



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜLERİ
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatma TÜLÜCE

**YOUNG TABLOLARI
VE
PLACTIC MONOID**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OSMANİYE – 2017

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

YOUNG TABLOLARI VE PLACTIC MONOİD



Fatma TÛLÛCE

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**OSMANIYE
EYLÛL-2017**

TEZ ONAYI

YOUNG TABLOLARI VE PLACTIC MONOİD

Fatma TLCE tarafından Yrd. Doç. Dr. Basri ÇALIŞKAN danışmanlığında, Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalı'nda hazırlanan bu çalışma, aşağıda imzaları bulunan jüri yeleri tarafından oy birliği/çokluğu ile **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Basri ÇALIŞKAN
Matematik Anabilim Dalı, OK

ye: Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM
Matematik Anabilim Dalı, KS

ye: Prof. Dr. Melis MİNİSKER
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, MK

Yukarıdaki jüri kararı Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve/..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Coşkun ÖZALP
Enstitü Müdürü, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, bu çalışma sonucunda elde edilmeyen her türlü bilgi ve ifade için ilgili kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını ve bu tezin Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Fatma TLCE



ÖZET

YOUNG TABLOLARI VE PLACTIC MONOİD

Fatma TÖLÜCE

Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı
Danışman :Yrd. Doç. Dr. Basri ÇALIŞKAN

Eylül 2017, 48 sayfa

Bu tezde öncelikle Young diyagramları ve Young tabloları ile ilgili temel tanımlar verilmiştir. Ayrıca, standart Young tablosu sayısını veren Hook uzunluğu formülü ve bazı Young diyagramlarına karşılık gelen grafikler ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

Bunlara ilave olarak, Schensted algoritması ve Shützenberger algoritması tanımlanmış ve ilgili bazı teoremler ispatlanmıştır. Tabloların monoid yapısı incelenmiştir.

Son olarak, tanımlayıcı bağıntıları Knuth bağıntıları olan plactic monoid ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Young tablosu, Hook uzunluk formülü, Schensted algoritması, Knuth bağıntıları, Plactic monoid

ABSTRACT

YOUNG TABLEAUX AND PLACTIC MONOID

Fatma TLCE

M.Sc., Department of Mathematics

Supervisor :Assist. Prof. Dr. Basri ALIŐKAN

September 2017, 48 pages

In this thesis, firstly the basic definitions of Young diagrams and Young tabluax are given. Also, the Hook length formula which gives the number of the standart tabluax, the graph corresponding to some Young diagrams and relationship between these are investigated.

In addition, Schensted algorithm and Shtzenberger algorithm are defined and some related theorems are proved. The monoid structures of tabluax are also studied.

Finally, basic notions on plactic monoid whose defining relations are Knuth relations are given.

Key Words: Young tableau, Hook length formula, Schensted algorithm, Knuth relations, Plactic monoid



Değerli Aileme

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tez konumun belirlenerek tez çalışmamın yürütölmesini üstlenen, çalışmalarım süresince değerli bilgi ve tecrübelerini katkılarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Basri ÇALIŞKAN'a teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca manevi desteği ile daima yanımda duran değerli aileme ve çalışmama katkılarından dolayı OKÜ Matematik Bölümü'nün diğer akademik ve idari personellerine teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAYI	
TEZ BİLDİRİMİ	
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İTHAF SAYFASI	iii
TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1 GİRİŞ	1
2 YOUNG DİYAGRAMLARI VE TABLOLARI	4
2.1 Parçalanışlar ve Young Diyagramları	4
2.2 Young Tabloları	6
2.3 Hook Uzunluk Formülü	8
3 YOUNG DİYAGRAMLARI VE GRAFİKLER	14
3.1 Grafikler	14
3.2 Young Diyagramları ve Grafikler	16
4 ALGORİTMALAR	20
4.1 Bir Dizinin Young Tablosu ve Satır Kelimesi	20
4.2 Schensted Algoritması	22
4.3 Monoid Yapısı	25
4.4 Shützenberger Algoritması	29
5 PLACTIC MONOİD	32
5.1 Yarıgruplar	32
5.2 Kelimelerin Alt Dizileri	34
5.3 Knuth Bağıntuları	35
5.4 Plactic monoid	39
6 SONUÇLAR VE ÖNERİLER	45
KAYNAKLAR	46
ÖZGEÇMİŞ	48

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1 Young tablosu örneği	6
Çizelge 2.2 Young tablosu örneği	6
Çizelge 2.3 Standart Young tablosu örneği	7
Çizelge 2.4 Standart Young tablosu örneği	7
Çizelge 2.5 Normal Young tablosu örneği	7
Çizelge 2.6 Yarı Standart Young tablosu örneği	8
Çizelge 2.7 Hücrelerin Hook uzunluklar tablosu örneği	9
Çizelge 4.1 Schensted algoritması örneği	23
Çizelge 4.2 Çarpık diyagram örneği	28
Çizelge 5.1 Knuth bağıntısı örneği	36



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Young diyagram örneği	4
Şekil 2.2	Young diyagram örneği	5
Şekil 2.3	Young diyagram örneği	5
Şekil 2.4	Eşlenik Young diyagram örneği	5
Şekil 2.5	Young diyagramının iz örneği	8
Şekil 3.1	Grafik örneği	14
Şekil 3.2	Grafiğin derece dizisi örneği	15
Şekil 3.3	Diyagramın derece dizisi örneği	16
Şekil 3.4	Grafikler ile ilişkili Young diyagram örneği	16
Şekil 3.5	Eşik grafik örneği	18
Şekil 3.6	Young diyagram örneği	18
Şekil 3.7	Young diyagram örneği	18
Şekil 3.8	Diyagram grafiği	19
Şekil 3.9	Diyagram grafiği	19
Şekil 3.10	Diyagram grafiği	19
Şekil 4.1	Bir permütasyonun tablo dizisi örneği	22
Şekil 4.2	Shützenberger algoritması örneği	30

SİMGELER VE KISALTMALAR

\mathbb{N}	pozitif tamsayılar kümesi
\mathbb{C}	kompleks sayılar kümesi
$Y(\lambda)$	λ parçalanışının bir Young diyagramı
$tr(\lambda)$	λ nın izi
$V(G)$	Bir G grafiğinin köşelerinin kümesi
$E(G)$	Bir G grafiğinin kenarlarının kümesi
$d(G)$	Bir G grafiğinin derece dizisi
$\langle A R \rangle$	Monoid (ya da yarıgrup) takdimi
$Res(f, z_k)$	f fonksiyonunun z_k noktasındaki rezidüsü
$P(w)$	w kelimesinin Schensted tablosu
$T \leftarrow x$	x in T tablosu üzerindeki etkisi
$T \bullet U$	U tablosunun elemanlarının T tablosuna yerleştirilmesi
$\lambda \vdash n$	n pozitif tamsayısının bir λ parçalanışı $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$
$ \lambda $	$\lambda \vdash n$ ise $ \lambda = n$
$x\rho$	x elemanının ρ kongrüansına göre denklik sınıfı
$\lambda \mu$	$\mu \subset \lambda$ şeklindeki iki parçalanıştan elde edilen çarpık diyagramın parçalanışı
$f^{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}$	$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ parçalanışının standart Young tablolarının sayısı
A^+	A kümesinden oluşturulan en az bir uzunluklu kelimelerin kümesi
A^*	$A^+ \cup \{1\}$
$R^\#$	R yi içeren en küçük kongrüans
A^+/ρ	A^+ yarı grubunun ρ kongrüansı ile bölüm yarı grubu
A^*/ρ	A^* monoidinin ρ kongrüansı ile bölüm yarı grubu
h_{ij}	Young diyagramındaki (i, j) hücrenin hook uzunluğu
$Pl_n(A)$	rankı n olan A üzerindeki plactic monoid
<u>Alt İndisler</u>	
ij	Young diyagramının i . satır j . sütundaki hücresi
n	Plactic monoidin rankı
<u>Üst İndisler</u>	
$+$	İlgili küme tarafından doğurulan serbest yarı grup
$*$	İlgili küme tarafından doğurulan monoid
$\#$	En küçük kongrüans

1. GİRİŞ

1900 yılında Alfred Young [7] tarafından tanımlanan Young tabloları temsil teori, geometri ve cebir alanlarında kullanılan çok önemli yapılardır. Bu tablolar, simetrik fonksiyonlarla ilgili çalışmalarda, simetrik ve kompleks genel lineer grupların temsil teorilerinde ve Schur fonksiyonlarında sıklıkla kullanılırlar. 1903 yılında Frobenius [19], Young tablolarını ilk kez simetrik grubun temsillerini araştırırken kullanmıştır. 1927 yılında Young [15], Frobenius'un çalışmalarını öğrendikten sonra bu alanda daha ileri çalışmalar yapmıştır.

Daha sonraki yıllarda ortaya çıkan Schensted ve Schützenberger algoritmaları Young tabloları ile ilgili çok önemli algoritmalar olmuşlardır. Schensted algoritması ilk olarak Robinson tarafından [10] da bulunmuş ama bağımsız olarak daha sonra farklı bir şekilde Schensted [8] tarafından da keşfedilmiştir. Bu algoritma, verilen bir kelimenin azalmayan bir alt kelimesinin maksimal uzunluğunun belirlenmesi ile ilgilidir. Bu algoritmanın çıktısı bir tablodur ve aynı şekle sahip Young tablolarının ikilileri ile permütasyonlar arasında birebir bir eşleme olduğunu ifade etmektedir. Bu algoritma yardımıyla aynı tabloyu elde etmeyi sağlayan kelimeler belirlenmek istendiğinde tanımlayıcı bağıntıları Knuth bağıntıları olan plactic monoid elde edilir.

Bu alandaki daha derin çalışmalar 1981 de Lascoux [6] ve Shützenberger [9] tarafından yapılmıştır. Plactic monoid ismi Shützenberger tarafından levha hareketleri (tectonique des plaques) atfen verilmiştir. Young tablosu ile yakın ilişkisinden dolayı Plactic monoid temsil teori ve cebirsel kombinatorikte önemli bir araç olmuştur.

Plactic monoid genellikle aşağıdaki nedenlerden dolayı çalışılmıştır,

1. Simetrik polinomlar halkasının değişmeli olmayan bir halkanın içine gömülebilmesine imkan vermesi,
2. Bir artmayan alt kelimenin maksimal uzunluğuna genellenen kelimeler üzerindeki bir fonksiyonun syntactic monoidi olması,
3. Plactic monoidin iki elemandan fazla elemanı olan monoidin alfabelerine doğal bir genelleme olması.

Plactic monoidin bazı uygulamaları;

1. Littlewood-Richardson kuralının tam bir ispatını sağlar,
2. Kostka-Foulkes polinomlarının tanımında kullanılır,
3. Schubert polinomlarının tanımında,
4. Lakshmibai ve Seshadri'nin standart bazlarının daha iyi anlaşılmasında,

şeklinde sıralanabilir. Son yıllarda, Young tabloları, quantum gruplar teorisi ve özellikle Kashiwara'nın cristal tabanlar teorisi ile yeni ilerlemeler kaydetmiştir [11].

Bu alanda en büyük katkı sağlayanlardan biri de Knuth dur. Knuth [5] standart olmayan yani yarı standart tabloları standart tablolarla değiştirdi ve iki satırlı dizileri genelleştirdi. Daha sonra ise Greene [3], Schensted'in azalan ve artan dizilerle ilgili teoremini genişletti. Bu çalışma bir permütasyon ile ilgili Young tablolarının şeklinin Schensted ve Schützenberger algoritmalarını kullanmaksızın direkt bulunabileceğini gösterdi.

2014 yılında, Kubat ve Okninski [20], $n > 3$ için başlangıç alfabesinde plactic monoidin bir Gröbner-Shirshov bazının sonsuz olduğunu ve takdiminin bilinemediğini gösterdiler. Kısa bir süre sonra ise, aynı yazarlar [21] de plactic monoidin birimlerini çalıştılar.

2015 yılında, Cain ve diğerleri [12] da, sonlu ranklı plactic cebirin sonlu bir Gröbner-Shirshov bazını kabul ettiğini gösterdiler. Bunu ispatlarken, ilişkili plactic monoid için bir sonlu tam yerine yazma sistemi inşa etmek için Young tablolarının özelliklerinden yararlandılar. Bu sonuç ayrıca sonlu ranklı plactic monoidlerin sonlu türetilmiş tip özelliği FDT (finite derivation type property) ve sol ve sağ FP_∞ homolojik sonluluk özelliğine sahip olduğunu gösterdi. Son olarak, sonlu ranklı plactic monoidlerin biotomatik olduklarını ispatladılar.

Bu tezin ikinci bölümünde, bir pozitif tamsayının parçalanışının Young Diyagramı ve bu diyagramların çeşitli temel tanım ve teoremleri, Young tabloları, standart tabloların sayısı ile ilgili Hook uzunluk formülü ve bazı örnekler verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, bir Young diyagramına karşılık gelen grafikler ile ilgili bilgiler açıklanmıştır.

Tezin dördüncü bölümünde, Schensted algoritması ve Shützenberger algoritması ile tabloların monoid yapısı ile ilgili tanımlar yapılmıştır.

Tezin beşinci bölümünde, birinci ve ikinci tip Knuth bağıntıları ve bu bağıntılar tarafından tanımlanan Plactic monoid ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

Tezin son bölümünde ise, bu alanla ilgili bazı açık problemler ve sonuçlardan bahsedilmiştir.



2. YOUNG DİYAGRAMLARI VE TABLOLARI

Bu bölümde, Young diyagramları ve tabloları ile ilgili temel tanımlar ve bunların bazı temel uygulamaları hakkında bilgiler verilmiştir. Bu bölümde [15] ve [18] deki çalışmalardan yararlanılmıştır.

2.1 Parçalanışlar ve Young Diyagramları

Tanım 2.1 $n \in \mathbb{N}$ (pozitif tamsayı) olsun, $i = 1, 2, \dots, k-1$ için $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ ve $|\lambda| = n = \sum_{i=1}^k \lambda_i$ olmak üzere,

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \quad (2.1)$$

olacak şekildeki pozitif tamsayıların bir dizisine n 'nin bir parçalanışı denir ve $\lambda \vdash n$ ile gösterilir. Burada k ye parçalanışın uzunluğu denir ve $L(\lambda) = k$ ile gösterilir.

Örnek 2.2 4 ün beş tane parçalanışı vardır. Bunlar

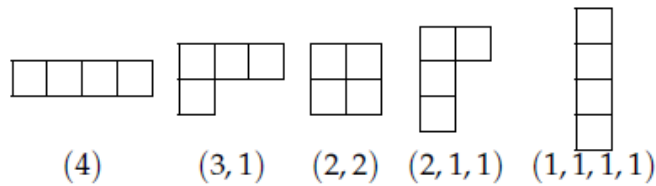
$$(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)$$

dır.

Örnek 2.3 13 ün iki parçalanışı $\lambda = (4, 4, 3, 2)$ ve $\sigma = (6, 2, 2, 2, 1)$ olup, $L(\lambda) = 4$ ve $L(\sigma) = 5$ dir.

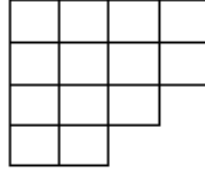
Tanım 2.4 λ , uzunluğu k olan bir parçalanış olsun. $1 \leq i \leq k$ için i .satırı λ_i yi içeren sola dayalı k satırlı ve boş hücrelerden oluşan bir topluluğa λ parçalanışının bir *Young diyagramı* (veya *Ferres diyagramı*) denir.

Örnek 2.5 4 ün beş tane parçalanışına ait Young diyagramları Şekil 2.1 deki gibidir.



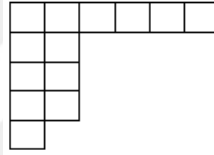
Şekil 2.1 Young diyagram örneği

Örnek 2.6 $\lambda = (4, 4, 3, 2) \vdash 13$ için $Y(\lambda)$ Young diyagramı Şekil 2.2 deki gibi olup, hücrelerin toplam sayısı 13 tür.



Şekil 2.2 Young diyagram örneği

Örnek 2.7 $\sigma = (6, 2, 2, 2, 1) \vdash 13$ için $Y(\sigma)$ Young diyagramı Şekil 2.3 deki gibi olup, hücrelerin toplam sayısı yine 13 tür.

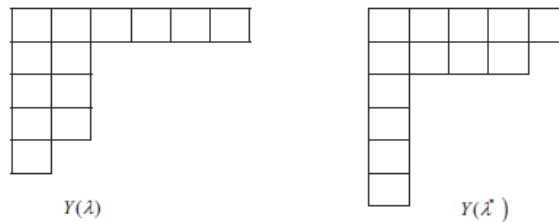


Şekil 2.3 Young diyagram örneği

Örnek 2.6 ve Örnek 2.7 den $Y(\lambda)$ diyagramında $|\lambda|$ kadar hücre bulunduğu görülmektedir.

Tanım 2.8 λ bir parçalanış, $Y(\lambda)$ da λ nın bir Young diyagramı olsun, $Y(\lambda)$ nın esas köşegenine göre yansımından elde edilen diyagrama $Y(\lambda)$ nın eşlenik diyagramı denir ve $Y(\lambda^*)$ ile gösterilir. Ayrıca, λ parçalanışının eşleniği olan λ^* , $Y(\lambda^*)$ diyagramına göre bir parçalanıştır.

Örnek 2.9 $\lambda^* = (5, 4, 1, 1, 1)$ parçalanışı $\lambda = (6, 2, 2, 2, 1)$ parçalanışının bir eşleniğidir. Bu parçalanışlara ait diyagramlar aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.4 Eşlenik Young diyagram örneği

$1 \leq i \leq k$ için, λ^* parçalanışının uzunluğu $\max\{\lambda_i\}$ olarak tanımlanır. Dolayısıyla, $L(\lambda^*) = \lambda_1$ dir. Eğer $\lambda = \lambda^*$ ise, λ ya öz eşlenik denir. Ayrıca $\lambda = \lambda^*$ olduğunda $Y(\lambda)$ diyagramı simetriktir.

2.2 Young Tabloları

Tanım 2.10 $\lambda, 1, 2, \dots, n$ sayılarından oluşan n nin bir parçalanışı olsun. λ Young diyagramının hücrelerinin $1, 2, \dots, n$ sayılarıyla birebir eşlenerek doldurulmasından elde edilen tabloya bir λ -tablosu denir ve T^λ ile gösterilir.

Örnek 2.11 $(2, 1)$ parçalanışının tüm Young tabloları Çizelge 2.1 deki gibidir.

Çizelge 2.1 Young tablosu örneği

1	2	2	1	1	3	3	1	2	3	3	2
3		3		2		2		1		1	

Örnek 2.12 $\lambda = (4, 4, 3, 2) \vdash 13$ parçalanışının bazı Young tabloları Çizelge 2.2 deki gibidir.

Çizelge 2.2 Young tablosu örneği

$T^\lambda =$	1	2	3	4	$S^\lambda =$	1	7	8	12
	5	6	7	8		10	6	2	3
	9	10	11			4	5	11	
	12	13				9	13		

NOT: Her $\lambda \vdash n$ için tablo sayısı $n!$ tanedir.

Tanım 2.13 T^λ herhangi bir λ parçalanışının bir Young tablosu olsun. Eğer T^λ tablosunun her satır ve sütundaki sayılar soldan sağa ve yukarıdan aşağıya kesin artan bir sırada ise bu tabloya *standart Young tablosu* denir.

Örnek 2.14 Çizelge 2.3 de verilen tablolar birer standart Young tablosudur.

Çizelge 2.3 Standart Young tablosu örneği

1	2
3	4
5	

,

1	2
3	5
4	

,

1	3
2	4
5	

,

1	3
2	5
4	

,

1	4
2	5
3	

.

Örnek 2.15 $\lambda = (4, 4, 3, 2) \vdash 13$ parçalanışının iki standart Young tablosu Çizelge 2.4 deki gibidir.

Çizelge 2.4 Standart Young tablosu örneği

$T^\lambda =$	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>6</td><td>9</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>11</td><td>12</td></tr><tr><td>4</td><td>8</td><td>13</td><td></td></tr><tr><td>7</td><td>10</td><td></td><td></td></tr></table>	1	3	6	9	2	5	11	12	4	8	13		7	10		
1	3	6	9														
2	5	11	12														
4	8	13															
7	10																

$S^\lambda =$	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>11</td><td>13</td></tr><tr><td>3</td><td>7</td><td>12</td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>8</td><td></td><td></td></tr></table>	1	4	9	10	2	5	11	13	3	7	12		6	8		
1	4	9	10														
2	5	11	13														
3	7	12															
6	8																

Tanım 2.16 Bir standart Young tablosunda birinci satırdan başlanarak, soldan sağa ve yukarıdan aşağıya doğru tüm sayılar artan sırada ise bu tabloya *normal Young tablosu* denir.

Örnek 2.17 Çizelge 2.5 de verilen tablo bir normal Young tablosudur.

Çizelge 2.5 Normal Young tablosu örneği

1	2
3	4
5	

.

Tanım 2.18 Eğer bir λ parçalanışının Young diyagramında, hücrelerdeki tamsayılar sütunlarda kesin artan ve satırlarda azalmayan bir şekilde yerleştirilmişse bu diyagrama *yarı standart tablo* denir.

Örnek 2.19 Çizelge 2.6 da verilen tablo bir yarı standart Young tablosudur.

Çizelge 2.6 Yarı Standart Young tablosu örneği

2	3	3	3
3	4	4	
5	7	8	
6	9		
7			

Tanım 2.20 λ herhangi bir parçalanış olsun. λ nun izi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$tr(\lambda) = \max \{i \mid \lambda_i \geq i\} \quad (2.2)$$

Bir parçalanışın izi, onun bir Young diyagramı olarak görülebilir, yani iz, bir λ parçalanışının Young diyagramının ana köşegenindeki hücre sayısına eşittir.

Örnek 2.21 $\lambda = (4, 3, 2, 2, 1)$ olsun. Bu durumda, $\lambda_1 = 4 \geq 1$, $\lambda_2 = 3 \geq 2$ dir ama $\lambda_3 = 2 \not\geq 3$ dir. Dolayısıyla $tr(\lambda) = 2$ dir.

Ayrıca Şekil 2.5 de verilen $Y(\lambda)$ nin esas köşegenindeki hücre sayısının 2 tane olduğu görülmektedir.

Şekil 2.5 Young diyagramının iz örneği

2.3 Hook Uzunluk Formülü

Bu kısımda bir λ parçalanışına karşılık gelen simetrik grubun indirgenemez temsilinin boyutu ile ilgili bir formül olan hook uzunluğu formülüne ait teoremin farklı bir ispatı verilmiştir. Bu bölümde [14] nolu çalışmadan yararlanılmıştır.

Tanım 2.22 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ bir parçalanış ve (i, j) de λ nın diyagramında bir hücre olsun. $\lambda'_j = \max\{k : j \leq \lambda_k\}$ (yani, λ'_j , j . sütunun uzunluğu) olmak üzere (i, j) hücrelerinin hook uzunluğu h_{ij} ile gösterilir ve

$$h_{ij} = \lambda'_j - i + \lambda_i - j + 1 \quad (2.3)$$

olarak tanımlanır.

(i, j) hücrelerinin hook uzunluğu, hücrenin sağındaki hücrelerin sayısı ile altındaki hücrelerin sayısının toplamının 1 fazlasıdır.

Örnek 2.23 $\lambda = (4, 3, 1)$ parçalanışa ait Young diyagramının hücrelerin hook uzunlukları Çizelge 2.7 deki gibidir.

Çizelge 2.7 Hücrelerin Hook uzunluklar tablosu örneği

	•	•	•
	•		

6	4	3	1
4	2	1	
1			

$(i, j) = (1, 2)$ hücrelerinin hook uzunluğu,

$$\begin{aligned} (1, 2) &= \lambda_1 + \lambda'_2 - 1 - 2 + 1 \\ &= 4 + 2 - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ parçalanışının herhangi bir Young diyagramına ait standart Young tablolarının sayısı $f^{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}$ ile gösterilir ve $f^{(0, \dots, 0)} = 1$ olarak kabul edilir. Hook uzunluk formülü

$$f^{(\lambda)} = \frac{N!}{\prod_{(i,j) \in [\lambda]} h_{ij}} \quad (2.4)$$

olarak verilir [1].

Bu formüle,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = N \quad (2.5)$$

ve

$$[\lambda] = \{(i, j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq \lambda_i\} \quad (2.6)$$

dir.

$\lambda \rightarrow f^\lambda$ fonksiyonu bir yinemeli (recursion) bağıntıyı sağlar. Bu bağıntıyı açıkça ifade edebilmek için öncelikle aşağıdaki notasyonlar verilmelidir.

$$\Lambda_0 = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) : \lambda_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1, 2, \dots, m \text{ ve } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m\}$$

ve

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \bigcup_{k=1}^m \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k - 1, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m) : (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda_0\}.$$

Diğer bir ifadeyle, $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda \setminus \Lambda_0$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\lambda_i = \lambda_{i+1} - 1$ (bu durumda $\lambda_i = -1$) olacak şekildeki bir $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ hariç $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ ($\lambda_{m+1} = 0$ yazılır) olmasıdır. Herhangi bir $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda \setminus \Lambda_0$ için $f^\lambda = 0$ dir.

Yinemeli bağıntı aşağıdaki gibi verilir,

T, λ nın Young diyagramının herhangi bir Young tablosu olmak üzere, $T(i, \lambda_i) = N$ olacak şekilde $1 \leq i \leq m$ yi sağlayan en az bir i nin var olduğu açıktır. Bu yüzden,

1. Herhangi bir $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda \setminus \Lambda_0$ için $f^{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)} = 0$ dir.
2. $f^{(0,0,\dots,0,0)} = 1$ dir.
3. $\lambda_1 \geq 1$ ve $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda_0$ için

$$f^{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)} = \sum_{k=1}^m f^{(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_k - 1, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m)}$$

dir. Bu koşullar $f^{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}$ yi tek türlü belirler.

Teorem 2.24 m bir pozitif tamsayı, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$ olsun. Eğer $N = \sum_{k=1}^m \lambda_k$ ise, bu durumda

$$f^{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)} = \frac{N! \prod_{j>i} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)}{\prod_{l=0}^{m-1} (\lambda_{m-1} + l)!} \quad (2.7)$$

dir.

İspat: Herhangi bir $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda$ için

$$\langle \lambda_1 : \dots : \lambda_m \rangle = \begin{cases} \frac{(\sum_{k=1}^m \lambda_k)! \prod_{j>i} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)}{\prod_{l=0}^{m-1} (\lambda_{m-l} + l)!} & \text{her } k \text{ için } \lambda_k \neq -1 \text{ ise} \\ 0 & \text{en az bir } k \text{ için } \lambda_k = -1 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.8)$$

$\langle 0 : 0 : \dots : 0 : 0 \rangle = 1$ olduğu açıktır. Eğer $1 \leq i \leq m-1$ olmak üzere en az bir i için $\lambda_i = \lambda_{i+1} - 1$ ise

$$\langle \lambda_1 : \dots : \lambda_m \rangle = 0 \quad (2.9)$$

dır, çünkü

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} + i - (i-1) = 0 \quad (2.10)$$

dır. Bu yüzden herhangi bir $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda_0$ için $f^{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)} = \langle \lambda_1 : \dots : \lambda_m \rangle$ olduğunu göstermek için $\lambda_1 \geq 1$ olmak üzere $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda_0$ ise

$$\langle \lambda_1 : \dots : \lambda_m \rangle = \sum_{k=1}^m \langle \lambda_1 : \dots : \lambda_{k-1} : \lambda_k - 1 : \lambda_{k+1} : \dots : \lambda_m \rangle \quad (2.11)$$

olduğu gösterilmelidir.

$(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda_0$ parçalanışında $\lambda_1 \geq 1$ olduğu kabul edilsin. Öncelikle

$$\begin{aligned} & \langle \lambda_1 : \dots : \lambda_{m-1} : 0 \rangle \\ &= \frac{\left(\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \right)! \prod_{m-1 \geq j > i \geq 1} (\lambda_i - \lambda_j + j - i) \prod_{p=1}^{m-1} (\lambda_p + m - p)}{\prod_{l=1}^{m-1} (\lambda_{m-l} + l)!} \\ &= \frac{\left(\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \right)! \prod_{m-1 \geq j > i \geq 1} (\lambda_i - \lambda_j + j - i) \prod_{l=0}^{m-2} (\lambda_{(m-1)-l} + l + 1)}{\prod_{l=0}^{m-2} (\lambda_{(m-1)-l} + l + 1)!} \\ &= \langle \lambda_1 : \dots : \lambda_{m-1} \rangle \end{aligned}$$

dır.

Dolayısıyla, $\lambda_m \geq 1$ olarak kabul edilir.

Bu yüzden (2.11) eşitliğinin ispatlanabilmesi için aşağıdaki denklemlerin sağlandığının gösterilmesi yeterlidir.

$$\sum_{l=1}^m \lambda_l = \sum_{k=1}^m (\lambda_k + m - k) \prod_{j>k} \frac{\lambda_k - \lambda_j + j - k - 1}{\lambda_k - \lambda_j + j - k} \prod_{j<k} \frac{\lambda_i - \lambda_k + k - i + 1}{\lambda_i - \lambda_k + k - i} \quad (2.12)$$

$z_i = \lambda_i + m - i$ yazılmasıyla aşağıdaki lemma elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \langle \lambda_1 : \dots : \lambda_{k-1} : \lambda_k - 1 : \lambda_{k+1} : \dots : \lambda_m \rangle \\
&= \frac{((\sum_{k=1}^m \lambda_k) - 1)! \prod_{k \neq j > i \neq k} (\lambda_i - \lambda_j + j - i) \prod_{j > k} (\lambda_k - \lambda_j + j - k - 1) \prod_{i < k} (\lambda_i - \lambda_k + k - i + 1)}{(\lambda_k + m - k - 1)! \prod_{l \neq k} (\lambda_m - l + l)!} \\
&= \langle \lambda_1 : \dots : \lambda_m \rangle \frac{\lambda_k + m - k}{\sum_{l=1}^m \lambda_l} \prod_{j > k} \frac{\lambda_k - \lambda_j + j - k - 1}{\lambda_k - \lambda_j + j - k} \prod_{i < k} \frac{\lambda_i - \lambda_k + k - i + 1}{\lambda_i - \lambda_k + k - i}.
\end{aligned}$$

Lemma 2.25 Herhangi ayrık $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}$ noktaları için,

$$\left(\sum_{l=1}^m z_l \right) - \frac{m(m-1)}{2} = \sum_{k=1}^m z_k \prod_{j \neq k} \left(1 + \frac{1}{z_j - z_k} \right) \quad (2.13)$$

dır.

İspat:

$$f(z) = z \prod_{i=1}^m \left(1 + \frac{1}{z_i - z} \right) \quad (2.14)$$

fonksiyonu dikkate alınsın.

$$Res(f, z_k) = -z_k \prod_{j \neq k} \left(1 + \frac{1}{z_j - z_k} \right) \quad (2.15)$$

olduğu açıktır.

$g(z) = f(\frac{1}{z})/z^2$ olsun. Bu durumda, (eğer $i = 1, \dots, m$ için $|z_i z| < 1$ ise)

$$g(z) = z^{-3} \prod_{i=1}^m (1 - z - z_i z^2 + \text{''yüksek dereceli terimler''})$$

dır. Bu yüzden

$$Res(f, \infty) = -Res(g, 0) = \left(\sum_{l=1}^m z_l \right) - \frac{m(m-1)}{2} \quad (2.16)$$

dır. $Res(f, \infty) = -\sum_{k=1}^m Res(f, z_k)$ olduğundan, istenen sonuç elde edilir.

(2.7) denkleminin (2.4) denklemi ile aynı olduğunu görmek zor değildir. Daha açık bir ifade ile $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ nin herhangi bir Young diyagramı için her satırdaki kutuların hook uzunluklarının çarpımları

$$\begin{aligned}
& [1 \cdot 2 \cdots (\lambda_k - \lambda_{k+1})] \\
& \cdot [(\lambda_k - \lambda_{k+1} + 2) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k+2} + 1)] \\
& \cdot [(\lambda_k - \lambda_{k+2} + 3) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k+3} + 2)] \\
& \cdots [(\lambda_k - \lambda_m + m - k + 1) \cdots (\lambda_k + m - k)]
\end{aligned}$$

ifadesine eşittir (satırın en sağından başlanarak), bu da tam olarak,

$$\frac{(\lambda_k + m - k)!}{\prod_{l>k} (\lambda_k - \lambda_l - k + l)}$$

dır. Dolayısıyla hook uzunluk formülü elde edilir.

Sonuç 2.26 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ nin bir Young diyagramı için $\sum_{i=1}^m \lambda_i = N$ olmak üzere, λ nin standart Young tablolarının sayısı

$$\frac{N!}{\prod_{(i,j) \in [\lambda]} h_{ij}}$$

dır.



3. YOUNG DİYAGRAMLARI VE GRAFİKLER

3.1 Grafikler

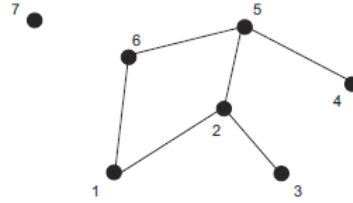
Grafik teorisinin ilk keşfi Euler'in çalışmalarında ortaya atılmıştır ve teori Kirchhoff ve Cayley tarafından fizik alanında genişletilmiştir. Uygulamalı matematiğin en temel teorisi olduğu için pek çok kez bağımsız olarak keşfedilmiştir. Bu kısımda grafik teorisinin temel tanımları verilmiştir.

Tanım 3.1 Bir G grafiği, köşeler kümesi $V = V(G)$ ve sırasız iki köşenin oluşturduğu kenarların listesi $E = E(G)$ den oluşur.

Örnek 3.2 Köşe kümesi $V(G) = \{1, 2, \dots, 7\}$ ve kenar listesi

$$E(G) = \{(1, 2), (1, 6), (2, 3), (2, 5), (4, 5), (5, 6)\}$$

olan bir G grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.1 Grafik örneği

Tanım 3.3 Bir G grafiğinde, tüm köşelerin sayısına G nin derecesi denir ve $|G|$ ile gösterilir. Derecesi 0 olan grafiğe *aşık grafik* denir. Tüm kenarları farklı olan yola *iz*, tüm köşeleri birbirinden farklı olan bir ize *patika* denir. Bir G grafiğinde bir köşeden kendisine olan herhangi bir yola *kapalı yol* denir. Tüm kenarları birbirinden farklı olan bir kapalı yola *kapalı iz*, tüm köşeleri farklı olan kapalı ize bir *devir* denir. Eğer G nin herhangi iki köşesini birleştiren bir patika var ise G ye *bağlantılı grafik* denir.

Bu bölümde bahsedilen tüm grafikler, bir köşesinden diğer köşesine en fazla bir kenar ile bağlanmış olan basit ve bağlantılı grafikler olup, bu kenarlar yönlü değildir. Dolayısıyla, bir köşeden diğer bir köşeye mutlaka bir patika vardır.

Tanım 3.4 Bir G grafiğinin herhangi bir V köşesinin derecesi, bu V köşesi ile bağlantılı olan tüm kenarların sayısı olarak tanımlanır ve $d_G(V)$ ile gösterilir.

Örnek 3.5 Örnek 3.2 deki grafik için, $|G| = 7$ ve

$$d_G(1) = 2, \quad d_G(2) = 3, \quad d_G(3) = 1 = d_G(4)$$

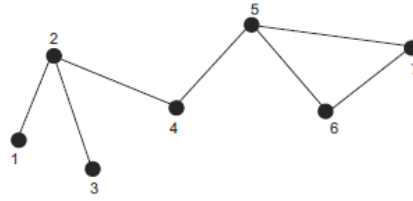
$$d_G(5) = 3, \quad d_G(6) = 2, \quad d_G(7) = 0$$

Bu grafik basit ama 7 nolu köşeden dolayı bağlantılı değildir.

Tanım 3.6 G , k tane köşesi ve bu köşelerin dereceleri $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k \geq 0$ olan bir bağlantılı grafik ise, G nin derece dizisi $d(G) = (d_1, d_2, \dots, d_k)$ ile gösterilir.

Dikkat edilecek olunursa $d_i = d(v_i)$ olmak zorunda değildir ve her grafik için derece dizisinin tek türlü olduğu açıktır.

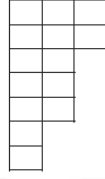
Örnek 3.7 Aşağıdaki grafiğın derece dizisi $d(G) = (3, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$ dir.



Şekil 3.2 Grafiğın derece dizisi örneği

3.2 Young Diyagramları ve Grafikler

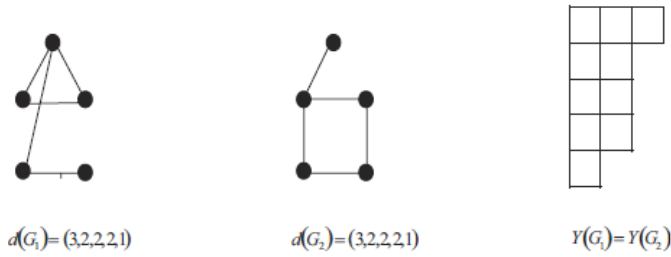
λ herhangi bir parçalanış, G bir grafik ve $Y(G)$ de λ nın Young diyagramı olmak üzere, G grafiğinin derece dizisi, $Y(G)$ Young diyagramının bir parçalanışı olarak görülebilir, yani $\lambda = d(G)$ olarak alınabilir. Örnek 3.7 deki grafiğın derece dizisi $d(G) = (3, 3, 2, 2, 2, 1, 1)$ Şekil 3.3 deki gibi $Y(G) = Y(d(G))$ Young diyagramı olarak temsil edilebilir.



Şekil 3.3 Diyagramın derece dizisi örneği

Bir Young diyagramla ilişkili birden fazla grafik olabilir. Bu yüzden grafikler ile grafiklerin Young diyagramları arasındaki ilişki birebir değildir.

Örnek 3.8 Şekil 3.4 de verilen G_1 ve G_2 grafikleri aynı derece dizisine sahiptirler, dolayısıyla G_1 ve G_2 grafiklerinin Young diyagramları aynıdır. Diğer taraftan, G_1 grafiğinde de üçlü bir devir varken G_2 de böyle bir devir bulunmadığından, G_1 ile G_2 izomorfik değildir.



Şekil 3.4 Grafikler ile ilişkili Young diyagram örneği

NOT: Verilen herhangi bir Young diyagramı için onunla ilişkili bir grafik bulunmak zorunda değildir.

Örnek 3.9 $\lambda = (4, 2, 2, 2, 1, 1)$ parçalanışı için $Y(\lambda)$ Young diyagramı derecesi λ olan bir grafiğe sahip değildir. Teorem 3.10 a bakınız.

Tezin bundan sonraki kısmında bir grafik ile temsil edilebilen Young diyagramları incelenecektir. Bunlara *grafikli diyagramlar (graphic)* denir. Herhangi bir tek sayının parçalanışı bir grafikli diyagrama sahip değildir, çünkü bir grafiğin derece dizisinin toplamı çift olmak zorundadır. [16] da verilen aşağıdaki teorem bu durum için bir kriter belirlemektedir.

Teorem 3.10 (Ruch-Gutman Teoremi) n bir çift sayı, λ da n nin bir parçalanışı olsun. Bu durumda $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ nin bir grafikli diyagrama sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul $1 \leq r \leq tr(\lambda)$ için

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \leq \sum_{i=1}^r (\lambda_i^* - 1) \quad (3.1)$$

olmasıdır.

İspat: İspat için [16] ya bakınız.

Tanım 3.11 n bir çift sayı ve $\lambda \vdash n$ olsun. $1 \leq i \leq tr(\lambda)$ için $\lambda_i = \lambda_i^* - 1$ oluyorsa, λ parçalanışına bir *eşik (threshold) parçalanış* denir.

Örnek 3.12 $\lambda = (5, 4, 4, 3, 3, 1)$ bir parçalanış olsun. $\lambda_1 = 5 \geq 1$, $\lambda_2 = 4 \geq 2$ ve $\lambda_3 = 4 \geq 3$ dir ama $\lambda_4 = 3 \not\geq 4$ olduğundan $tr(\lambda) = 3$ dür. Ayrıca $\lambda^* = (6, 5, 5, 3, 1)$ olup, her $1 \leq i \leq tr(\lambda) = 3$ için $\lambda_i = \lambda_i^* - 1$ dir. Yani,

$$\lambda_1 = \lambda_1^* - 1 \Leftrightarrow 5 = 6 - 1$$

$$\lambda_2 = \lambda_2^* - 1 \Leftrightarrow 4 = 5 - 1$$

$$\lambda_3 = \lambda_3^* - 1 \Leftrightarrow 4 = 5 - 1$$

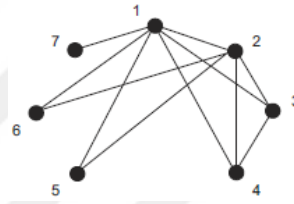
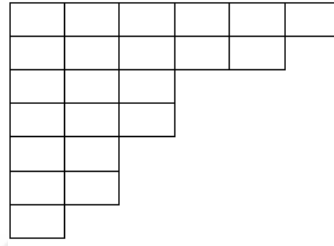
dir.

Tanım 3.13 Bir eşik parçalanışın diyagramına bir *eşik diyagram* denir. Bu tür diyagramlarda, birinci sütundaki elemanların sayısı n olmak üzere birinci satır ve sütuna $n - hook$ denir.

Eşik parçalanışlar grafikli diyagramlara sahiptirler. λ , Young diyagramı Y olan bir eşik parçalanış olsun. Y diyagramında hook silinerek elde edilen diyagram Y' olsun. Bu durumda λ daki λ_1 silinerek elde edilen parçalanış σ olsun, o zaman $i = 1, \dots, L(\lambda) - 1$

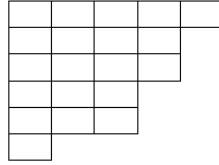
için $\sigma_i = \lambda_{i+1} - 1$ dir. Tümevarımdan dolayı Y' , σ parçalanışı G' grafiğine sahip bir grafikli diyagramdır. Her $\sigma_i = 0$ için, G' grafiğine harici bir köşe ve bu köşeden var olan tüm köşelere birer kenar eklensin. Bu yeni grafik λ derece dizisine sahip olan bu grafik-tir ve bu bir grafikli diyagramdır. Dolayısıyla, eşik parçalanışlar grafikli diyagramlara sahiptirler ve derece dizisi eşik olan bir grafiğe *eşik grafik* denir.

Örnek 3.14 $\lambda = (6, 5, 3, 3, 2, 2, 1)$ olsun. λ bir eşik parçalanıştır ve λ nın diyagramı $Y(\lambda)$ ve ilişkili eşik grafiği Şekil 3.5 deki gibidir.



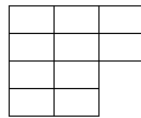
Şekil 3.5 Eşik grafik örneği

Örnek 3.15 $\lambda = (5, 4, 4, 3, 3, 1)$ olsun. Y diyagramıdır.



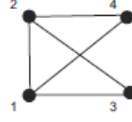
Şekil 3.6 Young diyagram örneği

Y diyagramında hook silinirse aşağıdaki Y' diyagramı elde edilir.



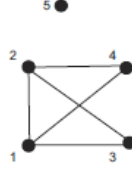
Şekil 3.7 Young diyagram örneği

Bu diyagramın parçalanışı $\lambda' = (3, 3, 2, 2)$ ve ilişkili grafiği ise Şekil 3.8 deki gibidir.



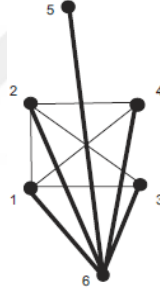
Şekil 3.8 Diyagram grafiği

En son elde edilen grafiğe harici bir köşe eklenirse Şekil 3.9 daki gibi bir grafik elde edilir.



Şekil 3.9 Diyagram grafiği

Bu grafiğe harici köşeden diğer tüm köşelere kenarlar çizilirse Şekil 3.10 daki gibi bir grafik elde edilir.



Şekil 3.10 Diyagram grafiği

Bu grafik ile ilişki diyagram orijinal *Y* diyagramıdır.

4. ALGORİTMALAR

4.1 Bir Dizinin Young Tablosu ve Satır Kelimesi

Bu bölümde $\pi = (\pi_1 \cdots \pi_n)$ ayrık pozitif tamsayıların bir dizisi olmak üzere, π nin yerleştirme metodu ile Young tablosunun ve bu tabloya ait satır kelimesinin nasıl bulunabileceği incelenmiştir. Bu kısımda [15] nolu çalışmadan yararlanılmıştır.

Tanım 4.1 T bir yarı standart tablo olsun. T de ortaya çıkan i tamsayılarının sayısı μ_i olmak üzere $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ ye T nin *içerik miktarı* (*content*) denir.

Örnek 4.2 $\lambda = (3, 3, 1)$ in bir standart tablosu T ve bir yarı standart tablosu S ,

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline 7 & & \\ \hline \end{array} \quad S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 3 \\ \hline 5 & 5 & 7 \\ \hline 7 & & \\ \hline \end{array}$$

şeklinde olup, S nin içerik miktarı $\mu = (1, 0, 2, 0, 2, 0, 2)$ dir.

Bir T yarı standart tabloya bir x tamsayısının eklenmesi işlemi (bu işlem standart tablo için de yapılabilir) ilk satırdan başlar ve aşağıdaki şekilde devam eder;

1. Eğer x birinci satırdaki tüm elemanlardan büyük veya eşitse, x birinci satırın sonuna yerleştirilir.
2. Eğer 1 nolu durumdan farklı bir durum mevcutsa, sağdan sola doğru x den büyük olan son y elemanı bulunur. y yerine x yazılır ve bu yöntem y ile ikinci satırda tekrar uygulanır. Bu işleme 1 durumuna ulaşıncaya kadar devam edilir.

Örnek 4.3 T tablosu aşağıdaki gibi verilsin

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 3 & 5 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 4 & 6 & & \\ \hline 4 & 4 & 5 & & & & \\ \hline 6 & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

ve $x = 2$ nin T tablosuna eklenişi aşağıdaki gibidir.

1	2	2*	2*	5	5	6	← 2
2	3	3*	4	6			← 3
4	4	4*					← 4
5*							← 5
6*							← 6

1. Yer değiştirilen elemanlar artan bir sıradadır.
2. Yer değiştiren elemanların izlediği yol kuzeybatı doğrultusundadır.
3. En son elde edilen tablo yine bir yarı standart tablodur.

Bu sonuçlar yerleştirme metodunda her zaman sağlanmaktadır. x in T tablosunun ilk satırındaki y ile yer değiştirileceği kabul edilsin. Yani $s \leq y \leq t$, $x < y < z$ ve $s \leq x$ olmak üzere

$$\begin{array}{c} s \ y \ t \leftarrow x \\ z \end{array}$$

olsun. x birinci satıra yerleştirildikten sonra, y ikinci satıra aşağıdaki gibi eklenir,

$$\begin{array}{c} s \ x \ t \\ z \leftarrow y \end{array}$$

ve ya

$$\begin{array}{c} s \ x \ t \\ y \end{array}$$

yada

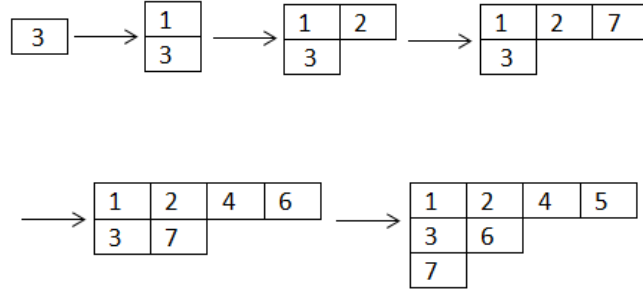
$$\begin{array}{c} s \ \ \ x \ t \\ y \ \ \ \ \ z \end{array}$$

burada y, z nin sol kısmı olup, bu $y \dots z$ ile gösterilmektedir.

Bu durumda 1, 2 ve 3 özelliklerinin sağlandığı görülmektedir.

Her π permütasyonu için bu permütasyonla ilişkili olacak şekilde bir standart tablo vardır. Bu tablo elde edilirken, boş bir tablo ile başlanarak i, \dots, i_n ler sırasıyla tabloya eklenir.

Örnek 4.4 $\pi = (3127465)$ ise bu durumda tablonun dizisi Şekil 4.1 deki gibidir.



Şekil 4.1 Bir permütasyonun tablo dizisi örneği

En son elde edilen tablo $P(\pi)$ ile gösterilir. Benzer şekilde $\pi_1 = (7361245)$ permütasyonu da aynı tabloyu üretir. Dolayısıyla $P(\pi) = P(\pi_1)$ olup bu tablo P ile gösterilir. π_1 permütasyonu P tablosundan elde edilen özel bir bağıntıya sahiptir. P nin son satırından başlanarak yukarıya doğru soldan sağa doğru satırlardaki tamsayıların sıralanmasıyla elde edilen bir permütasyondur. Son örnekte, önce 7, sonra 736 ve daha sonra 7361245 elde edilir ki bu da π_1 dir. Verilen herhangi bir T standart tablosu için bu yöntem $P(\pi) = T$ olacak şekilde bir π permütasyonu oluşturur.

Tanım 4.5 T bir standart tablo olsun. T den elde edilen bir permütasyona T nin *satır kelimesi* denir.

NOT: Her permütasyon en az bir T tablosunun kelimesi olmak zorunda değildir. Örnek olarak, $\pi = (132)$ nin bir tablonun kelimesi değildir. Çünkü standart tablonun satırları ve sütunları artan sırada olmak zorundadır.

4.2 Schensted Algoritması

Bu bölümde herhangi bir Young tablosundan yeni bir tablo elde etmek için kullanılan Schensted'in [11] deki çalışmasında yer alan algoritma ile ilgili bilgiler verilmiştir.

T herhangi bir tablo ve x de bir pozitif tamsayı olmak üzere x in T üzerindeki etkisi $T \leftarrow x$ ile gösterilir ve Schensted algoritması aşağıdaki şekilde tanımlanır.

1. T tablosunun ilk satırındaki x den büyük en küçük sayı belirlenir ve x ile yer

değiştirir. Eğer satırda birden fazla bu duruma uygun sayı varsa (yani en küçük sayı birden fazla ise) bu sayılardan satırın en solunda bulunan sayı seçilir. Eğer satırda x den büyük sayı yoksa x birinci satırın en sonuna yerleştirilir.

2. Eğer birinci satırda x ile yer değiştirmiş bir y sayısı varsa bu durumda y yukarıdaki 1 nolu yöntem kullanılarak ikinci satıra yerleştirilir. Eğer y nin yerleştirilebileceği bir satır bulunmuyorsa, y en alttaki satırın altına eklenir.
3. Bu işleme, bazı sayılar bir satırın sonuna ya da en alt satıra eklenene kadar devam edilir.

Örnek 4.6 T tablosu aşağıdaki gibi olsun.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 4 & 5 & \\ \hline 6 & 7 & 8 & \\ \hline 7 & 9 & & \\ \hline \end{array}$$

$x = 3$ sayısının T tablosuna yerleştirilerek elde edilen $T \leftarrow x$ tablosu Çizelge 4.1 deki gibidir.

Çizelge 4.1 Schensted algoritması örneği

<table style="border-collapse: collapse; text-align: left;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">5</td><td></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">7</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">8</td><td></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">7</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">9</td><td></td><td></td></tr> </table>	2	3	3	4	3	4	5		6	7	8		7	9			← 3	<table style="border-collapse: collapse; text-align: left;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">5</td><td></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">7</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">8</td><td></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">7</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">9</td><td></td><td></td></tr> </table>	2	3	3	3	3	4	5		6	7	8		7	9			← 4
2	3	3	4																																
3	4	5																																	
6	7	8																																	
7	9																																		
2	3	3	3																																
3	4	5																																	
6	7	8																																	
7	9																																		
<table style="border-collapse: collapse; text-align: left;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">7</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">8</td><td></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">7</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">9</td><td></td><td></td></tr> </table>	2	3	3	3	3	4	4		6	7	8		7	9			← 5	<table style="border-collapse: collapse; text-align: left;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">2</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">5</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">7</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">8</td><td></td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">7</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">9</td><td></td><td></td></tr> </table>	2	3	3	3	3	4	4		5	7	8		7	9			← 6
2	3	3	3																																
3	4	4																																	
6	7	8																																	
7	9																																		
2	3	3	3																																
3	4	4																																	
5	7	8																																	
7	9																																		

$T \leftarrow x$ etkisi iyi tanımlıdır. Bu etkinin iyi tanımlı olduğunu göstermek için öncelikle bu işlemin sonunda elde edilen tablonun bir Young tablosu olduğu gösterilmelidir. Bunun için $T \leftarrow x$ in bir Young diyagramı olduğu ve içindeki sayıların sağa doğru sıralı olduğu gösterilmelidir.

2	3	3	3
3	4	4	
T ← 3 =	5	7	8
	6	9	
	7		

Teorem 4.7 Eğer T bir tablo ise bu durumda $T \leftarrow x$ de bir tablodur.

İspat: Önce $T \leftarrow x$ in bir Young diyagramı olduğu gösterilmelidir. Eğer T de aynı uzunlukta olan iki satır bulunmuyorsa, o zaman üstteki satır alttaki satırdan daha uzundur. Eğer bir kutu eklenecekse, bu ya ilk satırın sonuna ya da tablonun en altına eklenir. Eklenen yeni kutu satırdaki kutuların azalmayan sırasını değiştirmez. Bu durum bir Young diyagramının özelliklerini sağlar. Şimdi iki satırın aynı uzunlukta olduğu ve birinci satırdaki bir sayının yer değiştireceği kabul edilsin. O zaman iki durum söz konusudur, bu sayı ya değiştirilecek sayının altındaki sayı ile ya da solundaki sayı ile yer değiştirir. Bu sayı satırlarda azalmayan bir sıralamadan ve sütunlarda kesin artan bir sıralamadan dolayı sağ tarafa geçemeyecektir.

a	b	c	d	e
f	g	h	i	j

Yukarıda, bahsedilen bu duruma uygun bir tablonun herhangi iki satırı bulunmaktadır. Satırda $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ ve $f \leq g \leq h \leq i \leq j$ dir. Ayrıca sütunlar kesin artan bir sırada olduğundan, $a < f$, $b < g$, $c < h$, $d < i$ ve $e < j$ dir. x in c yerine yazıldığı kabul edilsin. Bu durumda c alt satırda bir kutuya yerleştirilecektir. $h > c$ ve $h \leq i$ olduğundan dolayı, c i nin yerine yazılması mümkün değildir. Dolayısıyla c ya h nin yerine ya da h nin sol tarafındaki bir sayının yerine yazılabilir.

Şimdi, $T \leftarrow x$ in azalmayan sırada satırlara ve kesin artan sırada sütunlara sahip olduğu gösterilmelidir. x sayısı bir satıra girdiğinde x in solundaki sayı x den küçüktür ve sağındaki sayı x e eşit veya büyüktür. Dolayısıyla satırın kalan kısmında bir değişiklik olmaz ve azalmayan bir sıralama bulunmaktadır. Aşağıda iki satır ve x in satıra yazılması gösterilmiştir.

a	b	c	d	e
f	g	h	i	j

 $\leftarrow x$

a	b	x	d	e
f	g	h	i	j

 $\leftarrow c$

h pozisyonu için iki durum vardır. Birincisi h nin c ile yer değiştirmesidir, bu durumda x c den kesin küçüktür ($x < c$) (Tablodaki kesin artan sütundan dolayı). Eğer h c ile yer değiştirmezse, c , h nin solundaki bir sayı ile yer değiştirilir. Bu durumda, $c < h$ olduğu için $x < h$ dir ve $x \leq c$ olduğu elde edilir. Bu yüzden, bir c sayısı bir satırda yer değiştiriyorsa ya aynı sütunda bir alttaki satıra iner ya da aynı sütunun bir alttaki satırının sol kısmında bir kutuya yazılır. Dolayısıyla sayı yer değiştirdiği sayının ya altında olup bu yüzden kesin büyüktür ($c > h$ gibi) ya da alt satırda solda bir sayı ile yer değiştirilir, c bu sayıdan daha büyüktür. Dolayısıyla bir Young diyagramı mevcuttur, satırlar azalmayan bir sıralamada ve sütunlar kesin artan sıralamadır. Bir T tablosu ve x sayısı ile bir yerleştirme işlemi iyi tanımlıdır ve $T \leftarrow x$ gibi yeni bir tablo verir.

Yerleştirme işleminin önemli bir özelliği tersi alınabilir bir işlem olmasıdır. Eğer bir $T \leftarrow x$ tablosu varsa ve hangi kutunun diyagrama eklendiği biliniyorsa, orijinal T tablosu bulunabilir. Yerleştirme işlemi kolayca geriye doğru çalıştırılabilir. y kutusunun diyagrama eklendiği kabul edilsin. Bu durumda y nin yukarı satırdaki yeri araştırılır. Önce, yukarıdaki satırda y den kesin küçük olan en sağdaki giriş araştırılır. Şimdi ise bu kutuya y yazılır ve giriş z bir üstteki satıra yerleştirilir ve bu giriş en üstteki satıra yerleştirilene kadar devam edilir. Bu giriş x dir ve T tablosu elde edilir.

4.3 Monoid Yapısı

Bir önceki kısımda, yerleştirme işlemi ve bu işlemde bir T tablosuna bir x sayısının nasıl ekleneceği, bu işlemin iyi tanımlı olduğu ve işlemin ters yönde nasıl çalıştığı ile ilgili bilgiler verildi. Şimdi ise bu işlemin tablolar kümesi üzerinde bir monoid yapısını elde etmede nasıl kullanılabileceği ile ilgili bilgiler verilecektir.

Öncelikle bir tabloya ard arda sayılar eklendiğinde ne gibi sonuçlar elde edileceği araştırılacaktır. Bu ard arda sayı eklendiğinde tabloda nerelere yeni kutular ekleneceği ile ilgilidir. Bu yeni eklenen kutuların izlediği yol (rota) monoid yapısı için önem arz etmektedir.

Bir T tablosuna bir x sayısı eklendiğinde bu sayının satırlar boyunca izlediği yol (rota) yerleştirme rotası olarak adlandırılır ve R ile gösterilir. Benzer şekilde tabloya yeni

eklenen kutu ise B ile gösterilir.

Örnek 4.8 Örnek 4.6 daki tablo için yerleştirme rotası aşağıda verilen tablodaki gölgeli kutulardan oluşur ve yeni kutu ise 7 sayısının bulunduğu kutudur.

2	3	3	4
3	4	4	
5	7	8	
6	9		
7			

Görüldüğü üzere, yerleştirme rotası, yukarıdan aşağıya doğru yeni kutuya kadar her satırda sadece bir kutu içermektedir. İki sayının tabloya eklenmesinde elde edilen rotalar karşılaştırıldığında ilginç sonuçlar elde edilir.

Tanım 4.9 R ve R' bir T tablosunda iki rota olsun. Eğer R' nün kutularının bulunduğu satırlardaki R nin kutuları R' nün kutularının solunda kalıyorsa R ye R' nün *bir kesin solu* denir. Benzer tanım sadece sol kısım içinde yapılabilir.

Lemma 4.10 T bir tablo, x ve y iki tamsayı olsun. x ve y tamsayıları üst üste T tablosuna yerleştirilirse bu $((T \leftarrow x) \leftarrow y)$ ile gösterilir ve bu durumda R ve R' gibi iki yerleştirme rotası ve B ve B' gibi iki yeni kutu elde edilir,

- Eğer $x \leq y$ ise, bu durumda R, R' nün bir kesin solu ve B de B' nün kesin solunda ve altında yer alır.
- $x > y$ ise R', R nin solu ve B', B nin solunda ve kesin altında yer alır.

İspat: $x \leq y$ ise, bu durumda x in birinci satırda bulunan bir u sayısının yerine yerleştirildiği kabul edilsin. Bu yerleştirme işlemi ya x in altında ya da x in solunda son bulacaktır. u, x ile yer değiştirildiğinden dolayı u satırda x ten büyük olan en küçük sayıdır. Bu yüzden $u > x$ tir. v nin ilk satırda y ile yer değiştirilen bir sayı olduğu kabul edilsin. Böylece $v > y$ dir ve $v > y \geq x$ dir. y ile yer değiştirilen v nin yeri u ile yer değiştirilen x nin yerinin kesin sağ tarafındadır. Bu kutudaki elemanlar ve bu kutunun solundaki elemanlar x ten daha büyük değildir ama v daha büyüktür. Bunun bir sonucu olarak, $u \leq v$ dir. Bu yöntem tüm satırlar için uygulanmaya devam edilir. Bu durumda

R rotası R' nün üst kısmında son bulmayacaktır ve eğer R' rotası ilk sonlanan olursa R rotası sağ tarafa geçemeyecektir. Dolayısıyla B kutusu B' nün kesin solunda ve altında kalacaktır.

Eğer $x > y$ ve u ve v sırasıyla tabloya yerleştiriliyorsa, bu durumda v , u nun ya da v nin yerleştirildiği yerin solunda sonlanmalıdır. Bu iki durumda da $u > v$ şeklindedir ve dolayısıyla bu yöntem tüm satırlar için uygulanmaya devam edilir. $x > y$ olduğundan, R' rotası R nin altında en az bir satır devam etmek zorundadır.

Tanım 4.11 Bir büyük Young diyagramından kendisinin içinde bulunan daha küçük bir Young diyagramının çıkarılmasıyla elde edilen diyagrama bir çarpık diyagram denir. Eğer iki diyagrama karşılık gelen parçalanışlar $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ ve $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ ise $\mu \subset \lambda$ yazılır ve çarpık diyagramın parçalanışı λ/μ ile gösterilir. Çarpık tabloda benzer şekilde tanımlanır.

Teorem 4.12 T , parçalanışı λ olan bir tablo ve T ye x_1, \dots, x_i tamsayıları yerleştirilsin.

$$U = ((\dots(T \leftarrow x_1) \leftarrow x_2) \leftarrow \dots x_i) \quad (4.1)$$

da μ parçalanışına sahip olsun.

- Eğer $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_i$ ise bu durumda μ/λ da iki kutu aynı sütunda değildir. Eğer $x_1 > x_2 > \dots > x_i$ ise bu durumda μ/λ da iki kutu aynı satırda değildir. Ayrıca U ile başlanırsa, μ/λ da i tane kutu ve μ nün içerdiği λ parçalanışına sahip bir Young diyagram vardır.
- Eğer μ/λ da aynı sütunda iki kutu bulunmuyorsa, bu durumda λ parçalanışına sahip bir tek T tablosu vardır ve $U = ((\dots(T \leftarrow x_1) \leftarrow x_2) \leftarrow \dots x_i)$ olacak şekilde bir tek $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_i$ vardır. Benzer şekilde eğer μ/λ da aynı satırda iki kutu bulunmuyorsa, bu durumda λ parçalanışına sahip tek bir T tablosu vardır ve $U = ((\dots(T \leftarrow x_1) \leftarrow x_2) \leftarrow \dots x_i)$ olacak şekilde tek bir $x_1 > x_2 > \dots > x_i$ vardır.

İspat: Teoremin birinci kısmı Lemma 4.10 daki gibi bir tabloya üst üste iki kez sayıların yerleştirilmesi ile ilgilidir. İkinci kısım için ters yerleştirmenin nasıl yapıldığına ihtiyaç vardır. Eğer μ/λ aynı sütunda iki kutuya sahip değilse μ/λ daki kutular kullanılarak U

üzerinde ters yerleştirmeye başlanır. En sağdaki kutudan başlanır ve sola doğru işleme devam edilir.

Örnek 4.13 Çizelge 4.2 de verilen tablolar dikkate alınırsa,

Çizelge 4.2 Çarpık diyagram örneği

U=	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td></td></tr><tr><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td></td></tr><tr><td>11</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	3	4	5	6	7		8	9	10		11			
1	2	3	4														
5	6	7															
8	9	10															
11																	

S=	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>8</td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	3	5	6	7	8		
1	2	3								
5	6	7								
8										

R=	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td></td><td></td><td></td><td>4</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>9</td><td>10</td><td></td></tr><tr><td>11</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>				4						9	10		11			
			4														
	9	10															
11																	

R, S ve U dan elde edilen bir çarpık diyagramdır.

T ve U iki tablo olmak üzere, T ile U tablolarının çarpımı

$$T \bullet U = ((\dots(T \leftarrow x_1) \leftarrow x_2) \leftarrow \dots x_i) \quad (4.2)$$

tanımlanır. Yani, $T \bullet U$, U tablosunun en son satırındaki elemandan başlanarak yukarı satırda soldan sağa doğru elemanların, T tablosuna yerleştirilmesidir.

Örnek 4.14 Aşağıda verilen tablolar için, $T \bullet U = (((T \leftarrow 4) \leftarrow 3) \leftarrow 4) \leftarrow 6$ dır.

T =	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td></td></tr><tr><td>8</td><td>8</td><td></td><td></td></tr><tr><td>9</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	3	5	2	4	6		3	5	7		8	8			9			
1	2	3	5																		
2	4	6																			
3	5	7																			
8	8																				
9																					

U =	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>3</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td></tr></table>	3	4	6	4		
3	4	6					
4							

$T \leftarrow 4 =$	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td>7</td><td>8</td><td></td><td></td></tr><tr><td>8</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>9</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	3	4	2	4	5		3	5	6		7	8			8				9			
1	2	3	4																						
2	4	5																							
3	5	6																							
7	8																								
8																									
9																									

$(T \leftarrow 4) \leftarrow 3 =$	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>8</td><td></td><td></td></tr><tr><td>7</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>8</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>9</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	3	3	2	4	4		3	5	5		6	8			7				8				9			
1	2	3	3																										
2	4	4																											
3	5	5																											
6	8																												
7																													
8																													
9																													

$((T \leftarrow 4) \leftarrow 3) \leftarrow 4 =$	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>5</td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>8</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>7</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>9</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	3	3	4	2	4	4			3	5	5			6	8				7					8					9				
1	2	3	3	4																																
2	4	4																																		
3	5	5																																		
6	8																																			
7																																				
8																																				
9																																				

$$(((T \leftarrow 4) \leftarrow 3) \leftarrow 4) \leftarrow 6 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 4 & 4 & & & \\ \hline 3 & 5 & 5 & & & \\ \hline 6 & 8 & & & & \\ \hline 7 & & & & & \\ \hline 8 & & & & & \\ \hline 9 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

4.4 Shützenberger Algoritması

Tanım 4.15 $T, \mu \subset \lambda$ üzerinde bir çarpık tablo olsun (μ nün Young diyagramı λ nın Young diyagramından daha küçük). μ deki herhangi bir kutunun sağındaki ve altındaki kutular μ de bulunmuyorsa bu kutuya çarpık tablonun bir *iç köşesi* denir. Benzer şekilde λ daki herhangi bir kutunun sağındaki ve altındaki kutular λ da bulunmuyorsa bu kutuya da çarpık tablonun bir *dış köşesi* denir.

Örnek 4.16 Aşağıda verilen çarpık tablo için

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & 5 & 6 \\ \hline & & & 4 & & \\ \hline & & & 5 & & \\ \hline & & 7 & 8 & & \\ \hline 9 & 10 & 11 & & & \\ \hline 12 & 13 & & & & \\ \hline \end{array}$$

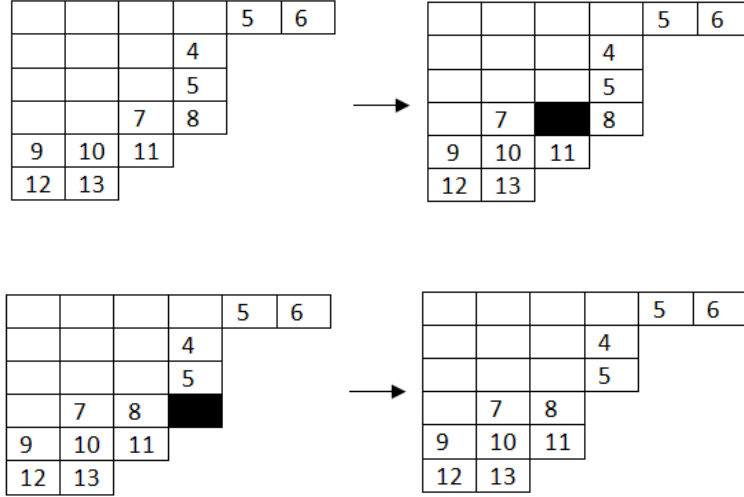
iç köşeler; birinci satırın dördüncü kutusu, üçüncü satırın üçüncü kutusu, dördüncü satırın ikinci kutusudur. Dış köşeler ise; birinci satırın son kutusu, dördüncü satırın son kutusu, beşinci satırın son kutusu ve altıncı satırın son kutusudur.

Shützenberger'in tablolar üzerindeki çarpma işlemi aşağıdaki şekilde açıklanır, öncelikle bir S çarpık tablosu alınarak bunun bir iç köşesi bir boş kutu olarak düşünülür,

- Bu iç köşenin sağındaki veya altındaki komşu kutulardan küçük olan bu iç köşeye kaydırılır,
- Eğer bu iki komşu kutudan biri çarpık diyagramda bulunuyorsa bu kutu kaydırmak için seçilir.
- Komşu kutuların her ikisinde aynı ise, bu durumda aşağıdaki kutu seçilir.

- Bu işlem yeni iç köşeler için tekrarlanır. Eğer bir kutunun sağında ya da altında kutu bulunmuyorsa, bu kutu diyagramdan silinir.

Örnek 4.17 Örnek 4.16 daki çarpık diyagram ele alınırsa, dördüncü satırdaki ikinci kutunun kaydırılması Şekil 4.2 deki gibi yapılır.



Şekil 4.2 Shützenberger algoritması örneği

Teorem 4.18 Shützenberger kaydırma algoritması iyi tanımlıdır.

İspat: Eklenen kutu bir iç köşe ve silinen kutuda bir dış köşe olduğundan diyagram kesinlikle bir çarpık diyagramdır. Yapılan bir işlemin sonucunun bir çarpık tablo olduğunu göstermek için satırların azalmayan ve sütunlarında kesin artan olarak kaldığının gösterilmesi gereklidir. Aşağıdaki gibi seçilen bir çarpık tablodaki kutulara neler olabileceğine bakıldığında,

$$S = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & b & v \\ \hline a & \blacksquare & y \\ \hline u & x & \\ \hline \end{array}$$

Bu durumda ya $x \leq y$ ya da $x > y$ şeklinde iki durum söz konusudur. Eğer $x \leq y$ ise

$$S \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & b & v \\ \hline a & x & y \\ \hline u & \blacksquare & \\ \hline \end{array}$$

olur, $x > y$ ise bu durumda da

		b	v
$s \rightarrow$	a	y	
	u	x	

elde edilir.

Birinci durumun gerçekleştiği kabul edilirse, sadece $a \leq x \leq y$ olduğunun garanti edilmesi gerekmektedir. Bir tablo elde edildiğinden, $a < u \leq x$ ve $x \leq y$ olup, dolayısıyla $a < u \leq x \leq y$ dir ve bu yüzden $a \leq x \leq y$ sonucu elde edilir.

İkinci durumda ise, $b < y < x$ olduğu ispatlanmalıdır. $y < x$ ve $b \leq v < y$ olduğundan $b \leq v < y < x$ dir ve bu yüzden $b < y < x$ dir. Dolayısıyla kaydırma kuralı iyi tanımlıdır ve bir çarpık diyagramdan başka bir çarpık diyagram elde edilir. Her adımda tablo koşulları korunur.

5. PLACTIC MONOID

Bu bölümde, Plactic monoid ile ilgili bilgiler verilmiştir. Bu konularla ilgili daha detaylı bilgiler [19, 20, 21, 22] kaynaklarından elde edilebilir.

5.1 Yarıgruplar

Tanım 5.1 S boş kümeden farklı bir küme olsun. $S \times S$ den S ye tanımlı bir fonksiyona *ikili işlem* denir. Bu ikili işlem $x, y \in S$ için $x \cdot y$ şeklinde gösterilir. Genelde $x \cdot y$ yerine kısaca xy yazılır. Eğer " \cdot ", S üzerinde bir ikili işlem ise (S, \cdot) ikilisine bir *grupoid* denir.

Tanım 5.2 (S, \cdot) bir grupoid olsun. Eğer " \cdot " ikili işlemi S üzerinde birleşme özelliğine sahip, yani her $x, y \in S$ için

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad (5.1)$$

ise (S, \cdot) grupoidine bir *yarıgrup* denir.

Genellikle (S, \cdot) yerine kısaca S yazılır ve "ikili işlem" yerine "çarpma işlemi" kullanılır.

Tanım 5.3 S bir yarıgrup olsun. Eğer her $s \in S$ için

$$1s = s = s1 \quad (5.2)$$

olacak şekilde bir $1 \in S$ varsa, 1 elemanına S nin *birim elemanı* ve S ye de bir *monoid* denir.

Tanım 5.4 Bir (S, \cdot) monoidinde her $a \in S$ için $ab = 1$ olacak şekilde bir $b \in S$ varsa (S, \cdot) ikilisine bir *grup* denir.

Verilen bir S yarı grubunun bütün alt yarı gruplarının kesişiminde, S nin bir alt yarı grubu olduğu açıktır. Bir S yarı grubunun bir A alt kümesi verilsin. O halde S nin A yı içeren tüm alt yarı gruplarının arakesiti de bir yarı gruptur. Bu yarı gruba A tarafından doğurulan yarı grup denir ve $\langle A \rangle$ ile gösterilir. $\langle A \rangle$ yarı grubu S nin A yı içeren (kapsamaya göre) en küçük alt yarı grubudur.

Tanım 5.5 $S = \langle A \rangle$ ise S ye A tarafından doğurulmuş ve A ya da S nin bir *doğuray kümesi* denir.

Tanım 5.6 ρ , X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. Eğer

1. $1_X \subseteq \rho$ ise ρ ya *yansımali* bağıntı;
 2. $\rho^{-1} = \rho$ ise ρ ya *simetrik* bağıntı;
 3. $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ ise ρ ya *geçişmeli* bağıntı
- denir.

Tanım 5.7 Eğer ρ bağıntısı yansımali, simetrik ve geçişmeli bağıntı ise ρ ya X üzerinde bir *denklik bağıntısı* denir. $x\rho = \{y \in X : (x, y) \in \rho\}$ olarak tanımlanan bu kümeye x in *denklik sınıfı* denir. Ayrıca

$$X/\rho = \{x\rho : x \in X\} \quad (5.3)$$

kümesine X in ρ vasıtasıyla oluşturulan *bölüm kümesi* denir.

Tanım 5.8 S bir yarıgrup ve R de S üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer her $a \in S$ ve $(s, t), (s', t') \in R$ için

1. $(as, at) \in R$ ise R bağıntısına *sol uyumlu*;
2. $(sa, ta) \in R$ ise R bağıntısına *sağ uyumlu*;
3. $(ss', tt') \in R$ ise R bağıntısına *uyumlu* bağıntı denir.

Ayrıca, sol uyumlu denklik bağıntısına bir *sol kongrüans*, sağ uyumlu denklik bağıntısına bir *sağ kongrüans* ve uyumlu denklik bağıntısına bir *kongrüans* denir.

Tanım 5.9 R , bir S yarıgrubu üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. S üzerinde R yi içeren en küçük kongrüansa R nin *doğurduğu kongrüans* denir ve $R^\#$ ile gösterilir. Bu durumda R bağıntısına, $R^\#$ *kongrüansının doğuray kümesi* denir.

Tanım 5.10 S bir yarıgrup ve ρ da S üzerinde bir kongrüans olsun. S nin ρ vasıtasıyla oluşturulan bölüm kümesi S/ρ üzerinde çarpma işlemi, her $x\rho, y\rho \in S/\rho$ için

$$(x\rho)(y\rho) = (xy)\rho \quad (5.4)$$

şeklinde tanımlansın. S/ρ , bu çarpma işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba S nin ρ vasıtasıyla oluşturulan *bölüm yarıgrubu* denir.

Tanım 5.11 A bir alfabe ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olmak üzere, $\langle A|R \rangle$ ikilisine bir *yarıgrup takdimi* denir ve ρ , A^+ üzerinde R tarafından doğurulmuş kongrüans olmak üzere, $\langle A|R \rangle$ tarafından takdim edilen yarıgrup A^+/ρ bölüm yarıgrubudur. Eğer S yarıgrubu A^+/ρ ya izomorfik ise $\langle A|R \rangle$ ye S nin bir *yarıgrup takdimi* denir.

Eğer A ve R sonlu kümeler ise $\langle A|R \rangle$ ye bir *sonlu takdim* ve eğer bir S yarıgrubunun bir sonlu takdimi var ise S ye *sonlu takdimli yarıgrup* denir.

Tanım 5.12 A bir alfabe, A^* , A üzerindeki serbest monoid, $R \subseteq A^* \times A^*$, ρ da R nin doğurduğu kongrüans olsun. $\langle A|R \rangle$ ikilisine bir *monoid takdimi* denir. A^*/ρ bölüm monoidine de $\langle A|R \rangle$ takdiminin tanımladığı monoid denir. Eğer M bir monoid ve $M \cong A^*/\rho$ ise, $\langle A|R \rangle$ ye M nin bir *monoid takdimi* denir.

5.2 Kelimelerin Alt Dizileri

Bu bölümde herhangi bir kelimenin en uzun artan veya en uzun azalan alt dizisinin nasıl bulunacağı gösterilecektir.

w bir permütasyon ve $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ bir parçalanış, T^λ bir standart tablo ve w da T^λ nin bir satır kelimesi olsun. Bu durumda T nin birinci satır elemanlarının kullanılmasıyla elde edilen λ_1 uzunluğa sahip w nun artan bir alt dizisi vardır.

σ , w nun herhangi bir artan alt dizisi olsun. Bu durumda σ , T nin her sütunundan en fazla bir eleman içerir.

a ve b , T nin C gibi aynı sütunundaki iki eleman olduğu ve σ da a nın b den önce geldiği kabul edilsin. Bu durumda $a < b$ dir. Diğer taraftan σ da a , b den önce ise T de a yı içeren satır b yi içeren satırın altında olmak zorundadır. Dolayısıyla $b < a$ olur ki bu

bir çelişkidir. Sonuç olarak, σ nın elemanları T nin farklı sütunlarından gelir ve σ nın uzunluğu en fazla λ_1 kadardır.

Dolayısıyla w nun en uzun alt dizisinin uzunluğu λ_1 kadardır.

Şimdi ise, w nun en uzun azalan alt dizisi ele alınsın. T nin ilk sütunundaki elemanlar artan sıradadır ve onlar w da ters sıradadırlar. Dolayısıyla, T nin birinci satırındaki elemanlar uzunluğu k olan w nun bir azalan alt dizisi şeklindedir, burada k , T deki satır sayısını göstermektedir. σ , w nun bir azalan alt dizisi olsun. σ da T nin her satırında sadece bir eleman bulunduğundan σ nın uzunluğu en fazla k dir. Bu yüzden w nun en uzun azalan alt dizisinin uzunluğu k dir.

π herhangi bir dizi, $P(\pi)$ yerleştirme yöntemi ile elde edilmiş π nin ilişkili tablosu ve w da satır kelimesi olsun.

Bu durumda π ve w nun en uzun artan (azalan) alt dizilerinin uzunlukları aynıdır [17].

Örnek 5.13 $\pi = (925746138)$ olsun. π nin ilişkili standart tablosu aşağıdaki gibidir,

$$P(\pi) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 & 8 \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline 5 & 7 & & \\ \hline 9 & & & \\ \hline \end{array}$$

ve bu tablonun satır kelimesi $w = (957241368)$ dir.

w nun en uzun artan alt dizisi 1368 dir. Ama bu π nin bir alt dizisi değildir. π nin uzunluğu 4 olan bir artan alt dizisi 2568 dir. w nun en uzun azalan bir alt dizisi 9521 olup bu da π nin bir alt dizisi değildir. π nin uzunluğu 4 olan azalan bir alt dizisi 9763 tür.

5.3 Knuth Bağlıları

Bu kısımda, Plactic monoidin tanımlanmasında önemli bir role sahip olan Knuth bağlantıları tanımlanacaktır.

Tanım 5.14 $x < y < z$ tamsayıları için,

1. $yxz = yzx$ (küçük ortada ise sağa kayar)
2. $xzy = zxy$ (büyük ortada ise sola kayar)

şartlarını sağlayan bağıntılara *birinci ve ikinci tip Knuth bağıntıları* denir.

Knuth bağıntıları yardımıyla bir T tablosuna s tamsayısı eklenerek başka bir T' tablosu elde edilebilir, burada T ve T' nin kelimeleri bir dizi Knuth bağıntısı ile ilişkilidir.

Örnek 5.15 Bir T tablosunun $w = (681235)$ kelimesine 4 ün eklenişi aşağıdaki gibi yapılır.

$$\begin{aligned}
w &= (681235) \\
w.4 &= (681235.4) \\
&= (6812354) \quad (354 = 534) \\
&= (6812534) \quad (253 = 523) \\
&= (6815234) \quad (152 = 512) \\
&= (6851234) \quad (685 = 658) \\
&= (6581234) \\
&= w_1
\end{aligned}$$

Yukarıdaki örnekte ilk üç hareket ikinci tip Knuth bağıntısı ile gerçekleşmişken son hareket ise birinci tip Knuth bağıntısı ile gerçekleşmiştir. Çizelge 5.1 deki tablo yukarıdaki hareketlerin bir özetini göstermektedir.

Çizelge 5.1 Knuth bağıntısı örneği

Hareket	x	y	z
1	3	4	5
2	2	3	5
3	1	2	5
4	5	6	8

Şimdi, bir Knuth bağıntısı ile değişen iki kelimenin en uzun artan (azalan) alt dizisinin değişmeyeceği gösterilecektir.

Birinci tip Knuth bağıntısı ve artan olma durumu ele alınsın. w bir kelime ve $x < y < z$ olmak üzere $ayxzb$, w nun bir parçası olsun. a ve b , y ve z ye komşu olmak zorunda değildir. yzx yerine birinci tip Knuth bağıntısı uygulanarak yxz yazılmasıyla elde edilen kelime w' olsun. σ , a ve b yi içeren w nun en uzun alt dizisi olsun. σ x , y , z lerden hariç w nun başka bir elemanını içermesin. Eğer x , y , z nin hiç biri σ da yoksa, bu durumda Knuth bağıntısının hiç bir etkisi olmaz. Eğer $ayzb$ (a ile b komşu) σ da ise, bu durumda aynı dizi w' nün bir maksimal artan alt dizisidir.

Eğer $axzb$, σ nun bir parçası ise, bu durumda $ayzb$, w' nün bir maksimal artan alt dizisinin bir kısmıdır. Bu durum σ da sadece x in yerine y yazılmasıdır. Dolayısıyla birinci tip Knuth bağıntısı w ve w' nün en uzun artan alt dizisinin uzunluğunu değiştirmez. Bu durum ikinci tip Knuth bağıntısı için ve azalan olma durumu içinde doğrudur.

Özet olarak, verilen bir π permütasyonu için $P(\pi)$ tablosu bulunur ve w , $P(\pi)$ ile ilişkili kelime olsun. Bu durumda w ve π Knuth denktirler, bunların en uzun artan (azalan) alt dizileri aynıdır. Bu yüzden $P(\pi)$ nin ilk satırı (sütunu) w nun dolayısıyla π nin en uzun artan (azalan) alt dizilerini verir. Bu sonuç aşağıdaki teorem ile ifade edilir.

Teorem 5.16 π bir permütasyon olsun. π nin en uzun artan alt dizisinin uzunluğu $P(\pi)$ nin ilk satırındır ve π nin en uzun azalan alt dizisinin uzunluğu $P(\pi)$ nin ilk sütunudur [15].

Örnek 5.17 $\pi = (925746138)$ olsun. π nin tablosu aşağıdaki gibidir.

$$P(\pi) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 & 8 \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline 5 & 7 & & \\ \hline 9 & & & \\ \hline \end{array}$$

En uzun artan ve azalan alt dizilerinin uzunlukları 4 tür. $P(\pi)$ nin ne ilk satırı ne de ilk sütunu π nin bir alt dizisi değildir. Bu sonuçlar sadece alt dizilerin uzunluklarını verir, alt dizinin kendisini değil.

Eğer permütasyonlar yerine sadece kelimeler dikkate alınırsa aynı metodlarla aynı sonuçlar elde edilir. w kelimesi ile $P(w)$ yarı standart tablosu elde edilir. $P(w)$ nun τ kelimesi oluşturulduğunda, $P(w)$ nun ilk satırının uzunluğu τ nun en uzun azalmayan alt dizisinin uzunluğudur ve $P(w)$ nun ilk sütununun uzunluğu τ nun en uzun azalan alt dizisinin uzunluğudur. Bir önceki gibi eklemeler Knuth bağıntıları ile ilişkilidir. Bu bağıntılar aşağıdaki gibidir.

1. $yxz = yzx$ $x < y \leq z$ iken
2. $xzy = zxy$ $x \leq y < z$ iken

Bir öncekinde olduğu gibi Knuth bağıntısı kelimelerin uzunluklarını değiştirmez. Dolayısıyla w ve τ Knuth denktirler.

Teorem 5.18 w bir kelime $P(w)$ da w nun tablosu olsun. w nun en uzun azalmayan alt dizisinin uzunluğu $P(w)$ nun ilk satırının uzunluğudur ve w nun en uzun azalan alt dizisinin uzunluğu $P(w)$ nun ilk sütununun uzunluğudur [15].

Örnek 5.19 $w = (523527154263)$ kelimesi verilsin.

w nun tablosu aşağıdaki gibidir.

$$P(w) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 4 & 5 & & \\ \hline 3 & 5 & & & \\ \hline 5 & 7 & & & \\ \hline \end{array}$$

1. $P(w)$ tablosunun birinci satır uzunluğu 5 olduğundan, w nun en uzun azalmayan alt dizisinin uzunluğuda 5 olup, bu alt kelime 23556 dır.
2. $P(w)$ tablosunun birinci sütun uzunluğu 4 olduğundan, w nun en uzun azalan alt dizisinin uzunluğuda 4 olup, bu alt kelimelerden bazıları, 7542 ve 7543 tür.
3. $P(w)$ tablosunun birinci satır uzunluğu 5 olduğundan, w nun en uzun artmayan alt dizisinin uzunluğuda 5 olup, bu alt kelimelerden bazıları, 55542 ve 55543 tür.

4. $P(w)$ tablosunun birinci sütun uzunluğu 4 olduğundan, w nun en uzun artan alt dizisinin uzunluğuda 4 olup, bu alt kelimelerden bazıları, 2357 ve 2356 dır.

aşağıdaki gibi bulunur.

5.4 Plactic monoid

Plactic monoid ile ilgili ilk çalışmalar Schensted (1961) ve Knuth (1970) deki Young tablolarla ilgili çalışmalardır. Bu alandaki daha derin çalışmalar 1981 de Lascoux ve Shützenberger tarafından yapılmıştır. Plactic monoid ismi Shützenberger tarafından levha hareketleri (tectonique des plaques) atfen verilmiştir. Young tablosu ile yakın ilişkisinden dolayı Plactic monoid temsil teori ve cebirsel kombinatorikte önemli bir araç olmuştur.

Plactic monoid genellikle aşağıdaki nedenlerden dolayı çalışılmıştır,

1. Simetrik polinomlar halkasının değişmeli olmayan bir halkanın içine gömülebilmesine imkan vermesi,
2. Bir artmayan alt kelimenin maksimal uzunluğuna genellenen kelimeler üzerindeki bir fonksiyonun syntactic monoidi olması,
3. Plactic monoidin iki elemandan fazla elemanı olan monoidin alfabelerine doğal bir genelleme olması.

Teorinin başlangıcı Schensted'in verilen bir kelimenin azalmayan alt kelimesinin maksimal uzunluğunu belirlemek için kullandığı algoritmadır. Bu algoritma bir Young tablosundan başka bir tablo elde etmeye yarar. Aynı tabloyu veren kelimeleri bulmaya çalışılınca tanımlayıcı bağıntıları Knuth bağıntıları olan monoid (Plactic monoid) elde edilir.

Plactic monoidin bazı uygulamaları;

1. Littlewood-Richardson kuralının tam bir ispatını sağlar,

2. Kostka-Foulkes polinomlarının tanımında kullanılır,
3. Schubert polinomlarının tanımında,
4. Lakshmibai ve Seshadri'nin standart bazlarının daha iyi anlaşılmasında,
5. Son yıllarda, Young tabloları quantum grupları teorisi ve özellikle Kashiwara'nın cristal tabanlar teorisi ile ilerleme kaydetti.

$w \in A^*$ bir kelime olsun. $l_k(w)$ da w nun k uzunluklu ayırık azalmayan alt kelimelerinin toplamının maksimumu olsun. Benzer şekilde $l'_k(w)$ da w nun k uzunluklu artan alt kelimelerinin toplamının maksimumu olsun.

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, $P(w)$ nun parçalanışı ve $w, \lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_r)$ eşlenik parçalanış olsun.

Teorem 5.20 $k = 1, \dots, r$ için $\lambda_k = l_k(w) - l_{k-1}(w)$ dur ve $k = 1, \dots, s$ için $\lambda'_k = l'_k(w) - l'_{k-1}(w)$ dur. ($l_0(w) = l'_0(w) = 0$)

Bu teoremin ispat edilebilmesi için aynı Schensted tablosuna sahip olan iki kelime arasındaki ilişkinin incelenmesi gereklidir. Bunun için A^* üzerinde bir \sim denklik bağıntısı,

$$u \sim v \Leftrightarrow P(u) = P(v) \quad (5.5)$$

şeklinde tanımlansın.

Uzunluğu ≤ 2 olan kelimeler için

$$u \sim v \Leftrightarrow u = v \quad (5.6)$$

dır.

Çünkü, bu tür kelimeler ya satır ya da sütundurlar. Aşık olmayan ilk bağıntılar kelimesinin uzunluğu 3 olması durumunda ortaya çıkar ve $(2, 1)$ parçalanışına sahiptirler. $x < y < z$ için dört durum vardır.

$$P(xyz) = P(zxy) = \begin{array}{|c|c|} \hline z & \\ \hline x & y \\ \hline \end{array}, \quad P(yzx) = P(yxz) = \begin{array}{|c|c|} \hline y & \\ \hline x & z \\ \hline \end{array}$$

$$P(xyxx)=P(yxxx)=\begin{array}{|c|c|} \hline y & \\ \hline x & x \\ \hline \end{array}, \quad P(yxy)=P(yyxx)=\begin{array}{|c|c|} \hline y & \\ \hline x & y \\ \hline \end{array}$$

\sim nın yukarıdaki bağıntılar tarafından doğrulan A^* üzerinde bir kongrüans olduğu ispatlanmıştır.

Tanım 5.21 A bir alfabe $x, y, z \in A$ olsun.

$$xzy = zxy \quad (x \leq y < z) \quad (5.7)$$

$$yxz = yzx \quad (x < y \leq z) \quad (5.8)$$

Knuth bağıntıları tarafından doğrulan kongrüans \equiv olmak üzere $Pl_n(A) = A^*/\equiv$ ifadesine A üzerinde rankı n olan *plactic monoid* denir.

Önerme 5.22 Her kelime kendisinin Schensted tablosuna denktir yani

$$w \equiv P(w) \quad (5.9)$$

dır.

İspat: \equiv nun tanımından, $|w| < 3$ için önerme doğrudur. İspat $|w|$ uzunluğu üzerinden tümevarım kullanılarak yapılır. Herhangi bir w kelimesi için $w \equiv P(w)$ olduğu kabul edilsin ve x bir harf olsun.

$$P(wx) \equiv wx \quad (5.10)$$

olduğu ya da

$$P(wx) = P(w).x \quad (5.11)$$

olduğu gösterilmelidir. $w \equiv P(w)$ olduğundan w , P nin bir satırıdır. Buradan, eğer wx bir satırı ise bu durumda

$$P(wx) = wx \quad (5.12)$$

dır ve aksi takdirde

$$P(wx) = yw' \quad (5.13)$$

olur öyle ki y , w da x ten büyük olan en soldaki harf olup w' , w da x yerine y yazılarak elde edilir. Bu durumda

$$w = uyv \quad (5.14)$$

yazılır ve (5.8) nolu bağıntının bir dizi uygulamasıyla

$$wx = uyxv \quad (5.15)$$

ve I.tip Knuth bağıntısının uygulamasıyla

$$vyxu \equiv yuxv \quad (5.16)$$

elde edilir.

Önerme 5.23 Eğer $w \equiv w'$ ise bu durumda her k için $l_k = (w) = l_k(w')$ dir.

İspat: w' nin w dan tek bir Knuth bağıntısı kullanılarak elde edildiği kabul edilsin. $w = uxzyv$, $w' = uzxyv$ ($x \leq y < z$) olsun. Açıkça w' nun tüm azalmayan alt kelimeleri w nunda alt kelimeleridir. Dolayısıyla

$$l_k(w) \geq l_k(w') \quad (5.17)$$

dir.

Tersine, (w_1, \dots, w_k) , w nun k lı ayrı azalmayan alt kelimeleri olsun. Bu durumda, $w_i = u'xzv'$, $u'.w.v'$ u ve v nin alt kelimeleri olmadıkça, w_i aynı zamanda w' nun bir alt kelimesidir. Eğer, y , w_j nin kalan kısmında herhangi bir yerde ortaya çıkmazsa, bu durumda

$$w_i = w_i' = u'xyv' \quad (5.18)$$

ile yer değiştirilir, bu w' nun bir azalmayan alt kelimesidir. Aksi durumda, eğer en az bir

$$w_j = u''yu'' \quad (5.19)$$

ise bu durumda da (w_i, w_j) ile $w_i' = u'xyu''$ ve $w_j' = v''zu'$ ile yer değiştirilir. (5.8) nolu Knuth dönüşümü de benzer şekildedir. Dolayısıyla

$$l_k(v') \leq l_k(w') \quad (5.20)$$

dır.

Dolayısıyla $l_k(w)$ tamsayıları (5.7) ve (5.8) deki Knuth bağıntıları aracılığıyla değişmezler. Bunlara Greene'nin plactic değişmezleri denir.

Şimdi Teorem 5.21 in ispatı yapılacak olursa, Önerme 5.23 ve 5.24 kullanılarak, λ nın T tablosu için

$$l_k(T) = l_1 + \cdots + l_k \quad (5.21)$$

olduğunun ispatlanması gereklidir.

w_1, \dots, w_k için T nin en uzun satır uzunlukları k olsun. O zaman

$$l_k(w) \geq \lambda_1 + \cdots + \lambda_k \quad (5.22)$$

dır.

Tersine T de w nun bir azalmayan alt kelimesi her sütundan en fazla bir harf içerir. Bu yüzden k tane ayırık azalmayan alt kelime T nin en çok $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ harfini içerir.

Teorem 5.24 \sim denkliği plactic kongrüans olup, her plactic sınıfı tam olarak bir tablo içerir.

İspat: $w \sim w'$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, Önerme 5.23 ten

$$w \equiv P(w) = P(w') \equiv w' \quad (5.23)$$

dır.

Tersine, $w \equiv w'$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda Önerme 5.24 ve Teorem 5.21 den $P(w)$ ve $P(w')$ aynı parçalanışa sahiptir. z , w ve w' nun en büyük elemanı olsun. Ve $w = uzv$, $w' = u'z'v'$ öyle ki z ne v de ne de v' de bulunmasın. Bu durumda,

$$uv \equiv u'v' \quad (5.24)$$

dır. w ve w' bir tek Knuth bağıntısı ile birbirlerinden farklı olduğu kabul edilebilir. Eğer z bu bağıntıda bulunmuyorsa, bu durumda ya $u \equiv u'$ ve $v = v'$ dir ya da $u = u'$ ve $v \equiv v'$ dir. Ve eğer z bu bağıntıda içeriliyorsa, z (5.7) ya da (5.8) bağıntıları kullanılarak silinir ve $xy = yx$ elde edilir, dolayısıyla

$$uv = u'v' \quad (5.25)$$

dır.

w nun uzunluğu üzerinden tümevarım yapılırsa $P(uv) = P(u'v')$ olduğu kabul edilebilir. Schensted algoritması tanımından z en büyük eleman olduğundan $P(uzv)$ deki z nin silinmesinden sonra açıkça görülür ki $P(uv)$ nin soludur. Dolayısıyla $P(w)$, $P(uv)$ den $P(w)$ nun diyagramında bir z kutusunun eklenmesi ile elde edilir. Aynı durum w' için de doğru olduğundan

$$P(w) = P(w') \quad (5.26)$$

dır.



6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, bir pozitif tamsayının parçalanışının Young Diyagramı ve bu diyagramların çeşitli temel tanım ve teoremleri, Young tabloları, standart tabloların sayısı ile ilgili Hook uzunluk formülü ve bazı örneklerden bahsedilmiştir. Ayrıca, bir Young diyagramına karşılık gelen grafikler ile ilgili bilgiler açıklanmıştır. Bunlara ilaveten, yerleştirme algoritması, Schensted algoritması ve Shützenberger algoritması ile tabloların monoid yapısı ile ilgili tanımlar yapılmıştır.

Son olarak, birinci ve ikinci tip Knuth bağıntıları ve bu bağıntılar tarafından tanımlanan Plactic monoid ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

Plactic monoidin aşikar olmayan bir birimi sağlayıp sağlamadığı sorusu hala bir açık problemdir. Bununla ilgili kısmi sonuçlar elde edilmiştir. Rankı n olan plactic monoid Pl_n olsun.

Pl_1 monojenik olduğundan, değişmeli olup, $xy = yx$ birimini sağlar.

Kubat ve Okninski [21] de Pl_2 nin Adian birimi $xyyxyyx = xyyxyxyyx$ i sağladığını, Pl_3 nin de $pqqppq = ppqqqp$ birimini sağladığını ve Pl_3 ün Adian birimini sağlamadığını gösterdiler.

Üzerinde çalışılan bir kaç açık problem aşağıda belirtilmiştir.

SORU 1: [22] de, $n \geq 4$ için Pl_n plactic monoidinin sağladığı aşikar olmayan bir birimi var mıdır?

SORU 2: [22] de, Pl plactic monoidinin sağladığı aşikar olmayan bir birimi var mıdır?

KAYNAKLAR

- [1] Fulton, W., Young Tableaux: With applications to representation theory and geometry, Cambridge University Press, 1997.
- [2] Frame, J.S., Robinson, G.De B. and Thrall, R. M., The hook graphs of the symmetric group, Canadian J.Math., 6, 316-324, 1954.
- [3] Greene, C., An extension of Schensted's theorem, Advances in Mathematics, 14(2), 254-265, 1974.
- [4] Humphreys, J.E., Reflection groups and Coxeter groups, Cambridge University Press, (Cambridge Studies in Advanced Mathematics)2006.
- [5] Knuth, D.E., Permutations, matrices and generalized Young tableaux, Pacific Journal of mathematics, 34, 1970.
- [6] Lascoux, A. and Schutzenberger, M.P., Le monoid plaxique, non-commutative structures in algebra and geometric combinatorics, Quaderni de La ricerca scientifica,109,Roma,CNR,1981
- [7] Young, A., The collected papers of Alfred Young, Mathematical expositions, University of Toronto Press, 21, 1977.
- [8] Schensted, C., Longest increasing and decreasing subsequences, Canadian Journal of Mathematics, 13, 1961.
- [9] Schutzenberger, M.P., Quelques remarques sur one construction de Schensted, Math.Scand., 12, 1963.
- [10] Robinson, G.De B., On the representations of the symmetric group, American Journal of Mathematics, 60, 1938.
- [11] Lothaire, M., Algebraic combinatorics on words, Cambridge University Press, 2002.
- [12] Cain, A.J., Gray,R., Malheiro, A., Finite Grbner-Shirshov bases for plactic algebras and biautomatic structures for plactic monoids, Journal of Algebra, 423, 37-53, 2015.
- [13] Howie, J.M., Fundamentals of semigroup theory, Clarendon Press, ed:Dales H.G., Neuman P.M., Oxford, 1995.
- [14] Glass, K. and Chi-Keung Ng, A simple proof of the Hook length formula, The American Mathematical Monthly, 111 (8), 700-704, 2013.
- [15] Aube, J., Stitzinger, E.L., Suanmali, S.B. and Zack, L.M., El-

- ementary applications of Young diagrams and Young tableaux, <http://math.highpoint.edu/lzack/ModuleChapter1-5.pdf>. 2007.
- [16] Ruch, E. and Gutman, I., The branching extent of graphs. *J. Combin. Inform. System Sci.*, 4, 285295, 1979.
- [17] Sagan, B., *The symmetric group*, Springer-Verlag, 2001.
- [18] Bayley, R. T., Young tableaux and the Robinson-Schensted-Knuth correspondence, Thesis for the degree of Master of Mathematics, Department of Mathematics and Computer Science, University of Leicester, 2002.
- [19] Frobenius, F. G., ber die charaktere der symmetrischen gruppe, *Sitz. Konig. Preuss, Akad. Wissen., Gesammelte Abhandlungen III*, Springer-Verlag, Heidelberg 148-166, 1968.
- [20] Kubat, L. and Okninski, J., Grbner-Shirshov bases for plactic algebras. *Algebra Colloq.*, 21(4), 591596, 2014.
- [21] Kubat, L. and Okninski, J., Identities of the plactic monoid. *Semigroup Forum*, 90, 1, 100112, 2015.
- [22] Cain, A.J., Malheiro, A., Identities in plactic, hypoplactic, sylvester, Baxter, and related monoids, arXiv preprint arXiv:1611.04151, 2016 - arxiv.org.

ÖZGEÇMİŞ

1. **Adı Soyadı** : Fatma TÜLÜCE
2. **Doğum Tarihi** :25.08.1993
3. **Ünvanı** : Matematik Öğretmeni
4. **Öğrenim Durumu** :

Derece	Alan	Üniversite	Yıl
Lisans	Matematik	Recep Tayyip ERDOĞAN Üniversitesi	2014

5. **İş Tecrübesi:**

Görev Ünvanı	Görev Yeri	Yıl
Matematik Öğretmeni	Özel Arı Etüt Eğitim Merkezi, Osmaniye	2015