FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜLERİ
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Seda Deniz UÇAR

POISSON BRAKETLERİ VE İKİ DEĞİŞKENLİ POISSON CEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OSMANİYE – 2018

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

POISSON BRAKETLERİ VE İKİ DEĞİŞKENLİ POISSON CEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİ

Seda Deniz UÇAR

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

OSMANİYE
OCAK-2018

TEZ ONAYI

POISSON BRAKETLERİ VE İKİ DEĞİŞKENLİ POISSON CEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİ

Seda Deniz UÇAR tarafından Yrd. Doç. Dr. Cennet ESKAL danışmanlığında, Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalı'nda hazırlanan bu çalışma, aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği/çokluğu ile **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Cennet ESKAL ....
Matematik Anabilim Dalı, OKÜ

Üye: Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM ....
Matematik Anabilim Dalı, KSÜ

Üye: Yrd.Doç. Dr. Özge ÖZTEKİN ....
Matematik Anabilim Dalı, Gaziantep Üniversitesi

Yukarıdaki jüri kararı Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..../......./........ tarih ve ..../........... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. COŞKUN ÖZALP ....
Enstitü Müdürü, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Bu Çalışma OKÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi Tarafından Desteklenmiştir.

Proje No: OKÜBAP-2015-PT3-015

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, bu çalışma sonucunda elde edilmeyen her türlü bilgi ve ifade için ilgili kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını ve bu tezin Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Seda Deniz UÇAR

ÖZET

POISSON BRAKETLERİ VE İKİ DEĞİŞKENLİ POISSON CEBİRLERİNİN OTOMORFİZMLERİ

Seda Deniz UÇAR
Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı
Danışman :Yrd. Doç. Dr. Cennet ESKAL

Ocak 2018, 47 sayfa

K karakteristiği 0 olan bir cisim ve $P_n = \langle x_1,\ x_2, \ldots, x_n \rangle$, K cismi üzerinde üreteçleri $\{x_1,\ x_2, \ldots, x_n\}$ olan bir serbest Poisson cebiri olsun.

Bu tezde, P_n Poisson cebiri için Bergman Merkezleyen Teoremi'nin geçerli olup olmadığı incelenmiştir. Karakteristiği 0 olan bir cisim üzerinde serbest Poisson cebirlerindeki sabit olmayan her elemanın merkezinin tek değişkenli bir polinom cebiri olduğu gösterilmiştir.

Ayrıca iki değişkenli P_2 Poisson cebirinin yerel nilpotent derivasyonlarının üçgenleştirilebilir olduğu ispatlanmıştır. Son olarak P_2 nin otomorfizmlerinin tame olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Poisson cebirleri, Merkezleyen, Derivasyonlar, Otomorfizmler

ABSTRACT

POISSON BRACKETS AND AUTOMORPHISMS OF POISSON ALGEBRAS IN TWO VARIABLES

Seda Deniz UÇAR
M.Sc., Department of Mathematics
Supervisor :Assist. Prof. Dr. Cennet ESKAL

January 2018, 47 pages

Let K be a field of characteristic zero and $P_n = \langle x_1,\ x_2, \ldots, x_n \rangle$ be free Poisson algebra generated by the set $\{x_1,\ x_2, \ldots, x_n\}$ over K.

In this thesis, it is investigated whether or not Bergman Centralizer Theorem is valid for free Poisson algebra P_n. It is shown that in free Poisson algebras over a field of characteristic zero the centralizer of every nonconstant element is a polynomial algebra on a single variable.

Afterwards, it is shown that the locally nilpotent derivations of P_2 are triangulable. Finally, it is proved that the automorphisms of P_2 are tame.

Key Words: Poisson algebras, Centralizer, Derivations, Automorphisms

Sevgili Aileme

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tez konumun belirlenerek tez çalışmamın yürütülmesini üstlenen, çalışmalarım süresince değerli bilgi ve tecrübelerini, katkılarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Cennet ESKAL ’a teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmama katkılarından dolayı başta OKÜ Matematik Bölüm Başkanı Yrd. Doç. Dr. Basri ÇALIŞKAN olmak üzere OKÜ Matematik Bölümü’nün diğer akademik ve idari personellerine teşekkür ederim. Ayrıca başta Bölüm Başkanı Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM olmak üzere KSÜ Matematik Bölümü’nün diğer akademik personellerine de teşekkürlerimi sunarım.

Manevi desteği ile daima yanımda duran değerli ailem ve nişanlım İlham GAHRAMANOV ’a da ayrıca teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	Reel (gerçel) sayılar kümesi
$A \times A$	A kümesinin kartezyen çarpımı
$A \oplus B$	A ile B vektör uzaylarının direkt toplamı
ad	Adjoint dönüşümü
$\overline{a}$	a nın en büyük homojen parçası
$B \triangleleft A$	B, A Poisson cebirinin ideali
$C_A(S)$	S kümesinin A Poisson cebirindeki merkezleyeni
$Cl(f)$	f ile cebirsel bağımlı olan tüm elemanların kümesi
$deg(a)$	a nın derecesi
$DerA$	A nın tüm derivasyonlarının kümesi
$dim(V)$	V vektör uzayının boyutu
$End(V)$	V vektör uzayından V vektör uzayına olan endomorfizmlerin kümesi
$g\ell(n,K)$	K cismi üzerinde $n \times n$ tipindeki matrislerin vektör uzayı
$K[x_1,x_2,\ldots,x_n]$	$\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ kümesi tarafından üretilen bir K cismi üzerindeki polinom cebiri
$pdeg$	Doğal derece fonksiyonu
$P_n = \langle x_1,\ x_2,\ldots,x_n\rangle$	$\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ kümesi tarafından üretilen bir K cismi üzerindeki bir serbest Poisson cebiri
$PS(L)$	Simetrik Poisson cebiri
S_n	Simplektik Cebirler
$Sym(V^* \oplus V)$	Simetrik cebir
$U(L)$	Bir L Lie cebirinin evrensel cebiri
V^*	V vektör uzayının dual uzayı
w_deg	Ağırlık derece fonksiyonu
δ_{ij}	Kronecker delta
$\{-,-\}$	Poisson braketi
$[-,-]$	Lie braketi

1. GİRİŞ

Poisson braketleri, 19. yüzyılın başlarında hareket denklemlerinin çözümlerini elde etmek için faydalı bir algoritma olarak Joseph-Louis Lagrange ile öğrencisi Simon-Denis Poisson tarafından verilmiştir. $f,\ g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonlar ve (q,p) doğal koordinatlar olmak üzere Lagrange ve Poisson bu braketleri,

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) \tag{1.1}$$

olarak tanımlamışlardır. Bu braketi kullanarak Poisson, I ve J sabit olduğunda $\{I,J\}$ Hamilton sisteminin de sabit olduğu özelliğini sağlayan yeni bir düzgün fonksiyon elde edildiğini vurgulamıştır. 1830 lu yıllarda Jacobi, Poisson tarafından verilen I ve J bir Hamilton sistemi için hareket sabiti ise $\{I,J\}$ braketinin de bir hareket sabiti olduğunu ispatladı. $X_{\{f,g\}}$ vektör alanına h fonksiyonu uygulanırsa şimdilerde Jacobi özdeşliği olarak bilinen $\{\{f,g\},h\} = \{f,\{g,h\}\} - \{g,\{f,h\}\}$ eşitliği elde edildiğinden aslında Jacobi'nin keşfettiği şey, bir Lie cebirinin ilk örneğiydi. 1870 li yıllarda Marius Sophus Lie, Poisson braketlerini daha sistematik çalışmaya başladı ve Poisson braketlerinin yeni örneklerini buldu. Bu braketlere Lie-Poisson braketleri denir ve bu braketler Krillov ve Konstant'ın Lie gruplarının temsillleri ile ilgili $[1-3]$ çalışmalarında tanımlanana kadar ihmal edilmiştir.

Poisson cebirlerinin fiziğin ve matematiğin birçok dalında önemli bir yeri vardır. Örneğin Hamilton mekaniğinde ve kuantum gruplarında kullanılır. Ayrıca manifoldlar, Poisson cebiri yapısıyla birlikte kullanılarak Poisson manifoldlarını oluşturur. Poisson cebirinin teorik matematikte de birçok uygulama alanı vardır. Bunlardan biri ünlü M. Kontsevich Teoremi'dir. Bu teoreme göre, herhangi sonlu boyutlu Poisson manifoldu doğal olarak hesaplanabilir. Poisson cebirinin bir diğer ilginç uygulaması, A. Belov-Kanel ve M. Kontsevich'in [4] deki çalışmasında görülür. Bu çalışmada, karakteristiği pozitif olan simplektik cebirleri kullanılarak Jacobian varsayımının stabil olarak Dixmier varsayımına denk olduğu ispatlanmıştır.

Serbest Poisson cebirleri, bazen polinom cebirlerinin araştırılmasında yararlıdır. Örneğin; rankı üç olan serbest Poisson cebirleri ve Poisson braketleri, $[5-8]$ de karakteristiği 0 olan bir K cismi üzerindeki $K[x,y,z]$ polinom cebirinin

$$\sigma = (x+(x^2-yz)z, \quad y+2(x^2-yz)x+(x^2-yz)^2z, \quad z) \tag{1.2}$$

Nagata otomorfizminin [9] wild olduğunu ispatlamak için kullanıldı.

$K[x,y,z]$ üzerindeki tüm homojen kuadratik Poisson yapıları [10] da açıklanmıştır. Serbest Poisson cebirlerinin cebirsel nicelemeleri ise [11] de inşa edilmiştir.

Serbest birleşmeli cebirler hakkındaki temel sonuçlardan biri, algoritmik ve kombinasyon problemi çalışmalarında önemli bir rol oynayan Bergman'ın Merkezleyen Teoremi'dir[12]. Bu teorem, herhangi bir sabit olmayan elemanının merkezleyeninin bir tek değişken üzerindeki bir polinom cebiri olduğunu ifade eder. Bu teoremin polinom cebirleri için benzeri [7] de ispatlanmıştır. Bergman Merkezleyici Teoremi'nin bir benzerinin serbest Poisson cebirlerindeki geçerliliği hakkındaki soru, açık bir problemdi ve bu [7] de $Problem 1$ olarak verilmiştir. Tezde Bergman'ın Merkezleyen Teoremi, karakteristiği 0 olan bir cisim üzerindeki Poisson cebirleri için incelenmiş ve bu teoremin Poisson cebirleri için de geçerli olduğu gösterilmiştir.

İki değişkenli polinom cebirlerinin ve serbest birleşmeli cebirlerinin otomorfizmlerinin tame olduğu iyi bilinir $[13-16]$. Son zamanlarda karakteristiğin 0 olması durumunda, üç değişkenli polinom cebirleri ve serbest birleşmeli cebirlerin wild otomorfizmlere sahip olduğu ispatlanmıştır [8, 17]. P. Cohn [18] da sonlu üretilmiş serbest bir Lie cebirinin otomorfizmlerinin tame olduğunu ispatladı. Tezde karakteristiği 0 olan bir cisim üzerindeki iki değişkenli bir Poisson cebirinin otomorfizmlerinin tame ve yerel nilpotent derivasyonlarının üçgenleştirilebilir olduğu ispatlanmıştır.

Polinom cebirleri, serbest birleşmeli cebirler ve serbest Lie cebirlerinin yapısı hakkında bilinen birçok sonuç vardır. Serbest Poisson cebirleri, bu cebirler ile çok yakından bağlantılı olmasına rağmen, şimdiye kadar Poisson cebirleri ile ilgili çok fazla çalışılmamıştır. Bu az sayıdaki bilinen çalışmaların bazılarını derleyip bir araya getirmek ve Poisson cebirleri için Türkçe bir kaynak oluşturmak bu tezin amaçlarından biridir.

Bu tez toplam beş bölümden oluşmaktadır. Her bir bölümün içeriği aşağıda özetlenmiştir.

İkinci bölümde Poisson cebirleri tanımlanmış ve bu tezde kullanılacak olan temel tanımlardan sözedilmiştir.

Üçüncü bölümde karakteristiği 0 olan bir cisim üzerindeki serbest Poisson cebirleri için Bergman Merkezleyen Teoremi'nin bir benzeri ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde karakteristiği 0 olan bir cisim üzerindeki iki değişkenli bir Poisson cebirinin otomorfizmlerinin tame ve yerel nilpotent derivasyonlarının üçgenleştirilebilir olduğu ispatlanmıştır.

Son bölümde ise Poisson cebirleri ile ilgili bazı açık problemlerden bahsedilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1 Cebirler ve Lie Cebirleri

Tanım 2.1 A, bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\cdot\ : A \times A \longrightarrow A$$

$$(x,y) \longrightarrow x \cdot y$$

işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa A ya bir cebir denir.

i) Her $x,y,z \in A$ için

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

ii) Her $\alpha \in K$ ve her $x,y \in A$ için

$$\alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y)$$

Eğer her $x,y,z \in A$ için

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

ise A ya birleşmeli cebir,

$$x \cdot y = y \cdot x$$

ise A ya değişmeli (abelyen) cebir denir.

Tanım 2.2 L, bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. L üzerinde $x,y \in L$ elemanına $[x,y] \in L$ elemanını karşılık getiren bir $[\ ,\ ] : L \times L \to L$ komutatör çarpımı,

(L1) Her $x \in L$ icin $[x,x] = 0$

(L2) Her $x,y,z \in L$ icin

$$[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0 \qquad \text{(Jacobi özdeşliği)} \tag{2.1}$$

koşullarını sağlıyorsa L ye K cismi üzerinde bir Lie cebiri denir. Jacobi özdeşliği bazen sağa dayalı olarak

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$$

şeklinde de yazılabilir.

Her $x,y \in L$ için

$$[x+y,x+y]=0 \qquad \Rightarrow \qquad [x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y]=0$$

olup buradan

$$[x,y]=-[y,x] \qquad \text{(anti-komutatiflik özelliği)} \tag{2.2}$$

elde edilir. Böylece (L1) koşulu (2.2) koşulunu gerektirir.

2.2 Poisson Cebirleri

Tanım 2.3 K bir (değişmeli, birimli) halka, $(A,.)$ birleşmeli bir $K-$cebiri ve $(A,\{\})$ bir Lie $K-$cebiri olmak üzere bir K halkası üzerindeki Poisson cebiri, her $a,b,c \in A$ elemanları için

$$\{a.b,c\}=a.\{b,c\}+\{a,c\}.b \tag{2.3}$$

özdeşliğini sağlayan $(A,.,\{\})$ üçlüsüdür.

Bu nedenle Poisson cebiri için aksiyomlar aşağıdaki gibidir:

i) $a.(b.c)=(a.b).c$

ii) $\{a,b\}+\{b,a\}=0$

iii) $\{\{a,b\},c\}+\{\{c,a\},b\}+\{\{b,c\},a\}=0$ (Jacobi özdeşliği)

iv) $\{a.b,c\}=a.\{b,c\}+\{a,c\}.b$ (Leibniz özdeşliği)

Örnek 2.4 Her Lie cebiri, $a.b = 0$ sıfır birleşmeli çarpımına göre bir Poisson cebiridir. Her birleşmeli cebir, $\{a,b\} = 0$ sıfır Poisson braketine göre bir Poisson cebiridir. Böyle bir cebire sıfır Poisson cebiri denir.

Örnek 2.5 Her A birleşmeli cebiri,

$$\{a,b\} = a \cdot b - b \cdot a \tag{2.4}$$

çarpımına göre bir Poisson cebiridir. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
\{a \cdot b, c\} &= (a \cdot b) \cdot c - c \cdot (a \cdot b) \\
&= a \cdot (b \cdot c) - a \cdot (c \cdot b) + (a \cdot c) \cdot b - (c \cdot a) \cdot b \\
&= a \cdot (b \cdot c - c \cdot b) + (a \cdot c - c \cdot a) \cdot b \\
&= a \cdot \{b,c\} + \{a,c\} \cdot b
\end{aligned}$$

olduğundan A bir Poisson cebiridir. Ancak bu Poisson yapısı tamamen birleşmelilik tarafından belirlenir. Benzer şekilde bir L Lie cebirinin $U(L)$ evrensel cebiri, bir Poisson cebiri olur.

Örnek 2.6 V bir vektör uzayı olsun. V den V ye olan tüm lineer dönüşümlerin vektör uzayını $End(V)$ ile gösterelim. Her $a, b \in End(V)$ için $a \cdot b$ çarpımını $x \in V$ için

$$(a \cdot b)(x) = a(b(x)) \tag{2.5}$$

olarak tanımlayalım. Bu işlemle $End(V)$, bir birleşmeli cebirdir. Her $a, b \in V$ için $\{a,b\}$ çarpımını

$$\{a,b\}(x) = (a \cdot b)(x) - (b \cdot a)(x) = a(b(x)) - b(a(x)) \tag{2.6}$$

olarak tanımlayalım. O zaman $End(V)$ bu braket çarpımı ile bir Poisson cebiri olur.

Örnek 2.7 K bir cisim olsun. K üzerinde tüm $n \times n$ tipindeki matrislerin vektör uzayını $g\ell(n,K)$ ile gösterelim. $g\ell(n,K)$, matris çarpımı ile birleşmeli bir cebirdir. Her $A, B \in g\ell(n,K)$ için $\{A,B\}$ çarpımını

$$\{A,B\} = A \cdot B - B \cdot A \tag{2.7}$$

olarak tanımlayalım. O zaman $g\ell(n,K)$ bu braket çarpımı ile bir Poisson cebiri olur.

Örnek 2.8 V, K üzerinde bir vektör uzayı, V^* onun dual uzayı ve A da $V \oplus V^*$ üzerindeki lineer fonksiyonları tarafından üretilen değişmeli cebiri düşünelim. (İhtiyaç olmamasına rağmen V nin yansıma özelliğine sahip olduğunu farz edelim.) A, $Sym(V^* \oplus V)$ simetrik cebiri olarak görülebilir. (Eğer V bir topolojik vektör uzayı ise sürekli simetrik tensörleri düşünülebilir.) Şimdi, eğer $\varphi \oplus v,\ \psi \oplus w \in V^* \oplus V$ için

$$\{\varphi \oplus v,\ \psi \oplus w\} = \varphi(w) - \psi(v)$$

olarak tanımlayalım. ($\{V^*, V\} = 0$ olduğuna dikkat edelim.) Bu bir $V^* \oplus V$ üzerinde $K-$bilineer çarpık-simetrik dönüşüm verir. Bu dönüşümü

$$\begin{aligned} \{a+b,c\} &= \{a,c\}+\{b,c\}, \\ \{ab,c\} &= a\{b,c\}+b\{a,c\}, \\ \{K,A\} &= 0 \end{aligned}$$

uygulayarak A ya genişletebiliriz. A, $V^* \oplus V$ tarafından bir cebir olarak üretildiği için bu dönüşüm bir lineer çarpık-simetrik operatör tanımlar. Jakobi özdeşliği basit bir tümevarımla doğrulanabilirken, bu operatörün Leibniz özdeşliğini sağladığı tanımdan gösterilir. Bu Poisson cebirine V üzerinde Simplektik cebir denir.

Poisson cebirlerinin iki önemli sınıfı vardır:

1- S_n Simplektik Cebirleri: Her bir n için $K[x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n]$ bir Polinom cebiri üzerinde

$$\begin{aligned} \{x_i, y_j\} &= \delta_{ij}\ , \\ \{x_i, x_j\} &= 0\ , \\ \{y_i, y_j\} &= 0 \end{aligned}$$

olarak tanımlanan Poisson braketleri ile S_n bir Poisson cebiridir. Burada $1 \leq i, j \leq n$ için δ_{ij} Kronecker sembolüdür.

2- $PS(L)$ Simetrik Poisson Cebiri: L, bir lineer bazı $e_1, e_2, ..., e_k, ...$ olan bir Lie cebiri olsun. L (alışılmış $k[e_1, e_2, ..., e_k, ...]$ polinom cebiri) üzerinde her i, j için $\{e_i, e_j\} = [e_i, e_j]$ olarak tanımlanan Poisson braketi ile $PS(L)$, L nin $S(L)$ simetrik cebiridir. Burada $[x, y]$, L Lie cebirinin çarpma işlemidir.

Tanım 2.9 $(A, ., \{\ \})$ Poisson cebiri ve $B \subseteq A$ olsun. Eğer B, A daki işlemlerle bir Poisson cebiri ise yani her $x, y \in B$ için

i) $x \cdot y \in B$ ve $y \cdot x \in B$

ii) $\{x, y\} \in B$

koşulları sağlanıyorsa B ye A nın bir alt Poisson cebiri denir.

Tanım 2.10 B, A nın bir alt Poisson cebiri olsun. Her $x \in B$ ve $z \in A$ için

i) $x \cdot z \in B$ ve $z \cdot x \in B$

ii) $\{x, z\} \in B$

koşulları sağlanıyorsa B ye A Poisson cebirinin ideali denir ve $B \triangleleft A$ ile gösterilir.

2.3 Poisson Cebirlerinin Merkezleyeni

A bir Poisson cebiri olsun.

Tanım 2.11 $S \subset A$ olmak üzere

$$C_A(S) = \{x \in A : \forall s \in S,\ x \cdot s = s \cdot x,\ \{x, s\} = 0\} \tag{2.8}$$

kümesine S nin A daki merkezleyeni (centralizer) denir.

Önerme 2.12 $C_A(S)$, A nın bir alt Poisson cebiridir.

İspat: $x, y \in C_A(S)$ olsun. Bu durumda her $s \in S$ için $\{x, s\} = 0$ ve $\{y, s\} = 0$ olur. Buradan

$$\{x \cdot y, s\} = x \cdot \{y, s\} + \{x, s\} \cdot y = 0$$

ve

$$\{y \cdot x, s\} = y \cdot \{x, s\} + \{y, s\} \cdot x = 0$$

olur. Böylece

$$(x \cdot y) \cdot s = x \cdot (y \cdot s) = x \cdot (s \cdot y) = (x \cdot s) \cdot y = (s \cdot x) \cdot y = s \cdot (x \cdot y)$$

olduğundan $y \cdot x \in C_A(S)$ ve $x \cdot y \in C_A(S)$ elde edilir. $\{x,y\} = 0$ olduğundan

$$\{x,y\} \cdot s = 0 \quad \text{ve} \quad s \cdot \{x,y\} = 0$$

olup buradan $\{x,y\} \cdot s = s \cdot \{x,y\}$ bulunur.

$$\{\{x,y\},s\} = -\{\{y,s\},x\} - \{\{s,x\},y\} = 0$$

olduğundan $\{x,y\} \in C_A(S)$ dir. Böylece $C_A(S)$, A nın bir alt Poisson cebiri olur.

Tanım 2.13 A bir Poisson cebiri olsun.

$$C(A) = \{x \in A \ : \ \forall y \in A \text{ için} \quad x \cdot y = y \cdot x, \ \{x,y\} = 0\} \tag{2.9}$$

kümesine A nın merkezi (center) denir.

2.4 Poisson Cebirlerinin Derivasyonları

Tanım 2.14 $\{A, ., \{\ \}\}$, bir Poisson cebiri olsun. $D : A \to A$ lineer dönüşümü, her $x, y \in A$ için

$$D(x \cdot y) = D(x) \cdot y + x \cdot D(y) \qquad \text{(Leibniz Kuralı)} \tag{2.10}$$

özelliğini sağlıyorsa D ye bir birleşmeli cebir olarak A nın bir derivasyonu denir.

$$D(\{x,y\}) = \{D(x),y\} + \{x,D(y)\} \tag{2.11}$$

özelliği sağlanıyorsa D ye bir Lie cebiri olarak A nın bir derivasyonu denir.

A bir Poisson cebiri olmak üzere $D : A \to A$ lineer dönüşümü her $x, y \in A$ için

$$\begin{aligned} D(x \cdot y) &= D(x) \cdot y + x \cdot D(y) \\ D(\{x,y\}) &= \{D(x),y\} + \{x,D(y)\} \end{aligned}$$

özelliklerini sağlıyorsa D ye A Poisson cebirinin bir derivasyonu denir. Diğer bir deyişle, D bir asosyatif cebir ve bir Lie cebiri olarak A nın bir derivasyonudur.

Örnek 2.15 Her $x \in A$ için

$$ad_x : A \to A, \ y \to \{x,y\}$$

bir birleşmeli cebir olarak A nın bir derivasyonudur. Her $x, y, z \in A$ için Jacobi özdeşliğinden

$$\begin{aligned} ad_x(\{y,z\}) &= \{x, \{y,z\}\} \\ &= -\{\{y,z\},x\} \\ &= \{\{x,y\},z\} + \{\{z,x\},y\} \\ &= \{\{x,y\},z\} + \{y, \{x,z\}\} \\ &= \{ad_x y, z\} + \{y, ad_x z\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $x \in A$ için ad_x dönüşümü bir Poisson cebiri olarak A nın bir derivasyonu olur. Böyle derivasyonlara iç (inner) derivasyonlar denir.

2.5 Poisson Cebirleri Üzerindeki Modüller

Tanım 2.16 Bir $(A, \ ., \ \{\ \})$ Poisson cebiri üzerindeki bir E Poisson modülü, hem $(A, \ .)$ cebiri üzerindeki bir modül hem de $(A, \ \{\ \})$ Lie cebirinin bir temsilidir. Öyle ki

$$\{a,b\}.e = a\{b,e\} - \{b, a.e\} \quad a,b \in A, \quad e \in E$$

dir. $(A, .)$ nın E üzerindeki etkisi . ve $(A, \{\ \})$ nın E üzerindeki etkisi $\{\ \}$ dir.

Örneğin; hem A ve A', adjoint ve koadjoint etkilerine göre Poisson modülleridir.

Örnek 2.17 $DerA$ derivasyon modülü,

$$(a.D)(b) = a.D(b) \ \ ve \ \ \{a,D\} = [X_a, D]$$

işlemleri ile bir Poisson cebiridir. Gerçekten, asosyatif etki adjointtir:

$$\begin{aligned} \{\{a,b\},D\} &= [X_{\{a,b\}}, D] \\ &= [[X_a, X_b], D] \\ &= [X_a, [X_b, D]] - [X_b, [X_a, D]] \\ &= \{a, \{b,D\}\} - \{b, \{a,D\}\} \end{aligned}$$

$$\{a,bD\} = [X_a,bD] = b[X_a,D] + \{a,b\}D = b\{a,D\} + \{a,b\}D$$

olup böylece Lie etkisinin bir Poisson etkisi olduğu gösterilmiş olur.

Tanım 2.18 Bir $(A,\ .,\ \{\ \})$ Poisson cebiri üzerinde bir E çarpım modülü, hem $(A,\ .)$ cebiri üzerinde bir modül hem de $(A,\ \{\ \})$ Lie cebirinin

$$\{ab,e\} = a\{b,e\} + b\{a,e\}\ ,\ a,b \in A\ ,\ e \in E$$

olacak şekildeki bir temsilidir. $.$, E üzerindeki $(A,\ .)$ etkisi ve $\{\ \}$, $(A,\ \{\ \})$ nın etkisidir.

Poisson modül kavramı çarpım modülünden farklıdır. Örneğin;

$$\begin{aligned}\{ab,D\} &= [X_{ab},D] \\ &= [aX_b,D] + [bX_a,D] \\ &= a\{b,D\} + b\{a,D\} - D(a)X_b - D(b)X_a\end{aligned}$$

olduğundan *DerA* bir çarpım modülü değildir.

2.6 Poisson Cebirlerinin Homomorfizmleri

Tanım 2.19 A_1 ve A_2 iki Poisson cebiri olsun. $\theta : A_1 \to A_2$ lineer dönüşümü; her $a,b \in A_1$ için

$$\begin{aligned}\theta(a.b) &= \theta(a).\theta(b) \\ \theta(\{a,b\}) &= \{\theta(a),\ \theta(b)\}\end{aligned}$$

oluyorsa θ ya bir Poisson cebiri homomorfizmi (morfizmi) denir.

Eğer θ birebir ve örten ise θ ya bir izomorfizm denir. A bir Poisson cebiri olmak üzere $\theta : A \to A$ bir izomorfizm ise θ ya bir otomorfizm denir.

Örnek 2.20 $\varphi : A \to B$ bir Poisson cebiri homomorfizmi olsun.

$$\text{Çek}\varphi = \{a \in A :\ \varphi(a) = 0\} \tag{2.12}$$

olarak tanımlanan φ homomorfizminin çekirdeği, A nın bir idealidir:

$a_1, a_2 \in$ Ç$ek\varphi$ olsun. Bu durumda $\varphi(a_1) = 0$, $\varphi(a_2) = 0$ dır.

$$\varphi(a_1.a_2) = \varphi(a_1).\varphi(a_2) = 0.0 = 0$$

olup $a_1.a_2 \in$ Ç$ek\varphi$ ve $a_2.a_1 \in$ Ç$ek\varphi$ dir.

$$\varphi(\{a_1, a_2\}) = \{\varphi(a_1), \varphi(a_2)\} = 0$$

Böylece Ç$ek\varphi$, A nın bir Poisson alt cebiridir. Her $a \in A$ için

$$\varphi(a.a_1) = \varphi(a).\varphi(a_1) = \varphi(a).0 = 0$$

olup $a.a_1 \in$ Ç$ek\varphi$ dir.

$$\varphi(\{a, a_1\}) = \{\varphi(a).\varphi(a_1)\} = \varphi(a).0 = 0$$

olup $\{a, a_1\} \in$ Ç$ek\varphi$ dir. Böylece Ç$ek\varphi$, A Poisson cebirinin bir idealidir.

Örnek 2.21 $\varphi : A \to B$ bir Poisson cebiri homomorfizmi olsun.

$$Gör\varphi = \{b \in B : \ \varphi(a) = b \text{ olacak şekilde bir } a \in A \ \text{ vardır.}\} \tag{2.13}$$

olarak tanımlanan φ homomorfizminin görüntüsü, B nin alt Poisson cebiridir:

$b_1, b_2 \in Gör\varphi$ olsun. O zaman $\varphi(a_1) = b_1$ ve $\varphi(a_2) = b_2$ olacak şekilde $a_1, a_2 \in A$ vardır.

$$\varphi(a_1.a_2) = \varphi(a_1).\varphi(a_2) = b_1.b_2$$

olduğundan $b_1.b_2 \in Gör\varphi$ dir.

$$\varphi(\{a_1, a_2\}) = \{\varphi(a_1), \varphi(a_2)\} = \{b_1, b_2\}$$

olduğundan $\{b_1, b_2\} \in Gör\varphi$ dir. Böylece $Gör\varphi$, B nin bir alt Poisson cebiridir.

NOT: Ancak $Gör\varphi$ her zaman B nin bir ideali olmak zorunda değildir.

Örnek 2.22 K bir cisim olmak üzere $n_n(K)$ ile $n \times n$ tipindeki kesin üst üçgensel matrislerin kümesini gösterelim. $n_n(K)$, matris toplaması ve matrisin katını alma işlemleriyle birleşmeli bir cebirdir. Her birleşmeli cebir bir Poisson cebiri olduğundan $n_n(K)$ de bir Poisson cebiri olur. $\varphi : n_2(K) \to n_3(K)$ dönüşümünü; $b \in K$ olmak üzere

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\{A, B\} = A.B - B.A$$

olarak tanımlayalım. Her $A = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in n_2(K)$ için

$$\begin{aligned}
\varphi(\{A,B\}) &= \varphi(A.B - B.A) \\
&= \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ve

$$\varphi(A.B) = \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned}
\varphi(A)\ .\ \varphi(B) &= \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) .\ \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olup $\varphi(A.B) = \varphi(A)\ .\ \varphi(B)$ olduğundan φ, bir Poisson cebiri homomorfizmidir.

$B_1, B_2 \in Gör\varphi$ olsun. O halde $\varphi(A_1) = B_1$, $\varphi(A_2) = B_2$ olacak şekilde A_1 , $A_2 \in n_2(K)$ vardır.

$$\varphi(A_1.A_2) = \varphi(A_1).\varphi(A_2) = B_1.B_2$$

olup $B_1.B_2 \in Gör\varphi$ dir.

$$\varphi(\{A_1, A_2\}) = \{\varphi(A_1), \varphi(A_2)\} = \{B_1, B_2\}$$

olduğundan $\{B_1, B_2\} \in Gör\varphi$ dir. Böylece $Gör\varphi$, $n_3(K)$ nın bir alt Poisson cebiridir.

$C \in Gör\varphi$, $N \in n_3(K)$ için

$$C = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,\ N = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun.

$$C\ .\ N = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1.b_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup $C\,.\,N \notin Gör\varphi$ dir. Yani $Gör\varphi$, $n_3(K)$ nın alt Poisson cebiri olduğu halde bir ideali değildir.

Tanım 2.23 Eğer f, $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$ tarafından üretilen altcebire ait olmak üzere bazı $i \neq j$ için $\phi(x_j) = x_j$ ve $\phi(x_i) = \alpha x_i + f$ ise bir K cismi üzerinde $x_1,x_2,\ldots,x_n$ tarafından üretilen bir serbest cebirin (serbest asosyatif cebirin, serbest Poisson cebirinin, polinom cebirinin) bir ϕ otomorfizmine elemanter otomorfizm denir. Elemanter otomorfizmlerin bileşkesi olarak ifade edilebilen otomorfizmlere tame denir. Tame olmayan otomorfizmlere wild denir.

3. SERBEST POISSON CEBİRLERİNİN MERKEZLEYENİ

Serbest birleşmeli cebirler hakkındaki temel sonuçlardan biri; sabit olmayan bir elemanın merkezleyeninin, bir tek değişken üzerindeki bir polinom cebiri olduğunu ifade eden Bergman Merkezleyen Teoremi'dir ([12]). Bu teorem algoritmik ve kombinasyon problemi çalışmalarında çok önemli bir rol oynar. Bu teoremin polinom cebirleri için benzeri [4] da ispatlanmıştır. Bergman Merkezleyen Teoremi'nin bir benzerinin serbest Poisson cebirlerinde geçerli olup olmadığı, [4] da $Problem1$ olarak verilmiştir.

Bu bölümde karakteristiği 0 olan bir cisim üzerindeki serbest Poisson cebirleri için Bergman Merkezleyen Teoremi'nin bir benzeri ispatlanmıştır. Bergman'ın teoremi karakteristikten bağımsız olmasına rağmen; karakteristiğin sonlu olması durumunda serbest Poisson cebirlerinin merkez ve merkezleyeni, karakteristiğin 0 olması durumuna göre daha fazla olduğundan dolayı K cisminin karakteristiğinin 0 olduğu kabul edilmiştir. Bu bölüm Makar-Limanov ve Umirbaev'in [19] deki makelesinden alınmıştır.

Önce, polinom cebirleri hakkındaki bazı temel kavramları verelim.

$A = K[z_1, ..., z_n, ...]$, bir K cismi üzerinde bir polinom cebiri ve deg, A üzerinde ağırlık derece fonksiyonu olsun. d_i ler negatif olmayan tamsayılar olmak üzere $\deg(z_i) = d_i$ dir. $a \in A$ için a nın en büyük homojen parçası $\bar{a}$ ile gösterilir. a_i ler a nın maksimum dereceli monomialleri ve $\alpha_i \in K$ da a_i lere karşılık gelen katsayılar olmak üzere $\bar{a} = \sum_i \alpha_i a_i$ dir. Böylece, $a = \bar{a} + r$ olup burada $\deg(r) <\deg(a)$ dır. Eğer $b = \bar{b}$ ise b ye bir homojen eleman denir.

Verilen bir $f \in A$ için, $Cl(f)$ ile f ile cebirsel bağımlı olan A nın tüm elemanlarının kümesi gösterilir. Bir $t \in A$ için $Cl(f) = K[t]$ olduğu A. Zaks tarafından [20] de gösterilmiştir. Yani A polinom cebirinde verilen f ve g elemanlarının cebirsel bağımlı olması için gerek ve yeter koşul $f, g \in K[t]$ olacak şekilde A da bir t elemanının var olmasıdır. Eğer f homojen ve $\deg(f) > 0$ ise t nin de homojen ve $\deg(t) > 0$ olduğunu görmek kolaydır. Sonuç olarak, eğer $f, g \in A$ cebirsel bağımlı homojen elemanlar ve

$\deg(f) > 0$ ise, $\alpha, \beta \in K$ ve r, k negatif olmayan tamsayılar olmak üzere $f = \alpha t^r$ ve $g = \beta t^k$ olacak şekilde bir homojen t elemanı vardır.

Aşağıda ispatıyla birlikte verilen lemma [21] de verilmiş olup polinom cebirlerinde sıkça kullanılır.

Lemma 3.1 f ve g, A nın iki cebirsel bağımsız elemanı olsun. O zaman $\bar{f}$ ve $\bar{h}$ cebirsel bağımsız olacak şekilde bir $h \in K[f,g]$ elemanı vardır.

İspat: $\deg(f) = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman $f = \bar{f}$ dir. Eğer $\deg(g) > 0$ ise f ve $\bar{g}$ cebirsel bağımsızdırlar. Öte yandan eğer $\deg(g) = 0$ ise $g = \bar{g}$ olur. Her iki durumda da $h = g$ alabiliriz.

Şimdi $\deg(f) > 0$ olduğunu kabul edelim. $B = K[f,g]$ alalım. B_n, B nin $q(f,g)$ formundaki elemanlarından oluşan alt kümesidir. Burada q polinomunun standart (toplam) derecesi n den küçük veya eşittir. O zaman B_n, K üzerinde bir lineer uzaydır ve f ile g cebirsel bağımsız olduğundan, B_n nin d_n boyutu $O(n^2)$ dir. Burada $d_n = O(n^2) = \binom{n+2}{2}$ dur. Varsayalım ki $\bar{b}$ ve $\bar{f}$ herhangi bir $b \in B$ için cebirsel bağımlı olsunlar. Bir çelişki elde etmek için bu varsayım altında d_n nin $O(n^2)$ ye kadar büyümediğini gösterelim. Gerçekten,

$$Cl[\bar{f}] = K[c] \quad \text{ve} \quad deg(c) > 0$$

olacak şekilde bir homojen $c \in A$ elemanının var olduğunu biliyoruz. O zaman $\bar{b} = \lambda_b c^{z_b}$ dir. B_n nin mümkün olan tüm dereceden elemanlarından oluşan D_n kümesini düşünelim. Eğer *q nun standart derecesi* $\leq n$ ise

$$\deg(q(f,g)) \leq n(\deg(f) + \deg(g))$$

olduğu açıktır. Böylece D_n nin, en fazla $n(\deg(f) + \deg(g)) + 1$ elemanı vardır. D_n de verilen ve herhangi bir derece için bir $b_i \in B_n$ elemanını seçelim. Kabulümüz altında $\bar{b_i}$, K nin bir elemanı ile çarpmaya göre $\deg(b_i)$ tarafından belirlendiği için

$$dim(B_n) \leq n(\deg(f) + \deg(g)) + 1$$

olduğunu ve doğrusal bir şekilde büyüyeceği sonucunu çıkarabiliriz. Bu da ispatı tamamlar.

Poisson cebirlerinin önemli bir sınıfı aşağıdaki inşa tarafından verilir. L, K üzerinde bir lineer bazı $l_1, l_2, ..., l_k, ...$ olan bir Lie cebiri olsun. $l_1, l_2, ..., l_k, ...$ değişkenleri üzerindeki polinom cebirini $P(L)$ ile gösterelim. Leibniz özdeşliği kullanılarak L nin $[x,y]$ Lie braketi tek bir şekilde $P(L)$ üzerindeki bir $\{x,y\}$ Poisson braketine genişletilebilir. Böylece $P(L)$ bir Poisson cebiri olur. Bu cebire bir Poisson-Lie cebiri denir.

$P(L)$ nin f ve g elemanları, eğer polinom olarak cebirsel bağımlı ise f ve g ye cebirsel bağımlıdır denir.

Lemma 3.2 Eğer $f, g \in P(L)$ cebirsel bağımlı ise o zaman, $[f,g] = 0$ dır.

İspat: İspat oldukça standarttır. g ye göre mümkün olan en az derecede olacak şekilde f ve g yi h ile cebirsel bağımlı alalım. O zaman

$$0 = [f, h(f,g)] = [f,g]\frac{\partial h}{\partial g}(f,g)$$

olup buradan

$$\frac{\partial h}{\partial g}(f,g) \neq 0$$

olduğundan dolayı $[f,g] = 0$ elde edilir.

Not 3.3 Karakteristik sonlu olduğunda bu lemma doğru olmasına rağmen bu kanıt sadece karakteristiğin sıfır olduğu durumda yapılmıştır. Eğer $f \in A = K[z_1, ..., z_n, ...]$ ise bir $t \in A$ için $Cl(f) = K[t]$ olduğunu biliyoruz. Yani, bir P Poisson-Lie cebiri için "merkezleyen" teoremini kanıtlamak için P nin değişmeli elemanlarının cebirsel bağımlı olduğunu kontrol etmek yeterlidir. Tabiki bu ek kısıtlamalar olmadan yapılamaz. Daha önce de belirttiğimiz gibi karakteristik kritiktir ve L yapısının da bir rol oynadığı açıktır. Örneğin; L değişmeli ise $P(L)$ de değişmelidir.

Bundan sonrası için L, serbest üreteçleri $x_1, x_2, ..., x_n$ olan bir serbest Lie cebiri olsun. Bu durumda $P(L)$ nin aynı üreteçler üzerinde serbest Poisson cebiri olduğu iyi bilinir [14] ve bu cebir $P = P < x_1, x_2, ..., x_n >$ ile gösterilir. deg ile P cebirinin standart derece fonksiyonunu göstereceğiz. Yani $1 \leq i \leq n$ için $\deg(x_i) = 1$ dir. P nin her f elemanının en büyük homojen kısmını $\bar{f}$ ile gösterelim. Üstelik

$$\overline{fg} = \bar{f}\bar{g}, \quad \deg[f,g] \leq \deg f + \deg g$$

olduğu açıktır.

$$x_1, x_2, ..., x_n, [x_1, x_2], ..., [x_1, x_n], ..., [x_{n-1}, x_n], [[x_1, x_2], x_3], ...$$

L nin bir homojen bazı olsun. $P = P < x_1, x_2, ..., x_n >$ Poisson cebiri, bu elemanlar üzerindeki polinomlar cebirine karşılık gelir. *deg* derece fonksiyonu, bu polinom cebiri üzerindeki bir ağırlık derece fonksiyonu olarak düşünülebilir. Eğer, $[...[x_{i_1}, x_{i_2}], ..., x_{i_k}] \neq 0$ ise $\deg[...[x_{i_1}, x_{i_2}], ..., x_{i_k}] = k$ dır.

$f \in P \backslash K$ alalım. $C(f)$, $f \in P$ elemanının merkezleyeni olsun. Bir $g \in C(f)$ elemanının f ile cebirsel bağımlı olduğunu gösterelim. Bunun için bir $g \in C(f)$ nin f ile cebirsel bağımsız olduğunu varsayalım. Lemma 3.1 den $\bar{f}$ ve $\bar{h}$ cebirsel bağımsız olacak şekilde bir $h \in K[f,g]$ elemanı vardır. $[f,h] = 0$ olduğundan dolayı $[\bar{f}, \bar{h}] = 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir.

P üzerindeki başka bir doğal derece fonksiyonu, bir polinom halkası olarak P üzerindeki toplam derecedir. Burada derece L nin homojen bazının tüm elemanları için 1 dir. Bunu *pdeg* ile gösterelim. a ve b, P nin $p-homojen\ elemanlar$ı olmak üzere eğer $[a,b] \neq 0$ ise $\text{pdeg}[a,b] = \text{pdeg}a + \text{pdeg}b - 1$ dir. Bu nedenle $\tilde{a}$, a nın en büyük $p-homojen$ parçasını göstermek üzere eğer $[f,g] = 0$ ise $[\tilde{f}, \tilde{g}] = 0$ dır. Lemma 3.1, f ve g cebirsel bağımsız ise $\tilde{f}$ ve $\tilde{h}$ cebirsel bağımsız olacak şekilde bir $h \in K[f,g]$ elemanının var olmasını gerektirir. Böylece eğer bir cebirsel bağımsız eleman çifti ile başlarsak homojen ve $p-homojen$ olan bir cebirsel bağımsız eleman çifti elde ederiz. Böyle elemanlara bi-homojen elemanlar diyelim.

Lemma 3.4 f ve g, $[f,g] = 0$ olacak şekildeki $P \backslash K$ nın bi-homojen elemanları olsun. O zaman $f, g \in K[a]$ olacak şekilde P nin bir a elemanı vardır. Yani f ve g cebirsel bağımlıdır.

İspat:

$$x_1, x_2, ..., x_n, [x_1, x_2], ..., [x_1, x_n], ..., [x_{n-1}, x_n], [[x_1, x_2], x_3], ...$$

baz elemanlarını $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ ile gösterelim. Eğer $i < j$ ise $e_i < e_j$ alalım. $[e_m, e_n]$, P nin bir bi-homojen elemanı ve eğer $m \neq n$ ise $\deg[e_m, e_n] = \deg e_m + \deg e_n$ olduğu açıktır. Yani, eğer $m < n$ ise tüm $i > n$ ler için $[e_m, e_n]$, $\{e_i\}$ lerin tüm lineer kombinasyonudur.

P nin her f elemanı için eğer $f \in K[S(f)]$ ve $1 \leq j \leq k$ için $f \notin K[S(f) \backslash \{e_{i_j}\}]$ ise

$$S(f) = \{e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_k}\}$$

alalım.

Şimdi varsayalım ki f ve g, $[f,g] = 0$ koşulunu sağlayan P nin bi-homojen cebirsel bağımsız elemanları olsun. $S(f)$ nin elemanlarının sayısını $|S(f)|$ ile gösterelim ve $|S(f)|$, mümkün olan en küçük sayı olsun. O zaman $|S(f)| \leq |S(g)|$ dır. $S(f)$ nin minimal elemanı x olsun. $f_m \neq 0$, $m > 0$ ve her i için $x \notin S(f_i)$ olmak üzere

$$f = f_0 + f_1 x + ... + f_m x^m$$

ve $g_n \neq 0$ ve her i için $x \notin S(g_i)$ olmak üzere

$$g = g_0 + g_1 x + ... + g_n x^n$$

yazabiliriz. $f_m x^m$ ve $g_n x^n$ nin cebirsel bağımsız olduğunu varsayalım. Gerçekten, P (bir polinom cebiri olarak düşünüldüğünde) üzerinde yeni derece fonksiyonunu eğer $e_i \neq x$ ise $\deg x = 1$ ve $\deg e_i = 0$ olacak şekilde tanımlayalım. $f_m x^m$ ve $h_k x^k$ en büyük homojen parçaları cebirsel bağımsız olacak şekildeki $h \in K[f,g]$ elemanını bulmak için Lemma 3.1 i kullanırız.

Şimdi, her i için $x \notin S(d_i)$ olmak üzere

$$[f,g] = \sum_{i \leq m+n} d_i x^i = 0$$

dır. Dolayısıyla, $d_i = 0$ dır. Böylece $d_{m+n} = [f_m, g_n] = 0$ dır. $|S(f_m)| < |S(f)|$ olduğu için f_m ve g_n nin cebirsel bağımlı olduğu sonucuna varabiliriz. Ayrıca f_m ve g_n bi-homojen polinomlardır. Buradan sabitler ile çarpmaya göre bir $a \in P$ için $f_m = a^s$ ve $g_n = a^t$ şeklindedir. Bu nedenle,

$$d_{m+n-1} = [ta^{t-1} f_{m-1} - sa^{s-1} g_{n-1} + (mt - ns) a^{s+t-1} x, a] = 0$$

elde edilir.

$f_m x^m$ ve $g_n x^n$ cebirsel bağımsız olduğu için $a \notin K$ ve $mt - ns \neq 0$ dır. Böylece $x \notin S(a)$ olduğu için a ve $ta^{t-1} f_{m-1} - sa^{s-1} g_{n-1} + (mt - ns) a^{s+t-1} x$ cebirsel bağımsızdır. Eğer $s > 0$ ise $|S(a)| = |S(f_m)| < |S(f)|$ ve bu f nin seçimi ile bir çelişki oluşturur. Böylece $s = 0$ ve $[f_{m-1} + mx, a] = 0$ dır.

$$|S(f_{m-1} + mx)| \leq |S(f)|$$

olduğu için $f = f_{m-1} + mx$ olduğunu varsayabiliriz. Bu nedenle f bir lineer polinomdur. $a \in C(f)$ için $x \notin S(g)$ ve $|S(g)|$ minimum olacak şekildeki bir bi-homojen $g \in C(f) \backslash F$ elemanını seçelim. $x \in S(f)$ ve $x \notin S(g)$ olduğundan f ve g cebirsel bağımsız elemanlardır.

y, $S(g)$ nin minimal elemanı olsun. O zaman $f_1 \in K$ ve $y \notin S(f_0)$ olmak üzere

$$f = f_0 + f_1 y$$

ve $g_n \neq 0$, $n > 0$ ve her i için $y \notin S(g_i)$ için

$$g = g_0 + g_1 y + \ldots + g_n y^n$$

dir. Tabiki, $x \notin S(g)$ olduğu için $y \neq x$ tir. Yukarıdaki gibi $[f, g] = 0$ olması, $[f_0 + f_1 y, g_n] = 0$ olmasını gerektirir. $x \notin S(g_n)$ ve $|S(g)| > |S(g_n)|$ olduğu için bir sabitle çarpmaya göre $g_n = (f_0 + f_1 y)^t$ olduğu sonucunu çıkarabiliriz. Buradan $t = 0$ elde edilir. Aksi halde $t \neq 0$ olsaydı $S(g_n) = S(f) \ni x$ olurdu. Yani $g_n \in F$ dir.

$$[f_0, g_{n-1}] + ng_n [f_0, y] + f_1 [y, g_{n-1}] = 0$$

olur. Ama

$$[f_0, g_{n-1}] + ng_n [f_0, y] + f_1 [y, g_{n-1}] = [f_0 + f_1 y, g_{n-1} + ng_n y]$$

dir. $f_0 + f_1 y$ ve $g_{n-1} + ng_n y$ ların ikisi de lineer polinomlardır. Bu nedenle bunları L nin elemanları olarak alabiliriz. Bu elemanlar, $x \in S(f_0 + f_1 y)$ ve $x \notin S(g_{n-1} + ng_n y)$ olduğu için lineer bağımsızdır. Bu nedenle, L bir serbest Lie cebiri olduğu için onlar değişmezler. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki temel sonuç, Lemma 3.2 ve Lemma 3.4 ten elde edilir.

Teorem 3.5 Karakteristiği 0 olan bir cisim üzerinde serbest Poisson cebirlerindeki sabit olmayan her elemanın merkezi, tek değişkenli bir polinom cebiridir.

4. İKİ BOYUTLU SERBEST POISSON CEBİRLERİNİN DERİVASYONLARI VE OTOMORFİZMLERİ

P, karakteristiği 0 olan bir cisim üzerinde iki değişkenli bir Poisson cebiri olsun. Burada P nin otomorfizmlerinin tame ve yerel nilpotent derivasyonlarının üçgenleştirilebilir olduğu ispatlanmıştır.

İki değişkenli polinom cebirlerinin ve serbest birleşmeli cebirlerinin otomorfizmlerinin tame olduğu $[13-16]$ den görülebilir. Son zamanlarda karakteristiğin 0 olması durumunda, üç değişkenli polinom cebirleri ve serbest birleşmeli cebirlerin wild otomorfizmlere sahip olduğu ispatlanmıştır [8, 17]. P. Cohn sonlu üretilmiş serbest bir Lie cebirinin otomorfizmlerinin tame olduğunu ispatladı.

R. Rentschler, karakteristiği 0 olan bir cisim üzerindeki iki değişkenli polinom cebirlerinin yerel nilpotent derivasyonlarının üçgenleştirilebilir olduğunu kanıtladı [22]. Bu sonucu kullanarak R. Rentschler bu cebirlerin otomorfizmlerinin tame olup olmadığı üzerindeki Jung'ın Teoremi'nin [14] yeni bir ispatını verdi.

İki değişkenli serbest Poisson cebirlerinin otomorfizmlerinin tame olup olmadığı sorusu açık olup bu soru [12] de Problem 5 olarak verilmiştir.

Nagata otomorfizmini, üç değişkenli bir serbest Poisson cebirinin bir wild otomorfizmine örnek olarak verebiliriz [8, 9].

Bu bölümde karakteristiği 0 olan bir cisim üzerindeki serbest Poisson cebirlerinin otomorfizmleri ve yerel nilpotent derivasyonları çalışılmıştır. Bu bölüm Makar-Limanov, Turusbekova ve Umirbaev'in [23] deki makelesinden alınmıştır.

4.1 Derecelendirmeler ve Homojen Derivasyonlar

Bu kısımda, serbest Poisson cebirlerinin birkaç doğal derecelendirilmesi ve derece fonksiyonları tanıtılmıştır ve bu cebirlerin derivasyonlarının leading parçalarının bazı özellikleri verilmiştir.

L, üreteçleri $x_1, x_2, ..., x_n$ olan bir serbest Lie cebiri olsun. Bu durumda aynı üreteç kümesi üzerinde $PS(L)$, $\{x_i, x_j\} = [x_i, x_j]$ işlemiyle bir serbest Poisson cebiridir [15]. Bu cebiri $P = K\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ile gösterelim.

w_i ler birer tamsayı olmak üzere, $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ vektörüne karşılık gelen L üzerindeki bir ağırlık derece fonksiyonunu w_deg ile gösterelim. Bu

$$\text{w\_deg} x_i = w_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

olarak tanımlanan derece fonksiyonudur. Eğer f ve g, $\{f, g\} \neq 0$ olacak şekildeki Lie monomialleri ise ağırlık derece fonksiyonu,

$$\text{w\_deg}\{f, g\} = \text{w\_deg} f + \text{w\_deg} g$$

braket işlemi ile $x_1, x_2, ..., x_n$ den elde edilen Lie monomiallerine genişletilebilir. Böylece f nin yazılışındaki Lie monomiallerinin derecelerinin maksimumunun w_deg$f$ olarak tanımlanması ile ağırlık derece fonksiyonu, L nin elemanlarına genişletilebilir.

Tamamen monomiallerden oluşan L nin bir

$$e_1, e_2, ..., e_m, ... \tag{4.1}$$

lineer bazının seçilebileceği açıktır.

$e_1 = x_1,\ e_2 = x_2, ..., e_n = x_n$ ve $i < j$ ise dege_i <dege_j olduğunu kabul edebiliriz. Burada deg, $w = (1, 1, ..., 1)$ e karşılık gelen ağırlık derece fonksiyonudur. Bu bazı $\flat$ ile gösterelim.

$P = P\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ cebiri, bir polinom cebiri olarak $\flat$ nin elemanları tarafından üretilir. Bu nedenle

$$u = e_{i_1} e_{i_2} ... e_{i_k},\ i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k \tag{4.2}$$

monomialleri, P nin bir lineer bazı formundadır.

$$\text{w\_deg}(u_1 u_2) = \text{w\_deg} u_1 + \text{w\_deg} u_2$$

ile w_deg fonksiyonu (4.2) formundaki elemanlara ve böylece de P nin elemanlarına genişletilebilir. Eğer $f \in P$ nin tüm monomialleri aynı w derecesine sahip ise f ye bir w-homojen eleman denir.

P Poisson cebirinin tüm derivasyonlarının $DerP$ Lie cebirini düşünelim. P bir serbest cebir olduğu için, P nin $f_1, f_2, ... f_n$ elemanlarından oluşan her sistemi için $D(x_i) = f_i$ $(1 \leq i \leq n)$ olacak şekildeki bir tek D derivasyonu vardır. Bunu

$$D = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{4.3}$$

şeklinde yazalım.

Not 4.1 (4.3) gösterimi ve polinom cebirlerindeki aynı gösterim arasında büyük bir fark olduğuna dikkat edelim. Özellikle

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}(\{x_1, x_2\}) = -x_1 x_2 \neq x_1(\frac{\partial}{\partial x_1}(\{x_1, x_2\})) = 0$$

dır.

$1 \leq i \leq n$ ve u, (4.2) formundaki bir eleman olmak üzere

$$v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{4.4}$$

derivasyonları, $DerP$ nin bir lineer bazını oluştururlar. (4.4) formundaki her v_i elemanı için w_degv_i =w_ deg$u$−w$_i$ alalım. P cebirinin w-homojen derivasyonlarını açık bir şekilde tanımlayabiliriz. P nin her derivasyonu, farklı w derecelerinin w-homojen derivasyonlarının toplamı olarak tek bir şekilde yazılabilir.

P_n ve $Der_n P$ sırasıyla P ve $DerP$ nin derecesi n olan tüm w-homojen elemanlarının alt kümeleri olsun. P_n ve $Der_n P$ vektör uzayları olduğu için, karşılık gelen sıfır elemanlarını içeren kümelere genişletilebilir.

$$P = \bigoplus_{n \in Z} P_n \ , \qquad DerP = \bigoplus_{n \in Z} Der_n P$$

parçalanışlarının, karşılık gelen cebirlerin derecelendirmeleri olduğu açıktır.

P üzerindeki başka bir derece fonksiyonu, bir polinom halkası olarak P üzerindeki toplam derecedir. Burada derece, $\flat$ nin tüm elemanları için birdir. Bunu pdeg ile gösterelim. P nin tüm pdeg-homojen a, b elemanları için eğer $\{a, b\} \neq 0$ ise

$$\text{pdeg}\{a, b\} = \text{pdeg}\{a\} + \text{pdeg}\{b\} - 1 \tag{4.5}$$

dir. Böylece pdeg bir ağırlık derece fonksiyonu değildir.

Eğer v, (4.4) formundaki bir eleman ise

$$\text{pdeg}v = \text{pdeg}u - 1$$

alalım.

P_m^* ve Der_m^*P, sırasıyla P ve $DerP$ nin m dereceli tüm pdeg-homojen elemanlarının alt kümeleri olsun. Yukarıda belirtildiği gibi

$$P = \bigoplus_{m\in Z} P_m^* \,, \qquad DerP = \bigoplus_{m\in Z} Der_m^*P$$

parçalanışları, karşılık gelen cebirlerin derecelendirmeleridir.

Lemma 4.2 $(Der_mP)(P_k) \subseteq P_{m+k}$ ve $(Der_m^*P)(P_k^*) \subseteq P_{m+k}^*$ dır.

İspat: Her iki ifadenin de kanıtları çok benzerdir. $D = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ olsun. Eğer $D \in Der_mP \quad (D \in Der_m^*P)$ ise $1 \leq i \leq n$ için $f_i \in P_{m+w_i} \quad (f_i \in P_{m+1}^*)$ dir. Eğer $f \in P_k$ ise $D(f) \in P_{m+k}$ $(f \in P_k^*$ ise $D(f) \in P_{m+k}^*)$ olduğunu göstermek istiyoruz.

Genelliği kaybetmeksizin f nin (4.2) formundaki bazın bir elemanı olduğunu kabul edelim.

İlk önce f nin $\flat$ nin bir elemanı olması durumunu düşünelim. İspatı, deg$f$ üzerinde tümevarım ile yapalım. Eğer deg$f = 1$ ise bir i için $f = x_i$ ve $D(x_i) = f_i$ olur. Yani lemmanın her iki ifadesi de deg$f = 1$ için doğru olur.

Eğer deg$f > 1$ ise $u, v \in \flat$ olmak üzere $f = \{u, v\}$ alalım. Şimdi $D(f) = \{D(u), v\} + \{u, D(v)\}$ ve tümevarım varsayımından ya $D(u) = 0$ ya da w_deg $\{D(u), v\} = m +$w_deg$u$ (veya ya $D(u) = 0$ ya da pdeg$D(u) = m+$pdeg$u$) dır. Bu nedenle ya $\{D(u), v\} = 0$ ya da w_deg$f =$w_deg$u+$w_deg$v$ olduğundan

$$\text{w\_deg}\{D(u), v\} = \text{w\_deg}D(u) + \text{w\_deg}v = m + \text{w\_deg}u + \text{w\_deg}v = m + k$$

dır. Böylece $\{D(u), v\} \in P_{m+k}$ dır. Benzer şekilde $\{u, D(v)\} \in P_{m+k}$ olup ve buradan $D(f) \in P_{m+k}$ dır. (pdeg için benzer hesaplamalar yapılırsa pdeg$f =$pdeg$u =$pdeg$v = 1$ ve (4.5) dan $D(f) \subseteq P_{m+1}^*$ elde edilir.)

Eğer f, (4.2) formundaki bazın bir elemanı ise pdeg$f$ üzerinde tümevarım yapalım. pdeg$f = 1$ olması durumu açıktır. Eğer $f = uv$ şeklinde ise $D(f) = D(u)v + uD(v)$

dır. Yani w_deg$(uv) = k$ (pdeg$(uv) = k$) olduğundan, tümevarımla

$$D(u)v,\ uD(v) \in P_{m+k} \quad (\ D(u)v,\ uD(v) \in P^*_{m+k}\ )$$

olduğu gösterilir. Böylece lemma ispatlanmış olur.

Tanım 4.3 D, bir R cebirinin bir derivasyonu olsun. Her $a \in R$ için $D^m(a) = 0$ olacak şekilde bir $m = m(a)$ doğal sayısı varsa D ye yerel nilpotent derivasyon denir.

Önerme 4.4 Eğer R, $a_1, a_2, ..., a_k$ elemanlarının sonlu bir kümesi tarafından üretiliyorsa o zaman bir D derivasyonunun yerel nilpotent olması için gerek ve yeter koşul $D^{m_i}(a_i) = 0,\ 1 \leq i \leq k$ olacak şekilde m_i pozitif tamsayılarının var olması gerekir.

İspat: İspatı için Essen [24] e bakınız.

Önerme 4.5 $R = \bigoplus_{m \in Z} R_m$ derecelendirilmiş bir cebir ve D, R nin

$$D = D_p + D_{p+1} + ... + D_q, \quad D_i(R_m) \subseteq R_{i+m}, \quad p \leq i \leq q,\ D_q \neq 0$$

olacak şekildeki bir yerel nilpotent derivasyonu olsun. O zaman D_q yerel nilpotenttir.

İspat: $f_i \in R_i,\ r \leq i \leq s$ ve $f_s \neq 0$ olmak üzere $f = f_r + f_{r+1} + ... + f_s \in R$ ise $\widehat{f} = f_s$ olarak tanımlayalım. Eğer $D_q(\widehat{f}\ ) \neq 0$ ise $D_i(R_m) \subseteq R_{i+m}$ için $\widehat{D(f)} = D_q(\widehat{f}\ )$ dir. Böylece $D^i_q(\widehat{f}\ ) \neq 0$ ise $\widehat{D^i(f)} = D^i_q(\widehat{f}\ )$ dir. Böylece D yerel nilpotent bir derivasyon olduğundan bir i için $D^i_q(\widehat{f}\ ) = 0$ olur. Bu nedenle D_q da bir yerel nilpotent derivasyondur.

4.2 Başkatsayılar

Bu kısımda, bir Poisson cebirinden ziyade bir polinom cebiri olarak bir serbest Poisson cebirinin bazı filtrelemelerini incelenmiştir.

$f,\ P = P\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ nin keyfi bir elemanı ve D, (4.3) formunda P nin keyfi bir derivasyonu olsun.

$$D(f) = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

dir. f nin desteğini (support)

$$S(f) = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}\}$$

olarak tanımlayalım. Burada eğer $f \in K[S(f)]$ ve $f \notin K[S(f_i) \backslash \{e_{i_j}\}]$, $1 \leq j \leq k$ ise e_{i_j} ler $\flat$ nin elemanlarıdır. (4.3) teki gibi verilen bir D derivasyonunun desteği (support)

$$S(D) = S(f_1) \cup S(f_2) \cup \ldots \cup S(f_n)$$

şeklindedir.

Eğer $x \in \flat$ ise pdeg_x ile $\flat$ nin elemanları tarafından üretilen bir polinom halkası olarak düşünülen P üzerindeki x e göre polinom derecesi fonksiyonunu gösterelim. Bu fonksiyon Poisson cebiri olarak P üzerinde bir derece fonksiyonu değildir. Birleşmeli cebir olarak P bir filtreleme tanımladığı halde P bir Lie cebiri olarak bir filtreleme tanımlamaz. Çünkü $\mathrm{pdeg}_x\{u,v\} \leq \mathrm{pdeg}_x u + \mathrm{pdeg}_x v + 1$ dır.

$f \in P$ ve $D \in DerP$ keyfi elemanları sırasıyla

$$f = f_0 + xf_1 + \ldots + x^m f_m\ , \qquad x \notin S(f_i)\ , \quad 0 \leq i \leq m$$

ve

$$D = D_0 + xD_1 + \ldots + x^m D_m\ , \qquad x \notin S(D_i)\ , \quad 0 \leq i \leq m$$

şeklinde tek türlü yazılabilir. Eğer $f_m \neq 0$ ise $\mathrm{pdeg}_x f = m$ dir ve $l_x(f) = f_m$ alalım. Eğer $D_m \neq 0$ ise $\mathrm{pdeg}_x D = m$ ve $l_x(D) = D_m$ dir. Alışıldığı gibi $\mathrm{pdeg}_x 0 = -\infty$ olarak tanımlayalım.

$\flat$ nin elemanları için eğer $i < j$ ise $e_i < e_j$ alalım. $x = e_i$ için $R(x)$ ile $\flat$ nin x ten büyük olan tüm elemanların kümesini gösterelim.

Lemma 4.6

a) Eğer $e_i, e_j \in \flat$ ise o zaman $S(\{e_i, e_j\}) \subseteq R(e_i) \cap R(e_j)$ dir.

b) Her $g, h \in P$ için $S(gh) \subseteq S(g) \cup S(h)$ ve $S(g+h) \subseteq S(g) \cup S(h)$ dır.

c) Eğer $f \in P$ ve $S(f) \subseteq R(x)$ ise herhangi bir $e \in L$ için $S(\{e, f\}) \subseteq R(x)$ dir.

d) Eğer $f \in P$, x, $S(f)$ nin minimal elemanı ve $\mathrm{pdeg}_x f = s$ ise o zaman bir $e \in L$ için $\mathrm{pdeg}_x\{e,f\} \leq s$ dir.

İspat: **a)** Eğer $i = j$ ise $S(\{e_i,e_j\})$ boş bir kümedir. Eğer $i \neq j$ ise e_i,e_j tarafından üretilen L nin altcebiri iki ranklı serbest cebirdir [25, 26]. Dolayısıyla $\{e_i,e_j\} \neq 0$ ve $\deg\{e_i,e_j\} = \deg e_i + \deg e_j$ dir. Bu nedenle $S(\{e_i,e_j\}) \subseteq R(e_i) \cap R(e_j)$ dir.

b) Desteğin tanımından görülür.

c) $e \in \flat$ durumunu dikkate almak yeterlidir. Bilindiği gibi ad_e, bir polinom cebiri olarak P nin derivasyonudur. Yani, $\{e,f\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial e_i}\{e,e_i\}$ dir. Burada $\frac{\partial f}{\partial e_i}$ bilinen kısmi türevler ve $e_i \in S(f) \subseteq R(x)$ dir. Böylece (a) dan her e_i için $\{e,e_i\} \in R(x)$ ve desteğin tanımından $S(\frac{\partial f}{\partial e_i}) \subseteq S(f)$ dir. Bu nedenle $\flat$ den $S(\frac{\partial f}{\partial e_i}\{e,e_i\}) \subseteq R(x)$ ve $S(\{e,f\}) \subseteq R(x)$ olur.

d) $f = x^s u$ durumunu kontrol etmek yeterlidir. Burada $S(u) \subseteq R(x)$ dir. Bir $j = 1,2,...,k$ için $x = e_j$ alınırsa o zaman;

$$\begin{aligned}
\{e,f\} &= \{e,x^s u\} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial x^s u}{\partial e_i}\{e,e_i\} \\
&= \frac{\partial x^s u}{\partial e_1}\{e,e_1\} + \cdots + \frac{\partial x^s u}{\partial e_j}\{e,e_j\} + \cdots + \frac{\partial x^s u}{\partial e_k}\{e,e_k\} \\
&= x^s \frac{\partial u}{\partial e_1}\{e,e_1\} + \cdots + s x^{s-1} u\{e,e_j\} + x^s \frac{\partial u}{\partial e_j}\{e,e_j\} + \cdots + x^s \frac{\partial u}{\partial e_k}\{e,e_k\} \\
&= x^s\{e,u\} + s x^{s-1} u\{e,x\}
\end{aligned}$$

olup

$$\{e,x^s u\} = x^s\{e,u\} + s x^{s-1} u\{e,x\} \tag{4.6}$$

eşitliği bulunur. (c) den

$$S(\{e,u\}), S(\{e,x\}) \subseteq R(x)$$

elde edilir.

Lemma 4.7 D, P nin bir derivasyonu, $S(D)$ nin minimal elemanı x ve $L \subset P$ nin keyfi bir elemanı e olsun. Eğer $\mathrm{pdeg}_x D = s$ ise o zaman

$$D(e) = x^s(l_x(D)(e)) + h$$

olur. Burada $S((l_x(D)(e))) \subseteq R(x),\ S(h) \subseteq \{x\} \cup R(x)$ ve $\mathrm{pdeg}_x h < s$ dir.

İspat: Genelliği kaybetmeksizin $e \in \flat$ ve $D = x^s D^{'}$ olduğunu kabul edebiliriz. Burada $S(D^{'}) \subseteq R(x)$ dir. O zaman $l_x(D) = D^{'}$ dir. İspatı $\deg(e)$ üzerinde tümevarım ile yapalım. $\deg(e) = 1$ ise $1 \leq i \leq n$ olacak şekildeki bir i için $e = x_i$ olur. Dolayısıyla $D(e) = x^s(D^{'}(e))$ ve $S(D^{'}(e)) \subseteq S(D^{'}) \subseteq R(x)$ dir.

$e = \{u_1, u_2\}$ olsun. O halde $D(e) = D(\{u_1, u_2\}) = \{D(u_1), u_2\} + \{u_1, D(u_2)\}$ dir. Tümevarım hipotezinden $D(u_i) = x^s(D^{'}(u_i)) + h_i$ olur. Burada $1 \leq i \leq 2$ için $S(D^{'}(u_i)) \subseteq R(x),\ S(h_i) \subseteq \{x\} \cup R(x)$ ve $\mathrm{pdeg}_x h_i < s$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}
D(e) &= \{D(u_1), u_2\} + \{u_1, D(u_2)\} \\
&= \{x^s(D'(u_1)) + h_1,\ u_2\} + \{u_1,\ x^s(D'(u_2)) + h_2\} \\
&= x^s\{D'(u_1), u_2\} + \{x^s, u_2\}D'(u_1) + \{h_1, u_2\} + x^s\{u_1,\ D'(u_2)\} \\
&\qquad + \{u_1,\ x^s\}D'(u_2) + \{u_1, h_2\} \\
&= x^s(\{D^{'}(u_1), u_2\} + \{u_1, D^{'}(u_2)\}) + sx^{s-1}(\{x, u_2\}D^{'}(u_1) + \{u_1, x\}D^{'}(u_2)) \\
&\qquad + \{h_1, u_2\} + \{u_1, h_2\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 4.6 (c) den $S(\{D^{'}(u_1), u_2\} + \{u_1, D^{'}(u_2)\}) \subseteq R(x)$ ve Lemma 4.6 (a) ve Lemma 4.6 (b) den

$$S(\{x, u_2\}D^{'}(u_1) + \{u_1, x\}D^{'}(u_2)) \subseteq R(x)$$

olup $D^{'}$ bir derivasyon olduğu için

$$\{D^{'}(u_1), u_2\} + \{u_1, D^{'}(u_2)\} = D^{'}(\{u_1, u_2\})$$

elde edilir. $h_i = \sum_j x^j h_{i,j}$ olsun. Burada $S(h_{i,j}) \subseteq R(x)$ dir. O halde (4.6) eşitliğinden;

$$\begin{aligned}
\{u, h_i\} &= \{u, \sum_j x^j h_{i,j}\} \\
&= \sum_j \{u, x^j h_{i,j}\} \\
&= \{u, x\} \sum_j j x^{j-1} h_{i,j} + \sum_j x^j \{u, h_{i,j}\}
\end{aligned}$$

dir. Böylece $u \in L$ için Lemma 4.6 (c) den

$$S(\{u,x\}),\ S(\{u,h_{i,j}\}) \subseteq R(x)$$

olup

$$S(\{u,h_i\}) \subseteq \{x\} \cup R(x) \text{ ve } \mathrm{pdeg}_x\{u,h_i\} \leq \mathrm{pdeg}_x h_i$$

olduğu açıktır. Buradan

$$S(\{h_1,u_2\}+\{u_1,h_2\}) \subseteq \{x\} \cup R(x)$$

ve

$$\mathrm{pdeg}_x(\{h_1,u_2\}+\{u_1,h_2\}) < s$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.8 Eğer x, $S(D)$ nin minimal elemanı ve $f \in P$ ise

$$S(D(f)) \subseteq \{x\} \cup R(x) \cup S(f)$$

dir.

İspat: D, bir polinom cebiri olarak P nin bir derivasyonudur. Böylece $D(f) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial e_i}(D(e_i))$ dir. Burada $\frac{\partial f}{\partial e_i}$, polinomlardaki bilinen kısmi türevlerdir. Lemma 4.7 den $S(D(e_i)) \subseteq \{x\} \cup R(x)$ ve desteğin tanımından $S(\frac{\partial f}{\partial e_i}) \subseteq S(f)$ dir. Böylece $S(D(f)) \subseteq \{x\} \cup R(x) \cup S(f)$ elde edilir.

Lemma 4.9 P nin bir elemanı f, P nin bir derivasyonu D ve $S(D)$ nin minimal elemanı x olsun. Eğer $\mathrm{pdeg}_x D = s$ ve $\mathrm{pdeg}_x f = t$ ise o zaman

$$D(f) = x^{s+t}\big(l_x(D)(l_x(f))\big) + h$$

dır. Burada $\mathrm{pdeg}_x h < s+t$ ve $\mathrm{pdeg}_x\big(l_x(D)(l_x(f))\big) = 0$ dır.

İspat: Genelliği kaybetmeksizin $f = x^t f'$ olduğunu kabul edelim. Burada $\mathrm{pdeg}_x f' = 0$ dır. O halde

$$D(f) = D(x^t)f' + x^t D(f') = tx^{t-1}D(x)f' + x^t D(f')$$

olur. Lemma 4.7 den $\mathrm{pdeg}_x D(x) \le s$ ve böylece $\mathrm{pdeg}_x(tx^{t-1}D(x)f') < s+t$ olur. Lemmanın ispatı için $\mathrm{pdeg}_x h \le s$ ve $\mathrm{pdeg}_x\big(l_x(D)(f')\big) = 0$ olmak üzere

$$D(f') = x^s(l_x(D)(f')) + h$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Ayrıca f', (4.2) formundaki baz kümesinin bir elemanı olduğunu kabul edelim ve $\mathrm{pdeg} f^{'}$ üzerinde tümevarım uygulayalım. Eğer $\mathrm{pdeg} f^{'} = 1$ ise Lemma 4.7 den $D(f') = x^s(l_x(D)(f')) + h$ olduğu görülür. $f' = u_1u_2$ olduğunu kabul edelim. O halde $D(f') = D(u_1)u_2 + u_1D(u_2)$ olur. D' ile $l_x(D)$ yi gösterelim. $\mathrm{pdeg}_x u_i = 0$ olduğu için tümevarım hipotezinden $D(u_i) = x^s(D'(u_i)) + h_i$ dir. Burada $1 \le i \le 2$ için $\mathrm{pdeg}_x h_i < s$ ve $\mathrm{pdeg}_x D'(u_i) = 0$ dır. Böylece

$$D(f^{'}) = x^s(D^{'}(u_1)u_2 + D^{'}(u_2)u_1) + h_1u_2 + u_1h_2 = x^s(D^{'}(u_1u_2)) + h$$

olur. Burada $\mathrm{pdeg}_x D^{'}(u_1u_2) = 0$ ve $\mathrm{pdeg}_x h < s$ dir. (pdeg_x bir polinom halkası olarak P üzerinde bir derece fonksiyonu olduğuna dikkat edelim.) Böylece lemma ispatlanmış olur.

Önerme 4.10 *D, P nin bir derivasyonu ve x, $S(D)$ nin minimal elemanı olsun. Eğer D yerel nilpotent ise $l_x(D)$ de yerel nilpotenttir.*

İspat: D , P nin bir yerel nilpotent derivasyonu olsun. $l_x(D)$ nin yerel nilpotent olmadığını varsayalım. $l_x(D)$ yerel nilpotent değil ise o zaman her $k \ge 0$ için $l_x(D)^k(x_i) \neq 0$ olacak şekilde x_i vardır. $a = l_x(D)(x_i)$ alalım. Lemma 4.7 den $S(l_x(D)(x_i)) \subset R_x$ dir. Bu nedenle $l_x(a) = a$ dır. Lemma 4.9 dan eğer $l_x(D)(l_x(f)) \neq 0$ ise

$$l_x(D(f)) = l_x(D)(l_x(f))$$

dir. Yani

$$l_x(D(a)) = l_x(D)(a) \neq 0$$

dır. k üzerinden tümevarımla

$$l_x(D^k(a)) = l_x(D)(l_x(D^{k-1}(a))) = l_x(D)(l_x(D)^{k-1}(a)) = l_x(D)^k(a) \neq 0$$

elde ederiz. Bu, D nin yerel nilpotent derivasyon olması ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.11 $x \in \flat$ için $D = x^s \frac{\partial}{\partial x_1}$ ve $D' = x \frac{\partial}{\partial x_1}$ olsun. Eğer e, L nin $e \neq x_1$ olacak şekildeki bir elemanı ise $D(e) = sx^{s-1}(D^{'}(e)) + h$ dir. Burada $S(D^{'}(e)) \subseteq R(x)$, $S(h) \subseteq \{x\} \cup R(x)$ ve $\mathrm{pdeg}_x h < s-1$ dir.

İspat: Genelliği kaybetmeksizin $e \in \flat$ olduğunu kabul edebiliriz. $i \neq 1$ ise $\frac{\partial}{\partial x_1}(x_i) = 0$ ve $\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1) = 1$ olduğundan $e \neq x_1$ ise $\frac{\partial}{\partial x_1}(e) = 0$ dır. $e = \{u, v\}$ olsun. $\mathrm{deg} e$ üzerindeki tümevarım hipotezinden $\frac{\partial}{\partial x_1}(u)$ ve $\frac{\partial}{\partial x_1}(v)$ türevleri 0 ya da 1 e eşit olduğu için $\frac{\partial}{\partial x_1}(e) = \{\frac{\partial}{\partial x_1}(u), v\} + \{u, \frac{\partial}{\partial x_1}(v)\} = 0$ olur. deg_1 ile x_1 e göre dereceyi, yani $u = (1, 0, ..., 0)$ a karşılık gelen w_deg i gösterelim. Eğer $\mathrm{deg}_1 e = 0$ ise $D(e) = D^{'}(e) = 0$ olup $\frac{\partial}{\partial x_1}(e) = 0$ durumu için lemma sağlanır. $\mathrm{deg}_1 u = 0$ olmak üzere eğer $e = \{u, x_1\}$ ise o zaman

$$\begin{aligned} D(e) = D(\{u, x_1\}) &= \{D(u), x_1\} + \{u, D(x_1)\} \\ &= \{x^s \frac{\partial u}{\partial x_1}, x_1\} + \{u, x^s \frac{\partial x_1}{\partial x_1}\} \\ &= \{u, x^s\} \\ &= sx^{s-1}\{u, x\} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi deg_1 üzerinde tümevarım uygulayalım. $e = \{u_1, u_2\}$ olsun. O halde $D(e) = \{D(u_1), u_2\} + \{u_1, D(u_2)\}$ dir. Eğer hem $\mathrm{deg}_1 u_1 > 0$ hem de $\mathrm{deg}_1 u_2 > 0$ ise tümevarım hipotezinden $D(u_i) = sx^{s-1}(D^{'}(u_i)) + h_i$ dir. Burada $S(D^{'}(u_i)) \subseteq R(x)$, $S(h_i) \subseteq \{x\} \cup R(x)$ ve $\mathrm{pdeg}_x h_i < s-1$ dir. Diğer taraftan $\mathrm{deg}_1 u_1 = 0$ ve $\mathrm{deg} u_2$ üzerinde alt-tümevarım ile $D(u_2) = sx^{s-1}(D^{'}(u_2)) + h_2$ elde edilir. Burada $S(D^{'}(u_2)) \subseteq R(x)$, $S(h_2) \subseteq \{x\} \cup R(x)$ ve $\mathrm{pdeg}_x h_2 < s-1$ dir. Bu durumda $D(e) = \{u_1, D(u_2)\}$ dir. Böylece her iki durumda da

$$\begin{aligned} D(e) &= \{D(u_1), u_2\} + \{u_1, D(u_2\} \\ &= \{sx^{s-1}(D^{'}(u_1)) + h_1,\ u_2\} + \{u_1, sx^{s-1}(D^{'}(u_2)) + h_2\} \\ &= \{sx^{s-1}(D^{'}(u_1)),\ u_2\} + \{h_1, u_2\} + \{u_1,\ sx^{s-1}(D^{'}(u_2))\} + \{u_1, h_2\} \\ &= sx^{s-1}\{D^{'}(u_1), u_2\} + s(s-1)x^{s-2}D^{'}(u_1)\{x, u_2\} + \{h_1, u_2\} \\ &\quad + sx^{s-1}\{u_1, D^{'}(u_2)\} + s(s-1)x^{s-2}D^{'}(u_2)\{x, u_1\} + \{u_1, h_2\} \\ &= sx^{s-1}\Big(\{D^{'}(u_1), u_2\} + \{u_1, D^{'}(u_2)\}\Big) \\ &\quad + s(s-1)x^{s-2}\Big(D^{'}(u_1)\{x, u_2\} + D^{'}(u_2)\{u_1, x\}\Big) \\ &\quad + \{h_1, u_2\} + \{u_1, h_2\} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi Lemma 4.6 (c) den

$$S(\{(D^{'}(u_1)),u_2\}+\{u_1,(D^{'}(u_2)\}) \subseteq R(x)$$

tir. Lemma 4.6 (a) dan

$$S(\{x,u_2\}),S(\{u_1,x\}) \subseteq R(x)$$

Lemma 4.6 (b) den

$$S\big(D^{'}(u_1)\{x,u_2\}+D^{'}(u_2)\{u_1,x\}\big) \subseteq R(x)$$

dir. Lemma 4.6 (d) den

$$\text{pdeg}_x\big(\{h_1,u_2\}+\{u_1,h_2\}\big) < s-1$$

ve Lemma 4.6 (c) den

$$S\big(\{h_1,u_2\}+\{u_1,h_2\}\big) \subseteq \{x\} \cup R(x)$$

dir.(x yerine sadece $y \in \flat$ alırız.)

$$\{(D^{'}(u_1)),u_2\}+\{u_1,(D^{'}(u_2))\} = D^{'}(\{u_1,u_2\})$$

için lemma ispatlanmış olur.

Lemma 4.12 $x \in \flat$ için $D = x^s\frac{\partial}{\partial x_1}$ ve $D^{'} = x\frac{\partial}{\partial x_1}$ olsun. Eğer f, P nin $x_1 \notin S(f)$ ve $\text{pdeg}_x f = t$ olacak şekildeki bir elemanı ise o zaman

$$D(f) = sx^{s+t-1}(D^{'}(l_x(f)))+h$$

dır. Burada $\text{pdeg}_x D^{'}(l_x(f)) = 0$ ve $\text{pdeg}_x h < s+t-1$ dir.

İspat: f, P nin $x_1 \notin S(f)$ ve $\text{pdeg}_x f = t$ olacak şekildeki bir elemanı olduğundan $\text{pdeg}_x f^{'} = 0$ olmak üzere $f = x^t f^{'}$ şeklindedir. O zaman

$$D(f) = tx^{t-1}(D(x)f^{'}+x^t(D(f^{'}))$$

dir. $x \in L$ olduğu için Lemma 4.7 yi uygulayabiliriz. Böylece $\text{pdeg}_x h^{'} < s$ için

$$D(x) = x^s(l_x(D)(x))+h^{'}$$

dir. Eğer $x \neq x_1$ ise Lemma 4.11 in ispatındaki gibi

$$l_x(D)(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}(x) = 0$$

ve $\text{pdeg}_x D(x) < s$ dir. Eğer $x = x_1$ ise o zaman $x_1 \notin S(f)$ olduğu için $t = 0$ dır. Yani her iki durumda da geriye $\text{pdeg}_x h^{''} < s-1$ olmak üzere

$$D(f^{'}) = sx^{s-1}(D^{'}(f^{'})) + h^{''}$$

göstermek kalır. Bunun için $f^{'}$ nün (4.2) bazının bir elemanı olduğu durumu göstermek yeterlidir. Bunun ispatını $\text{pdeg} f^{'}$ üzerinde tümevarım ile yapalım. Eğer $\text{pdeg} f^{'} = 1$ ise iddia Lemma 4.11 den görülür. $f^{'} = u_1 u_2$ olsun. Lemma 4.11 den i=1,2 için $D(u_i) = sx^{s-1}(D'(u_i)) + h_i$ olup buradan

$$\begin{aligned} D(u_1 u_2) &= D(u_1)u_2 + u_1 D(u_2) \\ &= \big(sx^{s-1}(D'(u_1)) + h_1\big)u_2 + u_1\big(sx^{s-1}(D'(u_2)) + h_2\big) \\ &= sx^{s-1}(D^{'}(u_1)u_2 + D^{'}(u_2)u_1) + h_1 u_2 + u_1 h_2 \end{aligned}$$

dir. Burada tümevarım hipotezinden $\text{pdeg}_x D^{'}(u_i) = 0$ ve $\text{pdeg}_x h_i < s-1$ dir. Bu nedenle pdeg_x, P üzerinde bir polinom derece fonksiyonu, $\text{pdeg}_x D^{'}(u_i) = 0$, $\text{pdeg}_x u_i = 0$ ve $\text{pdeg}_x h_i < s-1$ olduğundan dolayı

$$\text{pdeg}_x(h_1 u_2 + u_1 h_2) < s-1 \quad \text{ve} \quad \text{pdeg}_x(D^{'}(u_1)u_2 + D^{'}(u_2)u_1) = 0$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 4.13 D, P nin

$$D = D_0 + xD_1 + \ldots + x^{s-1}D_{s-1} + x^s \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad x \notin S(D_i)\ ,\ 0 \le i \le s-1$$

formundaki bir derivasyonu olsun. Burada x, $S(D)$ nin minimal elemanıdır. f, P nin $x_1 \notin S(f)$ olacak şekildeki bir elemanı olsun. Eğer $\text{pdeg}_x f = t$ ise o zaman

$$D(f) = x^{s+t-1}D^{'}(l_x(f)) + h$$

dır. Burada $D^{'} = D_{s-1} + sx\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\text{pdeg}_x h < s+t-1$ ve $x \notin S(D^{'}(l_x(f)))$ dir.

İspat: Lemma 4.9 ve Lemma 4.12 yi kullanarak pdeg_x e göre $D(f)$ nin $s+t$ ve $s+t-1$ dereceli terimlerini hesaplayabiliriz.

Önerme 4.14 x, $S(D)$ nin minimal elemanı olmak üzere D, P nin

$$D = D_0 + xD_1 + \ldots + x^{s-1}D_{s-1} + x^s \frac{\partial}{\partial x_1} \ , \ x \notin S(D_i) \ , \ 0 \le i \le s-1$$

formundaki yerel nilpotent derivasyonu olsun. Eğer $x \neq x_1$ ise o halde $D_{s-1} + sx\frac{\partial}{\partial x_1}$ de yerel nilpotenttir.

İspat: D, P nin bir yerel nilpotent derivasyonu olsun. $D^{'} = D_{s-1} + sx\frac{\partial}{\partial x_1}$ nin yerel nilpotent olmadığını varsayalım. O halde her $k \geq 0$ için $D'^{k}(x_i) \neq 0$ olacak şekilde x_i vardır.

Eğer $i \neq 1$ ise $a = D^{'}(x_i) = D_{s-1}(x_i)$ alalım. $S(D_{s-1})$ desteği boş kümeden farklıdır. Aksi halde $D_{s-1}(a) = 0$ olurdu. y, $S(D_{s-1})$ in minimal elemanı olsun. $y > x$ olduğu açıktır. O halde Lemma 4.7 den $S(a) \subseteq \{y\} \cup R(y)$ dir. Yani $S(a) \subseteq R(x)$ dir.

Eğer $i = 1$ ise $D^{'}(x_1) = D_{s-1}(x_1) + sx$ olur.

$$a = D^{'2}(x_1) = D^{'}(D_{s-1}(x_1)) + sD^{'}(x)$$

alalım. Yukarıdaki gibi Lemma 4.7 den $S(D_{s-1}(x_1)) \subseteq R(x)$ dir. Yani Sonuç 4.8 den

$$S(D^{'}(D_{s-1}(x_1))) \subseteq \{x\} \cup R(x)$$

dir. Bu nedenle Lemma 4.12 den $\mathrm{pdeg}_x D^{'}(D_{s-1}(x_1)) = 0$ olduğu için

$$S(D^{'}(D_{s-1}(x_1))) \subseteq R(x)$$

dir. Benzer şekilde Lemma 4.7 den $S(D_{s-1}(x)) \subseteq R(x)$ ve Lemma 4.11 den $S(x\frac{\partial}{\partial x_1}(x)) \subseteq R(x)$ olduğu için $S(D^{'}(x)) \subseteq R(x)$ dir.

Her iki durumda da Sonuç 4.8 ve Lemma 4.12 den bir k doğal sayısı için $S(D^{'k}(a)) \subseteq R(x)$ dır. Böylece $x_1 < x$ olduğu için $x_1 \notin S(D^{'k}(a))$ dır. Lemma 4.13 ten

$$l_x(D^k(a)) = D^{'}(l_x(D^{k-1}(a))) = \ldots = D^{'k}(a) \neq 0$$

olup bu ise D nin yerel nilpotent derivasyon olması ile çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.3 İki Üreteçli Cebirler

Bu kısımda iki eleman tarafından üretilen serbest Poisson cebirlerinin yerel nilpotent derivasyonlarının üçgenleştirilebilir ve bu cebirlerin otomorfizmlerinin tame olduğu gösterilmiştir. Bu sonuçlar Rentschler'ın Teoremi [22] ve Jung'ın Teoremi'nin [14] bir benzeridir.

Bu kısımda iki üreteçli $P = K\{x_1, x_2\}$ serbest Poisson cebirinin yerel nilpotent derivasyonları ve otomorfizmleri çalışılmıştır.

$f \in K\{x_1, x_2\}$ olsun. Eğer f her w_deg e göre homojen ise f ye multi-homojen eleman denir. Eğer $n_1 = (1,0)$_deg f ve $n_2 = (0,1)$_deg f ise mdeg f, (n_1, n_2) ile gösterilir. Multi-homojen derivasyonları ve $K\{x_1, x_2\}$ nin bir D derivasyonu için mdeg D yi benzer şekilde tanımlayalım.

Önerme 4.15 D, $P = K\{x_1, x_2\}$ nin sıfırdan farklı yerel nilpotent multi-homojen derivasyonu ve mdeg $D = (m_1, m_2)$ olsun. O halde ya $m_1 = -1$ ya da $m_2 = -1$ dir.

İspat: Minimal deg$D$ ile D nin önermeye bir karşı örnek olduğunu kabul edelim. Önerme 4.5 ten, D nin pdeg-homojen olduğunu kabul edebiliriz. x, $S(D)$ nin minimal elemanı olsun. Önerme 4.10 dan, $l_x(D)$ de yerel nilpotenttir. mdeg $l_x(D) = (n_1, n_2)$ alalım. deg $l_x(D) <$ deg D olduğundan dolayı, eğer n_1 ve n_2 nin her ikisi negatif olmasaydı deg D nin minimalliği ile çelişirdi. Bu yüzden n_1 ve n_2 den biri -1 olmalıdır. Genelliği kaybetmeksizin $n_1 = -1$ olduğunu varsayabiliriz. O halde $P = K\{x_1, x_2\}$ olduğunda $\flat$ nin x_2 hariç tüm elemanları x_1 e göre pozitif dereceli olduğu için $0 \neq \alpha \in K$ olmak üzere

$$l_x(D) = \alpha x_2^{n_2} \frac{\partial}{\partial x_1}$$

dir. Eğer $x = x_1$ ise o zaman $n_2 = m_2$ ve D, bir

$$x_1^{m_1+1} l_x(D) = \alpha x_1^{m_1+1} x_2^{m_2} \frac{\partial}{\partial x_1}$$

toplamını içerir. Bu durumda $\beta \in K$ için

$$D = \alpha x_1^{m_1+1} x_2^{m_2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta x_1^{m_1} x_2^{m_2+1} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

dir. $f_1 = \alpha x_1^{m_1+1} x_2^{m_2}$ ve $f_2 = \beta x_1^{m_1} x_2^{m_2+1}$ alınırsa

$$D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

olup burada f_1 ile f_2 multi-homojen, pdeg-homojen ve mdeg$f_1 = (m_1+1, m_2)$, mdeg$f_2 = (m_1, m_2+1)$ dir. Yani degf_1 =deg$f_2 = m_1 + m_2 + 1$ dir. Ayrıca pdegf_1 =pdeg$f_2 = m_1 + m_2 + 1$ dir. Eğer $e_i \in \flat$ ve $e_i > x_2$ ise dege_i >pdege_i olduğundan (4.2) bazının bu derece koşullarını sağlayan elemanları sadece $x_1^{m_1+1} x_2^{m_2}$ ve $x_1^{m_1} x_2^{m_2+1}$ dir. Bu nedenle D, $K[x_1, x_2]$ nin bir D' derivasyonuna kısıtlanabilir. Fakat $m_1 \geq 0,\ m_2 \geq 0$ ve D' sıfırdan farklı ise D' bir yerel nilpotent derivasyon olamaz [24].

Böylece, $x \neq x_1$ dir. Eğer $x = x_2$ ise o halde $l_x(D) = \alpha \frac{\partial}{\partial x_1}$ ve D, $\alpha x_2^{m_2} \frac{\partial}{\partial x_1}$ terimini içerir. D multi-homojen olduğu için varsayımımızın tersine $m_1 = -1$ olur.

Dolayısıyla x, $S(D)$ nin minimal elemanı olduğundan $x > x_2$ ve x_2, $l_x(D)$ de görülmez. Böylece $l_x(D) = \alpha \frac{\partial}{\partial x_1}$ dir. $\alpha = 1$ olduğunu varsayabiliriz. Böylece D, Önerme 4.14 te verilen formdaki bir derivasyondur. Bu nedenle $D' = D_{s-1} + sx\frac{\partial}{\partial x_1}$ sıfırdan farklı bir yerel nilpotent derivasyondur. D' multi-homojen ve pdeg-homojen olduğundan

$$D' = sx\frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_i \alpha_i y_i \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_i \beta_i z_i \frac{\partial}{\partial x_2}$$

dir. Burada $s \neq 0,\ \alpha_i,\ \beta_i \in K,\ y_i, z_i \in \flat$, mdeg $y_i = (m_1+1, m_2)$, mdeg $z_i = (m_1, m_2 + 1)$ ve $y_i > x,\ z_i > x$ dir. Böylece D', x_1, x_2 tarafından üretilen L serbest Lie cebirinin bir D'' derivasyonuna kısıtlanabilir ve D'', L nin bir yerel nilpotent derivasyonudur. Bu nedenle $expD''$, L nin bir φ otomorfizmini verir [24] ve $S(f_1) \subset R(x)$ olmak üzere

$$\varphi(x_1) = expD''(x_1) = x_1 + D''(x_1) + \frac{1}{2!}D''^2(x_1) + \ldots = x_1 + sx + f_1$$

dir. Fakat bu imkansızdır. Çünkü L nin herhangi bir ϕ otomorfizmi için

$$\phi(x_1) = \alpha x_1 + \beta x_2$$

dir. Bu da ispatı tamamlar.

$P = K\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ serbest Poisson cebiri olsun. Her i için $f_i \in K\{x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n\}$ ise P nin (4.3) formundaki bir derivasyonuna üçgenseldir denir. Üçgensel derivasyonlar polinom cebirleri ve serbest asosyatif cebirler için benzer şekilde tanımlanır. Her üçgensel derivasyon yerel nilpotenttir [24]. Eğer $\varphi^{-1}D\varphi$ üçgensel olacak şekilde bir φ otomorfizmi varsa P nin D derivasyonuna üçgenselleştirilebilir denir. R. Rentschler karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerindeki iki değişkenli polinomlar cebirinin yerel nilpotent derivasyonlarının üçgenselleştirilebilir olduğunu ispatladı [22]. H. Bass, üç değişkenli polinomlar cebirinin üçgenselleştirilemeyen yerel nilpotent derivasyonuna bir örnek verdi [27].

Eğer f, $x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n$ tarafından üretilen altcebire ait olmak üzere bazı $i \neq j$ için $\phi(x_j) = x_j$ ve $\phi(x_i) = \alpha x_i + f$ ise bir k cismi üzerinde $x_1,x_2,...,x_n$ tarafından üretilen bir serbest cebirin (serbest asosyatif cebirin, serbest Poisson cebirinin, polinom cebirinin) bir ϕ otomorfizmine elemanter otomorfizm denir. Elemanter otomorfizmlerin bileşkesi olarak ifade edilebilen otomorfizmlere tame denir. Tame olmayan otomorfizmlere wild denir.

Teorem 4.16 D, $P = K\{x_1,x_2\}$ nin bir yerel nilpotent derivasyonu olsun. O zaman $\varphi^{-1}D\varphi = f(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}$ olacak şekilde P nin bir φ tame otomorfizmi ve $f(x_2) \in K[x_2]$ elemanı vardır.

İspat: I ile $\{x_1,x_2\}$ elemanı tarafından üretilen P nin Poisson idealini gösterelim.

$$D(\{x_1,x_2\}) = \{D(x_1),x_2\} + \{x_1,D(x_2)\} \in I$$

olduğundan dolayı $D(I) \subseteq I$ dır. Böylece D, $P/I \cong K[x_1,x_2]$ üzerinde bir $D^{'}$ yerel nilpotent derivasyonunu belirler. [14] teki Rentschler'in Teoremi'nden $\psi^{-1}D^{'}\psi = f(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}$ olacak şekilde $f(x_2) \in K[x_2]$ ve $K[x_1,x_2]$ nin bir ψ tame otomorfizmi vardır. $K[x_1,x_2]$ nin her elemanter otomorfizmi P nin bir elemanter otomorfizmine bir tek şekilde genişletilebilir.

Böylece $K[x_1,x_2]$ nin tame otomorfizmleri P nin bir tame otomorfizmine genişletilebilir. ψ nin P ye bir tame genişletmesini φ ile gösterelim. $\varphi^{-1}D\varphi$ yerine D yazarsak $D^{'} = f(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}$ olduğunu kabul edebiliriz. Böylece $a,b \in I$ olmak üzere

$$D = (f(x_2)+a)\frac{\partial}{\partial x_1} + b\frac{\partial}{\partial x_2}$$

dir. $a = b = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $(1,0)$_deg yi düşünelim ve $D^{''}$ ile D nin uygun en yüksek homojen parçasını gösterelim. O halde $c,d \in I$ ve c ya da d sıfırdan farklı olmak üzere

$$D'' = c\frac{\partial}{\partial x_1} + d\frac{\partial}{\partial x_2}$$

dir. Önerme 4.5 ten D'' derivasyonu yerel nilpotenttir. Önerme 4.15 ten $c = d = 0$ olmalıdır. Bu ise a ve b nin sıfırdan farklı olması kabulü ile çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.17 D, $K\{x_1,x_2\}$ nin bir yerel nilpotent derivasyonu olsun. O zaman $D\big(\{x_1,x_2\}\big) = 0$ dır.

İspat: $0 \neq \alpha \in K$ olmak üzere her elemanter otomorfizm ve dolayısıyla her tame otomorfizm için $\varphi\big(\{x_1,x_2\}\big) = \alpha\{x_1,x_2\}$ olduğundan $D = f(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}$ ise $D\big(\{x_1,x_2\}\big) = 0$ dır.

Teorem 4.18 Karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerindeki iki ranklı serbest Poisson cebirlerinin otomorfizmleri tamedir.

İspat: θ, $P = K\{x_1,x_2\}$ nin herhangi bir otomorfizmi olsun. Yukarıdaki gibi I ile $\{x_1,x_2\}$ elemanı tarafından üretilen P nin Poisson idealini gösterelim. $\theta(\{x_1,x_2\}) = \{\theta(x_1),\theta(x_2)\} \in I$ olduğundan θ, $K[x_1,x_2]$ nin bir ψ otomorfizmini oluşturmasına neden olur. Jung'ın teoreminden [14] ψ tamedir. ψ nin P Poisson cebirine bir tame genişlemesini φ ile gösterelim. O halde $\varphi|_{K[x_1,x_2]} = \psi$ dır. θ yerine $\theta' = \theta\varphi^{-1}$ alalım. θ ve θ' otomorfizmlerinin her ikisi de ya tame ya da wild olur. θ', $K[x_1,x_2]$ nin birim otomorfizmi olur. Böylece $a,b \in I$ olmak üzere

$$\theta(x_1) = x_1 + a\ ,\ \theta(x_2) = x_2 + b$$

dır. $x_1 + a$ ve $x_2 + b$, P nin serbest üreteçleri olduğundan dolayı P üzerinde $x_1 + a$ ve $x_2 + b$ yi P nin herhangi elemanlarına götüren bir derivasyon tanımlayabiliriz. P nin bir D_h derivasyonunu $h \in K[x]$ olmak üzere

$$D_h(x_1 + a) = h(x_2 + b)\ , \qquad D_h(x_2 + b) = 0$$

olarak tanımlayalım. Bu derivasyon yerel nilpotenttir.

$$\begin{aligned} D_h(x_1+a)=h(x_2+b) \quad &\Rightarrow \quad D_h(x_1)+D_h(a)=h(x_2+b) \\ &\Rightarrow \quad D_h(x_1)=h(x_2+b)-D_h(a) \\ &\Rightarrow \quad D_h(x_1)=h(x_2+b)-D_h(a)-h(x_2)+h(x_2) \end{aligned}$$

olup burada $c=h(x_2+b)-h(x_2)-D_h(a)$ alınırsa

$$D_h(x_1)=h(x_2)+c$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} D_h(x_2+b)=0 \quad &\Rightarrow \quad D_h(x_2)+D_h(b)=0 \\ &\Rightarrow \quad D_h(x_2)=-D_h(b)=d \end{aligned}$$

elde edilir. I ideali her derivasyon altında değişmezdir. Dolayısıyla $c\in I$ ve $d\in I$ dır. Böylece $c,d\in I$ olmak üzere

$$D_h=(h(x_2)+c)\frac{\partial}{\partial x_1}+d\frac{\partial}{\partial x_2}$$

dir. Teorem 4.16 nın ispatında eğer D_h yerel nilpotent ise $c=d=0$ olduğu gösterilmişti. Buradan

$$D_h(x_1)=(h(x_2)+c)\frac{\partial x_1}{\partial x_1}+d\frac{\partial x_1}{\partial x_2} \quad = \quad h(x_2)+c \;=\; h(x_2)$$

olup

$$\begin{aligned} D_h(x_1)=h(x_2+b)-D_h(a) \quad &\Rightarrow \quad D_h(a)=h(x_2+b)-D_h(x_1) \\ &\Rightarrow \quad D_h(a)=h(x_2+b)-h(x_2) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$D_h=h(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}$$

dır. Eğer h, n dereceli bir polinom ise deg $D_h=n-1$ ve Lemma 4.4 ten her $f\in P$ için

$$\deg D(f)\leq n-1+\deg f$$

dir. $h=x$ olsun. O zaman $D_h(a)=h(x_2+b)-h(x_2)=x_2+b-x_2=b$ dir. Bu nedenle deg$b\leq$deg$a$ dir. Eğer D_h ın tanımındaki x_1 ve x_2 yi yerdeğiştirirsek deg$a\leq$deg$b$ de alabiliriz.

$a=b=0$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için $a\neq 0$ ve $b\neq 0$ olduğunu varsayalım. $\deg a=\deg b$ ve $a,b\in I$ olduğundan $\deg a=\deg b\geq 2$ dir. $h=x^2$ alalım. O zaman

$$\begin{aligned} D_h(a) &= h(x_2+b)-h(x_2) \\ &= (x_2+b)^2-(x_2)^2 \\ &= (x_2)^2+2x_2b+b^2-(x_2)^2 \\ &= 2x_2b+b^2 \end{aligned}$$

ve

$$\deg(2x_2b+b^2)\leq 1+\deg a$$

dır. Bu nedenle $\deg b\geq 2$ ve $\deg x_2=1$ olduğundan $\deg a+1\geq 2\deg b$ dir. $\deg a=\deg b$ olduğundan $\deg a+1\geq 2\deg a$ dır. Buradan $\deg a\leq 1$ çelişkisi elde edilir. Böylece $a=0$ ve $b=0$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.19 φ, $K\{x_1,x_2\}$ nin herhangi bir otomorfizmi olsun. O halde her otomorfizm tame olduğundan $0\neq\alpha\in K$ için

$$\varphi(\{x_1,x_2\})=\alpha\{x_1,x_2\}$$

dir.

Böylece $K\{x_1,x_2\}$ nin her otomorfizmi bir skaler faktöre göre $\{x_1,x_2\}$ yi korur. Bu sonucun bir benzeri serbest asosyatif cebirler için de doğrudur. Yani $K<x_1,x_2>$ serbest asosyatif cebirin her otomorfizmi $[x_1,x_2]$ komutatörünü bir skaler çarpana göre korur. Buna ek olarak $K<x_1,x_2>$ cebirinin $[x_1,x_2]$ komutatörünü koruyan her endomorfizmin bir otomorfizm olduğunu söyleyen teorem komutatör test teoremi olarak bilinir [28].

Problem 4.20 Karakteristiği 0 olan bir cisim üzerindeki $K\{x_1,x_2\}$ serbest Poisson cebirinin $\{x_1,x_2\}$ elemanını koruyan her endomorfizmi bir otomorfizm midir?

Problem 4.20 nin olumlu cevabı, $K[x_1,x_2]$ için Jacobian varsayımını gerektirdiğini not edelim.

$K < x_1, x_2 >$, x_1 ve x_2 tarafından üretilen serbest asosyatif cebir olmak üzere

$$AutK[x_1, x_2] \cong AutK < x_1, x_2 >$$

olduğu iyi bilinir [13, 16].

Sonuç 4.21 K, karakteristiği 0 olan bir cisim olsun. O zaman

$$Aut\ K[x_1, x_2] \cong Aut\ K < x_1, x_2 > \cong Aut\ K\{x_1, x_2\}$$

dir.

Bu izomorfizm $Aut\ K\{x_1, x_2\}$ grubunun altgruplarının serbest amalgamasyon çarpımı olarak bir temsile sahip olduğunu gösterir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Bergman'ın Merkezleyen Teoremi, karakteristiği 0 olan bir cisim üzerindeki Poisson cebirleri için incelenmiş ve bu teoremin Poisson cebirleri için de geçerli olduğu gösterilmiştir. Ayrıca karakteristiği 0 olan bir cisim üzerindeki iki değişkenli bir Poisson cebirinin otomorfizmlerinin tame ve yerel nilpotent derivasyonlarının üçgenleştirilebilir olduğu ispatlanmıştır.

Polinom cebirleri, serbest birleşmeli cebirler ve serbest Lie cebirlerinin yapısı hakkında bilinen birçok sonuç olmasına rağmen bu cebirler ile çok yakından bağlantılı olan serbest Poisson cebirleri ile ilgili çok fazla çalışma bulunmamaktadır. Bu nedenle Poisson cebirleri ile ilgili çözülmemiş daha bir çok soru bulunmaktadır. Örneğin n değişkenli Poisson cebirlerinin otomorfizmlerinin tame olup olmadığı sorusu bunlardan biridir. Üzerinde çalışılan bir kaç açık problem aşağıda belirtilmiştir.

Problem 5.1 Tek bağıntıya sahip Poisson cebirlerinde kelime probleminin çözülebilir olup olmadığına karar verilebilir mi?

Problem 5.2 Eğer K karakteristiği 0 olan bir cisim ise, o zaman $P < x_1, x_2, ..., x_n >$ nin f ve g elemanlarının serbest olmaması için gerek ve yeter koşul $[f, g] = 0$ olması mıdır?

Problem 5.3 Bir serbest Poisson cebirinin sonlu elemanlarından oluşan bir kümesinin serbestliği algoritmik olarak tanınabilir mi?

KAYNAKLAR

[1] Kirillov, A. A., Unitary representetations of nilpotent Lie groups, Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 17, 57-110, 1962.

[2] Kirillov, A. A., The characters of unitary representations of Lie groups, Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, 2, 40-55, 1968. English translation: Functional Analysis and Its Applications, 2, 133-146, 1968.

[3] Kostant, B., Lie group representations on polynomial rings, The American Journal of Mathematics, 85, 327-404, 1963.

[4] Belov-Kanel, A. Y., Kontsevich, M. L., The Jacobian conjecture is stably equivalent to the Dixmier conjecture, The Moscow Mathematical Journal, 7(2), 209-218, 2007.

[5] Umirbaev, U. U., Shestakov, I. P., Subalgebras and automorphisms of polynomial rings, Doklady Akademii Nauk, 386(6), 745-748, 2002.

[6] Shestakov, I. P., Umirbaev, U. U., The Nagata automorphism is wild, Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 100(22), 12561-12563, 2003.

[7] Shestakov, I. P., Umirbaev, U. U., Poisson brackets and two generated subalgebras of rings of polynomials, Journal of the American Mathematical Society, 17, 181-196, 2004.

[8] Shestakov, I. P., Umirbaev, U. U., Tame and wild automorphisms of rings of polynomials in three variables, Journal of the American Mathematical Society, 17, 197-227, 2004.

[9] Nagata, M., On the automorphism group of $k[x,y]$, Lectures in Mathematics, Kyoto Univ., Kinokuniya, Tokio, 1972.

[10] Donin, J., Makar-Limanov, L., Quantization of quadratic Poisson brackets on a polynomial algebra of three variables, Journal of Pure and Applied Algebra, 129(3), 247-261, 1998.

[11] Shestakov, I. P., Quantization of Poisson superalgebras and speciality of Jordan Poisson superalgebras, Algebra i Logika, 32(5), 571-584, 1993. English Translation: in Algebra and Logic, 32(5), 309-317, 1993.

[12] Bergman, G. M., Centralizers in free associative algebras, Transactions of the American Mathematical Society, 137, 327-344, 1969.

[13] Czerniakiewicz, A. J., Automorphisms of a free assosiative algebra of rank 2, I. Transactions of the American Mathematical Society, 160, 393-401, 1971. II. Transactions of the American Mathematical Society, 171, 309-315, 1972.

[14] Jung, H. W. E., Über ganze birationale transformationen der Ebene, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 184, 161-174, 1942.

[15] Van der Kulk, W., On polynomial rings in two variables, Nieuw Archief voor Wiskunde, 3(1), 33-41, 1953.

[16] Makar-Limanov, L., The automorphisms of the free algebra with two generators, Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, 4(3), 107-108, 1970. English translation: Functional Analysis and Its Applications, 4, 262-263, 1970.

[17] Umirbaev, U. U., The Anick automorphism of free associative algebras, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 605, 165-178, 2007.

[18] Cohn, P. M., Subalgebras of free associative algebras, Proceedings of the London Mathematical Society, 56, 618-632, 1964.

[19] Makar-Limanov, L., Umirbaev, U. U., Centralizers in free Poisson algebras, Proceedings of the American Mathematical Society, 135(7), 1969-1975, 2007.

[20] Zaks, A., Dedekind subrings of $k[x_1, x_2, ..., x_n]$ are rings of polynomials, Israel Journal of Mathematics, 9, 285-289, 1971.

[21] Gelfand, I. M., Kirillov, A. A., Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie, Institut Hautes Études Scientifiques Publications Mathmatiques, 31, 5-19, 1966.

[22] Rentschler, R., Opérations du groupe additif sur le plane affine, Comptes Rendus de I'Academie des Sciences Paris, 267, 384-387, 1968.

[23] Makar-Limanov, L., Turusbekova, U., Umirbaev, U. U., Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables, Journal of Algebra, 322, 3318-3330, 2009.

[24] Van den Essen, A., Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture, Progress in Mathematics, Basel, 190, 2000.

[25] Shirshov, A. I., Subalgebras of free Lie algebras, Matematicheskii Sbornik, 33(75), 441-452, 1953.

[26] Witt, E., Die Unterringe der freien Lieschen ringe, Mathematische Zeitschrift, 64, 195-216, 1956.

[27] Bass, H., A non-triangular action of G_a on A^3, Journal of Pure and Applied Algebra, 33(1), 1-5, 1984.

[28] Dicks, W., A commutator test for two elements to generate the free algebra of rank two, Bulletin of the London Mathematical Society, 14, 48-51, 1982.

ÖZGEÇMİŞ

1. **Adı Soyadı** **:** Seda Deniz UÇAR
2. **Doğum Tarihi** **:** 5 Mayıs 1991
3. **Ünvanı** **:** Matematik Öğretmeni
4. **Öğrenim Durumu :**

Derece	**Alan**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik Bölümü	Atatürk Üniversitesi	2010
Yüksek Lisans	Matematik Bölümü	Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi	2014–

5. **İş Tecrübesi :**

Görev Unvanı	**Görev Yeri**	**Yıl**
Öğretmen	Mustafa Özden Ortaokulu, Osmaniye	2015 – 2017