğetsel yöndeki denge denkleminde  $\tau_{\phi r}$  yerine  $\tau_{r\phi}$  yazılarak denge denklemleri aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} + \frac{d\tau_{r\phi}}{d\phi} + R_r = 0 \quad (4.36)$$

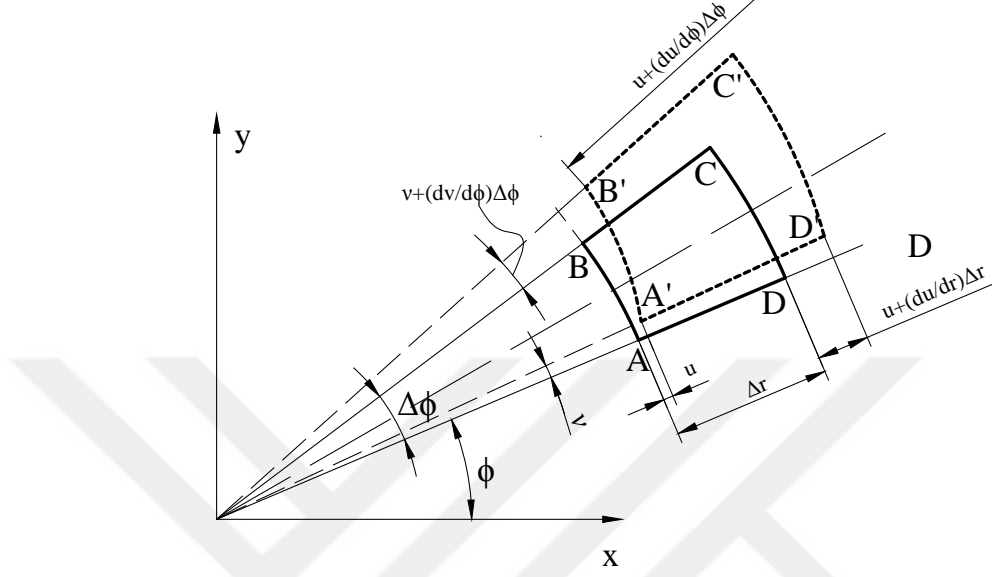
$$\frac{1}{r} \frac{d\sigma_\phi}{d\phi} + \frac{1}{r} \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} + \frac{2\tau_{r\phi}}{r} + R_\phi r = 0 \quad (4.37)$$

Dairesel kanatçığın aksenal simetrik olması nedeni ile gerilmeler  $\phi$ 'ya bağlı olmayıp  $r$ 'nin bir fonksiyonu olması nedeni ile  $\frac{d\sigma_\phi}{d\phi}$  ve  $\tau_{r\phi}$  sifıra eşittir. Ayrıca 1 no'lu kabule göre iç kuvvetlerde  $(R_r, R_\phi)$  sifıra eşittir. Bu sebeplerden dolayı teğetsel yönde denge denklemindeki bütün elemanlar sifıra eşit olacağından dolayı bu yöndeki denge denkleminde bahsedilemezken, radyal yöndeki denge denklemi ise aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0 \quad (4.38)$$



Şekil 3.1’de verilen  $r$  ile  $\Delta r$  arasında kalan ve gerilmelere maruz kalan parçadaki deformasyonlar Şekil 4.3 de verilmiştir. ABCD herhangi gerilme olmadığında parçanın şeklini gösterirken iken, A’B’C’D’ ise gerilme sonrasındaki deforme olmuş parçanın şeklini göstermektedir.



Şekil 4.3 Eksenel ve Tegetsel Gerilmeler.

Şekil 4.3’de görüleceği gibi AB yüzeyinde gerilme neticesinde meydana gelen deformasyon  $u_r$  ise DC yüzeyindeki deformasyon  $u_{r+\Delta r}$  kadar olur. Deformasyondaki değişim miktarı ise

$$\frac{u_{r+\Delta r} - u_r}{\Delta r} \quad (4.39)$$

eşittir. (4.39) no’lu ifadedeki  $\Delta r \rightarrow 0$  radyal yönde deformasyondaki değişim hızı yani radyal gerinme aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{u_{r+\Delta r} - u_r}{\Delta r} = \frac{du}{dr}$$

$$\Rightarrow \epsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (4.40)$$

Radyal yöndeki deformasyon aynı zamanda teğetsel yönde de deformasyona sebep olur. Şekil 4.3’e bakıldığında AB kenarında sadece radyal yönde deformasyon olduğunu düşünülürse AB yayının uzunluğu  $r\Delta\phi$  ya eşitken A’B’ yayının uzunluğu

$(r + u)\Delta\phi$  eşit olurdu. Buna göre sadece radyal deformasyon için teğetsel deformasyondaki değişme miktarı aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{(r + u)\Delta\phi - r\Delta\phi}{r\Delta\phi} = \frac{r\Delta\phi + u\Delta\phi - r\Delta\phi}{r\Delta\phi} = \frac{u\Delta\phi}{\Delta\phi} = \frac{u}{r} \quad (4.41)$$

Şekil 4.3 'de gösterilen teğetsel gerilmelerin sebep olduğu deformasyon ve deformasyondaki değişim hızı yani teğetsel yöndeki gerilme yukarıda anlatıldığı gibi aynı yaklaşımla bulunur ve aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varepsilon_\phi = \frac{dv}{d\phi} \quad (4.42)$$

Buradan da teğetsel yöndeki toplam deformasyon;

$$\varepsilon_\phi = \frac{dv}{d\phi} + \frac{u}{r} \quad (4.43)$$

şeklinde elde edilir. Dairesel kanatçığın aksenal simetrik olması sebebi ile gerilme bileşenleri dolayısıyla gerilmeler  $\phi$ 'ya bağlı değildir. Dolayısı ile teğetsel yöndeki deformasyon aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varepsilon_\phi = \frac{u}{r} \quad (4.44)$$

Kanatçık yüzeylerinde traksiyon olmadığı varsayımı ile kanatçıktaki sınır koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_r = 0 \quad r = a \quad (4.45)$$

$$\sigma_r = 0 \quad r = b \quad (4.46)$$

3 no'lu kabulde yapılan, elastik modül ve lineer ısı genleşme katsayısının kanatçık boyunca radyal yönde değiştiği, Poisson oranının ise sabit olduğu varsayılmıştır. Gerçek malzemelerde Poisson oranı 0.20-0.35 arasında değişir. Bu nedenle Poisson oranındaki değişimin kanatçıkta meydana gelen ısı gerilmeleri pek etkilemeyeceği düşünülmüş ve analitik çözümün elde edilebilmesi için sabit olarak alınmıştır. Bu varsayımın doğruluğunu göstermek için Poisson oranının da değişken olduğu durum da incelenmiştir. Bu sebeple Poisson oranının da kanatçık boyunca radyal yönde değiştiği boyutsuz yarıçapın kuvvet fonksiyonu olarak tanımlanmıştır. Elastik modül,

lineer ısı genleşme katsayısı ve Poisson oranının kanatçık boyunca radyal yönde değişimi aşağıda verilmiştir.

$$E(\kappa) = E_0 \kappa^\beta, \quad \alpha(\kappa) = \alpha_0 \kappa^\lambda, \quad \nu(\kappa) = \nu_0 \kappa^\psi$$

$\kappa = \frac{r}{a}$  için bu değişimler

$$E\left(\frac{r}{a}\right) = E_0 \left(\frac{r}{a}\right)^\beta \quad (4.47)$$

$$\alpha\left(\frac{r}{a}\right) = \alpha_0 \left(\frac{r}{a}\right)^\lambda \quad (4.48)$$

$$\nu\left(\frac{r}{a}\right) = \nu_0 \left(\frac{r}{a}\right)^\psi \quad (4.49)$$

şeklinde yazılabilir. Bu çalışmada elastik modül ve lineer ısı genleşmenin kanatçık boyunca radyal yönde değiştiği, Poisson oranının ise sabit olduğu düşünülmüş ( $\psi = 0$ ) ve ısı gerilmeler analitik çözüm ile elde edilmiştir. Poisson oranının değişken olarak değil de sabit alınmasının ısı gerilmeler üzerine etkisini göstermek için Poisson oranının da değişken olduğu ( $\psi \neq 0$ ) durum sayısal bir yöntem kullanılarak incelenmiştir. Genel diferansiyel denklem üç özelliğinde değişken olduğu duruma göre oluşturulmuştur.

(4.40) ve (4.44) no'lu gerilme denklemleri ile kanatçıktaki elastik modül, lineer ısı genleşme ve Poisson oranındaki değişimi gösteren (4.47)-(4.49) no'lu denklemler (4.11) ve (4.12) no'lu gerilme denklemlerinde yerlerine yazılarak elastik modülün, lineer ısı genleşmenin ve Poisson oranının değişken olduğu deplasmana bağlı gerilme denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E(\kappa)}{(1 - (\nu(\kappa))^2)} \left[ \frac{du}{dr} + \nu(\kappa) \frac{u}{r} - (1 + \nu(\kappa)) \alpha(\kappa) T \right] \\ \Rightarrow \sigma_r &= \frac{E_0 \left(\frac{r}{a}\right)^\beta}{(1 - \nu_0^2 \left(\frac{r}{a}\right)^{2\psi})} \left[ \frac{du}{dr} + \nu_0 \left(\frac{r}{a}\right)^\psi \frac{u}{r} - (1 + \nu_0 \left(\frac{r}{a}\right)^\psi) \alpha_0 \left(\frac{r}{a}\right)^\lambda T \right] \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\sigma_\phi = \frac{E(\kappa)}{(1 - (\nu(\kappa))^2)} \left[ \frac{u}{r} + \nu(\kappa) \frac{du}{dr} - (1 + \nu(\kappa)) \alpha(\kappa) T \right]$$

$$\Rightarrow \sigma_\phi = \frac{E_0 \left(\frac{r}{a}\right)^\beta}{(1 - v_0^2 \left(\frac{r}{a}\right)^{2\psi})} \left[ \frac{u}{r} + v_0 \left(\frac{r}{a}\right)^\psi \frac{du}{dr} - (1 + v_0 \left(\frac{r}{a}\right)^\psi) \alpha_0 \left(\frac{r}{a}\right)^\lambda T \right] \quad (4.51)$$

(4.38) no'lu denge denklemi, (4.45) ve (4.46) no'lu sınır koşulları ile (4.50) ve (4.51) no'lu gerilme denklemleri, Simgeler dizininde belirtilen boyutsuz parametrelere göre boyutsuzlaştırılarak, boyutsuz gerilme denklemleri;

$$S_r = \frac{\xi^\beta}{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})} \left[ \frac{d\bar{u}}{d\xi} + v_0 \xi^\psi \frac{\bar{u}}{\xi} - (1 + v_0 \xi^\psi) \xi^\lambda \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \right] \quad (4.52)$$

$$S_\phi = \frac{\xi^\beta}{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})} \left[ \frac{\bar{u}}{\xi} + v_0 \xi^\psi \frac{d\bar{u}}{d\xi} - (1 + v_0 \xi^\psi) \xi^\lambda \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \right] \quad (4.53)$$

boyutsuz denge denklemi;

$$\frac{dS_r}{d\xi} + \frac{S_r - S_\phi}{\xi} = 0 \quad (4.54)$$

boyutsuz sınır koşulları;

$$\xi = 1 \quad S_r = 0 \quad (4.55)$$

$$\xi = R \quad S_r = 0 \quad (4.56)$$

elde edilir.

(4.52) ve (4.53) no'lu gerilme denklemleri (4.54) no'lu denge denkleminde yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\xi^\beta}{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})} \left[ \frac{d\bar{u}}{d\xi} + v_0 \xi^\psi \frac{\bar{u}}{\xi} - (1 + v_0 \xi^\psi) \xi^\lambda \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \right] \right) \\ & + \frac{\xi^\beta}{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})} \frac{1}{\xi} \left( \frac{\bar{u}}{\xi} + v_0 \xi^\psi \frac{d\bar{u}}{d\xi} - (1 + v_0 \xi^\psi) \xi^\lambda \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) - \frac{\bar{u}}{\xi} \right. \\ & \left. - v_0 \xi^\psi \frac{d\bar{u}}{d\xi} + (1 + v_0 \xi^\psi) \xi^\lambda \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

elde edilir. Türev içindeki  $\frac{\xi^\beta}{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})}$  ifadesi parantez içerisine dağıtılır ve denkleminde ortak olan ifadeler paranteze alınır,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\xi^\beta}{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})} \frac{d\bar{u}}{d\xi} + v_0 \frac{\xi^{\beta+\psi}}{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})} \frac{\bar{u}}{\xi} - \frac{\xi^{\beta+\lambda}}{(1 - v_0 \xi^\psi)} \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \right) \\ & + \frac{\xi^\beta}{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})} \frac{1}{\xi} \underbrace{\left( \frac{d\bar{u}}{d\xi} - \frac{\bar{u}}{\xi} \right)}_{\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\bar{u}}{\xi} \right)} (1 - v_0 \xi^\psi) = 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

elde edilir.(4.58) no'lu ifadede  $\frac{1}{\xi} \left( \frac{d\bar{u}}{d\xi} - \frac{\bar{u}}{\xi} \right)$  yerine türev formunda  $\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\bar{u}}{\xi} \right)$  yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\xi^\beta}{(1-v_0^2\xi^{2\psi})} \frac{d\bar{u}}{d\xi} + v_0 \frac{\xi^{\beta+\psi}}{(1-v_0^2\xi^{2\psi})} \frac{\bar{u}}{\xi} - \frac{\xi^{\beta+\lambda}}{(1-v_0\xi^\psi)} \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \right) \\ & + \frac{\xi^\beta}{(1-v_0^2\xi^{2\psi})} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\bar{u}}{\xi} \right) (1-v_0\xi^\psi) = 0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

elde edilir. Türev işlemi yapıp  $\frac{\xi^\beta}{(1-v_0^2\xi^{2\psi})} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\bar{u}}{\xi} \right)$  parantez içerisine dağıtılsa,

$$\begin{aligned} & \frac{\beta\xi^{\beta-1}(1-v_0^2\xi^{2\psi}) + 2\psi v_0^2\xi^{2\psi+\beta-1}}{(1-v_0^2\xi^{2\psi})^2} \frac{d\bar{u}}{d\xi} + \frac{\xi^\beta}{(1-v_0^2\xi^{2\psi})} \frac{d^2\bar{u}}{d\xi^2} \\ & + \frac{(\beta+\psi)\xi^{\beta+\psi-1}(1-v_0^2\xi^{2\psi}) + 2\psi v_0^2\xi^{3\psi+\beta-1}}{(1-v_0^2\xi^{2\psi})^2} \frac{\bar{u}}{\xi} v_0 \\ & + v_0 \frac{\xi^{\beta+\psi}}{(1-v_0^2\xi^{2\psi})} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\bar{u}}{\xi} \right) \\ & - \frac{(\beta+\lambda)\xi^{\beta+\lambda-1}(1-v_0\xi^\psi) + \psi v_0\xi^{\psi+\beta+\lambda-1}}{(1-v_0\xi^\psi)^2} \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \\ & - \frac{\xi^{\beta+\lambda}}{(1-v_0\xi^\psi)} \chi \frac{d\theta}{d\xi} + \frac{\xi^\beta}{(1-v_0^2\xi^{2\psi})} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\bar{u}}{\xi} \right) \\ & - v_0 \frac{\xi^{\beta+\psi}}{(1-v_0^2\xi^{2\psi})} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\bar{u}}{\xi} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

ifadesi elde edilir. (4.60) no'lu denklemde birbirini götüren ifadeler yok edilip  $\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\bar{u}}{\xi} \right)$  türevi tekrar açılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{\beta\xi^{\beta-1}(1-v_0^2\xi^{2\psi}) + 2\psi v_0^2\xi^{2\psi+\beta-1}}{(1-v_0^2\xi^{2\psi})^2} \frac{d\bar{u}}{d\xi} + \frac{\xi^\beta}{(1-v_0^2\xi^{2\psi})} \frac{d^2\bar{u}}{d\xi^2} \\ & + \frac{(\beta+\psi)\xi^{\beta+\psi-1}(1-v_0^2\xi^{2\psi}) + 2\psi v_0^2\xi^{3\psi+\beta-1}}{(1-v_0^2\xi^{2\psi})^2} \frac{\bar{u}}{\xi} v_0 \\ & - \frac{(\beta+\lambda)\xi^{\beta+\lambda-1}(1-v_0\xi^\psi) + \psi v_0\xi^{\psi+\beta+\lambda-1}}{(1-v_0\xi^\psi)^2} \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \\ & - \frac{\xi^{\beta+\lambda}}{(1-v_0\xi^\psi)} \chi \frac{d\theta}{d\xi} + \frac{\xi^\beta}{(1-v_0^2\xi^{2\psi})} \frac{1}{\xi} \left( \frac{d\bar{u}}{d\xi} - \frac{\bar{u}}{\xi} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.61)$$

elde edilir. Ortak ifadeler paranteze alınıp denklem düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
& \frac{\xi^\beta}{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})} \frac{d^2 \bar{u}}{d\xi^2} \\
& + \left( \frac{\beta \xi^{\beta-1} (1 - v_0^2 \xi^{2\psi}) + 2\psi v_0^2 \xi^{2\psi+\beta-1}}{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})^2} + \frac{\xi^{\beta-1}}{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})} \right) \frac{d\bar{u}}{d\xi} \\
& + \left( \frac{v_0 (\beta + \psi) \xi^{\beta+\psi-1} (1 - v_0^2 \xi^{2\psi}) + 2\psi v_0^3 \xi^{3\psi+\beta-1}}{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})^2} - \frac{\xi^{\beta-1}}{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})} \right) \frac{\bar{u}}{\xi} \\
& - \frac{(\beta + \lambda) \xi^{\beta+\lambda-1} (1 - v_0 \xi^\psi) + \psi v_0 \xi^{\psi+\beta+\lambda-1}}{(1 - v_0 \xi^\psi)^2} \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \\
& - \frac{\xi^{\beta+\lambda}}{(1 - v_0 \xi^\psi)} \chi \frac{d\theta}{d\xi} = 0
\end{aligned} \tag{4.62}$$

elde edilir. Parantez içerisindeki ortak ifadeler paranteze alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{\xi^\beta}{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})} \frac{d^2 \bar{u}}{d\xi^2} + \frac{(\beta + 1) \xi^{\beta-1} (1 - v_0^2 \xi^{2\psi}) + 2\psi v_0^2 \xi^{2\psi+\beta-1}}{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})^2} \frac{d\bar{u}}{d\xi} \\
& + \frac{\xi^{\beta-1} (1 - v_0^2 \xi^{2\psi}) (v_0 (\beta + \psi) \xi^\psi - 1) + 2\psi v_0^3 \xi^{3\psi+\beta-1}}{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})^2} \frac{\bar{u}}{\xi} \\
& - \frac{(\beta + \lambda) \xi^{\beta+\lambda-1} (1 - v_0 \xi^\psi) + \psi v_0 \xi^{\psi+\beta+\lambda-1}}{(1 - v_0 \xi^\psi)^2} \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \\
& - \frac{\xi^{\beta+\lambda}}{(1 - v_0 \xi^\psi)} \chi \frac{d\theta}{d\xi} = 0
\end{aligned} \tag{4.63}$$

elde edilir.  $\theta$ 'nın bulunduğu ifadeler eşitliğin öbür tarafına atılıp, eşitliğin her iki tarafında  $\frac{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})}{\xi^\beta}$  ile çarpılırsa ikinci dereceden, lineer, homojen olmayan diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \bar{u}}{d\xi^2} + \left[ \frac{\frac{\beta + 1}{\xi} (1 - v_0^2 \xi^{2\psi}) + 2\psi v_0^2 \xi^{2\psi-1}}{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})} \right] \frac{d\bar{u}}{d\xi} \\
& + \left[ \frac{\frac{(v_0 (\beta + \psi) \xi^\psi - 1)}{\xi^2} (1 - v_0^2 \xi^{2\psi}) + 2\psi v_0^3 \xi^{3\psi-2}}{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})} \right] \bar{u} \\
& = \left( (\beta + \lambda) \xi^{\lambda-1} (1 - v_0 \xi^\psi) + \psi v_0 \xi^{\lambda+\psi-1} \right) \frac{(1 + v_0 \xi^\psi)}{(1 - v_0 \xi^\psi)} \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \\
& + \xi^\lambda (1 + v_0 \xi^\psi) \chi \frac{d\theta}{d\xi}
\end{aligned} \tag{4.64}$$

## 5. SICAKLIK DAĞILIMI VE ISIL GERİLMELERİN ANALİTİK İNCELENMESİ

Bu bölümde ısı iletkenliği, elastik modülü ve lineer ısı genleşme katsayısı radyal yönde değişen, Poisson oranının ise kanatçığın her yerinde aynı olduğu düşünölen dairesel bir kanatçıktaki sıcaklık dağılımını ve ısı gerilmeler analitik olarak incelenmiştir. İlk olarak sıcaklık dağılımını, ısı iletkenliğinin homojensizlik katsayısı olan  $\gamma$ 'nın belirli değerlerinde, integrasyon yöntemleri ve Bessel fonksiyonları yardımı ile analitik olarak elde edilmiştir. Gerilme denklemleri ise elastik teori kullanılarak elde edilmiştir. Gerilme denge denkleminde elde edilen diferansiyel denklem ve deplasmana bağlı diferansiyel denklem, parametrelerin değişim yöntemi kullanılarak çözülmüştür.

3. Bölüm'de verilen (3.29) no'lu diferansiyel denklemin çözümleri  $\gamma = 0, 1, 2$  için yapılmıştır.  $\gamma = 0$  ve  $\gamma = 1$  için çözümler Bessel fonksiyonları yardımı ile elde edilirken,  $\gamma = 2$  olduğunda diferansiyel denklem Cauchy-Euler denklemi formunda olup, sabit katsayılı diferansiyel denkleme dönüştürölüp çözümleri elde edilmiştir.

### 5.1 Sıcaklık dağılımının analitik çözümleri

Aşağıda verilmiş olan değişken katsayılı, lineer bir diferansiyel denklemin Bessel fonksiyonlarına indirgenmesi Kraus vd.[2] tarafından gösterilmiştir.

$$\frac{d}{dx} \left( x^p \frac{dy}{dx} \right) + (ax^j + bx^k)y = 0 \quad j > k \quad (5.1)$$

şeklindeki bir diferansiyel denklemin, Bessel fonksiyonunun derecesi olan  $n$ 'nin tamsayı olup olmasına göre iki farklı çözümleri vardır. Bessel fonksiyonunun derecesi ise (5.1) no'lu diferansiyel denklemde verilen değişkenlerden aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$n = \frac{\sqrt{(1-p)^2 - 4b}}{2-p+j} \quad (5.2)$$

(5.1) no'lu diferansiyel denklemde bağımlı değişken  $x$ 'in üssü büyük olan ifadenin katsayısı  $a$ , küçük olanın  $b$  olduğu belirtilmişti ( $j > k$ ). Ayrıca bu denklemin Bessel

fonksiyonuna indirgenebilmesi için  $k=p-2$  olmalıdır.

(5.1) no'lu diferansiyel denklemin çözümü  $n$  bir tamsayı değil ise

$$y = x^{e_1} (C_1 J_n(\omega x^{e_2}) + C_2 J_{-n}(\omega x^{e_2})) \quad (5.3)$$

$n$  bir tamsayı ise

$$y = x^{e_1} (C_1 J_n(\omega x^{e_2}) + C_2 Y_n(\omega x^{e_2})) \quad (5.4)$$

formundadır. (5.3) ve (5.4) no'lu denklemlerindeki  $J_n$ ,  $J_{-n}$  birinci tip Bessel fonksiyonunu,  $Y_n$  ikinci tip Bessel fonksiyonunu,  $C_1$  ve  $C_2$  ise sabitleri ifade etmektedir.  $e_1$ ,  $e_2$ , ve  $\omega$  ise (5.1) no'lu denklemdaki değişkenler kullanılarak aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır.

$$e_1 = \frac{1-p}{2-p+j} \quad (5.5)$$

$$e_2 = \frac{2}{2-p+j} \quad (5.6)$$

$$\omega = e_2 \sqrt{a} \quad (5.7)$$

(3.25) no'lu denklem (5.1) no'lu denklem formunda düzenlenirse,

$$\frac{d}{d\xi} \left( \xi^{\gamma+1} \frac{d\theta}{d\xi} \right) + N^2 i^2 \xi \theta = 0 \quad (5.8)$$

elde edilir. (5.8) no'lu denkleme göre  $p$ ,  $j$  ve  $k$  değerleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$p = \gamma + 1, \quad j = 1, \quad k = \gamma - 1$$

(5.8) no'lu denklemde  $\gamma - 1$  üssü olan bağımlı değişken olmadığından ve ( $j > k$ ) olduğundan dolayı  $a$  ve  $b$  değerleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$a = N^2 i^2, \quad b = 0$$

Buna göre (5.2) no'lu denklemde belirtilen  $n$  ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$n = \frac{|\gamma|}{2-\gamma} \quad (5.9)$$



n bir tamsayı olmak üzere (5.8) no'lu denklemin genel çözümü

$$\theta = \xi^{\frac{e_1}{e_2}} (C_1 J_n(\omega \xi^{\frac{1}{e_2}}) + C_2 Y_n(\omega \xi^{\frac{1}{e_2}})) \quad (5.10)$$

şeklinde olmalıdır. (5.10) no'lu denklemde geçen  $e_1$ ,  $e_2$  ve  $\omega$  değerleri, p, j ve a'nın (5.8) no'lu denklemdeki değerlerinin (5.5)-(5.7) no'lu denklemlerde yerine yazılması ile aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$e_1 = \frac{-\gamma}{2-\gamma} \quad (5.11)$$

$$e_2 = \frac{2}{2-\gamma} \quad (5.12)$$

$$\omega = \frac{2}{2-\gamma} Ni \quad (5.13)$$

(5.11)-(5.13) arasındaki ifadeler (5.10) no'lu denklemde yazılırsa sıcaklık dağılımının genel çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\theta = \xi^{\frac{-\gamma}{2}} (C_1 J_n(\frac{2}{2-\gamma} Ni \xi^{\frac{2-\gamma}{2}}) + C_2 Y_n(\frac{2}{2-\gamma} Ni \xi^{\frac{2-\gamma}{2}})) \quad (5.14)$$

(5.14) no'lu Bessel fonksiyonlarının bulunduğu genel çözüm  $\gamma$ 'nın 0 ve 1 değeri için çözüm verirken  $\gamma = 2$  için (5.9) no'lu ifadeden ötürü tanımsız olur. Bu sebeple elde edilen genel çözüm  $\gamma$ 'nın 0 ve 1 değeri için kullanılacaktır.

#### $\gamma = 0$ için çözüm

(5.14) no'lu genel çözümde  $\gamma$  ifadesin yerine 0 yazılırsa,

$$\theta = C_1 J_0(Ni \xi) + C_2 Y_0(Ni \xi) \quad (5.15)$$

elde edilir. (5.15) no'lu denklem (3.26) ve (3.27) no'lu sınır şartlarında Matlab paket programı kullanılarak çözülmesi ile  $C_1$  ve  $C_2$  sabitleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$C_1 = \frac{Y_1(NRi)}{J_0(Ni)Y_1(NRi) - Y_0(Ni)J_1(NRi)} \quad (5.16)$$

$$C_2 = \frac{J_1(NRi)}{J_0(Ni)Y_1(NRi) - Y_0(Ni)J_1(NRi)} \quad (5.17)$$

$\gamma = 1$  için çözüm

(5.14) no'lu genel çözümde  $\gamma$  ifadesin yerine 1 yazılırsa,

$$\theta = \xi^{-\frac{1}{2}} \left[ C_1 J_1(2Ni\xi^{\frac{1}{2}}) + C_2 Y_1(2Ni\xi^{\frac{1}{2}}) \right] \quad (5.18)$$

elde edilir. (5.18) no'lu denklem (3.26) ve (3.27) no'lu sınır şartlarında Matlab paket programı kullanılarak çözümlenerek ve  $C_1$  ve  $C_2$  sabitleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$C_1 = \frac{J_1(2Ni)Y_1(2NiR^{\frac{1}{2}}) - NiR^{\frac{1}{2}}Y_0(2NiR^{\frac{1}{2}})}{Y_1(2NiR^{\frac{1}{2}})J_1(2Ni)^2 - J_1(2NiR^{\frac{1}{2}})J_1(2Ni) - NiR^{\frac{1}{2}}Y_0(2NiR^{\frac{1}{2}})J_1(2Ni)^2 + NiR^{\frac{1}{2}}J_0(2NiR^{\frac{1}{2}})J_1(2Ni)Y_1(2Ni)} \quad (5.19)$$

$$C_2 = \frac{J_1(2NiR^{\frac{1}{2}}) - -NiR^{\frac{1}{2}}J_0(2NiR^{\frac{1}{2}})}{J_1(2NiR^{\frac{1}{2}})Y_1(2Ni) - Y_1(2NiR^{\frac{1}{2}})J_1(2Ni) - NiR^{\frac{1}{2}}J_0(2NiR^{\frac{1}{2}})Y_1(2Ni) + NiR^{\frac{1}{2}}Y_0(2NiR^{\frac{1}{2}})J_1(2Ni)} \quad (5.20)$$

$\gamma = 2$  için çözüm

(3.29) no'lu denklemde  $\gamma$  yerine 2 yazılırsa,

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{3}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} - \frac{N^2}{\xi^2} \theta = 0 \quad (5.21)$$

elde edilir. Denklemin her iki tarafıda  $\xi^2$  ile çarpılırsa,

$$\xi^2 \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + 3\xi \frac{d\theta}{d\xi} - N^2 \theta = 0 \quad (5.22)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem Cauchy-Euler denklemi formunda olduğundan değişken dönüşümü yapılarak, sabit katsayılı diferansiyel denkleme dönüştürülür ve sabit katsayılı diferansiyel denklem çözümünden faydalanılarak sıcaklık dağılımı elde edilir. (5.22) no'lu denklemdeki değişken ve türevlerinin dönüşümü aşağıdaki gibidir.

$$\xi = e^t \Rightarrow \ln \xi = t \quad (5.23)$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d\theta}{dt} \frac{1}{\xi} \quad (5.24)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} = \frac{1}{\xi^2} \left( \frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{d\theta}{dt} \right) \quad (5.25)$$

Bu dönüşümler homojen denklemde yerine yazılarak sabit katsayılı diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{d\theta}{dt} - N^2 \theta = 0 \quad (5.26)$$

Bu denklemin çözümü;

$$\theta = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} \quad (5.27)$$

şeklinde dir. Burada  $m_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + N^2}$  dir.  $\xi = e^t$  ters dönüşümü yapılarak boyutsuz sıcaklık denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\theta = C_1 \xi^{m_1} + C_2 \xi^{m_2} \quad (5.28)$$

(5.28) no'lu denklem (3.26) ve (3.27) no'lu sınır şartlarında matris formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ m_1 R^{m_1-1} & m_2 R^{m_2-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

elde edilir. (5.29) no'lu eşitlikte verilen matristeki  $C_1$  ve  $C_2$  Cramer kuralı kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$C_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & m_2 R^{m_2-1} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ m_1 R^{m_1-1} & m_2 R^{m_2-1} \end{bmatrix}} \quad (5.30)$$

$$C_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ m_1 R^{m_1-1} & 0 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ m_1 R^{m_1-1} & m_2 R^{m_2-1} \end{bmatrix}} \quad (5.31)$$

(5.30) ve (5.31) no'lu eşitlikte verilen ifadelerin determinantları alınıp işlemler yapıldığında  $C_1$  ve  $C_2$  sabitleri;

$$C_1 = -\frac{m_2 R^{m_2}}{m_1 R^{m_1} - m_2 R^{m_2}} \quad (5.32)$$

$$C_2 = \frac{m_1 R^{m_1}}{m_1 R^{m_1} - m_2 R^{m_2}} \quad (5.33)$$

şeklinde bulunur.

## 5.2 Isıl gerilmelerin analitik çözümü

4.Bölüm'de elde edilen (4.52) ve (4.53) no'lu boyutsuz gerilme denklemleri Poisson oranı radyal yönde sabit olacak şekilde düzenlenirse ( $\psi = 0$ ), boyutsuz gerilme denklemleri

$$S_r = \frac{\xi^\beta}{(1 - \nu_0^2)} \left[ \frac{d\bar{u}}{d\xi} + \nu_0 \frac{\bar{u}}{\xi} - (1 + \nu_0) \xi^\lambda \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \right] \quad (5.34)$$

$$S_\phi = \frac{\xi^\beta}{(1 - \nu_0^2)} \left[ \frac{\bar{u}}{\xi} + \nu_0 \frac{d\bar{u}}{d\xi} - (1 + \nu_0) \xi^\lambda \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \right] \quad (5.35)$$

şeklinde elde edilir. ve (4.64) no'lu diferansiyel denklem Poisson oranı radyal yönde sabit olacak şekilde düzenlenirse ( $\psi = 0$ ) deplasman için ikinci dereceden lineer homojen olmayan diferansiyel denklem;

$$\frac{d^2\bar{u}}{d\xi^2} + \frac{\beta + 1}{\xi} \frac{d\bar{u}}{d\xi} + \frac{(v_0\beta - 1)}{\xi^2} \bar{u} = (\beta + \lambda) \xi^{\lambda-1} (1 + v_0) \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) + \xi^\lambda (1 + v_0) \chi \frac{d\theta}{d\xi} \quad (5.36)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin her iki tarafı  $\xi^2$  ile çarpılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\xi^2 \frac{d^2\bar{u}}{d\xi^2} + (\beta + 1) \xi \frac{d\bar{u}}{d\xi} + (v_0\beta - 1) \bar{u} = (\beta + \lambda) \xi^{\lambda+1} (1 + v_0) \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) + \xi^{\lambda+2} (1 + v_0) \chi \frac{d\theta}{d\xi} \quad (5.37)$$

Yukarıdaki homojen olmayan diferansiyel denklemin çözümü, homojen çözüm ( $\bar{u}_h$ ) ve özel çözümden ( $\bar{u}_p$ ) oluşup aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\bar{u} = \bar{u}_h + \bar{u}_p \quad (5.38)$$

Homojen kısım Cauchy-Euler denklemi formunda olduğundan değişken dönüşümü yapılarak, sabit katsayılı diferansiyel denkleme dönüştürülür. Sabit katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümü kullanılarak homojen çözüm elde edilir. (5.36) no'lu diferansiyel denklemin homojen kısmı;

$$\xi^2 \frac{d^2\bar{u}}{d\xi^2} + (\beta + 1) \xi \frac{d\bar{u}}{d\xi} + (v_0\beta - 1) \bar{u} = 0 \quad (5.39)$$

şeklinde dir. Homojen kısmın çözümü için değişkenin ve türevlerinin dönüşümü aşağıdaki gibidir.

$$\xi = e^t \Rightarrow \ln \xi = t \quad (5.40)$$

$$\frac{d\bar{u}}{d\xi} = \frac{d\bar{u}}{dt} \frac{1}{\xi} \quad (5.41)$$

$$\frac{d^2\bar{u}}{d\xi^2} = \frac{1}{\xi^2} \left( \frac{d^2\bar{u}}{dt^2} - \frac{d\bar{u}}{dt} \right) \quad (5.42)$$

(5.40)-(5.42) arasındaki dönüşümler (5.39) no'lu homojen denklemde yerine yazılarak sabit katsayılı diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{d^2\bar{u}}{dt^2} + \beta \frac{d\bar{u}}{dt} - p\bar{u} = 0 \quad (5.43)$$

Burada  $p = 1 - v_0\beta$  dir.  $\bar{u} = e^{mt}$  dönüşümü altında bu denklemin çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\bar{u}_h = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t} \quad (5.44)$$

Burada  $m_{1,2} = -\frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4p}}{2}$  dir.  $\xi = e^t$  ters dönüşümü yapılarak homojen kısmın çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\bar{u}_h = c_1 \xi^{m_1} + c_2 \xi^{m_2} \quad (5.45)$$

(5.36) no'lu diferansiyel denklemin sağ taraf denklemini sonlu sayıda türeve sahip olmadığı için parametrelerin değişim yöntemi (sabitin değişim yöntemi) kullanılarak özel kısmın çözümü elde edilir. Parametrelerin değişim yöntemine göre özel kısmın çözümü;

$$\bar{u}_p = D_1(\xi) \xi^{m_1} + D_2(\xi) \xi^{m_2} \quad (5.46)$$

ve özel kısım çözümündeki değişmiş parametrelerin birbiri arasındaki ilişkiyi veren denklemler;

$$D'_1(\xi) \xi^{m_1} + D'_2(\xi) \xi^{m_2} = 0 \quad (5.47)$$

$$D'_1(\xi) m_1 \xi^{m_1-1} + D'_2(\xi) m_2 \xi^{m_2-1} = (\beta + \lambda) \xi^{\lambda-1} (1 + v_0) \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) + \xi^\lambda (1 + v_0) \chi \frac{d\theta}{d\xi} \quad (5.48)$$

şeklinde dir. (5.47) ve (5.48) no'lu denklemler matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} D'_1(\xi) \\ D'_2(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^{m_1} & \xi^{m_2} \\ m_1 \xi^{m_1-1} & m_2 \xi^{m_2-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

Burada  $a_1 = (\beta + \lambda) \xi^{\lambda-1} (1 + v_0) \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) + \xi^\lambda (1 + v_0) \chi \frac{d\theta}{d\xi}$  dir.

$D'_1(\xi)$  ve  $D'_2(\xi)$  Cramer kuralı kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$D'_1(\xi) = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & \xi^{m_2} \\ a_1 & m_2 \xi^{m_2-1} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} \xi^{m_1} & \xi^{m_2} \\ m_1 \xi^{m_1-1} & m_2 \xi^{m_2-1} \end{bmatrix}} \quad (5.50)$$

$$D'_2(\xi) = \frac{\det \begin{bmatrix} \xi^{m_1} & 0 \\ m_1 \xi^{m_1-1} & a_1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} \xi^{m_1} & \xi^{m_2} \\ m_1 \xi^{m_1-1} & m_2 \xi^{m_2-1} \end{bmatrix}} \quad (5.51)$$

(5.50) ve (5.51) no'lu ifadelerdeki determinantlar alınıp işlemler yapıldığında  $D'_1(\xi)$  ve  $D'_2(\xi)$  aşağıdaki gibi elde edilir.

$$D'_1(\xi) = -\frac{(1+v_0)\chi}{m_2-m_1} \xi^{\lambda-m_1} \left( (\beta+\lambda) \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) + \xi \frac{d\theta}{d\xi} \right) \quad (5.52)$$

$$D'_2(\xi) = \frac{(1+v_0)\chi}{m_2-m_1} \xi^{\lambda-m_2} \left( (\beta+\lambda) \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) + \xi \frac{d\theta}{d\xi} \right) \quad (5.53)$$

(5.52) ve (5.53) no'lu denklemlerinin integralleri alınarak  $D_1(\xi)$  ve  $D_2(\xi)$  değişkenleri;

$$D_1(\xi) = -\frac{(1+v_0)\chi}{m_2-m_1} \int_1^\xi \eta^{\lambda-m_1} \left( (\beta+\lambda) \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) + \eta \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\eta + D_1(1) \quad (5.54)$$

$$D_2(\xi) = \frac{(1+v_0)\chi}{m_2-m_1} \int_1^\xi \eta^{\lambda-m_2} \left( (\beta+\lambda) \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) + \eta \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\eta + D_2(1) \quad (5.55)$$

bulunur. (5.45) ve (5.46) no'lu homojen çözüm ve özel çözüm, (5.38) no'lu genel çözümde yerine yazılırsa, deplasman için genel çözüm;

$$\bar{u} = (c_1 + D_1(\xi)) \xi^{m_1} + (c_2 + D_2(\xi)) \xi^{m_2} \quad (5.56)$$

bulunur.  $D_1(\xi)$  ve  $D_2(\xi)$  denklemlerinde bulunan integrasyon sabitleri  $D_1(1)$  ve  $D_2(1)$  genel çözüm içerisinde homojen çözümden gelen  $c_1$  ve  $c_2$  sabitleri ile birlikte alınırsa

$$C_1 = c_1 + D_1(1) \quad (5.57)$$

$$C_2 = c_2 + D_2(1) \quad (5.58)$$

şeklinde yeni sabitler oluşur. Bu sebeple (5.54) ve (5.55) no'lu  $D_1(\xi)$  ve  $D_2(\xi)$  değişkenleri integrasyon sabitleri olmadan aşağıdaki şekilde yazılabilirler.

$$D_1(\xi) = -\frac{(1+v_0)\chi}{m_2-m_1} \int_1^\xi \eta^{\lambda-m_1} \left( (\beta+\lambda) \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) + \eta \frac{d\theta}{d\eta} \right) d\eta \quad (5.59)$$

$$D_2(\xi) = \frac{(1+v_0)\chi}{m_2-m_1} \int_1^\xi \eta^{\lambda-m_2} \left( (\beta+\lambda) \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) + \eta \frac{d\theta}{d\eta} \right) d\eta \quad (5.60)$$

Yeni deplasman denklemi;

$$\bar{u} = (C_1 + D_1(\xi)) \xi^{m_1} + (C_2 + D_2(\xi)) \xi^{m_2} \quad (5.61)$$

şeklinde olur. Bu deplasman denkleminin türevi;

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{d\xi} &= (C_1 + D_1(\xi)) m_1 \xi^{m_1-1} + (C_2 + D_2(\xi)) m_2 \xi^{m_2-1} + D_1'(\xi) \xi^{m_1} \\ &\quad + D_2'(\xi) \xi^{m_2} \end{aligned} \quad (5.62)$$

şeklinindedir. Yukarıdaki denklem (5.47) no'lu denkleme göre düzenlenir ise deplasman denkleminin türevi yada radyal yöndeki gerinme;

$$\frac{d\bar{u}}{d\xi} = (C_1 + D_1(\xi)) m_1 \xi^{m_1-1} + (C_2 + D_2(\xi)) m_2 \xi^{m_2-1} \quad (5.63)$$

şeklinde elde edilir. Deplasman denklemi ve türevi radyal yöndeki boyutsuz gerilme denklemi (5.34)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} S_r &= \frac{\xi^\beta}{(1-v_0^2)} \left[ (C_1 + D_1(\xi)) (m_1 + v_0) \xi^{m_1-1} + (C_2 + D_2(\xi)) (m_2 + v_0) \xi^{m_2-1} \right. \\ &\quad \left. - (1+v_0) \xi^\lambda \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.64)$$

elde edilir. (5.64) no'lu denklemdeki  $(C_1 + D_1(\xi))$  ve  $(C_2 + D_2(\xi))$  parantezleri açılırsa boyutsuz radyal gerilme aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} S_r &= \frac{\xi^\beta}{(1-v_0^2)} \left[ C_1 (m_1 + v_0) \xi^{m_1-1} + D_1(\xi) (m_1 + v_0) \xi^{m_1-1} + C_2 (m_2 + v_0) \xi^{m_2-1} \right. \\ &\quad \left. + D_2(\xi) (m_2 + v_0) \xi^{m_2-1} - (1+v_0) \xi^\lambda \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.65)$$

(5.65) no'lu boyutsuz radyal gerilme denklemi, (4.55) ve (4.56) no'lu sınır şartlarında çözümlerse  $C_1$  ve  $C_2$  arasındaki ilişkiyi veren iki denklem elde edilir. Bu denklemlerin



birlikte çözülmesi ile  $C_1$  ve  $C_2$  sabitleri elde edilir. (5.65) no'lu boyutsuz radyal gerilme denklemi (4.55) no'lu boyutsuz sınır şartında yazılırsa,

$$0 = \frac{1}{(1 - \nu_0^2)} \left[ C_1 (m_1 + \nu_0) + D_1(1) (m_1 + \nu_0) + C_2 (m_2 + \nu_0) + D_2(1) (m_2 + \nu_0) - (1 + \nu_0) \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \right] \quad (5.66)$$

elde edilir. (5.66) no'lu eşitlik çarpım durumunda olduğundan dolayı,

$$0 = C_1 (m_1 + \nu_0) + D_1(1) (m_1 + \nu_0) + C_2 (m_2 + \nu_0) + D_2(1) (m_2 + \nu_0) - (1 + \nu_0) \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \quad (5.67)$$

dir. Yukarıdaki ifadede  $C_1$  ve  $C_2$  arasındaki ilişkiyi veren birinci denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$C_1 = \frac{(1 + \nu_0)}{(m_1 + \nu_0)} \chi \left( \theta(1) + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) - \frac{(C_2 + D_2(1)) (m_2 + \nu_0)}{(m_1 + \nu_0)} - D_1(1) \quad (5.68)$$

Yukarıdaki ifadede geçen  $D_1(1)$  ve  $D_2(1)$  sabitleri (5.59) ve (5.60) no'lu denkleme göre sifıra,  $\theta(1)$  ise 3.26 no'lu sınır şartına göre bire eşittir. Bu sebeple  $C_1$  ve  $C_2$  arasındaki ilişkiyi veren birinci denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$C_1 = \frac{(1 + \nu_0)}{(m_1 + \nu_0)} \chi \left( \frac{T_b}{T_b - T_\infty} \right) - \frac{C_2 (m_2 + \nu_0)}{(m_1 + \nu_0)} \quad (5.69)$$

(5.65) no'lu boyutsuz radyal gerilme denklemi (4.56) no'lu sınır şartında yazılırsa,

$$0 = \frac{R^\beta}{(1 - \nu_0^2)} \left[ C_1 (m_1 + \nu_0) R^{m_1 - 1} + D_1(R) (m_1 + \nu_0) R^{m_1 - 1} + C_2 (m_2 + \nu_0) R^{m_2 - 1} + D_2(R) (m_2 + \nu_0) R^{m_2 - 1} - (1 + \nu_0) R^\lambda \chi \left( \theta(R) + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \right] \quad (5.70)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifade çarpım durumunda olduğundan dolayı,

$$0 = C_1 (m_1 + \nu_0) R^{m_1 - 1} + D_1(R) (m_1 + \nu_0) R^{m_1 - 1} + C_2 (m_2 + \nu_0) R^{m_2 - 1} + D_2(R) (m_2 + \nu_0) R^{m_2 - 1} - (1 + \nu_0) R^\lambda \chi \left( \theta(R) + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \quad (5.71)$$

dir.  $(1 + \nu_0) R^\lambda \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right)$  ile  $D_1$  ve  $D_2$  bulunduğu terimler eşitliğin öbür tarafına atılırsa,  $C_1$  ve  $C_2$  arasındaki ilişkiyi veren ikinci denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$C_1 (m_1 + \nu_0) R^{m_1 - 1} + C_2 (m_2 + \nu_0) R^{m_2 - 1} = (1 + \nu_0) R^\lambda \chi \left( \theta(R) + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) - D_1(R) (m_1 + \nu_0) R^{m_1 - 1} - D_2(R) (m_2 + \nu_0) R^{m_2 - 1} \quad (5.72)$$

(5.72) no'lu denklemde  $C_1$  sabiti yerine (5.69) no'lu denklemdeki değeri yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& (1 + \nu_0)R^{m_1-1} \chi \left( \frac{T_b}{T_b - T_\infty} \right) - C_2 (m_2 + \nu_0)R^{m_1-1} + C_2 (m_2 + \nu_0)R^{m_2-1} \\
& = (1 + \nu_0)R^\lambda \chi \left( \theta(R) + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \\
& - D_1(R) (m_1 + \nu_0)R^{m_1-1} - D_2(R) (m_2 + \nu_0)R^{m_2-1}
\end{aligned} \tag{5.73}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede  $C_2$  yalnız bırakılarak değeri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
C_2 & = \frac{(1 + \nu_0)R^\lambda}{(m_2 + \nu_0)(R^{m_2-1} - R^{m_1-1})} \chi \left( \theta(R) + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \\
& - \frac{(m_1 + \nu_0)R^{m_1-1}}{(m_2 + \nu_0)(R^{m_2-1} - R^{m_1-1})} D_1(R) - \frac{R^{m_2-1}}{R^{m_2-1} - R^{m_1-1}} D_2(R) \\
& - \frac{(1 + \nu_0)R^{m_1-1}}{(m_2 + \nu_0)(R^{m_2-1} - R^{m_1-1})} \chi \left( \frac{T_b}{T_b - T_\infty} \right)
\end{aligned} \tag{5.74}$$

(5.74) no'lu  $C_2$  değeri (5.69) no'lu denklemde yerine yazılırsa  $C_1$  ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
C_1 & = \frac{(1 + \nu_0)}{(m_1 + \nu_0)} \chi \left( \frac{T_b}{T_b - T_\infty} \right) - \frac{(1 + \nu_0)R^\lambda}{(m_1 + \nu_0)(R^{m_2-1} - R^{m_1-1})} \chi \left( \theta(R) + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \\
& + \frac{R^{m_1-1}}{R^{m_2-1} - R^{m_1-1}} D_1(R) + \frac{(m_2 + \nu_0)R^{m_2-1}}{(m_1 + \nu_0)(R^{m_2-1} - R^{m_1-1})} D_2(R) \\
& + \frac{(1 + \nu_0)R^{m_1-1}}{(m_1 + \nu_0)(R^{m_2-1} - R^{m_1-1})} \chi \left( \frac{T_b}{T_b - T_\infty} \right)
\end{aligned} \tag{5.75}$$

(5.59) ve (5.60) no'lu  $D_1$  ve  $D_2$  değerleri ile (5.74) ve (5.75) no'lu  $C_1$  ve  $C_2$  değerleri (5.65) no'lu boyutsuz radyal gerilme denkleminde yazılırsa, boyutsuz radyal gerilme denkleminin en açık hali aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
S_r = & \frac{\xi^\beta}{(1-\nu_0^2)} \left[ (1+\nu_0) \chi \xi^{m_1-1} \left( \frac{T_b}{T_b-T_\infty} \right) \right. \\
& - \frac{(1+\nu_0) R^\lambda \xi^{m_1-1}}{(R^{m_2-1}-R^{m_1-1})} \chi \left( \theta(R) + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) \\
& - \frac{(1+\nu_0)(m_1+\nu_0) R^{m_1-1} \xi^{m_1-1} \chi}{(R^{m_2-1}-R^{m_1-1})(m_2-m_1)} \\
& \cdot \int_1^R \eta^{\lambda-m_1} \left( (\beta+\lambda) \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) + \eta \frac{d\theta}{d\eta} \right) d\eta \\
& + \frac{(1+\nu_0)(m_2+\nu_0) R^{m_2-1} \xi^{m_1-1} \chi}{(R^{m_2-1}-R^{m_1-1})(m_2-m_1)} \\
& \cdot \int_1^R \eta^{\lambda-m_2} \left( (\beta+\lambda) \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) + \eta \frac{d\theta}{d\eta} \right) d\eta \\
& + \frac{(1+\nu_0) R^{m_1-1} \xi^{m_1-1}}{(R^{m_2-1}-R^{m_1-1})} \chi \left( \frac{T_b}{T_b-T_\infty} \right) - \frac{(1+\nu_0)(m_1+\nu_0) \xi^{m_1-1} \chi}{m_2-m_1} \\
& \cdot \int_1^\xi \eta^{\lambda-m_1} \left( (\beta+\lambda) \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) + \eta \frac{d\theta}{d\eta} \right) d\eta \\
& + \frac{(1+\nu_0) R^\lambda \xi^{m_2-1}}{R^{m_2-1} R^{m_1-1}} \chi \left( \theta(R) + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) \\
& + \frac{(1+\nu_0)(m_1+\nu_0) R^{m_1-1} \xi^{m_2-1} \chi}{(R^{m_2-1}-R^{m_1-1})(m_2-m_1)} \\
& \cdot \int_1^R \eta^{\lambda-m_1} \left( (\beta+\lambda) \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) + \eta \frac{d\theta}{d\eta} \right) d\eta \\
& - \frac{(1+\nu_0)(m_2+\nu_0) R^{m_2-1} \xi^{m_2-1} \chi}{(R^{m_2-1}-R^{m_1-1})(m_2-m_1)} \\
& \cdot \int_1^R \eta^{\lambda-m_2} \left( (\beta+\lambda) \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) + \eta \frac{d\theta}{d\eta} \right) d\eta \\
& - \frac{(1+\nu_0) R^{m_1-1} \xi^{m_2-1}}{(R^{m_2-1}-R^{m_1-1})} \chi \left( \frac{T_b}{T_b-T_\infty} \right) + \frac{(1+\nu_0)(m_2+\nu_0) \xi^{m_2-1} \chi}{m_2-m_1} \\
& \cdot \int_1^\xi \eta^{\lambda-m_2} \left( (\beta+\lambda) \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) + \eta \frac{d\theta}{d\eta} \right) d\eta \\
& \left. - (1+\nu_0) \xi^\lambda \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) \right] \tag{5.76}
\end{aligned}$$

(5.61) ve (5.63) no'lu deplasman denklemi ve türevi, (5.35) no'lu denklemde yerine yazılırsa teğetsel gerilme denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
S_\phi = & \frac{\xi^\beta}{(1-\nu_0^2)} \left[ C_1 (1+m_1\nu_0) \xi^{m_1-1} + D_1(\xi) (1+m_1\nu_0) \xi^{m_1-1} + C_2 (1+m_2\nu_0) \xi^{m_2-1} \right. \\
& \left. + D_2(\xi) (1+m_2\nu_0) \xi^{m_2-1} - (1+\nu_0) \xi^\lambda \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) \right] \tag{5.77}
\end{aligned}$$

(5.59) ve (5.60) no'lu  $D_1$  ve  $D_2$  değerleri ile (5.74) ve (5.75) no'lu  $C_1$  ve  $C_2$  değerleri (5.77) no'lu boyutsuz teğetsel gerilme denkleminde yazılırsa, boyutsuz teğetsel gerilme denkleminin en açık hali aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
S_\phi = & \frac{\xi^\beta}{(1-\nu_0^2)} \left[ \frac{(1+\nu_0)(1+m_1\nu_0)\chi\xi^{m_1-1}}{(m_1+\nu_0)} \left( \frac{T_b}{T_b-T_\infty} \right) \right. \\
& - \frac{(1+\nu_0)(1+m_1\nu_0)R^\lambda\xi^{m_1-1}}{(m_1+\nu_0)(R^{m_2-1}-R^{m_1-1})} \chi \left( \theta(R) + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) \\
& - \frac{(1+\nu_0)(1+m_1\nu_0)R^{m_1-1}\xi^{m_1-1}\chi}{(R^{m_2-1}-R^{m_1-1})(m_2-m_1)} \\
& \cdot \int_1^R \eta^{\lambda-m_1} \left( (\beta+\lambda) \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) + \eta \frac{d\theta}{d\eta} \right) d\eta \\
& + \frac{(1+\nu_0)(m_2+\nu_0)(1+m_1\nu_0)R^{m_2-1}\xi^{m_1-1}\chi}{(m_1+\nu_0)(R^{m_2-1}-R^{m_1-1})(m_2-m_1)} \\
& \cdot \int_1^R \eta^{\lambda-m_2} \left( (\beta+\lambda) \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) + \eta \frac{d\theta}{d\eta} \right) d\eta \\
& + \frac{(1+\nu_0)(1+m_1\nu_0)R^{m_1-1}\xi^{m_1-1}}{(m_1+\nu_0)(R^{m_2-1}-R^{m_1-1})} \chi \left( \frac{T_b}{T_b-T_\infty} \right) - \frac{(1+\nu_0)(1+m_1\nu_0)\xi^{m_1-1}\chi}{m_2-m_1} \\
& \cdot \int_1^\xi \eta^{\lambda-m_1} \left( (\beta+\lambda) \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) + \eta \frac{d\theta}{d\eta} \right) d\eta \\
& + \frac{(1+\nu_0)(1+m_2\nu_0)R^\lambda\xi^{m_2-1}}{(m_2+\nu_0)(R^{m_2-1}R^{m_1-1})} \chi \left( \theta(R) + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) \\
& + \frac{(1+\nu_0)(m_1+\nu_0)(1+m_2\nu_0)R^{m_1-1}\xi^{m_2-1}\chi}{(m_2+\nu_0)(R^{m_2-1}-R^{m_1-1})(m_2-m_1)} \\
& \cdot \int_1^R \eta^{\lambda-m_1} \left( (\beta+\lambda) \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) + \eta \frac{d\theta}{d\eta} \right) d\eta \\
& - \frac{(1+\nu_0)(1+m_2\nu_0)R^{m_2-1}\xi^{m_2-1}\chi}{(R^{m_2-1}-R^{m_1-1})(m_2-m_1)} \\
& \cdot \int_1^R \eta^{\lambda-m_2} \left( (\beta+\lambda) \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) + \eta \frac{d\theta}{d\eta} \right) d\eta \\
& - \frac{(1+\nu_0)(1+m_2\nu_0)R^{m_1-1}\xi^{m_2-1}}{(m_2+\nu_0)(R^{m_2-1}-R^{m_1-1})} \chi \left( \frac{T_b}{T_b-T_\infty} \right) + \frac{(1+\nu_0)(1+m_2\nu_0)\xi^{m_2-1}\chi}{m_2-m_1} \\
& \cdot \int_1^\xi \eta^{\lambda-m_2} \left( (\beta+\lambda) \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) + \eta \frac{d\theta}{d\eta} \right) d\eta \\
& \left. - (1+\nu_0)\xi^\lambda \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b-T_\infty} \right) \right] \tag{5.78}
\end{aligned}$$

## 6. SICAKLIK DAĞILIMI VE ISIL GERİLMELERİN NÜMERİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

Bu bölümde ısı iletkenliği, elastik modülü, lineer ısı genleşme katsayısı ve Poisson oranının kanatçık çapı boyunca değiştii düşünölen dairesel bir kanatçıkta sıcaklık dağılımı ve ısı gerilmeler sayısal olarak incelenmiştir. Poisson oranının radyal yönde değiştiriyor olması (4.64) no'lu diferansiyel denklemin analitik olarak çözümünü mümkün kılmamaktadır. Bu sebeple bu bölümde kanatçık üzerinde oluş an sıcaklık dağılımları ve termal gerilmeler Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu (TFM) kullanılarak sayısal olarak elde edilmiştir. Yöntemin doğruluğu 5. Bölüm'de verilen analitik çözümle karşılaştırılarak gösterilmiştir.

### 6.1 Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu

Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu (TFM), sınır değer problemlerini birinci mertebeden başlangıç değer problem sistemine dönüştüren bir yöntemdir. Bu dönüştürmeden sonra elde edilen sistemler, birinci mertebeden başlangıç değer problemlerini kolay ve doğru bir şekilde çözen Runge-Kutta tipi metotlar kullanılarak çözülebilir [60 – 62]. Yöntemin çalışma prensibi, sıcaklık dağılımını idare eden denklemlerin sayısal çözümlenmesinde detaylı olarak ele alınmıştır.

#### 6.1.1 Sıcaklık dağılımının TFM ile elde edilmesi

Isı iletkenliğin radyal yönde değiştii dairesel bir kanatçıkta enerji denge denkleminin en genel hali (3.29) no'lu denklemde elde edilmiştir. İkinci dereceden homojen olan bu denklemdeki türev ifadeleri sadece bağımlı değişken ile gösterilirse aşğıdaki denklem elde edilir.

$$\theta'' + \frac{\gamma + 1}{\xi} \theta' - \frac{N^2}{\xi^\gamma} \theta = 0 \quad (6.1)$$

(6.1) no'lu denklemin genel çözümü

$$\theta = b_i \theta_i \quad i = 1, 2 \quad (6.2)$$

şeklinde olmalıdır.  $\theta_i$  (6.1) no'lu denklemin homojen çözümlerini  $a_i$  ise (3.26) ve (3.27) no'lu sınır koşullarından hesaplanabilen sabitleri ifade etmektedir. TMF sınır problemlerinin çözümünde kullanılması sebebi ile ilk olarak ikinci dereceden adi diferansiyel denklem olan (6.1) no'lu denklemi birinci dereceden bir denkleme dönüştürmek gerekir. İkinci dereceden diferansiyel denklemi birinci dereceden diferansiyel denkleme dönüştürmek için aşağıdaki verilmiş olan değişkenler kullanılır.

$$\begin{aligned} \theta_i &= Z_1^{(i)} \\ \theta_i' &= Z_2^{(i)} \end{aligned} \quad (6.3)$$

(6.1) no'lu diferansiyel denklem (6.3) no'lu ifadede verilen değişkenler kullanılarak yazılırsa

$$\begin{aligned} (Z_1^{(i)})' &= Z_2^{(i)} \\ (Z_2^{(i)})' &= -\frac{\gamma+1}{\xi} Z_2^{(i)} + \frac{N^2}{\xi\gamma} Z_1^{(i)} \end{aligned} \quad (6.4)$$

şeklinde birinci dereceden bir denklem sistemi elde edilir. (6.4) no'lu birinci dereceden denklem sisteminin çözümü için Kronerker delta başlangıç koşulunu kullanarak denklem sistemin çözümü sağlanır. Kronerker delta başlangıç koşulu denklem sisteminin çözümlerinin lineer bağımsızlığını sağlamaktadır [61].

$$Z_j^{(i)} = \delta_{ji}, \quad j, i = 1, 0 \quad (6.5)$$

(6.5) no'lu başlangıç koşulu ile başlayıp sınır koşulları arasında eşit mesafelerde bölünmüş noktadaki  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  değerleri 5. derece Runge-Kutta yöntemi kullanılarak elde edilir. TFM ile elde edilen (6.2) no'lu sıcaklık denklemin sınır koşullarındaki değerleri aşağıdaki gibi matris formunda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \theta_1(1) & \theta_2(1) \\ \theta_1'(R) & \theta_2'(R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Sınır koşullarında elde edilen  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  ve türevleri (6.2) no'lu genel çözümünde yazılarak bu denklem içerisinde bulunan  $b_1$  ve  $b_2$  sabitleri elde edilir. Elde edilen

sabitlerle birlikte sınır koşulları arasında kalan noktalar arasındaki sıcaklık değerleri ve sıcaklığın türevi olan ısı akıları elde edilir. Nokta sayısının fazla olması çözümün doğruluğunu artırmaktadır.

### 6.1.2 Isıl gerilmelerin TFM İle elde edilmesi

Elastik modülün, Poisson oranının ve lineer ısı genleşme katsayısının radyal yönde değiştiği dairesel bir kanatçıktaki sınır koşulları (4.55) ve (4.56) no'lu ifadelerde verilmiş ve gerilme denge denkleminin en genel hali olan (4.64) no'lu denklem elde edilmişti. (4.64) no'lu ikinci dereceden homojen olmayan adi diferansiyel denklemdeki bağımlı değişken boyutsuz deplasman olduğundan, bu denklemin çözülebilmesi için sınır koşullarındaki deplasman değerlerinin bulunması gerekir. Buna göre (4.52) no'lu denklem (4.55) no'lu sınır koşulunda yazılırsa

$$0 = \frac{1}{(1 - \nu_0^2)} \left[ \frac{d\bar{u}}{d\xi} + \nu_0 \bar{u} - (1 + \nu_0) \chi \left( \theta(1) + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \right] \quad (6.7)$$

elde edilir. (6.7) no'lu ifade çarpım durumunda olduğundan

$$\frac{d\bar{u}}{d\xi} + \nu_0 \bar{u} = (1 + \nu_0) \chi \left( \theta(1) + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \quad (6.8)$$

eşitliği elde edilir. Buna göre bu eşitlikteki türev ifadeleri sadece bağımlı değişken ile gösterilirse ve  $\theta(1)$  ifadesi yerine (3.26) no'lu sınır şartındaki değeri yazılırsa, kanatçık tabanındaki deplasman değeri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\bar{u}' + \nu_0 \bar{u} = (1 + \nu_0) \chi \left( \frac{T_b}{T_b - T_\infty} \right) \quad (6.9)$$

(4.52) no'lu denklem (4.56) no'lu sınır koşulunda yazılırsa

$$0 = \frac{R^\beta}{(1 - \nu_0^2 R^{2\psi})} \left[ \frac{d\bar{u}}{d\xi} + \nu_0 R^\psi \frac{\bar{u}}{R} - (1 + \nu_0 R^\psi) R^\lambda \chi \left( \theta(R) + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \right] \quad (6.10)$$

elde edilir. (6.10) no'lu ifade çarpım durumunda olduğundan

$$\frac{d\bar{u}}{d\xi} + \nu_0 R^\psi \frac{\bar{u}}{R} = (1 + \nu_0 R^\psi) R^\lambda \chi \left( \theta(R) + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \quad (6.11)$$

eşitliği elde edilir. Buna göre bu eşitlikteki türev ifadeleri sadece bağımlı değişken ile gösterilirse kanatçık ucundaki deplasman değeri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\bar{u}' + \nu_0 R^{\psi-1} \bar{u} = (1 + \nu_0 R^\psi) R^\lambda \chi \left( \theta(R) + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) \quad (6.12)$$

(4.64) no'lu ikinci dereceden homojen olmayan adi diferansiyel denklemdeki türev ifadeleri sadece bağımlı değişken ile gösterilirse aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\bar{u}'' + P(\xi)\bar{u}' + Q(\xi)\bar{u} = S(\xi) \quad (6.13)$$

(6.13) no'lu denklemde geçen  $P(\xi)$ ,  $Q(\xi)$  ve  $S(\xi)$  in değerleri aşağıda verilmiştir.

$$P(\xi) = \frac{\frac{\beta + 1}{\xi}(1 - v_0^2 \xi^{2\psi}) + 2\psi v_0^2 \xi^{2\psi-1}}{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})}$$

$$Q(\xi) = \frac{\frac{(v_0(\beta + \psi)\xi^\psi - 1)}{\xi^2}(1 - v_0^2 \xi^{2\psi}) + 2\psi v_0^3 \xi^{3\psi-2}}{(1 - v_0^2 \xi^{2\psi})}$$

$$S(\xi) = \left( (\beta + \lambda) \xi^{\lambda-1} (1 - v_0 \xi^\psi) + \psi v_0 \xi^{\lambda+\psi-1} \right) \frac{(1 + v_0 \xi^\psi)}{(1 - v_0 \xi^\psi)} \chi \left( \theta + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right) + \xi^\lambda (1 + v_0 \xi^\psi) \chi \frac{d\theta}{d\xi}$$

(6.13) no'lu denklemin genel çözümü

$$\bar{u} = b_i \bar{u}_i + \bar{u}_p, \quad i = 1, 2 \quad (6.14)$$

şeklinde olmalıdır.  $\bar{u}_i$  ve  $\bar{u}_p$  (6.13) no'lu denklemin homojen ve özel çözümlerini,  $b_i$  ise (6.9) ve (6.12) no'lu sınır koşullarından hesaplanabilen sabitleri ifade etmektedir. TFM sınır problemlerinin çözümünde kullanılması sebebi ile ilk olarak ikinci dereceden adi diferansiyel denklem olan (6.13) no'lu denklemi birinci dereceden bir denkleme dönüştürmek gerekir. İkinci dereceden homojen olmayan adi diferansiyel denklemin homojen çözümünü birinci dereceden diferansiyel denkleme dönüştürmek için

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= Z_1^{(i)} \\ \bar{u}'_i &= Z_2^{(i)} \end{aligned} \quad (6.15)$$

parametreleri ve özel çözümünün birinci dereceden denkleme dönüştürmek için

$$\begin{aligned} \bar{u}_p &= Z_1^{(p)} \\ \bar{u}'_p &= Z_2^{(p)} \end{aligned} \quad (6.16)$$



parametreleri kullanılır. (6.13) no'lu diferansiyel denklem, (6.15) ve (6.16) no'lu ifadede verilen değişkenler kullanılarak yazılırsa homojen kısım için

$$\begin{aligned} (Z_1^{(i)})' &= Z_2^{(i)} \\ (Z_2^{(i)})' &= -P(\xi)Z_2^{(i)} - Q(\xi)Z_1^{(i)} \end{aligned} \quad (6.17)$$

özel kısım için

$$\begin{aligned} (Z_1^{(p)})' &= Z_2^{(p)} \\ (Z_2^{(p)})' &= -P(\xi)Z_2^{(p)} - Q(\xi)Z_1^{(p)} + S(\xi) \end{aligned} \quad (6.18)$$

şeklinde birinci dereceden denklem sistemleri elde edilir. (6.17) ve (6.18) no'lu birinci dereceden denklem sistemlerinin çözümü için Kronerker delta başlangıç koşulunu kullanarak denklem sistemlerinin çözümü sağlanır. Kronerker delta başlangıç koşulu, denklem sistemlerindeki çözümlerinin lineer bağımsızlığını sağlamaktadır.[61]

$$Z_j^{(i)} = \delta_{ji}, \quad j, i = 1, 0 \quad (6.19)$$

(6.14) no'lu başlangıç koşulu ile başlayıp sınır koşulları arasında eşit mesafelerde bölünmüş noktadaki  $\bar{u}_1$  ve  $\bar{u}_2$  değerleri 5. derece Runge-Kutta yöntemi kullanılarak elde edilir. TFM ile elde edilen (6.10) no'lu sıcaklık denkleminin sınır koşullarındaki değerleri aşığıdaki gibi matris formunda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Yukarıda matris içinde verilen ifadelerin değerleri aşığıda verilmiştir.

$$A_{11} = \bar{u}'_1 + v_0\bar{u}_1, \quad A_{12} = \bar{u}'_2 + v_0\bar{u}_2, \quad A_{13} = \bar{u}'_p + v_0\bar{u}_p$$

$$A_{21} = \bar{u}'_1 + v_0R^{\psi-1}\bar{u}_1, \quad A_{22} = \bar{u}'_2 + v_0R^{\psi-1}\bar{u}_2, \quad A_{23} = \bar{u}'_p + v_0R^{\psi-1}\bar{u}_p$$

$$RHS_1 = (1 + v_0)\chi \left( \frac{T_b}{T_b - T_\infty} \right), \quad RHS_2 = (1 + v_0R^\psi)R^\lambda \chi \left( \theta(R) + \frac{T_\infty}{T_b - T_\infty} \right)$$

Sınır koşullarından elde edilen  $\bar{u}_1$ ,  $\bar{u}_2$  ve  $\bar{u}_p$  ile türev değerleri, (6.14) no'lu genel çözümünde yerine yazılarak bu denklem içerisinde bulunan  $b_1$  ve  $b_2$  sabitleri elde edilir. Elde edilen sabitlerle birlikte sınır koşulları arasında kalan noktalar arasındaki deplasman ve deplasman değerlerinin türevleri olan radyal gerinmeler elde edilir. Nokta sayısının fazla olması çözümün doğruluğunu artırmaktadır.

## 7. BULGULAR VE TARTIŞMALAR

### 7.1 Analitik ve nümerik sonuçların karşılaştırması

FDM'den yapılmış, elastisite modülü, lineer ısıl genleşme katsayısı ve ısıl iletkenliği radyal yönde boyutsuz yarıçapın kuvvet fonksiyonu olarak değiştiği, Poisson oranının ise sabit olduğu düşünülen dairesel bir kanatçıktaki sıcaklık dağılımları ve ısıl gerilmeler hem analitik yöntem hem de TFM kullanılarak elde edilmiştir. Her iki yöntemle de elde edilen sonuçlar Çizelge 7.1'de karşılaştırılarak TFM'nin doğruluğu test edilmiştir.

Çizelge 7.1 TFM ve analitik yöntem ile elde edilen sıcaklık ve gerilmelerin karşılaştırılması

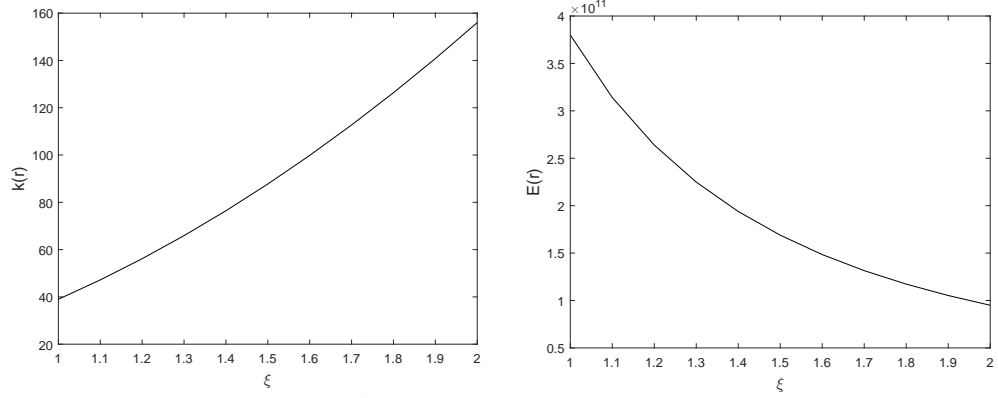
$\xi$	$\theta$		$S_r$		$S_\phi$	
	Analitik	Nümerik	Analitik	Nümerik	Analitik	Nümerik
1	1	1	0	0	0,00003122	0,00003745
1,1	0,93698584	0,93698584	0,00000285	0,00000261	0,00002952	0,00003404
1,2	0,89314863	0,89314863	0,00000474	0,00000446	0,00002125	0,00002462
1,3	0,86234099	0,86234099	0,00000565	0,00000538	0,00001179	0,00001437
1,4	0,84064036	0,84064036	0,00000577	0,00000554	0,00000308	0,00000509
1,5	0,82545699	0,82545699	0,00000534	0,00000515	-0,00000429	-0,00000269
1,6	0,81503080	0,81503080	0,00000454	0,00000441	-0,00001028	-0,00000899
1,7	0,80813555	0,80813555	0,00000352	0,00000343	-0,00001503	-0,00001397
1,8	0,80389831	0,80389831	0,00000239	0,00000233	-0,00001874	-0,00001785
1,9	0,80168589	0,80168589	0,00000120	0,00000117	-0,00002159	-0,00002084
2,0	0,80103136	0,80103136	0	0	-0,00002376	-0,00002312

Yukarıdaki çizelge oluşturulurken, FDM'den yapılmış dairesel kanatçığın iç yüzeyinde kullanılan seramik malzemenin mekanik ve ısıl özelliklerinin aşağıdaki gibi olduğu düşünülmüştür.

$$E_s = 380 \text{ Gpa}, \quad k_s = 39 \text{ W/mK}, \quad \alpha_s = 7.4 \times 10^{-6} \text{ C}^{-1}, \quad \nu_s = 0.22$$

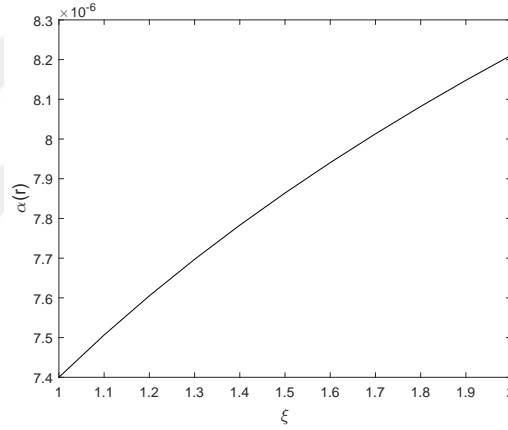
Ayrıca boyutsuz dış yarıçapı  $R = 2$ , kanatçık parametresi  $N = 0.7746$  alınmış ısıl ve mekanik özelliklerin homojensizlik katsayıları  $\beta = -2$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\lambda =$

0.15 olduğu varsayılmıştır. Homojensizlik parametrelerine göre dairesel kanatçığın elastisite modülü, ısı iletkenliği ve lineer ısı genleşmesindeki değişimi Şekil 7.1’de verilmiştir.



(a) Isıl iletkenlik

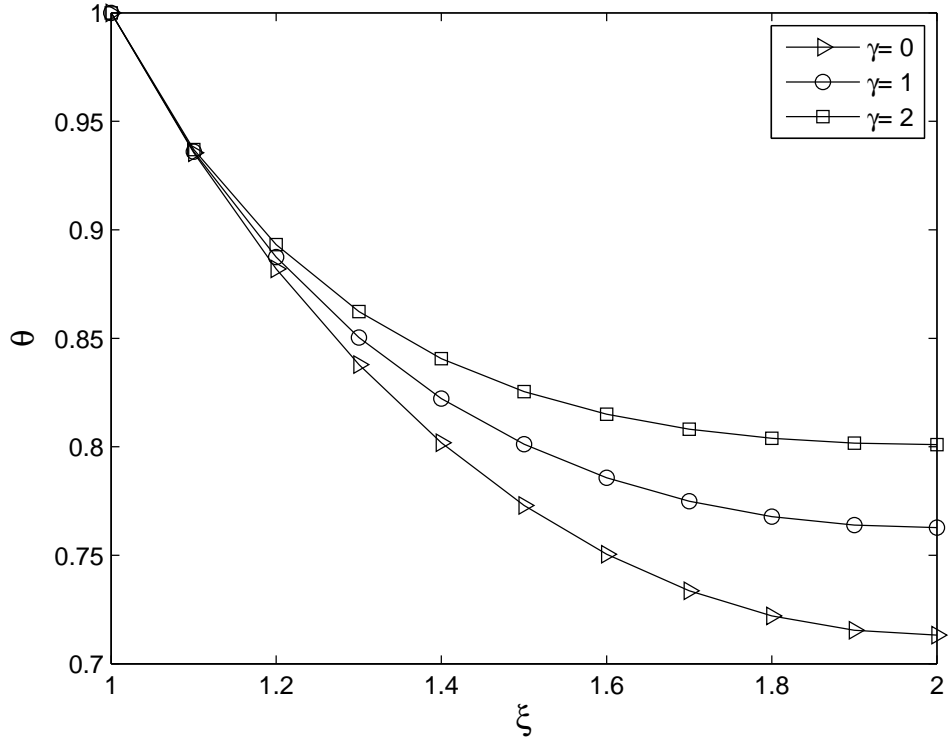
(b) Elastisite modülü



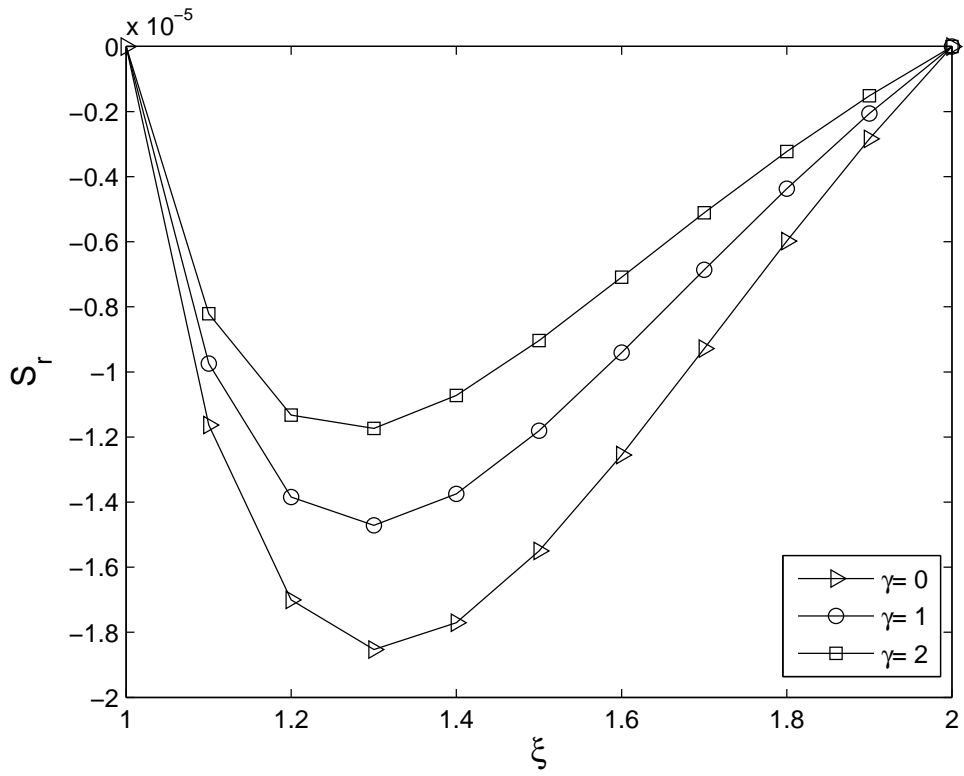
(c) Lineer ısı genleşme katsayısı

Şekil 7.1 FGM kanatçıkta radyal eksen boyunca elastisite modülü, ısı iletkenlik ve lineer ısı genleşmesindeki değişim.

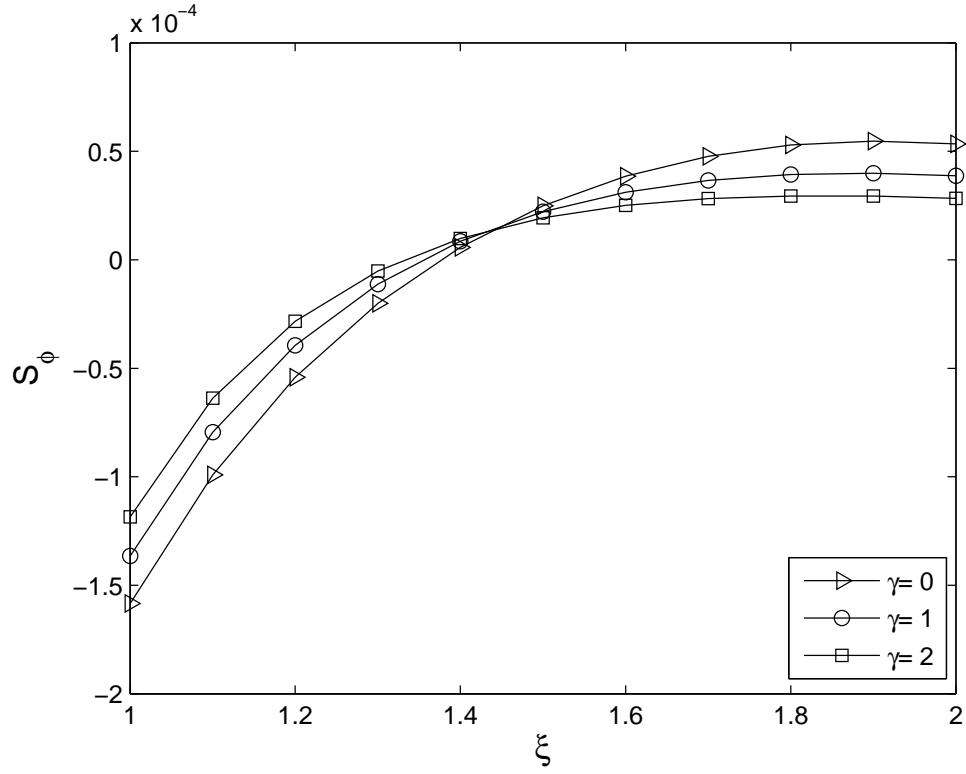
Çizelge 7.1 oluşturulurken Matlab paket programı kullanılmıştır. Kanatçık iç ve dış yarıçapı arasında 10 nokta kullanıldığında en yüksek hata  $1,29 \times 10^{-4}$ , 20 nokta kullanıldığında  $6,33 \times 10^{-5}$ , 50 nokta kullanıldığında  $2,51 \times 10^{-5}$ , 100 nokta kullanıldığında  $1,25 \times 10^{-5}$  olarak elde edilmektedir. Buna göre kanatçık iç ve dış çapı arasındaki nokta sayısı artırılması TFM'nun doğruluğu artırmaktadır.



Şekil 7.2  $\gamma$ 'nin sıcaklık dağılımı üzerine etkisi.  $\beta = \lambda = \psi = 0$



Şekil 7.3  $\gamma$ 'nin radyal gerilme üzerine etkisi.  $\beta = \lambda = \psi = 0$



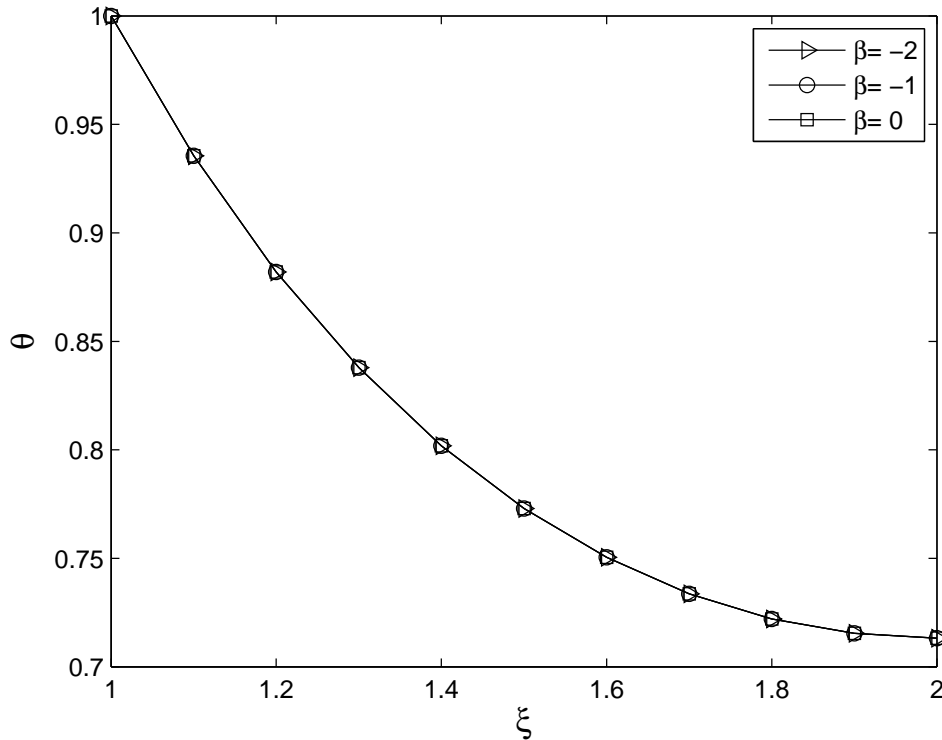
Şekil 7.4  $\gamma$ 'nın teğetsel gerilme üzerine etkisi.  $\beta = \lambda = \psi = 0$

Şekil 7.2 ile Şekil 7.4 arasında verilen grafiklerde FDM'den yapılmış dairesel bir kanatçıktaki değişken ısı iletimin sıcaklık dağılımı, radyal gerilme ve teğetsel gerilme üzerindeki etkileri gösterilmiştir. Şekil 7.2'deki boyutsuz yarıçap-sıcaklık grafiğinde  $\gamma$ 'nın sıfır olduğu yani homojen malzeme durumu incelendiğinde, kanatçık üzerinde çevreye ısı transfer edilmesi sebebi ile, kanatçık ucuna doğru sıcaklığın azaldığını görürüz.  $\gamma$ 'nın artması ile birlikte ısı iletkenlik artmaktadır. Isıl iletiminin artmasına rağmen ısı transfer katsayısının sabit olması nedeni ile kanatçık ucuna doğru daha fazla ısı iletilmekte bu sebeple kanatçık uç sıcaklığı  $\gamma$ 'nın artması ile birlikte artmaktadır.

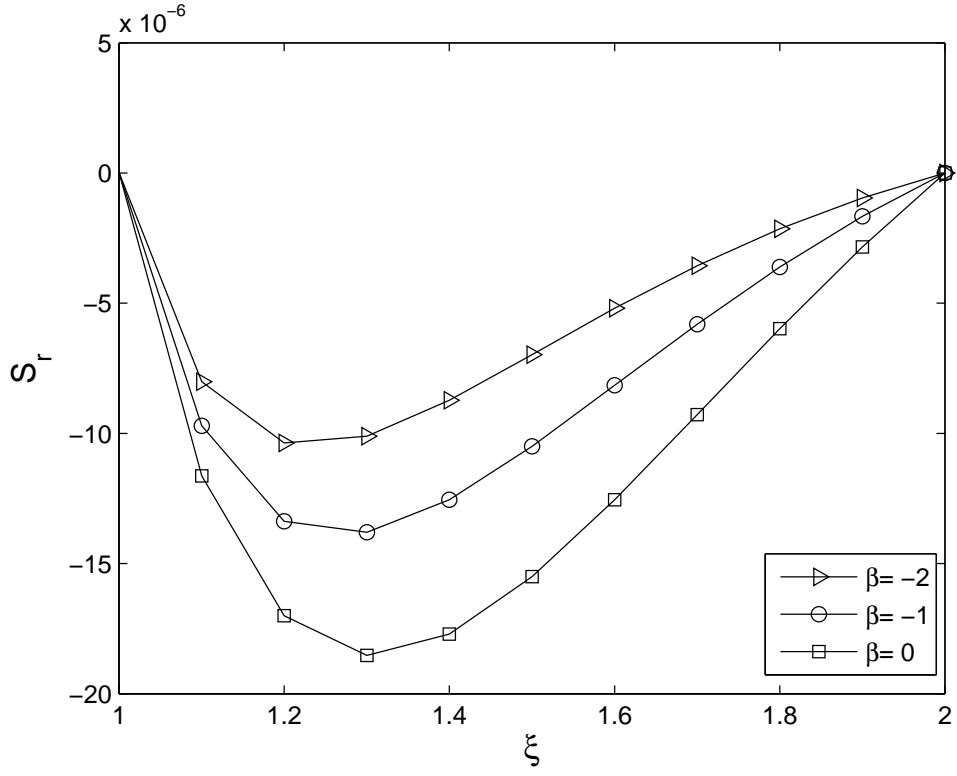
Bir dairesel kanatçıkta oluşan gerilmeler kanatçık tabanı ile kanatçık ucu arasındaki sıcaklık farkından kaynaklanmaktadır. Sıcaklık farkından dolayı sıcak yüzey olan kanatçık tabanı, tabana göre daha soğuk olan kanatçık ucuna göre daha fazla genişleyecek ve kanatçık üzerinde basma gerilmesi oluşmasına sebep olacaktır. Şekil 7.3'deki boyutsuz yarıçap-radyal gerilme grafiğinde  $\gamma$ 'nın sıfır olduğu durum incelenirse radyal gerilmenin kanatçık tabanında sıfır olduğu, kanatçık ucuna doğru

basma yönünde arttığı, kanatçık içinde tabana yakın bir noktada maksimum değerine ulaştığı görülmektedir. Bu noktadan sonra kanatçık ucuna doğru basma yönünde azalmakta ve kanatçık ucunda sıfır olmaktadır. Kanatçık tabanında ve ucunda radyal gerilmelerin sıfır olmasının sebebi, kanatçıkta traksiyon olmadığı düşünülmesidir.  $\gamma$ 'nın artması ile birlikte kanatçık uç sıcaklığının artar ve bu sebeple genişleme neticesinde oluşan radyal gerilmeler azalır. Ayrıca  $\gamma$ 'nın her üç durumu için de maksimum radyal gerilmenin olduğu nokta değişmemektedir.

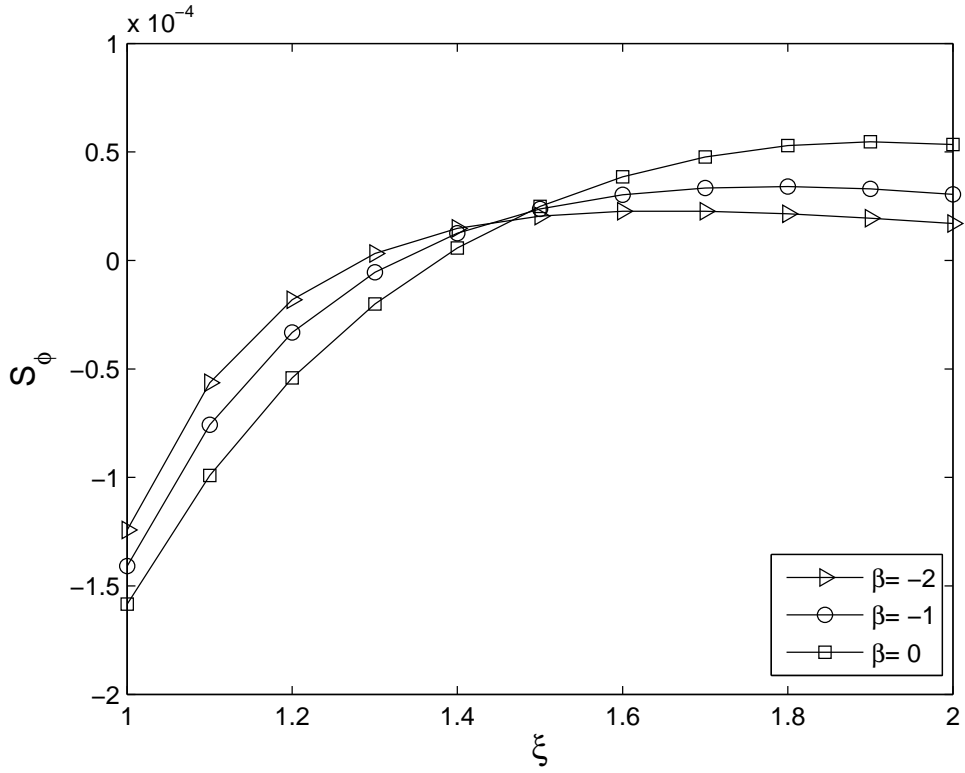
Şekil 7.4'deki boyutsuz yarıçap-teğetsel gerilme grafiğinde  $\gamma$ 'nın sıfır olduğu durum incelenirse teğetsel gerilme, kanatçık tabanında basma yönünde maksimum değerde olup kanatçık ucuna doğru basma yönünde azalmakta ve tabana yakın bir noktada sıfır olup çekme yönünde artmaktadır. Kanatçık ucuna yakın bir yerde maksimum çekme gerilmesi oluşmakta ve bu noktadan sonra kanatçık ucuna doğru bir miktar düşmektedir.  $\gamma$ 'nın artması ile birlikte hem çekme yönündeki hem de basma yönündeki gerilmeler radyal gerilmenin azalmasına bağlı olarak düşmektedir.



Şekil 7.5  $\beta$ 'nin sıcaklık dağılımı üzerine etkisi.  $\gamma = \lambda = \psi = 0$



Şekil 7.6  $\beta$ 'nin radyal gerilme üzerine etkisi.  $\gamma = \lambda = \psi = 0$

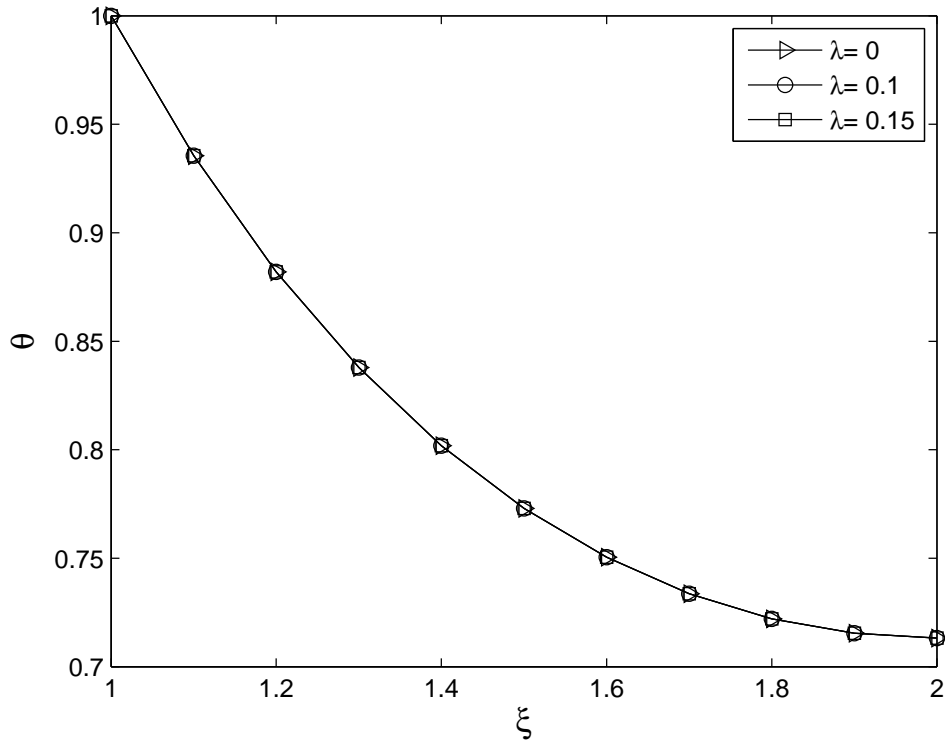


Şekil 7.7  $\beta$ 'nin teğetsel gerilme üzerine etkisi.  $\gamma = \lambda = \psi = 0$

Şekil 7.5 ile Şekil 7.7 arasında verilen grafiklerde FDM'den yapılmış dairesel bir kanatçıktaki değişken elastisite modülünün sıcaklık dağılımı, radyal gerilme ve teğetsel gerilme üzerindeki etkileri gösterilmiştir. Şekil 7.5'deki boyutsuz yarıçap-sıcaklık grafiği incelendiğinde  $\beta$ 'daki değişimin sıcaklık dağılımı üzerine bir etkisi olmadığı görülmektedir. Bunun sebebi sıcaklık dağılımının, mekanik bir özellik olan elastisite modülüne bağlı olmamasıdır.

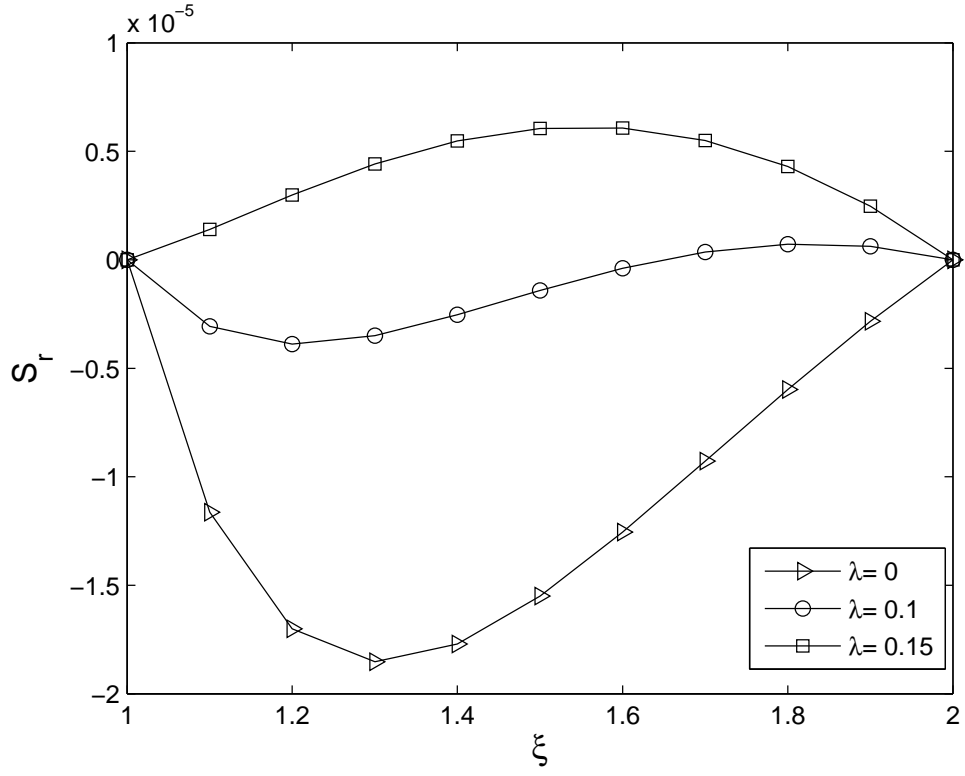
$\beta$ 'nın azalması ile birlikte elastisite modülü azalmakta neticede Hooke kanuna göre kanatçık üzerinde oluşan gerilmeler azalmaktadır. Şekil 7.6'da verilen boyutsuz yarıçap-radyal gerilme grafiği incelendiğinde  $\beta$ 'nın düşmesi ile birlikte radyal gerilmeler basma yönünde azalmakta ayrıca maksimum basma gerilmesinin olduğu nokta kanatçık tabanına yaklaşmaktadır.

Şekil 7.7'de verilen boyutsuz yarıçap-teğetsel gerilme grafiği incelendiğinde  $\beta$ 'nın düşmesi ile birlikte teğetsel gerilmeler hem çekme hem de basma yönünde düşmekte ve gerilmenin basmadan çekmeye döndüğü nokta tabana yaklaşmaktadır.

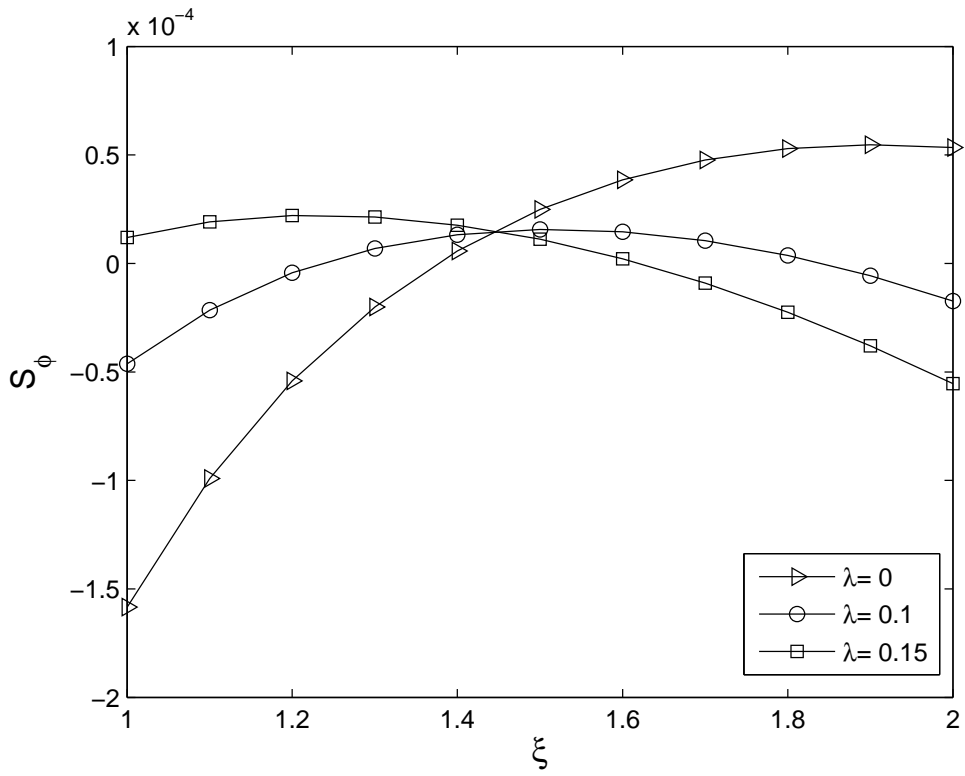


Şekil 7.8  $\lambda$ 'nın sıcaklık dağılımı üzerine etkisi.  $\beta = \gamma = \psi = 0$





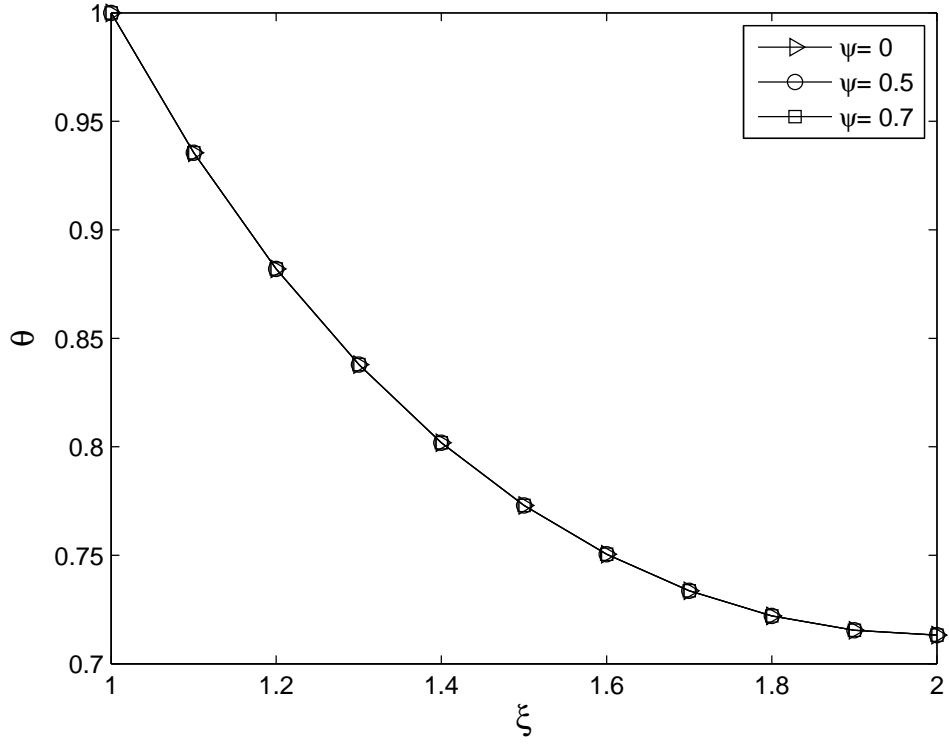
Şekil 7.9  $\lambda$ 'nın radyal gerilme üzerine etkisi.  $\beta = \gamma = \psi = 0$



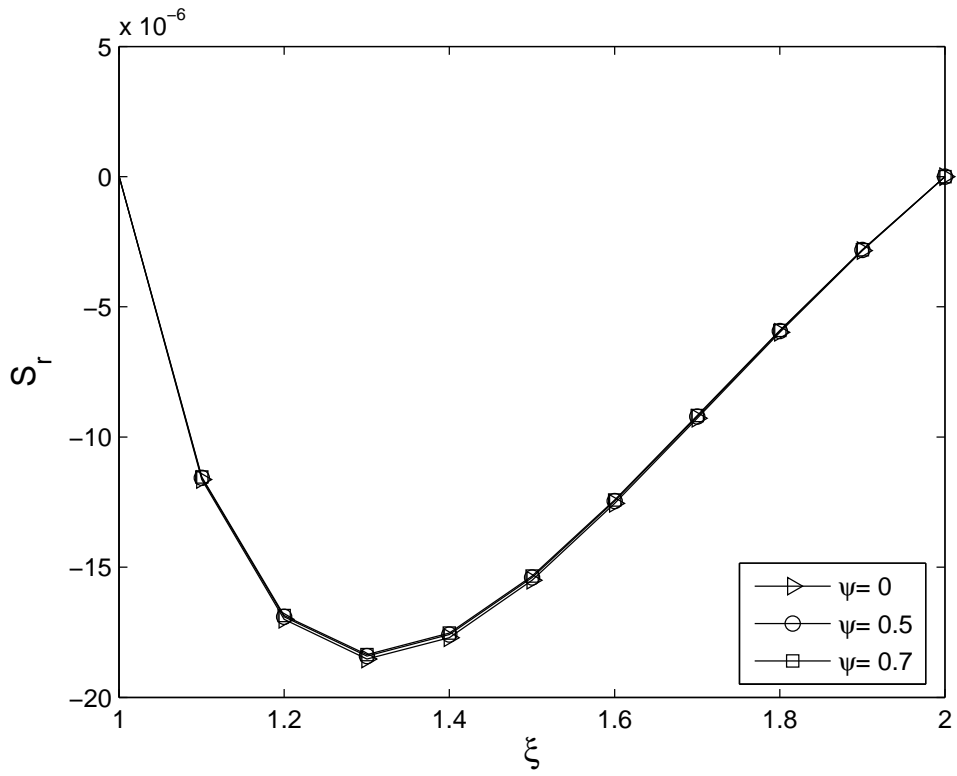
Şekil 7.10  $\lambda$ 'nın teğetsel gerilme üzerine etkisi.  $\beta = \gamma = \psi = 0$

Şekil 7.8 ile Şekil 7.10 arasında verilen grafiklerde FDM'den yapılmış dairesel bir kanatçıktaki değişken lineer genleşme katsayısının sıcaklık dağılımı, radyal gerilme ve teğetsel gerilme üzerindeki etkileri gösterilmiştir. Şekil 7.8'deki boyutsuz yarıçap-sıcaklık grafiği incelendiğinde  $\lambda$ 'daki değişimin sıcaklık dağılımı üzerine bir etkisi olmadığı görülmektedir. Bunun sebebi sıcaklık dağılımının, lineer genleşme katsayısına bağlı olmamasıdır.

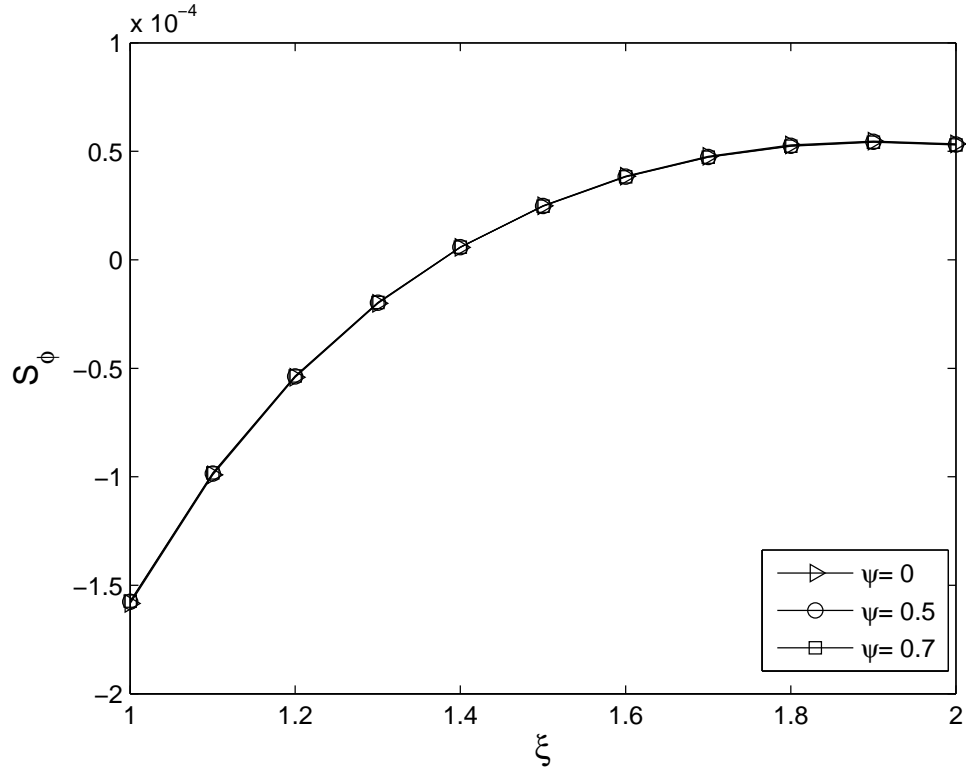
Daha önceden de belirtildiği gibi dairesel bir kanatçıkta oluşan ısıl gerilmelerin sebebi, sıcak olan kanatçık tabanının soğuk olan kanatçık ucuna göre daha fazla genleşmesidir. Genleşme katsayısının kanatçık ucuna doğru artması, kanatçık ucunun taban kadar sıcak olmasada daha yüksek genleşme katsayısı nedeni ile daha fazla genleşmesine neden olacaktır. Şekil 7.9'da verilen boyutsuz yarıçap-radyal gerilme grafiği incelendiğinde  $\lambda$ 'nın artması ile birlikte basma yönündeki gerilmeler azalmakta hatta çekme yönüne dönmektedir. Şekil 7.10'da verilen boyutsuz yarıçap-teğetsel gerilme grafiği incelendiğinde teğetsel gerilmeler  $\lambda$ 'nın artması ile birlikte kanatçık tabanında basma iken çekme yönüne, kanatçık ucunda çekme iken basma yönüne dönmektedir.



Şekil 7.11  $\psi$ 'nin sıcaklık dağılımı üzerine etkisi.  $\beta = \gamma = \lambda = 0$



Şekil 7.12  $\psi$ 'nin radyal gerilme üzerine etkisi.  $\beta = \gamma = \lambda = 0$



Şekil 7.13  $\psi$ 'nin teğetsel gerilme üzerine etkisi.  $\beta = \gamma = \lambda = 0$

Şekil 7.11 ile Şekil 7.13 arasında verilen grafiklerde FDM'den yapılmış dairesel bir kanatçıktaki değişken Poisson oranının sıcaklık dağılımı, radyal gerilme ve teğetsel gerilme üzerindeki etkileri gösterilmiştir. Şekil 7.11'deki boyutsuz yarıçap-sıcaklık grafiği incelendiğinde  $\psi$ 'daki değişimin sıcaklık dağılımı üzerine bir etkisi olmadığı görülmektedir. Bunun sebebi sıcaklık dağılımının, mekanik bir özellik olan Poisson oranına bağlı olmamasıdır.

Şekil 7.12'de verilen boyutsuz yarıçap-radyal gerilme grafiği incelendiğinde  $\psi$ 'ın artması ile birlikte basma yönündeki gerilmeler az miktarda azalmaktadır. Şekil 7.13'de verilen boyutsuz yarıçap-teğetsel gerilme grafiği incelendiğinde  $\psi$ 'ın artması ile teğetsel gerilmenin pek değişmediği gözlenmektedir.

Şekil 7.2-7.13 arasında grafikler incelendiğinde kanatçıktaki sıcaklık dağılımını sadece  $\gamma$ 'daki değişimin etkilediği,  $\beta$  ve  $\lambda$ 'daki değişimler ise kanatçıkta oluşacak olan ısı gerilmeleri etkilediği görülmüştür. Ayrıca  $\psi$ 'daki değişimin ise ısı gerilmeleri üzerine çok az bir etkisi olduğu görülmüştür.

## 7.2 Homojen ve FDM'den yapılmış dairesel kanatçıkların karşılaştırılması

Elastik modülün, ısı iletkenliğin, lineer ısı genleşme katsayısının ve Poisson oranın kanatçık boyunca değiştii FDM'den yapılmış dairesel bir kanatçıkta kullanılan seramik malzemenin mekanik ve ısı özelliklerinin aşğıdaki gibi olduğu düşünölmüştür.

$$E_s = 380 \text{ Gpa}, \quad k_s = 39 \text{ W/mK}, \quad \alpha_s = 7.4 \times 10^{-6} \text{ C}^{-1} \quad \nu_s = 0.22$$

Homojensizlik katsayılarının ise aşğıdaki gibi olduğu varsayılmıştır.

$$\beta = -2, \quad \gamma = 2, \quad \lambda = 0.15, \quad \psi = 0.5$$

Yukarıda belirtilen homojensizlik katsayılarına göre uç kısımda bulunan metal malzemenin mekanik ve ısı özellikleri (3.22) ve (4.47)-(4.49) arasındaki ifadeler kullanılarak aşğıdaki gibi elde edilmiştir.

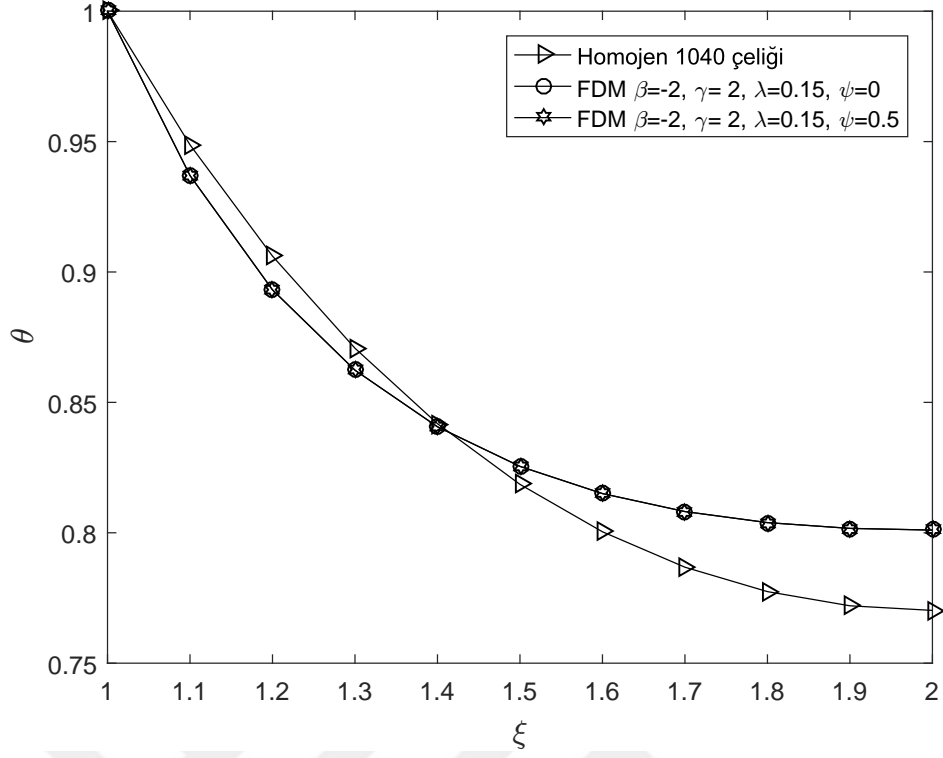
$$E_m = 95 \text{ Gpa}, \quad k_m = 156 \text{ W/mK}, \quad \alpha_m = 8.2 \times 10^{-6} \text{ C}^{-1} \quad \nu_m = 0.33$$

Yukarıdaki özelliklere sahip FDM'den yapılmış dairesel bir kanatçık ile mekanik ve ısı özellikleri aşğıda verilen 1040 alaşımlı çelikten yapılmış homojen bir dairesel kanatçıkta sıcaklık dağılımı ve ısı gerilmelerin karşılaştırılması Şekil 7.14 ile Şekil 7.16 arasında verilen grafiklerde gösterilmiştir.

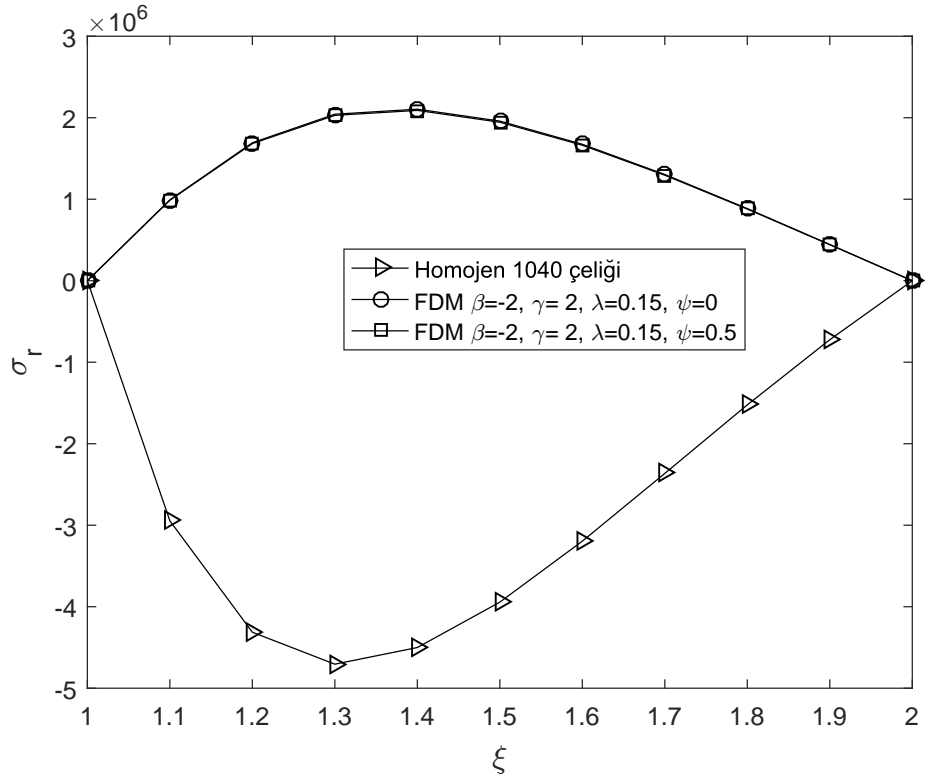
Şekil 7.14' de verilen homojen malzeme ile FDM malzemelerin sıcaklık dağılımı incelendiğinde, homojen malzemedен yapılmış kanatçıkta tabana yakın bölgenin azda olsa FDM kanatçıklara göre daha sıcak olduğu fakat kanatçık uç sıcaklıkların FDM kanatçıklarda daha yüksek olduğu görölmektedir.

$$E_{sa} = 207, \quad k_{sa} = 51.9 \text{ W/mK}, \quad \alpha_{sa} = 11.3 \times 10^{-6} \text{ C}^{-1} \quad \nu_{sa} = 0.30$$

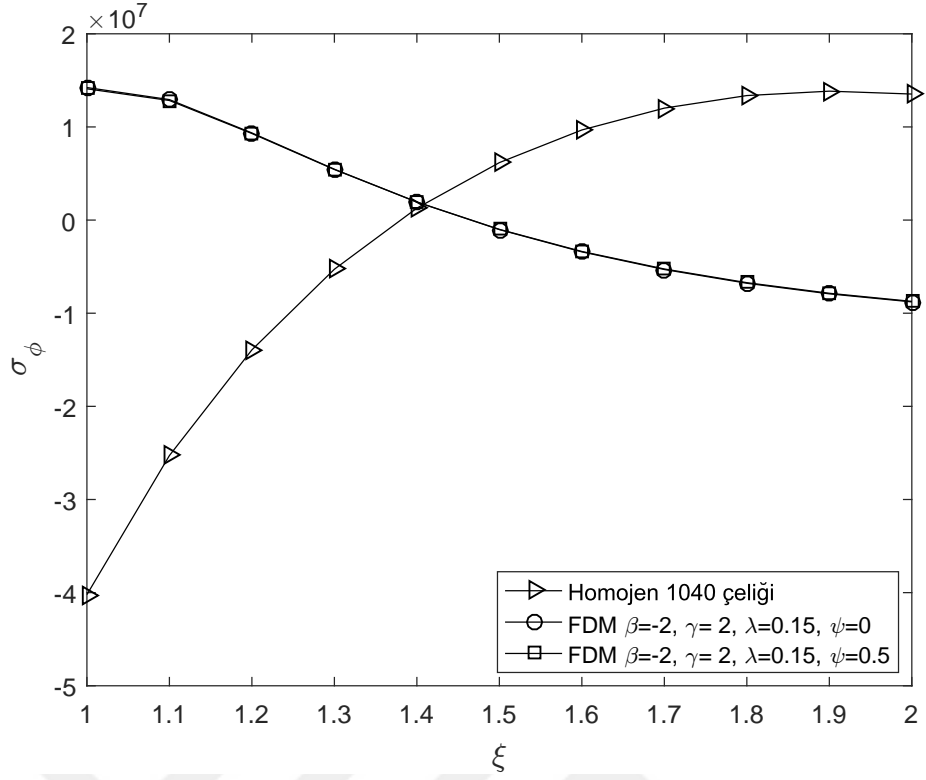
Şekil 7.14 ile Şekil 7.16 arasında verilen grafikler incelendiğinde Poisson oranı sabit ve değişken olan FDM kanatçıklardaki sıcaklık dağılımları ile kanatçıkta oluşan ısı gerilme dağılımlarının neredeyse aynı olduğu görölmektedir. Bu sebeple Poisson oranındaki değişimin ihmal edilmesi sonuçları pek etkilemeyecektir.



Şekil 7.14 Homojen ve FDM kanatçıklardaki sıcaklık dağılımının karşılaştırılması.



Şekil 7.15 Homojen ve FDM kanatçıklardaki radyal gerilmelerin karşılaştırılması.



Şekil 7.16 Homojen ve FDM kanatçıklardaki teğetsel gerilmelerin karşılaştırılması.

Şekil 7.14' de verilen homojen malzeme ile FDM malzemelerin sıcaklık dağılımı incelendiğinde, homojen malzemedan yapılmış kanatçıktaki tabana yakın bölgenin azda olsa FDM kanatçıklara göre daha sıcak olduğu fakat kanatçık uç sıcaklıkların FDM kanatçıklarda daha yüksek olduğu görülmektedir.

Şekil 7.15'de verilmiş olan boyutsuz yarıçap-radyal gerilme grafiği incelendiğinde homojen malzemedan yapılmış kanatçıklarda basma yönünde gerilmeler oluşurken FDM kanatçıklarda çekme yönünde gerilmeler oluşmakta ve mutlak değerce homojen malzemedan yapılmış kanatçıklara göre daha düşüktür.

Şekil 7.16'da verilmiş olan boyutsuz yarıçap-teğetsel gerilme grafiği incelendiğinde homojen malzemedan yapılmış kanatçıktaki gerilmeler tabanda basma yönündeyken kanatçık ucuna doğru çekme yönüne dönmektedir. FDM kanatçıktaki gerilmeler tabanda çekme yönündeyken kanatçık ucuna doğru basma yönüne dönmektedir. Ayrıca FDM kanatçıklardaki gerilme değerleri mutlak değerce homojen kanatçıktaki değerlere göre daha azdır.

## 8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde yapılan çalışmada şu sonuçlara ulaşılmıştır.

- Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu (TFM) dairesel kanatçıklardaki sıcaklık dağılımları ve gerilmelerin hesaplamasında basit, yüksek doğrulukla ve verimli bir şekilde uygulanmıştır.
- Isıl iletkenlik parametresinin ( $\gamma$ ) kanatçıktaki sıcaklık dağılımı üzerinde doğru orantılı bir etkisi varken gerilmeler üzerine ters orantılı etkisi vardır.
- Elastik modül parametresinin ( $\beta$ ) gerilmeler üzerinde ters orantılı bir etkiye sahip olup, sıcaklık dağılımı üzerinde etkisi yoktur.
- Lineer ısıl genleşme parametresinin ( $\lambda$ ) gerilmeler üzerinde ters orantılı bir etkiye sahip olup, sıcaklık dağılımı üzerinde etkisi yoktur. Küçük değişimlerde bile ısıl gerilmeleri oldukça fazla etkilediğinden dolayı gerilmeler üzerinde en büyük etkiye sahip olan parametredir,
- Poisson oranı parametresinin ( $\psi$ ) ısıl gerilmeler üzerinde ters orantılı çok küçük bir etkiye sahip olup, sıcaklık dağılımı üzerinde etkisi yoktur.
- Poisson oranının değişken olarak alınmasının gerilmeler üzerinde çok az bir etkisi olması nedeni ile ısıl gerilmelerin belirlenmesinde sabit olarak alınması ısıl gerilme sonuçlarını kayda değer ölçüde etkilemeyecektir.
- FDM'den yapılmış kanatçıklarda, homojen malzemeden yapılmış kanatçıklara göre daha yüksek uç sıcaklıklara ulaşabilirken daha az ısıl gerilmelere maruz kalabilecekleri görülmüştür.



## KAYNAKLAR

- [1] Biswas, G., Mitra, K., and Fiebig, M., Heat transfer enhancement in fin-tube heat exchangers by winglet type vortex generators, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 37(2), 283-291, 1994.
- [2] Kraus, A. D., Aziz, A., Welty, J. R., *Extended surface heat transfer*, John Wiley and Sons, New York, 2001.
- [3] Incropera, F., Dewitt, D. P., Bergman, T. L., Lavine, A. S., *Fundamentals of heat and mass transfer*, John Wiley and Sons, New York, 2007.
- [4] Mallick, A., Ghosal, S., Sarkar, P. K., Ranjan, R., Homotopy perturbation method for thermal stresses in an annular fin with variable thermal conductivity, *Journal of Thermal Stresses*, 38(1), 110-132, 2015
- [5] Wu, S.S., Analysis on transient thermal stresses in an annular fin, *Journal of Thermal Stresses*, 20, 591-615, 1997.
- [6] Koizumi, M., FGM activities in Japan, *Composites Part B*, 28B, 1-4, 1997
- [7] Gardner, K. A., Efficiency of extended surface, *Trans. ASME*, 67, 621-631, 1945.
- [8] Brown, A., Optimum dimensions of uniform annular fins, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 8, 665-662, 1965.
- [9] Yang, J. W., Periodic heat transfer in straight fins, *Journal of Heat Transfer, Trans. ASME*, 94, 310-314, 1972.
- [10] Aziz, A., Periodic heat transfer in annular fins, *Journal of heat transfer, Trans. ASME*, 97, 302-303, 1975.
- [11] Aziz, A., Enamul Huq, S. M., Perturbation solution for convecting fin with variable thermal conductivity, *Journal of Heat Transfer*, 97, 300-301, 1975.
- [12] Krane, R. J., Discussion on a previously published paper by Aziz A. and Enamul Hug S.M., *Journal of Heat Transfer*, 98, 685-686, 1976.
- [13] Muzzio, A., Approximate solution for convective fins with variable thermal conductivity, *Journal of Heat Transfer*, 98, 680-682, 1976.
- [14] Razelos, P., Imre, K., Optimum dimension of circular fins with variable thermal parameters, *Journal of Heat Transfer, Trans. ASME*, 102, 420-425, 1980.
- [15] Ullmann, A., Kalman, H., Efficiency and optimized dimensions of annular fins of different cross-section shapes, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 32(6), 1105-1110,

1989.

- [16] Campo, A., Harrison L., Prediction of safe tip temperature in uniform annular fins for the design of thermal exchnage equipment via sympolic mathematics, *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, 21(4), 531-538, 1994.
- [17] Zubair, S.M., Al-Garni, A.Z., Nizami, J.S., The optimal dimensions of circular fins with variable profile and temperature-dependent thermal conductivity, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 39(16), 3431-3439, 1996.
- [18] Campo, A., Stuffle, R.E., Symbolic mathematics for calculation of thermal efficiencies and tip temperatures in annular fins of uniform thickness, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40(2), 490-492, 1996.
- [19] Yu, L.T., Chen, C.K., Application of Taylor transformation to the thermal stresses in isotropic annular fins, *journal of thermal stresses*, 21(8), 781-809,1998.
- [20] Yu, L.T., Chen, C.K., Application of the hybrid method to the transient thermal stresses response in isotropic annular fins, *Journal of Applied Mechanics*, 66, 340-346, 1999.
- [21] YU, L.T., Chen, C.K., Application of the taylor transformation to the transient temperature response of an annular fin, *Heat Transfer Eng.*, 20(1), 78-87, 1999.
- [22] Kundu, B., Das, P. K., Performance analysis and optimization of annular fin with a step change in thickness, *Journal of Heat Transfer, Trans. ASME*, 123(3), 601-604, 2001.
- [23] Chiu, C.H., Chen, C.K., A decomposition method for solving the convective longitudinal fins with variable thermal conductivity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45, 2067-2075, 2002.
- [24] Yang, Y.C., Chu, S.S., Transient coupled thermoelastic analysis of an annular fin, *Int. Comm. Heat and Mass Transfer*, 28(8), 1103-1114, 2001.
- [25] Lee, H. L., Yang, Y. C. ve Chu, S. S., Transient thermoplastic analysis of an annular fin with coupling effect and variable heat transfer coefficient, *Journal of Thermal Stresses*, 25, 1105-1120, 2002.
- [26] Chiu, C.H., Chen, C.K., Application of the decomposition method to thermal stresses in isotropic circular fins with temperature-dependent thermal conductivity, *Acta Mechanica*, 157, 147-158, 2002.
- [27] Chiu, C.H., Chen, C.K., Thermal stresses in annular fins with temperature

- dependent conductivity under periodic boundary condition, *Journal of Thermal Stresses*, 25, 475-492, 2002.
- [28] Mokheimer, E. M. A., Performance of annular fins with different profiles subject to variable heat transfer coefficient, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 45(17), 3631-3642, 2002.
- [29] Bertola, V., Cafaro, E., Cooling fin design, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 17(4), 2003.
- [30] Lee, H.L., yang, Y.C., Function estimation in predicting time-dependent heat flux of an annular fin, *Journal of Thermal Stresses*, 26, 799-813, 2003.
- [31] Arslantürk, C., Performance analysis and optimization of a thermally non-symmetric annular fin, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 31(8), 1143-1153, 2004.
- [32] Kang, H. S., Look, D. C., Optimization of a thermally asymmetric convective and radiating annular fin, *Heat Transfer Engineering*, 28(4), 310-320, 2007.
- [33] Soliman, H.M., Elazhary, A.M., Comment on Cooling , Fin Design, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 22(2), 319-320, 2008.
- [34] Aziz, A., Rahman, M. M., Thermal Performance of a Functionally Graded Radial Fin, *Int J Thermophys*, 30, 1637-1648 , 2009.
- [35] Iborra, A.A., Campo, A., Approximate analytic temperature distribution and efficiency for annular fins of uniform thickness, *International Journal of Thermal Sciences*, 48, 773-780, 2009.
- [36] Kang, H. S., Look, D. C., Optimization of a Trapezoidal Profile Annular Fin, *Heat Transfer Engineering*, 30(5), 359-367, 2009.
- [37] Arslantürk, C., Correlation equations for optimum design of annular fins with temperature dependent thermal conductivity, *Heat Mass Transfer*, 45(4), 519-525, 2009.
- [38] Aziz, A., Fang, T., Alternative solutions for longitudinal fins of rectangular, trapezoidal, and concave parabolic profiles, *Energy Conversion and Management* 51, 2188-2194, 2010.
- [39] Ganji, D.D., Ganji, Z.Z., Ganji, H.D., Determination of temperature distribution for annular fins with temperature dependent thermal conductivity by HPM, *Thermal science*, 15, S111-S115, 2011.
- [40] Qian, J., Heat transfer analysis of uniform annular fin on regular perturbation

- method, Proc. Second Int. Conf. on Mechanic Automation and Control Engg, IEEE 2211, 2011.
- [41] Peng, H. S., Chen, C. L., Hybrid differential transformation and finite difference method to annular fin with temperature-dependent thermal conductivity, International Journal of Heat and Mass Transfer, 54, 2427-2433, 2011.
- [42] Lee, H. L., Chang, W. J., Chen, W. L., Yang, Y. C., Inverse heat transfer analysis of a functionally graded fin to estimate time-dependent base heat flux and temperature distributions, Energy Conversion and Management, 57, 1-7, 2012.
- [43] Khan, W. A., Aziz, A., Transient heat transfer in a functionally graded convecting longitudinal fin. Heat Mass Transfer, 48(10), 1745-1753, 2012.
- [44] Aziz, A., Torabi, M., Zhang, K., Convective-radiative radial fins with convective base heating and convective-radiative tip cooling: Homogeneous and functionally graded materials, Energy Conversion and Management, 74, 366-376, 2013.
- [45] Wang, C. C., Liao, W. J., Yang, Y. C., Hybrid spline difference method for heat transfer and thermal stresses in annular fins, Numerical Heat Transfer Part B, Fundamentals, 64(1), 71-88, 2013.
- [46] Tütüncü, N., Temel, B., An efficient unified method for thermoelastic analysis of functionally graded rotating disks of variable thickness, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 20, 38-46, 2013.
- [47] Hassanzadeh, R., Pekel, H., Heat transfer enhancement in annular fins using functionally graded material, Heat Transfer Asian Research, 42(7), 603-617, 2013.
- [48] Pekel, H., Fgm silindirlerin dinamik ısı gerilme analizi, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Doktora Tezi, Adana, 75, 2014
- [49] Gaba, V. K., Tiwari, A. K., Bhowmick, S., Thermal performance of functionally graded parabolic annular fins having constant weight, journal of mechanical science and technology, 28(10), 4309-4318, 2014
- [50] Mallick, A., Das, R., Application of simplex search method for predicting unknown parameters in an annular fin subjected to thermal stresses, Journal of Thermal Stresses, 37(2), 236-251, 2014.
- [51] Baş, H., Keleş, I., Novel approach to transient thermal stress in an annular fin,

- Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 29(4), 705-710, 2014.
- [52] Gaba, V. K., Tiwari, A. K., Bhowmick, S., Performance of functionally graded exponential annular fins of constant weight, Publisher: InTech, Chapter-3, 2016
- [53] Haghighi, M. R. G., Estimation of heat flux in variable thickness functionally graded annular fin, Iranian Journal of Science and Technology Transactions of Mechanical Engineering, 40(3), 203-214, 2016.
- [54] Darvishi, M. T., Khani, F., Aziz, A., Numerical investigation for a hyperbolic annular fin with temperature dependent thermal conductivity, Propulsion and Power Research, 5(1), 55-62, 2016.
- [55] Roy, R., Ghosal, S., Homotopy perturbation method for the analysis of heat transfer in an annular fin with temperature-dependent thermal conductivity, Journal of Heat Transfer, 139(2), 1223-1231, 2016.
- [56] Mallick, A., Ranjan, R., Das, R., Application of homotopy perturbation method and inverse prediction of thermal parameters for an annular fin subjected to thermal load, Journal of Heat Transfer, 39(3), 298-313 2016.
- [57] Kundu, B., Exact method for annular disc fins with heat generation and nonlinear heating, Journal Of Thermophysics And Heat Transfer, 31(2), 337-345, 2017.
- [58] Cengel, Y.A, Heat transfer a practical approach, McGraw-Hill, 2003.
- [59] Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., Theory of Elasticity, McGraw-Hili, New York, 1970.
- [60] Aktaş, Z., Numerical solutions of two-point boundary value problems, Metu, Depart. of Compt. Eng., 1972.
- [61] Agarwal, R.P., On the method of complementary functions for nonlinear boundary-value problems, Journal of Optimization Theory and Applications, B36(1), 139-144, 1982.
- [62] Roberts, S.M., Shipman, J.S., Fundamental matrix and two-point boundary-value problems, Journal of Optimization Theory and Applications, 28(1), 77-88, 1979.

## ÖZGEÇMİŞ

1. **Adı Soyadı** : Ali YILDIRIM
2. **Doğum Tarihi** : 15 Temmuz 1985
3. **Ünvanı** : Öğretim Görevlisi
4. **Öğrenim Durumu** :

Derece	Alan	Üniversite	Yıl
Lisans	Makina Mühendiliği Bölümü	Çukurova Üniversitesi	2007
Yüksek Lisans	Makina Mühendiliği Bölümü	Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi	2013–

### 5. Akademik Ünvanlar:

Görevi	Bölümü	Kurumu	Yıl
Öğretim Görevlisi	Motorlu Araçlar ve Ulaştırma Teknolojisi Bölümü	Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi	2013–

### 6. İş Tecrübesi:

Görev Ünvanı	Görev Yeri	Yıl
Proje Yöneticisi	SFK Makina	2008-2009
Üretim Mühendisi	Köksan	2009-2009
Üretim Mühendisi	Ceytech Makina	2009-2010
Arge Mühendisi	Temsa	2010-2013

### 7. Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında basılan bildiriler:

- Yarımpabuç D., Yıldırım A., Çelebi K., International Conference on Mathematics and Engineering, 'A practical approach for thermal stress of functionally graded annular fin', 10-12 Mayıs 2017, İstanbul

- Yarımabaç D., Yıldırım A., Çelebi K., International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 'Thermal stress analysis of functionally graded annular fin by Pseudospectral Chebyshev Method', 03-07 Temmuz, 2017
- Yıldırım A., Yarımabaç D., Çelebi K., Eker M., International Mediterranean Science and Engineering Congress, 'The effect of the Poissons ratio on thermal stresses of functionally graded annular fin' , 25-27 Ekim, Adana
- Eker M., Yarımabaç D., Çelebi K., Yıldırım A., International Mediterranean Science and Engineering Congress, 'Stress analysis of functionally graded spherical pressure vessels by pseudospectral chebyshev method', 25-27 Ekim, Adana
- Yıldırım A., Yarımabaç D., Çelebi K., Eker M., International Advanced Researches and Engineering Congress, 'Investigation the Poissons ratio effect on thermal stresses of functionally graded annular fin by using Pseudospectral Chebyshev Method', 16-18 Kasım 2017, Osmaniye
- Eker M., Yarımabaç D., Çelebi K., Yıldırım A., International Advanced Researches and Engineering Congress, 'Stress analysis of functionally graded cylindrical pressure vessels by Pseudospectral Chebyshev Method, 16-18 Kasım 2017, Osmaniye

#### 8. Ödüller:

- 2009 Gaziantep Sanayi Odası inavasyon ödülü