DUAL LORENTZ UZAYINDA PARALEL REGLE YÜZEYLER VE BAZI KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİ

ÖZCAN BEKTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL LORENTZ UZAYINDA PARALEL REGLE YÜZEYLER VE BAZI KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİ

ÖZCAN BEKTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

AKADEMİK DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT

Ordu-2010

T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma jürimiz tarafından ..../...../....... tarihinde yapılan sınav ile Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT

Üye : Yrd. Doç. Dr. Selahattin MADEN

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..../..../2010

Yrd. Doç. Dr. BeyhanTAŞ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

Bu çalışma dört bölüm halinde düzenlenmiştir. Giriş bölümünde çalışmanın amacı ve konunun ele alınma nedeni tartışıldı. Genel bilgiler bölümünde diferensiyel geometriden temel kavramlara yer verildi. Materyal ve metot bölümünde birim dual küresel eğrilere E^3, 3- boyutlu Öklid uzayında karşılık gelen paralel regle yüzeylerin integral invaryantları verildi.

Bulgular bölümü çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde Dual Lorentz uzayında kapalı dual timelike bir eğriye karşılık gelen paralel regle yüzey tanımlanarak, elde edilen yüzeyin integral invaryantları ve bunlar arasındaki bağıntılar hesaplandı.

Anahtar Sözcükler: Paralel Regle Yüzey, Birim Dual Küre, Dual Lorentz Uzayı,

ABSTRACT

This study consists of four fundamental chapters. In the first chapter, it is discussed aim of and why this study is taken into consideration. In the second chapter, the basıc concepts of differantial geometry have been pointed out. In the third chapter, The integral invariants of the parallel ruled surfaces in the 3-dimensional Euclidean space E^3 corresponding to the unit dual spherical parallel curves were given.

In the fourth chapter is the orijinal part of the study. In this chapter, firstly, the parallel ruled surfaces corresponding to closed dual timelike curve was described, the integral invariants of the parallel ruled surfaces corresponding to closed dual timelike curve was calculated and the relations between the integral invariants were found.

Key Words: Paralel Ruled Surface, Unit Dual Curve, Dual Lorentzian Space.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca beni her aşamada yönlendiren, bilgi ve tecrübeleriyle yardımlarını esirgemeyen aynı zamanda danışmanlığımı yapan Saygıdeğer Hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT' a, her türlü yardım ve önerileriyle varlığını ve desteğini hep arkamda hissettiğim Saygıdeğer Hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Selahattin MADEN'e ve maddi, manevi her yönden daima yanımda olan Canım Aileme tüm içtenliğimle en derin saygı, en candan minnet ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

1.GİRİŞ

E^3, 3 – boyutlu Öklid uzayı ve IL^3, 3 – boyutlu Lorentz uzayında regle yüzey ile ilgili temel kavramlar bir çok Diferensiyel Geometri kitabında bulunmaktadır. Bunlardan bazıları **Hacısalihoğlu** “Diferensiyel Geometri”, **Erim** “Diferensiyel Geometri Dersleri”, **Şenatalar** “Diferensiyel Geometri (Eğriler ve Yüzeyler Teorisi)”, **Birman ve Nomizu** “Trigonometry in Lorentzian Geometry” , **O’neill** “Semi Riemann Geometry” ve **Ratcliffe** “Foundations of Hyperbolic Manifolds” dır.

1850’li yıllarda Dual sayı kavramı W.K. Clifford tarafından tanımlanmıştır. Dual sayılara ait temel kavramlar **Hacısalihoğlu** “Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi” ve **Müler** “Kinematik Dersleri” kitaplarında yer almaktadır.

Birim dual kürenin dual noktaları ile çizgiler uzayı arasındaki ilişkiyi ortaya çıkaran E. Study sayesinde yeni fikirlerin önü açılmıştır. **Hacısalihoğlu** “The Pitch of a Closed Ruled Surface” isimli çalışmasında regle yüzeyin açılım uzunluklarını, **Gürsoy** “The Dual Angle of Pitch of a Closed Ruled Surface” isimli makalesinde regle yüzeyin dual açılım açılarını, **Çalışkan ve Güneş** “Dual Centrode Eğrisi Üzerine” isimli çalışmasında dual centrode eğrilerine çizgiler uzayında karşılık gelen regle yüzeyin integral invaryantlarını, **Yapar** “On The Curvature Motion” isimli makalesinde dual küresel eğrilerin hareketlerini ve **Şenyurt** “Paralel Regle Yüzeyler ve Bazı Karakteristik Özellikleri” isimli doktora tezinde birim dual küresel eğrilere E^3, 3- boyutlu Öklid uzayında karşılık gelen paralel regle yüzeylerin bazı karakteristik özelliklerini hesaplamışlardır.

Ayyıldız, Çöken ve Yücesan “On The Dual Darboux Rotation Axis of The Spacelike Dual Space Curve” ve “On The Dual Darboux Rotation Axis of The Timelike Dual Space Curve” isimli makalelerinde dual spacelike ve dual timelike eğrilerin darboux dönme eksenlerini, **Uğurlu** “On The Geometry of Timelike Surfaces” isimli makalesinde timelike yüzeylerin geometrisini ve **Turgut** “3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler” isimli çalışmasında spacelike ve timelike regle yüzeyleri çalışmışlardır.

Bu çalışmada ise Dual Lorentz uzayında $\vec{U}(t)$ birim dual timelike vektörün birim dual küre üzerinde çizdiği dual eğriye çizgiler uzayında (3 – boyutlu Öklid uzayı) karşılık gelen kapalı regle yüzeyin integral invaryantları hesaplanmıştır. $\vec{U}(t)$ dual timelike vektörü ile sabit $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual açısı yapan

$$\vec{V} = \cosh\Phi\overrightarrow{U_1} + \sinh\Phi\overrightarrow{U_3}$$

dual timelike vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği $\vec{V}(t)$ dual kapalı timelike eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen paralel regle yüzey tanımlanarak bu yüzeyin integral invaryantları hesaplanmıştır. Ayrıca dual çatılar arasındaki geçişten yararlanarak Darboux vektörü yönündeki birim vektörlerin dual küre üzerinde çizdiği kapalı eğrilere karşılık gelen kapalı regle yüzeylerin invaryantları bulunmuş ve bunlar arasındaki ilişkiler ifade edilmiştir.

2.GENEL BİLGİLER

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramalar

Tanım 2.1.1: $A \neq \emptyset$ bir cümle ve V de $\Im$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $f\ : A\, x\, A \to V$ fonksiyonu aşağıdaki önermeleri sağlarsa A ya V ile birleştirilmiş bir **afin uzay** denir:

$\boldsymbol{A_1}$**)** $\forall\ P, Q, R \in A$ için $f\left(P,Q\right) + f\left(Q,R\right) = f\left(P,R\right)$

$\boldsymbol{A_2}$**)** $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f\left(P,Q\right) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır. $P, Q \in A$ için $f\left(P,Q\right) = \overrightarrow{PQ}$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.2: V bir vektör uzayı ve A da V ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, P_2, ..., P_n \in A$ noktaları için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ cümlesi V nin bir bazı ise $\left\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n\right\}$ nokta $\left(n+1\right)$ - lisine, A afin uzayının bir **afin çatısı** denir. Burada P_0 noktasına çatının **başlangıç noktası** ve $P_i,\ 1 \leq\ i \leq\ n,$ noktalarına da çatının **birim noktaları (uç noktaları)** denir. Eğer $boyV =\ n$ ise A ya $\boldsymbol{n}$ - **boyutlu afin uzay** denir.

Tanım 2.1.3: A bir afin uzay ve V de A ile birleşen bir vektör uzayı olsun.

$$\langle , \rangle : V \times V \to IR \quad (x,\ y) \to \langle x, y \rangle$$

reel değerli fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu fonksiyona **iç çarpım fonksiyonu** denir: $\forall\, x, y, z \in V$ için

***i*)** Bilineerlik Aksiyomu

$$\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle,$$
$$\langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle$$

***ii*)** Simetri Aksiyomu

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

***iii*)** Pozitif Tanımlılık (kararlılık) Aksiyomu

$$\langle x, x \rangle > 0\,,\ \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$$

Örnek 2.1.1: $\langle , \rangle : IR^2 \times IR^2 \to IR,$

$$\left(X,\ Y\right) \to \langle X, Y \rangle = \|X\|\|Y\|\cos\theta\ ,\ 0 \leq \theta \leq \pi$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur.

Tanım 2.1.4: IR^n standart reel afin uzay olsun.

$$\langle , \rangle : IR^n \times IR^n \to IR \qquad \langle X,Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpıma IR^n de **standart iç çarpım** veya **Öklid iç çarpımı** denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu IR^n vektör uzayı ile birleşen IR^n afin uzayına ***n* - boyutlu standart Öklid uzayı** denir ve E^n ile gösterilir.

Tanım 2.1.5: E^n de bir X noktasının afin koordinat sistemine göre koordinatları $x_1, x_2, ..., x_n$ olsun. $x_i : E^n \to IR$ bileşenlerine E^n nin ***i* - yinci koordinat fonksiyonları** denir.

Tanım 2.1.6: $d : E^n \times E^n \to IR, \quad d(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında **uzaklık fonksiyonu** ve $d(X,Y)$ reel sayısına da X ile Y noktaları arasındaki **uzaklık** denir.

Tanım 2.1.7: $P_0, P_1, P_2, ..., P_n \in E^n$ noktaları için, $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ cümlesi E^n nin bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ - lisine E^n de bir **Öklid çatı** veya **dik çatı** denir.

Tanım 2.1.8: $\alpha : I \subset IR \to E^n$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t))$ diferensiyellenebilir fonksiyona E^n de bir **eğri** denir. Burada I aralığına α eğrisinin **parametre aralığı** ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin **parametresi** denir.

Tanım 2.1.9: $\alpha : I \subset IR \to E^n$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $\|\alpha'\| : I \to IR$, fonksiyonuna **skaler hız fonksiyonu**, $\|\alpha'(t)\| \in IR$ sayısına α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki **skaler hızı** , $\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt}|_t = \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \ldots, \frac{d\alpha_n(t)}{dt} \right)$ vektörüne de eğrinin **hız vektörü** denir.

Tanım 2.1.10: $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise $\alpha : I \subset IR \to E^n$ eğrisine **birim hızlı eğri** ve $s \in I$ parametresine de eğrinin **yay parametresi** denir.

Tanım 2.1.11: $\alpha : I \subset IR \to E^n$ bir eğri, $\eta = \{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\}$, $r < n$, sistemi lineer bağımsız olsun. $\forall \alpha^{(k)}$, $k > r$ için $\alpha^{(k)} \in Sp\{\eta\}$ olmak üzere, η den elde edilen

$\left\{\overrightarrow{u_1}(m), \overrightarrow{u_2}(m), \ldots, \overrightarrow{u_r}(m)\right\}$ ortonormal sistemine α eğrisinin $m \in \alpha$ noktasındaki **Serret - Frenet r - ayaklısı** denir. Her bir, $\overrightarrow{u_i}$, $1 \leq i \leq r$, vektörüne **Serret - Frenet vektörü** adı verilir.

Tanım 2.1.12: $\alpha(s) \in \alpha$ noktasındaki Frenet r - ayaklısı $\left\{\overrightarrow{u_1}(s), \overrightarrow{u_2}(s), \ldots, \overrightarrow{u_r}(s)\right\}$ olsun.

$$
\begin{aligned}
& k_i : I \to IR \ , \quad 1 \leq i < r, \\
& \quad s \to k_i(s) = \left\langle \overrightarrow{u_i'}(s), \overrightarrow{u_{i+1}}(s) \right\rangle
\end{aligned} \tag{2.1.1}
$$

şeklinde tanımlı, k_i fonksiyonuna α eğrisinin ***i* - yinci eğrilik fonksiyonu**, $k_i(s) \in IR$ sayısına da $\alpha(s)$ noktasındaki ***i* - yinci eğriliği** denir.

Teorem 2.1.1: $\alpha : I \subset IR \to E^n$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r - ayaklısı $\left\{\overrightarrow{u_1}(s), \overrightarrow{u_2}(s), \ldots, \overrightarrow{u_r}(s)\right\}$ ve i - yinci eğriliği $k_i(s)$, $1 \leq i < r$ ise

$$
\begin{cases}
\overrightarrow{u_1'}(s) = k_1(s)\overrightarrow{u_2}(s) \\
\overrightarrow{u_i'}(s) = -k_{i-1}(s)\overrightarrow{u_{i-1}}(s) + k_i(s)\overrightarrow{u_{i+1}}(s), \\
\overrightarrow{u_r'}(s) = -k_{r-1}(s)\overrightarrow{u_{r-1}}(s)
\end{cases} \tag{2.1.2}
$$

dir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.13: $\alpha : I \to E^n$ eğrisinin $\alpha(s) \in E^n$ noktasında birinci ve ikinci eğrilikleri sırasıyla, $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ olsun. $H_1 : I \to IR$ $\quad H_1(s) = \dfrac{k_1(s)}{k_2(s)}$ şeklinde tanımlı H_1 fonksiyonuna, α eğrisinin **1 - inci harmonik eğriliği** denir.

Tanım 2.1.14: $\alpha : I \subset IR \to E^n$, $\alpha(s) \in E^n$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, sabit bir U vektörü ile sabit açı yapıyorsa, α eğrisine bir **eğilim çizgisi** ve $Sp\{U\}$ ya da eğrinin **eğilim ekseni** adı verilir.

Teorem 2.1.2: $\alpha : I \subset IR \to E^n$ eğrisi bir eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow \forall s \in I$ için $H_1(s) = sbt$ (Hacısalihoğlu, 1983).

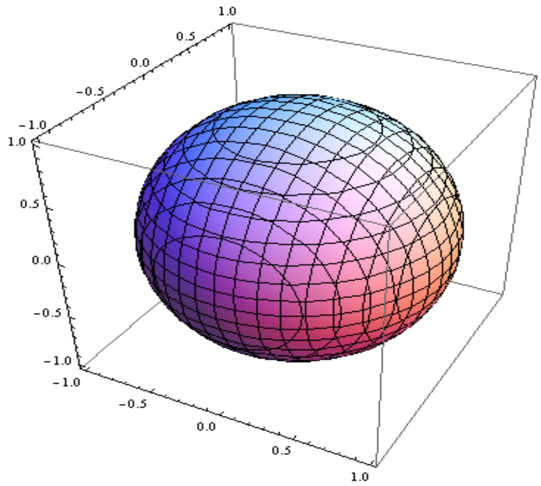
Tanım 2.1.15: $\alpha : I \to E^3$ eğrisinin $\alpha(s) \in E^3$ noktasındaki $\left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right\}$ Frenet 3 - ayaklısı $\forall s \in I$ anında bir eksen etrafında bir ani helis hareketi yapar. Bu eksene eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Darboux (ani dönme) ekseni** , bu eksen yönündeki birim vektöre de **Darboux vektörü** denir ve bu vektör

$$\overrightarrow{\psi} = k_2 \overrightarrow{u_1} + k_1 \overrightarrow{u_3} \tag{2.1.3}$$

bağıntısı ile verilir.

Tanım 2.1.16: $M = \left\{ x \in U \subset E^n \mid f : U \xrightarrow{difbilir} IR \;\; f(x) = c, \;\; U \text{ açık alt cümle} \right\}$ ve $\forall p \in M$ için $\nabla f \mid_P \neq 0$ olmak üzere M cümlesine, E^n de $(\boldsymbol{n-1})$ **- boyutlu bir yüzey** veya **hiperyüzey** denir.

Örnek 2.1.2: $f : E^3 \to IR,\; f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ küresi bir yüzeydir (Şekil 2.1.1).



Şekil 2.1.1. Küre Yüzeyi

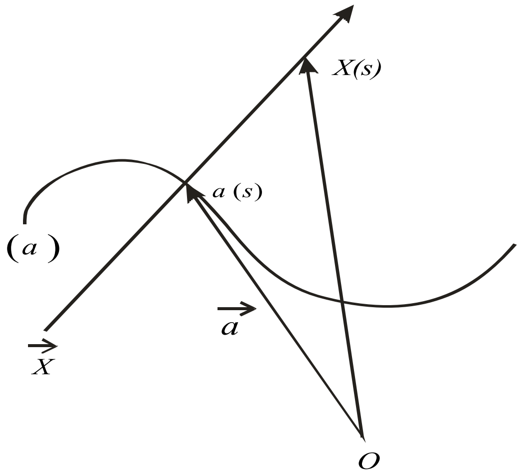
Tanım 2.1.17: $M \subset E^3$ bir yüzey olsun. $\forall P \in M$ noktasında E^3 ün M de kalan bir doğrusu varsa M yüzeyine bir **regle yüzey**, $\forall P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da regle yüzeyin **doğrultmanı** adı verilir. Bir regle yüzey φ ile gösterilirse parametrik denklemi

$$\varphi : I \times IR \to E^3$$

$$(s,\, v) \to \varphi(s,\, v) = \alpha(s) + vX(s) \tag{2.1.4}$$

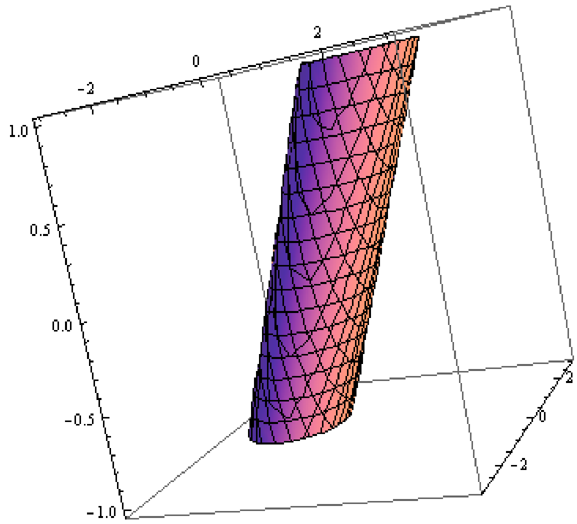
şeklinde verilir. Burada $\alpha : I \to E^3$ eğrisi dayanak eğrisi, X vektörü de regle yüzeyin doğrultmanıdır (Şekil 2.1.2).

.



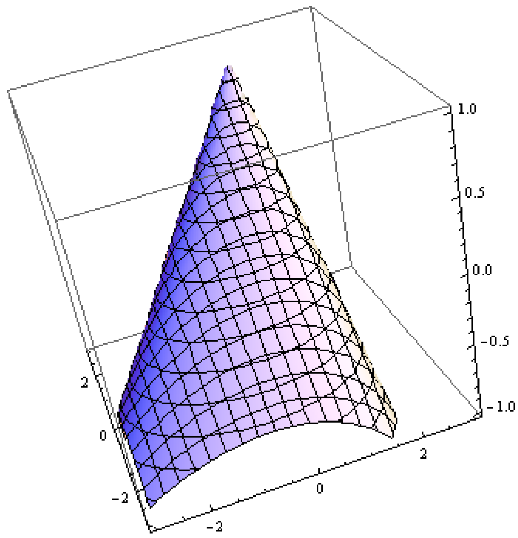
Şekil 2.1.2. Regle Yüzey

Örnek 2.1.3: $f : E^3 \rightarrow IR,\quad f(x, y, z) = (2x - 3z)^2 + (2y + z)^2 - 4 = 0$ silindiri bir regle yüzeydir (Şekil 2.1.3).



Şekil 2.1.3. Silindir Yüzeyi

Örnek 2.1.4: $f : E^3 \rightarrow IR,\quad f(x, y, z) = (z - x)^2 + 2(2z - y)^2 - 2(z - 1)^2 = 0$ konisi bir regle yüzeydir (Şekil 2.1.4.).



Şekil 2.1.4. Koni Yüzeyi

Tanım 2.1.18: $\varphi : I \times IR \to E^3$ $\varphi(s,\ v) = \alpha(s) + vX(s)$ regle yüzeyi, $\forall s \in I$ için $\varphi(s+2\pi, v) = \varphi(s,\ v)$ olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye **kapalı regle yüzey** denir.

Tanım 2.1.19: Regle yüzeyin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu ana doğru arasındaki açıya oranına, regle yüzeyin **dağılma parametresi (dralı)** denir **.** Birim doğrultman vektörü X olan bir regle yüzeyin dralı P_x ile gösterilirse

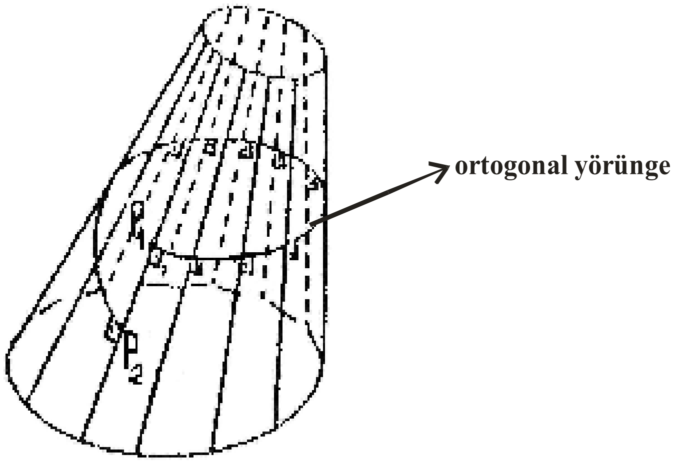
$$P_X = \frac{\det(\alpha', X, X')}{\|X'\|^2} \tag{2.1.5}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 2.1.20: Bir regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye **açılabilir regle yüzey** denir.

Teorem 2.1.3: Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.21: Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin ana doğrularının her birini dik olarak kesen eğriye, regle yüzeyin **ortogonal yörünge eğrisi** denir (Şekil 2.1.5).



Şekil 2.1.5. Ortogonal yörünge eğrisi

Tanım 2.1.22: Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin doğrultmanlar üzerindeki ayaklarına **boğaz (merkez veya striksiyon) noktası** denir.

Regle yüzeyinin ana doğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yeri de bir eğri çizer. Bu eğriye regle yüzeyin **boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi**) denir.

Bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin striksiyon noktasının yer vektörü $\gamma(s)$ ile gösterilirse

$$\gamma(s)=\alpha(s)-\frac{\langle \alpha'(s),X'(s)\rangle}{\|X'(s)\|^2}X(s) \tag{2.1.6}$$

dır. $\|X'(s)\|=0$ ise regle yüzey, striksiyon eğrisine sahip değildir. Bu hal, regle yüzeyin silindir olmasını karakterize eder. Regle yüzeyler için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bunun için;

$$\langle \alpha'(s),X'(s)\rangle=0 \tag{2.1.7}$$

alınması yeterlidir.

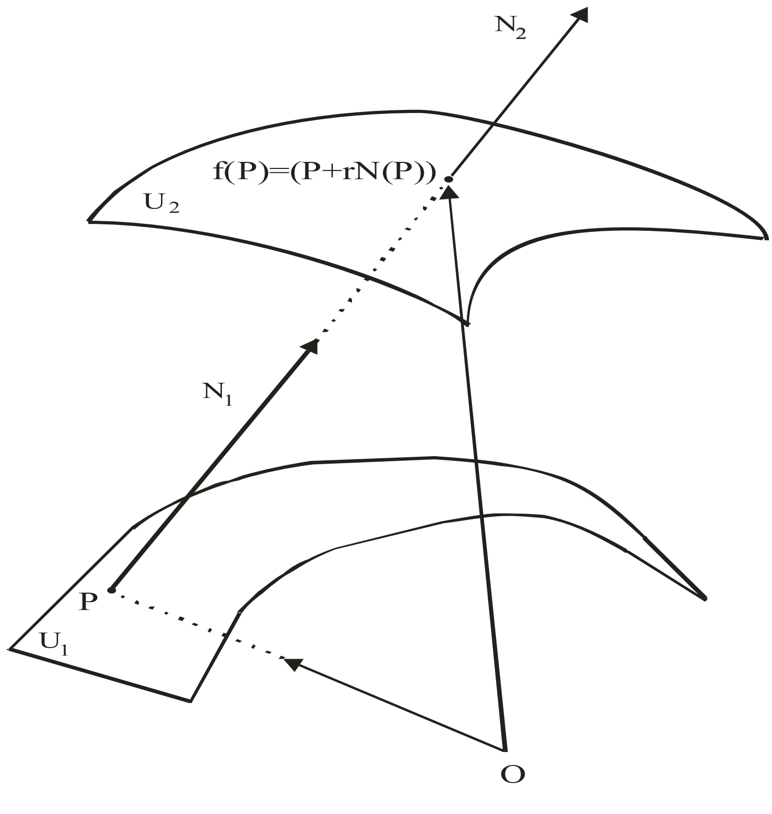
Tanım 2.1.23: U_1 ve U_2, E^3 de iki yüzey ve U_1 in birim normal vektör alanı

$$N_1 = \sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \, , \; a_i \in C^\infty \left(U, IR \right)$$

olsun. Bir $r \in IR$ sabit sayı ve $\forall P = \left(p_1, p_2, p_3 \right) \in U_1$ noktası için,

$$f : U_1 \to U_2 \quad f\left(P\right) = \left(p_1 + ra_1\left(P\right), p_2 + ra_2\left(P\right), p_3 + ra_3\left(P\right) \right)$$

şeklinde tanımlı bir f fonksiyonu varsa, U_2 ye U_1 in **bir paralel yüzeyi** denir (Şekil 2.1.6).



Şekil 2.1.6. Paralel Yüzey

E^3, Öklid uzayının 1 - parametreli hareketlerinde E^3 ün doğruları regle yüzeyler teorisi için önemlidir. Doğrular lineer nokta cümleleri olduklarından, E^3 Öklid uzayı yalnızca doğrulardan meydana gelmiş bir uzay olarak düşünülecek ve bunu belirtmek için de bu uzaya **çizgiler uzayı** adı verilecektir.

Çizgiler uzayında sabit uzay H' ve hareketli uzay H ile gösterilsin. H nın H' ye göre 1-parametreli hareketine kısaca **uzay hareketi** denir ve H / H' ile gösterilir.

Hareketli ve sabit uzayda iki Öklid koordinat sistemi, sırasıyla, $\{x_1, x_2, x_3\}$ ve $\{x_1', x_2', x_3'\}$ ise bu koordinat sistemleri arasında

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

bağıntısı vardır. Burada $A \in O(3), C \in IR_1^3$ dır. $A = A(s)$, $C = C(s)$ diferensiyellenebilir ve periyodik fonksiyonlar ise H / H' uzay hareketine **1 - parametreli kapalı uzay hareketi** denir.

Tanım 2.1.24: $\alpha : I \to E^3$ kapalı bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasındaki hareketli uzay $H = Sp\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ ve sabit bir uzay da $H' = Sp\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ ile gösterilsin. Hareketli uzayda bir birim doğrultman vektör $\vec{a}$ olmak üzere $d\vec{a} = \vec{\psi} \wedge \vec{a}$ ile ifade edilen ve Darboux dönme vektörü rolünü oynayan $\vec{\psi}$ vektörüne H / H' hareketinin **ani Pfaff vektörü** denir. Bu vektörün α eğrisi boyunca eğrisel integraliyle belirtilen

$$\vec{d} = \oint_{(\alpha)} \vec{\psi} \tag{2.1.8}$$

vektörüne de hareketin **Steiner dönme vektörü** denir.

Tanım 2.1.25: $\alpha : I \to E^3$ diferensiyellenebilir kapalı bir eğri ve bu eğriye bağlı olarak hareket eden bir ortonormal sistem $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ olsun. $d\vec{X} \in T_H(\alpha(s))$ olduğundan

$$d\vec{X} = x_1\vec{u_1} + x_2\vec{u_2} + x_3\vec{u_3}$$

şeklinde tek türlü olarak ifade edilebilir. α eğrisi boyunca eğrisel integral ile belirtilen

$$\vec{V} = \oint_{(\alpha)} d\vec{X} \tag{2.1.9}$$

vektörüne hareketin **Steiner öteleme vektörü** denir.

$\vec{\varphi}(s, v) = \alpha(s) + v\vec{X}(s)$ regle yüzeyinin ana doğrularının dik yörüngeleri için

$$\langle \vec{X}, d\vec{\varphi} \rangle = 0,$$

$$\langle \vec{X}, d\vec{\alpha} + v\,d\vec{X} + dv\,\vec{X} \rangle = 0,$$

$$\langle \vec{X}, d\vec{\alpha} \rangle + dv.\|\vec{X}\|^2 = 0, \quad \|\vec{X}\| = 1,$$

$$\langle \vec{X}, d\vec{\alpha} \rangle = -dv$$

olur ve bu ifadenin dayanak eğrisi boyunca eğrisel integrali alınırsa,

$$L_X = \oint_{(\alpha)} \left\langle d\vec{\alpha}, \vec{X} \right\rangle = -\oint_{(\alpha)} dv$$

bulunur.

Tanım 2.1.26: $L_X : I \to IR \quad v \to L_X(v) = -\oint_{(\alpha)} dv$ şeklinde tanımlanan L_X fonksiyonuna regle yüzeyin **açılım uzunluğu (adımı)** denir.

Tanım 2.1.27: Ana doğrusunun birim doğrultman vektörü $\vec{X}$ olan bir kapalı regle yüzeyin ana doğrularına dik bir doğrultunun bir periyot sonra ilk konumu ile yaptığı açıya, regle yüzeyin **açılım açısı** denir ve λ_X ile gösterilir.

Teorem 2.1.4: Ana doğrusunun birim doğrultman vektörü $\vec{X}$ olan bir kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu ve açılım açısı

$$\begin{cases} L_X = \left\langle \vec{V}, \vec{X} \right\rangle, \\ \lambda_X = \left\langle \vec{d}, \vec{X} \right\rangle \end{cases} \tag{2.1.10}$$

dır (Hacısalihoğlu, 1983).

Sonuç 2.1.1: $H = Sp\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ olsun. H / H' uzay hareketinde $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin dayanak eğrisi boyunca Steiner dönme ve öteleme vektörü (2.1.3) ve (2.1.8) bağıntılarından

$$\vec{d} = \oint_{(\alpha)} \left(k_2 \vec{e_1} + k_1 \vec{e_3} \right) ds \,, \tag{2.1.11}$$

$$\vec{v} = \vec{e_1} \oint_{(\alpha)} ds \tag{2.1.12}$$

şeklinde bulunur. Burada k_1 ve k_2 dayanak eğrisinin eğrilik fonksiyonlarıdır.

Teorem 2.1.5: $\varphi(s,v) = \alpha(s) + v.u_1(s)$ kapalı regle yüzeyinin açılım açısı, açılım uzunluğu ve drali

$$\begin{cases} \lambda_{u_1} = \oint k_2 ds \\ L_{u_1} = \oint ds \\ P_{u_1} = 0 \end{cases} \tag{2.1.13}$$

şeklindedir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.1.6: $\varphi(s,v)=\alpha(s)+v.u_2(s)$ kapalı regle yüzeyinin açılım açısı, açılım uzunluğu ve dralı

$$\begin{cases} \lambda_{u_2} = 0 \\ L_{u_2} = 0 \\ P_{u_2} = \dfrac{k_2}{k_1^2 + k_2^2} \end{cases} \tag{2.1.14}$$

şeklindedir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.1.7: $\varphi(s,v)=\alpha(s)+v.u_3(s)$ kapalı regle yüzeyinin açılım açısı, açılım uzunluğu ve dralı

$$\begin{cases} \lambda_{u_3} = \oint k_1 ds \\ L_{u_3} = 0 \\ P_{u_3} = \dfrac{1}{k_2} \end{cases} \tag{2.1.15}$$

şeklindedir (Hacısalihoğlu, 1983).

2.2. Lorentz Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1: V bir reel vektör uzayı olsun. $\langle , \rangle : V \times V \to IR$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa, $\langle , \rangle$ fonksiyonuna V vektör uzayı üzerinde **simetrik bilineer form** denir (O'neill, 1983).

i) Bilineerlik Aksiyomu;

$\forall a, b \in IR$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

$$\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$$

$$\langle u, av + bw \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle u, w \rangle$$

ii) Simetri Aksiyomu;

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

Tanım 2.2.2: $\langle , \rangle : V \times V \to IR$ fonksiyonu simetrik bilineer form olsun.

i) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ ise simetrik bilineer forma **pozitif tanımlı,**

ii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ ise simetrik bilineer forma **negatif tanımlı,**

iii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ise simetrik bilineer forma **yarı - pozitif tanımlı,**

iv) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ ise simetrik bilineer forma **yarı - negatif tanımlı,**

v) $\forall v \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow w = 0$ ise simetrik bilineer forma **non - dejeneredir** denir.

Tanım 2.2.3: $\langle , \rangle : V \times V \to IR$ dönüşümü simetrik, bilineer ve non - dejenere ise bu dönüşüme V vektör uzayı üzerinde bir **skalar çarpım,** bu durumda V vektör uzayına da **skalar çarpım uzayı** denir.

Tanım 2.2.4: $\langle , \rangle : V \times V \to IR$ V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form olsun. $\langle \ \rangle|_W : W \times W \to IR$ negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna simetrik bilineer formun **indeksi** denir ve v ile gösterilir ve bu indeks $0 \leq v \leq boyV$ dir.

Tanım 2.2.5: IR^n n - boyutlu, standart reel vektör uzayı olsun.

$$\langle , \rangle : IR^n \times IR^n \to IR \qquad (X, Y) \to \langle X, Y \rangle = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i y_i$$

fonksiyonu bir skalar çarpım fonksiyonudur. Bu fonksiyona IR^n üzerinde **Lorentz metriği** denir.

Tanım 2.2.6: IR^n üzerinde tanımlı Lorentz metriği ile birlikte $\left(IR^n, \langle , \rangle\right)$ ikilisine

***n* - boyutlu Lorentz uzayı** veya **Lorentz uzayı** denir ve IL^n ile gösterilir.

Tanım 2.2.7: $X \in IL^n$ vektörü için;

***i*)** $\langle X, X\rangle > 0$ veya $X = 0$ ise X vektörüne **uzaysı (spacelike) vektör,**

***ii*)** $\langle X, X\rangle < 0$ ise X vektörüne **zamansı (timelike) vektör,**

***iii*)** $\langle X, X\rangle = 0$ ise X vektörüne **ışıksı (lightlike) vektör** denir.

Tanım 2.2.8: Lorentz uzayında X vektörünün normu

$$\|X\| = \sqrt{\left|\langle X, X\rangle\right|}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.9: $X, Y \in IL^n$ için $X \neq 0$ ve $Y \neq 0$ olmak üzere $\langle X, Y\rangle = 0$ ise, bu durumda X ve Y vektörlerine **ortogonal vektörler** denir.

Teorem 2.2.1: $X, Y \in IL^n$ için $X \neq 0$ ve $Y \neq 0$ olmak üzere $\langle X, Y\rangle = 0$ olsun. X timelike vektör ise, bu durumda Y spacelike vektördür (Ratcliffe, 1994).

Teorem 2.2.2: IL^n, n - boyutlu bir Lorentz uzayı ve $X \in IL^n$ olsun. Bu durumda,

***i*)** $\|X\| > 0,$

***ii*)** $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X$ bir null vektördür.

***iii*)** X bir timelike vektör ise $\|X\|^2 = -\langle X, X\rangle$ dir

***iv*)** X bir spacelike vektör ise $\|X\|^2 = \langle X, X\rangle$ dir (O'neill, 1983).

Tanım 2.2.10: IL^3, 3 - boyutlu Lorentz uzayında iki vektör X ve Y olsun.

$$\wedge : IL^3 \times IL^3 \to IL^3$$

$$\left(X, Y\right) \to X \wedge Y = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \left(x_3y_2 - x_2y_3, x_1y_3 - x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1\right)$$

fonksiyonuna **vektörel çarpım fonksiyonu,** $X \wedge Y$ vektörüne de X ile Y nin **vektörel çarpımı** denir (Akutagawa ve Nishikawa, 1990).

Teorem 2.2.3: IL^3, 3-boyutlu Lorentz uzayında iki vektör X ve Y olsun. Bu takdirde

***i*)** X ve Y spacelike vektör ise $X \wedge Y$ bir timelike vektördür.

***ii*)** X ve Y timelike vektör ise $X \wedge Y$ bir spacelike vektördür.

***iii*)** X spacelike ve Y timelike vektör ise $X \wedge Y$ bir spacelike vektördür.

***iv*)** X ve Y null vektör ise $X \wedge Y$ bir spacelike vektördür.

***v*)** X timelike ve Y null vektör ise $X \wedge Y$ bir spacelike vektördür.

***vi*)** X spacelike ve Y null vektör olmak üzere $\langle X, Y \rangle = 0$ ise $X \wedge Y$ bir null vektör, $\langle X, Y \rangle \neq 0$ ise $X \wedge Y$ bir spacelike vektördür (Turgut, 1995).

Teorem 2.2.4: $X, Y, Z \in IL^3$ olsun. Bu durumda

***i*)** $\langle X \wedge Y, Z \rangle = -\det(X, Y, Z)$,

***ii*)** $(X \wedge Y) \wedge Z = -\langle X, Z \rangle Y + \langle Y, Z \rangle X$,

***iii*)** $\langle X \wedge Y, X \rangle = 0$ ve $\langle X \wedge Y, Y \rangle = 0$,

***iv*)** $\langle X \wedge Y, X \wedge Y \rangle = -\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle + (\langle X, Y \rangle)^2$,

dir (Turgut, 1995).

Teorem 2.2.5:

***i*)** $X, Y \in IL^n$ pozitif (negatif) timelike vektörler olsun. Bu durumda

$$\langle X, Y \rangle \leq \|X\| \, \|Y\|$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart X ve Y vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır.

$$\langle X, Y \rangle = \|X\| \|Y\| \cosh \varphi, \qquad \varphi = \eta(X, Y)$$

olacak şekilde bir tek $\varphi > 0$ reel sayısı vardır. Bu φ açısına **timelike vektörler arasındaki Lorentzian timelike açı** denir.

***ii*)** $X, Y \in IL^n$ spacelike vektörler olsun. X ve Y vektörlerinin gerdiği düzlem spacelike ise $|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| \|Y\|$ eşitsizliği vardır.

$$\langle X, Y \rangle = \|X\| \|Y\| \cos \varphi, \qquad \varphi = \eta(X, Y)$$

olacak şekilde $0 \leq \varphi \leq \pi$ reel sayısına **spacelike vektörler arasındaki Lorentzian spacelike açı** denir.

iii) $X, Y \in IL^n$ spacelike vektörler olsun. X ve Y vektörlerinin gerdiği düzlem timelike ise $\left|\left\langle X, Y \right\rangle\right| > \|X\|\|Y\|$ eşitsizliği vardır .

$$\left\langle X, Y \right\rangle = \|X\|\|Y\|\cosh\varphi, \qquad \varphi = \eta(X, Y)$$

olacak şekilde $\varphi > 0$ reel sayısına **spacelike vektörler arasındaki Lorentzian timelike açı** denir.

iv) $X \in IL^n$ spacelike ve $Y \in IL^n$ timelike vektörler olsun.

$$\left|\left\langle X, Y \right\rangle\right| = \|X\|\|Y\|\sinh\varphi, \qquad \varphi = \eta(X, Y)$$

olacak şekilde $\varphi > 0$ reel sayısına **spacelike vektör ile timelike vektör arasındaki Lorentzian timelike açı** denir (Ratcliffe, 1994).

Tanım 2.2.11: IL^n, n - boyutlu bir Lorentz uzayında bir $\alpha : I \to IR^n$ eğrisinin teğet vektörü $\overrightarrow{u_1}$ olsun. Bu durumda,

i) $\left\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1} \right\rangle > 0$ ise α eğrisine **uzaysı (spacelike) eğri,**

ii) $\left\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1} \right\rangle < 0$ ise α eğrisine **zamansı (timelike) eğri,**

iii) $\left\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1} \right\rangle = 0$ ise α eğrisine **ışıksı (lightlike veya null) eğri** denir.

Tanım 2.2.12: $\alpha : I \subset IR \to IL^3$ diferensiyellenebilir eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right\}$, eğrilikleri de k_1 ve k_2 olsun. Bu durumda,

i) ***α* timelike eğri ise;**

$\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = -\overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_3} \wedge \overrightarrow{u_1} = -\overrightarrow{u_2}$ olur. Bu durumda Frenet formülleri

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_1}' = k_1 \overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{u_2}' = k_1 \overrightarrow{u_1} - k_2 \overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{u_3}' = k_2 \overrightarrow{u_2} \end{cases} \tag{2.2.1}$$

(Woestijne, 1990) ve Darboux vektörü

$$\overrightarrow{\psi} = k_2 \overrightarrow{u_1} - k_1 \overrightarrow{u_3} \tag{2.2.2}$$

şeklinde bulunur (Uğurlu, 1997).

***ii*) α spacelike binormalli spacelike eğri ise;**

$\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = -\overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{u_3} = -\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_3} \wedge \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u_2}$ olur. Bu durumda Frenet formülleri

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_1'} = k_1 \overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{u_2'} = k_1 \overrightarrow{u_1} + k_2 \overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{u_3'} = k_2 \overrightarrow{u_2} \end{cases} \tag{2.2.3}$$

(Woestijne, 1990) ve Darboux vektörü

$$\overrightarrow{\psi} = -k_2 \overrightarrow{u_1} + k_1 \overrightarrow{u_3} \tag{2.2.4}$$

şeklinde bulunur (Uğurlu, 1997).

***iii*) α timelike binormalli spacelike eğri ise;**

$\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{u_3} = -\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_3} \wedge \overrightarrow{u_1} = -\overrightarrow{u_2}$ olur. Bu durumda Frenet formülleri

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_1'} = k_1 \overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{u_2'} = -k_1 \overrightarrow{u_1} + k_2 \overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{u_3'} = k_2 \overrightarrow{u_2} \end{cases} \tag{2.2.5}$$

(Woestijne, 1990) ve Darboux vektörü

$$\overrightarrow{\psi} = k_2 \overrightarrow{u_1} - k_1 \overrightarrow{u_3} \tag{2.2.6}$$

şeklinde bulunur (Uğurlu, 1997).

Tanım 2.2.13: $\alpha : I \subset IR \to IL^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right\}$, eğrilikleri k_1 ve k_2 ve Darboux vektörü de $\overrightarrow{\psi}$ olsun. Bu durumda,

***i*) α eğrisi timelike eğri ise;**

$$\left\|\overrightarrow{\psi}\right\| = \sqrt{\left|k_1^2 - k_2^2\right|} . \tag{2.2.7}$$

a) $|k_1| > |k_2|$ ise $\left\langle \overrightarrow{\psi}, \overrightarrow{\psi} \right\rangle > 0$ olacağından $\overrightarrow{\psi}$ spacelike vektör olur. Bu durumda $\overrightarrow{u_3}$ ile $\overrightarrow{\psi}$ arasındaki Lorentzian timelike açı φ olmak üzere eğrilikler ve $\vec{c}$ vektörü

$$\begin{cases} k_1 = \left\|\overrightarrow{\psi}\right\| cosh\varphi \\ k_2 = \left\|\overrightarrow{\psi}\right\| sinh\varphi \end{cases} , \qquad \left\|\overrightarrow{\psi}\right\|^2 = \left\langle \overrightarrow{\psi}, \overrightarrow{\psi} \right\rangle = k_1^2 - k_2^2 \tag{2.2.8}$$

ve

$$\vec{c} = sinh\varphi\overrightarrow{u_1} - cosh\varphi\overrightarrow{u_3} \qquad (2.2.9)$$

şeklinde bulunur.

b) $|k_1| < |k_2|$ ise $\langle\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle < 0$ olacağından $\vec{\psi}$ timelike vektör olur. Bu durumda $\overrightarrow{u_3}$ ile $\vec{\psi}$ arasındaki Lorentzian timelike açı φ olmak üzere eğrilikler ve $\vec{c}$ vektörü

$$\begin{cases} k_1 = \|\vec{\psi}\| sinh\varphi \\ k_2 = \|\vec{\psi}\| cosh\varphi \end{cases}, \qquad \|\vec{\psi}\|^2 = -\langle\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle = -(k_1^2 - k_2^2) \qquad (2.2.10)$$

ve

$$\vec{c} = cosh\varphi\overrightarrow{u_1} - sinh\varphi\overrightarrow{u_3} \qquad (2.2.11)$$

şeklinde bulunur.

***ii*) α eğrisi spacelike binormalli spacelike eğri ise;**

$$\|\vec{\psi}\| = \sqrt{|k_1^2 + k_2^2|} \qquad (2.2.12)$$

dir. Burada $\langle\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle > 0$ olduğundan $\vec{\psi}$ spacelike olur. Bu durumda $\overrightarrow{u_3}$ ile $\vec{\psi}$ arasındaki Lorentzian spacelike açı φ olmak üzere eğrilikler ve $\vec{c}$ vektörü

$$\begin{cases} k_1 = \|\vec{\psi}\| cos\varphi \\ k_2 = \|\vec{\psi}\| sin\varphi \end{cases}, \qquad \|\vec{\psi}\|^2 = \langle\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle = k_1^2 + k_2^2 \qquad (2.2.13)$$

ve

$$\vec{c} = -sin\varphi\overrightarrow{u_1} + cos\varphi\overrightarrow{u_3} \qquad (2.2.14)$$

şeklinde bulunur.

***iii*) α eğrisi timelike binormalli spacelike eğri ise;**

$$\|\vec{\psi}\| = \sqrt{|k_2^2 - k_1^2|}. \qquad (2.2.15)$$

a) $|k_2| > |k_1|$ ise $\langle\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle > 0$ olacağından $\vec{\psi}$ spacelike olur. Bu durumda $\overrightarrow{u_3}$ ile $\vec{\psi}$ arasındaki Lorentzian timelike açı φ olmak üzere eğrilikler ve $\vec{c}$ vektörü

$$\begin{cases} k_1 = \|\vec{\psi}\| sinh\varphi \\ k_2 = \|\vec{\psi}\| cosh\varphi \end{cases}, \qquad \|\vec{\psi}\|^2 = \langle\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle = k_2^2 - k_1^2 \qquad (2.2.16)$$

ve

$$\vec{c} = cosh\varphi\overrightarrow{u_1} - sinh\varphi\overrightarrow{u_3} \tag{2.2.17}$$

şeklinde bulunur.

b) $|k_2| < |k_1|$ ise $\langle\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle < 0$ olacağından $\vec{\psi}$ timelike olur. Bu durumda $\overrightarrow{u_3}$ ile $\vec{\psi}$ arasındaki Lorentzian timelike açı φ olmak üzere

$$\begin{cases} k_1 = \|\vec{\psi}\| cosh\varphi \\ k_2 = \|\vec{\psi}\| sinh\varphi \end{cases}, \qquad \|\vec{\psi}\|^2 = -\langle\vec{\psi},\vec{\psi}\rangle = -(k_2^{\,2} - k_1^{\,2}) \tag{2.2.18}$$

ve

$$\vec{c} = sinh\varphi\overrightarrow{u_1} - cosh\varphi\overrightarrow{u_3} \tag{2.2.19}$$

şeklindedir.

2.3. Dual Uzayda Temel Kavramlar

Tanım 2.3.1: $ID = \left\{ A = \left(a, a^*\right) \middle| a, a^* \in IR \right\}$ cümlesine **dual sayılar cümlesi** denir.

Tanım 2.3.2: ID cümlesi üzerinde **toplama, çarpma** ve **eşitlik işlemleri**, sırasıyla,

$$\oplus : ID \times ID \to ID$$
$$\left(A, B\right) \to A \oplus B = \left(a, a^*\right) \oplus \left(b, b^*\right) = \left(a+b, a^* + b^*\right),$$
$$\odot : ID \times ID \to ID$$
$$\left(A, B\right) \to A \odot B = \left(a, a^*\right) \odot \left(b, b^*\right) = \left(ab, ab^* + a^* b\right),$$
$$A = B \Leftrightarrow a = b \ , \ a^* = b^*$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.3.1: $\left(ID, \oplus, \odot\right)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır.

Tanım 2.3.3: $0 = \left(0, 0\right)$ dual sayısına ID nin toplama işlemine göre **sıfır elemanı** denir.

Tanım 2.3.4: Bir $A = \left(a, a^*\right) \in ID$ dual sayısının **reel** ve **dual kısmı**

$$\mathrm{Re}\left(A\right) = a \ , \ \mathrm{Du}\left(A\right) = a^*$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.5: $\left(1, 0\right) = 1$ dual sayısına ID deki çarpma işleminin **birim elemanı** veya **reel birimi** denir.

Tanım 2.3.6: $\left(0, 1\right)$ dual sayısı kısaca ε ile gösterilir ve ID deki **dual birim** olarak adlandırılır.

Sonuç 2.3.1: Tanım 2.3.2 den çarpma işlemi gereğince

$$\varepsilon^2 = \varepsilon \odot \varepsilon = \left(0, 1\right) \odot \left(0, 1\right) = \left(0, 0\right) = 0$$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.2: $A = \left(a, a^*\right) \in ID$ sayısı $A = a + \varepsilon a^*$ şeklinde yazılabilir.

İspat: Tanım 2.3.2 den $A = \left(a, a^*\right)$ için

$$A = \left(a, 0\right) \oplus \left(0, a^*\right)$$
$$A = \left(a, 0\right) \oplus \left(0, 1\right) . \left(a^*, 0\right)$$
$$A = a + \varepsilon a^* .$$

Teorem 2.3.3: $A=\left(a,a^*\right)\in ID$, $\lambda\in IR$ ise, $\lambda\odot A=\lambda\odot\left(a,a^*\right)=\left(\lambda a,\lambda a^*\right)$ dır.

Tanım 2.3.7: $ID^3=\left\{A=\left(A_1,A_2,A_3\right)\middle|A_i\in ID,1\le i\le 3\right\}$ cümlesi üzerinde **toplama** ve **skalar ile çarpma işlemleri** aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$+:ID^3\times ID^3\to ID^3$$
$$\left(A,B\right)\to A+B=\left(A_i\right)+\left(B_i\right)=\left(A_i+B_i\right)$$
$$\cdot:ID\times ID^3\to ID^3$$
$$\left(\lambda,A\right)\to\lambda\cdot A=\left(\lambda A_i\right)$$

Teorem 2.3.4: $\left(ID^3,+,\cdot\right)$ üçlüsü ID dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür.

Bu modül kısaca ***ID* - Modül** şeklinde gösterilecektir.

Tanım 2.3.8: ID - Modülün elemanları olan sıralı dual üçlülere **dual vektörler** denir.

Teorem 2.3.5: $\vec{a},\overrightarrow{a^*}\in IR^3$ olmak üzere ID - Modülde her bir $\vec{A}$ dual vektörü,

$$\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*},\ \varepsilon=\left(0,1\right)\in ID$$

şeklinde yazılabilir.

İspat:

$$\vec{A}=\left(A_1,A_2,A_3\right),\ A_i=a_i+\varepsilon a_i^*\ ,1\le i\le 3,$$
$$\vec{A}=\left(a_1+\varepsilon a_1^*,a_2+\varepsilon a_2^*,a_3+\varepsilon a_3^*\right),$$
$$\vec{A}=\left(a_1+a_2+a_3\right)+\varepsilon\left(a_1^*+a_2^*+a_3^*\right)$$

yazılabilir. $a_i,a_i^*\in IR$ olduğundan $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$, $\overrightarrow{a^*}=\left(a_1^*,a_2^*,a_3^*\right)$ alınabilir ve dolayısı ile $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}$ olur.

Tanım 2.3.9: $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}$, $\vec{B}=\vec{b}+\varepsilon\overrightarrow{b^*}\in ID^3$ olsun.

$$\langle,\rangle:ID^3\times ID^3\to ID$$
$$(\vec{A},\vec{B})\to\left\langle\vec{A},\vec{B}\right\rangle=\left\langle\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*},\vec{b}+\varepsilon\overrightarrow{b^*}\right\rangle=\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle+\varepsilon\left(\left\langle\vec{a},\overrightarrow{b^*}\right\rangle+\left\langle\overrightarrow{a^*},\vec{b}\right\rangle\right)$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu fonksiyona $ID-$Modül de bir iç çarpım fonksiyonu denir.

$\forall\vec{A},\vec{B},\vec{C}\in ID-$Modül, $\lambda\in ID$ için

i) $\left\langle\vec{A},\vec{B}\right\rangle=\left\langle\vec{B},\vec{A}\right\rangle$

ii) $\left\langle\lambda\vec{A},\vec{B}\right\rangle=\left\langle\vec{A},\lambda\vec{B}\right\rangle=\lambda\left\langle\vec{A},\vec{B}\right\rangle$

iii) $\left\langle \vec{A}+\vec{B},\vec{C}\right\rangle = \left\langle \vec{A},\vec{C}\right\rangle + \left\langle \vec{B},\vec{C}\right\rangle$

$\left\langle \vec{A},\vec{B}+\vec{C}\right\rangle = \left\langle \vec{A},\vec{B}\right\rangle + \left\langle \vec{A},\vec{C}\right\rangle$

iv) $\vec{A}=0 \Rightarrow \left\langle \vec{A},\vec{A}\right\rangle = 0.$

Tanım 2.3.10: $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\vec{a^*}$, $\vec{B}=\vec{b}+\varepsilon\vec{b^*} \in ID^3$ vektörlerinin **vektörel çarpımı**

$$\wedge : ID^3 \times ID^3 \to ID^3$$

$$(\vec{A},\vec{B}) \to \vec{A}\wedge\vec{B} = \left(\vec{a}+\varepsilon\vec{a^*}\right)\wedge\left(\vec{b}+\varepsilon\vec{b^*}\right) = \vec{a}\wedge\vec{b}+\varepsilon\left(\vec{a}\wedge\vec{b^*}+\vec{a^*}\wedge\vec{b}\right)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.11: $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\vec{a^*}$ dual vektörünün **normu** $\left\|\vec{A}\right\| = \mathrm{a}+\varepsilon\mathrm{a}^* \in ID$ şeklinde bir dual sayıdır. Burada

$$\mathrm{a}=\left\|\vec{a}\right\|, \quad \mathrm{a}^* = \frac{\left\langle \vec{a},\vec{a^*}\right\rangle}{\left\|\vec{a}\right\|} \ , \ \left\|\vec{a}\right\| \neq \vec{0}\,.$$

Tanım 2.3.12: $\left\|\vec{A}\right\| = (1,0)$ ise $\vec{A}$ vektörüne **birim dual vektör** denir.

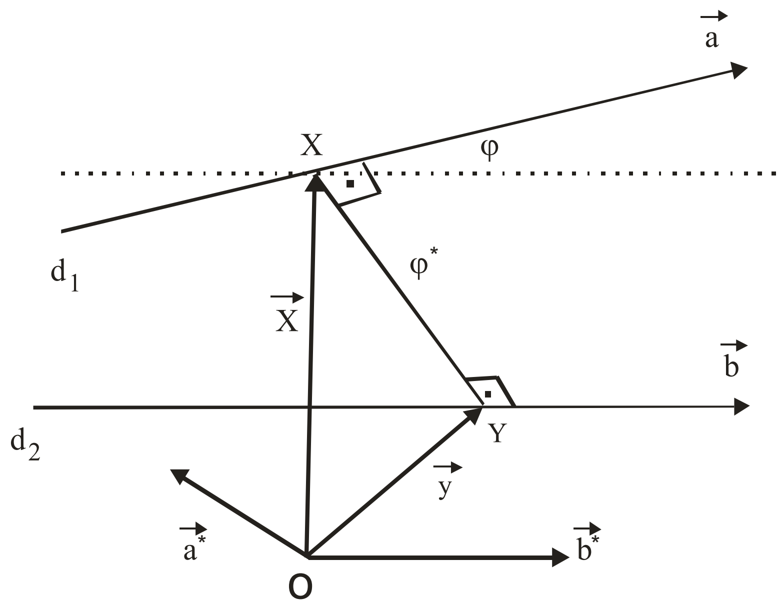
Teorem 2.3.6: $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\vec{a^*}$ birim dual vektör ise

$$\left\|\vec{a}\right\| = 1\,,\ \left\langle \vec{a},\vec{a^*}\right\rangle = 0\,.$$

Tanım 2.3.13: $K=\left\{\vec{X}=\vec{x}+\varepsilon\vec{x^*} : \left\|\vec{X}\right\| = (1,0),\ \vec{x},\vec{x^*}\in IR^3\right\}$ cümlesine **birim dual küre** denir.

Teorem 2.3.7 (E. STUDY): $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\vec{a^*}$ ve $\vec{a}\neq\vec{0}$ olmak üzere ID- Modül'de denklemi $\left\|\vec{A}\right\| = (1,0)$ olan birim dual kürenin dual noktaları, IR^3de yönlü doğrulara birebir karşılık gelir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.3.14: $\Phi=\varphi+\varepsilon\ \varphi^*$ dual sayısına $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ birim dual vektörleri arasındaki **dual açı** denir (Şekil 2.3.1).



Şekil 2.3.1 Dual Açı

Teorem 2.3.8: $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ birim dual vektörleri arasındaki dual açı $\Phi=\varphi+\varepsilon\ \varphi^{*}$ olmak üzere

$$\left\langle \vec{A},\vec{B}\right\rangle = \cos\left(\varphi+\varepsilon\varphi^{*}\right)=\cos\Phi$$

dır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.3.15: Elemanları dual sayılar olan bir A matrisine **dual matris** denir ve bu matris

$$A=\left[A_{ij}\right],\ A_{ij}=a_{ij}+\varepsilon a_{ij}{}^{*},\ 1\leq i,j\leq 3$$

şeklinde gösterilir.

K hareketli birim dual küre $\left\{\overrightarrow{U_1},\overrightarrow{U_2},\overrightarrow{U_3}\right\}$ birim dual ortonormal çatısı ile, K' sabit birim dual küresi de $\left\{\overrightarrow{E_1},\overrightarrow{E_2},\overrightarrow{E_3}\right\}$ birim dual ortonormal çatısı ile temsil edilsin. Bu çatılar arasında $A=\left[a_{ij}\ (\mathrm{t})+\varepsilon a_{ij}^{*}(t)\right], t\in IR$, bir has ortogonal matris olmak üzere,

$$U=AE \tag{2.3.1}$$

bağıntısı vardır. A matrisi $t-$parametresine göre diferensiyellenebilir ve periyodik ise bu harekete **1 - parametreli dual küresel kapalı hareket** denir ve K/K' ile gösterilir.

(2.3.1) bağıntısının diferensiyeli alınırsa

$$\begin{bmatrix} d\overrightarrow{U_1} \\ d\overrightarrow{U_2} \\ d\overrightarrow{U_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_1^2 & \Omega_1^3 \\ \Omega_2^1 & 0 & \Omega_2^3 \\ \Omega_3^1 & \Omega_3^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{U_1} \\ \overrightarrow{U_2} \\ \overrightarrow{U_3} \end{bmatrix}, \ \Omega_i^j = -\Omega_j^i \qquad (2.3.2)$$

bulunur. Bu denklemlere dual küresel hareketin **türev denklemleri** veya **E.CARTAN yapı denklemleri** denir. Burada

$$\Omega = dAA^t \qquad (2.3.3)$$

dır. $\Omega = \left[\Omega_i^j\right]$ matrisinin elemanlarına **dual 1 - formlar** veya **E.CARTAN formları** denir.

Tanım 2.3.16: K / K' , 1-parametreli birim dual küresel hareketinde

$$\overline{\Psi} = \Omega_2^3 \ \overrightarrow{U_1} + \Omega_3^1 \ \overrightarrow{U_2} + \Omega_1^2 \overrightarrow{U_3} \qquad (2.3.4)$$

dual vektörüne hareketin **ani dual Pfaff vektörü**,

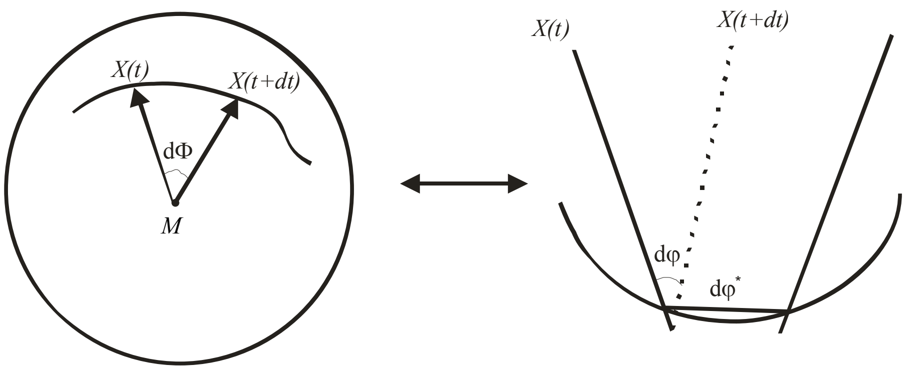
$$\overrightarrow{D} = \vec{d} + \varepsilon \overrightarrow{d^*} = \oint \overline{\Psi} \qquad (2.3.5)$$

vektörüne de hareketin **dual Steiner dönme vektörü** denir.

K / K' dual küresel hareketinde, K da tesbit edilmiş bir X dual noktası, K' sabit dual küresi üzerinde $t \in IR$ parametresine bağlı olarak bir

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}(t) \quad \left(\left\| X(t) \right\| = 1\right)$$

eğrisini çizer. Bu eğriye çizgiler uzayında 1-parametreli bir doğru ailesi (regle yüzey) karşılık gelir. Eğri kapalı ise, karşılık gelen regle yüzey de kapalı olur (Şekil 2.3.2).



Şekil 2.3.2. Dual Küresel Eğri – Regle yüzey

$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}(t)$, $t \in IR$ dual küresel eğrisine **regle yüzeyin küresel resmi** denir. $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}(t)$ dual küresel eğrisinin $d\Phi = d\varphi + \varepsilon d\varphi^*$ dual yay elementi için

$$\begin{cases} d\varphi^2 = \left\langle d\vec{x}, d\vec{x} \right\rangle, \\ d\varphi d\varphi^* = \left\langle d\vec{x}, d\overrightarrow{x^*} \right\rangle \end{cases} \tag{2.3.6}$$

yazılır. $\overrightarrow{X}(t)$ ve $\overrightarrow{X}(t+dt)$ birim dual vektörleri arasındaki $d\Phi$ dual açısı, aynı zamanda bu dual vektörlerin uç noktaları arasındaki dual küresel uzaklık olarak da alınabilir. Burada $d\varphi$ ve $d\varphi^*$ reel büyüklükleri sırasıyla çizgiler uzayında regle yüzeyin $\overrightarrow{X}(t)$ ve $\overrightarrow{X}(t+dt)$ komşu anadoğruları arasındaki açı ve en kısa uzaklıktır.

Tanım 2.3.17: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}(t)$ $\left(\left\|\overrightarrow{X}(t)\right\| = 1\right)$ regle yüzeyinde $\overrightarrow{X}(t)$ ve $\overrightarrow{X}(t+dt)$ komşu anadoğruları arasındaki dual açı $d\Phi = d\varphi + \varepsilon d\varphi^*$ olmak üzere,

$$P_X = \frac{\left\langle d\vec{x}, d\overrightarrow{x^*} \right\rangle}{\left\langle d\vec{x}, d\vec{x} \right\rangle} = \frac{d\varphi^*}{d\varphi} \tag{2.3.7}$$

büyüklüğüne bu regle yüzeyin $\overrightarrow{X}(t)$ anadoğrusu boyunca **dağılma parametresi (dral)** denir.

Tanım 2.3.18: Komşu anadoğruları kesişen regle yüzeylere **torslar veya açılabilir yüzeyler** denir. Torslar için dralın sıfır olması bir karakteristik özelliktir.

$$P_X = \frac{d\varphi^*}{d\varphi} = 0 \Rightarrow d\varphi^* = 0$$

olur. Bu ise anadoğruların kesişmesi demektir.

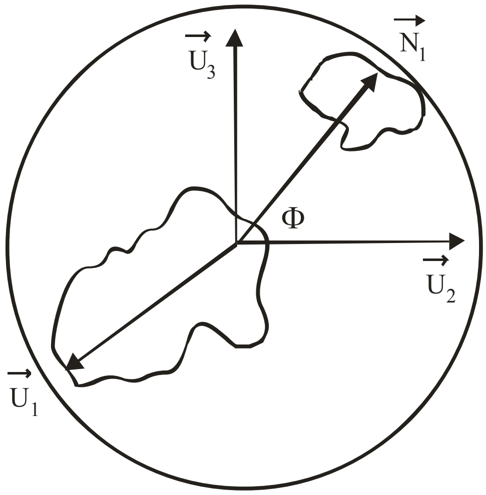
Tanım 2.3.19: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}(t)$ $\left(\left\|\overrightarrow{X}(t)\right\| = 1\right)$ regle yüzeyinde $\overrightarrow{X}(t)$ ve $\overrightarrow{X}(t+dt)$ komşu anadoğruların orta dikmesinin, $\overrightarrow{X}(t)$ anadoğrusu üzerindeki ayağına, **boğaz noktası** veya **sitriksiyon noktası** denir. Bu noktaların geometrik yerlerine ise **boğaz çizgisi** veya **sitriksiyon eğrisi** denir.

Tanım 2.3.20: $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}(t)$ $\left(\left\|\overrightarrow{X}(t)\right\| = 1\right)$ regle yüzeyinin bütün anadoğrularını dik kesen eğriye regle yüzeyin **ortogonal yörünge eğrisi** denir.

Tanım 2.3.21: K / K' kapalı dual küresel hareketinde, hareketli sistemin birinci eksininin çizdiği kapalı regle yüzey $\overrightarrow{U_1} = \overrightarrow{U_1}(t)$ olsun. Ayrıca $\left(\overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3}\right)$ dual düzleminde $\overrightarrow{U_2}$ ile $\Phi(t)=\varphi(t)+\varepsilon\varphi^*(t)$ dual açısını yapan $\overrightarrow{N_1}=\cos\Phi\overrightarrow{U_2}+\sin\Phi\overrightarrow{U_3}$ birim dual vektörünü alalım. K/K' hareketinde hareketli kürenin $\overrightarrow{U_1}$ birim dual vektörü $\overrightarrow{U_1}=\overrightarrow{U_1}(t)$ kapalı regle yüzeyini çizerken $\overrightarrow{N_1}$ birim dual vektörüne karşılık gelen doğru da bu kapalı regle yüzeyin ortogonal yörüngesi boyunca bir açılabilir yüzey çizsin. Bu taktirde bir periyotluk kapalı küresel harekette $\Phi(t)=\varphi(t)+\varepsilon\varphi^*(t)$ açısının toplam değişme miktarına $\overrightarrow{U_1}=\overrightarrow{U_1}(t)$ kapalı regle yüzeyinin **dual açılım açısı** denir ve

$$\wedge_{U_1}=\oint d\Phi \tag{2.3.8}$$

şeklinde ifade edilir (Şekil 2.3.3).



Şekil 2.3.3 Dual açılım açısı

Teorem 2.3.9: K/K' 1- parametreli birim dual küresel hareketinde hareketli,

$$U=\begin{bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{bmatrix}$$

sistemine bağlı bir $\overrightarrow{X}=\vec{x}+\varepsilon\overrightarrow{x^*}$ birim dual vektörünün çizdiği kapalı regle yüzeyin dual açılım açısı

$$\wedge_X=-\left\langle\overrightarrow{D},\overrightarrow{X}\right\rangle \tag{2.3.9}$$

dır (Gürsoy, 1983).

K/K' birim dual küresel hareketine, çizgiler uzayında karşılık gelen hareket H/H' olsun. Hareketli H uzayında tespit edilmiş bir X ana doğrusunun çizdiği (X) kapalı regle yüzeyinin açılım uzunluğu

$$L_X = \left\langle \overrightarrow{d^*}, \vec{x} \right\rangle + \left\langle \vec{d}, \overrightarrow{x^*} \right\rangle \tag{2.3.10}$$

bağıntısı ile verilir (Hacısalihoğlu, 1972).

Teorem 2.3.10: $ID-$Modül de bir $\vec{X} = \vec{X}(t)$ $\left(\left\|\vec{X}(t)\right\| = 1\right)$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı bu yüzeyin reel invaryantları cinsinden

$$\wedge_X = \lambda_x - \varepsilon L_x \tag{2.3.11}$$

şeklinde ifade edilir (Gürsoy, 1983).

$\overrightarrow{U_1} = \vec{U}(t) = \overrightarrow{u_1} + \varepsilon \overrightarrow{u_1^*}$, $\overrightarrow{U_2} = \dfrac{\overrightarrow{U'}}{\left\|\overrightarrow{U'}\right\|} = \overrightarrow{u_2} + \varepsilon \overrightarrow{u_2^*}$ ve $\overrightarrow{U_3} = \overrightarrow{U_1} \wedge \overrightarrow{U_2} = \overrightarrow{u_3} + \varepsilon \overrightarrow{u_3^*}$ olmak üzere $\left\{\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3}\right\}$ dual ortonormal çatısını alalım. Bu dual ortonormal çatının $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ eksenleri boğaz noktasında kesişir ve bu nokta $\overrightarrow{u_1}$ ekseni üzerindedir. $\overrightarrow{U_3}$ doğrusu $\overrightarrow{U_1}$ doğrularına dik yüzeyin boğaz noktasındaki teğetidir. $\overrightarrow{U_2}$ ise yüzeyin boğaz noktasındaki normalidir. $\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3}$ dual ortonormal vektörleri ile bu vektörlerin türev vektörleri arasında

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{U_1'} \\ \overrightarrow{U_2'} \\ \overrightarrow{U_3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{U_1} \\ \overrightarrow{U_2} \\ \overrightarrow{U_3} \end{bmatrix} \tag{2.3.12}$$

bağıntısı vardır. Burada dual eğrilikler

$$\begin{cases} \kappa = k_1 + \varepsilon k_1^* = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{U_1'}, \overrightarrow{U_1'} \right\rangle} \\ \tau = k_2 + \varepsilon k_2^* = \dfrac{\det\left(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_1'}, \overrightarrow{U_1''}\right)}{\left\langle \overrightarrow{U_1'}, \overrightarrow{U_1'} \right\rangle} \end{cases} \tag{2.3.13}$$

şeklindedir. (2.3.12) denklemi reel ve dual bileşenlere ayrılırsa

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_1'} = k_1\overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{u_2'} = -k_1\overrightarrow{u_1} + k_2\overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{u_3'} = -k_2\overrightarrow{u_2} \\ \\ \overrightarrow{u_1^{*\prime}} = k_1^*\overrightarrow{u_2} + k_1\overrightarrow{u_2^*} \\ \overrightarrow{u_2^{*\prime}} = -k_1^*\overrightarrow{u_1} + k_2^*\overrightarrow{u_3} - k_1\overrightarrow{u_1^*} + k_2\overrightarrow{u_3^*} \\ \overrightarrow{u_3^{*\prime}} = -k_2^*\overrightarrow{u_2} - k_2\overrightarrow{u_2^*} \end{cases} \tag{2.3.14}$$

bulunur.

Birim dual küresel harekette $\left\{\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3}\right\}$ dual ortonormal sistemi ani dual Pfaff vektörü etrafında bir dual dönme hareketi yapar. Bu vektör

$$\overline{\Psi} = \tau \overrightarrow{U}_1 + \kappa \overrightarrow{U}_3 \tag{2.3.15}$$

denklemi ile bellidir. Hareketin dual Steiner dönme vektörü ise

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{U_1}\oint \tau dt + \overrightarrow{U_3}\oint \kappa dt \tag{2.3.16}$$

şeklinde bulunur. (2.3.16) denklemi reel ve dual bileşenlere ayrılırsa

$$\begin{cases} \vec{d} = \overrightarrow{u_1}\oint k_2 dt + \overrightarrow{u_3}\oint k_1 dt \\ \overrightarrow{d^*} = \overrightarrow{u_1^*}\oint k_2 dt + \overrightarrow{u_1}\oint k_2^* dt + \overrightarrow{u_3^*}\oint k_1 dt + \overrightarrow{u_3}\oint k_1^* dt \end{cases} \tag{2.3.17}$$

olur.

K/K' 1-parametreli birim dual küresel kapalı hareketinde $\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3}$ birim dual vektörlerinin birim dual küre üzerinde çizdiği dual eğrilere çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzeyler $\left(\overrightarrow{U_1}\right), \left(\overrightarrow{U_2}\right), \left(\overrightarrow{U_3}\right)$ olsun. Bu yüzeylerin açılım uzunlukları, dual açılım açıları ve dralları sırasıyla ,

$$\begin{cases} L_{U_1} = \oint k_2^* dt \\ \lambda_{U_1} = -\oint k_2 dt \\ P_{U_1} = \dfrac{k_1^*}{k_1} \end{cases} \tag{2.3.18}$$

$$\begin{cases} L_{U_2} = 0 \\ \lambda_{U_2} = 0 \\ P_{U_2} = \dfrac{k_1 k_1^* + k_2 k_2^*}{k_1^2 + k_2^2} \end{cases} \tag{2.3.19}$$

ve

$$\begin{cases} L_{U_3} = \oint k_1^* dt \\ \lambda_{U_3} = -\oint k_1 dt \\ P_{U_3} = \dfrac{k_2^*}{k_2} \end{cases} \tag{2.3.20}$$

şeklinde verilir.

$\overrightarrow{\Psi}$ ani dual Pfaff vektörü ile $\overrightarrow{U_3}$ vektörü arasındaki açı $\gamma(t) = \alpha(t) + \varepsilon\alpha^*(t)$ olsun. Bu durumda,

$$\kappa = \left\|\overrightarrow{\Psi}\right\| \cos\gamma, \qquad \tau = \left\|\overrightarrow{\Psi}\right\| \sin\gamma \tag{2.3.21}$$

olur. $\overrightarrow{\Psi}$ vektörü yönündeki birim vektör $\vec{C} = \vec{c} + \varepsilon\overrightarrow{c^*}$ ile gösterilirse,

$$\left\|\overrightarrow{\Psi}\right\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \geq 0$$

olmak üzere

$$\vec{C} = \sin\gamma \overrightarrow{U_1} + \cos\gamma \overrightarrow{U_3} \tag{2.3.22}$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlik reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa,

$$\begin{cases} \vec{c} = \sin\alpha \overrightarrow{u_1} + \cos\alpha \overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{c^*} = \sin\alpha \overrightarrow{u_1^*} + \alpha^* \cos\alpha \overrightarrow{u_1} + \cos\alpha \overrightarrow{u_3^*} - \alpha^* \sin\alpha \overrightarrow{u_3} \end{cases} \tag{2.3.23}$$

olur.

$\vec{C}$ birim dual vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği dual eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzey $(\vec{C})$ ile gösterilsin.

$(\vec{C})$ kapalı regle yüzeyinin açılım uzunluğu

$$L_C = \left\langle \vec{d}, \overrightarrow{c^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{d^*}, \vec{c} \right\rangle$$

dır. $\vec{d},\vec{d^*},\vec{c}$ ve $\vec{c^*}$ ın yerlerine (2.3.17) ve (2.3.23) deki eşitlikleri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$L_C=\sin\alpha\oint k_2^* dt+\cos\alpha\oint k_1^* dt+\alpha^*\left(\cos\alpha\oint k_2 dt-\sin\alpha\oint k_1 dt\right) \qquad (2.3.24)$$

bulunur. Burada (2.3.18) ve (2.3.20) deki eşitlikler dikkate alınırsa,

$$L_C=\sin\alpha L_{U_1}+\cos\alpha L_{U_3}-\alpha^*\left(\cos\alpha\,\lambda_{U_1}-\sin\alpha\,\lambda_{U_3}\right) \qquad (2.3.25)$$

olur.

$\left(\vec{C}\right)$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı

$$\wedge_C=-\left\langle\vec{D},\vec{C}\right\rangle$$

dır. $\vec{D}$ ve $\vec{C}$ nin yerine (2.3.16) ve (2.3.22) deki eşitlikleri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\wedge_C=-\left(\sin\gamma\oint\tau dt+\cos\gamma\oint\kappa dt\right) \qquad (2.3.26)$$

olur. Burada $\wedge_{U_1}=-\oint\tau dt$ ve $\wedge_{U_3}=-\oint\kappa dt$ dikkate alınırsa

$$\wedge_C=\sin\gamma\wedge_{U_1}+\cos\gamma\wedge_{U_3} \qquad (2.3.27)$$

bulunur.

Tanım 2.3.22: $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\vec{a^*},\quad \vec{B}=\vec{b}+\varepsilon\vec{b^*}\in ID^3$ olmak üzere

$$\langle,\rangle: ID^3\times ID^3\to ID$$
$$\left(\vec{A},\vec{B}\right)\to\left\langle\vec{A},\vec{B}\right\rangle=\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle+\varepsilon\left(\left\langle\vec{a},\vec{b}^*\right\rangle+\left\langle\vec{a}^*,\vec{b}\right\rangle\right)$$

şeklinde tanımlı iç çarpıma **Lorentz iç çarpımı** denir. Burada

$$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=-a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

şeklindedir.

Tanım 2.3.23: Üzerinde Lorentz iç çarpımı tanımlı ID^3 uzayına **Dual Lorentz uzayı** denir ve bu uzay

$$ID_1^3=\left\{\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\vec{a^*}\,\middle|\,\vec{a},\vec{a^*}\in IR_1^3\right\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.24: $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*} \in ID_1^3$ olmak üzere ;

***i*)** $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle < 0$ ise $\vec{A}$ dual vektörüne **timelike (zamansı)** ,

***ii*)** $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle > 0$ veya $\vec{A} = 0$ ise $\vec{A}$ dual vektörüne **spacelike (uzaysı),**

***iii*)** $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = 0$, $\vec{A} \neq 0$ ise $\vec{A}$ dual vektörüne **lightlike (null) (ışıksı) vektör** denir.

Tanım 2.3.25: $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*} \in ID_1^3$ vektörünün **normu**

$$\left\| \vec{A} \right\| = \sqrt{\left| \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle \right|} = \left\| \vec{a} \right\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle}{\left\| \vec{a} \right\|} \ , \ \left\| \vec{a} \right\| \neq 0 .$$

Tanım 2.3.26: $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}$, $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b^*} \in ID_1^3$ dual vektörlerin **vektörel çarpımı**

$$\wedge : ID^3 \times ID^3 \to ID^3$$
$$\left(\vec{A}, \vec{B} \right) \ \to \ \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon \left(\vec{a} \wedge \vec{b^*} + \vec{a^*} \wedge \vec{b} \right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(a_3 b_2 - a_2 b_3 , a_1 b_3 - a_3 b_1 , a_1 b_2 - a_2 b_1 \right)$$

dır.

Lemma 2.3.1: $X, Y \in ID_1^3$ için $X \neq 0$ ve $Y \neq 0$ olmak üzere; $\langle X, Y \rangle = 0$ olsun. X dual timelike vektör ise, bu durumda Y dual spacelike vektördür (Ratcliffe, 1994).

Lemma 2.3.2: $X, Y \in ID_1^3$ pozitif (negatif) dual timelike vektörler olsun. Bu durumda $\langle X, Y \rangle \leq \|X\| \|Y\|$ eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart X ve Y dual vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır (Ratcliffe, 1994).

Lemma 2.3.3:

i) $X, Y \in ID_1^3$ pozitif (negatif) dual timelike vektörler olsun. Bu durumda

$$\langle X, Y \rangle \leq \|X\| \|Y\|$$

eşitsizliği vardır.

$$\langle X, Y \rangle = \|X\| \|Y\| \cosh \Phi \left(X, Y \right) \qquad \Phi = \eta \left(X, Y \right)$$

olacak şekilde bir tek $\Phi > 0$ sayısı vardır. Bu Φ açısına **dual timelike vektörler arasındaki Lorentzian dual timelike açı** denir.

ii) $X,Y \in ID_1^3$ dual spacelike vektörler olsun. X ve Y vektörlerinin gerdiği düzlem spacelike ise $\left|\langle X,Y\rangle\right| \leq \|X\|\|Y\|$ eşitsizliği vardır.

$$\langle X,Y\rangle = \|X\|\|Y\|\cos\Phi(X,Y) \qquad \Phi = \eta(X,Y)$$

olacak şekilde $0 \leq \Phi \leq \pi$ sayısına **dual spacelike vektörler arasındaki Lorentzian dual spacelike açı** denir.

iii) $X,Y \in ID_1^3$ dual spacelike vektörler olsun. X ve Y vektörlerinin gerdiği düzlem timelike ise $\left|\langle X,Y\rangle\right| > \|X\|\|Y\|$ eşitsizliği vardır.

$$\langle X,Y\rangle = \|X\|\|Y\|\cosh\Phi(X,Y) \qquad \Phi = \eta(X,Y)$$

olacak şekilde $\Phi > 0$ sayısına **dual spacelike vektörler arasındaki Lorentzian dual timelike açı** denir.

iv) $X \in ID_1^3$ dual spacelike $Y \in ID_1^3$ pozitif dual timelike vektörler olsun.

$$\langle X,Y\rangle = \|X\|\|Y\|\sinh\Phi(X,Y) \quad \Phi = \eta(X,Y)$$

olacak şekilde $\Phi > 0$ sayısına **dual spacelike vektör ve dual timelike vektör arasındaki Lorentzian dual timelike dual açı** denir (Ratcliffe, 1994).

Tanım 2.3.27: $\tilde{\alpha} : I \to D_1^3$, $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) + \varepsilon\alpha^*(t)$ eğrisinin teğet vektörü $\overrightarrow{U_1} = \overrightarrow{u_1} + \varepsilon\overrightarrow{u_1^*}$ olsun.

***i*)** $\left\langle \overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_1} \right\rangle > 0$ ise $\tilde{\alpha}$ eğrisine **uzaysı (spacelike) dual eğri**,

***ii*)** $\left\langle \overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_1} \right\rangle < 0$ ise $\tilde{\alpha}$ eğrisine **zamansı (timelike) dual eğri**,

***iii*)** $\left\langle \overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_1} \right\rangle = 0$ ise $\tilde{\alpha}$ eğrisine **ışıksı (lightlike veya null) dual eğri** denir.

Tanım 2.3.28: $\tilde{\alpha} : I \to D_1^3 \quad s \to \tilde{\alpha}(s)$ diferensiyellenebilir eğrinin dual ortonormal üçlüsü $\left\{\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3}\right\}$, dual eğrilikleri κ ve τ olsun.

$\tilde{\alpha}$, dual timelike birim hızlı eğri ise,

$$\overrightarrow{U_1} \wedge \overrightarrow{U_2} = -\overrightarrow{U_3} \;,\; \overrightarrow{U_2} \wedge \overrightarrow{U_3} = \overrightarrow{U_1} \;,\; \overrightarrow{U_3} \wedge \overrightarrow{U_1} = -\overrightarrow{U_2} \qquad (2.3.28)$$

olur. Buna bağlı olarak türev denklemleri

$$\begin{cases} \overrightarrow{U_1'} = \kappa \overrightarrow{U_2} \\ \overrightarrow{U_2'} = \kappa \overrightarrow{U_1} - \tau \overrightarrow{U_3} \\ \overrightarrow{U_3'} = \tau \overrightarrow{U_2} \end{cases} \tag{2.3.29}$$

ve Darboux vektörü

$$\overrightarrow{\Psi} = \tau \overrightarrow{U_1} - \kappa \overrightarrow{U_3} \tag{2.3.30}$$

şeklinde bulunur. $\overrightarrow{\Psi}$ Darboux vektörü ve $\overrightarrow{U_3}$ birim dual spacelike vektörü arasındaki Lorentzian dual timelike açı $\Phi = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ ve $\overrightarrow{\Psi}$ yönündeki birim dual vektör $\vec{C} = \vec{c} + \varepsilon \overrightarrow{c^*}$ olsun.

a) $|\kappa| > |\tau|$ ise $\overrightarrow{\Psi}$ dual spacelike vektördür. Bu durumda eğrilikler ve $\vec{C}$ vektörü

$$\begin{cases} \kappa = \left\|\overrightarrow{\Psi}\right\| \cosh \Phi \\ \tau = \left\|\overrightarrow{\Psi}\right\| \sinh \Phi \end{cases} , \quad \left\|\overrightarrow{\Psi}\right\|^2 = \left\langle \overrightarrow{\Psi}, \overrightarrow{\Psi} \right\rangle = \kappa^2 - \tau^2 \tag{2.3.31}$$

ve

$$\vec{C} = \sinh \Phi \overrightarrow{U_1} - \cosh \Phi \overrightarrow{U_3} \tag{2.3.32}$$

şeklinde bulunur.

b) $|\kappa| < |\tau|$ ise $\overrightarrow{\Psi}$ dual timelike vektördür. Bu durumda eğrilikler ve $\vec{C}$ vektörü

$$\begin{cases} \kappa = \left\|\overrightarrow{\Psi}\right\| \sinh \Phi \\ \tau = \left\|\overrightarrow{\Psi}\right\| \cosh \Phi \end{cases} , \quad \left\|\overrightarrow{\Psi}\right\|^2 = -\left\langle \overrightarrow{\Psi}, \overrightarrow{\Psi} \right\rangle = -\left(\kappa^2 - \tau^2\right) \tag{2.3.33}$$

ve

$$\vec{C} = \cosh \Phi \overrightarrow{U_1} - \sinh \Phi \overrightarrow{U_3} \tag{2.3.34}$$

şeklinde bulunur.

3.MATERYAL VE METOT

3.1. Paralel Regle Yüzeyler ve Bazı Karakteristik Özellikleri

K/K' 1-parametreli birim dual küresel kapalı hareketinde diferensiyellenebilir dual bir eğri

$$\vec{U}=\vec{U}(t)\ ,\ \left\|\vec{U}(t)\right\|=1$$

olsun. Bu dual eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzey $\left(\vec{U}\right)$ ile gösterilsin. $\vec{U}=\vec{U}(t)$ eğrisine ait dual ortonormal sistemi

$$\vec{U}_1=\vec{U}(t)\ ,\ \vec{U}_2=\frac{\overrightarrow{U'}(t)}{\left\|\vec{U}(t)\right\|}\ ,\ \vec{U}_3=\vec{U}_1\wedge\vec{U}_2$$

şeklinde alınsın.

Tanım 3.1: $\vec{U}(t)$ vektörü ile sabit $\Phi=\varphi+\varepsilon\varphi^*$ açısı yapan

$$\vec{V}=\cos\Phi\overrightarrow{U_1}+\sin\Phi\overrightarrow{U_3} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlı $\vec{V}$ birim dual vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği dual kapalı eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen $\left(\vec{V}\right)$ yüzeyine $\left(\vec{U}\right)$ yüzeyinin **paralel regle yüzeyi** denir (Erim, 1949).

$\vec{V_1}=\vec{V}(t)$ alınsın. Türev alnırsa,

$$\overrightarrow{V_1'}=\left(\kappa\cos\Phi-\tau\sin\Phi\right)\overrightarrow{U_2} \tag{3.2}$$

bulunur. $\overrightarrow{V_1'}$ nün normu P ile gösterilirse

$$P=\kappa\cos\Phi-\tau\sin\Phi \tag{3.3}$$

olur. $\vec{V_2}=\dfrac{\overrightarrow{V_1'}}{P}$ olduğundan

$$\vec{V_2}=\overrightarrow{U_2} \tag{3.4}$$

ve $\vec{V_3}=\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}$ yazılabildiğinden

$$\vec{V_3}=-\sin\Phi\overrightarrow{U_1}+\cos\Phi\overrightarrow{U_3} \tag{3.5}$$

bulunur. (3.1) , (3.4) ve (3.5) ifadeleri birleştirilerek matris formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{V_1} \\ \overrightarrow{V_2} \\ \overrightarrow{V_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Phi & 0 & \sin\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Phi & 0 & \cos\Phi \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \overrightarrow{U_1} \\ \overrightarrow{U_2} \\ \overrightarrow{U_3} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

veya

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{U_1} \\ \overrightarrow{U_2} \\ \overrightarrow{U_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Phi & 0 & -\sin\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Phi & 0 & \cos\Phi \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \overrightarrow{V_1} \\ \overrightarrow{V_2} \\ \overrightarrow{V_3} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

olur. (3.7) ifadesi reel dual bileşenlere ayrılırsa,

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_1} = \cos\varphi \overrightarrow{v_1} - \sin\varphi \overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{u_3} = \sin\varphi \overrightarrow{v_1} + \cos\varphi \overrightarrow{v_3} \\ \\ \overrightarrow{u_1^*} = \cosh \overrightarrow{v_1^*} - \sin\varphi \overrightarrow{v_3^*} - \varphi^* (\sin\varphi \overrightarrow{v_1} + \cos\varphi \overrightarrow{v_3}) \\ \overrightarrow{u_2^*} = \overrightarrow{v_2^*} \\ \overrightarrow{u_3^*} = \sin\varphi \overrightarrow{v_1^*} + \cos\varphi \overrightarrow{v_3^*} - \varphi^* (-\cos\varphi \overrightarrow{v_1} + \sin\varphi \overrightarrow{v_3}) \end{cases} \tag{3.8}$$

bulunur. $\vec{V}(t)$ eğrisinin eğrilikleri sırasıyla $P = p + \varepsilon p^*$ ve $Q = q + \varepsilon q^*$ olsun. (2.3.12) ifadesine benzer olarak $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}$ dual ortonormal vektörleri ile bu vektörlerin türev vektörleri arasında

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_1'} = P\overrightarrow{V_2} \quad , \quad P = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{V_1'}, \overrightarrow{V_1'} \right\rangle} \\ \overrightarrow{V_2'} = -P\overrightarrow{V_1} + Q\overrightarrow{V_3} \quad , \quad Q = \dfrac{\det\left(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_1'}, \overrightarrow{V_1''} \right)}{\left\langle \overrightarrow{V_1'}, \overrightarrow{V_1'} \right\rangle} \\ \overrightarrow{V_3'} = -Q\overrightarrow{V_2} \end{cases} \tag{3.9}$$

bağıntısı vardır. Bu son ifade reel ve dual bileşenlere ayrılırsa,

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1'} = p\overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{v_2'} = -p\overrightarrow{v_1} + q\overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{v_3'} = -q\overrightarrow{v_2} \\ \\ \overrightarrow{v_1^{*\prime}} = p\overrightarrow{v_2^*} + p^*\overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{v_2^{*\prime}} = -p\overrightarrow{v_1^*} - p^*\overrightarrow{v_1} + q\overrightarrow{v_3^*} + q^*\overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{v_3^{*\prime}} = -q\overrightarrow{v_2^*} - q^*\overrightarrow{v_2} \end{cases} \tag{3.10}$$

olur. $\overrightarrow{V_1'}$ nün t ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_1''} &= (-\kappa^2 \cos\Phi + \kappa\tau\sin\Phi)\overrightarrow{U_1} \\ &+ (\kappa\cos\Phi - \tau\sin\Phi)'\overrightarrow{U_2} + (\kappa\tau\cos\Phi - \tau^2\sin\Phi)\overrightarrow{U_3} \end{aligned} \tag{3.11}$$

bulunur. $Q = \dfrac{\det\left(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_1'}, \overrightarrow{V_1''}\right)}{\left\langle \overrightarrow{V_1'}, \overrightarrow{V_1'} \right\rangle}$ ifadesinde (3.1) , (3.2) ve (3.11) bağıntıları yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$Q = \frac{\begin{vmatrix} \cos\Phi & 0 & \sin\Phi \\ 0 & \kappa\cos\Phi - \tau\sin\Phi & 0 \\ -\kappa^2\cos\Phi + \kappa\tau\sin\Phi & (\kappa\cos\Phi - \tau\sin\Phi)' & \kappa\tau\cos\Phi - \tau^2\sin\Phi \end{vmatrix}}{< (\kappa\cos\Phi - \tau\sin\Phi)\vec{U}_2, (\kappa\cos\Phi - \tau\sin\Phi)\vec{U}_2 >},$$

$$Q = \kappa\sin\Phi + \tau\cos\Phi \tag{3.12}$$

elde edilir. P ve Q nun (3.3) ve (3.12) deki eşitlikleri reel ve dual bileşenlere ayrılırsa

$$\begin{cases} p = k_1\cos\varphi - k_2\sin\varphi \\ p^* = k_1^*\cos\varphi - k_2^*\sin\varphi - \varphi^*(k_1\sin\varphi + k_2\cos\varphi\ ) \\ \\ q = k_1\sin\varphi + k_2\cos\varphi \\ q^* = k_1^*\sin\varphi + k_2^*\cos\varphi - \varphi^*(-k_1\cos\varphi + k_2\sin\varphi\ ) \end{cases} \tag{3.13}$$

olur. (2.3.15) bağıntısına benzer olarak birim dual küresel harekette $\{\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2},\overrightarrow{V_3}\}$ dual ortonormal sistemi ani dual Pfaff vektörü etrafında bir dual dönme hareketi yapacağından bu vektör

$$\overline{\overline{\Psi}} = Q\overrightarrow{V_1} + P\overrightarrow{V_3} \tag{3.14}$$

denklemi ile verilir. Buna bağlı olarak hareketin dual Steiner dönme vektörü

$$\overline{\overline{D}} = \oint \overline{\overline{\Psi}} \tag{3.15}$$

dir. $\overline{\overline{\Psi}}$ vektörünün eşiti burada yerine yazılırsa,

$$\overline{\overline{D}} = \overrightarrow{V_1}\oint Qdt + \overrightarrow{V_3}\oint Pdt \tag{3.16}$$

olur. (2.3.15) bağıntısında $\overrightarrow{U_1}$ ve $\overrightarrow{U_3}$ ün yerine (3.7) deki karşılıkları yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\overline{\Psi} = Q\overrightarrow{V_1} + P\overrightarrow{V_3}$$

bulunur ve buradan da $\overrightarrow{D} = \overline{\overline{D}}$ olur. Dolayısıyla hareketin dual Steiner dönme vektörü

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{V_1}\oint Qdt + \overrightarrow{V_3}\oint Pdt \tag{3.17}$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifade reel ve dual bileşenlere ayrılırsa

$$\begin{cases} \vec{d} = \overrightarrow{v_1}\oint qdt + \overrightarrow{v_3}\oint pdt \\ \\ \overrightarrow{d^*} = \overrightarrow{v_1}\oint q^* dt + \overrightarrow{v_1^*}\oint qdt + \overrightarrow{v_3}\oint p^* dt + \overrightarrow{v_3^*}\oint pdt \end{cases} \tag{3.18}$$

olur.

Şimdi $(\overrightarrow{V_1}),(\overrightarrow{V_2})$ ve $(\overrightarrow{V_3})$ kapalı regle yüzeylerinin integral invaryantları ile $(\overrightarrow{U_1}),(\overrightarrow{U_2})$ ve $(\overrightarrow{U_3})$ kapalı regle yüzeylerinin integral invaryantları arasındaki bağıntıları araştıralım.

$(\overrightarrow{V_1})$ kapalı regle yüzeyinin açılım uzunluğu

$$L_{V_1} = \langle \vec{d}, \overrightarrow{v_1^*} \rangle + \langle \overrightarrow{d^*}, \overrightarrow{v_1} \rangle,$$

$$L_{V_1} = \oint q^* dt \tag{3.19}$$

dır. Burada q^* ın yerine (3.13) deki karşılığı yazılırsa

$$L_{V_1} = \sin\varphi \oint k_1^* dt + \cos\varphi \oint k_2^* dt - \varphi^* (-\cos\varphi \oint k_1 dt + \sin\varphi \oint k_2 dt) \tag{3.20}$$

olur. Burada (2.1.13) , (2.1.15), (2.3.18) ve (2.3.20) dikkate alınırsa,

$$L_{V_1} = \cos\varphi L_{U_1} + \sin\varphi L_{U_3} + \varphi^*\left(\sin\varphi\lambda_{u_1} - \cos\varphi\lambda_{u_3}\right). \tag{3.21}$$

elde edilir.

$\left(\vec{V}_1\right)$ kapalı regle yüzeyin dual açılım açısı

$$\wedge_{V_1} = -\left\langle \vec{D}, \vec{V}_1 \right\rangle$$

dır. $\vec{D}$ nin yerine (3.17) deki karşılığı yazılırsa

$$\wedge_{V_1} = -\oint Q dt. \tag{3.22}$$

olur. Q nun yerine (3.12) deki karşılığı yazılırsa

$$\wedge_{V_1} = -\sin\Phi \oint \kappa dt - \cos\Phi \oint \tau dt$$

bulunur. (2.3.18) ve (2.3.20) eşitlikleri bu son ifadede dikkate alınırsa

$$\wedge_{V_1} = \cos\Phi \wedge_{U_1} + \sin\Phi \wedge_{U_3} \tag{3.23}$$

elde edilir.

$\left(\vec{V}_1\right)$ kapalı regle yüzeyinin dralı

$$P_{V_1} = \frac{\left\langle d\vec{v}_1, d\vec{v}_1^* \right\rangle}{\left\langle d\vec{v}_1, d\vec{v}_1 \right\rangle}$$

dır. Burada $d\vec{v}_1$ ve $d\vec{v}_1^*$ yerlerine (3.10) daki eşitlikleri yazılırsa,

$$P_{V_1} = \frac{p^*}{p} \tag{3.24}$$

olur. p ve p^* yerine (3.13) deki eşitlikleri yazılırsa

$$P_{V_1} = \frac{k_1^*\cos\varphi - k_2^*\sin\varphi}{k_1\cos\varphi - k_2\sin\varphi} - \varphi^* \frac{k_1\sin\varphi + k_2\cos\varphi}{k_1\cos\varphi - k_2\sin\varphi} \tag{3.25}$$

bulunur. Böylece şu teorem verilebilir :

Teorem 3.1: $V_1 = \vec{V}(t)$ vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı dual eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen yüzey, $\left(\vec{U}\right)$ yüzeyinin paralel regle yüzeyi olsun. Bu durumda $\left(\vec{V}_1\right)$ yüzeyinin açılım uzunluğu, dual açılım açısı ve dralı arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

1-) $L_{V_1} = \oint q^* dt$ 2-) $\wedge_{V_1} = -\oint Q dt$ 3-) $P_{V_1} = \dfrac{p^*}{p}$

(Şenyurt, 1999).

Sonuç 3.1: $V_1 = \vec{V}(t)$ vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı dual eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen yüzey, $(\vec{U})$ yüzeyinin paralel regle yüzeyi olsun. $(\vec{V_1})$ yüzeyinin açılım uzunluğu ve dual açılım açısı, $(\vec{U_1})$ ile $(\vec{U_3})$ yüzeylerinin invaryantları cinsinden

1-) $L_{V_1} = \cos\varphi L_{U_1} + \sin\varphi L_{U_3} + \varphi^*\left(\sin\varphi\lambda_{u_1} - \cos\varphi\lambda_{u_3}\right),$

2-) $\wedge_{V_1} = \cos\Phi \wedge_{U_1} + \sin\Phi \wedge_{U_3}$

dır, (Şenyurt, 1999).

Teorem 3.2: $V_1 = \vec{V}(t)$ vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı dual eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen yüzey, $(\vec{U})$ yüzeyinin paralel regle yüzeyi olsun. Bu durumda $(\vec{V_2})$ yüzeyinin açılım uzunluğu, dual açılım açısı ve dralı arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

1-) $L_{V_2} = 0$ 2-) $\wedge_{V_2} = 0$ 3-) $P_{V_2} = \dfrac{qq^* + pp^*}{q^2 + p^2}$

(Şenyurt, 1999).

Teorem 3.3: $V_1 = \vec{V}(t)$ vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı dual eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen yüzey, $(\vec{U})$ yüzeyinin paralel regle yüzeyi olsun. Bu durumda $(\vec{V_3})$ yüzeyinin açılım uzunluğu, dual açılım açısı ve dralı arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

1-) $L_{V_3} = \oint p^* dt$ 2-) $\wedge_{V_3} = -\oint P dt$ 3-) $P_{V_3} = \dfrac{q^*}{q}$

(Şenyurt, 1999).

Sonuç 3.2: $V_1 = \vec{V}(t)$ vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı dual eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen yüzey, $(\vec{U})$ yüzeyinin paralel regle yüzeyi olsun.

$\left(\overrightarrow{V_3}\right)$ yüzeyinin açılım uzunluğu ve dual açılım açısı, $\left(\overrightarrow{U_1}\right)$ ile $\left(\overrightarrow{U_3}\right)$ yüzeylerinin invaryantları cinsinden

1-) $L_{V_3} = -\sin\varphi L_{U_1} + \cos\varphi L_{U_3} + \varphi^*\left(\cos\varphi\lambda_{u_1} + \sin\varphi\lambda_{u_3}\right)$,

2-) $\wedge_{V_3} = -\sin\Phi\wedge_{U_1} + \cos\Phi\wedge_{U_3}$

dır, Şenyurt 1999).

$\overline{\overline{\Psi}}$ ani dual Pfaff vektörü yönündeki birim vektör $\overline{\overline{C}}$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$P = \left\|\overline{\overline{\Psi}}\right\|\cos\beta\ ,\quad Q = \left\|\overline{\overline{\Psi}}\right\|\sin\beta \tag{3.26}$$

olmak üzere

$$\overline{\overline{C}} = \sin\beta\overrightarrow{V}_1 + \cos\beta\overrightarrow{V_3} \tag{3.27}$$

dır. Burada $\beta(t) = \mu(t) + \varepsilon\mu^*(t)$ şeklinde olup, $\overline{\overline{\Psi}}$ ani dual Pfaff vektörü ile $\overrightarrow{V_3}$ vektörü arasındaki dual açıdır. $\overline{\overline{C}}$ ifadesinde $\overrightarrow{V_1}$ ile $\overrightarrow{V_3}$ vektörlerinin yerlerine (3.1) ve (3.5) deki eşitlikleri yazılırsa,

$$\overline{\overline{C}} = \left(\sin\beta\cos\Phi - \cos\beta\sin\Phi\right)\overrightarrow{U}_1 + \left(\sin\beta\sin\Phi + \cos\beta\cos\Phi\right)\overrightarrow{U_3}\,,$$

$$\overline{\overline{C}} = \sin\left(\beta - \Phi\right)\overrightarrow{U}_1 + \cos\left(\beta - \Phi\right)\overrightarrow{U_3} \tag{3.28}$$

bulunur. $\overline{\overline{C}}$ vektörünün (3.27) deki ifadesi reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{cases} \overline{\overline{c}} = \sin\mu\overrightarrow{v_1} + \cos\mu\overrightarrow{v_3} \\ \overline{\overline{c}}^* = \sin\mu\overrightarrow{v_1^*} + \cos\mu\overrightarrow{v_3^*} + \varphi^*\cos\mu\overrightarrow{v_1} - \varphi^*\sin\mu\overrightarrow{v_3} \end{cases} \tag{3.29}$$

olur.

K/K' 1-parametreli birim dual küresel kapalı hareketinde $\overline{\overline{C}}$ birim dual vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği dual eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzey $\left(\overline{\overline{C}}\right)$ ile gösterilirse, bu yüzeyin integral invaryantları hesaplanabilir.

$\left(\overline{\overline{C}}\right)$ kapalı regle yüzeyinin açılım uzunluğu

$$L_{\overline{C}} = \left\langle \vec{d}, \overline{\overline{c}}^* \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{d^*}, \overline{\overline{c}} \right\rangle$$

dır. $\vec{d}$ ve $\overrightarrow{d^*}$ yerine (3.18) deki eşitlikleri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$L_{\overline{C}} = \sin\mu L_{V_1} + \cos\mu L_{V_3} - \mu^*\left(\cos\mu\lambda_{V_1} - \sin\mu\lambda_{V_3}\right),$$

$$\begin{aligned} L_{\overline{C}} &= \cos(\mu-\varphi)L_{U_3} + \sin(\mu-\varphi)L_{U_1} \\ &\quad + \left(\mu^*-\varphi^*\right)\left(\sin(\mu-\varphi)\lambda_{U_3} - \cos(\mu-\varphi)\lambda_{U_1}\right) \end{aligned} \tag{3.30}$$

bulunur.

$\left(\vec{\vec{C}}\right)$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı

$$\wedge_{\overline{C}} = -\left\langle \vec{D}, \vec{\vec{C}} \right\rangle$$

dır. Burada $\vec{D}$ ve $\vec{\vec{C}}$ vektörlerinin yerine (3.17) ve (3.27) eşitlikleri yazılırsa

$$\wedge_{\overline{C}} = -\sin\beta\oint Qdt - \cos\beta\oint Pdt$$

veya

$$\wedge_{\overline{C}} = \sin\beta\wedge_{V_1} + \cos\beta\wedge_{V_3} \tag{3.31}$$

bulunur. Yukarıda Λ_{V_1} ve Λ_{V_3} yerlerine eşitleri yazılırsa

$$\wedge_{\overline{C}} = \sin(\beta-\Phi)\wedge_{U_1} + \cos(\beta-\Phi)\wedge_{U_3} \tag{3.32}$$

elde edilir. Böylece şu teorem verilebilir :

Teorem 3.4: $V_1 = \vec{V}(t)$ vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı dual eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen yüzey, $\left(\vec{U}\right)$ yüzeyinin paralel regle yüzeyi olsun. $\left\{\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}\right\}$ dual ortanormal sistemine bağlı olarak oluşan $\vec{\vec{C}}$ birim dual vektörünün oluşturduğu kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu ve dual açılım açısı

1) $L_{\overline{C}} = \sin\mu L_{V_1} + \cos\mu L_{V_3} - \mu^*\left(\cos\mu\lambda_{V_1} - \sin\mu\lambda_{V_3}\right)$

2) $\wedge_{\overline{C}} = \sin\beta\wedge_{V_1} + \cos\beta\wedge_{V_3}$

ifadeleri ile verilir (Şenyurt 1999).

Sonuç 3.3 $V_1 = \vec{V}(t)$ vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı dual eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen yüzey $\left(\vec{U}\right)$ yüzeyinin paralel regle yüzeyi olsun. $\left\{\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}\right\}$ dual ortonormal sistemine bağlı olarak oluşan $\vec{\vec{C}}$ birim dual vektörünün oluşturduğu kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu ve dual açılım açısının $\left(\vec{U_1}\right)$ ile $\left(\vec{U_3}\right)$ yüzeylerinin invaryantları cinsinden

$$1) L_{\overline{C}} = \cos(\mu - \varphi) L_{U_3} + \sin(\mu - \varphi) L_{U_1}$$
$$+ (\mu^* - \varphi^*)\left(\sin(\mu - \varphi)\lambda_{U_3} - \cos(\mu - \varphi)\lambda_{U_1}\right)$$

$$2) \wedge_{\overline{C}} = \sin(\beta - \Phi) \wedge_{U_1} + \cos(\beta - \Phi) \wedge_{U_3}$$

dır, (Şenyurt 1999).

4.BULGULAR

4.1. Dual Lorentz Uzayında Kapalı Timelike Bir Eğrinin Oluşturduğu Paralel Regle Yüzeyin Bazı Karakteristik Özellikleri

K/K' 1-parametreli birim dual küresel kapalı hareketinde diferensiyellenebilir dual timelike bir eğri

$$\vec{U}=\vec{U_1}(t)\ ,\ \left\|\vec{U}(t)\right\|=1$$

olsun. Bu eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzey $(\vec{U})$ ile gösterilsin. $\vec{U}=\vec{U_1}(t)$ eğrisine ait dual ortonormal sistemi

$$\vec{U}_1=\vec{U}(t)\quad,\quad \vec{U}_2=\frac{\vec{U'}(t)}{\left\|\vec{U}(t)\right\|}\quad,\quad \vec{U}_3=\vec{U}_1\wedge\vec{U}_2$$

şeklinde alalım. $\vec{U}(t)$ timelike bir eğri olduğundan $\vec{U_1}$ timelike vektör , $\vec{U_2}$ ve $\vec{U_3}$ spacelike vektörlerdir. Burada

$$\vec{U_1}\wedge\vec{U_2}=-\vec{U_3}\ ,\ \vec{U_2}\wedge\vec{U_3}=\vec{U_1}\ ,\ \vec{U_3}\wedge\vec{U_1}=-\vec{U_2}\,. \tag{4.1}$$

$\vec{U}(t)$ dual timelike eğrisinin eğrilik ve burulması sırasıyla κ ve τ ile gösterilirse, dual Frenet vektörleri ile bunların türev vektörleri arasında (2.3.29) dan

$$\begin{cases}\overrightarrow{U_1'}=\kappa\vec{U_2}\\ \overrightarrow{U_2'}=\kappa\vec{U_1}-\tau\vec{U_3}\\ \overrightarrow{U_3'}=\tau\vec{U_2}\end{cases}\quad, \tag{4.2}$$

bağıntısı vardır. Bu ifade reel ve dual bileşenlere ayrılırsa

$$\begin{cases}\overrightarrow{u_1'}=k_1\vec{u_2}\\ \overrightarrow{u_2'}=k_1\vec{u_1}-k_2\vec{u_3}\\ \overrightarrow{u_3'}=k_2\vec{u_2}\\ \\ \overrightarrow{u_1^{*\prime}}=k_1^*\vec{u_2}+k_1\vec{u_2^*}\\ \overrightarrow{u_2^{*\prime}}=k_1^*\vec{u_1}-k_2^*\vec{u_3}+k_1\vec{u_1^*}-k_2\vec{u_3^*}\\ \overrightarrow{u_3^{*\prime}}=k_2^*\vec{u_2}+k_2\vec{u_2^*}\end{cases} \tag{4.3}$$

olur. Dual küresel hareketin ani dual Pfaff vektörü (2.2.2) bağıntısından hareketle

$$\overrightarrow{\Psi} = \tau\overrightarrow{U_1} - \kappa\overrightarrow{U_3} \tag{4.4}$$

şeklinde bulunur. Buna bağlı olarak hareketin dual Steiner dönme vektörü

$$\overrightarrow{D} = \oint \overrightarrow{\Psi}\,,$$

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{U_1}\oint \tau dt - \overrightarrow{U_3}\oint \kappa dt \tag{4.5}$$

olur. Bu ifade reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{cases} \overrightarrow{d} = \overrightarrow{u_1}\oint k_2 \mathrm{dt} - \overrightarrow{u_3}\oint k_1 \mathrm{dt} \\ \overrightarrow{d^*} = \overrightarrow{u_1^*}\oint k_2 \mathrm{dt} + \overrightarrow{u_1}\oint k_2^* \mathrm{dt} - \overrightarrow{u_3^*}\oint k_1 \mathrm{dt} - \overrightarrow{u_3}\oint k_1^* \mathrm{dt} \end{cases} \tag{4.6}$$

bulunur.

$\overrightarrow{U_1}$, $\overrightarrow{U_2}$ ve $\overrightarrow{U_3}$ birim dual vektörlerinin birim dual küre üzerinde çizdikleri kapalı dual eğrilere çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzeylerin invaryantlarını araştıralım.

$\overrightarrow{U_1}$ birim dual timelike vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı dual timelike eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzey $\left(\overrightarrow{U_1}\right)$ olsun. Bu yüzeyin açılım uzunluğu

$$L_{U_1} = \left\langle \overrightarrow{d}, \overrightarrow{u_1^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{d^*}, \overrightarrow{u_1} \right\rangle,$$

$$L_{U_1} = -\oint k_2^* dt\,. \tag{4.7}$$

olur. Dual açılım açısı için

$$\wedge_{U_1} = -\left\langle \overrightarrow{D}, \overrightarrow{U_1} \right\rangle$$

yazılabilir. $\overrightarrow{D}$ nin yerine (4.5) deki eşiti yazılırsa

$$\wedge_{U_1} = -\left\langle \overrightarrow{U_1}\oint \tau dt - \overrightarrow{U_3}\oint \kappa dt, \overrightarrow{U_1} \right\rangle,$$

$$\wedge_{U_1} = \oint \tau dt\,. \tag{4.8}$$

bulunur. Bu ifade reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{cases} \lambda_{U_1} = \oint k_2 dt \\ L_{U_1} = -\oint k_2^* dt \end{cases} \tag{4.9}$$

olur. Dral için

$$P_{U_1} = \frac{\left\langle d\overrightarrow{u_1}, d\overrightarrow{u_1^*} \right\rangle}{\left\langle d\overrightarrow{u_1}, d\overrightarrow{u_1} \right\rangle}$$

yazılır . $d\overrightarrow{u_1}$ ve $d\overrightarrow{u_1^*}$ ın yerine (4.3) deki karşılığı yazılırsa

$$P_{U_1} = \frac{\left\langle k_1\overrightarrow{u_2}, k_1\overrightarrow{u_2^*} + k_1^*\overrightarrow{u_2} \right\rangle}{\left\langle k_1\overrightarrow{u_2}, k_1\overrightarrow{u_2} \right\rangle},$$

$$P_{U_1} = \frac{k_1^*}{k_1} \tag{4.10}$$

bulunur.

$\overrightarrow{U_2}$ birim dual spacelike vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı dual spacelike eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzey $\left(\overrightarrow{U_2}\right)$ olsun. Bu yüzeyin açılım uzunluğu

$$L_{U_2} = \left\langle \vec{d}, \overrightarrow{u_2^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{d^*}, \overrightarrow{u_2} \right\rangle,$$

$$L_{U_2} = 0 \tag{4.11}$$

olur. Dual açılım açısı için

$$\wedge_{U_2} = -\left\langle \vec{D}, \overrightarrow{U_2} \right\rangle,$$

yazılabilir. $\vec{D}$ nin yerine (4.5) deki eşiti yazılırsa

$$\wedge_{U_2} = -\left\langle \overrightarrow{U_1}\oint \tau dt - \overrightarrow{U_3}\oint \kappa dt, \overrightarrow{U_2} \right\rangle,$$

$$\wedge_{U_2} = 0 \tag{4.12}$$

olur. Dral için

$$P_{U_2} = \frac{\left\langle d\overrightarrow{u_2}, d\overrightarrow{u_2^*} \right\rangle}{\left\langle d\overrightarrow{u_2}, d\overrightarrow{u_2} \right\rangle}$$

yazılır. $d\overrightarrow{u_2}$ ve $d\overrightarrow{u_2^*}$ nin yerine (4.3) daki karşılıkları yazılırsa

$$P_{U_2} = \frac{\left\langle k_1\overrightarrow{u_1} - k_2\overrightarrow{u_3}, k_1\overrightarrow{u_1^*} + k_1^*\overrightarrow{u_1} - k_2\overrightarrow{u_3^*} - k_2^*\overrightarrow{u_3} \right\rangle}{\left\langle k_1\overrightarrow{u_1} - k_2\overrightarrow{u_3}, k_1\overrightarrow{u_1} - k_2\overrightarrow{u_3} \right\rangle},$$

$$P_{U_2} = \frac{k_2k_2^* - k_1k_1^*}{k_2^2 - k_1^2} \tag{4.13}$$

bulunur.

$\overrightarrow{U_3}$ birim dual spacelike vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı dual spacelike eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzey $\left(\overrightarrow{U_3}\right)$ olsun. Bu yüzeyin açılım uzunluğu

$$L_{U_3} = \left\langle \vec{d}, \overrightarrow{u_3^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{d^*}, \overrightarrow{u_3} \right\rangle,$$

$$L_{U_3} = -\oint k_1^* dt \tag{4.14}$$

olur. Dual açılım açısı için

$$\wedge_{U_3} = -\left\langle \vec{D}, \overrightarrow{U_3} \right\rangle$$

yazılabilir. $\vec{D}$ nin yerine (4.5) dan karşılığı yazılırsa

$$\wedge_{U_3} = -\left\langle \overrightarrow{U_1} \oint \tau dt - \overrightarrow{U_3} \oint \kappa dt, \overrightarrow{U_3} \right\rangle,$$

$$\wedge_{U_3} = \oint \kappa dt \tag{4.15}$$

bulunur. Bu ifade reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{cases} \lambda_{U_3} = \oint k_1 dt \\ L_{U_3} = -\oint k_1^* dt \end{cases} \tag{4.16}$$

olur. Dral için

$$P_{U_3} = \frac{\left\langle d\overrightarrow{u_3}, d\overrightarrow{u_3^*} \right\rangle}{\left\langle d\overrightarrow{u_3}, d\overrightarrow{u_3} \right\rangle}$$

yazılır. $d\overrightarrow{u_3}$ ve $d\overrightarrow{u_3^*}$ ın yerine (4.3) daki karşılığı yazılırsa

$$P_{U_3} = \frac{\left\langle k_2\overrightarrow{u_2}, k_2\overrightarrow{u_2^*} + k_2^*\overrightarrow{u_2} \right\rangle}{\left\langle k_2\overrightarrow{u_2}, k_2\overrightarrow{u_2} \right\rangle}$$

$$P_{U_3} = \frac{k_2^*}{k_2} \tag{4.17}$$

bulunur.

$\overrightarrow{\Psi}$ ani dual Pfaff vektörü ile $\overrightarrow{U_3}$ dual spacelike vektörü arasındaki Lorentzian açı $\Omega(t)=\omega(t)+\varepsilon\omega^*(t)$ olsun.

i) $\overrightarrow{\Psi}$ spacelike ise $|\kappa|>|\tau|$ dır. Bu durumda

$$\kappa=\left\|\overrightarrow{\Psi}\right\|\cosh\Omega \quad , \quad \tau=\left\|\overrightarrow{\Psi}\right\|\sinh\Omega \tag{4.18}$$

dır. $\overrightarrow{\Psi}$ yönündeki birim vektör $\vec{C}=\vec{c}+\varepsilon\overrightarrow{c^*}$ ile gösterilirse,

$$\vec{C}=\sinh\Omega\overrightarrow{U_1}-\cosh\Omega\overrightarrow{U_3} \tag{4.19}$$

spacelike bir vektör olur. Bu vektör reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{cases}\vec{c}=\sinh\omega\overrightarrow{u_1}-\cosh\omega\overrightarrow{u_3}\\ \overrightarrow{c^*}=\sinh\omega\overrightarrow{u_1^*}-\cosh\omega\overrightarrow{u_3^*}+\omega^*\cosh\omega\overrightarrow{u_1}-\omega^*\sinh\omega\overrightarrow{u_3}\end{cases} \tag{4.20}$$

bulunur. (4.19) ifadesinin türevi alınır , $\overrightarrow{U_1'}$ ve $\overrightarrow{U_2'}$ yerine (4.2) deki eşitlikleri yazılırsa

$$d\vec{C}=\Omega'\cosh\Omega\overrightarrow{U_1}+\left(\kappa\sinh\Omega-\tau\cosh\Omega\right)\overrightarrow{U_2}-\Omega'\sinh\Omega\overrightarrow{U_3}$$

olur. Bu ifade reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{cases}d\vec{c}=\omega'\cosh\omega\overrightarrow{u_1}+k_1\sinh\omega\overrightarrow{u_2}-k_2\cosh\omega\overrightarrow{u_2}-\omega'\sinh\omega\overrightarrow{u_3},\\ \\ d\overrightarrow{c^*}=(\omega^{*\prime}\cosh\omega+\omega^*\omega'\sinh\omega)\overrightarrow{u_1}+(k_1^*\sinh\omega-k_2^*\cosh\omega\\ \qquad +k_1\omega^*\cosh\omega-k_2\omega^*\sinh\omega)\overrightarrow{u_2}-(\omega^{*\prime}\sinh\omega+\omega^*\omega'\cosh\omega)\overrightarrow{u_3}\\ \qquad +\omega'\cosh\omega\overrightarrow{u_1^*}+(k_1\sinh\omega-k_2\cosh\omega)\overrightarrow{u_2^*}-\omega'\sinh\omega\overrightarrow{u_3^*}\end{cases} \tag{4.21}$$

elde edilir.

$\left\{\overrightarrow{U_1},\overrightarrow{U_2},\overrightarrow{U_3}\right\}$ dual ortonormal sistemine bağlı olarak oluşan $\vec{C}$ birim dual spacelike vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı spacelike eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzeyin invaryantlarını araştıralım.

$\left(\vec{C}\right)$ kapalı regle yüzeyinin açılım uzunluğu

$$L_C=\left\langle\vec{d},\overrightarrow{c^*}\right\rangle+\left\langle\overrightarrow{d^*},\vec{c}\right\rangle,$$

$$L_C=\cosh\omega\oint k_1^*dt-\sinh\omega\oint k_2^*dt-\omega^*\left(\cosh\omega\oint k_2dt-\sinh\omega\oint k_1dt\right) \tag{4.22}$$

olur. Burada $\oint k_1^*dt,\ \oint k_2^*dt,\ \oint k_2dt$ ve $\oint k_1dt$ yerlerine (4.9) ve (4.16) daki eşitlikleri yazılırsa

yazılırsa

$$L_C = \sinh \omega L_{U_1} - \cosh \omega L_{U_3} - \omega^* \left(\cosh \omega \lambda_{U_1} - \sinh \omega \lambda_{U_3} \right) \tag{4.23}$$

bulunur.

Dual açılım açısı için

$$\wedge_C = -\left\langle \vec{D}, \vec{C} \right\rangle$$

yazılır. Burada $\vec{D}$ ve $\vec{C}$ yerine (4.5) ve (4.19) eşitlikleri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\wedge_C = \sinh \Omega \oint \tau dt - \cosh \Omega \oint \kappa dt \tag{4.24}$$

bulunur. $\oint \tau dt$ ve $\oint \kappa dt$ yerine (4.8) ve (4.15) deki eşitlikleri yazılırsa

$$\wedge_C = \sinh \Omega \wedge_{U_1} - \cosh \Omega \wedge_{U_3} \tag{4.25}$$

elde edilir.

Dral için

$$P_C = \frac{\left\langle d\vec{c}, d\vec{c^*} \right\rangle}{\left\langle d\vec{c}, d\vec{c} \right\rangle},$$

yazılır. $d\vec{c}$ ve $d\vec{c^*}$ yerlerine (4.21) deki eşitlikleri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$P_C = \frac{-\omega' \omega^{*'} + \left(k_1 \sinh \omega - k_2 \cosh \omega\right)\left[\left(k_1^* - k_2 \omega^*\right)\sinh \omega + \left(k_1 \omega^* - k_2^*\right)\cosh \omega\right]}{\left(k_1 \sinh \omega - k_2 \cosh \omega\right)^2 - \omega'^2} \tag{4.26}$$

bulunur.

***ii*)** $\vec{\Psi}$ timelike ise $|\kappa| < |\tau|$ dır. Bu durumda

$$\kappa = \left\|\vec{\Psi}\right\| \sinh \Omega \quad , \quad \tau = \left\|\vec{\Psi}\right\| \cosh \Omega$$

dır. $\vec{\Psi}$ yönündeki birim vektör $\vec{C} = \vec{c} + \varepsilon \vec{c^*}$ ile gösterilirse,

$$\vec{C} = \cosh \Omega \vec{U_1} - \sinh \Omega \vec{U_3} \tag{4.27}$$

timelike vektör olur. Bu vektör reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa,

$$\begin{cases} \vec{c} = \cosh \omega \vec{u_1} - \sinh \omega \vec{u_3} \\ \vec{c^*} = \cosh \omega \vec{u_1^*} - \sinh \omega \vec{u_3^*} + \omega^* \sinh \omega \vec{u_1} - \omega^* \cosh \omega \vec{u_3} \end{cases} \tag{4.28}$$

bulunur. (4.27) ifadesinin türevi alınır , $\vec{U_1'}$ ve $\vec{U_2'}$ yerine (4.2) deki eşitlikleri yazılırsa

$$d\vec{C} = \Omega' \sinh \Omega \vec{U_1} + \left(\kappa \cosh \Omega - \tau \sinh \Omega\right)\vec{U_2} - \Omega' \cosh \Omega \vec{U_3}$$

olur. Bu ifade reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{cases} d\vec{c} = \omega' \sinh \omega \vec{u_1} + k_1 \cosh \omega \vec{u_2} - k_2 \sinh \omega \vec{u_2} - \omega' \cosh \omega \vec{u_3}, \\ \\ d\vec{c^*} = (\omega^{*\prime} \sinh \omega + \omega^* \omega' \cosh \omega)\vec{u_1} + (k_1^* \cosh \omega - k_2^* \sinh \omega \\ \qquad + k_1 \omega^* \sinh \omega - k_2 \omega^* \cosh \omega)\vec{u_2} - (\omega^{*\prime} \cosh \omega + \omega^* \omega' \sinh \omega)\vec{u_3} \\ \qquad + \omega' \sinh \omega \vec{u_1^*} + (k_1 \cosh \omega - k_2 \sinh \omega)\vec{u_2^*} - \omega' \cosh \omega \vec{u_3^*} \end{cases} \quad (4.29)$$

elde edilir.

$\{\vec{U_1}, \vec{U_2}, \vec{U_3}\}$ dual ortonormal sistemine bağlı olarak oluşan $\vec{C}$ birim dual timelike vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı dual timelike eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzeyin invaryantlarını araştıralım.

$(\vec{C})$ kapalı regle yüzeyinin açılım uzunluğu

$$L_C = \langle \vec{d}, \vec{c^*} \rangle + \langle \vec{d^*}, \vec{c} \rangle \ ,$$

$$L_C = \sinh \omega \oint k_1^* dt - \cosh \omega \oint k_2^* dt - \omega^* \left(\sinh \omega \oint k_2 dt - \cosh \omega \oint k_1 dt \right) \quad (4.30)$$

olur. Burada $\oint k_1^* dt$, $\oint k_2^* dt$, $\oint k_2 dt$ ve $\oint k_1 dt$ yerlerine (4.9) ve (4.16) daki eşitlikleri yazılırsa

$$L_C = \cosh \omega L_{U_1} - \sinh \omega L_{U_3} - \omega^* \left(\sinh \omega \lambda_{U_1} - \cosh \omega \lambda_{U_3} \right) \quad (4.31)$$

bulunur.

Dual açılım açısı için

$$\wedge_C = -\langle \vec{D}, \vec{C} \rangle$$

yazılır. Burada $\vec{D}$ ve $\vec{C}$ yerine (4.5) ve (4.27) eşitlikleri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\wedge_C = \cosh \Omega \oint \tau dt - \sinh \Omega \oint \kappa dt \quad (4.32)$$

bulunur. $\oint \tau dt$ ve $\oint \kappa dt$ yerine (4.8) ve (4.15) deki eşitlikleri yazılırsa

$$\wedge_C = \cosh \Omega \wedge_{U_1} - \sinh \Omega \wedge_{U_3} \quad (4.33)$$

elde edilir. Dral için,

$$P_C = \frac{\langle d\vec{c}, d\vec{c^*} \rangle}{\langle d\vec{c}, d\vec{c} \rangle}$$

yazılır. $\vec{dc}$ ve $\overrightarrow{dc^*}$ yerlerine (4.29) deki eşitlikleri yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$P_C = \frac{\omega'\omega^{*'} + (k_1 \cosh\omega - k_2 \sinh\omega)\left[\left(k_1^* - k_2\omega^*\right)\cosh\omega + \left(k_1\omega^* - k_2^*\right)\sinh\omega\right]}{(k_1 \sinh\omega - k_2 \cosh\omega)^2 - \omega'^2} \tag{4.34}$$

bulunur.

Tanım 4.1: ID_1^3 Dual Lorentz uzayda $\vec{U}(t)$ dual timelike eğrisine karşılık gelen kapalı regle yüzey $\left(\vec{U}\right)$ olsun. $\vec{U}(t)$ ile sabit $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual açısı yapan

$$\vec{V}(t) = \cosh\Phi\overrightarrow{U_1} + \sinh\Phi\overrightarrow{U_3} \tag{4.35}$$

dual timelike vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı dual timelike eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen yüzeye $\left(\vec{U}\right)$ yüzeyinin paralel regle yüzeyi denir. Bu yüzey $\left(\vec{V}\right)$ şeklinde gösterilecektir.

$\vec{V_1} = \vec{V}(t)$ olsun. $\vec{V_1}$ in t ye göre türevi alınırsa

$$\overrightarrow{V_1'} = (\kappa\cosh\Phi + \tau\sinh\Phi)\overrightarrow{U_2} \tag{4.36}$$

olur. $\overrightarrow{V_1'}$ nün normu P ile gösterilirse

$$P = \kappa\cosh\Phi + \tau\sinh\Phi \tag{4.37}$$

bulunur. $\vec{V_2} = \dfrac{\overrightarrow{V_1'}}{P}$ olduğundan

$$\vec{V_2} = \overrightarrow{U_2} \tag{4.38}$$

ve $\vec{V_3} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$ yazılabildiğinden

$$\vec{V_3} = -\sinh\Phi\overrightarrow{U_1} - \cosh\Phi\overrightarrow{U_3} \tag{4.39}$$

olur. Burada $\vec{V_1}$ timelike, $\vec{V_2}$ ve $\vec{V_3}$ spacelike vektörlerdir.

(4.35) , (4.38) ve (4.39) ifadeleri birleştirilerek matris formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} \vec{V_1} \\ \vec{V_2} \\ \vec{V_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\Phi & 0 & \sinh\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\Phi & 0 & -\cosh\Phi \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \overrightarrow{U_1} \\ \overrightarrow{U_2} \\ \overrightarrow{U_3} \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

veya

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{U_1} \\ \overrightarrow{U_2} \\ \overrightarrow{U_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\Phi & 0 & \sinh\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\Phi & 0 & -\cosh\Phi \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \overrightarrow{V_1} \\ \overrightarrow{V_2} \\ \overrightarrow{V_3} \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

olur. Bu ifade reel dual bileşenlere ayrılırsa,

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_1} = \cosh\varphi\,\overrightarrow{v_1} + \sinh\varphi\,\overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{u_3} = -\sinh\varphi\,\overrightarrow{v_1} - \cosh\varphi\,\overrightarrow{v_3} \\ \\ \overrightarrow{u_1^*} = \cosh\varphi\,\overrightarrow{v_1^*} + \sinh\varphi\,\overrightarrow{v_3^*} + \varphi^*(\sinh\varphi\,\overrightarrow{v_1} + \cosh\varphi\,\overrightarrow{v_3}) \\ \overrightarrow{u_2^*} = \overrightarrow{v_2}^* \\ \overrightarrow{u_3^*} = -\sinh\varphi\,\overrightarrow{v_1^*} - \cosh\varphi\,\overrightarrow{v_3^*} - \varphi^*(\cosh\varphi\,\overrightarrow{v_1} + \sinh\varphi\,\overrightarrow{v_3}) \end{cases} \tag{4.42}$$

bulunur. $\overrightarrow{V_1}$ timelike, $\overrightarrow{V_2}$ ve $\overrightarrow{V_3}$ spacelike vektör olduklarından (2.2.1) dikkate alınırsa (3.9) bağıntısı

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_1'} = P\overrightarrow{V_2} & , \quad P = \sqrt{\left|\left\langle \overrightarrow{V_1'}, \overrightarrow{V_1'} \right\rangle\right|} \\ \overrightarrow{V_2'} = P\overrightarrow{V_1} - Q\overrightarrow{V_3} & , \quad Q = \dfrac{\det\left(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_1'}, \overrightarrow{V_1''}\right)}{\left\langle \overrightarrow{V_1'}, \overrightarrow{V_1'} \right\rangle} \quad , \\ \overrightarrow{V_3'} = Q\overrightarrow{V_2} \end{cases} \tag{4.43}$$

şekline dönüşür. Bu son ifade reel ve dual bileşenlere ayrılırsa,

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1'} = p\overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{v_2'} = p\overrightarrow{v_1} - q\overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{v_3'} = q\overrightarrow{v_2} \\ \\ \overrightarrow{v_1^{*\prime}} = p\overrightarrow{v_2^*} + p^*\overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{v_2^{*\prime}} = p\overrightarrow{v_1^*} + p^*\overrightarrow{v_1} - q\overrightarrow{v_3^*} - q^*\overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{v_3^{*\prime}} = q\overrightarrow{v_2^*} + q^*\overrightarrow{v_2} \end{cases} \tag{4.44}$$

bulunur. $\overrightarrow{V_1'}$ nün t ye göre türevi alınır, $\overrightarrow{U_2'}$ yerine (4.2) deki eşiti yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_1''} &= (\kappa^2 \cosh\Phi + \kappa\tau \sinh\Phi)\overrightarrow{U_1} \\ &+ (\kappa\cosh\Phi + \tau\sinh\Phi)'\overrightarrow{U_2} + (-\kappa\tau\cosh\Phi - \tau^2 \sinh\Phi)\overrightarrow{U_3}\end{aligned} \tag{4.45}$$

bulunur. $Q = \dfrac{\det\left(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_1'}, \overrightarrow{V_1''}\right)}{\left\langle \overrightarrow{V_1'}, \overrightarrow{V_1'} \right\rangle}$ ifadesinde (4.35) , (4.36) ve (4.45) bağıntıları yerlerine

yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$Q = \frac{\begin{vmatrix} \cosh\Phi & 0 & \sinh\Phi \\ 0 & \kappa\cosh\Phi + \tau\sinh\Phi & 0 \\ \kappa^2\cosh\Phi + \kappa\tau\sinh\Phi & (\kappa\cosh\Phi + \tau\sinh\Phi)' & -\kappa\tau\cosh\Phi - \tau^2\sinh\Phi \end{vmatrix}}{< (\kappa\cosh\Phi + \tau\sinh\Phi)\vec{U}_2, (\kappa\cosh\Phi + \tau\sinh\Phi)\vec{U}_2 >},$$

$$Q = -\kappa\sinh\Phi - \tau\cosh\Phi \tag{4.46}$$

elde edilir. P ve Q nun (4.37) ve (4.46) daki ifadeleri reel ve dual bileşenlere ayrılırsa,

$$\begin{cases} p = k_1\cosh\varphi + k_2\sinh\varphi \\ p^* = k_1^*\cosh\varphi + k_2^*\sinh\varphi + \varphi^*(k_1\sinh\varphi + k_2\cosh\varphi\ \ ) \\ \\ q = -k_1\sinh\varphi - k_2\cosh\varphi \\ q^* = -k_1^*\sinh\varphi - k_2^*\cosh\varphi - \varphi^*(k_1\cosh\varphi + k_2\sinh\varphi\ \ ) \end{cases} \tag{4.47}$$

bulunur. Dual küresel hareketin $\left\{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}\right\}$ çatısına göre ani dual Pfaff vektörü (2.3.30) bağıntısından

$$\overline{\overrightarrow{\Psi}} = Q\overrightarrow{V_1} - P\overrightarrow{V_3} \tag{4.48}$$

olur. Buna bağlı olarak hareketin dual Steiner dönme vektörü

$$\overline{\overrightarrow{D}} = \oint \overline{\overrightarrow{\Psi}} \tag{4.49}$$

veya burada $\overline{\overrightarrow{\Psi}}$ ifadesi yerine yazılırsa

$$\overline{\overrightarrow{D}} = \overrightarrow{V_1}\oint Qdt - \overrightarrow{V_3}\oint Pdt \tag{4.50}$$

bulunur. $\vec{\Psi} = \tau\vec{U_1} - \kappa\vec{U_3}$ bağıntısında $\vec{U_1}$ ve $\vec{U_3}$ ün yerine (4.41) deki karşılıkları yazılırsa

$$\vec{\Psi} = \tau(\cosh\Phi\,\vec{V_1} + \sinh\Phi\vec{V_3}) - \kappa(-\sinh\Phi\,\vec{V_1} - \cosh\Phi\,\vec{V_3}),$$

$$\vec{\Psi} = -(-\kappa\sinh\Phi - \tau\cosh\Phi\,)\vec{V_1} + (\kappa\cosh\Phi + \tau\sinh\Phi\,)\vec{V_3}\ ,$$

$$\vec{\Psi} = -Q\vec{V_1} + P\vec{V_3}$$

elde edilir. Buna göre (4.48) ifadesinden

$$\vec{\Psi} = -\overline{\overline{\Psi}} \tag{4.51}$$

olur. Buradan $\vec{D} = -\overline{\overline{D}}$ bulunur ve buna bağlı olarak

$$\vec{D} = -\vec{V_1}\oint Qdt + \vec{V_3}\oint Pdt \tag{4.52}$$

yazılır. Bu ifade reel ve dual bileşenlere ayrılırsa

$$\begin{cases} \vec{d} = -\vec{v_1}\oint qdt + \vec{v_3}\oint pdt \\ \\ \vec{d^*} = -\vec{v_1}\oint q^*dt - \vec{v_1^*}\oint qdt + \vec{v_3}\oint p^*dt + \vec{v_3^*}\oint pdt \end{cases} \tag{4.53}$$

olur.

Şimdi $(\vec{V_1}),(\vec{V_2})$ ve $(\vec{V_3})$ kapalı regle yüzeylerinin integral invaryantları ile $(\vec{U_1}),(\vec{U_2})$ ve $(\vec{U_3})$ kapalı regle yüzeylerinin integral invaryantları arasındaki bağıntıları araştıralım.

$\vec{V_1}$ birim dual timelike vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı dual timelike eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzey $(\vec{V_1})$ olsun. Bu yüzeyin açılım uzunluğu

$$L_{V_1} = \left\langle \vec{d}, \vec{v_1^*} \right\rangle + \left\langle \vec{d^*}, \vec{v_1} \right\rangle,$$

$$L_{V_1} = \oint q^* dt\,. \tag{4.54}$$

olur. q^* ın yerine (4.47) daki değeri yazılırsa,

$$L_{V_1} = -\sinh\varphi\oint k_1^*dt - \cosh\varphi\oint k_2^*dt - \varphi^*(\cosh\varphi\oint k_1dt + \sinh\varphi\oint k_2dt) \tag{4.55}$$

bulunur. Burada (4.7) , (4.9) , (4.14) , (4.16) eşitlikleri dikkate alınır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$L_{V_1} = \cosh\varphi L_{U_1} + \sinh\varphi L_{U_3} - \varphi^*\left(\sinh\varphi\lambda_{U_1} + \cosh\varphi\lambda_{U_3}\right). \quad (4.56)$$

elde edilir.

$\left(\overrightarrow{V_1}\right)$ kapalı regle yüzeyin dual açılım açısı için

$$\wedge_{V_1} = -\left\langle \overrightarrow{D}, \overrightarrow{V_1} \right\rangle$$

yazılır. $\overrightarrow{D}$ nin yerine (4.52) deki eşiti yazılırsa

$$\wedge_{V_1} = -\left\langle -\overrightarrow{V_1}\oint Qdt + \overrightarrow{V_3}\oint Pdt, \overrightarrow{V_1} \right\rangle,$$

$$\wedge_{V_1} = -\oint Qdt. \quad (4.57)$$

olur. Q nun yerine (4.46) daki ifadesi yazılırsa,

$$\wedge_{V_1} = \sinh\Phi\oint \kappa dt + \cosh\Phi\oint \tau dt$$

bulunur. (4.8) ve (4.15) eşitliklerinden

$$\wedge_{V_1} = \cosh\Phi \wedge_{U_1} + \sinh\Phi \wedge_{U_3} \quad (4.58)$$

elde edilir. Bu ifade reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{cases} \lambda_{V_1} = \cosh\varphi\lambda_{U_1} + \sinh\varphi\lambda_{U_3} \\ L_{V_1} = \cosh\varphi L_{U_1} + \sinh\varphi L_{U_3} - \varphi^*\left(\sinh\varphi\lambda_{U_1} + \cosh\varphi\lambda_{U_3}\right) \end{cases} \quad (4.59)$$

olur.

$\left(\overrightarrow{V_1}\right)$ kapalı regle yüzeyin dralı

$$P_{V_1} = \frac{\left\langle d\overrightarrow{v_1}, d\overrightarrow{v_1^*} \right\rangle}{\left\langle d\overrightarrow{v_1}, d\overrightarrow{v_1} \right\rangle}$$

dır. $d\overrightarrow{v_1}$ ve $d\overrightarrow{v_1^*}$ yerlerine (4.44) deki eşitlikleri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$P_{V_1} = \frac{\left\langle p\overrightarrow{v_2}, p\overrightarrow{v_2^*} + p^*\overrightarrow{v_2} \right\rangle}{\left\langle p\overrightarrow{v_2}, p\overrightarrow{v_2} \right\rangle},$$

$$P_{V_1} = \frac{p^*}{p} \quad (4.60)$$

bulunur. p ve p^* yerlerine de (4.47) deki ifadeleri yazılırsa

$$P_{V_1}=\frac{k_1^*\cosh\varphi+k_2^*\sinh\varphi}{k_1\cosh\varphi+k_2\sinh\varphi}+\varphi^*\frac{k_1\sinh\varphi+k_2\cosh\varphi}{k_1\cosh\varphi+k_2\sinh\varphi} \tag{4.61}$$

olur. Böylece şu teorem verilebilir:

Teorem 4.1: $V_1=\vec{V}(t)$ dual timelike vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı dual timelike eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen yüzey, $(\vec{U})$ yüzeyinin paralel regle yüzeyi olsun. Bu durumda $(\vec{V_1})$ yüzeyinin açılım uzunluğu, dual açılım açısı ve dral arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

1-) $L_{V_1}=\oint q^* dt$ 2-) $\wedge_{V_1}=-\oint Q dt$ 3-) $P_{V_1}=\dfrac{p^*}{p}$

Sonuç 4.1: $V_1=\vec{V}(t)$ dual timelike vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı dual timelike eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen yüzey, $(\vec{U})$ yüzeyinin paralel regle yüzeyi olsun. $(\vec{V_1})$ yüzeyinin açılım uzunluğu ve dual açılım açısı, $(\vec{U_1})$ ile $(\vec{U_3})$ yüzeylerinin invaryantları cinsinden

1-) $L_{V_1}=\cosh\varphi L_{U_1}+\sinh\varphi L_{U_3}-\varphi^*\left(\sinh\varphi\lambda_{U_1}+\cosh\varphi\lambda_{U_3}\right)$,

2-) $\wedge_{V_1}=\cosh\Phi\wedge_{U_1}+\sinh\Phi\wedge_{U_3}$

dır.

$\vec{V_2}$ birim dual spacelike vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı dual spacelike eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzey $(\vec{V_2})$ olsun. Bu yüzeyin açılım uzunluğu

$$L_{V_2}=\left\langle\vec{d},\vec{v_2^*}\right\rangle+\left\langle\vec{d^*},\vec{v_2}\right\rangle$$

dır. Burada d ve d^* yerine (4.53) deki eşitleri yazılırsa

$$L_{V_2}=0 \tag{4.62}$$

olur.

$(\vec{V_2})$ kapalı regle yüzeyin açılım açısı

$$\wedge_{V_2}=-\left\langle\vec{D},\vec{V_2}\right\rangle$$

dır. $\vec{D}$ nin yerine (4.52) den karşılığı yazılırsa

$$\wedge_{V_2} = 0 \tag{4.63}$$

olur.

$\left(\overrightarrow{V_2}\right)$ kapalı regle yüzeyin drali

$$P_{V_2} = \frac{\left\langle d\overrightarrow{v_2}, d\overrightarrow{v_2^*}\right\rangle}{\left\langle d\overrightarrow{v_2}, d\overrightarrow{v_2}\right\rangle}$$

dır. Burada $d\overrightarrow{v_2}$ ve $d\overrightarrow{v_2}^*$ yerine (4.44) deki eşitleri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$P_{V_2} = \frac{\left\langle p\overrightarrow{v_1} - q\overrightarrow{v_3}, p\overrightarrow{v_1^*} + p^*\overrightarrow{v_1} - q\overrightarrow{v_3^*} - q^*\overrightarrow{v_3}\right\rangle}{\left\langle p\overrightarrow{v_1} - q\overrightarrow{v_3}, p\overrightarrow{v_1} - q\overrightarrow{v_3}\right\rangle},$$

$$P_{V_2} = \frac{qq^* - pp^*}{q^2 - p^2} \tag{4.64}$$

bulunur. Burada p, p^*, q ve q^* ın yerine (4.47) deki karşılıkları yazılırsa

$$P_{V_2} = \frac{k_2k_2^* - k_1k_1^*}{k_2^2 - k_1^2} \tag{4.65}$$

elde edilir.

Teorem 4.2: $V_1 = \vec{V}(t)$ dual timelike vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı dual timelike eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen yüzey, $\left(\vec{U}\right)$ yüzeyinin paralel regle yüzeyi olsun. Bu durumda $\left(\overrightarrow{V_2}\right)$ yüzeyinin açılım uzunluğu, dual açılım açısı ve dralı arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

1-) $L_{V_2} = 0$ 2-) $\wedge_{V_2} = 0$ 3-) $P_{V_2} = \dfrac{qq^* - pp^*}{q^2 - p^2}$

$\overrightarrow{V_3}$ birim dual spacelike vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı dual spacelike eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzey $\left(\overrightarrow{V_3}\right)$ olsun. Bu yüzeyin açılım uzunluğu

$$L_{V_3} = \left\langle \vec{d}, \overrightarrow{v_3^*}\right\rangle + \left\langle \overrightarrow{d^*}, \overrightarrow{v_3}\right\rangle,$$

$$L_{V_3} = \oint p^* dt \tag{4.66}$$

dır. p^* ın yerine (4.47) deki değeri yazılırsa

$$L_{V_3} = \cosh\varphi \oint k_1^* dt + \sinh\varphi \oint k_2^* dt + \varphi^* (\sinh\varphi \oint k_1 dt + \cosh\varphi \oint k_2 dt) \qquad (4.67)$$

olur. Burada (4.7) , (4.9) , (4.14) , (4.16) eşitlikleri dikkate alınır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$L_{V_3} = -\sinh\varphi L_{U_1} - \cosh\varphi L_{U_3} + \varphi^* \left(\cosh\varphi \lambda_{U_1} + \sinh\varphi \lambda_{U_3}\right) \qquad (4.68)$$

elde edilir.

$\left(\overrightarrow{V_3}\right)$ kapalı regle yüzeyin dual açılım açısı

$$\wedge_{V_3} = -\left\langle \overrightarrow{D}, \overrightarrow{V_3} \right\rangle$$

dır. $\overrightarrow{D}$ nin yerine (4.52) deki eşiti yazılırsa

$$\wedge_{V_3} = -\left\langle -\overrightarrow{V_1} \oint Qdt + \overrightarrow{V_3} \oint Pdt, \overrightarrow{V_3} \right\rangle,$$

$$\wedge_{V_3} = -\oint Pdt\,. \qquad (4.69)$$

olur. Burada P nin yerine (4.37) deki karşılığı yazılırsa,

$$\wedge_{V_3} = -\cosh\Phi \oint \kappa dt - \sinh\Phi \oint \tau dt$$

bulunur. (4.8) ve (4.15) eşitlikleri kullanılırsa

$$\wedge_{V_3} = -\sinh\Phi \wedge_{U_1} - \cosh\Phi \wedge_{U_3} \qquad (4.70)$$

olur. Bu ifade reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{cases} \lambda_{V_3} = -\sinh\varphi \lambda_{U_1} - \cosh\varphi \lambda_{U_3} \\ L_{V_3} = -\sinh\varphi L_{U_1} - \cosh\varphi L_{U_3} + \varphi^* \left(\cosh\varphi \lambda_{U_1} + \sinh\varphi \lambda_{U_3}\right) \end{cases} \qquad (4.71)$$

elde edilir.

$\left(\overrightarrow{V_3}\right)$ kapalı regle yüzeyin dralı

$$P_{V_3} = \frac{\left\langle d\overrightarrow{v_3}, d\overrightarrow{v_3^*} \right\rangle}{\left\langle d\overrightarrow{v_3}, d\overrightarrow{v_3} \right\rangle}$$

dır. $d\overrightarrow{v_3}$ ve $d\overrightarrow{v_3^*}$ yerlerine (4.44) deki eşitlikleri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$P_{V_3} = \frac{\left\langle q\overrightarrow{v_2}, q\overrightarrow{v_2^*} + q^*\overrightarrow{v_2} \right\rangle}{\left\langle q\overrightarrow{v_2}, q\overrightarrow{v_2} \right\rangle},$$

$$P_{V_3} = \frac{q^*}{q} \qquad (4.72)$$

bulunur. Burada q ve q^* yerlerine (4.47) deki karşılıkları yazılırsa

$$P_{V_3} = \frac{-k_1^* \sinh\varphi - k_2^* \cosh\varphi}{-k_1 \sinh\varphi - k_2 \cosh\varphi} - \varphi^* \left(\frac{k_1 \cosh\varphi + k_2 \sinh\varphi}{-k_1 \sinh\varphi - k_2 \cosh\varphi} \right) \tag{4.73}$$

olur. Böylece şu teorem verilebilir:

Teorem 4.3: $V_1 = \vec{V}(t)$ dual timelike vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı dual timelike eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen yüzey, $(\vec{U})$ yüzeyinin paralel regle yüzeyi olsun. Bu durumda $(\vec{V_3})$ yüzeyinin açılım uzunluğu, dual açılım açısı ve dralı arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

1-) $L_{V_3} = \oint p^* dt$ 2-) $\wedge_{V_3} = -\oint P dt$ 3-) $P_{V_3} = \dfrac{q^*}{q}$

Sonuç 4.2: $V_1 = \vec{V}(t)$ dual timelike vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı dual timelike eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen yüzey, $(\vec{U})$ yüzeyinin paralel regle yüzeyi olsun. $(\vec{V_3})$ yüzeyinin açılım uzunluğu ve dual açılım açısı, $(\vec{U_1})$ ile $(\vec{U_3})$ yüzeylerinin invaryantları cinsinden

1-) $L_{V_3} = -\sinh\varphi L_{U_1} - \cosh\varphi L_{U_3} + \varphi^* \left(\cosh\varphi \lambda_{U_1} + \sinh\varphi \lambda_{U_3} \right)$

2-) $\wedge_{V_3} = -\sinh\Phi \wedge_{U_1} - \cosh\Phi \wedge_{U_3}$

dır.

$\vec{\vec{\Psi}}$ ani dual Pfaff vektörü ile $\vec{V_3}$ vektörü arasındaki Lorentzian timelike açı $\Theta(t) = \theta(t) + \varepsilon\theta^*(t)$ olsun.

i) $\vec{\vec{\Psi}}$ spacelike ise $|P| > |Q|$ dır. Bu durumda,

$$P = \left\|\vec{\vec{\Psi}}\right\| \cosh\Theta \quad , \quad Q = \left\|\vec{\vec{\Psi}}\right\| \sinh\Theta$$

dır. $\vec{\vec{\Psi}}$ yönündeki birim vektör $\vec{\vec{C}} = \vec{\vec{c}} + \varepsilon \vec{\vec{c}}^*$ ile gösterilirse,

$$\vec{\vec{C}} = \sinh\Theta \vec{V_1} - \cosh\Theta \vec{V_3} \tag{4.74}$$

spacelike bir vektör olur. Burada $\vec{V_1}$ ve $\vec{V_3}$ vektörlerinin yerine (4.40) daki eşitlikleri yazılırsa,

$$\vec{\vec{C}} = \left(\sinh\Theta \cosh\Phi + \cosh\Theta \sinh\Phi\right)\vec{U_1} + \left(\cosh\Theta \cosh\Phi + \sinh\Theta \sinh\Phi\right)\vec{U_3}$$

veya

$$\vec{\vec{C}} = \sinh\left(\Theta + \Phi\right)\overrightarrow{U_1} + \cosh\left(\Theta + \Phi\right)\overrightarrow{U_3} \tag{4.75}$$

bulunur. $\vec{\vec{C}}$ vektörünün (4.74) deki ifadesi reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{cases} \vec{\vec{c}} = \sinh\theta\overrightarrow{v_1} - \cosh\theta\overrightarrow{v_3} \\ \vec{\vec{c}}^{\,*} = \sinh\theta\overrightarrow{v_1^*} - \cosh\theta\overrightarrow{v_3^*} + \theta^*\cosh\theta\overrightarrow{v_1} - \theta^*\sinh\theta\overrightarrow{v_3} \end{cases} \tag{4.76}$$

olur. $\vec{\vec{C}}$ vektörünün (4.74) deki ifadesinin türevi alınır , $\overrightarrow{V_1'}$ ve $\overrightarrow{V_3'}$ yerine (4.43) deki eşitlikleri yazılırsa,

$$d\vec{\vec{C}} = \Theta'\cosh\Theta\overrightarrow{V_1} + \left(P\sinh\Theta - Q\cosh\Theta\right)\overrightarrow{V_2} - \Theta'\sinh\Theta\overrightarrow{V_3}$$

olur. Bu ifade reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa,

$$\begin{cases} d\vec{\vec{c}} = \omega'\cosh\theta\overrightarrow{v_1} + p\sinh\theta\,\overrightarrow{v_2} - q\cosh\theta\overrightarrow{v_2} - \omega'\sinh\theta\overrightarrow{v_3} \\ d\vec{\vec{c}}^{\,*} = (\theta^{*\prime}\cosh\theta + \theta^*\theta'\sinh\theta)\overrightarrow{v_1} + (p^*\sinh\theta - q^*\cosh\theta \\ \qquad + p\theta^*\cosh\theta - q\theta^*\sinh\theta)\overrightarrow{v_2} - (\theta^{*\prime}\sinh\theta + \theta^*\theta'\cosh\theta)\overrightarrow{v_3} \\ \qquad + \theta'\cosh\theta\overrightarrow{v_1^*} + (p\sinh\theta - q\cosh\theta)\overrightarrow{v_2^*} - \theta'\sinh\theta\overrightarrow{v_3}^{\,*} \end{cases} \tag{4.77}$$

elde edilir.

$\left\{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}\right\}$ dual ortonormal sistemine bağlı olarak oluşan $\vec{\vec{C}}$ birim dual spacelike vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı spacelike eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzeyin invaryantlarını araştıralım.

$\left(\vec{\vec{C}}\right)$ kapalı regle yüzeyinin açılım uzunluğu

$$L_{\overline{C}} = \left\langle \vec{d}, \vec{\vec{c}}^{\,*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{d^*}, \vec{\vec{c}} \right\rangle$$

dır. Burada $\vec{d}$ ve $\overrightarrow{d^*}$ ın yerine (4.53) deki eşitlikleri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$L_{\overline{C}} = -\cosh\theta\oint p^*dt + \sinh\theta\oint q^*dt + \theta^*\left(\cosh\theta\oint qdt - \sinh\theta\oint pdt\right) \tag{4.78}$$

veya

$$L_{\overline{C}} = \sinh\theta L_{V_1} - \cosh\theta L_{V_3} + \theta^*\left(-\cosh\theta\lambda_{V_1} + \sinh\theta\lambda_{V_3}\right) \tag{4.79}$$

bulunur. Burada L_{V_1}, L_{V_3}, λ_{V_1} ve λ_{V_3} ün yerine (4.59) ve (4.71) deki eşitlikleri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$L_{\overline{C}} = \sinh(\theta+\varphi) L_{U_1} + \cosh(\theta+\varphi) L_{U_3} \\ -(\varphi^* + \theta^*)\left(\cosh(\theta+\varphi)\lambda_{U_1} + \sinh(\theta+\varphi)\lambda_{U_3}\right) \tag{4.80}$$

elde edilir.

$\left(\overrightarrow{\overline{C}}\right)$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı

$$\wedge_{\overline{C}} = -\left\langle \overrightarrow{D}, \overrightarrow{\overline{C}} \right\rangle$$

dır. Burada $\overrightarrow{D}$ ve $\overrightarrow{\overline{C}}$ nin yerine (4.52) ve (4.74) eşitlikleri yazılırsa

$$\wedge_{\overline{C}} = -\sinh\Theta \oint Qdt + \cosh\Theta \oint Pdt \tag{4.81}$$

olur. $\oint Pdt$ ve $\oint Qdt$ yerine (4.57) ve (4.69) deki eşitlikleri yukarıda yazılırsa

$$\wedge_{\overline{C}} = \sinh\Theta \wedge_{V_1} - \cosh\Theta \wedge_{V_3} \tag{4.82}$$

bulunur. $\wedge_{V_1}$ ve $\wedge_{V_3}$ nın yerine de (4.58) ve (4.70) eşitlikleri yazılırsa

$$\wedge_{\overline{C}} = \sinh(\Theta+\Phi)\wedge_{U_1} + \cosh(\Theta+\Phi)\wedge_{U_3} \tag{4.83}$$

elde edilir.

$\left(\overrightarrow{\overline{C}}\right)$ kapalı regle yüzeyinin dralı

$$P_{\overline{C}} = \frac{\left\langle d\vec{c}, d\vec{c}^{\,*} \right\rangle}{\left\langle d\vec{c}, d\vec{c} \right\rangle}$$

dır. $d\vec{c}$ ve $d\vec{c}^{\,*}$ yerine (4.77) deki eşitlikleri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$P_{\overline{C}} = \frac{-\theta'\theta^{*\prime} + (p\sinh\theta - q\cosh\theta)\left[(p^* - q\theta^*)\sinh\theta + (p\theta^* - q^*)\cosh\theta\right]}{(p\sinh\theta - q\cosh\theta)^2 - \theta'^2} \tag{4.84}$$

bulunur.

b) $\overrightarrow{\overline{\Psi}}$ timelike ise $|P| < |Q|$ dır. Bu durumda,

$$P = \left\|\overrightarrow{\overline{\Psi}}\right\| \sinh\Theta \quad , \quad Q = \left\|\overrightarrow{\overline{\Psi}}\right\| \cosh\Theta$$

dır. $\overrightarrow{\overline{\Psi}}$ yönündeki birim vektör $\overrightarrow{\overline{C}} = \vec{c} + \varepsilon \vec{c}^{\,*}$ ile gösterilirse,

$$\overrightarrow{\overline{C}} = \cosh\Theta \overrightarrow{V_1} - \sinh\Theta \overrightarrow{V_3} \tag{4.85}$$

timelike bir vektör olur. Burada $\overrightarrow{V_1}$ ve $\overrightarrow{V_3}$ vektörlerinin (4.40) deki eşitlikleri yazılırsa,

$$\overrightarrow{\overrightarrow{C}} = \left(\cosh\Theta\cosh\Phi + \sinh\Theta\sinh\Phi\right)\overrightarrow{U_1} + \left(\sinh\Theta\cosh\Phi + \cosh\Theta\sinh\Phi\right)\overrightarrow{U_3}$$

veya

$$\overrightarrow{\overrightarrow{C}} = \cosh\left(\Theta + \Phi\right)\overrightarrow{U_1} + \sinh\left(\Theta + \Phi\right)\overrightarrow{U_3} \tag{4.86}$$

bulunur. $\overrightarrow{\overrightarrow{C}}$ vektörünün (4.85) deki ifadesi reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{cases} \overrightarrow{\overrightarrow{c}} = \cosh\theta\overrightarrow{v_1} - \sinh\theta\overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{\overrightarrow{c}}^* = \cosh\theta\overrightarrow{v_1^*} - \sinh\theta\overrightarrow{v_3^*} + \theta^*\sinh\theta\overrightarrow{v_1} - \theta^*\cosh\theta\overrightarrow{v_3} \end{cases} \tag{4.87}$$

olur. (4.85) ifadesinin türevi alınır , $\overrightarrow{V_1'}$ ve $\overrightarrow{V_3'}$ yerine (4.43) deki eşitleri yazılırsa,

$$d\overrightarrow{\overrightarrow{C}} = \Theta'\sinh\Theta\overrightarrow{V_1} + \left(P\cosh\Theta - Q\sinh\Theta\right)\overrightarrow{V_2} - \Theta'\cosh\Theta\overrightarrow{V_3}$$

bulunur. Bu ifade reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa,

$$\begin{cases} d\overrightarrow{\overrightarrow{c}} = \theta'\sinh\theta\overrightarrow{v_1} + p\cosh\theta\,\overrightarrow{v_2} - q\sinh\theta\overrightarrow{v_2} - \theta'\cosh\theta\overrightarrow{v_3} \\ d\overrightarrow{\overrightarrow{c}}^* = (\theta^{*\prime}\sinh\theta + \theta^*\theta'\cosh\theta)\overrightarrow{v_1} + (p^*\cosh\theta - q^*\sinh\theta \\ \qquad + p\omega^*\sinh\omega - q\omega^*\cosh\omega)\overrightarrow{v_2} - (\theta^{*\prime}\cosh\theta + \theta^*\theta'\sinh\theta)\overrightarrow{v_3} \\ \qquad + \theta'\sinh\theta\overrightarrow{v_1^*} + (p\cosh\theta - q\sinh\theta)\overrightarrow{v_2^*} - \theta'\cosh\theta\overrightarrow{v_3^*} \end{cases} \tag{4.88}$$

elde edilir.

$\left(\overrightarrow{\overrightarrow{C}}\right)$ kapalı regle yüzeyinin açılım uzunluğu

$$L_{\overline{C}} = \left\langle \overrightarrow{d}, \overrightarrow{\overrightarrow{c}}^* \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{d^*}, \overrightarrow{\overrightarrow{c}} \right\rangle$$

dır. Burada $\overrightarrow{d}$ ve $\overrightarrow{d^*}$ ın yerine (4.53) deki eşitlikleri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$L_{\overline{C}} = -\sinh\theta\oint p^*dt + \cosh\theta\oint q^*dt + \theta^*\left(\sinh\theta\oint qdt - \cosh\theta\oint pdt\right) \tag{4.89}$$

veya

$$L_{\overline{C}} = \cosh\theta L_{V_1} - \sinh\theta L_{V_3} + \theta^*\left(-\sinh\theta\lambda_{V_1} + \cosh\theta\lambda_{V_3}\right) \tag{4.90}$$

bulunur. Burada L_{V_1}, L_{V_3}, λ_{V_1} ve λ_{V_3} ün yerine (4.59) ve (4.71) deki eşitlikleri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} L_{\overline{C}} &= \cosh\left(\theta + \varphi\right)L_{U_1} + \sinh\left(\theta + \varphi\right)L_{U_3} \\ &\quad - \left(\varphi^* + \theta^*\right)\left(\sinh\left(\theta + \varphi\right)\lambda_{U_1} + \cosh\left(\theta + \varphi\right)\lambda_{U_3}\right) \end{aligned} \tag{4.91}$$

olur.

$\left(\vec{\vec{C}}\right)$ kapalı regle yüzeyinin dual açılım açısı

$$\wedge_{\overline{C}} = -\left\langle \vec{D}, \vec{\vec{C}} \right\rangle$$

dır. $\vec{D}$ ve $\vec{\vec{C}}$ nin yerine (4.52) ve (4.85) eşitlikleri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\wedge_{\overline{C}} = -\cosh\Theta \oint Qdt + \sinh\Theta \oint Pdt \tag{4.92}$$

olur. Burada $\oint Pdt$ ve $\oint Qdt$ yerine (4.57) ve (4.69) deki eşitlikleri yazılırsa,

$$\wedge_{\overline{C}} = \cosh\Theta \wedge_{V_1} - \sinh\Theta \wedge_{V_3} \tag{4.93}$$

bulunur. $\wedge_{V_1}$ ve $\wedge_{V_3}$ nın yerine de (4.58) ve (4.70) eşitlikleri yazılırsa,

$$\wedge_{\overline{C}} = \cosh(\Theta + \Phi)\Lambda_{U_1} + \sinh(\Theta + \Phi)\Lambda_{U_3} \tag{4.94}$$

elde edilir.

$\left(\vec{\vec{C}}\right)$ kapalı regle yüzeyinin dralı

$$P_{\overline{C}} = \frac{\left\langle d\vec{\vec{c}}, \overrightarrow{d\vec{c}}^{*} \right\rangle}{\left\langle d\vec{\vec{c}}, d\vec{\vec{c}} \right\rangle}$$

dır. $d\vec{\vec{c}}$ ve $\overrightarrow{d\vec{c}}^{*}$ yerlerine (4.88) deki eşitlikleri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$P_{\overline{C}} = \frac{\theta'\theta^{*'} + (p\cosh\theta - q\sinh\theta)\left[(p\theta^{*} - q^{*})\sinh\theta + (p^{*} - q\theta^{*})\cosh\theta\right]}{(p\cosh\theta - q\sinh\theta)^{2} - \theta'^{2}} \tag{4.95}$$

bulunur.

5.TARTIŞMA

Bu çalışmada Şenyurt'un " Paralel Regle Yüzeyler ve Bazı Karakteristik Özellikleri " isimli doktora tezi esas alınarak, ID_1^3 Dual Lorentz uzayında timelike bir $\vec{U} = \vec{U}(t)$ birim dual vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği $\vec{U}(t)$ dual kapalı timelike eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen $\left(\vec{U}\right)$ kapalı regle yüzeyinin integral invaryantları hesaplanmıştır. $\vec{U}(t)$ dual timelike vektörü ile sabit $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual açısı yapan

$$\vec{V} = \cosh\Phi\overrightarrow{U_1} + \sinh\Phi\overrightarrow{U_3}$$

dual timelike vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği $\vec{V}(t)$ dual kapalı timelike eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen paralel regle yüzey tanımlanarak bu yüzeyin integral invaryantları hesaplanmıştır. $\left\{\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3}\right\}$ ve $\left\{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}\right\}$ dual ortonormal sistemlerine bağlı olarak oluşan $\vec{C}$ ve $\overset{\Rightarrow}{C}$ birim dual vektörlerinin (spacelike veya timelike) birim dual küre üzerinde çizdiği kapalı eğrilere (spacelike veya timelike) çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzeylerin invaryantları hesaplanmıştır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

ID_1^3 Dual Lorentz uzayında spacelike bir $\vec{U} = \vec{U}(t)$ birim dual vektörünün birim dual küre üzerinde çizdiği $\vec{U}(t)$ dual kapalı timelike binormalli spacelike veya spacelike binormalli spacelike bir eğriye çizgiler uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzeyin integral invaryantları hesaplanabilir. Bu kapalı regle yüzeyin paralel regle yüzeyi tanımlanarak integral invaryantları hesaplanabilir.

İlave olarak, hareketin ani Pfaff vektörleri yönündeki birim vektörlerin birim dual küre üzerinde çizdiği dual eğrilere karşılık gelen kapalı regle yüzeylerin integral invaryantları bulunabilir.

Yüzeyler arasında Weingarten dönüşümünün dual ifadesi tanımlanırsa Paralel regle yüzeylerin dual anlamda Gauss ve ortalama eğrilikleri bulunabilir.

7. KAYNAKLAR

[1] Akutagawa, K., Nishikawa, S. 1990. The Gauss Map and Spacelike Surfaces with Prescribed Mean Curvature in Minkowski 3-Spce, Töhoko Math., J. 42, 67-82.

[2] Ayyıldız, N., Çöken, A. C., Yücesan, A., 2004, On The Dual Darboux Rotation Axis of The Spacelike Dual Space Curve, Demonstratio Mathematica, 37(1), 197-202.

[3] Birman, G.S., Nomizu, K., 1984. Trigonometry in Lorentzian Geometry, Am. Math. Mont., 91, 543-549.

[4] Clifford, W.K., 1873. Preliminary Sketch of Biquaternions, Proceedings of London Math. Soc. 4, 361-395.

[5] Ekmekçi, N., 1991. Lorentz Manifoldları Üzerinde Eğilim Çizgileri, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 53s.

[6] Erim, K., 1949. *Diferensiyel Geometri Dersleri,* İstanbul, 399.

[7] Güneş, R. ve Çalışkan, M., 1989. Dual Centrode Eğrisi Üzerine, II. Ulusal Matematik Sempozyumu Bildirileri, Ege Üniversitesi, 25 – 28 Eylül, İzmir.

[8] Gürsoy, O., 1990. The Dual Angle of Pitch of a Closed Ruled Surface, Mech and Mach. Theory, Vol:25 No:2, 131-140.

[9] Hacısalioğlu, H.H. 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen – Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No:2, Ankara.

[10] Hacısalihoğlu, H.H.1972. On the Pitch of a Closed Ruled Surface, Mech. And Mach. Theory Vol: 7, 291-305 (Pargaman Press. Printed in Great Britian).

[11] Hacısalihoğlu, H.H. 1983. *Diferensiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi Fen – Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No7, Malatya.

[12] Hacısalihoğlu, H.H. 1983. *Diferensiyel Geometri*, Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları, İstanbul, 324p.

[13] Müler, H.R., 1963. *Kinematik Dersleri,* Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Mat.27 Ankara, 292p.

[14] O’neill, B., 1983. *Semi Riemann Geometry*, Academic Pres, New york, London, 468p.

[15] Ratcliffe, J.G., 1994. Foundations of Hyperbolic Manifolds, Springer-Verlag New York, Inc., New York.

[16] Study E., *Geometrie der Dynamen*, Leibzig, 1903.

[17] Şenyurt, S., 1999. Paralel Regle Yüzeyler ve Bazı Karakteristik Özellikleri, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Samsun.

[18] Şenatalar M., 1978 *Diferensiyel Geometri (Eğriler ve Yüzeyler Teorisi)* İstanbul Devlet Mühendislik Ve Mimarlık Akademisi Yayınları, Sayı:151

[19] Turgut, A., 1995. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara.

[20] Uğurlu, H.H., 1997. On The Geometry of Timelike Surfaces, Commun. Fac. Sci. Ank. Series, A1 Vol:46, 211-223.

[21] V.D.I. Woestijne., Minimal Surfaces of the 3-dimensional Minkowski space. Proc. Congres "Géométrie différentielle et applications" Avignon (30 May 1988), Word Scientific Publishing. Singapore, 344-369.

[22] Yücesan, A., Çöken. A. C. and Ayyıldız N., On the dual Darboux Rotation Axis of the Timelike Dual Space Curve, Balkan Journal of Geometry and Its App. Vol.7, No.2, 2002, 137-142.

[23] Yapar, Z., 1980. On The Curvature Motion, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series, Vol:38, Number 1-2, pp. 103 -114.

8. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Özcan BEKTAŞ

Doğum Yeri : Ordu

Doğum Tarihi : 01/01/1985

Medeni Hali : Bekar

Bildiği Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu:

Lise: : Ordu Fatih Lisesi(Y.D.A), 1999-2003

Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, 2004-2008

Yüksek Lisans : Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2009-2010

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl:

Rize Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Araştırma Görevlisi – 2009

Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Araştırma Görevlisi – 2010

İletişim Bilgileri:

Zaferi Milli Mah. 155. Sok. No:20 52100 Merkez/ORDU.

e-mail: ozcanbektas1986@hotmail.com