



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜLERİ
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ramazan YILDIRIM

**ANİZOTROPİK ISI İLETİM PROBLEMİNİN
PSEUDOSPEKTRAL CHEBYSHEV YÖNTEMİ İLE
SAYISAL BENZETİMİ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OSMANIYE – 2018

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**ANİZOTROPİK ISI İLETİM PROBLEMİNİN
PSEUDOSPEKTRAL CHEBYSHEV YÖNTEMİ İLE
SAYISAL BENZETİMİ**



RAMAZAN YILDIRIM

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**OSMANIYE
OCAK 2018**

TEZ ONAYI

ANİZOTROPİK ISI İLETİM PROBLEMİNİN PSEUDOSPEKTRAL CHEBYSHEV YÖNTEMİ İLE SAYISAL BENZETİMİ

RAMAZAN YILDIRIM tarafından Yrd. Doç. Dr. Durmuş YARIMPABUÇ danışmanlığında, Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalı'nda hazırlanan bu çalışma, aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği/çokluğu ile **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Durmuş YARIMPABUÇ
Matematik Anabilim Dalı, OKÜ

.....

Üye: Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM
Matematik Anabilim Dalı, KSÜ

.....

Üye: Yrd.Doç.Dr. Baran AYDIN
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Adana BTÜ

.....

Yukarıdaki jüri kararı Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve/..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Coşkun ÖZALP
Enstitü Müdürü, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

.....

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler,şekil,çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, bu çalışma sonucunda elde edilmeyen her türlü bilgi ve ifade için ilgili kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını ve bu tezin Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

RAMAZAN YILDIRIM



ÖZET

ANİZOTROPİK ISI İLETİM PROBLEMİNİN PSEUDOSPEKTRAL CHEBYSHEV YÖNTEMİ İLE SAYISAL BENZETİMİ

RAMAZAN YILDIRIM

Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı
Danışman :Yrd. Doç. Dr. Durmuş YARIMPABUÇ

Ocak 2018, 54 sayfa

İki boyutlu kararlı ısı iletim problemi, iki yönde uzay değişkenine bağlı ısı iletim katsayısı ve ısı üretim parametrelerine sahip heterojen bir ortamda en genel sınır koşulları altında analiz edilmiştir. Sistemi idare eden diferansiyel denklemler, yüksek doğruluk derecesinde pseudospektral Chebyshev yöntemi kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Sayısal yöntemin doğruluğunu test etmek için, problemi modelleyen diferansiyel denklemin bir yönde uzay değişkenine bağlı basit ısı iletim katsayısı ve ısı üretim parametreleri için hem kapalı form analitik çözümü hem de sayısal çözümü elde edilmiş. Sonuçların yüksek hassasiyet altında örtüştüğü gösterilmiştir. Sonuç olarak bu yöntemin bu tür problemleri çözmek için basit ve etkili bir yöntem olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Anizotropik Isı Transferi, Değişkenlerine Ayırma Yöntemi, Pseudospektral Chebyshev Yöntemi

ABSTRACT

NUMERICAL SIMULATION OF ANISOTROPIC HEAT TRANSFER PROBLEM BY PSEUDOSPECTRAL CHEBYSHEV METHOD

RAMAZAN YILDIRIM

M.Sc., Department of Mathematics

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Durmuş YARIMPABUÇ

January 2018, 54 pages

The two-dimensional steady-state heat transfer problem is analyzed under the most general boundary conditions in a heterogeneous medium with heat transfer coefficient and heat generation parameters depending on the space variable in two directions. The governing equation of the system is solved numerically by using the pseudospektral Chebyshev method with high accuracy. In order to test the accuracy of the numerical method, both the closed form analytical solution and the numerical solution of the differential equation are obtained for the simple heat transfer coefficient and heat heat generation parameters depending on the space variable. It has been shown that the results are overlap under high accuracy. As a result, it is shown that this method is simple and effective and can be easily applied to such problems.

Key Words: Anisotropic Heat Transfer, Method of Separation of Variables, Pseudospektral Chebyshev Method



Değerli Aileme

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tez konumun belirlenerek tez çalışmamın yürütülmesini üstlenen, çalışmalarım süresince değerli bilgi, tecrübe ve katkılarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Durmuş YARIMPABUÇ'a teşekkürlerimi sunarım.

Manevi desteği ile daima yanımda duran değerli aileme teşekkür ederim. Ayrıca, çalışmalarına katkılarından dolayı OKÜ Matematik Bölümü'nün diğer akademik ve idari personellerine teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAYI	
TEZ BİLDİRİMİ	
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İTHAF SAYFASI	iii
TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
1 GİRİŞ	1
1.1 Isı Transferi	2
1.1.1 İletim ile ısı transferi	2
1.1.1.1 Isı iletim katsayısı	2
1.1.2 Taşınım ile ısı transferi	3
1.1.3 Işınım ile ısı transferi	4
1.2 Isı Transfer Rejimleri	4
1.3 Literatür Özeti	5
2 TEMEL FORMÜLASYON	8
2.1 Problemi İdare Eden Denklem	10
2.2 Değişkenlerine Ayırma Yöntemi	16
3 SAYISAL YÖNTEM	24
3.1 Pseudospektral Chebyshev Diferansiyel Matrisi	24
3.2 Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Pseudospektral Chebyshev Dife- ransiyel Matrisi ile Çözümü	32
3.3 Isı Probleminin Pseudospektral Chebyshev Diferansiyel Matrisi ile Ayrıklaştırılması	36
3.3.1 Termal Özelliklerin Bir Yönde Değiştiği Isı Problemi	36
3.3.2 Termal Özelliklerin İki Yönde Üstel Değiştiği Isı Problemi	38
3.3.3 Termal Özelliklerin İki Yönde Keyfi Olarak Değiştiği Isı Problemi	40
4 TARTIŞMA VE SONUÇLAR	42
5 SONUÇLAR	51

KAYNAKLAR	52
ÖZGEÇMİŞ	54



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1.1 Bazı maddelerin ısı iletim katsayıları.	3
---	---



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Üç boyutlu ısı iletim analizi için diferansiyel hacim	8
Şekil 2.2	Dikdörtgesel bir bölgedeki $(L \times W)$ iki boyutlu kararlı ısı iletim probleminin geometrisi.	11
Şekil 2.3	Bir yönde değişen ısı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretimi ($\gamma = 0.5$) .	12
Şekil 2.4	İki yönde değişen ısı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretimi ($L = W = 1, \alpha = 2, \beta = 4, \gamma = 0.5, k_o = 0.2, q_o = 5000$)	13
Şekil 2.5	İki yönde değişen ısı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretimi ($L = W = 1, \alpha = 2, \gamma = 0.5, k_o = 0.2, q_o = 5000$)	14
Şekil 3.1	Chebyshev noktaları	24
Şekil 3.2	Bir boyutlu kararlı ısı iletimi ve türevinin grafiği	32
Şekil 3.3	Tensör örgü noktaları	33
Şekil 4.1	Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin bir yönde exponansiyel olarak değiştiği durumda, $a = 1.5$ ve $d = 5$ için farklı B_i sayılarında boyutsuz sıcaklık dağılımı.	42
Şekil 4.2	Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin bir yönde exponansiyel olarak değiştiği durumda, $B_i = 5$ ve $a = 1.5$ için farklı boyutsuz hacimsel ısı üretim parametresinde boyutsuz sıcaklık dağılımı.	43
Şekil 4.3	Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin bir yönde exponansiyel olarak değiştiği durumda, $B_i = 5$ ve $d = 5$ için farklı boyutsuz ısı akı parametresinde boyutsuz sıcaklık dağılımı.	44
Şekil 4.4	Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin y yönünde exponansiyel olarak değiştiği durumda $a = 1.5, d = 5$ ve $B_i = 30$ için boyutsuz sıcaklık dağılımı. Sağdaki şekil analitik çözümü, soldaki şekil de sayısal çözümü göstermektedir.	45
Şekil 4.5	Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin iki yönde exponansiyel olarak değiştiği durumda, $a = 1.5$ ve $d = 5$ değerlerinde farklı B_i sayıları için boyutsuz sıcaklık dağılımı.	45
Şekil 4.6	Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin iki yönde exponansiyel olarak değiştiği durumda, $B_i = 5$ ve $a = 1.5$ için farklı boyutsuz hacimsel ısı üretim parametresinde boyutsuz sıcaklık dağılımı.	46
Şekil 4.7	Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin iki yönde exponansiyel olarak değiştiği durumda, $B_i = 5$ ve $d = 5$ için farklı boyutsuz ısı akış parametresinde boyutsuz sıcaklık dağılımı.	47
Şekil 4.8	Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin iki yönde exponansiyel olarak değiştiği durumda $a = 1.5, d = 5$ ve $B_i = 10$ için boyutsuz sıcaklık dağılımı.	47
Şekil 4.9	Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin iki yönde keyfi olarak değiştiği durumda, $a = 1.5$ ve $d = 5$ için farklı B_i sayılarında boyutsuz sıcaklık dağılımı.	48
Şekil 4.10	Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin iki yönde keyfi olarak değiştiği durumda, $B_i = 5$ ve $a = 1.5$ için farklı boyutsuz hacimsel ısı üretim parametresinde boyutsuz sıcaklık dağılımı.	49
Şekil 4.11	Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin iki yönde keyfi olarak değiştiği durumda, $B_i = 5$ ve $d = 5$ için farklı boyutsuz ısı akış parametresinde boyutsuz sıcaklık dağılımı.	49

Şekil 4.12 Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin iki yönde exponansiyel olarak değiştiiği durumda $a = 1.5$, $d = 5$ ve $B_i = 10$ için boyutsuz sıcaklık dağılımı. 50



SİMGELER VE KISALTMALAR

A	Isı geçişi yönündeki dik yüzey alanı
T	Sıcaklık dağılımı
Θ	Boyutsuz sıcaklık dağılımı
ξ	y yönünde boyutsuz uzunluk
η	x yönünde boyutsuz uzunluk
$k(x,y)$	Isı iletim katsayısı
$q(x,y)$	Isı retim parametresi
k_0	Başlangıç noktasındaki ısı iletim katsayısı
q_0	Başlangıç noktasındaki ısı üretim katsayısı
d	Boyutsuz hacimsel ısı üretimini ifade eder
B_i	Bir katının ısı direncinin sınır tabakadaki ısı direncine oranınıdır
a	boyutsuz ısı akısı
q''_0	yüzey ısı akısı
λ	lambda
h	ısı transfer katsayısı
T_∞	Ortam sıcaklığı

1. GİRİŞ

Herhangi bir ortamda veya iki madde arasında sıcaklık farkının olduğu her yerde ısı transferi gerçekleşir. Bu ısı transferin matematiksel olarak modellenmesi, günümüz teknolojisi göz önünde bulundurulduğunda oldukça önemli bir konu olduğu anlaşılıyor. Isı transferinin endüstrideki yerini, belirli sıcaklık farkından dolayı birim zamandan transfer edilen ısı miktarının araştırılması oluşturur. Birçok sistemin en yüksek verimde ve güvenilir bir şekilde çalışabilmesi bu problemin çözümü ile mümkündür. Buhar kazanları, nükleer santraller, yoğuşturucular, buharlaştırıcılar, pompalar, ısı değiştiricileri, kazanlar gibi parçaların üretimi ısı transferinin önemini ve gerekliliğini gösterir. Ayrıca gaz türbünleri, jet motorlarının imalatı, soğutma sistemleri gibi prosesleri anlamak için ısı transferi bilgisi gerekir. Isı transferi mühendisliğin her dalında günümüzde önem kazanmıştır. Isı transferinde kullanılan kanunlar şunlardır:

- Termodinamiğin 1. kanunu
- Termodinamiğin 2. kanunu
- Kütlelenin korunumu kanunu.

Termodinamiğin 1. kanunu "enerjinin korunumu" olarak da bilinir. Bu yasaya göre: Bir sistemin iç enerjisindeki değişim miktarı, o sisteme ilave edilen ısı miktarı ile sistemin çevresine uyguladığı ısı arasındaki farka eşittir. Termodinamiğin 2. kanununa göre, ortamlar arasında sıcaklık farkı bulunduğunda, ısı yüksek sıcaklıktan düşük sıcaklıktaki ortama doğru geçer. Isı geçişi ortam sıcaklıklarındaki farka bağlı olduğu kadar, ortam ve yüzeylerinin özelliklerine de bağlıdır. Kütlelenin korunumu kanununa göre kütle vardan yok, yoktan var olamaz; yani kapalı bir sistemde değişimler ve tepkimeler ne olursa olsun kütlelenin değişmeyeceğini korunacağını ifade eder.

1.1 Isı Transferi

Cisimlerde ısı transferi iletim, taşınım ve ışınım(radyasyon) olmak üzere üç şekilde olur.

1.1.1 İletim ile ısı transferi

Bir ortam (katı, sıvı, gaz) içerisinde bulunan bölgeler arasında veya doğrudan doğruya temas halindeki ortamlar arasında atomların doğrudan doğruya teması sonucu meydana gelen ısının geçişidir. İletim ile ısı transferi atomik ve moleküler düzeyde hareketler ile ilişkilidir. Katılarda bu hareket titreşim şeklide gerçekleşirken, sıvı ve gazlarda moleküllerin rastgele hareketlerle birbirleri ile çarpışması sonucu gerçekleşir. İletim ile birim zamanda transfer edilen ısı miktarını hesaplamak için Fourier kanunu kullanılır.

1.1.1.1 Isı iletim katsayısı

Isı iletim katsayısı bir maddenin ısıyı geçirmeye olan yatkınlığını göstermektedir. İletim ile geçen enerjinin bir göstergesi olarak da kabul edilebilir ve maddenin hali ile ilgili atomik, moleküler ve fiziksel yapıya bağlıdır. Bu katsayı en yüksek değeri katılarda alırken en düşük değeri gazlarda alır. Çizelge 1.1'de bazı maddelerin ısı iletim katsayısı verilmiştir.

Çizelge 1.1 Bazı maddelerin ısı iletim katsayıları.

Malzeme	Isı İletim Katsayısı W/(m.K)
Saf Metaller	40-400
Alaşımlar	20-200
Metal Olmayan Katılar	0.03-3
Sıvı metaller	10-100
Su	0.5-0.7
Yağlar	0.1-1
Gazlar	0.002-0.2

Isı iletim katsayısının değeri sıcaklığın değişmesiyle değişkenlik gösterir. Metallerin ısı iletim katsayısı yüksektir ve sıcaklık arttıkça ısı iletim katsayısı lineer olarak azalır. Gazlarda ise sıcaklık arttıkça ısı iletim katsayısı lineer olarak artar. Su ise çan eğrisi şeklinde hareket eder. Isı iletim katsayısının ısı akısına etkisi ise

$$k = \frac{q''}{\partial T / \partial x} \quad (1.1)$$

bağıntısı ile verilir. Yani, belirli bir sıcaklık gradyanı için iletimle ısı akısı; ısı iletim katsayısının artması ile artmaktadır. Malzemenin homojen ve izotropik olduğu, basınçın çok yüksek olmadığı durumlarda ise k değeri sadece sıcaklığın bir fonksiyonu olarak alınabilir Aynı zamanda ısı iletimi sırasında, malzeme içerisinde sıcaklık gradyanı çok değişmiyorsa ortalama bir değer ile k değeri sabitlenebilir

1.1.2 Taşınım ile ısı transferi

Akışkan bir yüzey ile sabit bir yüzey arasında gerçekleşen ısı transferine taşınım ile ısı transferi denir. Bu transfere kalorifer peteği ile akışkan olan hava akımı arasında gerçekleşen ısı alışverişi örnek verilebilir. Akışkanlarda taşınım iki şekilde gerçekleşebilir. Akma ve yoğunluk farklılığından doğan yer değiştirme sonunda oluşabilir; yoğunluğun farklılaşması, akışkan içinde sıcaklık dalgalanmalarına yol

açar ve "doğal taşınım" denilen olay ortaya çıkar. Doğal taşınımın kalorifer peteği ve sobalar örnek verilebilir. Akımın hareketi, fan, rüzgar veya bir pompa gibi yöntemlerle kontrol edildiğinde akışkan yoğunluk dalgalanmalarından etkilenmez; bu durum "zorlamalı taşınım" olayı olarak adlandırılır. Isıtılan bir borudan akan akışkana ısı aktarılması bu tür bir taşınımdır. Aynı akışkan içinde iki tip kuvvet peşpeşe etkili olabileceğinden, doğal ve zorlamalı taşınım birarada bulunabilir.

1.1.3 Işınım ile ısı transferi

Bütün maddeler elektromanyetik dalgalar yayarlar. Isının bu yolla alınmasına veya verilmesine ışınım ile ısı transferi denir. Elektromanyetik dalgalar uzay boşluğundan geçerken hiç bir değişime uğramadan yoluna devam eder; fakat yoluna bir madde çıkarsa bu dalgaların bir kısmı yansır ve geçer, bir kısmı ise soğurur. Isıya dönen kısım sadece soğurulan dalgalardır. Mat veya siyah yüzeyler elektromanyetik dalgaları genelde soğurularak ısıya çevirirler. Parlak yüzeyler ise bu dalgaları daha çok yansıtırlar.

1.2 Isı Transfer Rejimleri

Isı transferi sıcaklığın zamana göre değiştiği ve sabit kaldığı durumlar olmak iki üzere ikiye ayrılır. Bunlar, sürekli ve zamana bağlı rejim olarak adlandırılır. Bir sistem içerisinde sıcaklık zamana bağlı değişmiyorsa yani zamanla sabit kalıyorsa iç enerji değişimi ve yapılan iş sıfırdır. Bu tür sistemlere sürekli rejim denir. Eğer sistem içerisinde sıcaklık her hangi bir noktada zamana göre değişiyorsa ısı transferi zamana bağlıdır denir. Zamana bağlı ısı transferinde sıcaklık periyodik olarak değişiyorsa buna periyodik ısı transferi denir. Eğer sistem belirli bir süre bekledikten sonra sürekli rejime geçiyorsa buna geçici rejim denir. Sıcaklık zaman bağlı rasgele değer alıyorsa gelişmiş yada zamana bağlı rejim denir.

1.3 Literatür Özeti

Malzeme özellikleri yönlerine göre farklılık gösteren malzemelere anizotropik malzemeler denir. Bu tip malzemeler, kristaller, ahşap, tortul kayaçlar, ısınmaya maruz kalmış metaller, lamine levhalar, kablolar, ısı yalıtım malzemeleri fiber takviyeli kompozit yapılar gibi doğal ve sentetik olabilirler. Isıl iletkenlik gibi malzeme özelliklerinde meydana gelen lokasyona bağlı değişim de anizotropik malzemelere örnek olarak verilebilir. Bu durumda sistemi idare eden diferansiyel denklemler, değişken katsayılı olarak oluşurlar. Analitik çözümü mümkün olmayan bu diferansiyel denklemlerin çözümü için lineerleştirme gibi denklemleri basitleştirici varsayımlar yada ısı iletkenliğinin değişiminin az olduğu durumlarda sabit ısı iletkenliği alınarak çözümler yapılır. Ancak malzemenin ısı iletkenliği, malzeme boyunca yer değişikliği ile büyük ölçüde etkileniyorsa çözümde hatalar ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle, bu tür problemlerde sıcaklık dağılımının modellenmesinde sayısal olarak hesaplama kaçınılmaz olur.

İki boyutlu kararlı ısı transfer problemlerini çözmek için literatürde çeşitli yöntemler mevcuttur. Bunlar içinde en yaygın kullanılan yöntemler; sonlu fark yöntemi [1] ile sonlu elemanlar yöntemi'dir [2]. Sonlu elemanlar yöntemi, ısı transfer problemlerinin çözümünde kullanılan en yaygın yöntemdir. Bu yöntemin en büyük avantajı, düzensiz geometrileri işleme yeteneğidir ve boyutun bölge üzerinde değiştirilebilir olmasıdır. Ancak yüksek hassasiyet için, kullanılan nokta sayısının çok fazla artırılması gerekmektedir. Bu tür analizlerde kullanılan diğer bir yöntem de sınır elemanı yöntemi'dir [3]. Bu yöntemde sayısal çözüm, problemin boyutunun azaltılması ile gerçekleştirilir. Böylece problem daha az boyutla ele alınabilir. Dolayısı ile diğer yöntemlerle aynı seviyede doğruluk elde etmek için BEM daha az sayıda düğüm noktası ve eleman sayısı kullanır.

Hsieh ve Ma [4] ile Ma ve Chang [5] çalışmalarında orijinal anizotropik problemi, aynı geometrik konfigürasyona sahip eşdeğer bir izotropik probleme dönüştürmek için doğrusal bir dönüşüm kullanarak anizotropik bir ortam için ısı iletim probleminin analitik bir çözümünü geliştirmişlerdir.

Süreksiz sınır elemanlarının sürekli sınır elemanları üzerindeki doğruluğunun geliştirilmesi sayısal olarak Mera vd. [6], Florez ve Power [7] ile Tadeu ve Antonio [8] tarafından ele alınmıştır.

Anizotropiklik, ısı iletimi sabitlerinin sayısını arttırmakta ve bu da temel çözümlerin türetilmesini homojen bir durumda bile zor hale getirmektedir. Wang vd. [9] izotropik ve anizotropik materyallerde keyfi olarak uzaysal olarak değişen termal iletkenlikle kararlı durumdaki ısı iletim problemlerini çözmek için, standart Laplace operatörü ve radyal taban fonksiyonlarına (RBF) dayalı yeni bir ağsız yöntem geliştirmişlerdir. Sladek vd. [10] iki boyutlu anizotropik fonksiyonel derecelendirilmiş malzemede kararlı ve geçici ısı iletim problemlerini çözmek için yerel PetrovGalerkin'e dayalı örgüsüz yöntemi kullanmışlardır. Anizotropik ısı iletimi problemlerinin analitik çözümü için birçok çalışma yapılmıştır. Anizotropik özelliklere sahip ince tabaka ortamı ve çok katmanlı ortam için ısı iletim problemlerini çözmek için doğrusal bir koordinat dönüşümü kullanılmıştır [11-16]

Çok boyutlu ve çok katmanlı gövdede temas direncinin kararlı durum sıcaklığına etkisi Haji-Sheikh vd. [12] tarafından araştırılmıştır. Bununla birlikte, analitik çözümler özellikle çok karmaşık geometrilerde özel veya basit durumlarla sınırlı kalmıştır. Çok boyutlu ve çok tabakalı anizotropik ısı iletim problemini çözmek için sınır elemanı yönteminde (BEM) doğrudan koordinat dönüştürme yöntemi uygulanmıştır [13]. Bu yaklaşımın avantajı, anizotropik problemler izotropik potansiyel teorisi kullanılarak sonlu fark yöntemi veya sınır elemanı yöntemi gibi mevcut olan herhangi bir sayısal yöntemle kolaylıkla çözülebilmesidir [14-16]. Bununla birlikte, kararlı durum içim Fourier ısı iletimi daha önce [13-16] ele alınmıştır.

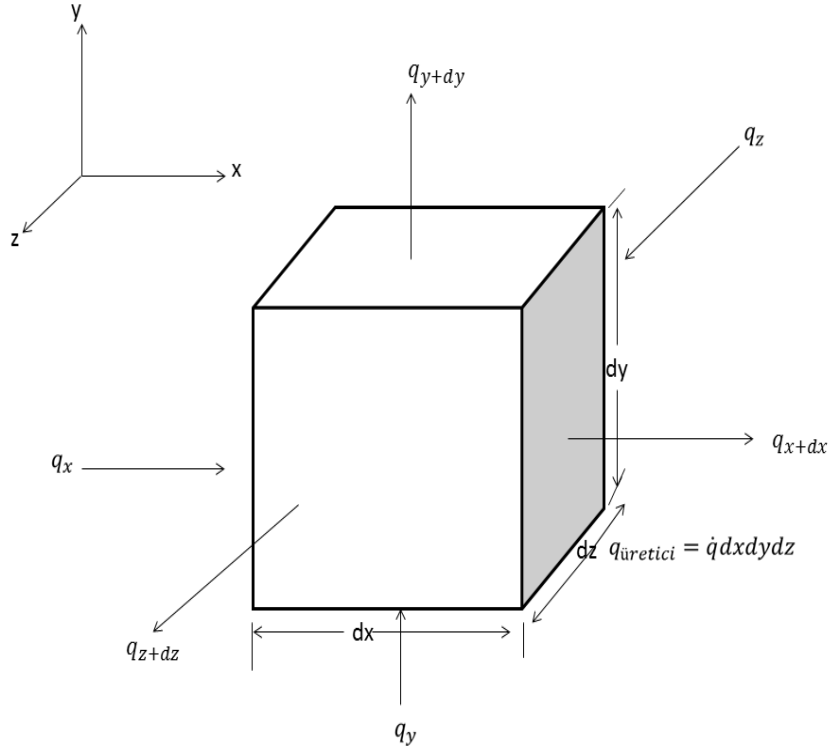
Bu çalışmada, en genel sınır koşullarına sahip, ısı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin bir veya iki uzay değişkenleri yönünde değiştiği kabul edilen anizotropik iki boyutlu ısı transfer probleminin analitik ve sayısal çözümü ele alınmıştır. Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin değişken olması sistemi idare eden diferansiyel denklemlerin değişken katsayılı olmasına sebep olmaktadır. Doğrusal ile sınırlı durumlarda analitik çözüm yapılabilmektedir. Bu çalışmada üç farklı durum incelenmiştir. Birinci durumda, ısı iletkenlik ve hacimsel ısı üretiminin bir ve aynı

uzay değişkeni yönünde kuvvet kuralı ile değiştiği varsayılmaktadır. Bu durumda analitik çözüm mümkündür. Sayısal çözümün doğruluğu bu durum için test edilmiş ve sonuçların örtüştüğü gözlemlenmiştir. İkinci durumda, ısı iletkenlik ve hacimsel ısı üretimi iki uzaysal yönünde kuvvet kuralı ile değiştiği kabul edilmiş, pseudospektral Chebyshev yöntemi ile çözüm yapılmıştır. Üçüncü durumda, ısı iletkenliğin ve hacimsel ısı üretiminin iki uzamsal yönde keyfi olarak değiştiği durum sayısal olarak çözülmüştür.



2. TEMEL FORMÜLASYON

Isı iletim denkleminin elde edilmesi ve çözümlenmesindeki asıl amaç, herhangi bir sistemin sınır koşullarını kullanarak o sistemin sıcaklık dağılımının nasıl olduğunu belirlemektir. Yani sistemin iç bölgesindeki sıcaklık değerlerini belirlemektir. Bu değerlerin bilinmesi günümüz teknolojisinde büyük önem arz eder. Isı denkleminin oluşturulmasında enerjinin korunumu ilkesi kullanılacaktır. Başka bir deyişle belirlenen bir kontrol hacmi içerisindeki iç enerji değişimi o hacime giren ve çıkan enerji farkına eşittir. Bu eşitlikten yararlanarak ısı iletim denklemini oluşturulur. Sıcaklığın zamanla değiştiği, içinde kütle hareket olmayan ve cisim içerisinde ısı kaynağının olduğu $T(x,y,z)$ sıcaklık dağılımının üç boyutlu kartezyen koordinat eksen takımında gösterildiği homojen bir ortam ele alınsın.



Şekil 2.1 Üç boyutlu ısı iletim analizi için diferansiyel hacim

x, y ve z eksenleri üzerindeki kontrol yüzeylerinin her birine dik, ısı iletimi sırasıyla q_x , q_y ve q_z terimleri ile gösterilir. Karşı yüzeylerdeki ısı iletimi ise yüksek mertebeden

terimlerin atıldığı Taylor seri açılımı ile ifade edilir.

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (2.1)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (2.2)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (2.3)$$

Sözel olarak, $x + dx$ 'deki ısı iletimi, x 'teki değer ile dx uzunluğundaki değişimin toplamı olarak verilmektedir. Ortam içinde ısı enerjisi üretimi ile ilgili olarak enerji kaynağı terimi de vardır. Bu terim aşağıdaki gibi gösterilir.

$$E_{\text{üretilen}} = \dot{q} dx dy dz \quad (2.4)$$

Burada \dot{q} ortamın birim hacimdeki, birim zamanda üretilen ısı enerjisi (W/m^3) miktarıdır. Ayrıca kontrol hacmine malzeme tarafından depolanan ısı iç enerjide değişimler olabilir. Malzemede bir faz değişimi olmuyorsa gizli ısı etkileri yoktur ve enerji depolama terimi,

$$E_{\text{depolanan}} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial x} dx dy dz \quad (2.5)$$

olarak yazılır. Burada $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial x}$ ortamın ısı enerjisinin birim hacimde birim zamandaki değişimi olup ρ ve c_p sırasıyla yoğunluk ve özısıyı ifade etmektedir. Enerji korunumunun yasasından

$$E_{\text{giren}} + E_{\text{üretilen}} - E_{\text{çıkan}} = E_{\text{depolanan}} \quad (2.6)$$

denklemleri yazılır. Yukarıdaki ifadeler birleştirilip yerine yazılırsa

$$q_x + q_y + q_z + \dot{q}dxdydz - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial x} dxdydz \quad (2.7)$$

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + \dot{q}dxdydz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial x} dxdydz \quad (2.8)$$

bulunur. Fourier Denklemine göre:

$$q_x = -kdydz \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.9)$$

$$q_y = -kdx dz \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.10)$$

$$q_z = -kdx dy \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.11)$$

ifadeleri denklemde yerine yazılır ise kartezyen koordinatlarda ısı denklemi

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.12)$$

eşitliği ile bulunur. O halde Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin iki yönde uzay değişkenine bağlı, iki boyutlu karalı ısı denklemi

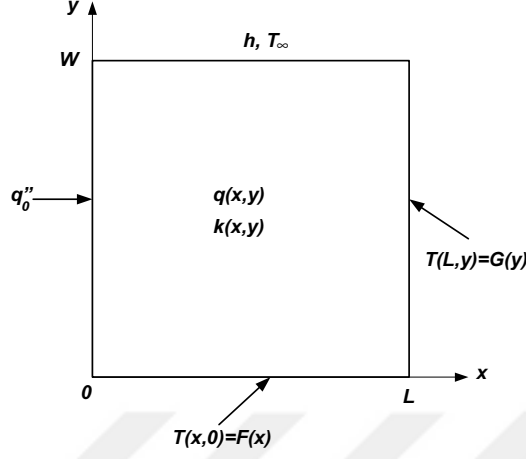
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x,y) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(x,y) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q} = 0 \quad (2.13)$$

şeklinde elde edilir.

2.1 Problemi İdare Eden Denklem

Bu çalışmada, iki yönde uzay değişkenine göre keyfi olarak değişen ısı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretim parametrelerine sahip düzgün hacimsel bir oranda

dikdörtgesel bir bölgedeki iki boyutlu kararlı ısı iletim problemi ele alınmıştır. Sistemin geometrisi Şekil 2.2 de gösterilmiştir.



Şekil 2.2 Dikdörtgesel bir bölgedeki $(L \times W)$ iki boyutlu kararlı ısı iletim probleminin geometrisi.

Sistemi modelleyen ikinci mertebeden değişken katsayılı homojen olmayan kısmi diferansiyel denklem [17]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x,y) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(x,y) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = -q(x,y) \quad (0 < x < L, \quad 0 < y < W) \quad (2.14)$$

homojen olmayan en genel sınır koşulları ile birlikte

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,y) = \frac{q_o''}{k(0,y)}; \quad T(L,y) = G(y),$$

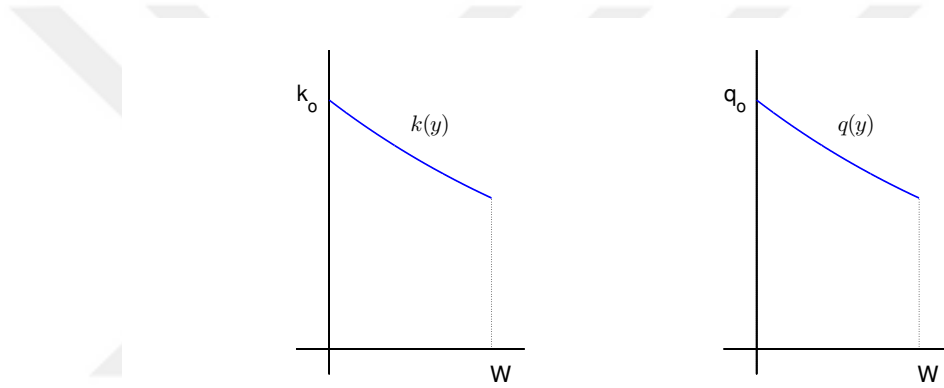
$$T(x,0) = F(x); \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x,W) = -\frac{h}{k(x,W)} [T(x,W) - T_\infty] \quad (2.15)$$

şeklinde verilir. Burada $T(x,y)$, $k(x,y)$, $q(x,y)$, q_o'' , h ve T_∞ sırası ile iki boyutlu sıcaklık fonksiyonu, ısı iletim katsayısı, hacimsel ısı üretim parametresi, yüzey ısı

akısı, ısı transfer katsayısı ve ortam sıcaklığını göstermekde ve $F(x)$ ve $G(y)$ ise keyfi seçilebilen tek değişkenli fonksiyonları ifade etmektedir. Bu çalışmada, ısı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretim parametresinin bir veya iki uzay değişkenine göre değiştiği durumlarda sıcaklık dağılımı iki boyutlu kararlı bölgede ele alınacaktır.

Durum-1: Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin (Şekil 2.3) bir uzay değişkenine

$$k(y) = k_0 e^{-\gamma \frac{y}{W}}, \quad q(y) = q_0 e^{-\gamma \frac{y}{W}} \quad (2.16a)$$

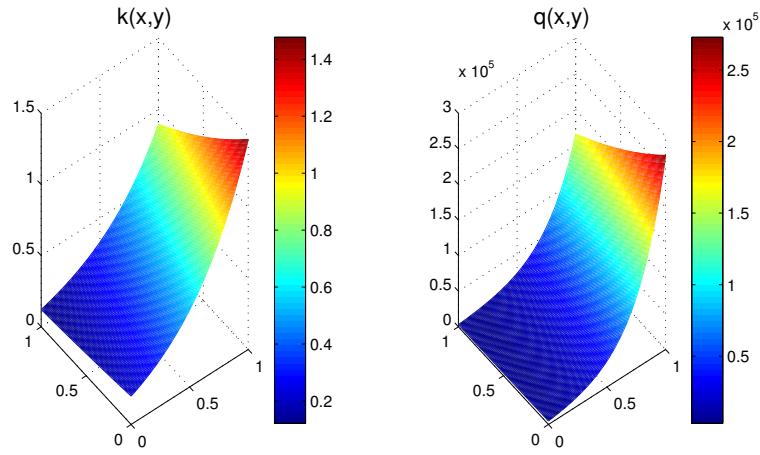


Şekil 2.3 Bir yönde değişen ısı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretimi ($\gamma = 0.5$)

eksponansiyel bir bağıntı ile bağlı olduğu durum ele alınacaktır. Bu şekildeki değişim için diferansiyel denklemin analitik çözümü mevcuttur. Sayısal yöntemin doğruluğu bu durumda incelenecektir.

Durum-2: Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin (Şekil 2.4) iki uzay değişkenine

$$k(x,y) = k_0 e^{\alpha \frac{x}{L}} e^{-\gamma \frac{y}{W}}, \quad q(x,y) = q_0 e^{\beta \frac{x}{L}} e^{-\gamma \frac{y}{W}} \quad (2.16b)$$

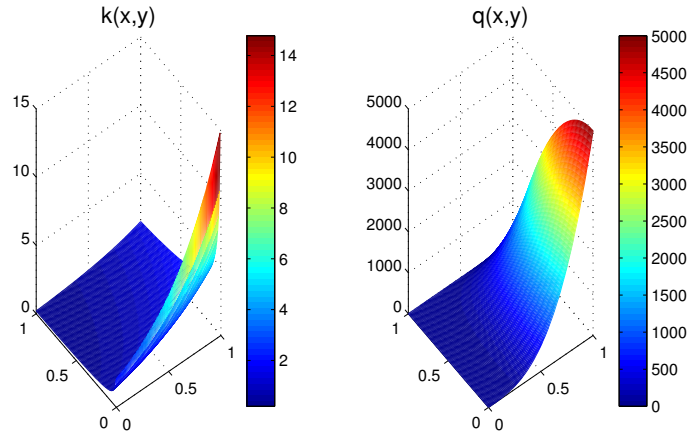


Şekil 2.4 İki yönde değişen ısı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretimi ($L = W = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $\gamma = 0.5$, $k_o = 0.2$, $q_o = 5000$)

eksponansiyel bir bağıntı ile bağlı olduğu durum ele alınacaktır. Bu şekildeki değişim için diferansiyel denklemin analitik çözümü mümkün ancak birinci duruma göre biraz daha karmaşıktır. Sistemin çözümü pseudospektral Chebyshev yöntemi ile yapılacaktır.

Durum-3: Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin (Şekil 2.5) iki uzay değişkenine göre keyfi olarak değiştiği karmaşık durum ele alınacaktır. Bu şekildeki değişim için diferansiyel denklemin analitik çözümü mevcut değildir. Önceki durumla benzere şekilde çözüm pseudospektral Chebyshev yöntemi ile yapılacaktır.

$$k(x,y) = k_o e^{\alpha \frac{x}{L}} \left(\frac{y}{W}\right)^{-\gamma}, \quad q(x,y) = q_o \left(\frac{x}{L}\right)^3 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(\frac{y}{W}\right)^3 \left(1 - \frac{y}{W}\right) \quad (2.16c)$$



Şekil 2.5 İki yönde değişen ısı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretimi ($L = W = 1$, $\alpha = 2$, $\gamma = 0.5$, $k_o = 0.2$, $q_o = 5000$)

Burada k_o ve q_o sırasıyla ortam sıcaklığındaki (T_∞) ısı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretimini ifade etmektedir. α , β ve γ ise ısı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin homojenite katsayılarını göstermektedir.

Sistemin çözümünü basit bir şekilde okuyucuya aktarabilmek için analitik çözümün de mümkün olduğu, ısı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin bir uzay değişkenine göre değiştiği kabul edilsin (Durum-1). Bu durumda sistemi idare eden sabit katsayılı kısmi diferansiyel denklem

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{W} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{q_o}{k_o} \quad (0 < x < L, \quad 0 < y < W) \quad (2.17)$$

şeklinde elde edilir. Bu kısmi diferansiyel denklemin çözümü sayısal olarak da elde dileceğinden daha doğru sonuçlar bulmak için boyutsuzlaştırma yapılır.

$$\eta = \frac{x}{L}, \quad \xi = \frac{y}{W}, \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_{max} - T_\infty} \quad (2.18)$$

boyutsuzlaştırma parametreleri kullanılarak diferansiyel denklem boyutsuzlaştırılırsa, (2.17) kısmi diferansiyel denklemi

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} - c^2 \gamma \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi} + c^2 \frac{\partial \theta}{\partial \xi^2} + d = 0 \quad (0 < \eta < 1, \quad 0 < \xi < 1) \quad (2.19)$$

formunu alır. Burada

$$c = \frac{L}{W}, \quad d = \frac{q_o L^2}{k_o (T_{max} - T_\infty)}. \quad (2.20)$$

d boyutsuz hacimsel ısı üretim parametresini ifade etmektedir. Benzer şekilde sistemin sınır koşulları (2.15) boyutsuzlaştırma parametreleri (2.18) kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(0, \xi) &= -ae^{\gamma \xi}; & \theta(1, \xi) &= G(\xi), \\ \theta(\eta, 0) &= F(\eta); & \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\eta, 1) &= -e^\gamma B_i \theta(\eta, 1) \end{aligned} \quad (2.21)$$

şeklinde elde edilirler. Burada

$$B_i = \frac{hL}{k_o}, \quad a = \frac{q_o'' L}{k_o (T_{max} - T_\infty)}. \quad (2.22)$$

a ve B_i sırasıyla boyutsuz ısı akısı ile Biot sayısını göstermektedir. Biot sayısı, bir katının ısıl direncinin sınır tabakadaki ısıl direncine oranı olarak ifade edilir. Dolayısı ile Biot sayısı büyüdükçe ısı geçişi azalır.

Bu çalışmada en genel homojen olmayan sınır koşulları ve iki boyutlu ısı iletim denkleminin analitik çözümünün hangi durumlarda mümkün olduğu araştırılmıştır. Sayısal çözümün doğruluğunu test etmek için, analitik çözümün mümkün olduğu durumda pseudospektral Chebyshev yöntemi ile çözüm yapılarak karşılaştırmalar yapılmıştır. Analitik çözümün mümkün olmadığı durumlar da ise sıcaklık dağılımının değişen Biot (B_i), boyutsuz ısı akısı (a) ve boyutsuz hacimsel ısı üretim parametre (d) değerleri için çözümleri sıcaklık dağılımının bilinmediği $\xi = 1$ ve $\eta = 0$ cıdarlarında pseudospektral Chebyshev yöntemi ile elde edilmiştir.

2.2 Değişkenlerine Ayırma Yöntemi

Analitik çözüm sabit katsayılı veya eşboyutlu özel kısmi diferansiyel denklemler için en az bir yönde homojen sınır koşulları altında değişkenlerine ayırma yöntemi ile bulunabilir. İlk durum için elde edilen kısmi diferansiyel denklemin (2.19) sınır koşulları (2.21) en az bir uzay değişkeni yönünde homojen değildir. Bu durumda kısmi diferansiyel denklemde en azından bir yönde homojen sınır koşulu elde edebilmek için boyutsuz sıcaklık dağılımı $\theta(\eta, \xi)$ üç parçaya bölünür.

$$\theta(\eta, \xi) = \theta_1(\eta) + \theta_2(\eta, \xi) + \theta_3(\eta, \xi) \quad (2.23)$$

(2.23) denklemi boyutsuz sıcaklık dağılımı denkleminde (2.19) yerine yazılıp analitik çözümün mümkün olacağı şekilde hem kısmi diferansiyel denklem hem de sınır koşulları düzenlenirse aşağıdaki şekilde üç parçaya ayrılabilir:

$$\frac{d^2\theta_1}{d\eta^2} = -d \quad (2.24)$$

$$\frac{d\theta_1}{d\eta}(0) = 0; \quad \theta_1(1) = 0$$

$$\frac{d\theta_2}{d\eta}(0, \xi) = -ae^{\gamma\xi}; \quad \theta_2(1, \xi) = G(\xi) \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial^2\theta_3}{\partial\eta^2} - c^2\gamma\frac{\partial\theta_3}{\partial\xi} + c^2\frac{\partial^2\theta_3}{\partial\xi^2} = f_1(\eta, \xi)$$

$$\frac{\partial\theta_3}{\partial\eta}(0, \xi) = 0; \quad \theta_3(1, \xi) = 0, \quad (2.26)$$

$$\theta_3(\eta, 0) = f_2(\eta); \quad \frac{\partial\theta_3}{\partial\xi}(\eta, 1) + e^{\gamma B_i}\theta_3(\eta, 1) = f_3(\eta)$$

Burada, diferansiyel denklemlerin düzenlenmesi sonucunda ortaya çıkan

$$f_1(\eta, \xi) = -\frac{d^2\theta_1}{d\eta^2} - d - \frac{\partial^2\theta_2}{\partial\eta^2} + c^2\gamma\frac{\partial\theta_2}{\partial\xi} - c^2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\xi^2}$$

$$f_2(\eta) = f(\eta) - \theta_1(\eta) - \theta_2(\eta, 0) \quad (2.27)$$

$$f_3(\eta) = -e^{\gamma B_i}[\theta_1(\eta) + \theta_2(\eta, 1)] - \frac{\partial\theta_2}{\partial\xi}(\eta, 1)$$

fonksiyonları $\theta_1(\eta)$ ve $\theta_2(\eta, \xi)$ bağlı olarak bulunurlar. $\theta_1(\eta)$ için elde edilen ikinci mertebeden homojen sabit katsayılı adi diferansiyel denklemin (2.24) çözümü, sınır koşulları da kullanılarak aşağıdaki şekilde edle edilir.

$$\theta_1(\eta) = -\frac{d}{2}\eta^2 + \frac{d}{2}. \quad (2.28)$$

η -yönündeki sınır koşullarını (2.25) sağlayacak şekilde $\theta_2(\eta, \xi)$ için çözüm tek türlü değildir. Örneğin, $G(1) = 0$ koşulu altında $\theta_2(\eta, \xi)$ için

$$\theta_2(\eta, \xi) = -ae^{\gamma\xi}\eta + \eta^2 \left[G(\xi) + ae^{\gamma\xi} \right] \quad (2.29)$$

çözümü seçilebilir. Bu çözümün sınır koşullarını (2.25) sağladığı kolayca gösterilebilir.

Değişkenlerin ayrıştırılması sonucunda $\theta_3(\eta, \xi)$ için elde edilen kısmi diferansiyel denklemin sınır koşulları en az bir yönde homojen (2.26) olduğundan, bu denklem değişkenlere ayırma yöntemi ile kolayca çözülebilir. η yönündeki $\partial\theta_3/\partial\eta(0, \xi) = 0$ sınır koşulundan çözüm Fourier cosinüs serisi cinsinden

$$\theta_3(\eta, \xi) = A_o(\xi) \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n(\xi) \cos(\lambda_n\eta) \quad (2.30)$$

şeklinde yazılabilir. η yönündeki ikinci sınır koşulu, $\theta_3(1, \xi) = 0$ kullanılarak da karakteristik λ_n değeri

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n = 2, 3, 4, 5 \dots \quad (2.31)$$

olarak bulunur. $\theta_3(\eta, \xi)$ için önerilen Fourier cosinüs serisi (2.30), kısmi diferansiyel denklemde (2.26) yerine yazılırsa;

$$\left[A_o'' - \gamma A_o' - \frac{\pi^2}{4\beta^2} A_o \right] \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[A_n'' - \gamma A_n' - \frac{\lambda^2}{\beta^2} A_n \right] \cos(\lambda_n \eta) = \frac{f_1(\eta, \xi)}{\beta^2} \quad (2.32)$$

denklemini elde edilir. Burada $(\)'$, ξ yönünde türevi göstermektedir. Fourier cosinüs serisi kullanılarak

$$A_o'' - \gamma A_o' - \frac{\pi^2}{4\beta^2} A_o = S_o(\xi) \quad (2.33)$$

ve

$$A_n'' - \gamma A_n' - \frac{\lambda^2}{\beta^2} A_n = S_n(\xi), \quad n = 2, 3, 4, 5 \dots \quad (2.34)$$

şeklinde sabit katsayılı homojen olmayan iki adi diferansiyel denklem elde edilir.

Burada

$$S_o(\xi) = \frac{2}{1} \int_0^1 \frac{f_1(\eta, \xi)}{\beta^2} \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta \quad (2.35)$$

$$S_n(\xi) = \frac{2}{1} \int_0^1 \frac{f_1(\eta, \xi)}{\beta^2} \cos(\lambda_n \eta) d\eta, \quad n = 2, 3, 4, 5 \dots \quad (2.36)$$

şeklinde hesaplanır. Bu adi diferansiyel denklemlerin (2.33)-(2.34) çözümleri

$$A_o(\xi) = A_o^h(\xi) + A_o^p(\xi) \quad (2.37)$$

ve

$$A_n(\xi) = A_n^h(\xi) + A_n^p(\xi), \quad n = 2, 3, 4, 5 \dots \quad (2.38)$$

biçiminde olup $A_o^h(\xi)$ ve $A_n^h(\xi)$ homojen çözümleri, $A_o^p(\xi)$ ve $A_n^p(\xi)$ ise özel çözümleri ifade etmektedir. (2.33) denkleminde $A_o(\xi)$ bağımlı değişkeni için homojen çözüm

$$A_o^h(\xi) = C_o^1 e^{r_o^1 \xi} + C_o^2 e^{r_o^2 \xi} \quad (2.39)$$

şeklinde elde edilir, öyleki

$$r_o^{1,2} = \frac{\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 + \frac{\pi^2}{\beta^2}}}{2} \quad (2.40)$$

formundadır. (2.33) denkleminin özel çözümü $A_o^p(\xi)$, sağ taraf fonksiyonu $S_o(\xi)$ sonlu sayıda türeve sahip ise belirsiz katsayılar metodu ile değilse parametrelerin değişimi metodu ile çözülebilir. Bu seçim sınır koşullarındaki $G(\xi)$ ile $F(\eta)$ fonksiyonlarının seçimine bağlıdır. Örneğin, bu fonksiyonlar

$$G(\xi) = 16(\xi - \xi^2)^2, \quad F(\eta) = 4(\eta - \eta^2) \quad (2.41)$$

biçiminde ikinci ve dördüncü dereceden bir polinom olarak seçilirse özel çözüm

$$A_o^p(\xi) = E_1 e^{\gamma \xi} + E_2 \xi^4 + E_3 \xi^3 + E_4 \xi^2 + E_5 \xi + E_6 \quad (2.42)$$

şeklinde olup sonlu türeve sahiptir. Dolayısı ile özel çözümü $A_o^p(\xi)$ belirsiz katsayılar metodu ile kolayca çözülebilir. Sonuç olarak (2.33) denkleminin çözümü

$$A_o(\xi) = C_o^1 e^{r_o^1 \xi} + C_o^2 e^{r_o^2 \xi} + A_o^p(\xi) \quad (2.43)$$

formunda olur. Benzer şekilde (2.34) denkleminde $A_n(\xi)$ bağımlı değişkeni için homejen çözüm

$$A_n^h(\xi) = C_n^1 e^{r_n^1 \xi} + C_n^2 e^{r_n^2 \xi}, \quad n = 2, 3, 4, 5 \dots \quad (2.44)$$

şeklinde elde edilir öyleki

$$r_n^{1,2} = \frac{\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 + \frac{4\lambda_n^2}{\beta^2}}}{2} \quad (2.45)$$

formundadır. Benzer biçimde (2.34) denkleminin özel çözümü $A_n^p(\xi)$, sağ taraf fonksiyonu $S_n(\xi)$ sonlu sayıda türeve sahip ise belirsiz katsayılar metodu ile değilse parametrelerin değişimi metodu ile çözülebilir. Sonuç olarak (2.33) denkleminin çözümü

$$A_n(\xi) = C_n^1 e^{r_o^1 \xi} + C_n^2 e^{r_o^2 \xi} + A_n^p(\xi), \quad n = 2, 3, 4, 5 \dots \quad (2.46)$$

formunda olur.

$\xi = 0$ ve $\xi = 1$ yönündeki sınır koşulları kullanılarak C_o^1 , C_o^2 , C_n^1 ve C_n^2 katsayıları, Fourier cosinüs serisi kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$\theta_3(\eta, 0) = f_2(\eta) \quad (2.47)$$

sınır koşulu (2.30) denkleminde yazılırsa

$$A_o(0) \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n(0) \cos(\lambda_n\eta) = f_2(\eta)$$

$$\Rightarrow [C_o^1 + C_o^2 + A_o^p(0)] \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} [C_n^1 + C_n^2 + A_n^p(0)] \cos(\lambda_n\eta) = f_2(\eta) \quad (2.48)$$

Fourier cosinüs serisi kullanılarak

$$C_o^1 + C_o^2 = RHS_1 \quad (2.49)$$

ve

$$C_n^1 + C_n^2 = RHS_2 \quad (2.50)$$

biçiminde iki denklem elde edilir. Burada

$$RHS_1 = \frac{2}{1} \int_0^1 \frac{f_2(\eta)}{\beta^2} \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta - A_o^p(0) \quad (2.51)$$

$$RHS_2 = \frac{2}{1} \int_0^1 \frac{f_2(\eta)}{\beta^2} \cos(\lambda_n\eta) d\eta - A_n^p(0), \quad n = 2, 3, 4, 5 \dots \quad (2.52)$$

şeklinde hesaplanır. Benzer şekilde

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial \xi}(\eta, 1) + e^\gamma B_i \theta_3(\eta, 1) = f_3(\eta) \quad (2.53)$$

sınır koşulu (2.30) denkleminde yazılırsa

$$[A_o'(1) + e^\gamma B_i A_o(1)] \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} [A_n'(1) + e^\gamma B_i A_n(1)] \cos(\lambda_n\eta) = f_3(\eta) \quad (2.54)$$

Fourier cosinüs serisi η yönünde elde edilir. Burada $A_o(1)$, $A'_o(1)$, $A_n(1)$ ve $A'_n(1)$ ifadeleri (2.54) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse

$$\Rightarrow \left[\left(r_o^1 e^{r_o^1} + e^\gamma B_i e^{r_o^1} \right) C_o^1 + \left(r_o^2 e^{r_o^2} + e^\gamma B_i e^{r_o^2} \right) C_o^2 + (A_o^p)'(1) + e^\gamma B_i A_o^p(1) \right] \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(r_n^1 e^{r_n^1} + e^\gamma B_i e^{r_n^1} \right) C_n^1 + \left(r_n^2 e^{r_n^2} + e^\gamma B_i e^{r_n^2} \right) C_n^2 + (A_n^p)'(1) + e^\gamma B_i A_n^p(1) \right] \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) \quad (2.55)$$

Fourier cosinüs serisi kullanılarak

$$\left(r_o^1 e^{r_o^1} + e^\gamma B_i e^{r_o^1} \right) C_o^1 + \left(r_o^2 e^{r_o^2} + e^\gamma B_i e^{r_o^2} \right) C_o^2 = RHS_3 \quad (2.56)$$

ve

$$\left(r_n^1 e^{r_n^1} + e^\gamma B_i e^{r_n^1} \right) C_n^1 + \left(r_n^2 e^{r_n^2} + e^\gamma B_i e^{r_n^2} \right) C_n^2 = RHS_4 \quad (2.57)$$

biçiminde iki denklem elde edilir. Burada

$$RHS_3 = \frac{2}{1} \int_0^1 \frac{f_3(\eta)}{\beta^2} \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta - (A_o^p)'(1) - e^\gamma B_i A_o^p(1) \quad (2.58)$$

$$RHS_4 = \frac{2}{1} \int_0^1 \frac{f_3(\eta)}{\beta^2} \cos(\lambda_n \eta) d\eta - (A_n^p)'(1) - e^\gamma B_i A_n^p(1), \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (2.59)$$

biçimde hesaplanır. (2.49), (2.50), (2.58) ve (2.59) denklemleri kullanılarak C_o^1 , C_o^2 , C_n^1 ve C_n^2 katsayıları elde edilmiş olur. En nihayetinde, iki yönde uzay değişkenine göre değişen ısı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretim parametrelerine sahip düzgün hacimsel boyutsuz bir dikdörtgenel bölgedeki iki boyutlu kararlı ısı iletim probleminin 1. Durum'a göre analitik çözümü

$$\theta(\eta, \xi) = -\frac{d}{2}\eta^2 + \frac{d}{2} - ae^{\gamma\xi}\eta + \eta^2 [G(\xi) + ae^{\gamma\xi}] +$$

$$A_o(\xi) \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n(\xi) \cos(\lambda_n\eta) \quad (2.60)$$

şeklinde elde edilmiş olur.



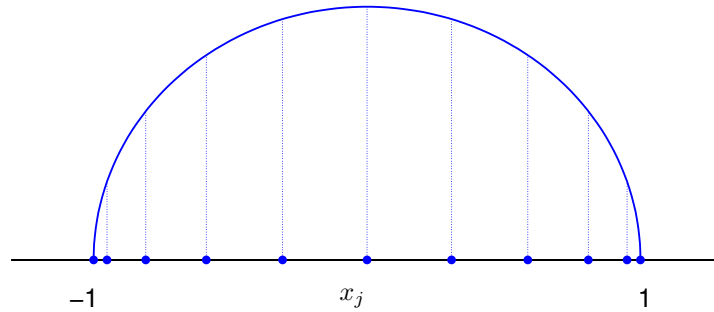
3. SAYISAL YÖNTEM

Bir veya daha fazla bağımsız değişkene bağlı fonksiyonlar ve türevlerini tanımlamak ve tartışmak için matris gösterimi ve terminolojisi daha kullanışlı olabilir. Bazı durumlarda, matris gösteriminin ve terminolojisinin kullanılması kaçınılmazdır.

Pseudospectral yöntemlerde, diferansiyel denklemlerin çözümünde diferansiyel matrisin önemli bir yeri vardır. Diferansiyel matris, adi veya kısmi diferansiyel denklem veya denklem sistemini hiçbir dönüşüm yapmadan lineer denklem sistemine dönüştürür. Lineer denklem sistemine dönüştürülen bu diferansiyel denklem veya denklem sistemi herhangi bir yöntemle, örneğin LU ayrıştırma yöntemiyle, kolayca çözülebilir. Ayrıca sınır koşullarını bu lineer denklem sistemine entegre etmek oldukça kolaydır.

3.1 Pseudospektral Chebyshev Diferansiyel Matrisi

Polinom tabanlı spektral yöntemlerde az sayıda nokta kullanarak yüksek doğruluk derecesinde çözümler elde edebilmek için, sınır noktalarındaki örgü noktaları orta noktalara göre daha sık olmalıdır. O halde bu tanıma uyan, yani sınır noktalarında daha fazla örgü noktalarına sahip olan



Şekil 3.1 Chebyshev noktaları

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

Chebyshev noktaları (Şekil 3.1) ele alınsın. Bu noktaları kullanılarak Chebyshev diferansiyel matrisi [18]-[20] aşağıdaki adımlar takip edilerek kolayca oluşturulabilir.

Chebyshev örgü noktalarında tanımlı bir v vektörü ele alınsın. Bu v vektörünün aynı örgü noktalarındaki w türevi iki adımda aşağıdaki şekilde oluşturulabilir.

Derecesi N 'den küçük ve eşit olan bir interpolasyon polinomu $p(x)$

$$p(x_j) = v_j, \quad 0 \leq j \leq N \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda örgü noktalarındaki w türevi

$$w_j = p'(x_j), \quad 0 \leq j \leq N \quad (3.3)$$

şeklinde oluşturulabilir. Bu işlem lineer olduğu için örgü noktalarındaki w türevi, $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutunda bir D_N matrisi ile v vektörünün çarpımı

$$w = D_N v \quad (3.4)$$

olarak yazılabilir. Burada, N keyfi olarak seçilebilen pozitif tek veya çift tamsayı olabilir. Chebyshev diferansiyel matrisinin nasıl oluşturulduğunu basit bir şekilde okuyucuya aktarabilmek için öncelikle $N = 1$ ve $N = 2$ olduğu durumlar incelenmiş, daha sonra en genel durum ele alınmıştır.

$N = 1$ için interpolasyon noktaları (3.1) kullanılarak $x_0 = 1$ ve $x_1 = -1$ olarak bulunur. $p(x_0) = v_0$ ve $p(x_1) = v_1$ noktalarını sağlayan Lagrange interpolasyon polinomu

$$p(x) = \frac{1}{2}(1+x)v_0 + \frac{1}{2}(1-x)v_1 \quad (3.5)$$

olarak kolayca yazılabilir. $p(x)$ interpolasyon polinomunun türevi alınırsa

$$p'(x) = \frac{1}{2}v_0 - \frac{1}{2}v_1 \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.3) ve (3.4) denklemleri kullanılarak 2×2 boyutundaki D_1 Chebyshev diferansiyel matrisi

$$D_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

şeklinde elde edilir.

Benzer şekilde, $N = 2$ için interpolasyon noktaları (3.1) kullanılarak $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ ve $x_2 = -1$ olarak bulunur. $p(x_0) = v_0$, $p(x_1) = v_1$ ve $p(x_2) = v_2$ noktalarını sağlayan ikinci dereceden Lagrange interpolasyon polinomu

$$p(x) = \frac{1}{2}x(1+x)v_0 + (1+x)(1-x)v_1 + \frac{1}{2}x(1-x)v_2 \quad (3.8)$$

olarak kolayca yazılabilir. $p(x)$ interpolasyon polinomunun türevi alınırsa

$$p'(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)v_0 - 2xv_1 + \left(x - \frac{1}{2}\right)v_2 \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.3) ve (3.4) denklemleri kullanılarak 3×3 boyutundaki D_2 Chebyshev diferansiyel matrisi

$$D_2 = \begin{bmatrix} (x_0 + \frac{1}{2}) & -2x_0 & (x_0 - \frac{1}{2}) \\ (x_1 + \frac{1}{2}) & -2x_1 & (x_1 - \frac{1}{2}) \\ (x_2 + \frac{1}{2}) & -2x_2 & (x_2 - \frac{1}{2}) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

biçiminde oluşturulur. Burada $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ ve $x_2 = -1$ değerleri yerine yazılırsa Chebyshev diferansiyel matrisi

$$D_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

olarak bulunur. $N \geq 1$ için interpolasyon noktaları (3.1) ve $p(x_0) = v_0$, $p(x_1) = v_1, \dots, p(x_N) = v_N$ noktalarını sağlayan Lagrange interpolasyon polinomu kullanılarak $(N+1) \times (N+1)$ boyutunda en genel formda Chebyshev diferansiyel matrisinin (D_N) elemanları

$$(D_N)_{00} = \frac{2N^2 + 1}{6}, \quad (3.12)$$

$$(D_N)_{jj} = \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.13)$$

$$(D_N)_{ij} = \frac{c_i (-1)^{i+j}}{c_j (x_i - x_j)}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.14)$$

$$(D_N)_{NN} = -\frac{2N^2 + 1}{6},$$

olarak bulunur. Burada

$$c_i = \begin{cases} 2, & i = 0 \text{ veya } i = N \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.15)$$

ile tanımlıdır. Literatürde “cheb“ olarak adlandırılan Chebyshev diferansiyel matrisinin $[-1, 1]$ örgü aralığında Matlab paket programında yazılmış olan program [20], bu çalışmada çözülecek probleme uygun olması açısından $[0, 1]$ aralığında dönüştürülerek aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

```
% CHEB DN = Diferansiyel Matris, y = Chebyshev noktaları

function [DN,y] = cheb(N)
if N==0, DN=0; x=1; return, end
% [0,1] aralığındaki y örgü noktaları
x = cos(pi*(0:N)/N)'; y=0.5*(x+1);
c = [2; ones(N-1,1); 2].*(-1).^ (0:N)';
X = repmat(y,1,N+1);
dX = X-X';
% Köşegen olmayan elemanları
D1 = (c*(1./c)') ./ (dX+(eye(N+1)));
% Köşegen elemanları
D1 = D1 - diag(sum(D1'));
% Soldan sağa diferansiyel noktalar
y=flipud(y);
% Diferansiyel Matris
DN=rot90(D1,2);
```

Pseudospectral Chebyshev diferansiyel matrisin diferansiyel denklemlerde çözümünün doğruluğunu araştırmak için, bir boyutlu halka şeklinde bir kanatçığın ısı problemi ele alınmıştır (3.16). Bu halkasal kanatçığı radyal yönde idare eden lineer adi diferansiyel denklem ve sınır koşulları

$$r^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + r \frac{\partial \theta}{\partial r} + r^2 c^2 \theta = 0, \quad 0.5 \leq r \leq 1 \quad (3.16)$$

$$\theta(0.5) = 1, \quad \theta'(1) = 0 \quad (3.17)$$

şeklinde verilmiş olsun. Bu diferansiyel denklemin analitik çözümü Bessel fonksiyonları kullanılarak

$$\theta(r) = C_1 I_0(cr) + C_2 K_0(cr) \quad (3.18)$$

olarak kolayca bulunabilir. Burada I_0 ve K_0 sırası ile sıfırıncı mertebeden birinci ve ikinci tip modifiye Bessel fonksiyonlarını göstermektedir. İntegrasyon sabitleri C_1 ve C_2 , sınır koşulları kullanılarak

$$C_1 = -\frac{K_0'(1)}{K_0(0.5)I_0'(1) - I_0(0.5)K_0'(1)} \quad (3.19)$$

$$C_2 = -\frac{I_0'(1)}{K_0(0.5)I_0'(1) - I_0(0.5)K_0'(1)} \quad (3.20)$$

şeklinde bulunur.

Pseudospectral Chebyshev diferansiyel matrisi kullanılarak lineer adi diferansiyel denklemin ayrıklaştırılması

$$r^2 (D_N^2 \theta) + r (D_N \theta) + r^2 c^2 \theta = 0 \quad (3.21)$$

$$[(r^2 I_N) D_N^2 + (r I_N) D_N + (r^2 c^2 I_N)] \theta = 0 \quad (3.22)$$

şeklinde yapılırsa denklemin lineer operatör matrisi L_N

$$L_N = [(r^2 I_N) D_N^2 + (r I_N) D_N + (r^2 c^2 I_N)] \quad (3.23)$$

olarak yazılabilir. Sınır koşulları, bu lineer operatör matrisine uygulanırsa yeni sistem matrisi

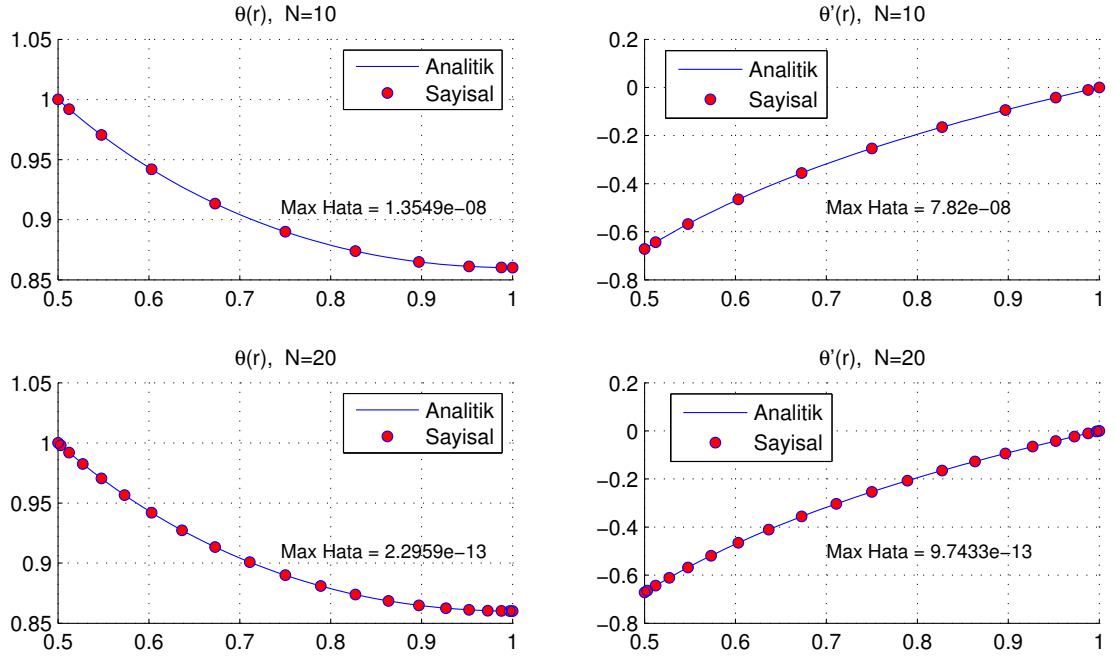
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \uparrow & & \\ \leftarrow & L_N(1:N-1,:) & & & \rightarrow \\ & & \downarrow & & \\ \leftarrow & D_N(N+1,:) & & & \rightarrow \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

olarak oluşturulur. Bu diferansiyel denkleminin Matlab programı, [20] kullanılarak aşağıdaki şekilde ısı problemine (3.16) uygun olarak yeniden kodlanmıştır.

```

% Bir Boyutlu Halka Şeklindeki Bir Kanatçığın Isı Analizi
clc,clear all
c=1; rr=0.5:0.01:1;
% Analitik Çözüm
C1=besselk(1, 1)/(besselk(0,0.5)*besseli(1,1)+besseli(0,0.5)*besselk(1,1));
C2=besseli(1, 1)/(besselk(0,0.5)*besseli(1,1)+besseli(0,0.5)*besselk(1,1));
TT_Analitik=C1*besseli(0,rr)+C2*besselk(0,rr);
TTprime_Analitik=C1*besseli(1,rr)-C2*besselk(1,rr);
for N = [10 20]
    [DN,r] = chebR(N);
    T_Analitik=C1*besseli(0,r)+C2*besselk(0,r);
    Tprime_Analitik=C1*besseli(1,r)-C2*besselk(1,r);
% Sayısal Çözüm
LN=diag(r.^2)*DN^2+diag(r)*DN-diag(r.^2*c^2);
LN(1,:)=zeros(1,length(r));LN(1,1)=1;
LN(end,:)=DN(N+1,:);
RHS=zeros(length(r),1); RHS(1)=1;
T_Sayisal=LN\RHS;
% Isı ve Türevi için Hata analizi
errorT = norm(T_Sayisal-T_Analitik,inf);
errorTprime = norm(DN*T_Sayisal-Tprime_Analitik,inf);
% Isı değeri
subplot('position',[.15 .66-.4*(N==20) .31 .28])
line(rr,TT_Analitik), hold on
plot(r,T_Sayisal,'bo','markersize',5,'MarkerFaceColor','r'),grid on
title(['T(r), N=' int2str(N)])
legend('Analitik','Sayisal')
% Isı akısının değeri
subplot('position',[.55 .66-.4*(N==20) .31 .28])
line(rr,TTprime_Analitik), hold on
plot(r,DN*T_Sayisal,'bo','markersize',5,'MarkerFaceColor','r'),grid on
legend('Analitik','Sayisal')
title(['T''(r), N=' int2str(N)])
text(0.7,-0.5,['Max Hata = ' num2str(errorTprime)],'FontSize',9)
text(0.1,-0.5,['Max Hata = ' num2str(errorT)],'FontSize',9)
end

```



Şekil 3.2 Bir boyutlu kararlı ısı iletimi ve türevinin grafiği

Şekil 3.2’te halka şeklindeki bir kanatçıktaki ısı ve ısı akısının sadece $N = 10$ nokta kullanıldığında sekiz basamağa kadar doğru sonuç verdiği görülmüştür. Ayrıca, kullanılan nokta sayısı arttırıldığında hatanın hızlı bir şekilde azaldığı da gözlenmiştir.

3.2 Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Pseudospektral Chebyshev Diferansiyel Matrisi ile Çözümü

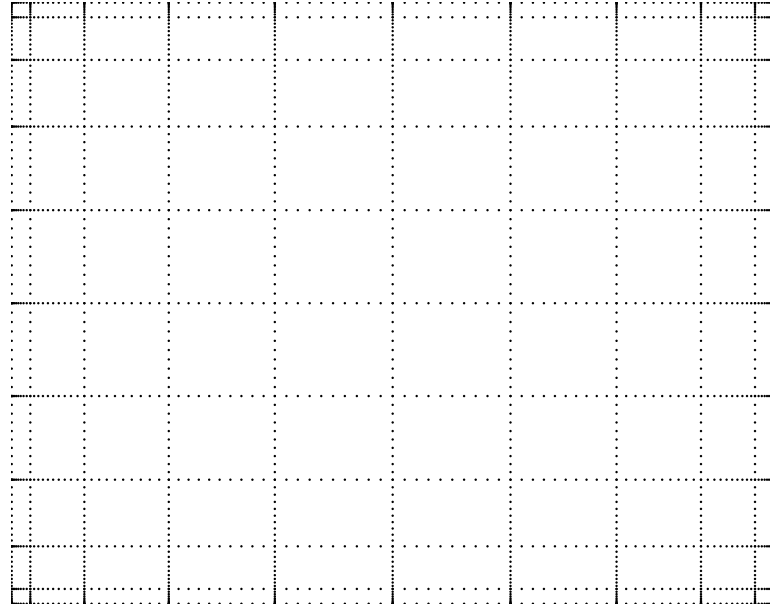
Önceki bölümde elde edilen Chebyshev diferansiyel matrisi, tek başına sadece doğrusal ve doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemlerin çözümünde kul-

lanılabilir. Chebyshev diferansiyel matrisinin kısmi diferansiyel denklemlerde kullanılabilmesi için, Chebyshev noktalarına bağlı örgü noktaları her bir uzay değişkeni için birbirinden bağımsız bir şekilde oluşturulmalıdır. Bu örgü tensör çarpımına bir örnektir.

$$(x_i, y_j), \quad 0 \leq i \leq N, \quad 0 \leq j \leq M \quad (3.25)$$

Burada örgü noktaları (Şekil 3.3)

$$x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right), \quad y_j = \cos\left(\frac{j\pi}{M}\right) \quad (3.26)$$



Şekil 3.3 Tensör örgü noktaları

biçiminde birbirinden bağımsız oluşturulur.

Bu tensör örgü sisteminde (Şekil 3.3) problemi çözebilmek için Kronecker çarpım olarak da bilinen tensör çarpımı kullanılacaktır.

Tanım 3.2.1 *A matrisi $p \times q$ ve B matrisi $r \times s$ boyutunda iki matris olsun. A ve B matrisinin Kronecker çarpımı, $(p \times r) \times (q \times s)$ boyutunda $p \times q$ bloktan oluşan $r \times s$ boyutunda bir matris olup $A \otimes B$ şeklinde gösterilir. Bu matrisin (i, j) . bloğu $a_{ij}B$ şeklindeki çarpımdan bulunur. Örneğin,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & | & 2a & 2b & | & 3a & 3b \\ b & d & | & 2b & 2d & | & 3b & 3d \\ - & - & | & - & - & | & - & - \\ 4a & 4b & | & 5a & 5b & | & 6a & 6b \\ 4b & 4d & | & 5b & 5d & | & 6b & 6d \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

olur. A ve B matrisinin Kronecker çarpımı Matlab paket programında $A \otimes B = \text{kron}(A, B)$ komutu ile sağlanır.

Teorem 3.2.1 *A matrisi $M \times M$ ve B matrisi $N \times N$ boyutunda iki matris ise*

$$\text{vec}(AYB) = (B^T \otimes A)\text{vec}(Y) \quad (3.28)$$

eşitliği vardır. Burada

$$\text{vec}(Y) = \begin{bmatrix} Y_{:,1}^T & \dots & Y_{:,N}^T \end{bmatrix}^T \quad (3.29)$$

Y matrisinin vektörleştirilmesini göstermekte, $Y_{:,j}$ ise Y matrisinin j. sütununu ifade etmektedir.

İki boyutlu Laplace probleminin

$$L[U] = U_{xx} + U_{yy} \quad (3.30)$$

Kronecker çarpımı, x ve y yönlerinde birbirinden bağımsız oluşturulan Chebyshev diferansiyel matrisleri kullanılarak aşağıdaki şekilde ayrıklaştırılabilir.

$$U = [u_{ij}] = [u(x_i, y_j)], \quad 0 \leq i \leq N, \quad 0 \leq j \leq M \quad (3.31)$$

şeklinde Laplace probleminin aranan çözüm matrisi olsun.

$D_N^2 = (D_N)(D_N)$ ve $D_M^2 = (D_M)(D_M)$ sırasıyla x ve y yönünde ikinci türeve karşılık gelen Chebyshev diferansiyel matrisleri olmak üzere, çözüm matrisinin x yönünde ikinci mertebeden türevi

$$D_N^2 U = D_N^2 \begin{bmatrix} U_{:,0} & \dots & U_{:,M} \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_N^2 U_{:,0} & \dots & D_N^2 U_{:,M} \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

ve benzer şekilde y yönünde ikinci mertebeden türevi

$$D_M^2 U^T = D_M^2 \begin{bmatrix} U_{:,0}^T & \dots & U_{:,N}^T \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_M^2 U_{:,0}^T & \dots & D_M^2 U_{:,N}^T \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

yada

$$(D_M^2 U^T)^T = U (D_M^2)^T \quad (3.34)$$

olarak yazılabilir. Teorem 3.2.1 kullanılarak

$$\text{vec}(D_N^2 U) = \text{vec}(D_N^2 U I_M) = (I_M \otimes D_N^2) \text{vec}(U) \quad (3.35)$$

ve

$$\text{vec}(U(D_M^2)^T) = \text{vec}(I_N U(D_M^2)^T) = (D_M^2 \otimes I_N) \text{vec}(U) \quad (3.36)$$

yazılabilir. Buradan da

$$\text{vec}(D_N^2 U + U(D_M^2)^T) = (I_M \otimes D_N^2 + D_M^2 \otimes I_N) \text{vec}(U) \quad (3.37)$$

bulunur. Sonuç olarak, iki boyutlu Laplace probleminin lineer matris operatörü

$$L_{NM} = (I_M \otimes D_N^2 + D_M^2 \otimes I_N) \quad (3.38)$$

şeklinde oluşturulur. Bu Kronecker çarpımı Matlab paket programında

$$L_{NM} = \text{kron}(I_M, D_N^2) + \text{kron}(D_M^2, I_N) \quad (3.39)$$

komutu ile sağlanır.

3.3 Isı Probleminin Pseudospektral Chebyshev Diferansiyel Matrisi ile Ayrıklaştırılması

3.3.1 Termal Özelliklerin Bir Yönde Değiştiği Isı Problemi

Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin bir uzay değişkenine üstel bir bağıntı ile bağlı olduğu durum (Durum-1) için kısmi diferansiyel denklemi (2.19) ve sınır koşulları (2.21)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} - c^2 \gamma \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + c^2 \frac{\partial \theta}{\partial \xi^2} + d = 0, \quad (0 < \eta < 1, \quad 0 < \xi < 1) \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta}(0, \xi) = -ae^{\gamma \xi}; \quad \theta(1, \xi) = G(\xi),$$

$$\theta(\eta, 0) = F(\eta); \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\eta, 1) = -e^{\gamma} B_i \theta(\eta, 1) \quad (3.41)$$

önceki bölümde verilmişti. Bu şekildeki değişim için diferansiyel denklemin analitik çözümü önceki bölümde detaylı olarak anlatılmıştı. Sayısal çözüm için diferansiyel denklemin (2.19) lineer matris operatörü, Kronecker çarpımı kullanılarak

$$L_{NM} = (D_N^2 \otimes I_N) - c^2 \gamma (I_M \otimes D_M) + c^2 (I_M \otimes D_M^2) \quad (3.42)$$

biçiminde oluşturulur. Sınır koşulları, lineer matris operatöründe aşağıdaki şekilde sisteme entegre edilirler.

- Dirichlet tip sınır koşullarında,

$$\theta(1, \xi) = G(\xi) \quad \text{ve} \quad \theta(\eta, 0) = F(\eta) \quad (3.43)$$

lineer matrisin $\eta = 1$ ve $\xi = 0$ noktalarında karşılık gelen satırları,

$$L_{NM}(1, \xi) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

$$L_{NM}(\eta, 0) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (3.44)$$

aynı boyutta birim matrisin birinci satırı ile değiştirilir. Bu noktalara karşılık gelen sağ taraf fonksiyonu da sınır koşullarında verilen $G(\xi)$ ve $F(\eta)$ fonksiyonlarına eşitlenir.

- Neumann tip sınır koşulunda ise,

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta}(0, \xi) = -ae^{\gamma \xi} \quad (3.45)$$

η yönündeki D_N Chebyshev diferansiyel matrisi kullanılarak lineer matrisin $\eta = 0$ noktasına karşılık gelen satırları,

$$L_{NM}(0, \xi) = D_N \otimes I_N \quad (3.46)$$

ile değiştirilir. Bu noktaya karşılık gelen sağ taraf fonksiyonu da sınır koşullarında verilen $-ae^{\gamma \xi}$ fonksiyonuna eşitlenir.

- Karışık tip sınır koşulunda,

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\eta, 1) = -e^{\gamma} B_i \theta(\eta, 1) \quad (3.47)$$

ξ yönündeki D_M Chebyshev diferansiyel matrisi kullanılarak lineer matrisin $\xi = 1$ noktasına karşılık gelen satırları,

$$L_{NM}(\eta, 1) = (D_M \otimes I_M) + e^{\gamma} B_i (I_M \otimes I_M) \quad (3.48)$$

ile değiştirilir.

3.3.2 Termal Özelliklerin İki Yönde Üstel Değiştiği Isı Problemi

Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin iki uzay değişkenine

$$k(x, y) = k_o e^{\alpha \frac{x}{L}} e^{-\gamma \frac{y}{W}}, \quad q(x, y) = q_o e^{\beta \frac{x}{L}} e^{-\gamma \frac{y}{W}} \quad (3.49)$$

üstel bir bağıntı ile bağlı olduğu durum (2. Durum) ve homojen olmayan sınır koşulları (2.15) ile birlikte kısmi diferansiyel denklem (2.14)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x,y) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(x,y) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = -q(x,y) \quad (0 < x < L, \quad 0 < y < W) \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,y) = \frac{q_o''}{k(0,y)}; \quad T(L,y) = g(y),$$

$$T(x,0) = f(x); \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x,W) = -\frac{h}{k(x,W)}[T(x,W) - T_\infty] \quad (3.51)$$

şeklinde verilmişti. Boyutsuzlaştırma parametreleri (2.18) kullanılarak diferansiyel denklem boyutsuzlaştırılırsa

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - c^2 \gamma \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + d_1(\eta) = 0, \quad (0 < \eta < 1, \quad 0 < \xi < 1) \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta}(0, \xi) = -ae^{\gamma \xi}; \quad \theta(1, \xi) = G(\xi),$$

$$\theta(\eta, 0) = F(\eta); \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\eta, 1) = -e^\gamma e^{-\alpha \eta} B_i \theta(\eta, 1) \quad (3.53)$$

biçiminde sabit katsayılı homojen olmayan kısmi diferansiyel denklemini bulunur. Burada

$$d_1(\eta) = -\frac{q_o L^2}{k_o(T_{max} - T_\infty)} e^{(\beta - \alpha)\eta} = -d e^{(\beta - \alpha)\eta} \quad (3.54)$$

η 'ya bağlı bir fonksiyondur. Bu kısmi diferansiyel denklemin (3.53) analitik çözümü mümkün ancak birinci duruma göre biraz daha karmaşıktır. Sistemin çözümü pseudospektral Chebyshev yöntemi ile yapılacaktır. Sayısal çözüm için diferansiyel denklemin (3.53) lineer matris operatörü, Kronecker çarpımı kullanılarak

$$L_{NM} = (D_N^2 \otimes I_N) + \alpha(D_N \otimes I_N) - c^2\gamma(I_M \otimes D_M) + c^2(I_M \otimes D_M^2) \quad (3.55)$$

biçiminde oluşturulur. Sınır koşulları da, önceki bölümde anlatılan şekilde sisteme entegre edilirler.

3.3.3 Termal Özelliklerin İki Yönde Keyfi Olarak Değiştiği Isı Problemi

Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin iki uzay değişkenine bağlı

$$k(x,y) = k_o e^{\alpha \frac{x}{L}} \left(\frac{y}{W}\right)^{-\gamma}, \quad q(x,y) = q_o \left(\frac{x}{L}\right)^3 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(\frac{y}{W}\right)^3 \left(1 - \frac{y}{W}\right) \quad (3.56)$$

keyfi olarak değiştiği karmaşık durum (3. Durum) ve homojen olmayan sınır koşulları (2.15) ile birlikte kısmi diferansiyel denklem (2.14)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x,y) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(x,y) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = -q(x,y) \quad (0 < x < L, \quad 0 < y < W) \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,y) = \frac{q_o''}{k(0,y)}; \quad T(L,y) = g(y),$$

$$T(x,0) = f(x); \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x,W) = -\frac{h}{k(x,W)} [T(x,W) - T_\infty] \quad (3.58)$$

şeklinde verilmişti. Boyutsuzlaştırma parametreleri (2.18) kullanılarak diferansiyel denklem boyutsuzlaştırılırsa

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{c^2 \gamma}{\xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + d_2(\eta, \xi) = 0, \quad (0 < \eta < 1, \quad 0 < \xi < 1) \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta}(0, \xi) = -a\xi^\gamma; \quad \theta(1, \xi) = G(\xi),$$

$$\theta(\eta, 0) = F(\eta); \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\eta, 1) = -e^{-\alpha\eta} B_i \theta(\eta, 1) \quad (3.60)$$

biçiminde sabit katsayılı homojen olmayan kısmi diferansiyel denklemi bulunur. Burada

$$d_2(\eta, \xi) = -\frac{q_o L^2}{k_o(T_{max} - T_\infty)} \eta^3 (1 - \eta) \xi^3 (1 - \xi) e^{-\alpha\eta} \xi^\gamma \quad (3.61)$$

η ve ξ 'ye bağlı bir fonksiyondur. Bu kısmi diferansiyel denklemin (3.60), pseudospektral Chebyshev yöntemi ile sayısal çözüm için lineer matris operatörü, Kronecker çarpımı kullanılarak

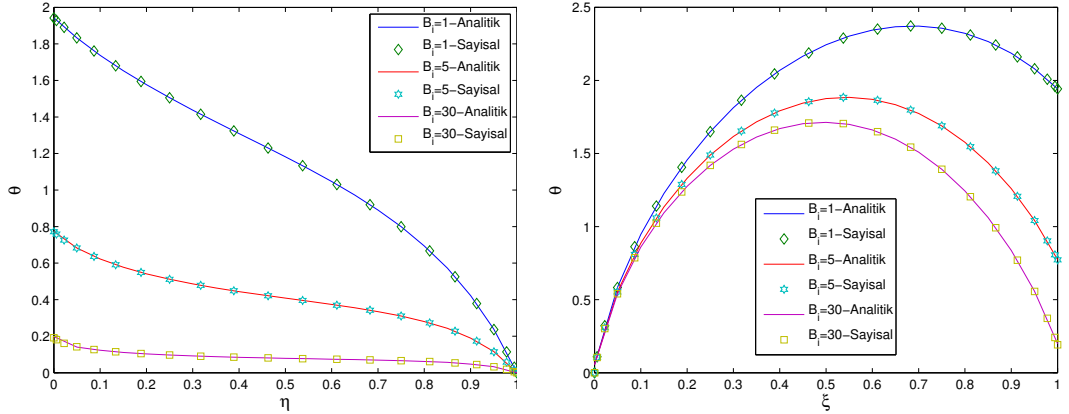
$$L_{NM} = (D_N^2 \otimes I_N) + \alpha(D_N \otimes I_N) - \left(\frac{c^2 \gamma}{\xi} \otimes I_M \right) (I_M \otimes D_M) + c^2 (I_M \otimes D_M^2) \quad (3.62)$$

biçiminde oluşturulur. Sınır koşulları da, önceki bölümde anlatılan şekilde sisteme entegre edilirler.

4. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu çalışmada, ısı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretim parametresinin bir veya iki uzay değişkenine göre değiştiği durumlarda sıcaklık dağılımı iki boyutlu kararlı bölgede ele alınmıştır. Problemin mümkün olan durumlar için analitik çözümü yapılmış, Analitik çözümün mümkün olmadığı durumlarda ise sayısal olarak pseudospektral Chebyshev yöntemi ile çözüm yapılmıştır. Sıcaklık dağılımının bilinmediği $\xi = 1$ ve $\eta = 0$ cidarlarında, sıcaklık değerlerinin Biot sayısı (B_i), boyutsuz ısı akışı (a) ve hacimsel ısı üretim (d) parametreleri için nasıl değiştiği incelenmiştir.

Yöntemin doğruluğunu göstermek için, analitik çözümün de mümkün olduğu 1. Durum'da problemin analitik ve sayısal çözümü yapılmıştır. Bu çözümlerden elde edilen sıcaklık dağılım değerleri $\xi = 1$ ve $\eta = 0$ cidarlarında farklı parametreler için karşılaştırılmış ve sonuçların örtüştüğü Şekil 4.1-Şekil 4.4 gösterilmiştir.



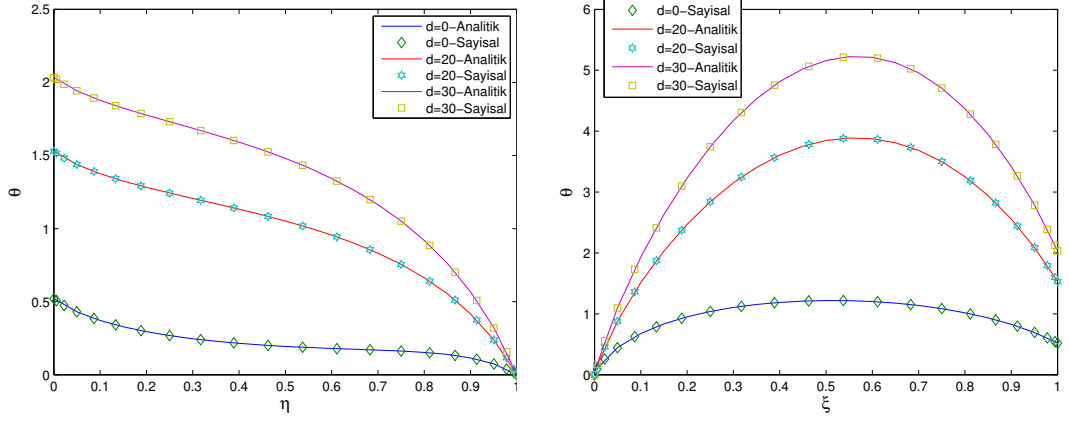
(a) $\xi = 1$ cidarındaki boyutsuz sıcaklık.

(b) $\eta = 0$ cidarındaki boyutsuz sıcaklık.

Şekil 4.1 Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin bir yönde exponansiyel olarak değiştiği durumda, $a = 1.5$ ve $d = 5$ için farklı B_i sayılarında boyutsuz sıcaklık dağılımı.

Şekil 4.1'de sıcaklık dağılımının $\xi = 1$ ve $\eta = 0$ cidarlarında, $a = 1.5$ ve $d = 5$ değerleri için farklı Biot sayıları ile değişimi verilmiştir. $B_i = 1, 5, 30$ değerleri için hem sayısal hem de analitik hesaplamalar yapılmış ve çözümlerin uyumlu olduğu görülmüştür. Biot sayısı arttıkça, doğal olarak $\xi = 1$ cidarında (Şekil 4.1a) ısı transferi artacağından duvar üzerindeki sıcaklık ortam sıcaklığına yaklaşmaktadır. Bununla

birlikte, Biot sayısının küçük değerlerinde hacimsel ısı üretimi ve ısı akısından dolayı duvar sıcaklığı aşırı derecede yükselmektedir. Şekil 4.1a'de Bi sayısı arttıkça $\theta = 0$ olmakta, yani $\xi = 1$ 'de cidar sıcaklığının ortam sıcaklığına yaklaştığı açıkça görülmektedir. Benzer şekilde $\eta = 0$ cidarında da Biot sayısı arttıkça (Şekil 4.1b) sıcaklık değerleri düşmektedir.

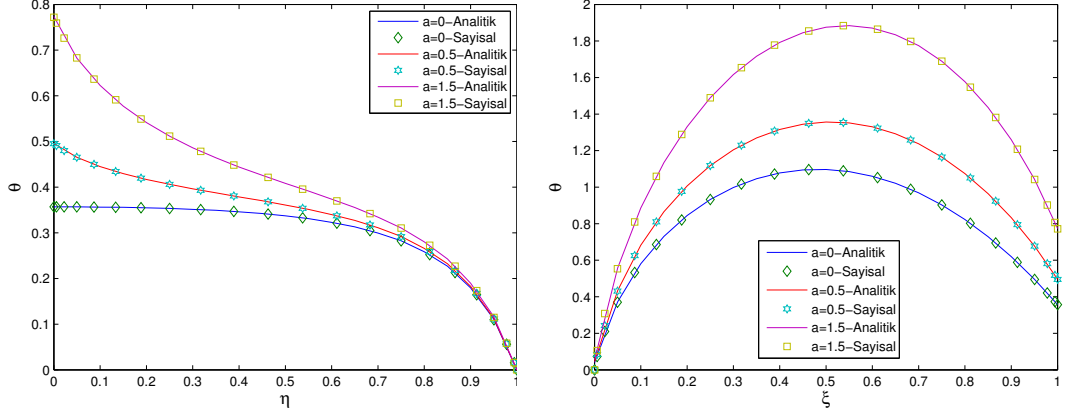


(a) $\xi = 1$ cidarındaki boyutsuz sıcaklık.

(b) $\eta = 0$ cidarındaki boyutsuz sıcaklık.

Şekil 4.2 Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin bir yönde eksponansiyel olarak değiştiği durumda, $B_i = 5$ ve $a = 1.5$ için farklı boyutsuz hacimsel ısı üretim parametresinde boyutsuz sıcaklık dağılımı.

Şekil 4.2'te Biot sayısı ve boyutsuz ısı akısı sabit bırakılarak ($B_i = 5, a = 1.5$), $\xi = 1$ ve $\eta = 0$ cidarlarında sıcaklık dağılımının boyutsuz hacimsel ısı üretimi ile değişimi verilmiştir. Şekil 4.2a'te $\xi = 1$ cidarlarında sıcaklık dağılımı incelendiğinde, hacimsel ısı üretim miktarı arttıkça cidardaki sıcaklık dağılımının hızlı bir biçimde arttığı görülmüştür. Hacimsel ısı üretiminin olmadığı durumda ($d = 0$) duvar üzerindeki sıcaklık dağılımının çok fazla değişmediği gözlemlenmiştir. Şekil 4.2b'te $\eta = 0$ cidarında hacimsel ısı üretimi arttıkça, duvar sıcaklık değişiminin sabit ısı akısının etkisiyle oldukça yüksek değerlere ulaştığı görülmüştür. Cidar sıcaklık dağılımı Şekil 4.1b'de görüldüğü gibi bir maksimum değerden geçmektedir. Maksimum sıcaklık değerleri, $\eta = 0$ cidarının orta noktasına yakın elde edilmektedir. Isı üretiminin olmadığı durumda ise ($d = 0$) $\eta = 0$ cidarında sıcaklık dağılımındaki değişimin az olduğu gözlemlenmiştir.



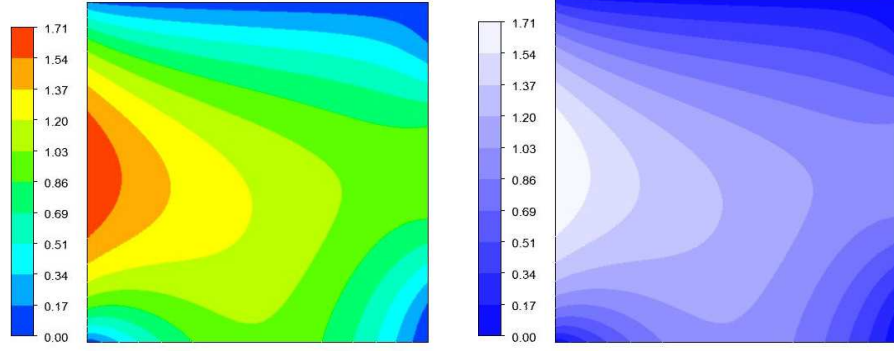
(a) $\xi = 1$ cidarındaki boyutsuz sıcaklık.

(b) $\eta = 0$ cidarındaki boyutsuz sıcaklık.

Şekil 4.3 Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin bir yönde exponansiyel olarak değiştiği durumda, $B_i = 5$ ve $d = 5$ için farklı boyutsuz ısı akı parametresinde boyutsuz sıcaklık dağılımı.

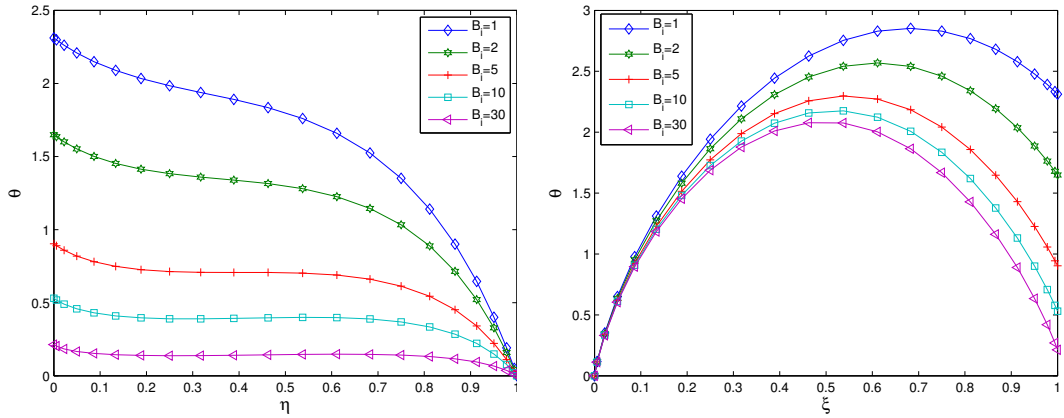
Şekil 4.3'de Biot sayısı ve hacimsel ısı üretimi sabit bırakılarak ($B_i = 5, d = 5$), $\xi = 1$ ve $\eta = 0$ cidarlarında sıcaklık dağılımının boyutsuz ısı akısına göre değişimi verilmiştir. Şekil 4.3a'da $\xi = 1$ cidarlarında, ısı akısı değeri azaldıkça sıcaklık değerlerinin düştüğü görülmüştür. Isı akısının olmadığı durumda ($a = 0$) ise, sıcaklık değerlerinde değişimin az olduğu görülmüştür. Şekil 4.3b'de $\eta = 0$ cidarlarında ısı akısı değeri artıkça sıcaklıkta artmaktadır. Sıcaklık değerleri Biot sayısına göre değişim göstermektedir. Bu verilen değerler $B_i = 5$ için çizildiğinden $\xi = 1$ cidarlarında soğuma durumuna göre farklılık gösterecektir. B_i sonsuza giderken $\xi = 1$ cidarında sıcaklık değerlerinin $\theta = 0$ değerine yaklaşacağı, yani duvar sıcaklığının ortam sıcaklığına eşit olacağı aşıkardır. Sistemin sıcaklık dağılım değerleri için esas belirleyici parametrenin, ısı akısından ziyade hacimsel ısı üretimin olduğu Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'den açıkça görülmektedir.

Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin y yönünde exponansiyel olarak değişmesi durumunda, iki boyutlu sıcaklık dağılımının analitik ve sayısal çözümünden elde edilen eşyükselti eğrileri Şekil 4.4'te gösterilmiştir. Eş yükselti eğrilerinin de uyumlu olduğu gözlemlenmiştir.



Şekil 4.4 Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin y yönünde exponansiyel olarak değiştiği durumda $a = 1.5$, $d = 5$ ve $B_i = 30$ için boyutsuz sıcaklık dağılımı. Sağdaki şekil analitik çözümü, soldaki şekil de sayısal çözümü göstermektedir.

Şekil 4.5- Şekil 4.8’de ısı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin hem x hem de y yönünde exponansiyel olarak değiştiği durumda (2. Durum), $\xi = 1$ ve $\eta = 0$ cidarlarında farklı parametreler için elde edilen sonuçlar verilmiştir. Şekil 4.5’de sıcaklık dağılımının $a = 1.5$ ve $d = 5$ değerlerinde farklı Biot sayıları için değişimi verilmiştir. Biot sayısı arttıkça, duvar sıcaklığının ortam sıcaklığına yaklaştığı Şekil 4.5a’da görülmektedir. Şekil 4.5b’de ise Biot sayısı azaldıkça ortama transfer edilen ısı azalacağından duvar sıcaklığı doğal olarak artacaktır.

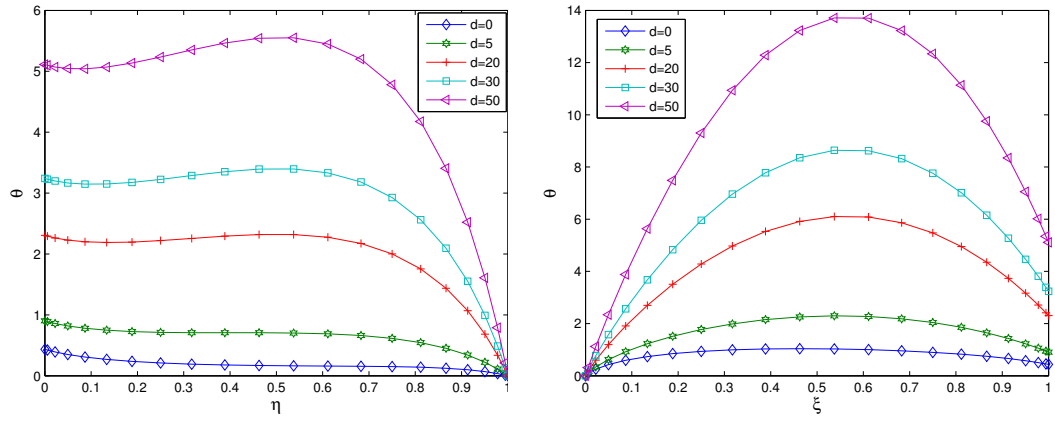


(a) $\xi = 1$ cidarındaki boyutsuz sıcaklık.

(b) $\eta = 0$ cidarındaki boyutsuz sıcaklık.

Şekil 4.5 Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin iki yönde exponansiyel olarak değiştiği durumda, $a = 1.5$ ve $d = 5$ değerlerinde farklı B_i sayıları için boyutsuz sıcaklık dağılımı.

Şekil 4.6'de Biot sayısı ve boyutsuz ısı akısı sabit bırakılarak ($B_i = 5, a = 1.5$), $\xi = 1$ ve $\eta = 0$ cidarlarında sıcaklık dağılımının boyutsuz hacimsel ısı üretimi ile değişimi verilmiştir. Şekil 4.6a'te $\xi = 1$ cidarlarında sıcaklık dağılımı incelendiğinde, hacimsel ısı üretim miktarı artıkcı cidardaki sıcaklık dağılımının hızlı bir biçimde arttığı görülmüştür. Ayrıca, hacimsel ısı üretiminin olmadığı durumda ($d = 0$), duvar üzerindeki sıcaklık dağılımı değişiminin cidar boyunca çok az olduğu gözlemlenmiştir. Şekil 4.6b'te $\eta = 0$ cidarında hacimsel ısı üretimi artıkcı, duvar sıcaklık değişiminin sabit ısı akısının etkisiyle çok yüksek değerlere ulaştığı görülmüştür. Isı üretiminin olmadığı durumda ise ($d = 0$) $\eta = 0$ cidarında sıcaklık dağılımındaki değişimin ısı üretiminin olduğu durumlara göre az olduğu gözlenmiştir.

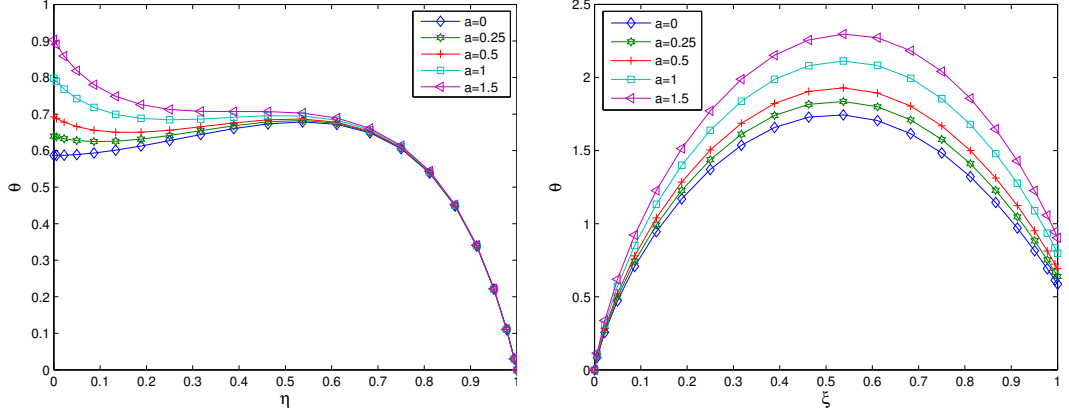


(a) $\xi = 1$ cidarındaki boyutsuz sıcaklık.

(b) $\eta = 0$ cidarındaki boyutsuz sıcaklık.

Şekil 4.6 Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin iki yönde exponansiyel olarak değiştiği durumda, $B_i = 5$ ve $a = 1.5$ için farklı boyutsuz hacimsel ısı üretim parametresinde boyutsuz sıcaklık dağılımı.

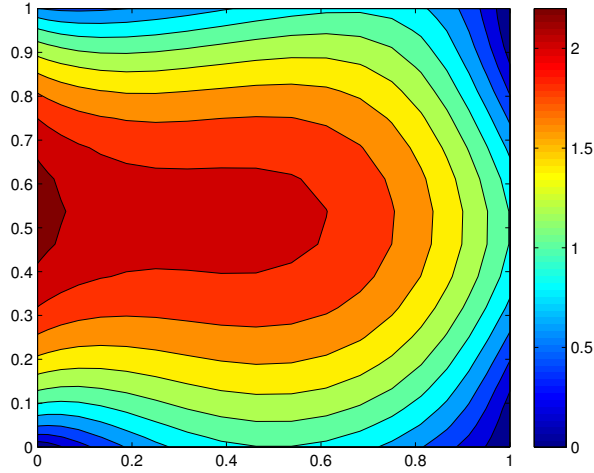
Şekil 4.7'de Biot sayısı ve hacimsel ısı üretimi sabit bırakılarak ($B_i = 5, d = 5$), $\xi = 1$ ve $\eta = 0$ cidarlarında sıcaklık dağılımının boyutsuz ısı akısına göre değişimi verilmiştir. Şekil 4.7a'da $\xi = 1$ cidarlarında, ısı akısı değeri azaldıkça sıcaklık değerlerinin düştüğü görülmüştür. Isı akısının olmadığı durumda ($a = 0$) ise, sıcaklık değerlerinde değişimin az olduğu görülmüştür. Şekil 4.7b'de $\eta = 0$ cidarlarında ısı akısı değeri artıkcı sıcaklıkta artmaktadır.



(a) $\xi = 1$ cidarındaki boyutsuz sıcaklık.

(b) $\eta = 0$ cidarındaki boyutsuz sıcaklık.

Şekil 4.7 Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin iki yönde exponansiyel olarak değiştiği durumda, $B_i = 5$ ve $d = 5$ için farklı boyutsuz ısı akış parametresinde boyutsuz sıcaklık dağılımı.

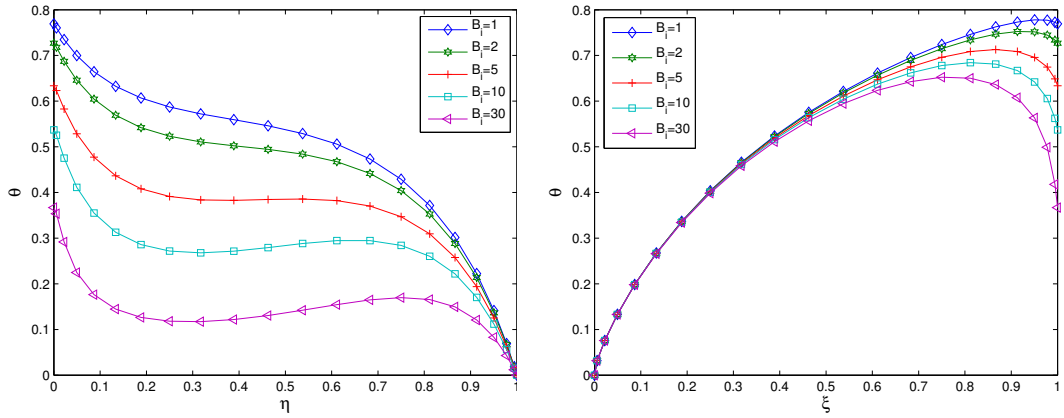


Şekil 4.8 Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin iki yönde exponansiyel olarak değiştiği durumda $a = 1.5$, $d = 5$ ve $B_i = 10$ için boyutsuz sıcaklık dağılımı.

Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin hem x hem de y yönünde exponansiyel olarak değişmesi durumunda iki boyutlu sıcaklık dağılımının eşyüksekti eğrileri Şekil 4.8'de gösterilmiştir.

Şekil 4.9- Şekil 4.10'de ısı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin hem x hem de y yönünde keyfi olarak değiştiği durumda (3. Durum), $\xi = 1$ ve $\eta = 0$ cidar-

larında farklı parametreler için elde edilen sonuçlar verilmiştir. Şekil 4.9'de sıcaklık dağılımının $a = 1.5$ ve $d = 5$ değerlerinde farklı Biot sayıları için değişimi verilmiştir. Biot sayısı artıkça, duvar sıcaklığının ortam sıcaklığına yaklaştığı Şekil 4.9a'da görülmektedir. Şekil 4.9b'de ise Biot sayısı azaldıkça ortama transfer edilen ısı azalacağından duvar sıcaklığı doğal olarak artacaktır. Ancak, keyfi olarak seçilen ısı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretim parametresinin (Şekil 2.5) $\xi = 0$ civarında değerleri sıfıra yakın olduğundan, bu bölgelerde Biot sayısının değişimi sıcaklık dağılımını çok fazla etkilemediği Şekil 4.9b'de gözlemlenmiştir.

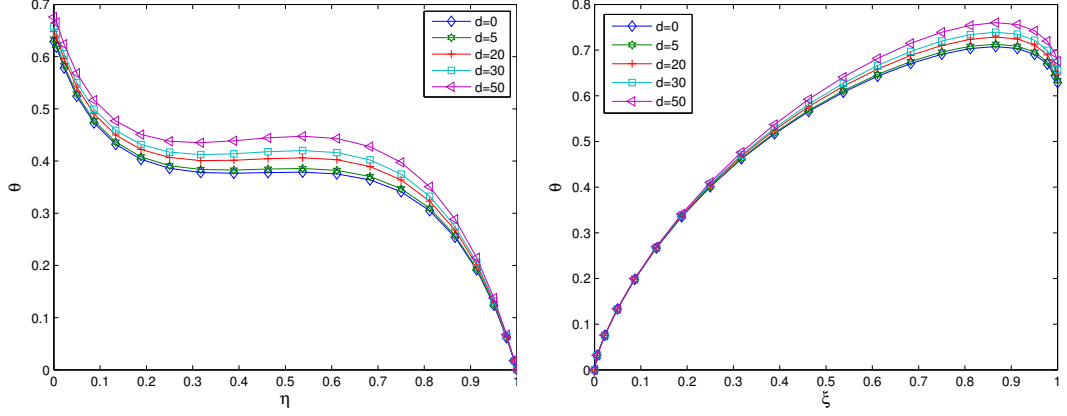


(a) $\xi = 1$ cidarındaki boyutsuz sıcaklık.

(b) $\eta = 0$ cidarındaki boyutsuz sıcaklık.

Şekil 4.9 Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin iki yönde keyfi olarak değiştiği durumda, $a = 1.5$ ve $d = 5$ için farklı B_i sayılarında boyutsuz sıcaklık dağılımı.

Şekil 4.10'de Biot sayısı ve boyutsuz ısı akısı sabit bırakılarak ($B_i = 5, a = 1.5$), $\xi = 1$ ve $\eta = 0$ cidarlarında sıcaklık dağılımının boyutsuz hacimsel ısı üretimi ile değişimi verilmiştir. Şekil 4.10'da $\xi = 1$ cidarlarında sıcaklık dağılımı incelendiğinde, hacimsel ısı üretim miktarı arttıkça cidardaki sıcaklık dağılımının seçilen keyfi parametrelere dolaylı olarak çok az arttığı görülmüştür. Şekil 4.10b'de $\eta = 0$ cidarında hacimsel ısı üretimi arttıkça, duvar sıcaklık değişiminin sabit ısı akısının etkisiyle keyfi seçilen parametrelere dolaylı olarak çok az arttığı görülmüştür.

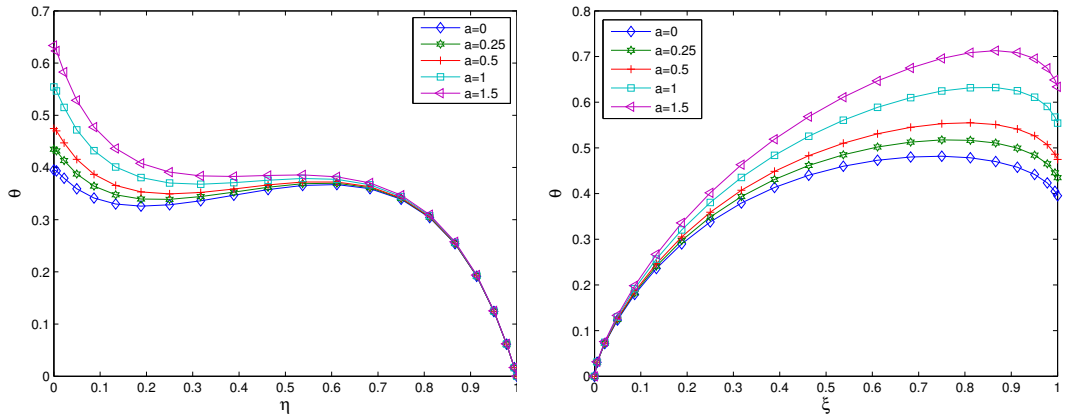


(a) $\xi = 1$ cidarındaki boyutsuz sıcaklık.

(b) $\eta = 0$ cidarındaki boyutsuz sıcaklık.

Şekil 4.10 Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin iki yönde keyfi olarak değiştiği durumda, $B_i = 5$ ve $a = 1.5$ için farklı boyutsuz hacimsel ısı üretim parametresinde boyutsuz sıcaklık dağılımı.

Şekil 4.11'de Biot sayısı ve hacimsel ısı üretimi sabit bırakılarak ($B_i = 5, d = 5$), $\xi = 1$ ve $\eta = 0$ cidarlarında sıcaklık dağılımının boyutsuz ısı akısına göre değişimi verilmiştir. Şekil 4.11a'da $\xi = 1$ cidarlarında, ısı akısı değeri azaldıkça sıcaklık değerlerinin düştüğü görülmüştür. Isı akısının olmadığı durumda ($a = 0$) ise, sıcaklık değerlerinde değişimin az olduğu gözlemlenmiştir. Şekil 4.11b'de $\eta = 0$ cidarlarında ısı akısı değeri artıkça sıcaklıkta artmaktadır.

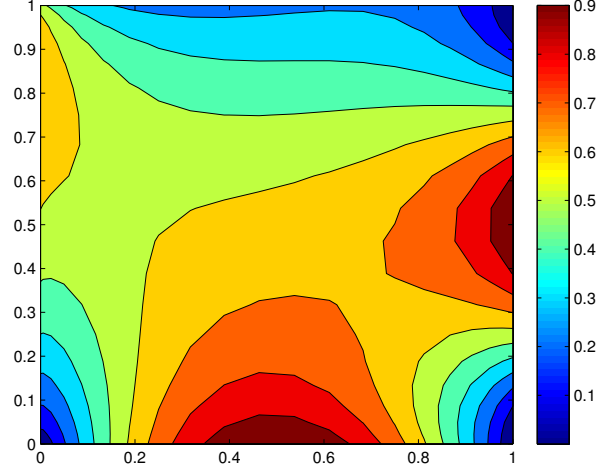


(a) $\xi = 1$ cidarındaki boyutsuz sıcaklık.

(b) $\eta = 0$ cidarındaki boyutsuz sıcaklık.

Şekil 4.11 Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin iki yönde keyfi olarak değiştiği durumda, $B_i = 5$ ve $d = 5$ için farklı boyutsuz ısı akış parametresinde boyutsuz sıcaklık dağılımı.

Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin hem x hem de y yönünde keyfi olarak değişmesi durumunda iki boyutlu sıcaklık dağılımının eşyüksele eğrileri Şekil 4.12’te gösterilmiştir.



Şekil 4.12 Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin iki yönde exponansiyel olarak değiştiği durumda $a = 1.5$, $d = 5$ ve $B_i = 10$ için boyutsuz sıcaklık dağılımı.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, ısı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretim parametresinin bir veya iki uzay değişkeni boyunca değiştiği kabul edilen, anisotropik iki boyutlu ısı transfer probleminin en genel sınır koşulları altında analitik ve sayısal çözümü ele alınmıştır. Isı iletim katsayısı ile hacimsel ısı üretiminin değişken olması, bazı özel durumlar hariç sistemi idare eden kısmi diferansiyel denklemin değişken katsayılı olmasına sebep olmaktadır. Dolayısıyla ile sınırlı durumlarda analitik çözüm yapılabilmektedir. Sistemin sayısal çözümü, yüksek hassasiyetli çözümler elde edilen pseudospektral Chebyshev yöntemi ile çözüm yapılmıştır. Analitik çözümün mümkün olduğu, yani ısı iletkenlik ve hacimsel ısı üretiminin tek bir uzay değişkeni yönünde üstel olarak değiştiği durumda hem analitik hem de sayısal çözümleme yapılarak yöntemin doğruluğu gösterilmiştir. Analitik çözümün zor veya mümkün olmadığı durumlarda belli parametre değerleri için sayısal çözümler yapılmış, sonuçlar şekiller üzerinde gösterilmiştir. Genel olarak tüm durumlarda elde edilen sonuçlara göre, hacimsel ısı üretiminin sıcaklık dağılımına etkisinin ısı iletim katsayısından daha fazla olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca kullanılan sayısal yöntemin, ısı iletim denklemlerinin çözümünde pratik ve etkili bir yöntem olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] Zedan, M., Schneider, G. E., A physical approach to the finite-difference solution of the conduction equation in generalized coordinates, Numerical Heat Transfer, Part A, 5, pp. 1-19, 1982.
- [2] Comini, G., vd., Finite element solution on nonlinear heat conduction problems with special reference to phase change, International Journal of Number Methods in Engineering, 8, pp. 613-624, 1974.
- [3] Wrobel, L. C., Aliabadi, M. H., Boundary Element Method, John Wiley and Sons, USA, 2002.
- [4] Hsieh, M.H., Ma, C.C., Analytical investigations for heat cond. prob. in anisotropic thin-layer media with embedded heat sources, International Journal of Heat and Mass Transfer, 45, pp. 4117-4132, 2002.
- [5] Ma, C.C., Chang, S.W., Analytical exact solutions of heat conduction problems for anisotropic multi-layered media, International Journal of Heat and Mass Transfer, 47, pp. 1643-1655, 2004.
- [6] Mera, N.S., vd., A comparison of boundary element method formulations for anisotropic heat conduction problems, Engineering Analysis with Boundary Elements, 25, pp. 115-28, 2001.
- [7] Florez, W.F., Power, H., Comp. between cont. and discont. BE in multidomain dual reciprocity met. for the sol. of 2D Navier-Stokes eqns., Engineering Analysis with Boundary Elements, 25, pp. 57-69, 2001.
- [8] Tadeu, A., Antonio, J., Use of constant, linear and quadratic boundary elements in 3D wave diffraction analysis, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2, pp.131-44, 2000.
- [9] Wang, H., vd., A new meshless method for steady-state heat conduction problems in anisotropic and inhomogeneous media, Archive of Applied Mechanics , 74 , pp. 563–579, 2005.
- [10] Sladek, J., vd., Meshless local Petrov-Galerkin method for heat conduction problem in an anisotropic medium, CMES, Computer Modeling in Engineering and Sciences, 6, pp. 309-318, 2004.
- [11] Hsieh, M.H., Ma, C.C., Analy. investigations for heat conduct. probs. in

- anisotropic thin-layer media with embedded heat sources, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45, pp. 4117-4132, 2002.
- [12] Haji-Sheikh, A., vd., Steady-state heat conduction in multi-layer bodies, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46, pp. 2363-2379, 2003.
- [13] Shiah, Y.C., Tan, C.L., BEM treatment of two-dimensional anisotropic field problems by direct domain mapping, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28, pp. 347-351, 1997.
- [14] Shiah, Y.C., Tan, C.L., BEM treatment of three-dimensional anisotropic field problems by direct domain mapping, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28, pp. 43-52, 2004.
- [15] Shiah, Y.C., vd., Heat conduction in multiply adjoined anisotropic media with embedded point heat sources, *Journal of Heat Transfer*, 128 , pp. 207-214, 2006.
- [16] Shiah, Y.C., Lee, B.J., Boundary element modeling of 3-D anisotropic heat conduction involving arbitrary volume heat source, *Mathematical and Computer Modelling*, 54 , pp. 2392-2402, 2011.
- [17] Jiji, L.M., *Heat Conduction*, third ed. Springer, Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [18] Gottlieb, D., Hussaini, M.Y., Orszag, S.A., *Introduction: Theory and Applications of Spectral Methods*, SIAM, USA, 1984.
- [19] Voigt, R.G., Gottlieb, D., Hussaini, M.Y., *Spectral Methods for Partial Differential Equations*, SIAM, USA, 1984.
- [20] Trefethen, L.N., *Spectral Methods in Matlab*, SIAM, USA, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

1. **Adı Soyadı** : Ramazan YILDIRIM
2. **Doğum Tarihi** : 20.3.1989
3. **Ünvanı** : Matematik Öğretmeni
4. **Öğrenim Durumu** :

Derece	Alan	Üniversite	Yıl
Lisans	Matematik	Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi	2012

5. İş Tecrübesi:

Görev Ünvanı	Görev Yeri	Yıl
Matematik	Mustafa Özden Ortaokulu, Osmaniye	2017