T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ MATRİSİN TOPLAMININ DRAZİN İNVERSİ VE DRAZİN İNVERSLERİN ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

EMİNE GÜLDEREN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2014

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Emine GÜLDEREN tarafından ve Doç. Dr. Selahattin MADEN danışmanlığında hazırlanan "İki Matrisin Toplamının Drazin İnversi ve Drazin İnverslerin Çeşitli Uygulamaları" adlı bu tez, jürimiz tarafından 31 / 05 / 2014 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Selahattin MADEN

Başkan : Doç. Dr. Selahattin MADEN
Matematik, Ordu Üniversitesi
İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Selim NUMAN
Matematik, Giresun Üniversitesi
İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL
Matematik, Ordu Üniversitesi
İmza :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 06.06.14 tarih ve 2014/232 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

06/06/2014

Prof Dr. M. Fikret BALTA
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Enstitü Müdürü
(Ünvanı, Adı Soyadı)

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza

Emine GÜLDEREN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

İKİ MATRİSİN TOPLAMININ DRAZİN İNVERSİ VE DRAZİN İNVERSLERİN ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

Emine GÜLDEREN

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2014
Yüksek Lisans Tezi, 118s.

Danışman: Doç. Dr. Selahattin MADEN

Bu tez altı bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde çalışmanın amacından bahsedilerek bir giriş verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamızda gerekli olacak temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Bu bölümde genelleştirilmiş inversler ve Moore-Penrose tipi inversler incelenmiş ve bir algoritma verilerek örneklerle desteklenmiştir. Üçüncü bölümde Drazin invers kavramı verilmiş ve 2x2 lik blok matrislerin Drazin inverslerinin hesaplanmasında çeşitli formüller kullanılmıştır. Dördüncü bölümde ise iki matrisin toplamının Drazin inverslerine ait formüller ve bazı uygulamalar verilmiştir. Ayrıca matris toplamının Drazin inversinin hesaplanmasında blok matrisler kullanılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Matris, Kare Matris, Singüler Matris, Nonsingüler Matris, Rank, Determinant, Bir Matrisin İnversi, Genelleştirilmiş İnvers, Moore–Penrose İnvers, Drazin invers, İki Matrisin Toplamının Drazin İnversi.

ABSTRACT

THE DRAZIN INVERSE OF THE SUM OF TWO MATRICES AND SOME APPLICATIONS OF THE DRAZIN INVERSE

Emine GÜLDEREN

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2014
MSc. Thesis, 118p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Selahattin MADEN

This thesis consist of six chapters. In the first chapter, it is given an introduction and the aim of the thesis. In the second chapter, basic definitions and theorems in this thesis stated and proved. In this chapter, generalized inverses are considered, an algorithm is given and improved with examples. In the third chapter, it is given the concept of Drazin inverse and it is used some formulas for calculate the Drazin inverse of 2×2 block matrices. In the fourth chapter, the Drazin inverse of the sum of two matrices. Also, the block matrices are used for calculating of the Drazin inverse of sum of matrices.

Key Words: Matrix, Square Matrix, Singular Matrix, Nonsingular Matrix, Rank, Determinant, Inverse of a Matrix, Generalized Inverse, Drazin Inverse, Drazin Inverse of Sum of Two Matrices.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında her türlü yardımını esirgemeyen ve biz genç araştırmacılara büyük destek sağlayarak bizleri cesaretlendiren danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Selahattin MADEN'e ve tez çalışmalarım esnasında bilimsel konularda daima yardımını gördüğüm Sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL hocama çok teşekkür ederim. Lisans ve Lisansüstü eğitimim sırasında ders aldığım tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarım süresince ve hayatımın her anında yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini benden hiç esirgemeyen aileme ve eşime de yürekten teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{K}$	: K kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{K}_n^m$	: $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\mathbb{C}_n^m$	: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
I_n	: $m \times n$ tipindeki birim matris
A^T	: A matrisinin transpoz matrisi
$\bar{A}$	: A matrisinin eşlenik matrisi (eş matris)
A^*	: A matrisinin eşlenik transpoz matrisi (Hermitian matrisi)
$\|A\|$	: A matrisinin determinantı
$\mathrm{Ek}(A)$	: A matrisinin ek matrisi
A_{ij}	: A matrisinin bir a_{ij} elamanının kofaktörü
A^{-1}	: A matrisinin inversi
$r(A)$	: A matrisinin rankı
$\mathcal{N}(A)$	: A matrisinin null (sıfır) uzayı

$\mathcal{R}(A)$	: A matrisinin ranj (sütun) uzayı
$P_{\mathcal{R}(A)}$	: A matrisinin $\mathcal{R}(A)$ sütun (ranj) uzayının yardımcısı (izdüşümü)
A^{-} ve ya $A^{(1)}$	: A matrisinin genelleştirilmiş inversi (iç inversi)
$A^{(2)}$	: A matrisinin dış inversi
A_0 ve ya $A^{(1,2)}$	: A matrisinin yansımalı genelleştirilmiş inversi
$A^{\dagger}$	: A matrisinin Moore-Penrose tipi genelleştirilmiş inversi
A^{D}	: A matrisinin Drazin inversi
X_L^{-}	: $X_L^{-}.X = I$ şartını sağlayan X matrisinin bir sol inversi
X_R^{-}	: $X.X_R^{-} = I$ şartını sağlayan X matrisinin bir sağ inversi
$\oplus$	: Direkt toplam

1. GİRİŞ

Bir singüler matrisin inversi fikri ilk defa 1920 yılında Moore (1920, 1935) tarafından ortaya atılmıştır. Bu fikrin genel operatörlere genişletilmesi ise Tseng (1949a, 1949b, 1956) tarafından yapılmıştır. Ancak, daha sonra 1955 yılına kadar bu konuda her hangi bir sistematik çalışmaya rastlanamamaktadır. 1955 yılında, önceki çalışmalardan habersiz olarak, Penrose (1955, 1956) biraz farklı bir yoldan Moore tarafından verilen invers kavramını tekrar tanımlamıştır. Penrose ile aynı zamanlarda yaşayan bilim adamlarından birisi olan Rao (1955), bir singüler matrisin Pseudo İnversi olarak adlandırdığı, en küçük kareler teorisinde singüler matrisli normal denklemlerin çözümünde ve tahmin edicilerin varyanslarının hesaplanmasında kullanılan yeni bir invers kavramı geliştirmiştir. Rao tarafından geliştirilen Pseuda invers, Moore ve Penrose tarafından ortaya konulan kısıtlamaların tümünü sağlamamaktadır. Bu nedenle de bu invers, Moore–Penrose inversten farklıdır, fakat gözlem denklemlerinin rankları üzerinde herhangi bir kısıtlama konulmaması durumunda en küçük kareler yönteminin genel teorisinin ortaya konulmasında oldukça yararlıdır. Rao (1962), daha sonraki bir çalışmasında, lineer denklemlerle ilgili problemlerinin çözümünde yeterli olabilecek ve Moore ve Penrose’un vermiş olduğu tanımdan çok daha zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Böyle bir invers, bir genelleştirilmiş invers (g–invers) olarak adlandırılmış ve bunun uygulamaları Rao (1961, 1965a, 1965b, 1966, 1967)’ nun birçok çalışmasında yer almıştır.

Genelleştirilmiş inversler üzerinde 1955’lerden itibaren çalışan başlıca bilim adamları arasında Greville (1959), Bjerhammer (1951a, 1951b, 1958), Ben-Israel ve Charnes (1963), Chipman (1964, 1968), Chipman ve Rao (1964), Scroggs ve Odell (1966) sayılabilir. Bose (1959), “Varyans Analizi” adlı ders notlarında g–inversi kullanmıştır. Bott ve Duffin (1953) bir kare matrisin kısıtlamalı inversini tanımlamıştır ki bu invers bilinen g–inversten farklıdır ve bazı uygulamalarda kullanılır. Chernoff (1953), singüler nonnegatif tanımlı bir matrisin g–inversini göz önüne almıştır ki bu invers, bir g–invers olmamasına rağmen bazı tahmin problemlerinin incelenmesinde yararlıdır. Rao (1962) tarafından verilen daha zayıf tanımı sağlayan g–invers tek olmamakla birlikte matris cebirinde ilginç bir çalışma olarak kabul edilir. 1967 yılında bir yayınında Rao (1967), değişik amaçlarla kullanılmak üzere g–inverslerin bir sınıflandırmasını vermiştir. Bu çalışmalar daha sonra genelleştirilmiş inverslerin yeni bir sınıflandırmasını ortaya atan Mitra (1968a, 1968b), Mitra ve Bhimasankaram (1969, 1970) tarafından geliştirilmiştir. Genelleştirilmiş inverslerin diğer çeşitli uygulamaları Mitra ve Rao (1968a, 1968b, 1969) ve Rao (1968) tarafından yapılan bir dizi çalışmada ele alınmıştır.

Genelleştirilmiş inverslerin hesaplanmasındaki sistematik gelişmeler ve onların çeşitli uygulamaları *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* (Wiley, 1971) adlı kitapta verilmiştir.

Literatürde $n \times n$ biçimindeki bir M matrisi için M nin Drazin inversinin açık bir ifadesini elde etmede kullanılan çok önemli şartlar ortaya konulmuştur. Bu sonuçlar altında 3. kısımda parçalı bir matrisin Drazin inversinin bazı ilginç açık gösterimlerini ve çeşitli örnekler vereceğiz. Bu durumda verilecek sonuçlar Drazin inverslerin bulunmasında oldukça kullanışlıdır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1. a. $\mathbb{K}$ bir cisim olsun. $m,n\in\mathbb{N}$ ve $1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n$ olmak üzere bütün (i,j) sıralı ikililerinin kümesi $A=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ olsun.

$f: A \longrightarrow \mathbb{K}$

fonksiyonu

$(i,j)\longrightarrow f(i,j)=a_{ij}$

olarak tanımlansın. $a_{ij}\in\mathbb{K}$ olacak şekilde seçilen $m.n$ tane elemanın oluşturduğu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

sayı tablosuna $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m\times n$ tipinde bir **matris** denir.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

matrisi kısaca $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ şeklinde gösterilir. Her (i,j), $1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n$ ikilisine karşılık gelen a_{ij} elemanına A matrisinin $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$**–yinci bileşeni** denir.

b. $m\times n$ tipinde olan ve bileşenleri bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinden seçilen bütün

$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ matrislerinin kümesi $\mathbb{K}_n^m$ ile gösterilir.

c. $A=\left(a_{ij}\right)$ ve $B=\left(b_{ij}\right)$ $m\times n$ tipinde her hangi iki matris olmak üzere, her (i,j) için

$a_{ij}=b_{ij},\ 1\leq i\leq m$ ve $1\leq j\leq n$ ise bu iki matrise **eşit matrisler** denir.

d. $A=\left(a_{ij}\right)$ $m\times n$ tipinde bir matris olmak üzere, her bir a_{ij} elemanı sıfıra eşitse A matrisine **sıfır matris** denir.

e. $A=\left(a_{ij}\right)$ ve $B=\left(b_{ij}\right)$ $m\times n$ tipinde iki matris olmak üzere, A ve B **matrislerinin toplamı**, (i,j)–yinci bileşeni $a_{ij}+b_{ij}$ olan bir matris olup

$+: \mathbb{K}_n^m \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$

$(A, B) \longrightarrow A + B = (a_{ij}) + (b_{ij})$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + +b_{12} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

f. $c \in \mathbb{K}$ bir skaler olmak üzere $cA \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi (i, j)–yinci bileşeni ca_{ij} olan bir matristir. Yani

$.: \mathbb{K} \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$

$$(c, A) \longrightarrow cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

olur. O halde her $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için $0 \in \mathbb{K}$ olmak üzere, $0A = 0 \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi, $m \times n$ tipinde sıfır matristir.

g. $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}_p^m$ ve $B = (b_{ij}) \in \mathbb{K}_n^p$ olmak üzere, A ve B **matrislerinin çarpımı** $C = (c_{ij}) \in \mathbb{K}_n^m$ şeklinde bir matristir ve

$.: \mathbb{K}_p^m \times \mathbb{K}_n^p \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$

$(A, B) \longrightarrow A.B = C$

$(a_{ij}).(b_{ij}) = (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right), \; 1 \leq i \leq m, \; 1 \leq j \leq n$

şeklindedir, yani

$$A.B = \begin{pmatrix} [a_{11}b_{11} + \dots + a_{1p}b_{p1}] & \dots & [a_{11}b_{1n} + \dots + a_{1p}b_{pn}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [a_{m1}b_{11} + \dots + a_{mp}b_{p1}] & \dots & [a_{m1}b_{1n} + \dots + a_{mp}b_{pn}] \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır. O halde matris çarpımının tanımlı olabilmesi için birinci çarpanın sütun sayısı, ikinci çarpanın satır sayısına eşit olmalıdır. Herhangi A ve B matrislerinin çarpımı $A.B$ veya AB ile gösterilir (Hacısalihoğlu 1977).

Tanım 2.2. a. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, reel sayılar kümesi olarak alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki A matrisine bir **reel matris** denir.

b. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, kompleks sayılar kümesi olarak alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki bir A matrisine bir **kompleks matris** denir (Branson 1999).

Tanım 2.3. a. Bir $A = (a_{ij})_{m \times n}$ matrisinde $m = n$ ise, A matrisine **kare matris** denir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

kare matrisinde $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarına **köşegen (esas köşegen) elemanları** denir.

b. Bir $A = (a_{ij})_{n \times n}$ kare matrisinin $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ köşegen elemanları dışındaki tüm elemanları sıfır ise yani, $a_{ij} = 0 \; (i \neq j)$ ise bu matrise **köşegen matris** denir ve $A =$ Köş$\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ ile gösterilir.

c. Bir köşegen matriste $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} =$ k, k $\in \mathbb{K}$ ise bu matrise **skaler matris** denir.

d. Köşegen üzerindeki elemanları 1 ve köşegen dışındaki elemanları 0 olan $n \times n$ tipindeki bir matrise **birim matris** denir ve

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Her hangi bir $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için, $I_m A = A I_n = A$ olur.

e. Bir $A = (a_{ij})_{m \times n}$ matrisinden aynı numaralı satırlar ve sütunlar kendi aralarında yer değiştirilerek elde edilen $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$ matrisine A matrisinin **transpozu (transpoze matrisi)** denir. Buna göre A ve B uygun matrisler olmak üzere

$(A + B)^T = A^T + B^T$ ve $(AB)^T = B^T A^T$

eşitlikleri sağlanır.

f. A bir reel kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise, A matrisine **simetrik matris** denir.

g. A ve B kare matrisleri arasında $AB = BA$ bağıntısı varsa, bu matrislere **değişmeli (komutatif) matrisler** denir (Hacısalihoğlu 1977).

Tanım 2.4. a. $\{1,2, \dots n\}$ kümesinin kendisi üzerine bir birebir ve örten bağıntısı veya eş değer olarak $1,2, \dots n$ sayılarının yeniden bir sıralanmasına $\{1,2, \dots n\}$ kümesinin bir $\boldsymbol{\sigma}$ **permütasyonu** denir. Böyle bir permütasyon

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

veya

$$\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n \quad , \ j_i = \sigma(i)$$

ile gösterilir. Bu permütasyonların tümünün kümesi S_n ile gösterilir. S_n de gelişigüzel bir σ permütasyonu, örneğin $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ düşünüldüğünde σ da çift veya tek sayıda permütasyonlar olmasına göre σ ya **çift** veya **tek permütasyon** denir. O halde bir σ nın işareti

$$sgn\sigma = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \sigma \text{ çift ise} \\ -1, & \text{eğer } \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $sgn\sigma$ ile gösterilir.

b. $A = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}$ bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı kare matris olsun.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisinin her satırından ve her sütunundan yalnız ve yalnız bir eleman alınmak üzere n elemanın bir çarpımı düşünülsün. Böyle bir çarpım

$$a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots , a_{nj_n}$$

şeklinde yazılır. Burada çarpanlar ardışık satırlardan gelir ve bu yüzden alt indisler $1, 2, \dots, n$ doğal sayı sırasındadır. Çarpanlar farklı sütunlardan geldiğinden, ikinci alt indislerin dizisi S_n de bir $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ permütasyonunu oluşturur. Tersine, S_n deki her permütasyon yukarıdaki şekilde bir çarpım tanımlar. Böylece A matrisi böyle $n!$ çarpım kapsar.

$A = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}$ kare matrisinin **determinantı** $\det(A)$ veya $|A|$ şeklinde gösterilir ve yukarıdaki her çarpanı $sgn\sigma$ ile çarpılan veya $n!$ tane çarpımların toplamıdır. Yani

$$|A| = \sum_{\sigma} (sgn\sigma) a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots , a_{nj_n}$$

veya

$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (sgn\sigma) a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots , a_{n\sigma(n)}$

şeklinde n mertebedendir.

$A = (a_{ij})_{n\times n}$ matrisinin determinantı aşağıdaki şekilde de tanımlanmaktadır.

c. 1×1 tipinde bir A matrisinin determinantı kendisidir.

$A = (a)$ ise, $\det(A) = |a| = a$

olur.

d. 2×2 tipinde bir A matrisinin determinantı aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

olur.

n > 2 için bir kare matrisin determinantı, aşağıda gösterildiği gibi bir indirgeme işlemi ve minörleri ile işaretli minörleri kullanılan bir açılımla hesaplanır.

e. Bir $A = (a_{ij})_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının $|M_{ij}|$ şeklinde tanımlanan **minörü**, *A* matrisinden i–yinci satırın ve j–yinci sütunun atılması ile oluşan

$(n-1) \times (n-1)$ tipindeki kare matrisin determinantıdır.

f. Bir $A = (a_{ij})_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının minörü $|M_{ij}|$ olsun. A matrisinin bir a_{ij} elemanının A_{ij} şeklinde gösterilen **kofaktörü (işaretli minörü veya eş çarpanı)**

$A_{ij} = (-1)^{i+j}.|M_{ij}|$

şeklinde tanımlanır.

g. Bir $A = (a_{ij})_{n\times n}$ matrisinin determinantı her hangi bir satır (sütun) elemanlarının kendi kofaktörleriyle çarpılıp bu çarpanların toplanmasıyla bulunur. Yani herhangi *i* ve j $(i,j = 1,2,3,\dots,n)$ için

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}|M_{ik}| \qquad (2.4)$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj}|M_{ik}| \qquad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır.

Her bir i için, (2.4) ile verilen toplama, A matrisinin determinantının i–yinci satır elemanlarına göre açılımı, her bir j için, (2.5) ile verilen toplama ise A matrisinin determinantının j–yinci sütun elemanlarına göre açılımı denir.

h. Bir $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ kare matrisi için $|A| = 0$ ise A matrisine **singüler (tekil) matris**, $|A| \neq 0$ ise, A matrisine **nonsingüler (tekil olmayan veya regüler) matris** denir (Branson 1999).

Tanım 2.5. a. Bir $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ matrisinde bir a_{ij} elemanının kofaktörü A_{ij} olsun.

$\mathrm{Ek}(A) = \left(A_{ij}\right)^T = \left(A_{ji}\right)$

şeklinde tanımlanan matrise ***A* matrisinin ek matrisi** denir. Buna göre

$$Ek(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

olur.

b. Bir $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ matrisi için $A.B = B.A = I_n$ olacak şekilde bir $B = \left(b_{ij}\right)_{n\times n}$ matrisi varsa, B matrisine ***A* matrisinin inversi** denir ve $A^{-1} = B$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu 1977).

Teorem 2.1. Bir $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ matrisi ile bu matrisin ek matrisinin çarpımı bir skaler matris olup

$$A.\mathrm{Ek}(A) = \mathrm{Ek}(A).A = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = |A| I_n \tag{2.6}$$

ile verilir (Hacısalihoğlu 1977).

İspat: $A.\mathrm{Ek}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$$

olur ki bu matris bir skaler matristir. Benzer şekilde

$$\text{Ek}(A).A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. O halde

$$A.\text{Ek}(A)=\text{Ek}(A).A=|A|\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=|A|I_n$$

bulunur.

Teorem 2.2. Bir $A=(a_{ij})_{n\times n}$ nonsingüler matrisinin inversi

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{Ek}(A) \tag{2.7}$$

dır (Hacısalihoğlu 1977).

İspat: (2.6) bağıntısından dolayı $A.\text{Ek}(A)=|A|I$ olur. Bu ifadenin her iki yanı A^{-1} ile çarpıldığında

$$(A^{-1}A).\text{Ek}(A)=A^{-1}|A|I \;\Rightarrow\; \text{Ek}(A)=|A|A^{-1}I \;\Rightarrow\; \text{Ek}(A)=|A|A^{-1}$$

olur. Öte yandan A matrisi nonsingüler olduğundan $|A|\neq 0$ olup

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{Ek}(A)$$

elde edilir.

Teorem 2.3. $A=(a_{ij})_{n\times n}$ nonsingüler bir matris ve B ve C çarpıma uygun matrisler olmak üzere $AB=AC$ ise $B=C$ olur (Hacısalihoğlu 1977).

İspat: $AB=AC$ eşitliğinin her iki tarafı soldan A^{-1} ile çarpılmasıyla

$A^{-1}AB = A^{-1}AC$ yani $B = C$ elde edilir.

Teorem 2.4. a. Bir $A = (a_{ij})_{n\times n}$ nonsingüler matris olsun. A^{-1} matrisi tektir.

b. A nonsingüler matris ise A^{-1} matrisi de nonsingüler olup $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

c. A ve B çarpmaya uygun nonsingüler matrisler ise AB matrisi de nonsingüler olup $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dır.

d. A nonsingüler bir matris ise A^T matrisi de nonsingüler olup $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir (Branson 1999).

İspat: a. B ve C matrislerinin A matrisinin herhangi iki inversi olduğu varsayılsın. O zaman $AB = BA = I$ ve $AC = CA = I$ olur. Buradan

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$$

elde edilir.

b. $(A^{-1})^{-1}$ matrisi A^{-1} matrisinin inversidir. Aynı zamanda A matrisi de A^{-1} matrisinin inversidir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

c. $(AB)^{-1}$ matrisi AB matrisinin inversidir. Ayrıca

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

ve

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

yazılabilir. Böylece $B^{-1}A^{-1}$ matrisi de AB matrisinin inversi olur. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

d. $(A^T)^{-1}$ matrisi A^T matrisinin inversidir. Ayrıca $I^T = I$ olduğundan

$$I = I^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T(A)^T$$

olur. Bu durum, $(A^{-1})^T$ matrisinin A^T matrisinin bir inversi olduğunu gösterir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ elde edilir.

Tanım 2.6. a. Bir $A = (a_{ij})_{n\times n}$ matrisi için $A^2 = A$ ise, A matrisine **idempotent matris** denir.

b. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı A matrisinin elemanlarının yerlerine eşlenikleri yazılarak elde edilen matrise A matrisinin **eşleniği (eş matrisi)** denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

c. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı A matrisi için $\left(\overline{A}\right)^T = A$ ise A matrisine **hermitian matris** denir ve $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ ile gösterilir.

d. Bir A matrisi için $AA^* = A^*A$ ise A matrisine **normal matris** denir.

e. $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ nonsingüler bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^*$ (ve ya $AA^* = A^*A = I$) ise A matrisine **birimsel (unitary) matris** denir.

f. $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^T$ ise A matrisine **ortogonal (dik) matris** denir.

g. $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ reel simetrik bir matris olmak üzere, sıfırdan farklı her $x\in\mathbb{R}_1^n$ vektörü için $x^TAx > 0$ ($x^TAx \geq 0$) ise, A matrisine **Pozitif Tanımlı (Pozitif Yarı Tanımlı) Matris** denir.

h. A, $n\times n$ tipinde bir kare matris olsun. $(A-\lambda I)x = 0$ eşitliğini sağlayan λ skalerine A matrisinin bir **özdeğeri**, sıfır olmayan x vektörüne de A matrisinin bir **özvektörü** denir (Hacısalihoğlu 1977).

Teorem 2.5. A ve B uygun matrisler olmak üzere

a. $\left(\overline{A}\right)^T = \overline{\left(A^T\right)}$

b. $(A^*)^* = A$

c. $(A+B)^* = A^* + B^*$

d. $(AB)^* = B^*A^*$

eşitlikleri sağlanır (Branson 1999).

İspat: a. $A = \left(a_{ij}\right)$ $m\times n$ tipinde bir matris olsun. Bu takdirde

$$\overline{A} = \left(\overline{a_{ij}}\right) \quad \text{ve} \quad \left(\overline{A}\right)^T = \left(\overline{a_{ji}}\right)$$

olur. Diğer taraftan

$A^T = (a_{ji})$ ve $\overline{(A^T)} = (\overline{a_{ji}})$

olduğundan

$$\overline{(A^T)} = (\overline{A})^T$$

olduğu görülür.

b. $A^* = (\overline{A})^T$ olduğundan

$$(A^*)^* = \left(\overline{(\overline{A})^T}\right)^T = (A^T)^T = A$$

elde edilir.

c. Hermitian matris tanımına göre

$$(A+B)^* = \left(\overline{A+B}\right)^T = \left(\overline{A}+\overline{B}\right)^T = \left(\overline{A}\right)^T + \left(\overline{B}\right)^T = A^* + B^*$$

elde edilir.

d. Hermitian matris tanımına göre

$$(AB)^* = \left(\overline{AB}\right)^T = \left(\overline{A}\,\overline{B}\right)^T = \left(\overline{B}\right)^T\left(\overline{A}\right)^T = B^*A^*$$

yazılabilir.

Teorem 2.6. Reel simetrik bir A matrisinin pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olması için gerek ve yeter şart, tüm özdeğerlerinin (sıfırdan farklı özdeğerlerinin) pozitif olmasıdır (Hacısalihoğlu 1977).

İspat: A matrisi pozitif tanımlı olmak üzere, λ özdeğerine ve ilgili x özvektörüne sahip olsun. Bu takdirde bu x vektörü için $Ax = \lambda x$ ve $\langle Ax, x\rangle > 0$ bağıntıları vardır. O halde $0 < \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$ olur. x bir özvektör olduğundan, sıfırdan farklıdır ve dolayısıyla $\langle x, x\rangle$ pozitiftir. Bu durumda $\lambda > 0$ olmalıdır.

A matrisi pozitif yarı tanımlı olmak üzere, λ özdeğerine ve ilgili x özvektörüne sahip olsun. Bu takdirde bu x vektörü için

$$Ax = \lambda x \text{ ve } \langle Ax, x\rangle \geq 0$$

bağıntıları vardır. O halde

$$0 \leq \langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$$

olur. x bir özvektör olduğundan, sıfırdan farklıdır ve dolayısıyla $\langle x, x \rangle$ pozitiftir. Bu durumda $\lambda \geq 0$ olmalıdır.

Tüm (sıfırdan farklı) özdeğerleri pozitif olması halinde A matrisinin pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olacağı benzer şekilde gösterilebilir. (Lanchester 1969)

Tanım 2.7. a. $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörler kümesi verilmiş olsun. $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği ancak $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinin tümü birden sıfır olduğunda sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine **lineer bağımsızdır** denir. Aksi halde yani, $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine **lineer bağımlıdır** denir.

b. A matrisi$m \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. A matrisinin sütun vektörlerini $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$ ile, ve satır vektörlerini $A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}$ ile gösterelim. A_{i*} , $i = 1, 2, \dots, m$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına A matrisinin **satır rankı**, A_{*j} , $j = 1, 2, \dots, n$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına ise A matrisinin **sütun rankı** denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.7. Bir matrisin iki satırının kendi aralarında yer değiştirmesi matrisin satır rankını değiştirmez (Branson 1999).

İspat: A matrisinin herhangi iki satırı yer değiştirdiğinde satır vektörlerinin kümesi değişmeyeceğinden, bu durum matrisin satırları arasındaki lineer bağımsızlığı değiştirmez. Yani satır rankını değiştirmez.

Teorem 2.8. $AX = 0$ ve $BX = 0$ denklemlerinin çözüm kümeleri aynı ise, o zaman A ve B $n \times n$ tipindeki matrislerin sütun rankları aynıdır (Branson 1999).

İspat: $AX = 0$ sistemi

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = 0 \tag{2.8}$$

olarak yazılabilir. Burada A_i , A matrisinin i -yinci sütunudur ve $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ olur. Benzer şekilde, $Bx = 0$ sistemi

$$x_1 B_1 + x_2 B_2 + \cdots + x_n B_n = 0 \tag{2.9}$$

olarak yazılabilir.

A matrisinin sütun rankı a, B matrisinin sütun rankı b ile gösterilsin. A matrisinin sütun rankı, B matrisinin sütun rankından büyük kabul edilsin. Böylece $a > b$ olur. Bu durumda A matrisinin a tane lineer bağımsız sütunu olmalıdır. Genellik kaybedilmeden, bunların A matrisinin ilk a sütunu olduğu varsayılabilir. (Eğer değilse, A matrisinin sütunları bu şekilde yeniden düzenlenebilir. Bu durum ise Teorem 2.7' ye benzer şekilde A matrisinin sütun rankını değiştirmez.) Ancak $a > b$ kabul edildiğinden B matrisinin ilk a sütunu lineer bağımlıdır. Böylece, hepsi sıfır olmayan öyle $d_1, d_2, \ldots, d_n$ vardır ki

$$d_1 B_1 + d_2 B_2 + \cdots + d_a B_a = 0$$

olur. Buradan

$$d_1 B_1 + d_2 B_2 + \cdots + d_a B_a + 0 B_{a+1} + \cdots + 0 B_n = 0$$

ve (2.9) sisteminin çözümü olarak

$$x_1 = d_1 \quad x_2 = d_2 \quad \ldots \quad x_a = d_a \quad x_{a+1} = x_{a+2} = \cdots = x_n = 0$$

bulunur. Bu aynı değerler (2.8) sisteminin de çözümü olarak verildiğinden

$$d_1 A_1 + d_2 A_2 + \cdots + d_a A_a = 0$$

dır. Burada, belirtildiği gibi, $d_1, d_2, \ldots, d_a$ sabitlerinin tümü sıfır değildir. Ancak bu $A_1, A_2, \ldots, A_a$ matrislerinin lineer bağımlı olduğunu gösterir ki, bu da bir çelişkidir.

A ve B matrislerinin rollerini değiştirerek yapılan benzer bir çalışma, B matrisinin sütun rankının da A matrisinin sütun rankından daha büyük olamayacağını gösterir. Böylece bu iki matrisin sütun rankları eşit olmalıdır.

Teorem 2.9. Elementer satır işlemleri herhangi bir matrisin sütun rankını değiştirmez (Branson 1999).

İspat: A matrisine elementer satır işlemleri uygulanarak elde edilen matris B olsun. Bu durumda $Ax = 0$ ve $Bx = 0$ homojen denklem sistemlerinin çözüm kümeleri aynıdır. Teorem 2.8 yardımıyla A ve B matrislerinin sütun rankları aynıdır.

Teorem 2.10. Herhangi bir A matrisi için satır rankı sütun rankına eşittir (Branson 1999).

İspat: $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin satır rankının r ve sütun rankının ise c olduğu kabul edilsin. $r = c$ olduğu gösterilecektir. A matrisinin satırları ilk r satırı lineer bağımsız ve kalan $m - r$ satırı ilk r satırın lineer birleşimi olacak şekilde yeniden düzenlenirse, Teorem 2.7 ve Teorem 2.8 yardımıyla bu işlemin A matrisinin satır ve sütun ranklarını değiştirmediği görülür. A matrisinin satırları sırasıyla $A_1, A_2, \dots, A_m$ ile gösterilsin ve C ve D matrisleri

$$C = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_r \end{pmatrix} \text{ ve } D = \begin{pmatrix} A_{r+1} \\ A_{r+2} \\ \cdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

olarak tanımlansın. O zaman A matrisi $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$ bloklanmış matrisidir. Ayrıca D matrisinin her bir satırı C matrisinin satırlarının bir lineer birleşimi olduğundan, öyle bir T matrisi vardır ki, $D = TC$ olur. Özel durumda eğer

$$A_{r+1} = d_1A_1 + d_2A_2 + \cdots + d_rA_r$$

ise o zaman $(d_1, d_2, \dots, d_r)$ vektörü T matrisinin ilk satırıdır. Buradan, her hangi bir n boyutlu x vektörü için

$$Ax = \begin{pmatrix} Cx \\ Dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cx \\ TCx \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Bu durumda, ancak ve ancak $Cx = 0$ ise $Ax = 0$ olur ve Teorem 2.8. den dolayı A ve B matrislerinin sütun rankı c dir. Ancak B matrisinin sütunları r boyutlu vektörlerdir. Böylece B matrisinin sütun rankı r den büyük olamaz. Yani

$$c \leq r \tag{2.10}$$

olur.

Yukarıdaki durum A^T matrisi için tekrarlanırsa, A^T matrisinin sütun rankının A^T matrisinin satır rankından büyük olamayacağı görülür. Ancak, A^T matrisinin sütunları A matrisinin satırları olduğundan bu durum A matrisinin satır rankının A matrisinin sütun rankından büyük olamayacağı anlamına gelir. Yani

$$r \leq c \tag{2.11}$$

olur. (2.10) ve (2.11) bağıntılarından $r = c$ olduğu görülür.

Tanım 2.8. Herhangi bir A matrisinin rankı, satır ve sütun rankı olarak tanımlanır ve $\text{rank}(A)$ veya $r(A)$ şeklinde gösterilir (Branson 1999).

Teorem 2.11. A bir matris olmak üzere $r(A) = r(A^T)$ dir.(Hacısalihoğlu 1977)

İspat: A matrisinin satırları A^T matrisinin sütunları ve A matrisinin sütunları A^T matrisinin satırları olduğundan, Teorem 2.10' dan istenilen sonuç elde edilir.

Tanım 2.9. $n \times n$ tipindeki bir A kare matrisi için eğer $r(A) = n$ ise A matrisine **Nonsingüler (Tekil Olmayan) Matris** denir. Aksi durumda yani, $r(A) < n$ ise A matrisine **Singüler (Tekil) Matris** denir (Hacısalihoğlu 1977).

Tanım 2.10. a. $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun.

$\mathcal{N}(A) = \{x: Ax = 0\}$

şeklinde tanımlanan kümeye A marisinin **null (sıfır) uzayı** denir.

b. $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun.

$\mathcal{R}(A) = \{y: Ax = y\}$

şeklinde tanımlanan kümeye A matrisinin **ranj (sütun) uzayı** denir (Hacısalihoğlu 1977).

Teorem 2.12. Eğer A, r ranklı $m \times n$ tipinde bir matris ise, bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan nonsingüler P ve Q matrisleri vardır. I, $r \times r$ boyutlu birim matris olmak üzere

a. $m = n = r \Longrightarrow PAQ = I$

b. $m = r < n \Longrightarrow PAQ = (I\,, 0)$

c. $m > r,\ n > r \Longrightarrow PAQ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2.12)

İspat:(Lancaster 1969) da verilmiştir.

Teorem 2.13. Çarpmaya uygun A ve B matrislerinin çarpımının rankı A ve B matrislerinin rankını geçemez. Yani

$$r(AB) \leq \min\{r(A)\,,\ r(B)\} \tag{2.13}$$

dir (Lancaster 1969).

İspat: AB matrisinin her bir sütunu A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonu olduğundan AB matrisinin sütun uzayı A matrisinin sütun uzayının alt kümesi olur. Böylece $r(AB) \leq r(A)$ eşitsizliği bulunur. Benzer şekilde $r(AB) \leq r(B)$ eşitsizliği de sağlanır. Böylece $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ elde edilir.

2.2. Genelleştirilmiş İnversler

Herhangi bir A matrisi bir inverse sahip olabilmesi için A matrisinin nonsingüler ve kare matris olması gerekir. Bu durumda A matrisi yardımıyla

$$AX = B \tag{2.14}$$

lineer denklem sisteminin var olan tek çözümü $X = A^{-1}\mathrm{B}$ şeklindedir. Ayrıca

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

şartını sağlayan ve A matrisinin inversi olarak adlandırılan A^{-1} matrisi vardır. Bununla birlikte A matrisinin kare matris olmadığı durumlarda ya da A matrisinin kare matris fakat singüler olduğu durumlarda inversi yoktur. Bu durumlarda A^{-1} matrisinin özelliklerini de içeren ve genelleştirilmiş invers (g–invers) matris adını alan yeni bir kavram sayesinde (2.14) sisteminin bir çözümü olabilir.

$\mathbb{C}_n^m$, kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesini göstersin. Bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisi için aşağıdaki dört şartı (Moore–Penrose şartları) sağlayan bir G matrisine A matrisinin Moore–Penrose inversi denir ve A^{+} veya $A^{\dagger}$ ile gösterilir.

(i) $AGA = A,$

(ii) $GAG = G,$

(iii) $(AG)^{*} = AG,$

(iv) $(GA)^{*} = GA.$ (2.15)

Eğer G matrisi sadece (i) şartını sağlıyorsa bu G matrisine A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi (iç inversi) denir ve A^{-} veya $A^{(1)}$ ile gösterilir. Sadece (ii) şartını sağlayan G matrisine A matrisinin bir dış inversi denir ve $A^{(2)}$ ile gösterilir.

Hem (i) hem de (ii) şartını sağlayan G matrisine ise A matrisinin bir yansımalı genelleştirilmiş inversi denir ve $A^{(1,2)}$ veya A_0 ile gösterilir.

2.3. Bir Matrisin Genelleştirilmiş İnversi İçin Bir Algoritma

Moore–Penrose şartlarından sadece (i) şartını sağlayan, yani

$$AGA = A \tag{2.16}$$

olacak şekildeki G matrisine A matrisinin bir g–inversi (genelleştirilmiş inversi) denir.

Bir matrisin g–inversini bulmak için aşağıdaki algoritma kullanılır.

Algoritma 2.1. $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ r ranklı herhangi bir matris olsun.

1. Adım: r ranklı A matrisinde, $r \times r$ tipinde nonsingüler her hangi bir B alt matrisi seçilir.

2. Adım: Seçilen B alt matrisinin inversi bulunup bu inversin transpozu alınır.

3. Adım: A matrisinde B alt matrisinin her bir elemanına karşılık gelen yere $(B^{-1})^T$ matrisinin elemanları yerleştirilir.

4. Adım: A matrisinin diğer tüm elemanlarının yerine sıfır yazılır.

5. Adım: Elde edilen matrisin transpozu alınır. Bu matrise G denirse, G matrisi A matrisinin bir g–inversidir.

Örnek 2.1. Algoritma 2.1 3×3 tipindeki

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisine uygulansın. A matrisi rankı 2 olan singüler bir matristir.

1. Adım: A matrisinin 2×2 tipinde bir nonsingüler

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

alt matrisi seçilsin.

2. Adım: $|B| = 10 - (-3) = 13 \neq 0$ olduğundan B^{-1} mevcut olup

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\mathrm{Ek}(B) = 1/13\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/13 & -3/13 \\ 1/13 & 2/13 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu matrisin transpozu alınırsa

$$(B^{-1})^T = \begin{pmatrix} 5/13 & 1/13 \\ -3/13 & 2/13 \end{pmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Bulunan $(B^{-1})^T$ matrisi A matrisinde elemanları B alt matrisinin elemanlarının yerlerine karşılık gelecek şekilde yerleştirilir. Diğer tüm elemanları sıfır alınır. Böylece

$$\begin{pmatrix} 5/13 & 1/13 & 0 \\ -3/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

5. Adım: Bir önceki adımda bulunan matrisin transpozu alınarak

$$G = \begin{pmatrix} 5/13 & -3/13 & 0 \\ 1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi oluşturulur. Bu şekilde oluşturulan G matrisi A matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten

$$AG = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5/13 & -3/13 & 0 \\ 1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup

$$AGA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} = A$$

olduğu görülür.

Verilen A matrisinin başka bir B alt matrisini seçerek, seçilen bu yeni B alt matrisine Algoritma 2.1 uygulansın.

1. Adım: A matrisinin rankı 2 olduğundan B matrisi

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

şeklinde seçilsin.

2. Adım: $|B| = 10 - 0 = 10 \neq 0$ olduğundan

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\mathrm{Ek}(B) = 1/10\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -3/5 & 1/2 \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece

$$(B^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

3. ve 4. Adımlar: Bu durumda

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

olur.

5. Adım: Bu şekilde bulunan matrisin transpozu alındığında

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -3/5 & 1/2 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bulunan bu G matrisi A matrisinin bir g–inversi olur. Gerçekten

$$AG = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -3/5 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -3/5 & 1/2 \end{pmatrix}$$

ve

$$AGA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} = A$$

olduğu görülür.

Sonuç 2.1. Yukarıdaki iki seçim, bir matrisin g–inversinin tek olmadığını gösterir. Bu nedenle bir matrisin tanımlı birden çok g–inversi bulunabilir.

Örnek 2.2. 2×3 tipindeki

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dikdörtgen matrisi alınsın. E matrisinin rankının 2 olacağı açıktır. Algoritma 2.1 E matrisine uygulansın.

1. Adım: Bu durumda M matrisi

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

olarak seçilebilir.

2. Adım: $|M| = -1 - 1 = -2 \neq 0$ olup

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\text{Ek(M)} = -1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

ve dolayısıyla

$$(M^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen

$$G = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi E matrisinin bir g–inversi olduğu gösterilebilir. Gerçekten

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$EGE = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = E$$

olduğu görülür.

Örnek 2.3. 5×2 tipindeki

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

dikdörtgen matrisi alınsın. E matrisinin rankının 2 olacağı açıktır. Algoritma 2.1 E matrisine uygulansın.

1. Adım: Bu durumda M matrisi

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

olarak seçilebilir.

2. Adım: $|M| = -4 - 0 = -4 \neq 0$ olup

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\mathrm{Ek}(M) = -1/4 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

ve dolayısıyla

$$(M^{-1})^T = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi E matrisinin bir g–inversi olduğu gösterilebilir. Gerçekten

$$EG = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$EGE = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/4 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = E$$

olduğu görülür.

Algoritma 2.1. rankı 1 olan matrislerin g–inversini bulmak için aşağıdaki şekilde uyarlanabilir.

Algoritma 2.2.

1. Adım: A matrisinin sıfırdan farklı her hangi bir elemanı B olarak seçilir.

2. Adım: Seçilen bu elemanın inversi bulunur.

3. Adım: Bulunan bu invers A matrisinde karşılık gelen yere yazılır.

4. Adım: A matrisinin diğer tüm elemanlarının yerine sıfır yazılır.

Örnek 2.4. A matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

olarak alınsın. A matrisinin rankı 1 dir. Algoritma 2.2 A matrisine uygulansın.

1. Adım: $B = (3)$ alınsın.

2. Adım: $B^{-1} = (1/3)$ olur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$ olacaktır.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi A matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten

$$AG = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$AGA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = A$$

olur.

Örnek 2.5. 3×4 tipindeki

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

matrisi alınsın. L dikdörtgen matrisinin rankı 1 dir. Algoritma 2.2. L matrisine uygulansın.

1. Adım: $M = (8)$ seçilsin.

2. Adım: $M^{-1} = (1/8)$ olur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ elde edilir.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi L matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten

$$LG = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$LGL = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} = L$$

olur. L matrisi 3×4 tipinde olduğu için 3.4 = 12 tane g–inversi bulunabilir.

Sonuç 2.2. Genel olarak 1 ranklı ve $m \times n$ tipindeki matrislerin m.n tane g–inversi bulunabilir. Matrisin sıfırdan farklı herhangi bir elemanının inversini alıp, diğer tüm elemanlarını sıfır aldıktan sonra elde edilen matrisin transpozu alınarak g–inversi bulunur. Eğer A matrisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

şeklinde 1 ranklı bir matris ise, A matrisinin

1–ncisi; $\begin{pmatrix} (a_{11})^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

2–ncisi; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (a_{12})^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$\cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots$

(m.n)–ncisi; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (a_{mn})^{-1} \end{pmatrix}$

şeklinde m.n tane g–inversi bulunabilir.

2.4. Moore–Penrose İnverslerin Varlığı

A nonsingüler matrisinin inversi olan A^{-1} matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayacağı açıktır. Yani $A^{-1} = A^{+}$ olur. Bununla birlikte, eğer A bir singüler matris veya kare olmayan bir matris ise bu durumda Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir A^{+} matrisinin mevcut olup olmadığı ile ilgili bir soru ortaya çıkar. Bu kısımda her A matrisi için bir A^{+} matrisinin var ve tek olduğu gösterilecektir. Ayrıca bu şekilde tanımlanan Moore–Penrose inversin bir takım özellikleri ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 2.14. Eğer A matrisi $m \times n$ tipinde sıfır matris ise, A^{+} matrisi $n \times m$ tipinde sıfır matristir.

İspat: Açık olarak $A^{+} = 0$ alındığında Moore–Penrose şartlarının sağlandığı görülür.

Teorem 2.15. Her A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir A^{+} matrisi vardır.

İspat: Eğer $A = 0$ ise $A^{+} = 0$ olduğu açıktır. $A \neq 0$ olsun. A matrisinin r ranklı olduğu kabul edilsin. Bu durumda A matrisi

$$A = BC \tag{2.17}$$

şeklinde parçalanabilir. Burada B matrisi $m \times r$ tipinde $r > 0$ ranklı ve C matrisi $r \times n$ tipinde $r > 0$ ranklı matrisler olup, B^*B ve CC^* çarpımlarının her ikisi de nonsingülerdir. Bu durumda eğer A^+ matrisi

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \tag{2.18}$$

olarak alınırsa, A^+ matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $$\begin{aligned} AA^+A &= (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC) \\ &= B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C \\ &= BC = A, \end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned} A^+AA^+ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = A^+, \end{aligned}$$

(iii) $$\begin{aligned} (AA^+)^* &= [(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*]^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^* \\ &= B(B^*B)^{-1}B^* = B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \\ &= (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = AA^+, \end{aligned}$$

(iv) $$\begin{aligned} (A^+A)^* &= [C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)]^* \\ &= C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \\ &= C^*(CC^*)^{-1}C \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC) = A^+A \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Teorem 2.16. Herhangi bir A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir tek A^+ matrisi vardır. Yani her A matrisinin bir tek Moore–Penrose inversi vardır.

İspat: A matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayan herhangi iki Moore–Penrose inversi A_1^+ ve A_2^+ olsun. Bu durumda

$$A_1^+ = A_1^+AA_1^+ = A_1^+(AA_1^+)^* = A_1^+(A_1^+)^*A^* = A_1^+(A_1^+)^*(AA_2^+A)^*$$

$$= A_1^+(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A^* = A_1^+(AA_1^+)^*(AA_2^+)^* = A_1^+AA_1^+AA_2^+ = A_1^+AA_2^+$$

$$= A_1^+A(A_2^+AA_2^+) = (A_1^+A)^*(A_2^+A)^*A_2^+ = A^*(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A_2^+$$

$$= (AA_1^+A)^*(A_2^+)^*A_2^+ = A^*(A_2^+)^*A_2^+ = (A_2^+A)^*A_2^+ = A_2^+AA_2^+ = A_2^+$$

olduğundan $A_1^+ = A_2^+$ olur. Yani A^+ matrisi tektir.

Teorem 2.17. $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin bir Moore–Penrose inversi varsa $n \times m$ tipindedir.

İspat: AA^+ matrisinin simetrik ve dolayısıyla kare olması gerçeğinden ispat görülür.

Teorem 2.18. a. $m \times n$ tipindeki bir $A = (a_{ij})$ matrisinin tüm elemanları 1 ise bu takdirde

$$A^+ = \frac{1}{m.n}A^*$$

dir.

b. $a,\ n \times 1$ tipinde ve $a \neq 0$ olan bir sütun vektörü ise bu durumda a^+

$$a^+ = (a^*a)^{-1}a^*$$

şeklindedir.

c. $a,\ 1 \times n$ tipinde ve $a \neq 0$ olan bir satır vektörü ise bu durumda a^+

$$a^+ = a^*(aa^*)^{-1}$$

şeklindedir.

İspat: a. İspat için teoremde verilen A^+ matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Bu durumda

(i) $AA^{+}A = A\left(\frac{1}{m.n}A^{*}\ \right)A = A\frac{1}{m.n}(A^{*}A) = A.\frac{1}{m.n}.m.n = A,$

(ii) $A^{+}AA^{+} = \left(\frac{1}{m.n}A^{*}\ \right)A\left(\frac{1}{m.n}A^{*}\ \right) = \frac{1}{m.n}(A^{*}A)\left(\frac{1}{m.n}A^{*}\ \right) = \frac{1}{m.n}.m.n.\left(\frac{1}{m.n}A^{*}\ \right)$

$= \left(\frac{1}{m.n}A^{*}\ \right) = A^{+},$

(iii) $(AA^{+})^{*} = \left(A\frac{1}{m.n}A^{*}\right)^{*} = A\frac{1}{m.n}A^{*} = AA^{+},$

(iv) $(A^{+}A)^{*} = \left(\frac{1}{m.n}A^{*}A\right)^{*} = \frac{1}{m.n}A^{*}A = A^{+}A$

olduğu görülür.

b. a^{+} matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $aa^{+}a = a(a^{*}a)^{-1}a^{*}a = a(a^{*}a)^{-1}(a^{*}a) = a,$

(ii)$a^{+}aa^{+} = (a^{*}a)^{-1}a^{*}a(a^{*}a)^{-1}a^{*} = (a^{*}a)^{-1}(a^{*}a)(a^{*}a)^{-1}a^{*}$

$= (a^{*}a)^{-1}a^{*} = a^{+},$

(iii) $(aa^{+})^{*} = [a(a^{*}a)^{-1}a^{*}]^{*} = a(a^{*}a)^{-1}a^{*} = aa^{+},$

(iv) $(a^{+}a)^{*} = [(a^{*}a)^{-1}a^{*}a]^{*} = (a^{*}a)^{-1}a^{*}a = a^{+}a$

olduğu görülür.

c. a^{+} matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $aa^{+}a = aa^{*}(aa^{*})^{-1}a = (aa^{*})(aa^{*})^{-1}a = a,$

(ii)$a^{+}aa^{+} = a^{*}(aa^{*})^{-1}aa^{*}(aa^{*})^{-1} = a^{*}(aa^{*})^{-1}(aa^{*})(aa^{*})^{-1}$

$= a^{*}(aa^{*})^{-1} = a^{+},$

(iii) $(aa^{+})^{*} = [aa^{*}(aa^{*})^{-1}]^{*} = aa^{*}(aa^{*})^{-1} = aa^{+},$

(iv) $(a^{+}a)^{*} = [a^{*}(aa^{*})^{-1}a]^{*} = a^{*}(aa^{*})^{-1}a = a^{+}a$

olduğu görülür.

Örnek 2.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi verilmiş olsun.

$m = 2,\ n = 3$ ve $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

olarak alınırsa

$$A^+ = \frac{1}{m.n} A^* = \frac{1}{2.3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $AA^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$AA^+A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A,$

(ii) $A^+A = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$A^+AA^+ = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} = A^+,$

(iii) $(AA^+)^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = AA^+,$

(iv) $(A^+A)^* = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = A^+A$

olduğu görülür.

Örnek 2.7. $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda

$$a^+ = (a^*a)^{-1}a^* = \left[(1 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]^{-1} (1 \quad 2)$$

$$= (5)^{-1} . (1 \quad 2) = (1/5) . (1 \quad 2) = (1/5 \quad 2/5)$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $aa^{+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} . (1/5 \quad 2/5) = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$

$aa^{+}a = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a,$

(ii) $a^{+}a = \ (1/5 \quad 2/5) . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1)$

$a^{+}aa^{+} = (1) . (1/5 \quad 2/5) = (1/5 \quad 2/5) = a^{+},$

(iii) $(aa^{+})^{*} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}^{*} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix} = aa^{+},$

(iv) $(a^{+}a)^{*} = \ (1)^{*} = (1) = a^{+}a$

olduğu görülür.

Örnek 2.9. $\mathrm{a} = (1 \quad 2 \quad 1)$ alınırsa

$$a^{+} = a^{*}(aa^{*})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} . \left[(1 \quad 2 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} . (6)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $aa^{+} = (1 \quad 2 \quad 1) . \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} = (1)$

$aa^{+}a = (1) . (1 \quad 2 \quad 1) = (1 \quad 2 \quad 1) \ = a,$

(ii) $a^{+}a = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} . (1 \quad 2 \quad 1) = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$

$a^{+}aa^{+} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} = a^{+},$

(iii) $(aa^{+})^{*} = (1)^{*} = (1) = aa^{+},$

(iv) $(a^{+}a)^{*} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}^{*} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix} = a^{+}a$

olduğu görülür.

Teorem 2.19. A herhangi bir matris olmak üzere

$$(A^{*})^{+} = (A^{+})^{*} \tag{2.19}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: (2.17) bağıntısındaki gibi $A = BC$ olsun. $A^{*} = C^{*}B^{*}$ olduğundan

$A^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}$

alınırsa

$$(A^{+})^{*} = B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}C \tag{2.20}$$

olur ki bu da A^{*} matrisinin Moore–Penrose inversidir. Gerçekten

(i) $A^{*}(A^{*})^{+}A^{*} = C^{*}B^{*}B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}CC^{*}B^{*} = C^{*}B^{*} = A^{*}$,

(ii) $(A^{*})^{+}A^{*}(A^{*})^{+} = B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}CC^{*}B^{*}B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}C$

$= B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}C = (A^{*})^{+}$,

(iii) $[A^{*}(A^{*})^{+}]^{*} = [(C^{*}B^{*})B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}C]^{*} = [C^{*}(CC^{*})^{-1}C]^{*}$

$= C^{*}(CC^{*})^{-1}C = C^{*}(B^{*}B)(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}C = A^{*}(A^{*})^{+}$,

(iv) $[(A^{*})^{+}A^{*}]^{*} = [B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}C(C^{*}B^{*})]^{*} = [B(B^{*}B)^{-1}B^{*}]^{*}$

$= B(B^{*}B)^{-1}B^{*} = B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}(CC^{*})B^{*} = (A^{*})^{+}A^{*}$

olur. Böylece

$$(A^{*})^{+} = B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}C \tag{2.21}$$

elde edilir. (2.20) ve (2.21) bağıntılarından ve bir matrisin Moore–Penrose inversi varsa tek olacağından dolayı

$(A^*)^+ = (A^+)^*$

olduğu görülür.

Teorem 2.20. Bir matrisin Moore–Penrose inversinin Moore–Penrose inversi matrisin kendisine eşittir. Yani her hangi bir A matrisi için

$(A^+)^+ = A$

olur.

İspat: Moore–Penrose invers tanımından

(i) $A^+(A^+)^+A^+ = A^+AA^+ = A^+$,

(ii) $(A^+)^+A^+(A^+)^+ = AA^+A = A = (A^+)^+$,

(iii) $[A^+(A^+)^+]^* = [A^+A]^* = A^+A = A^+(A^+)^+$,

(iv) $[(A^+)^+A^+]^* = [AA^+]^* = AA^+ = (A^+)^+A +^\dagger$

olduğu görülür.

Teorem 2.21. A matrisinin Moore–Penrose inversinin rankı A matrisinin rankına eşittir. Yani

$$r(A) = r(A^+) \tag{2.22}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Teorem 2.13 $AA^+A = A$ Moore–Penrose şartına uygulandığında

$$r(A) = r(AA^+A) \leq \min\{r(A),\ r(A^+)\} \leq r(A^+) \tag{2.23}$$

elde edilir. Benzer şekilde Teorem 2.13 $A^+AA^+ = A^+$ Moore–Penrose şartına uygulanırsa

$$r(A^+) = r(A^+AA^+) \leq \min\{r(A),\ r(A^+)\} \leq r(A) \tag{2.24}$$

elde edilir. (2.23) ve (2.24) bağıntılarından dolayı (2.22) bağıntısı sağlanır.

Sonuç 2.3. A matrisinin rankı r ise, $A^+,\ AA^+,\ A^+A,\ AA^+A,\ A^+AA^+$ matrislerinin her birinin rankı da r dir.

Teorem 2.22. A simetrik ve idempotent matris ise, $A^+ = A$ olur.

İspat: Moore–Penrose invers tanımından

(i) $AA^+A = AAA = A^2A = AA = A^2 = A$,

(ii) $A^+AA^+ = AAA = A^2A = AA = A^2 = A = A^+$,

(iii) $[AA^+]^* = [AA]^* = [A^2]^* = A^* = A = A^2 = AA = AA^+$,

(iv) $[A^+A]^* = [AA]^* = [A^2]^* = A^* = A = A^2 = AA = A^+A$

olduğu görülür.

Teorem 2.23. $B = \text{Köş}\{\mathrm{b}_{11}, \mathrm{b}_{22}, \dots, \mathrm{b}_{nn}\}$ ise, B matrisinin Moore–Penrose inversi B^+, i–yinci satırı ve i–yinci sütununda yer alan köşegen elemanı $\mathrm{b}_{ii} \neq 0$ ise b_{ii}^{-1} ve $\mathrm{b}_{ii} = 0$ ise "0" olan bir köşegen matristir.

İspat: B^+ matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığı açıkça görülür.

Örnek 2.10.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

şeklinde verilen D matrisinin Moore–Penrose inversi

$$D^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

matrisidir. Gerçekten

$$DD^+ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$DD^+D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

olduğu görülür.

Teorem 2.24. a. A, $m \times n$ tipinde tam satır ranklı bir matris ise, bu durumda

$A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$ ve $AA^+ = I_m$

olur.

b. A, $m \times n$ tipinde tam sütun ranklı bir matris ise, bu durumda

$A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$ ve $A^+A = I_n$

olur.

İspat: Teoremde verilen A^+ matrislerinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Buna göre

a. (i) $AA^+A = AA^*(AA^*)^{-1}A = (AA^*)(AA^*)^{-1}A = A$,

(ii) $A^+AA^+ = A^*(AA^*)^{-1}AA^*(AA^*)^{-1} = A^*(AA^*)^{-1}(AA^*)(AA^*)^{-1}$

$= A^*(AA^*)^{-1} = A^{+\dagger}$,

(iii) $(AA^+)^* = (AA^*(AA^*)^{-1})^* = ((AA^*)(AA^*)^{-1})^* = I^* = I$

$= (AA^*)(AA^*)^{-1} = AA^*(AA^*)^{-1} = AA^+$,

(iv) $(A^+A)^* = (A^*(AA^*)^{-1}A)^* = A^*(AA^*)^{-1}A = A^+A$

olduğu görülür. Benzer şekilde

b. (i) $AA^+A = A(A^*A)^{-1}A^*A = A(A^*A)^{-1}(A^*A) = A,$

(ii) $A^+AA^+ = (A^*A)^{-1}A^*A(A^*A)^{-1}A^* = (A^*A)^{-1}(A^*A)(A^*A)^{-1}A^*$

$$= (A^*A)^{-1}A^* = A^+,$$

(iii) $(AA^+)^* = (A(A^*A)^{-1}A^*)^* = A(A^*A)^{-1}A^* = AA^+,$

(iv) $(A^+A)^* = ((A^*A)^{-1}A^*A)^* = ((A^*A)^{-1}(A^*A))^* = I^* = I$

$$= (A^*A)^{-1}(A^*A) = (A^*A)^{-1}A^*A = A^+A$$

olduğu görülür.

Örnek 2.11. 2×3 tipindeki bir $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matrisi alındığında rank(A) = 2 olduğu açıktır. Yani A tam satır ranklı bir matristir. O halde Teorem 2.24. a.'dan dolayı

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} . \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 9/5 & 7/5 \\ 7/5 & 6/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 16/5 & 13/5 \\ 32/5 & 26/5 \end{pmatrix}$$

olur.

Örnek 2.12. 3×2 tipinde bir $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda rank(A) = 2 olduğu açıktır. Yani, A tam sütun ranklı bir matristir. O halde

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^* = \left[\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} . \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/3 & 2/9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7/3 & 2 & 4/3 \\ 8/9 & 2/3 & 5/9 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür.

Teorem 2.25. $B \neq 0$ ve $C \neq 0$ matrisleri sırasıyla $m \times r$ ve $r \times n$ tipinde matrisler olmak üzere r ranklı olsun. Bu durumda

$$(BC)^{+} = C^{+}B^{+} \tag{2.25}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: Teorem 2.24'e göre

$C^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}$ ve $B^{+} = (BB^{*})^{-1}B^{*}$

olur ve buradan

$$C^{+}B^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(BB^{*})^{-1}B^{*}$$

elde edilir. Bu değer zaten $(BC)^{+}$ matrisidir. O halde

$$C^{+}B^{+} = (BC)^{+}$$

olduğu görülür.

3. DRAZİN İNVERS VE BLOK MATRİSLERİN DRAZİN İNVERSİ

3.1. Bir Matrisin Drazin İnversi

Tanım 3.1. $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. $r(A^{k+1}) = r(A^k)$ koşulunu sağlayan en küçük k pozitif tamsayısına A matrisinin indeksi denir ve $Ind(A)$ ile gösterilir. Eğer $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi için $ind(A) = k$ ise

$$A^{k+1}X = A^k, \qquad XAX = X, \qquad AX = XA \tag{3.1}$$

koşullarını sağlayan bir ve yalnız bir tek $X \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi vardır. Bu X matrisine A matrisinin Drazin inversi denir ve $X = A^D$ ile gösterilir. Özel olarak $Ind(A) \leq 1$ olduğunda A^D matrisine A matrisin grup inversi adı verilir ve $A^\#$ ile gösterilir. Açıkça görülmektedir ki $Ind(A) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul A nın nonsingüler olmasıdır. Bu durumda $A^D = A^{-1}$ yazılır. I uygun boyutta birim matris olmak üzere olmak üzere $A^\pi = I - AA^D$ ile $\mathcal{N}(A^k)$ üzerindeki $\mathcal{R}(A^k)$ boyunca iz düşümü göstereceğiz. Notasyon uygunluğu için bir toplamın alt limiti üst limitinden daha büyük ise toplamı daima 0 olarak tanımlayacağız. Örneğin $k < 2$ için $\sum_{i=0}^{k-2} *$ toplamı 0 olarak tanımlanır. Herhangi bir G kare matrisi için $G^0 = I$ alacağız. I_A ile $Ind(A)$ yı göstereceğiz.

$A \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi için eğer $Ind(A) = k$ ve $r(A^k) = r$ ise A nın bir tek $X = A^D$ Drazin inversi mevcuttur. Farz edelim ki

$$A = T\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}T^{-1}$$

A matrisinin Jordan ayrışımı olsun. Burada C matrisi r boyutlu bir nonsingüler matris ve N matrisi k indeksli bir nilpotent matristir. Bu durumda

$$A^D = T\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}$$

olacaktır.

Lemma 3.1. A nonsingüler bir matris olmak üzere

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

olsun. Bu takdirde $r(A) = r(M)$ olması için gerek ve yeter şart $D = CA^{-1}B$ olmasıdır.

Şimdi aşağıdaki Teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1. $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi için $Ind(A) = k$ ve $r(A^k) = r$ olsun. Bu takdirde

$$A^k X = 0, \qquad XA^k = 0, \qquad X^2 = X, \qquad r(X) = n - r$$

olacak şekilde n mertebeli bir ve yalnız bir tek X matrisi mevcuttur. Bu şekilde ki X matrisi için

$$r\begin{pmatrix} A & I - X \\ I - X & Y \end{pmatrix} = r(A)$$

olacak şekilde n mertebeli bir ve yalnız bir tek Y matrisi mevcuttur. İşte bu şekildeki Y matrisi $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisinin A^D Drazin inversi olup $X = I - AA^D$ dir.

İspat: $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisinin yukarıda verilen Jordan ayrışımını göz önüne alalım. Bu durumda

$$A^k = T\begin{pmatrix} C^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}$$

olur. Şimdi X matrisini

$$X = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}T^{-1}$$

olarak alalım. Buradan $X^2 = X,\ r(X) = n - r$

$$A^k X = T\begin{pmatrix} C^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}T^{-1} = 0$$

ve

$$XA^k = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}T^{-1}T\begin{pmatrix} C^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1} = 0$$

olduğu görülür. Şimdi de X matrisinin tek olduğunu gösterelim. Farz edelim ki aynı koşulları sağlayan başka bir X_0 matrisi bulunsun. Bu durumda $X_1 = T^{-1}X_0T$ alalım ve

$$X_1 = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$$

şeklinde parçalansın. $A^k X_0 = 0$ gerçeğinden $T^{-1}A^kTT^{-1}X_0T = 0$ yani

$$\begin{pmatrix} C^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = 0$$

elde edilir. C^k matrisi nonsingüler olduğundan $E = F = 0$ olduğu görülür. Böylece

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ G & H \end{pmatrix}$$

olacaktır. Benzer şekilde $X_0A^k = 0$ dan $G = 0$ olduğu görülür. Bu durumda da

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$$

olur. $X_0^2 = X_0$ ve $r(X_0) = n - r$ olacağından $H = I_{n-r}$ olacaktır. Yani

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

olur ki buradan da $X_0 = X$ elde edilir yani X tektir. $U = I - AA^D$ olsun. Bu durumda

$$A^kU = 0, \qquad UA^k = 0, \qquad U^2 = U,$$

yazılabilir. $\mathcal{N}(AA^D) = \mathcal{R}(I - AA^D)$ ve $\mathcal{N}(AA^D) = \mathcal{N}(A^D)$ olacağından $r(U) = n - r(A^D) = n - r$ olacaktır. Bu nedenle U matrisi Teoremin şartlarını sağlar. Teklikten $X = I - AA^D$ elde edilir. Böylece

$$\begin{pmatrix} A & I - X \\ I - X & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AA^D \\ AA^D & Y \end{pmatrix} \tag{*}$$

yazılır. Öte yandan

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A^D & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & AA^D \\ AA^D & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^D \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & Y - A^D \end{pmatrix} \tag{**}$$

olacağından (*) ve (**) ifadelerinden

$$r\begin{pmatrix} A & I - X \\ I - X & Y \end{pmatrix} = (A) \Leftrightarrow Y = A^D$$

elde edilir ki bu da Teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi yukarıda verilen Lemma ve Teoremi kullanarak $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisinin A^D Drazin inversini hesaplamada kullanılan bir metot verelim. $A(\alpha|\beta)$ A matrisinin $r \times r$ tipinde nonsingüler bir alt matrisi öyle ki $\alpha = \{i_1, \ldots., i_r\}$ satır indis kümesi ve

$\beta = \{j_1, \dots, j_r\}$ sütun indis kümesi ve $N = \{1,2, \dots, n\}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2. $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi için $r(A) = r \geq 1$ olsun. $A(\alpha|\beta)$ matrisi A matrisinin $r \times r$ tipinde nonsingüler bir alt matrisi olsun. X matrisi

$$A^k X = 0, \qquad XA^k = 0, \qquad X^2 = X, \qquad r(X) = n - r$$

olacak şekilde n mertebeli bir matris olmak üzere

$$A^D = (I - X)(N|\beta)[A(\alpha|\beta)]^{-1}(I - X)(\alpha|N)$$

dir.

İspat: Teoremin ispatı için

$$M = \begin{pmatrix} A(\alpha|\beta) & (I - X)(\alpha|N) \\ (I - X)(N|\beta) & A^D \end{pmatrix}$$

alalım. Bu durumda $r(M) \geq r[A(\alpha|\beta)] = r = r(A)$ elde edilir. Teoremden 3.1. den

$$r(M) \leq r\begin{pmatrix} A & (I - X) \\ (I - X) & A^D \end{pmatrix} = r(A)$$

olduğu görülür. Bu nedenle de $r(M) = r[A(\alpha|\beta)] = r(A)$ elde edilir. Bu eşitlik ve lemma 3.1. den istenen sonuç elde edilmiş olur.

Algoritma 3.1. $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Bu durumda

1. **Adım:** $k = Ind(A)$ ve $r = r(A)$ bulunur. $s = r(A^k)$ bulunur. α ve β indis kümeleri belirlenir. $r \times r$ tipinde $A(\alpha|\beta)$ matrisi belirlenir.
2. **Adım:** $[A(\alpha|\beta)]^{-1}$ hesaplanır.
3. **Adım:** $T^{-1}AT$ matrisi A nın Jordan normal formu olacak şekilde nonsingüler T matrisi inşa edilir ve

$$X = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}T^{-1}$$

matrisi oluşturulur.

4. **Adım:** $I - X$ matrisinin $(I - X)(N|\beta)$ ve $(I - X)(\alpha|N)$ alt matrisleri hesaplanır.
5. **Adım:** A matrisinin A^D Drazin inversi hesaplanır.

Şimdi bu algoritmayı açıklayan aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 3.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ matrisinin Drazin inversini belirleyelim. Bu durumda kolayca görülebilir ki $Ind(A) = 2$ ve $r(A) = 2$ ve $r(A^2) = 1$ dir. Buna göre $\alpha = \{1,2\}$ ve $\beta = \{1,2\}$ alabiliriz. Böylece

$$A(\alpha|\beta) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } [A(\alpha|\beta)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

olacaktır. Öte yandan

$$T = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alalım. Bu durumda

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. Böylece

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Öte yandan

$$(I - X)(N|\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } (I - X)(\alpha|N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olacaktır. Buradan da A^D Drazin inversinin

$$A^D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür.

3.2. Blok Matrislerin Drazin İnversi

Teorem 3.3. A ve C kare matrisler olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ D & C \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Eğer $DA = 0$ ve $DB = 0$ ise bu taktirde

$$M^D = \begin{pmatrix} A^D + X_2 D & X_1 \\ (C^D)^2 & C^D \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

dir. Burada $i = 1, 2$ için

$$X_i = \left(\sum_{j=0}^{I_C-1} (A^D)^{i+j+1} B C^j\right)(I - CC^D)$$

$$+(I - AA^D)\left(\sum_{j=0}^{I_A-1} A^j B (C^D)^{i+j+1}\right) - \sum_{j=0}^{i-1} (A^D)^{j+1} B (C^D)^{i-j}, \tag{3.3}$$

dir. Ayrıca $Ind(M) \leq Ind(A) + Ind(C) + 2$ dir.

İspat: (3.2) in sağ tarafını X ile gösterelim ve $X = M^D$ olduğunu (3.1) in direk sağlaması ile gösterelim. İlk olarak basit bir hesaplama ile

$$A^D A + X_1 D = AA^D + AX_2 D + B(C^D)^2 D$$

$$A^D B + X_1 C = AX_1 + BC^D$$

$$DX_1 = 0, \ \ DX_2 = 0,$$

olduğu görülür. Bu ise

$$MX = XM = \begin{pmatrix} A^D A + X_1 D & A^D B + X_1 C \\ C^D D & C^D C \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

eşitliğini sağlar.

$$DX_1 = 0, \ \ DX_2 = 0,$$

$$A^D A X_2 D + A^D B (C^D)^2 D + X_1 C^D D = X_2 D$$

$$AA^D X_1 + A^D B C^D + X_1 CC^D = X_1,$$

alınarak (3.4) den

$$XMX = \begin{pmatrix} A^D A + X_1 D & A^D B + X_1 C \\ C^D D & C^D C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^D + X_2 D & X_1 \\ (C^D)^2 D & C^D \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^D + X_2 D & X_1 \\ (C^D)^2 D & C^D \end{pmatrix}$$

elde edilir. Yani $XMX = X$ dir.

Son olarak her $k \geq Ind(A) + Ind(C) + 2$ tam sayısı için $M^{k+1}X = M^k$ olduğunu gösterelim. Gerçekten $DA = DB = 0$ olduğu dikkate alınırsa $k \geq 2$ tamsayısı üzerinden tümevarımla

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k + \sum_{i=0}^{k-2} A^i B C^{k-i-2} D & \sum_{i=0}^{k-1} A^i B C^{k-i-1} \\ C^{k-1} D & C^k \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.4) ve (3.5) bağıntıları birleştirilerek

$$M^{k+1}X = M^k M X$$

$$= \begin{pmatrix} A^k + \sum_{i=0}^{k-2} A^i B C^{k-i-2} D & \sum_{i=0}^{k-1} A^i B C^{k-i-1} \\ C^{k-1} D & C^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^D A + X_1 D & A^D B + X_1 C \\ C^D D & C^D C \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^k A^D A + A^k X_1 D + \sum_{i=0}^{k-1} A^i B C^{k-i-2} C^D D & A^k A^D B + A^k X_1 C + \sum_{i=0}^{k-1} A^i B C^{k-i-1} C^D C \\ C^k C^D D & C^k C^D C \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^k + \sum_{i=0}^{k-2} A^i B C^{k-i-2} D & \sum_{i=0}^{k-1} A^i B C^{k-i-1} \\ C^{k-1} D & C^k \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece her $k \geq Ind(A) + Ind(C)$ +2 tam sayısı için $M^{k+1}X = M^k$ olur. Buradan $X = M^D$ ve $Ind(M) \leq Ind(A) + Ind(C) + 2$ olduğu elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.4. A ve C kare matrisler olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ D & C \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Eğer $BD = 0$ ve $CD = 0$ ise

$$M^D = \begin{pmatrix} A^D & X_1 \\ D(A^D)^2 & C^D + DX_2 \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

olur. Burada X_1 ve X_2 (3.3) de tanımlanmıştır. Ayrıca $Ind(M) \leq Ind(A) + Ind(C) + 2$ olacaktır.

İspat: Teoremin ispatı Teorem 3.3. ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Belirli şartlar altında $PQ + RS$ uyarlanmış matrisi ve onun $PQ + RS$ genelleştirilmiş matrisinin Drazin inverslerinin çeşitli açık gösterimleri verilecetir. Bununla ilgili olarak önce 2 Lemma verilecek ve daha sonra da uyarlanmış matris ve onun genelleştirilmiş matrisi ile ilgili çeşitli yeni sonuçlar türetilecektir.

Lemma 3.2. $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ ve $B \in \mathbb{C}^{nxm}$ olsun. Bu takdirde $(AB)^D = A[(BA)^D]^2 B$ dir.

Lemma 3.3. A ve C kare matrisler olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ D & C \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki iddialar sağlanır.

Eğer $DA = 0 \; ve \; DB = 0$, ise

$$(M^D)^2 = \begin{pmatrix} (A^D)^2 + X_2 D & X_1 \\ (C^D)^3 D & (C^D)^2 \end{pmatrix}; \tag{3.7}$$

dir. Benzer şekilde eğer $BD = 0 \; ve \; CD = 0$, ise

$$(M^D)^2 = \begin{pmatrix} (A^D)^2 & X_1 \\ D(A^D)^3 & (C^D)^2 + DX_2 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

olacaktır. Burada $i = 1,2$ için

$$X_i = X_i(A, B, C) = \left(\sum_{j=0}^{I_C - 1} (A^D)^{i+j+2} B C^j\right)(I - CC^D)$$

$$+(I - AA^D)\left(\sum_{j=0}^{I_A - 1} A^j B (C^D)^{i+j+2}\right) - \sum_{j=0}^{i} (A^D)^{j+1} B (C^D)^{i-j+1}, \tag{3.9}$$

alınır.

İspat: Doğru bir hesaplama yapılarak (3.7) ve (3.8) iddiaları sırasıyla Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 den direk olarak elde edilir.

Teorem 3.5. $P \in \mathbb{C}^{m\times n}, Q \in \mathbb{C}^{n\times m}, R \in \mathbb{C}^{m\times l}\ ve\ S \in \mathbb{C}^{l\times m}$ olsun.

Eğer $SPQP = 0$ ve $SPQR = 0$, ise bu takdirde

$$(PQ+RS)^D = P((QP)^D)^2Q + PX_2SPQ + PX_1S + R((SR)^D)^3SPQ + R((SR)^D)^2S$$

$$= (P,R)\begin{pmatrix} ((QP)^D)^2 + X_2SP & X_1 \\ ((SR)^D)^3SP & ((SR)^D)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q \\ S \end{pmatrix}$$

dir. Burada $X_i = X_i(QP, QR, SR)$ $i = 1,2$ (3.9) deki gibi tanımlanır.

İspat: Lemma (3.2) e göre

$$(PQ+RS)^D = \left[(P,R)\begin{pmatrix} Q \\ S \end{pmatrix}\right]^D = (P,R)\left[\begin{pmatrix} QP & QR \\ SP & SR \end{pmatrix}^D\right]^2\begin{pmatrix} Q \\ S \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

olduğundan (3.10) ve (3.7) bağıntıları kullanılarak

$$(PQ+RS)^D = ((QP)^D)^2Q + PX_2SPQ + PX_1S + R((SR)^D)^3SPQ + R((SR)^D)^2S,$$

elde edilir. Burada $X_i = X_i(QP, QR, SR)$ $i = 1,2$ (3.9) daki gibi tanımlanır.

Teorem 3.6. $P \in \mathbb{C}^{m\times n}, Q \in \mathbb{C}^{n\times m}, R \in \mathbb{C}^{m\times l}$ ve $S \in \mathbb{C}^{l\times m}$ olsun. Eğer $QRSP = 0$ ve $SRSP = 0$, ise bu takdirde

$$(PQ+RS)^D = P((QP)^D)^2Q + RSPX_2S + PX_1S + RSP((QP)^D)^3Q + R((SR)^D)^2S$$

$$= (P,R)\begin{pmatrix} ((QP)^D)^2 & X_1 \\ SP((QP)^D)^3 & SPX_2 + ((SR)^D)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q \\ S \end{pmatrix}$$

dir. Burada $X_i = X_i(QP, QR, SR)$ $i = 1,2$ (3.9) deki gibi tanımlanır.

İspat: İspat Teorem 3.5. dekine denktir.

Teorem 3.5 $Q = I$ ve $R = I$, özel durumlarına uygulanırsa $S + P$ matrisinin Drazin inversinin aşağıdaki açık gösterimi elde edilir.

Sonuç 3.1. $S, P \in \mathbb{C}^{m\times n}$ olsun. Eğer $SP = 0$ ise

$$(S + P)^D = \sum_{j=0}^{m-1}(P^D)^{j+1}S^j\,(I - SS^D) + \sum_{j=0}^{m-1}(I - PP^D)\,P^j\,(S^D)^{i+j}$$

$$= \sum_{j=0}^{I_S-1}(P^D)^{j+1}S^j\,(I - SS^D) + \sum_{j=0}^{I_P-1}(I - PP^D)\,P^j\,(S^D)^{j+1}$$

elde edilir. Eğer Teorem 3.5. de $R = P$ ve $Q = P^{k-1}(k \geq 1)$ ve $Q = I$ olması durumunda ve Teorem 3.6. da $R = Q^{k-1}$ ve $S = Q$ ve $R = I$ olması durumlarını göz önüne alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2. (1) P, Q ve $S \in \mathbb{C}^{m\times m}$ olsun. Herhangi bir $k \geq 1$ tamsayısı için aşağıdaki iddialar doğrulanır.

(i) Eğer $SP^{k+1} = 0$ ise bu takdirde

$$(P^k + PS)^D = (P^D)^k + (PS)^D + P((SP)^D)^2P^{k-1} + PX_1S + PX_2SP^k,$$

(ii) Eğer $Q^{k+1}P = 0$ ise

$$(PQ + Q^k)^D = (Q^D)^k + (PQ)^D + Q^{k-1}((QP)^D)^2Q + PY_1Q + Q^kPY_2Q,$$

olacaktır. Burada $X_i = X_i(P^k, P^k, SP)$ ve $Y_i = X_i(QP, Q^k, Q^k)$, $i = 1{,}2$, ler (3.3) deki gibi tanımlıdır.

(2) $P \in \mathbb{C}^{m\times n}, R \in \mathbb{C}^{m\times l}\ ve\ S \in \mathbb{C}^{l\times m}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki iddialar sağlanır.

(i) Eğer $SP^2 = 0\ ve\ SPR = 0$, ise bu takdirde

$$(P + RS)^D = P^D + R((SR)^D)^2S + R((SR)^D)^3SP + PX_1S + PX_2SP,$$

(ii) Eğer $SPR = 0\ ve\ P^2R = 0$ ise bu takdirde

$$(P + RS)^D = P^D + R((SR)^D)^2S + PR((SR)^D)^3S + RY_1P + PRY_2P$$

olacaktır. Burada $X_i = X_i(P, R, SR)$ ve $Y_i = X_i(SR, S, P), i = 1,2$ için (3.9) daki gibi tanımlıdır.

Şimdi de $S = D - CA^D B,\ A$ matrisinin M deki genelleştirilmiş Schur complementi olmak üzere

$AA^\pi B = 0,\ CA^\pi B = 0,\ AA^D BSS^\pi = 0,$

$SS^D CWAA^D (AW)^\pi = 0$ ve $(AW)^\pi AA^D BSS^D = 0,$

varsayımları altında $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ şeklindeki bir blok matrisin Drazin inversi için bir gösterim verelim. Eğer A matrisi ve $S = D - CA^{-1}B$ Schur komplementi nonsingüler ise bu takdirde M de nonsingülerdir ve M nin inversi

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CA^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

şeklinde ifade edilir. $S = D - CA^D B$ ile gösterilen A nın M deki Schur komplementi M^D nin gösterimlerinde önemli bir rol oynamaktadır. M ve A matrisleri nonsingüler olduğundan M nin Drazin inversinin ne şekilde olacağına odaklanırız. Bu durumda A^{-1} ve S^{-1} in yerine sırasıyla A^D ve S^D yazılmak üzere M^D nin (3.11) formunda olup olmadığı doğal olarak akla gelir. Son zamanlarda bu problem için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.

S nonsingüler ya da sıfır olduğundan (Miao 1989) da verilen sonuçlar $A^\pi B = 0$, $CA^\pi B = 0$ varsayımları ile $CA^\pi B = 0$ ve $AA^\pi B = 0$ varsayımlarını yer değiştirerek genişletmişlerdir (Hartwing ve ark. 2006). Martinez-Serrano ve Castro-Gonzalez (2009), $A^2 A^\pi B = 0$, $CAA^\pi B = 0$ ve $CA^\pi B = 0$ daha zayıf koşulları altında bazı yeni sonuçlar vermiştir ve S nin sıfır olması durumunda ise $A^2 A^\pi B = 0, CAA^\pi B = 0$ ve $BCA^\pi B = 0$ (veya $ABCA^\pi = 0, BCA^\pi = 0$ nilpotent) varsayımları altında M^D için ifadeler vermişlerdir. $S = 0$ olduğunda Yang ve Liu (2011), $AA^\pi BC = 0, CA^\pi BC = 0$ varsayımları altında M^D için bir formül ortaya koymuşlardır. Deng ve Wei (20011) ise M^D ve $M^\#$ için formülleri hakkında bazı yeni sonuçlar elde etmişlerdir. Castro-Gonzalez ve Martinez-Serrano (2010), $Ind(S) \leq 1$ ve $W = I + A^D BS^\pi CA^D$ matrisinin nonsingülerliği varsayımları altında M^D için bir formül geliştirmişlerdir. Li (2011), ise S nin grup tersinir olması durumunda belirli şartlar altında bir gösterim elde etmiştir.

S nin genelleştirilmiş Schur komplementi keyfi bir matris olması durumunda M^D için kesin bir formül bulmak bizim için çok açık bir problemdir. Yukarıda sözü edilen sonuçların pek çoğu S matrisinin bir sıfır matrisi veya $Ind(S) \leq 1$ olması durumunda elde edilmiştir. Bu kısımda $Ind(S) \leq 1$ ve $W = I + A^D BS^\pi CA^D$ matrisinin nonsingüler olması kısıtlamaları olmaksızın M nin Drazin inversi için çeşitli gösterimler verilmiştir.

Eğer A ve B matrisleri benzer ise yani $A = PBP^{-1}$ olacak şekilde nonsingüler matrisi mevcut ise $A^D = PB^D P^{-1}$ olduğu bilinmektedir.

Lemma 3.4. M matrisi $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ şeklinde bir blok matris ve $S = D - CA^D B$ matrisi A nin M deki genelleştirilmiş Schur komplementi olsun. Bu takdirde

$$M^D = \begin{pmatrix} A^D + A^D BS^D CA^D & -A^D BS^D \\ -S^D CA^D & S^D \end{pmatrix}$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$A^\pi BS^D = A^D BS^\pi, \quad S^\pi CA^D = S^D CA^\pi$$

ve

$$\begin{pmatrix} AA^\pi & A^\pi B \\ S^\pi CA^\pi & SS^\pi \end{pmatrix}$$

matrisinin bir nilpotent operatör (veya matris) olmasıdır.

Aşağıdaki kısımda $S = D - CA^D B$ ve $W = I + A^D BS^\pi CA^D$ alınacaktır.

Lemma 3.5. $Ind(A) = r$ olmak üzere $A \in C^{nxn}$ olsun. Bu takdirde

$$(A^2 A^D W)^D = AA^D (AW)^D = (AW)^D AA^D = (AW)^D,$$

$$(A^2 A^D W)^\pi = (AW)^\pi; \tag{3.12}$$

$$(WA^2 A^D)^D = AA^D (WA)^D = (WA)^D AA^D = (WA)^D,$$

$$(WA^2 A^D)^\pi = (WA)^\pi \tag{3.13}$$

dir. Diğer yandan eğer W nonsingüler ise

$$(A^2 A^D W)^D = W^{-1} A^D, \ (A^2 A^D W)^\pi = A^\pi;$$

$$(WA^2 A^D)^D = A^D W^{-1}, \ (WA^2 A^D)^\pi = A^\pi$$

dir. Ayrıca aşağıdaki üç ifade birbirine denktir.

(1) W nonsingülerdir.

(2) $AA^D(AW)^\pi = (AW)^\pi AA^D = 0$;

(3) $AA^D(WA)^\pi = (WA)^\pi AA^D = 0$.

İspat: Genelliği bozmaksızın A ve BS^π matrislerinin

$$A = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}, \quad BS^\pi = \begin{pmatrix} (BS^\pi C)_{11} & (BS^\pi C)_{12} \\ (BS^\pi C)_{21} & (BS^\pi C)_{22} \end{pmatrix},$$

şeklinde yazılabileceğini varsayalım. Burada Σ nonsingüler bir matris N, r indeksli nilpotent bir matris olmak üzere Σ ve $(BS^\pi C)_{11}$ aynı boyuta sahiptir. Bu nedenle

$$A^2A^DW = \begin{pmatrix} \Sigma(I + \Sigma^{-1}(BS^\pi)_{11}\Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AW = \begin{pmatrix} \Sigma(I + \Sigma^{-1}(BS^\pi)_{11}\Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

dir. Bunun sonucu olarak (3.12) ifadesi sağlanır. Benzer şekilde (3.13) bağıntısı da ispatlanır. W nun nonsingüler olması durumunda ifade edilen sonuçlar (Castro-Gonzalez ve Martinez-Serrano 2010) da gösterilmiştir. Böylece (1)-(3) ifadelerinin denkliği kolayca gösterilebilir.

Bu kısımda daha zayıf koşullar altında M^D için çeşitli gösterimler verilmiştir ve ayrıca bazı sonuçlar elde edilmiştir. Lemma 3.5. e göre W nun nonsingülerliği $AA^D(AW)^\pi = (AW)^\pi AA^D = 0$ durumu yerine $SS^DCWAA^D(AW)^\pi = 0$ ve $(AW)^\pi AA^DBSS^D = 0$ durumu alındığında M^Dnin yeniden bir gösterimi verilmiştir.

Yardımcı Lemma: $PQ = 0$ olacak şekilde $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ve $Ind(P) = r$, $Ind(Q) = s$ olsun. Bu takdirde

$$(P + Q)^D = Q^\pi \sum_{i=0}^{s-1} Q^i(P^D)^{i+1} + \sum_{i=0}^{r-1}(Q^D)^{i+1}P^iP^\pi$$

dir.

Teorem 3.7. $Ind(A) = r$, $Ind(S) = s$ olmak üzere M matrisi $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ şeklinde verilen bir blok matris olsun. Bu durumda eğer

$AA^\pi B = 0$, $CA^\pi B = 0$, $AA^DBSS^\pi = 0$, $SS^DCWAA^D(AW)^\pi = 0$

ve

$(AW)^\pi AA^DBSS^D = 0$

eşitlikleri sağlanırsa, bu takdirde M matrisinin Drazin İnversi

$$M^D = \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ S^\pi CA^D & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^\pi BS^\pi CA^D & A^\pi B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R + \sum_{j=1}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S^jS^\pi CA^D & 0 \end{pmatrix} R^j\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{s-1}\begin{pmatrix} A^{\pi}BS^{j}S^{\pi}CA^{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R^{j+1}\Bigg] R \times \Bigg[\begin{pmatrix} I & O \\ -S^{\pi}CA^{D} & I \end{pmatrix}$$

$$+R\begin{pmatrix} -BS^{\pi}CA^{D} & BS^{\pi} \\ C(I-W) & CA^{D}BS^{\pi} \end{pmatrix}$$

$$+\sum_{i=0}^{r-1} R^{i+1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ CA^{i}A^{\pi} & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{r-1} R^{i+2}\begin{pmatrix} BS^{\pi}CA^{i}A^{\pi} & 0 \\ CA^{D}BS^{\pi}CA^{i}A^{\pi} & 0 \end{pmatrix}\Bigg] \tag{3.14}$$

şeklindedir. Burada

$$R = \begin{pmatrix} (AW)^{D} + (AW)^{D}BS^{D}CW(AW)^{D} & -(AW)^{D}BS^{D} \\ -S^{D}CW(AW)^{D} & S^{D} \end{pmatrix}$$

olacaktır.

İspat: M matrisinin

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ S^{\pi}CA^{D} & I \end{pmatrix} \widetilde{M} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -S^{\pi}CA^{D} & I \end{pmatrix},$$

şeklindeki ayrışımını göz önüne alalım. Burada

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} A + BS^{\pi}CA^{D} & B \\ SS^{\pi}CA^{D} + SS^{D}CA^{D}BS^{\pi}CA^{D} + CA^{\pi} + SS^{D}CAA^{D} & S + SS^{D}CA^{D}B \end{pmatrix}$$

dir. Bu nedenle

$$M^{D} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ S^{\pi}CA^{D} & I \end{pmatrix} \widetilde{M}^{D} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -S^{\pi}CA^{D} & I \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

elde edilir. $\widetilde{M}$ matrisini

$$X = \begin{pmatrix} A^{2}A^{D}W & AA^{D}B \\ SS^{\pi}CA^{D} + SS^{D}CWAA^{D} & S + SS^{D}CA^{D}B \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} A^{\pi}BS^{\pi}CA^{D} & A^{\pi}B \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} AA^{\pi} & 0 \\ CA^{\pi} & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\widetilde{M} = X + Y + Z$$

olarak yazalım.

$AA^{\pi}B = 0$, $CA^{\pi}B = 0$ olduğundan $Z(X+Y) = 0,\ XY = 0,\ Y^{2} = 0$ ve Z nin $r+1$ indeksli nilpotent bir matris olduğu elde edilir. Buradan Yardımcı Lemma uygulanırsa

$\widetilde{M}^D = \sum_{i=0}^{r}((X+Y)^D)^{i+1}Z^i,$ (3.16)

$(X+Y)^D = X^D + Y(X^D)^2,$

ve $i \geq 0$ olmak üzere

$\left((X+Y)^D)\right)^{i+1} = (X^D)^{i+1} + Y(X^D)^{i+2}$

elde edilir. Sonuç olarak $\widetilde{M}^D$ matrisinin

$\widetilde{M}^D = \sum_{i=0}^{r}\left((X^D)^{i+1} + Y(X^D)^{i+2}\right)Z^i$ (3.17)

biçiminde olduğu görülür. Şimdi X^D yi hesaplayalım. Bunun için X matrisini önce

$$X = \begin{pmatrix} A^2A^DW & AA^DBSS^D \\ SS^DCWAA^D & S^2S^D + SS^DCA^DBSS^D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & AA^DBS^\pi \\ 0 & SS^DCA^DBS^\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ SS^\pi CA^D & SS^\pi \end{pmatrix}$$

$= X_1 + X_2 + X_3$ (3.18)

olarak yeniden yazalım. $AA^DBSS^\pi = 0$ olduğundan $(X_1 + X_2)X_3 = 0, X_3,$ s indeksli bir nilpotent matris $X_2X_1 = 0, {X_2}^2 = 0$ olduğu görülür. Bunun sonucu olarak Yardımcı Lemma kullanılırsa

$X^D = \sum_{j=0}^{s-1} X_3^j\,((X_1 + X_2)^D)^{j+1},$ (3.19)

ve $j \geq 0$ için

$((X_1 + X_2)^D)^{j+1} = (X_1^D)^{j+1} + (X_1^D)^{j+2}X_2$ 3.20)

olduğu görülür. $(AW)^\pi AA^DBSS^D = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} S^2S^D &+ SS^DCA^DBSS^D - SS^DCWAA^D(A^2A^DW)^DAA^DBSS^D \\ &= S^2S^D + SS^DCA^DBSS^D - SS^DCW(AW)^DAA^DBSS^D \\ &= S^2S^D + SS^DCA^DBSS^D - SS^DCA^DAW(AW)^DAA^DBSS^D \\ &= S^2S^D + SS^DCA^D(AW)^\pi AA^DBSS^D \\ &= S^2S^D \end{aligned}$$

elde edilir. Yani A^2A^DW nın X_1 deki genelleştirilmiş Schur komplementi S^2S^D dir. Verilen varsayımlarda X_1 matrisinin Lemma 3.4. ün şartlarını sağladığı gösterilebilir. Böylece

$$X_1^D = \begin{pmatrix} (AW)^D + (AW)^D BS^D CW(AW)^D & -(AW)^D BS^D \\ -S^D CW(AW)^D & S^D \end{pmatrix} = R \tag{3.21}$$

elde edilir. (3.21) ifadesi (3.20) de yerine yazılırsa

$$((X_1 + X_2)^D)^{j+1} = R^{j+1} + R^{j+2} \begin{pmatrix} 0 & BS^\pi \\ 0 & CA^D BS^\pi \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

elde edilir. (3.22) ifadesi (3.19) da yerine yazılırsa

$$X^D = \left[I + \sum_{j=1}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S^j S^\pi CA^D & 0 \end{pmatrix} R^j \right] R \left[I + R \begin{pmatrix} 0 & BS^\pi \\ 0 & CA^D BS^\pi \end{pmatrix} \right] \tag{3.23}$$

bulunur. Ayrıca her $i \geq 0$ için (3.17) ve (3.23) bağıntıları göz önüne alındığında

$$\widetilde{M}^D = \left[I + \sum_{j=1}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S^j S^\pi CA^D & 0 \end{pmatrix} R^j + YR + Y \sum_{j=1}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S^j S^\pi CA^D & 0 \end{pmatrix} R^{j+1} \right] R$$

$$\sum_{i=0}^{r} \left[R^i Z^i + R^{i+1} \begin{pmatrix} 0 & BS^\pi \\ 0 & CA^D BS^\pi \end{pmatrix} Z^i \right]$$

$$= \left[I + \begin{pmatrix} A^\pi BS^\pi CA^D & A^\pi B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R + \sum_{j=1}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S^j S^\pi CA^D & 0 \end{pmatrix} R^j + \sum_{j=1}^{s-1} \begin{pmatrix} A^\pi BS^j S^\pi CA^D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R^{j+1} \right]$$

$$\times R \left[I + R \begin{pmatrix} 0 & BS^\pi \\ 0 & CA^D BS^\pi \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{r-1} R^{i+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ CA^i A^\pi & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{r-1} R^{i+2} \begin{pmatrix} BS^\pi CA^i A^\pi & 0 \\ CA^D BS^\pi CA^i A^\pi & 0 \end{pmatrix} \right]$$

(3.24)

bulunur. (3.24) ifadesi (3.15) da yerine yazılarak (3.14) eşitliği elde edilmiş olur. Teorem 3.7 in bir uygulaması olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.3. $Ind(A) = r, Ind(S) = s$ olmak üzere M matrisi $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ şeklinde verilen parçalı matris olsun. Eğer $AA^\pi B = 0$, $CA^\pi B = 0$, $BSS^\pi = 0, BS^\pi C = 0$ ise

$$M^D = \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ S^\pi CA^D & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A^\pi B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R + \sum_{j=1}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S^j S^\pi CA^D & 0 \end{pmatrix} R^j \right]$$

$$\times R \left[\begin{pmatrix} I & A^D BS^\pi \\ -S^\pi CA^D & I \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{r-1} R^{i+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ CA^i A^\pi & 0 \end{pmatrix} \right]$$

dir. Burada R ve $W = I$ olmak üzere Teorem 3.7. deki gibi tanımlanmıştır.

Benzer şekilde aşağıdaki Teoremi verebiliriz.

Teorem 3.8. $Ind(A) = r, Ind(S) = s$ olmak üzere M matrisi $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ şeklinde verilen parçalı bir matris olsun. Bu durumda eğer $AA^{\pi}B = 0$, $CA^{\pi}B = 0$, $SS^{\pi}CAA^{D} = 0$, $SS^{D}CWAA^{D}(AW)^{\pi} = 0$ ve $(AW)^{\pi}AA^{D}BSS^{D} = 0$ ise bu takdirde

$$M^{D} = \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ S^{\pi}CA^{D} & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^{\pi}BS^{\pi}CA^{D} & A^{\pi}B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R\right] R$$

$$\times \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ -S^{\pi}CA^{D} & I \end{pmatrix} + R\begin{pmatrix} -BS^{\pi}CA^{D} & 0 \\ C(I-W) & 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{s-1} R^{j+1}\begin{pmatrix} 0 & BS^{j}S^{\pi} \\ 0 & CA^{D}BS^{j}S^{\pi} \end{pmatrix}\right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{r-1} R^{i+1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ CA^{i}A^{\pi} & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{s-1} R^{(i+j+2)}\begin{pmatrix} BS^{j}S^{\pi}CA^{i}A^{\pi} & 0 \\ CA^{D}BS^{j}S^{\pi}CA^{i}A^{\pi} & 0 \end{pmatrix}\right]$$

şeklinde olacaktır. Burada R, Teorem 3.7 deki gibi tanımlanmıştır.

İspat: Eğer $SS^{\pi}CAA^{D} = 0$ ise bu durumda (3.18) bağıntısı $X = X_1 + X_2$ olur. Burada

$$X_1 = \begin{pmatrix} A^{2}A^{D}W & AA^{D}BSS^{D} \\ SS^{D}CWAA^{D} & S^{2}S^{D} + SS^{D}CA^{D}BSS^{D} \end{pmatrix},$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & AA^{D}BS^{\pi} \\ 0 & SS^{\pi} + SS^{D}CA^{D}BS^{\pi} \end{pmatrix}$$

dir. $X_2X_1 = 0$ ve X_2 nin $s+1$ indeksli nilpotent bir matris olduğunu belirtelim. Yardımcı Lemma ve (3.21) bağıntısı göz önüne alınırsa

$$(X^{D})^{i+1} = R^{i+1}\left[I + \sum_{j=0}^{s-1} R^{j+1}\begin{pmatrix} 0 & BS^{j}S^{\pi} \\ 0 & CA^{D}BS^{j}S^{\pi} \end{pmatrix}\right]$$

olduğu görülür. (3.17) bağıntısından

$$\widetilde{M}^{D} = \left[I + \begin{pmatrix} A^{\pi}BS^{\pi}CA^{D} & A^{\pi}B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R\right] \sum_{i=0}^{r} R^{i+1}\left[I + \sum_{j=0}^{s-1} R^{j+1}\begin{pmatrix} 0 & BS^{j}S^{\pi} \\ 0 & CA^{D}BS^{j}S^{\pi} \end{pmatrix}\right] Z^{i}$$

$$= \left[I + \begin{pmatrix} A^{\pi}BS^{\pi}CA^{D} & A^{\pi}B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R\right] R \left[I + \sum_{j=0}^{s-1} R^{j+1}\begin{pmatrix} 0 & BS^{j}S^{\pi} \\ 0 & CA^{D}BS^{j}S^{\pi} \end{pmatrix}\right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{r} R^{i}\begin{pmatrix} A^{i}A^{\pi} & 0 \\ CA^{i-1}A^{\pi} & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{s-1} R^{i+j+1}\begin{pmatrix} 0 & BS^{j}S^{\pi} \\ 0 & CA^{D}BS^{j}S^{\pi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{i}A^{\pi} & 0 \\ CA^{i-1}A^{\pi} & 0 \end{pmatrix}\right]$$

elde edilir. Böylece Teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.8 dikkate alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.4. $Ind(A) = r, Ind(S) = s$ olmak üzere M matrisi $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ şeklinde verilen parçalı bir matris olsun. Eğer $AA^{\pi}B = 0, CA^{\pi}B = 0, SS^{\pi}C = 0$ ve $BS^{\pi}C = 0$ ise bu takdirde

$$M^D = \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ S^{\pi}CA^D & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A^{\pi}B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R\right] R$$

$$\times \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ -S^{\pi}CA^D & I \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{s-1} R^{j+1} \begin{pmatrix} 0 & BS^jS^{\pi} \\ 0 & CA^DBS^jS^{\pi} \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{r-1} R^{i+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ CA^iA^{\pi} & 0 \end{pmatrix}\right]$$

biçimindedir. Burada $R, W = I$ olmak üzere Teorem 3.7 de tanımlandığı gibidir.

Eğer $Ind(S) \leq 1$ ise Lemma 3.5 e göre Teorem 3.7. ve Teorem 3.8. aşağıdaki sonuca dönüşür.

Sonuç 3.5. $Ind(A) = r, Ind(S) \leq 1$ olmak üzere M matrisi $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ şeklinde verilen parçalı bir matris olsun. Eğer $AA^{\pi}B = 0, CA^{\pi}B = 0$ ve W nonsingüler ise, bu durumda

$$M^D = \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ S^{\pi}CA^D & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^{\pi}BS^{\pi}CA^D & A^{\pi}B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R\right] R \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ -S^{\pi}CA^D & I \end{pmatrix}\right.$$

$$\left. + R\begin{pmatrix} -BS^{\pi}CA^D & BS^{\pi} \\ C(I-W) & CA^DBS^{\pi} \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{r-1} R^{i+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ CA^iA^{\pi} & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{r-1} R^{i+2} \begin{pmatrix} BS^{\pi}CA^iA^{\pi} & 0 \\ CA^DBS^{\pi}CA^iA^{\pi} & 0 \end{pmatrix}\right]$$

biçiminde olacaktır. Burada

$$R = \begin{pmatrix} W^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^D + A^DBS^DCA^D & -A^DBS^D \\ -S^DCA^D & S^D \end{pmatrix}$$

olarak verilir.

Burada Teorem 3.7. ve Teorem 3.8. de $AA^{\pi}B = 0$ şartı $CAA^{\pi} = 0$ ile değiştirilirse benzer bir yaklaşımla aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Teorem 3.9. $Ind(A) = r, Ind(S) = s$ olmak üzere M matrisi $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ şeklinde verilen parçalı bir matris olsun. Bu durumda da eğer

$$CAA^{\pi} = 0, \;\; CA^{\pi}B = 0, \qquad SS^{\pi}CAA^D = 0, \;\; SS^DC(WA)^{\pi}AA^D = 0$$

ve

$$(WA)^{\pi}AA^DWBSS^D = 0$$

ise bu takdirde M^D Drazin inversi

$$M^D = \left[\begin{pmatrix} I & -A^DBS^\pi \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A^DBS^\pi C & (I-W)B \\ S^\pi C & S^\pi CA^DB \end{pmatrix}\tilde{R} + \sum_{i=0}^{r-1}\begin{pmatrix} 0 & A^iA^\pi B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\tilde{R}^{i+1}\right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{r-1}\begin{pmatrix} A^iA^\pi BS^\pi C & A^iA^\pi BS^\pi CA^DB \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\tilde{R}^{i+2}\right]\tilde{R}\left[\begin{pmatrix} I & A^DBS^\pi \\ 0 & I \end{pmatrix}\right.$$

$$+ \tilde{R}\begin{pmatrix} A^DBS^\pi CA^\pi & 0 \\ CA^\pi & 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{s-1}\tilde{R}^j\begin{pmatrix} 0 & A^DBS^jS^\pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{s-1}\tilde{R}^{j+1}\begin{pmatrix} A^DBS^jS^\pi CA^\pi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

biçimindedir. Burada

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} (WA)^D + (WA)^DWBS^DC(WA)^D & -(WA)^DWBS^D \\ -S^DC(WA)^D & S^D \end{pmatrix}.$$

olacaktır.

İspat: M matrisinin

$$M = \begin{pmatrix} I & -A^DBS^\pi \\ 0 & I \end{pmatrix}\widetilde{M}\begin{pmatrix} I & A^DBS^\pi \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

parçalanışını göz önüne alalım. Burada

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} A + A^DBS^\pi C & A^\pi B + AA^DBSS^D + A^DBSS^\pi + A^DBS^\pi CA^DBSS^D \\ C & S + CA^DBSS^D \end{pmatrix}$$

dir. Bu durumda

$$M^D = \begin{pmatrix} I & -A^DBS^\pi \\ 0 & I \end{pmatrix}\widetilde{M}^D\begin{pmatrix} I & A^DBS^\pi \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

elde edilir. Öre yandan $\widetilde{M}$ matrisini

$$X = \begin{pmatrix} WA^2A^D & AA^DWBSS^D + A^DBSS^\pi \\ CAA^D & S + CA^DBSS^D \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} A^DBS^\pi CA^\pi & 0 \\ CA^\pi & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} AA^\pi & A^\pi B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\widetilde{M} = X + Y + Z$$

olarak yazabiliriz. Geri kalan türetme yöntemi Teorem 3.7. deki ile aynı olduğundan burada detaya girilmeyecektir.

Aşağıdaki sonuç Teorem 3.9 dan kolayca elde edilebilir.

Sonuç 3.6. $ind(A) = r, ind(S) = s$ olmak üzere M matrisi $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ şeklinde verilen parçalı bir matris olsun. Eğer $CAA^{\pi} = 0, CA^{\pi}B = 0, SS^{\pi}C = 0$ ve $BS^{\pi}C = 0$ ise bu takdirde

$$M^D = \left[\begin{pmatrix} I & -A^D BS^{\pi} \\ S^{\pi}CA^D & I \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} 0 & A^i A^{\pi} B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{R}^{i+1} \right] \tilde{R}$$

$$\times \left[\begin{pmatrix} I - A^D BS^D CA^{\pi} & A^D BS^{\pi} \\ S^D CA^{\pi} & I \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{s-1} \tilde{R}^j \begin{pmatrix} 0 & A^D BS^j S^{\pi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

dir. Burada $\tilde{R}$ Teorem 3.9. daki gibi tanımlanmıştır.

Benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.10. $Ind(A) = r, Ind(S) = s$ olmak üzere M matrisi $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ şeklinde verilen parçalı bir matris olsun. Bu durumda da eğer

$CAA^{\pi} = 0, \qquad CA^{\pi}B = 0, \; AA^D BSS^{\pi} = 0, \qquad SS^D C(WA)^{\pi} AA^D = 0$

ve

$(WA)^{\pi} AA^D WBSS^D = 0$

ise bu takdirde M^D Drazin inversi

$$M^D = \left[\begin{pmatrix} I & -A^D BS^{\pi} \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A^D BS^{\pi} C & (I - W)B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{R} + \sum_{j=0}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S^j S^{\pi} C & S^j S^{\pi} CA^D B \end{pmatrix} \tilde{R}^{j+1} \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} 0 & A^i A^{\pi} B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{R}^{i+1} + \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-1} \begin{pmatrix} A^i A^{\pi} BS^j S^{\pi} C & A^i A^{\pi} BS^j S^{\pi} CA^D B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{R}^{i+j+2} \right]$$

$$\times \tilde{R} \left[\begin{pmatrix} I & A^D BS^{\pi} \\ 0 & I \end{pmatrix} + \tilde{R} \begin{pmatrix} A^D BS^{\pi} CA^{\pi} & 0 \\ CA^{\pi} & 0 \end{pmatrix} \right]$$

biçimindedir. Burada $\tilde{R}$ Teorem 3.9 daki gibi tanımlanmıştır.

Teorem 3.10 dan aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.7. $Ind(A) = r, Ind(S) = s$ olmak üzere M matrisi $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ şeklinde verilen parçalı bir matris olsun. Eğer $CAA^{\pi} = 0, CA^{\pi}B = 0, BSS^{\pi} = 0$ ve $BS^{\pi}C = 0$ ise bu takdirde M^D

$$M^D = \left[\begin{pmatrix} I & -A^D BS^{\pi} \\ 0 & I \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S^j S^{\pi} C & S^j S^{\pi} CA^D B \end{pmatrix} \tilde{R}^{j+1}\right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} 0 & A^i A^{\pi} B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{R}^{i+1}\right] \times \tilde{R} \left[\begin{pmatrix} I & A^D BS^{\pi} \\ 0 & I \end{pmatrix} + \tilde{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ CA^{\pi} & 0 \end{pmatrix}\right]$$

biçimindedir. Burada $\tilde{R}$ $W = I$ olmak üzere Teorem 3.9. daki gibi tanımlanmıştır.

Eğer $Ind(S) \leq 1$ ise Teorem 3.8 ve Teorem 3.10 aşağıdaki sonuca dönüşür.

Sonuç 3.8. $Ind(A) = r, Ind(S) \leq 1$ olmak üzere M daha önce verilen matris olsun. Eğer $CAA^{\pi} = 0, CA^{\pi}B = 0$ ve W nonsingüler ise bu takdirde M^D Drazin inversi

$$M^D = \left[\begin{pmatrix} I & -A^D BS^{\pi} \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A^D BS^{\pi} C & (I - W)B \\ S^{\pi} C & S^{\pi} CA^D B \end{pmatrix} \tilde{R} + \sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} 0 & A^i A^{\pi} B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{R}^{i+1}\right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{r-1} \begin{pmatrix} A^i A^{\pi} BS^{\pi} C & A^i A^{\pi} BS^{\pi} CA^D B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{R}^{i+2}\right] \tilde{R} \left[\begin{pmatrix} I & A^D BS^{\pi} \\ 0 & I \end{pmatrix}\right.$$

$$\left. + \tilde{R} \begin{pmatrix} A^D BS^{\pi} CA^{\pi} & 0 \\ CA^{\pi} & 0 \end{pmatrix}\right]$$

biçimindedir. Burada

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} A^D + A^D BS^D CA^D & -A^D BS^D \\ -S^D CA^D & S^D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

olacaktır.

Örnek 3.2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; ve \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ D & C \end{pmatrix}$ olsun.

$$A^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad A^\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

olduğu kolayca hesaplanabilir. Bu durumda (i)-(viii) şartlarının sağlanmadığı kolaylıkla görülebilir. Gerçekten

(i) rank$(A) = 2 \neq$rank(M),

(ii) $B \neq 0$ ve $D \neq 0$,

(iii) $CD \neq 0$,

(iv) $BD \neq 0$,

(v) $DA^\pi \neq 0$,

(vi) $C - DA^D B = C$ matrisi ne nonsingüler ne de sıfırdır,

(vii) $AA^\pi B \neq 0$,

(viii) $CD \neq 0, BC \neq 0$

dir. Öte yandan C matrisi idempotent, $C^D = C$ ve $A^D B = 0$ olduğundan

$$X_1 = X_2 = BC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.3. de (3.2) bağıntısı kullanılarak M^D nin

$$M^D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olduğu görülür.

Aşağıdaki örnek (i)-(viii) şartlarının hiçbirinin sağlanmadığı ve Teorem 3.4. ün geçerli olduğu bir durumu ifade etmektedir.

Örnek 3.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ D & C \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda (i)-(viii) şartlarının hiçbirinin sağlanmadığı ve Teorem 3.4. ün şartlarının sağlandığı kontrol edilebilir. Dolayısıyla yukarıda Teorem 3.4. de verilen M^D matrisinin gösterimi kullanılarak

$$M^D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

olduğu elde edilir.

Aşağıdaki örnek genelleştirilmiş uyarlanmış matrislerin Drazin inverslerinin hesaplanabilmesi için Teorem 3.5 den nasıl yararlanılacağını açıklamaktadır.

Örnek 3.4. $S = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ -6 & -5 & 3 & -5 & -5 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -5 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } R = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -3 & 3 \\ 6 & 6 \\ -3 & 3 \\ -6 & 0 \end{pmatrix},$$

olmak üzere

$$M = PQ + RS = \begin{pmatrix} 26 & 45 & -28 & 15 & 30 \\ -7 & -13 & 11 & -23 & 6 \\ -43 & -14 & 29 & -34 & -72 \\ -7 & -13 & 11 & -23 & 6 \\ 17 & -1 & -1 & -11 & 42 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu takdirde $SPQP = 0$ ve $SPQR = 0$ olduğu gösterilebilir. Bu nedenle Teorem 3.5 e göre 5×5 türündeki M matrisinin Drazin inversini 2×2 türündeki QP ve SR matrsilerinin Drazin inverslerini hesaplayarak ve ilave birkaç hesaplama yaparak bulabiliriz. Yani

$$(QP)^D = \begin{pmatrix} -25 & -20 \\ 25 & 20 \end{pmatrix}^D = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, (SR)^D = \begin{pmatrix} 42 & 24 \\ 78 & 24 \end{pmatrix}^D = \frac{1}{144}\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 13 & -7 \end{pmatrix}$$

elde edilir ki bu ise bize

$$X_1 = (I - QP(QP)^D)QR((SR)^D)^3 - (QP)^D QR((SR)^D)^2 - \left((QP)\right)^2 QR(SR)^D$$

$$= \frac{1}{4320}\begin{pmatrix} -229 & 199 \\ 229 & -199 \end{pmatrix},$$

$$X_2 = (I - QP(QP)^D)QR((SR)^D)^4 - (QP)^D QR((SR)^D)^3$$

$$-((QP)^D)^2 QR((SR)^D)^2 - ((QP)^D)^3 QR(SR)^D$$

$$= \frac{1}{3110400}\begin{pmatrix} 38251 & -32281 \\ -38251 & 32281 \end{pmatrix}$$

olduğunu gösterir. Bu durumda da $(I - QP(QP)^D)QP = 0$ ve $I - SR(SR)^D = 0$ eşitliklerinin sağlandığını belirtelim. Bu nedenle

$$M^D = (PQ + RS)^D = (P,\ \ R)\begin{pmatrix} ((QP)^D)^2 + X_2SP & X_1 \\ ((SR)^D)^3 SP & ((SR)^D)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q \\ S \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3991}{10800} & \frac{3559}{10800} & -\frac{229}{4320} & \frac{199}{4320} \\ -\frac{3991}{10800} & -\frac{3559}{10800} & \frac{229}{4320} & -\frac{199}{4320} \\ -\frac{7}{2592} & -\frac{7}{2592} & \frac{17}{5184} & -\frac{11}{5184} \\ \frac{61}{10368} & \frac{61}{10368} & -\frac{143}{20736} & \frac{101}{20736} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 5 & -5 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ -6 & -5 & 3 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{35}{54} & \frac{27127}{8640} & -\frac{149}{540} & -\frac{33679}{8640} & \frac{149}{1080} \\ \frac{11}{36} & -\frac{9049}{5760} & \frac{53}{360} & \frac{10753}{5760} & -\frac{23}{720} \\ \frac{17}{54} & -\frac{13591}{8640} & \frac{77}{540} & \frac{16687}{8640} & -\frac{77}{1080} \\ \frac{11}{36} & -\frac{9049}{5760} & \frac{53}{360} & \frac{10753}{5760} & -\frac{23}{720} \\ \frac{1}{3} & -\frac{47}{30} & \frac{2}{15} & \frac{59}{30} & -\frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

4. İKİ MATRİSİN TOPLAMININ DRAZİN İNVERSİ

4.1 Giriş

Bir önceki kısımda $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ herhangi bir matris olmak üzere $r(A^{k+1}) = r(A^k)$ koşulunu sağlayan en küçük k pozitif tamsayısına A matrisinin indeksi adını vermiş ve $Ind(A)$ ile göstermiştik. Eğer $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi için $Ind(A) = k$ ise

$A^{k+1}X = A^k$, $\qquad XAX = X,$ $\qquad AX = XA$

koşullarını sağlayan bir ve yalnız bir tek $X \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi varlığını belirtmiş, buna A matrisinin Drazin inversi adını vermiş ve $X = A^D$ ile göstermiştik.

Bu kısımda ise P ve Q aynı boyuttan matrisler olmak üzere P ve Q matrislerinin toplamının $(P+Q)^D$ Drazin inversi ile ilgileneceğiz. Bu problem ilk kez 1958 yılında Drazin tarafından ortaya atılmıştır. Drazin bu çalışmasında $PQ = QP = 0$ olması şartıyla,

$$(P+Q)^D = P^D + Q^D \tag{4.1}$$

olduğunu ispatlamıştır. Daha sonra yan şartlar olmaksızın $(P+Q)^D$ nin P, Q, P^D ve Q^D nin fonksiyonları olarak nasıl ifade edilebileceği sorusu tartışılmaya başlanmıştır. Bu soru zor bir sorudur ve halen açık bir soru olarak durmaktadır. Biz bu kısımda sadece $PQ = 0$ yan şartı altında bu soruya cevap arayacağız. Bununla ilgili olarak, öncelikle (4.1) in bazı özel durumlarını inceleyeceğiz ve bunun $PQ = 0$ olmak üzere değişmeli olmayan duruma genişleteceğiz. Bu durum özellikle iterasyon teorisindeki çeşitli uygulamalarda yaygın şekilde kullanılmaktadır.

Drazin, ayrıca komutatif bir halkada A, B matrisleri Drazin anlamda tersinir ve $AB = BA = 0$ olmak üzere $(A+B)^D = A^D + B^D$ olduğunu ispatlamıştır. Hartwing ve arkadaşları ise $AB = 0$ şartı altında $A, B \in \mathbb{C}^{nxn}$ olmak üzere $(A+B)^D$ için bir ifade ortaya koymuştur.

Son yıllarda iki matrisin ya da operatörünün toplamının Drazin inversi farklı koşullar altında detaylı bir şekilde ortaya konulmuştur. Örneğin C.Y. Deng $PQ = \lambda QP$ ve $PQ = PQP$ şartları altında X. Liu ve arkadaşları $P^3Q = QP$ ve $Q^3P = PQ$ şartları altında ve C.D. Meyer ve arkadaşları ise $PQP = 0$ ve $P^2Q = 0$ şartları altında $(P + Q)$toplamının Drazin inversini verilmiştir. Bu sonuçlar $P^2Q = PQP$ ve $Q^2P = QPQ$ şartları altında $(P + Q)$toplamının Drazin inversini açık bir şekilde nasıl ifade edeceğimiz konusunda bize yol gösterir ki bu şartlar $PQ = QP$ şartıyla sağlanır.

Bu bölümde aşağıdaki yol izlenmiştir. 2. kısımda bazı ilave sonuçlar verilmiştir. 3. kısımda bazı önemli lemmalar verilmiştir. 4. kısımda ise P ve Q gibi çarpıma ve toplamaya uygun herhangi iki matris olmak üzere $P^2Q = PQP$ ve $Q^2P = QPQ$ şartları altında P ve Q matrislerinin toplamlarının ve çarpımlarının Drazin inversleri olan $(P + Q)^D$ ve $(PQ)^D$ için açık ifadeler ortaya konacaktır.

4.2. Bazı İlave Sonuçlar

Bu kısımda öncelikle bazı önemli sonuçları verelim. Bu amaçla ilk olarak eğer A singüler bir matris ise A matrisinin C nonsingüler ve L nilpotent matrisler olmak üzere $\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}$ şeklindeki bir blok matrise benzer olduğunu belirtelim.

Tanım 4.1. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ olsun. Eğer $AS \subseteq S$ ise bu durumda $S \subseteq \mathbb{C}^n$ altuzayına A ile çarpım altında invaryanttır denir.

Önerme 4.1. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ olmak üzere $Ind(A) = k$ ise bu durumda $\mathcal{R}(A^k)$ ve $\mathcal{N}(A^k)$ altuzayları A ile çarpım altında invaryanttır.

İspat: Öncelikle $A\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(A^{k+1}) = \mathcal{R}(A^k)$ olacağından $\mathcal{R}(A^k)$ altuzayının A ile çarpım altında invaryant olduğunu belirtelim. $\mathcal{N}(A^k)$ altuzayının A ile çarpım altında invaryant olduğunu göstermek için $x \in A\mathcal{N}(A^k)$ alalım. Bu takdirde $Aw = x$ olacak şekilde en az bir $w \in \mathcal{N}(A^k) = \mathcal{N}(A^{k+1})$ mevcuttur. Buradan her iki taraf A^k ile çarpılırsa $A^kx = A^{k+1}w = 0$ elde edilir. Bu nedenle iddia edildiği gibi $x \in \mathcal{N}(A^k)$ ve $A\mathcal{N}(A^k) \subseteq \mathcal{N}(A^k)$ elde edilir.

Önerme 4.2(Core-Nilpotent Ayrışımı). $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ singüler bir matris olmak üzere $Ind(A) = k$ ve $r(A^k) = r$ olsun. Bu takdirde C matrisi r ranklı nonsingüler bir matris ve L matrisi k indeksli bir nilpotent matris olmak üzere

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

olacak şekilde nonsingüler bir Q matrisi mevcuttur.

İspat: $X = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ $\mathcal{R}(A^k)$ için ve $Y = (y_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_n)$ ise $\mathcal{N}(A^k)$ için tabanlar ve $Q = [x_1 \colon x_2 \colon \dots \colon x_r \colon y_1 \colon y_2 \colon \dots \colon y_{n-r}]$ olmak üzere $Q^{-1} = \begin{pmatrix} U^{r\times n} \\ V^{(n-r)\times n} \end{pmatrix}$ olsun ve $A^kY = 0$ olduğunu belirtelim. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} C^k & 0 \\ 0 & L^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}^k = (Q^{-1}AQ)^k = Q^{-1}A^kQ$$

$$= \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} A^k(X\colon Y) = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} (A^kX\colon A^kY) = \begin{pmatrix} UA^kX & 0 \\ VA^kX & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece $L^k = 0$ olup L matrisi nilpotentlik derecesi en azından k olan bir nilpotent matristir. Nilpotentlik derecesinin kesin olarak k olduğunu göstermeden önce C matrisinin rankını hesaplayalım. C^k nın bir $r \times r$ matris ve $r(C^k) = r\begin{pmatrix} C^k & 0 \\ 0 & L^k \end{pmatrix} = r(Q^{-1}A^kQ) = r(A^k) = r$ olduğunu ifade edelim. Böylece $[det(C)]^k = det(C^k) \neq 0$ ve dolayısıyla $det(C) \neq 0$ elde edilir. Bu nedenle $r(C^p) = r, 1 \leq p \leq k$ dır. Öte yandan eğer olup L matrisi k dan daha küçük bir nilpotentlik derecesine sahipse bu durumda $L^{k-1} = 0$ ve dolayısıyla da $r(A^{k-1}) = r(Q^{-1}A^{k-1}Q) = r\begin{pmatrix} C^{k-1} & 0 \\ 0 & L^{k-1} \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} C^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r(C^{k-1}) = r = r(A^k)$ olacaktır. Bu ise $boy\mathcal{R}(A^{k-1}) = boy\mathcal{R}(A^k)$ demektir. Fakat $\mathcal{R}(A^{k-1}) \supseteq \mathcal{R}(A^k)$ olduğundan $\mathcal{R}(A^{k-1}) = \mathcal{R}(A^k)$ elde edilir ki bu $Ind(A) = k$ hipoteziyle çelişir. O halde L matrisinin nilpotentlik derecesi tamı tamına olarak k dır.

Örnek 4.1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ matrisi verilsin. $\det(A) = -2(-4) - 4(2) = 0$ olduğundan A matrisi singülerdir. Öte yandan

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ve } \mathcal{R}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

olup $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A) \neq 0$ dir. Öte yandan

$$A^2 = \begin{pmatrix} -8 & -8 & 0 \\ 12 & 12 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \end{pmatrix} \text{ olup } \mathcal{R}(A^2) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ ve } \mathcal{N}(A^2) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

dir. Böylece $\mathcal{N}(A^2) \cap \mathcal{R}(A^2) = 0$ olup $Ind(A) = 2$ ve $r(A^2) = 1$ elde edilir. Bu durumda A matrisinin Core-Nilpotent ayrışımı $\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$ biçiminde olacaktır. Buradan da

$$Q = [\mathcal{R}(A^2) \colon \mathcal{N}(A^2)] = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ olup } Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Burada $C^{1\times1} = (1)$ rankı 1 olan nonsingüler bir matris ve

$L^{2\times2} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ indeksi 2 olan bir nilpotent matristir.

Lemma 4.1. Eğer $AB = BA$ olmak üzere $A = C_A + N_A$ ve $B = C_B + N_B$ sırasıyla A ve B nin core-nilpotent ayrışımları ise, bu takdirde

$$\begin{aligned} (A+B)^D &= (C_A + C_B)^D[I + (C_A + C_B)^D(N_A + N_B)]^{-1} \\ &= (C_A + C_B)^D[I + (C_A + C_B)^D N_A)]^{-1} \times [I + (C_A + C_B)^D N_B]^{-1} \qquad (4.3) \end{aligned}$$

dir.

İspat: $N_A + N_B$ nilpotent olmak üzere $A + B = (C_A + C_B) + (N_A + N_B)$ yazalım. Eğer $N^k = 0$ ve $AN = NA$ ise bu takdirde

$(A+N)^D = A^D[I + A^D N]^{-1}$ ve $A^D = (A+N)^D[I - (A+N)^D N]^{-1}$

olacaktır. Örneğin, eğer $B = Z_A = I - AA^D$ alınırsa bu durumda

$$(A + Z_A)^{-1} = (C_A + Z_A)^{-1}(I + N_A)^{-1} \qquad (4.4)$$

olur, burada $A + Z_A = (I + N_A)(C_A + Z_A)$ ve $A = (A - Z_A) + Z_A$ dir.□

Teorem 4.1. $A = P + Q$ olmak üzere eğer $PQ = 0$ ise bu takdirde

$$(P+Q)^D = (I - QQ^D)[I + QP^D + \cdots + Q^{k-1}(P^D)^{k-1}]P^D$$
$$+Q^D[I + Q^D P + \cdots + (Q^D)^{k-1}P^{k-1}](I - PP^D), \tag{4.5}$$

$$(P+Q)(P+Q)^D = (I - QQ^D)[I + QP^D + \cdots + Q^{k-1}(P^D)^{k-1}]PP^D$$
$$+QQ^D[I + Q^D P + \cdots + (Q^D)^{k-1}P^{k-1}](I - PP^D) + QQ^D PP^D \tag{4.6}$$

olacaktır, burada $maks\{Ind(P), Ind(Q)\} \leq k \leq Ind(P) + Ind(Q)$ dir.

İspat: $PQ = 0$ varsayımı altında

$$P^D Q = PQ^D = 0,\ Z_P Q = Q \text{ ve } PZ_Q = P \tag{4.7}$$

elde edilir. $(AB)^D = A[(BA)^D]^2 B$ şeklinde verilen Cline formülünü dikkate alırsak

$$(P+Q)^D = \left[(I,Q)\begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix}\right]^D = (I,Q)\left[\begin{pmatrix} P & PQ \\ I & Q \end{pmatrix}^D\right]^2 \begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix}$$

yazılabilir ki burada $PQ = 0$ konulursa

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ I & Q \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} P^D & 0 \\ R & Q^D \end{pmatrix}$$

olur, burada $maks\{Ind(P), Ind(Q)\} \leq k \leq Ind(P) + Ind(Q)$ ve

$$Y_k = Q^{k-1} + Q^{k-2}P + \cdots + QP^{k-2} + P^{k-1}$$

olmak üzere

$$R = -Q^D P^D + Z_Q Y_k (P^D)^{k+1} + (Q^D)^{k+1} Y_k Z_P$$

dir. Bu nedenle de

$$(P+Q)^D = (I,Q)\left[\begin{pmatrix} P & PQ \\ I & Q \end{pmatrix}^D\right]^2 \begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix}$$
$$= P^D + QRPP^D + QQ^D RP + Q^D$$

olur ki burara R nin yerine yazılmasıyla (4.5) de istenen sonuç elde edilir. (4.6) ise (4.5) ve (4.7) eşitliklerinden kolayca gösterilebilir.

Sonuç 4.1. $PQ = 0$ olmak üzere $maks\{Ind(P), Ind(Q)\} \leq k \leq Ind(P) + Ind(Q)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eğer Q nilpotent ise $(P+Q)^D = P^D + Q(P^D)^2 + \cdots + Q^{k-1}(P^D)^k$ dir.

(ii) Eğer $Q^2 = 0$ ise $(P+Q)^D = P^D + Q(P^D)^2$ dir.

(iii) Eğer P nilpotent ise $(P+Q)^D = Q^D + (Q^D)^2 P + \cdots + (Q^D)^k P^{k-1}$ dir.

(iv) Eğer $P^2 = 0$ ise $(P+Q)^D = Q^D + (Q^D)^2 P$ dir.

(v) Eğer $P^2 = P$ ise $(P+Q)^D = (I - QQ^D)[I + Q + \cdots + Q^{k-1}]P + Q^D(I-P)$ ve $(P+Q)^D(I-P) = Q^D(I-P)$ olacaktır.

(vi) Eğer $Q^2 = Q$ ise $(P+Q)^D = (I-Q)P^D + Q[I + P + \cdots + P^{k-1}](I - PP^D)$ ve $(I-Q)(P+Q)^D = (I-Q)P^D$ dir.

(vii) Eğer $PR = 0$ ise $(P+Q)^D R = (I - QQ^D)P^D R + Q^D R = Q^D R$ dir.

Teorem 4.1 i aşağıdaki şekilde genelleştirmek mümkündür. Her $k = 1,2, \ldots$ için

$$\left[\begin{pmatrix} P & PQ \\ I & Q \end{pmatrix}^D\right]^k = \left[\begin{pmatrix} P & PQ \\ I & Q \end{pmatrix}^k\right]^D = \begin{pmatrix} P(P+Q)^{k-1} & P(P+Q)^{k-1}Q \\ (P+Q)^{k-1} & (P+Q)^{k-1}Q \end{pmatrix}^D$$

olduğundan yukarıdaki durumu $P(P+Q)^{k-1}Q = 0$ durumuna genişletebiliriz. Gerçekten

$$(P+Q)^D = (I, Q)\left[\begin{pmatrix} P & PQ \\ I & Q \end{pmatrix}^k\right]^D \begin{pmatrix} P & PQ \\ I & Q \end{pmatrix}^{k-2} \begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix}$$

$$= (I, Q)\begin{pmatrix} P(P+Q)^{k-1} & 0 \\ (P+Q)^{k-1} & (P+Q)^{k-1}Q \end{pmatrix}^D \begin{pmatrix} P(P+Q)^{k-3} & P(P+Q)^{k-3}Q \\ (P+Q)^{k-3} & (P+Q)^{k-3}Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Bu ise $[P(P+Q)^{k-1}]^D$ ve $[(P+Q)^{k-1}Q]^D$ nin hesaplanmasını gerektirir ki bu da $(P+Q)^D$ nin hesaplanmasından gerçekten daha da kolaydır.

Öte yandan $Ind(A) = k$ olacak şekildeki her $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi için, C nonsingüler bir matris ve N ise k indeksli nilpotent bir matris olmak üzere,

$$A = X\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} X^{-1} \quad 4.8)$$

olacak şekilde nxn tipinde nonsingüler bir X matrisi vardır. Bu durumda,

$$A^D = X\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^{-1} \quad (4.9)$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

Eğer A matrisi nilpotent bir matris ise $A^D = 0$ olduğu bilinmektedir. Bundan sonraki kısımlarda $A^{\pi} := I - AA^D$ alacağız.

4.3. Bazı Yararlı Lemmalar

Bu kısımda bir sonraki kısımda verilecek olan iki matrisin toplamının Drazin inversinin tartışılması için bazı genel bilgiler verilecektir. Bu amaçla öncelikle bazı lemmalar verelim.

Lemma 4.2. $BC = 0$ olmak üzere $A \in \mathbb{C}^{nxn}$, $B \in \mathbb{C}^{nxn}$ ve $C \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisleri verilsin ve M matrisi de

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde M^Dmatrisi

$$M^D = \begin{pmatrix} A^D & 0 \\ C(A^D)^2 & B^D \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

şeklinde olacaktır.

Lemma 4.3. $P, Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Eğer, $P^2Q = PQP$ ise, bu takdirde herhangi i, j pozitif tamsayıları için,

(i) $P^{i+1}Q = P^iQP = PQ\,P^i, \qquad P^{2i}\mathrm{Q} = P^i\mathrm{Q}\,P^i$,

(ii) $P^i\,Q^i = (PQ)^i$

dir, ayrıca $Q^2P = QPQ$ ise

$$PQ^i\,P^i = P^{i+1}\,Q^i \quad (4.12)$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: (i) indiksiyondan sonuçlar kolayca elde edilir.

(ii) $i = 1$ için iddia aşikardır. $i = k$ için eşitliğin sağlandığını, yani, $P^k\, Q^k = (PQ)^k$ olduğunu varsayalım. $i = k + 1$ olması durumunda (i) den aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$P^{i+1}\, Q^{i+1} = PQP^i\, Q^i = PQ\,(PQ)^i = (PQ)^{i+1} \tag{4.13}$$

Bu nedenle tümevarımdan, herhangi bir i için $P^i\, Q^i = (PQ)^i$ eşitliğinin sağlandığını elde ederiz. $Q^2P = QPQ$ olduğunu varsayalım. (4.12) için j üzerinden tümevarım uygulayalım. Açıkça görülüyor ki, $j = 1$ olduğunda (i) ifadesinden dolayı eşitlik sağlanır. $j = k$ için eşitliğin sağlandığını, yani, $P\,Q^k\,P^i = P^{i+1}\,Q^k$ olduğunu varsalım. $j = k + 1$ olduğunda

$$\begin{aligned} P\,Q^{k+1}\,P^i &= PQ^{k-1}\,Q^2P\,P^{i-1} = P\,Q^k\,(PQP^{i-1}) \\ &= PQ^k\,P^i\mathrm{Q} = P^{i+1}\,Q^k\mathrm{Q} = P^{i+1}\,Q^{k+1} \end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir. Bundan dolayı (4.12) eşitliği herhangi bir j sağlanmış olur.

Lemma 4.4. $P, Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. $P^2Q = PQP$ ve $Q^2P = QPQ$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde herhangi bir m sayısı için, $C_j^{\ i} = j!/i!\,(j-i)!$, $j \geq i$ binom katsayıları olmak üzere

$$(P+Q)^m = \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i (P^{m-i}\,Q^i + Q^{m-i}P^i) \tag{4.15}$$

dır.

Ayrıca, $P^s = 0$ ve $Q^t = 0$ olmak üzere eğer P, Q matrisleri nilpotent ise, bu takdirde $P + Q$ da nilpotent olup indeksi $s + t$ den daha küçük olacaktır.

İspat: (4.15) bağıntısının sağlandığını yine tümevarımla göstereceğiz. Açıkça görülür ki $m = 1$ için (4.15) ifadesi sağlanır. $m = k$ için (4.15) nın sağlandığını varsayalım, yani,

$$(P+Q)^k = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i (P^{k-i}\,Q^i + Q^{k-i}P^i) \tag{4.16}$$

olsun. Bu takdirde $m = k + 1$ için Lemma 4.3. den

$$\begin{aligned} (P+Q)^{k+1} &= \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i (P^{k-i}\,Q^i + Q^{k-i}P^i)(P+Q) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i (P^{k+1-i}\,Q^i + P^{k-i}Q^{i+1} + Q^{k-i}P^{i+1} + Q^{k+1-i}P^i) \\ &= P^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(C_{k-1}^i + C_{k-1}^{i-1} \right) P^{k+1-i}\,Q^i + PQ^k \end{aligned}$$

$$+Q^{k+1}+\sum_{i=1}^{k-1}(C_{k-1}^{i}+C_{k-1}^{i-1})Q^{k+1-i}P^{i})+QP^{k}$$

$$=P^{k+1}+\sum_{i=1}^{k-1}\ C_{k}^{i}P^{k+1-i}\,Q^{i}+PQ^{k}+Q^{k+1}+\sum_{i=1}^{k-1}C_{k}^{i}\,Q^{k+1-i}P^{i}+QP^{k}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\ C_{k}^{i}P^{k+1-i}\,Q^{i}+\sum_{i=0}^{k}C_{k}^{i}\,Q^{k+1-i}P^{i} \tag{4.17}$$

olduğu görülür. Bu nedenle herhangi bir $m \geq 1$ için (4.15) ifadesi sağlanmış olur. Eğer $P^{s}=0$ ve $Q^{t}=0$ olmak üzere P ve Q matrisleri nilpotent ise bu takdirde (4.15) de $m=s+t-1$ alınarak $(P+Q)^{s+t-1}=0$ olduğu, yani, $P+Q$ matrisinin indeksi $s+t$ den daha küçük olan bir nilpotent matris olduğu görülür.

Lemma 4.5. $P,Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Eğer $PQ=QP$ ise, bu takdirde

$(\mathrm{P}Q)^{\mathrm{D}}=\ Q^{D}P^{D}=\mathrm{P}^{\mathrm{D}}\mathrm{Q}^{\mathrm{D}}$ ve $P^{\mathrm{D}}\mathrm{Q}=\mathrm{QP}^{\mathrm{D}}$

eşitlikleri gerçeklenir.

Lemma 4.6. $P,Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ olmak üzere P matrisi tersinir matris olsun. Eğer $PQ=QP$ ise, bu takdirde

$$(P+Q)^{D}=(I+P^{-1}Q)^{D}P^{-1}=P^{-1}(I+P^{-1}Q)^{D} \tag{4.18}$$

dır. Ayrıca eğer Q, t indeksli nilpotent bir matris ise, bu takdirde $P+Q$ toplamı da tersinir olup,

$$(P+Q)^{-1}=\sum_{i=0}^{t-1}(-Q)^{i}\,P^{-i-1}=\sum_{i=0}^{t-1}P^{-i-1}(-\,Q)^{i} \tag{4.19}$$

dır.

İspat: $P+Q=P(I+P^{-1}Q)=(I+P^{-1}Q)P$ olduğundan, Lemma 4.5 e göre

$$(P+Q)^{D}=(I+P^{-1}Q)^{D}P^{-1}=P^{-1}(I+P^{-1}Q)^{D} \tag{4.20}$$

yazılabilir.

P ile değişmeli olmak üzere Q nun nilpotentliğinin $P^{-1}Q$ nun da t indeksli nilpotent olmasını sağladığını belirtelim. Böylece $I+P^{-1}Q$ matrisi tersinirdir ve dolayısıyla $P+Q$ toplamı da tersinir olup,

$$(P+Q)^{-1}=(I+P^{-1}Q)^{-1}P^{-1}=\sum_{i=0}^{t-1}\left(-Q^{i}\right)P^{-i-1}=\sum_{i=0}^{t-1}P^{-i-1}(-Q)^{i} \tag{4.21}$$

dir.

Lemma 4.7. $Q = Q_1 \oplus Q_2$ olmak üzere $P, Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun, burada Q_1 tersinir matris ve Q_2 t indeksli nilpotent matris ve

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_3 \\ P_4 & P_2 \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

matrisi Q ya uyumlu olarak parçalanmış olsun. Ayrıca $P^2Q = PQP$ ve $Q^2P = QPQ$ olduğunu varsyalım. Bu takdirde $P_3 = 0$ ve

$$Q_1P_1 = P_1Q_1 \, , \tag{4.23}$$

$$Q_2P_4 = P_2P_4 = 0 \, , \tag{4.24}$$

$$Q_2^2P_2 = Q_2P_2Q_2 \, , \tag{4.25}$$

$$P_i^2Q_i = P_iQ_iP_i \, , \; i = 1,2, \tag{4.26}$$

olacaktır. Ayrıca, eğer P s indeksli nilpotent bir matris ise, bu durumda $P_4P_1^{s-1} = 0$ dır.

İspat: $Q^2P = QPQ$ olduğundan Lemma 4.3 e göre $Q^{2t}\mathrm{P} = Q^t\mathrm{P}\,Q^t$ dır. Yani,

$$\begin{pmatrix} Q_1^{2t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 & P_3 \\ P_4 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1^t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 & P_3 \\ P_4 & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1^t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

eşitliği ve dolayısıyla

$$\begin{pmatrix} Q_1^{2t}P_1 & Q_1^{2t}P_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1^tP_1Q_1^t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca Q_1 in tersinirliğinden $P_3 = 0$ olduğu görülür. Böylece

$Q^2P = QPQ$ ve $P^2Q = PQP$

eşitliklerinden sırasıyla,

$$P_1Q_1 = Q_1P_1 \, , \quad Q_2^2P_4 = Q_2P_4Q_1 \, , \quad Q_2^2P_2 = Q_2P_2Q_2 \, , \tag{4.29}$$

ve dolayısıyla da

$$P_2P_4Q_1 = P_2Q_2P_4 \, , \quad P_i^2Q_i = P_iQ_iP_i \, , \quad i = 1,2, \tag{4.30}$$

eşitlikleri elde edilir. Öte yanda $Q_2^t = 0$ olduğundan

$$Q_2P_4 = Q_2^2P_4Q_1^{-1} = Q_2^tP_4Q_1^{-t+1} = 0 \quad (4.31)$$

olup, şu halde $P_2P_4 = P_2Q_2P_4Q_1^{-1} = 0$ dır. Buradan

$$P^s = \begin{pmatrix} P_1^s & 0 \\ P_4P_1^{s-1} & P_2^s \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

ifadesinin doğruluğu kolayca görülür. Böylece, eğer $P^s = 0$ ise $P_4P_1^{s-1} = 0$ olacaktır.

4.4. Temel Sonuçlar

Bu kısımda $P^2Q = PQP$ ve $Q^2P = QPQ$ şartları altında, $(P+Q)^D$ ve $(\mathrm{P}Q)^{\mathrm{D}}$ için açık ifadeler vereceğiz. Şimdi aşağıdaki teoremle işe başlayalım.

Teorem 4.2. $Ind(Q) = t$ olmak üzere $Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Ayrıca $P^s = 0$ olmak üzere $P \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi nilpotent bir matris olsun. Eğer $P^2Q = PQP$ ve $Q^2P = QPQ$ ise bu takdirde,

$$\begin{aligned}(P+Q)^D &= \textstyle\sum_{i=0}^{s-1}(Q^D)^{i+1}(-P)^i + Q^\pi P\sum_{i=0}^{s-2}(-1)^i(i+1)(Q^D)^{i+2}P^i \\ &= QQ^D\textstyle\sum_{i=0}^{s-1}(-P)^i(Q^D)^{i+1} + Q^\pi PQQ^D\sum_{i=0}^{s-2}(-1)^i(i+1)P^i(Q^D)^{i+2} \quad (4.33)\end{aligned}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: Eğer $t = 0$ ise Q matrisi tersinirdir ve dolayısıyla $QP = PQ$ olur. Böylece Lemma 4.6. ya göre (4.33) eşitliği sağlanr.

Şimdi $t > 0$ olduğunu ve genelliği bozmaksızın Q_1 matrisi tersinir ve Q_2 matrisi t indeksli nilpotent bir matris olmak üzere Q matrisinin $Q = Q_1 \oplus Q_2$ şeklinde yazılabildiğini varsayalım. Bu nedenle $Q^D = Q_1^{-1} \oplus 0$ olacaktır. $P^2Q = PQP$ ve $Q^2P = QPQ$ olduğundan Lemma 4.7. ye göre P matrisini Q matrisine uygun olarak aşağıdaki gibi parçalayabiliriz.

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ P_4 & P_2 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Burada P nilpotent matris olduğundan P_1, P_2 matrisleri de nilpotenttir. I matrisini de Q ya uygun olarak $I = I_1 \oplus I_2$ şeklinde parçalayalım.

P_1 matrisi nilpotent ve Q_1 matrisi ise tersinir olduğundan, Lemma 4.6 ya göre

$$(P_1 + Q_1)^{-1} = \sum_{i=0}^{s-1} Q_1^{-i-1} (-P_1)^i = \sum_{i=0}^{s-1} (-P_1)^i \, Q_1^{-i-1} \tag{4.34}$$

yazılabilir. Ayrıca Lemma 4.4 e göre P_2 ve Q_2 matrislerinin nilpotentliği

$(P_2 + Q_2)^D = 0$ olduğunu gösterir. (4.24) den $(P_2 + 2)P_4 = 0$ dır. Dolayısıyla Lemma 4.2, yukarıdaki inceleme ve (4.23) eşitliğinden

$$(P+Q)^D = \begin{pmatrix} P_1 + Q_1 & 0 \\ P_4 & P_2 + Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1^{-1}(I_1 + Q_1^{-1}P_1)^{-1} & 0 \\ P_4 Q_1^{-2}(I_1 + Q_1^{-1}P_1)^{-2} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

eşitliği elde edilir. Öte yandan (4.34) ifadesi dikkate alınırsa

$$(I_1 + Q_1^{-1}P_1)^{-2} = \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i (i+1) Q_1^{-i} \, P_1^i = \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i (i+1) P_1^i Q_1^{-i} \tag{4.36}$$

olduğu kolayca görülür. $P^s = 0$ olduğundan, Lemma 4.7 ye göre $P_4 P_1^{s-1} = 0$ olacaktır ve dolayısıyla (4.36) e göre

$$Q^\pi P \sum_{i=0}^{s-2} (-1)^i (i+1) (Q^D)^{i+2} P^i$$

$$= \sum_{i=0}^{s-2} (-1)^i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ P_4 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^{-(i+2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^i & 0 \\ * & P_2^i \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=0}^{s-2} (-1)^i \, (i+1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_4 Q_1^{-(i+2)} P_1^i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_4 Q_1^{-2}(I + Q_1^{-1}P_1)^{-2} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

yazılabilir.

Yukarıdaki incelemeye benzer şekilde, Lemma 4.6 dan

$$\sum_{i=0}^{s-1} (Q^D)^{i+1} (-P)^i = \begin{pmatrix} Q_1^{-1}(I_1 + Q_1^{-1}P_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

olduğu görülür.

Böylece, (4.37) ve (4.38) ifadeleri (4.36) bağıntısında yerlerine yazılırsa (4.35) deki birinci eşitlik sağlanır.

(4.37) nin tartışılmasında yapılanlara benzer şekilde

$$QQ^D \sum_{i=0}^{s-1}(-P)^i(Q^D)^{i+1} = \begin{pmatrix} Q_1^{-1}(I+Q_1^{-1}P_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^\pi PQQ^D \sum_{i=0}^{s-2}(-1)^i(i+1)P^i(Q^D)^{i+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_4Q_1^{-2}(I+Q_1^{-1}P_1)^{-2} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

yazılabilir ve daha sonra bunları (4.35) eşitliğinde yerine yazarsak (4.33) deki ikinci eşitliğin sağlandığı görülür.

Aşağıdaki teorem bizim bu kısımdaki ana sonucumuzdur ve Teorem 4.2 ve Lemma 4.6 bunun birer özel durumu olarak düşünülebilir.

Teorem 4.3. $Ind(P) = s \geq 1$ ve $Ind(Q) = t$ olmak üzere $P, Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Eğer $P^2Q = PQP$ ve $Q^2P = QPQ$ ise, bu takdirde

(i) $(PQ)^D = \mathrm{P^D Q^D} = \mathrm{PP^D Q^D Q^D} = \mathrm{PQ^D (P^D)^2}$ (4.40)

$$Q^2\mathrm{P^D} = \mathrm{QP^D Q} \tag{4.41}$$

$$(\mathrm{P^D})^2\mathrm{Q} = \mathrm{P^D Q P^D} \tag{4.42}$$

(ii) $(P+Q)^D = P^D(I+P^DQ)^D + P^\pi Q[P^D(I+P^DQ)^D]^2 +$

$$+\sum_{i=0}^{s-1}(Q^D)^{i+1}(-P)^i P^\pi + Q^\pi P\sum_{i=0}^{s-2}(-1)^i(i+1)(Q^D)^{i+2}P^iP^\pi \tag{4.43}$$

dir.

İspat: Eğer $s = 0$ ise, bu takdirde P matrisi tersinir olup $PQ = QP$ eşitliği sağlanır. Böylece Lemma 4.13 ve Lemma 4.5 den sırasıyla (4.40) ve (4.43) eşitlikleri sağlanır. Bu nedenle $s > 0$ olduğunu ve genelliği bozmaksızın P_1 tersinir ve P_2 de s indeksli nilpotent matris olmak üzere $P = P_1 \oplus P_2$ olduğunu varsayalım. Hipotezlerden ve Lemma 4.7 ye göre Q matrisi P ye uygun olarak

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_4 & Q_2 \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

şeklinde parçalanabilir ve dolayısıyla da Lemma (4.7) ifadesinde verilen eşitlikler sağlanır. Böylece

$$Q^D = \begin{pmatrix} Q_1^D & 0 \\ Q_4(Q_1^D)^2 & (Q_2)^D \end{pmatrix}, \quad Q^2 = \begin{pmatrix} Q_1^2 & 0 \\ Q_4 Q_1 & Q_2^2 \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

eşitlikleri yazılabilir.

(i) (4.23) ve (4.24) ifadelerinden

$$Q^2 P^D = \begin{pmatrix} Q_1^2 P_1^{-1} & 0 \\ Q_4 Q_1 P_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 P_1^{-1} Q_1 & 0 \\ Q_4 P_1^{-1} Q_1 & 0 \end{pmatrix} = Q P^D Q,$$

$$(P^D)^2 Q = \begin{pmatrix} P_1^{-2} Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} Q_1 P_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P^D Q P^D \tag{4.46}$$

$$P Q^D (P^D)^2 = \begin{pmatrix} P_1 Q_1^D P_1^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} Q_1^D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P^D Q^D$$

$$= \begin{pmatrix} Q_1^D P_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P P^D Q^D P^D,$$

$$PQ = \begin{pmatrix} P_1 Q_1 & 0 \\ 0 & P_2 Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 P_1 & 0 \\ 0 & P_2 Q_2 \end{pmatrix} \tag{4.47}$$

eşitlikleri yazılabilir.

(4.26) bağıntısı ve Lemma 4.3. gözönüne alınırsa $(P_2 Q_2)^s = P_2^s Q_2^s = 0$ olduğu görülür. Öte yandan Lemma 4.5. ve (4.47) eşitliğinden

$$(PQ)^D = \begin{pmatrix} (Q_1 P_1)^D & 0 \\ 0 & (P_2 Q_2)^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} Q_1^D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P^D Q^D \tag{4.48}$$

olduğu görülür. Bu da gösterir ki (4.40) eşitliği de sağlanır.

(ii) Lemma 4.7. den $(P_2 + Q_2) Q_4 = 0$ ve dolayısıyla Lemma 4.2. a göre

$$(P+Q)^D = \begin{pmatrix} P_1 + Q_1 & 0 \\ Q_4 & P_2 + Q_2 \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} (P_1 + Q_1)^D & 0 \\ Q_4[(P_1 + Q_1)^D]^2 & (P_2 + Q_2)^D \end{pmatrix} \tag{4.49}$$

elde edilir. Bu durumda Lemma 4.6. den

$$P^D(I+P^DQ)^D=\begin{pmatrix}P_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_1+P_1^{-1}Q_1 & 0\\ 0 & I_2\end{pmatrix}^D$$

$$=\begin{pmatrix}P_1^{-1}(I_1+P_1^{-1}Q_1)^D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(P_1+Q_1)^D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{4.50}$$

ve dolayısıyla da

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ Q_4[(P_1+Q_1)^D]^2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1 & 0\\ Q_4 & Q_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}[(P_1+Q_1)^D]^2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=P^\pi Q[P^D(I+P^DQ)^D]^2 \tag{4.51}$$

elde edilir. Öte yandan (4.33) ifadesinden

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & (P_2+Q_2)^D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \sum_{i=0}^{s-1}(Q_2^D)^{i+1}(-P_2)^i+Q_2^\pi P_2\sum_{i=0}^{s-2}(-1)^i(i+1)Q_2^D)^{i+2}P_2^i\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i=0}^{s-1}(Q_2^D)^{i+1}(-P)^iP^\pi+Q^\pi P\sum_{i=0}^{s-2}(-1)^i(i+1)Q^D)^{i+2}P^i\,P^\pi \tag{4.52}$$

elde edilir. Böylece, (4.50), (4.51) ve (4.52) ifadeleri (4.49) ifadesinde yerine yazılırsa (4.43) eşitliğinin sağlandığı görülür.

Şimdi $PQ=QP$ eşitliğinin $P^2Q=PQP$ ve $Q^2P=QPQ$ eşitliklerini sağladığını belirtelim. Bu durumda aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 4.2. $PQ=QP$ ve $Ind(P)=s$ olmak üzere $P,Q\in\mathbb{C}^{nxn}$ ise

$$(P+Q)^D=(I+P^DQ)^DP^D+P^\pi\sum_{i=0}^{s-1}(Q^D)^{i+1}(-P)^i \tag{4.53}$$

dir.

İspat: (4.50) bağıntısı ve Lemma 4.6. göz önüne alınırsa,

$$(I+P^DQ)^DP^D=P^D(I+P^DQ)^D \tag{4.54}$$

eşitliği yazılabilir.

Bazı k lar için $P^kQ=0$ olduğundan $P^DQ=0$ olacaktır. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.3. $Ind(P)=s\geq 1$ ve $Ind(Q)=t$ olmak üzere $P,Q\in\mathbb{C}^{nxn}$ olsun.

$P^2Q = PQP$ ve $Q^2P = QPQ$ olduğunu varsayalım. Eğer $P^kQ = 0$ ve $Q^hP = 0$ olacak şekilde iki k ve h pozitif tamsayıları mevcut ise, bu takdirde

$$(P+Q)^D = P^D + Q^D + Q(P^D)^2 \tag{4.55}$$

olacaktır.

Son olarak yukarıda verdiğimiz sonuçlarımızı açıklamak için bir örnek ele alalım.

Örnek 4.2. Aşağıda verilen P ve Q matrislerini göz önüne alalım:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{4.56}$$

Bu durumda $P^2Q = PQP$ ve $Q^2P = QPQ$ olduğu halde $PQ \neq QP$ olduğunu belirtelim. Öte yandan $s = Ind(P) = 2$ olduğu açıktır. Böylece

$$P^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{4.57}$$

olup (4.43) bağıntısına göre

$$(P+Q)^D - P^D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{4.58}$$

elde edilir.

4.5. İki Matrisin Farkının Drazin İnversinin Gösterimi

Lemma 4.8. $P, Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Ayrıca $P^3Q = QP$ olduğunu ve i nin herhangi bir pozitif tamsayı olduğunu varsayalım. Bu takdirde

(i) $QP^i = P^{3i}Q$ ve $Q^iP = P^{3^i}Q^i$,

(ii) Eğer $Q^3P = PQ$ ise bu durumda,

$$PQ = P^{26i}(PQ)Q^{2i} \tag{4.59}$$

olacaktır.

İspat: Tümevarımdan (i) nin sağlandığı kolayca elde edilir. Hipotezden

$$PQ = Q^3P = P^{27}Q^3 = P^{26}(PQ)Q^2 = P^{26i}(PQ)Q^{2i}$$

dir.

Lemma 4.9. $P, Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. $P^3Q = QP$ ve $Q^3P = PQ$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde,

(i) PQ ve QP grup tersinirdir.

(ii) Eğer Q nilpotent matris ise bu takdirde, $PQ = QP = 0$ ve $P^DQ = QP^D = 0$ dır. Ayrıca eğer P nonsingüler bir matris ise, bu takdirde $Q = 0$ dır.

İspat: **(i)** $PQ = Q^2QP = Q^2P^2PQ = QP^5(PQ)^2$ olduğundan $r(PQ) = r(PQ)^2$ olacaktır ve dolayısıyla PQ matrisi grup tersinirdir. Benzer şekilde, QP de grup tersinirdir.

(ii) t, $Q^t = 0$ olacak şekilde bir tamsayı olsun. Bu takdirde (4.59) ifadesine göre

$$PQ = P^{26t}(PQ)Q^{2t} = 0$$

dır. Benzer şekilde, $QP = 0$ dır. Ayrıca $P^DQ = (P^D)^2PQ = 0$ dır. Benzer şekilde $QP^D = 0$ dır. Eğer P nonsingüler ise, bu takdirde $Q = 0$ olduğu açıktır.

Lemma 4.10. $P, Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. $P^3Q = QP$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde,

(i) P veya Q matrislerinden birisi nilpotent ise, bu takdirde PQ, QP ve PQP matris çarpımları da nilpotenttir.

(ii) P ve Q matrislerinin her ikisi de nilpotent ise, bu takdirde $P + Q$ toplamı da nilpotenttir. Ayrıca eğer $Q^3P = PQ$ ise bu takdirde,

$$(P + Q)^k = P^k + Q^k \tag{4.60}$$

olacaktır.

İspat: **(i)** P veya Q dan birisi nilpotent matris olsun. Bu takdirde $P^t = 0$ ya da $Q^t = 0$ olacak şekilde en az bir pozitif t tamsayısı vardır. $P^3Q = QP$ eşitliği sağlandığından ve $3^t - 1 \geq 2t$ oduğundan $(PQ)^t = P^{(3^t-1)/2}Q^t = 0$ dır ve bu nedenle de$(QP)^{t+1} = Q(PQ)^t P = 0$dır. $(PQ)P = P^3(QP)$ ve QP matrisi nilpotent olduğundan yukarıdaki açıklamadan PQP çarpımı da nilpotenttir.

(ii) İlk önce k üzerinden tümevarım alarak $k > 1$ ve k bir pozitif tamsayı olmak üzere $(P+Q)^k$ nın genişletilmiş formunu doğrulayalım. Yani j, h negatif olmayan tamsayıları ve $c_{j,h}$ skaları için $f_{k,i} = \sum c_{j,h} P^i Q^h$ olmak üzere,

$$(P+Q)^k = \prod_{i=0}^{k} P^{k-i} Q^i f_{k,i} \tag{4.61}$$

yazılabildiğini gösterelim. $(P+Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2 = P^2(PQ+I) + PQ + Q^2$ olduğu açıktır. (4.61) bağıntısının k için sağlandığını varsayalım. Bu takdirde,

$$P\left(P^{k-i} Q^i f_{k,i}\right) = P^{k+1-i} Q^i f_{k,i} \, ,$$

$$Q\left(P^{k-i} Q^i f_{k,i}\right) = P^{3k-3i} Q^{i+1} f_{k,i} = P^{(k+1)+(2k-3i-1)} Q^{i+1} f_{k,i}$$

$$= \begin{cases} P^{k+1} g, & k \geq \frac{3i+1}{2} \text{ ise, burada } g = (P^{2k-3i-1} Q^{i+1}) f_{k,i} \\ P^{k+1-(3i-2k+1)} Q^{3i-2k+1} g, & k < \frac{3i+1}{2} \text{ ise, burada } g = Q^{2k-2i} f_{k,i} \end{cases}$$

yazılabilir. Bu nedenle indiksiyon varsayımı ve yukarıdaki eşitlikler göz önüne alınırsa $k+1$ için

$$(P+Q)^{k+1} = P(P+Q)^k + Q(P+Q)^k = \prod_{i=0}^{k+1} P^{k+1-i} Q^i f_{k+1,i}$$

olduğu görülür. Bu nedenle herangi bir pozitif k tamsayısı için (4.61) eşitliği sağlanır.

s, $P^s = 0$ ve $Q^s = 0$ olacak şekilde bir pozitif tamsayı olsun. Bu durumda $k \geq 2s$ olacak şekilde bir k tamsayısı alalım. Böylece $i(\leq k)$ negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $max\{k-1, i\} \geq s$ olacaktır. Bu nedenle (4.61) ifadesinin sağ tarafı sıfır olur yani $P+Q$ toplamı nilpotenttir.

Şimdi de (4.60) nin sağlandığını gösterelim. Lemma 4.9 ye göre $PQ = QP = 0$ olacaktır ve dolayısıyla (4.60) bağıntısı (4.61) eşitliğinden kolayca elde edilir.

Lemma 4.11. $A, B, C \in \mathbb{C}^{nxn}$, $s = Ind(A)$ ve $t = Ind(B)$ olmak üzere

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

olsun. Bu takdirde,

$$X = [\sum_{n=0}^{s-1}(B^D)^{n+2}CA^n](I - AA^D) + (I - BB^D)[\sum_{n=0}^{t-1} B^n C(A^D)^{n+2}] - B^D CA^D$$

olmak üzere M^D

$$M^D = \begin{pmatrix} A^D & 0 \\ X & B^D \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Lemma 4.12. $P, Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Eğer $PQ = QP = 0$ ise, bu takdirde

$$(P + Q)^D = P^D + Q^D$$

olacaktır.

Şimdi iki matrisinin toplamının ve farkının Drazin inversinin elde edilmesinde kullanılan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.4. $P, Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Eğer $P^3Q = QP$ ve $Q^3P = PQ$ ise bu takdirde,

$$(P \pm Q)^D = \frac{1}{8}QQ^D(3P^3 \pm 3Q^3 - P \mp Q)PP^D + (I - QQ^D)P^D \pm Q^D(I - PP^D)$$

dir.

İspat: Q yerine $-Q$ yazarak $P + Q$ durumu elde elde edilebildiğinden, teoremin ispatında sadece $P - Q$ durumunu göz önüne alalım.

Eğer $PQ = 0$ ya da $QP = 0$ ise bu takdirde, diğeri de sıfır olacaktır ve dolayısıyla $QP^D = 0$ ve $Q^DP = 0$ elde edilir. Böylece Lemma 4.12 ye göre

$$\frac{1}{8}QQ^D(3P^3 - 3Q^3 - P + Q)PP^D + (I - QQ^D)P^D - Q^D(I - PP^D) = P^D - Q^D$$

$$= (P - Q)^D$$

yazılabilir. Şimdi de $PQ \neq 0$ ve $QP \neq 0$ durumunu göz önüne alalım. P ve Q matrislerini P_{11} ve Q_{11} matrisleri tersinir, P_{22} ve Q_{22} matrisleri ise nilpotent matris omak üzere

$$P = W_1 \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{pmatrix} W_1^{-1}, \qquad Q = W_1 \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix} W_1^{-1}$$

şeklinde yazalım.

$P^3Q = QP$ ve $Q^3P = PQ$ olduğundan $P_{ii}^3Q_{ii} = Q_{ii}P_{ii}$ ve $Q_{ii}^3P_{ii} = P_{ii}Q_{ii}$, $i = 1,2,$ eşitlikleri sağlanır. Bundan dolayı, $PQ \neq 0$ ve $P_{22}Q_{22} = 0$ olduğundan Lemma 4.9

(ii) ye göre Q_{11} matrisi nilpotent değildir. Eğer Q_{11} singüler ise Q_1 tersinir ve Q_2 nilpotent olmak üzere,

$$Q_{11} = W_2 \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} W_2^{-1}$$

olacak şekilde bir W_2 tersinir matrisi vardır.

P_{11} matrisini Q_{11} matrisine benzer şekilde

$$P_{11} = W_2 \begin{pmatrix} P_1 & P_{12} \\ P_{21} & P_2 \end{pmatrix} W_2^{-1}$$

olarak parçalayalım. Bu durumda yukarıdaki çıkarımdan $P_{11}^3 Q_{11} = Q_{11} P_{11}$ ve $Q_{11}^3 P_{11} = P_{11} Q_{11}$ ve $P_{12} = 0$, $P_{21} = 0$ olduğu ve dolayısıyla P_1 ve P_2 nonsingüler olmak üzere,

$$P_i^3 Q_i = Q_i P_i \text{ ve } Q_i^3 P_i = P_i Q_i \ , \ i = 1,2, \tag{4.62}$$

olduğu elde edilir. Böylece Lemma 4.9 (ii) ye göre $Q_2 = 0$ olacaktır. Dolayısıyla $W = W_1 \begin{pmatrix} W_2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$P = W \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_{22} \end{pmatrix} W^{-1}, \quad Q = W \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{22} \end{pmatrix} W^{-1} \tag{4.63}$$

alınabilir. Bu durumda

$$P - Q = W \begin{pmatrix} P_1 - Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_{22} - Q_{22} \end{pmatrix} W^{-1} \tag{4.64}$$

yazılabilir. Eğer Q_{11} matrisi nonsingüler ise bu takdirde,

$$(P - Q)^D = W_1 \begin{pmatrix} (P_{11} - Q_{11})^D & 0 \\ 0 & (P_{22} - Q_{22})^D \end{pmatrix} W_1^{-1} \tag{4.65}$$

olur. Bu nedenle, basitlik olması bakımından, 2.satır ve sütun bloklarını yok sayarak (4.65) ifadesi (4.64) ün özel bir durumu olarak düşünülebilir. Bu takdirde,

$$(P - Q)^D = W \begin{pmatrix} (P_1 - Q_1)^D & 0 & 0 \\ 0 & P_2^D & 0 \\ 0 & 0 & (P_{22} - Q_{22})^D \end{pmatrix} W^{-1}$$

elde edilir. P_{22} matrisi nilpotent olduğundan Lemma 4.9. (ii) ye göre $P_{22}Q_{22} = 0 = Q_{22}P_{22}$ ve dolayısıyla Lemma 4.12. ye göre $(P_{22} - Q_{22})^D = P_{22}^D - Q_{22}^D = -Q_{22}^D$ eşitlikleri elde edilir.

Şimdi de $(P_1 - Q_1)^D$ ifadesini göz önüne alalım. (4.62) e göre $P_1Q_1 = Q_1^2P_1^2(P_1Q_1)$ dir. Böylece P_1 ve Q_1 matrislerinin nonsingülerliğinden $Q_1^2P_1^2 = I$ olduğu görülür. Dolayısıyla (4.62) eşitliğinden $Q_1 = P_1Q_1P_1 = P_1^4Q_1$ ve buradan da $P_1^4 = I$ elde edilir. Buradan $Q_1^2 = P_1^2$ olup $Q_1^4 = I,\ P_1^2Q_1 = Q_1^3 = Q_1P_1^2,\ Q_1^2P_1 = P_1^3 = P_1Q_1^2$ ve $P_1 = Q_1P_1Q_1$ eşitlikleri sağlanmış olur. Böylece

$$(P_1 - Q_1)^2 = P_1^2 - P_1Q_1 - Q_1P_1 + Q_1^2\ ,$$

$$\begin{aligned}(P_1 - Q_1)^3 &= P_1^3 - P_1Q_1P_1 - Q_1P_1^2 + Q_1^2P_1 - P_1^2Q_1 + P_1Q_1^2 + Q_1P_1Q_1 - Q_1^3\\ &= 3P_1^3 - 3Q_1^3 + P_1 - Q_1\ ,\end{aligned}$$

$$(P_1 - Q_1)^4 = (P_1 - Q_1)^3(P_1 - Q_1) = 6I - 3P_1Q_1 - 3Q_1P_1 + (P_1 - Q_1)^2\ ,$$

$$(P_1 - Q_1)^5 = (P_1 - Q_1)^4(P_1 - Q_1) = 2(P_1 - Q_1)^3 + 8(P_1 - Q_1)\ , \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned}(P_1 - Q_1)^7 &= [2(P_1 - Q_1)^3 + 8(P_1 - Q_1)](P_1 - Q_1)^2\\ &= 2(P_1 - Q_1)^5 + 8(P_1 - Q_1)^3\end{aligned} \tag{4.67}$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi X matrisini

$$X := \frac{1}{8}(P_1 - Q_1)^3 - \frac{1}{4}(P_1 - Q_1) = \frac{3}{8}P_1^3 - \frac{3}{8}Q_1^3 - \frac{1}{8}P_1 + \frac{1}{8}Q_1$$

olarak alalım. Bu durumda $X(P_{1-}Q_1) = (P_{1-}Q_1)X$ olduğu açıkça görülür. Öte yandan (4.66) eşitliğine göre

$$\begin{aligned}X(P_{1-}Q_1)X &= \left[\frac{1}{8}(P_1 - Q_1)^5 - \frac{1}{4}(P_1 - Q_1)^3\right]\left[\frac{1}{8}(P_1 - Q_1)^2 - \frac{1}{4}I\right]\\ &= (P_1 - Q_1)\left[\frac{1}{8}(P_1 - Q_1)^2 - \frac{1}{4}I\right] = X\end{aligned}$$

ve (4.67) eşitliğine göre de

$$\begin{aligned}(P_1 - Q_1)^6X &= (P_1 - Q_1)^6\left[\frac{1}{8}(P_1 - Q_1)^3 - \frac{1}{4}(P_1 - Q_1\right]\\ &= (P_1 - Q_1)^2\left[\frac{1}{8}(P_1 - Q_1)^7 - \frac{1}{4}(P_1 - Q_1)^5\right]\\ &= (P_1 - Q_1)^2(P_1 - Q_1)^3 = (P_1 - Q_1)^5\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan X matrisi $(P_1 - Q_1)$ matrisinin Drazin inversi olup

$$(P_1 - Q_1)^D = \frac{1}{8}(P_1 - Q_1)^3 - \frac{1}{4}(P_1 - Q_1) = \frac{3}{8}P_1^3 - \frac{3}{8}Q_1^3 - \frac{1}{8}P_1 + \frac{1}{8}Q_1 \tag{4.68}$$

dır. Bunun sonucu olarak

$$(P - Q)^D = W\begin{pmatrix} \frac{1}{8}(3P_1^3 - 3Q_1^3 - P_1 + Q_1) & 0 & 0 \\ 0 & P_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -{Q_{22}}^D \end{pmatrix} \tag{4.69}$$

eşitliği yazılabilir. Öte yandan

$$QQ^D = W\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{22}Q_{22}^D \end{pmatrix}W^{-1} \quad \text{ve} \quad PP^D = W\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}W^{-1} \tag{4.70}$$

eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$\frac{3}{8}QQ^D(3P^3 - Q^3 - P + Q)PP^D + (I - QQ^D)P^D - Q^D(I - PP^D)$$

$$= W\begin{pmatrix} \frac{1}{8}(3P_1^3 - 3Q_1^3 - P_1 + Q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}W^{-1} + W\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}W^{-1}$$

$$+W\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q_{22}^D \end{pmatrix}W^{-1} = (P - Q)^D$$

elde edilir.

Şimdi $PQP = 0$ ve $PQ^2 = 0$ şartları altında $P + Q$ toplamının Drazin inversi için bazı alternatif formüller vereceğiz.

Teorem 4.5. $P, Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisleri $Ind(P) = r,\ Ind(Q) = s,\ PQP = 0$ ve $PQ^2 = 0$ olacak şekilde verilsin. Bu takdirde, $(P + Q)^D$ Drazin inversi

$$(P + Q)^D = Q^\pi \sum_{i=0}^{s-1} Q^i(P^D)^{i+1} + \sum_{i=0}^{r-1}(Q^D)^{i+1} P^i P^\pi + Q^\pi \sum_{i=0}^{s-1} Q^i(P^D)^{i+2}Q$$

$$+\sum_{i=0}^{r-2}(Q^D)^{i+3}P^{i+1}P^\pi Q - Q^D P^D Q - (Q^D)^2 PP^D Q$$

şeklindedir.

İspat: $(AB)^D = A((BA)^2)^D B$ eşitliğini kullanarak

$$(P+Q)^D = \left((\mathrm{Q} \quad \mathrm{I}) \begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix} \right)^D = (\mathrm{I} \quad \mathrm{Q}) \left(\begin{pmatrix} \mathrm{P} & \mathrm{PQ} \\ \mathrm{I} & \mathrm{Q} \end{pmatrix}^2 \right)^{\mathrm{D}} \begin{pmatrix} \mathrm{P} \\ \mathrm{I} \end{pmatrix}$$

$$= (\mathrm{I} \quad \mathrm{Q}) \begin{pmatrix} \mathrm{P}^2 + \mathrm{PQ} & \mathrm{P}^2\mathrm{Q} + \mathrm{PQ}^2 \\ \mathrm{P} + \mathrm{Q} & \mathrm{PQ} + \mathrm{Q}^2 \end{pmatrix}^{\mathrm{D}} \begin{pmatrix} \mathrm{P} \\ \mathrm{I} \end{pmatrix} \tag{4.71}$$

yazılabilir. $PQP = 0$ ve $PQ^2 = 0$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} \mathrm{P}^2 + \mathrm{PQ} & \mathrm{P}^2\mathrm{Q} + \mathrm{PQ}^2 \\ \mathrm{P} + \mathrm{Q} & \mathrm{PQ} + \mathrm{Q}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}^2 + \mathrm{PQ} & \mathrm{P}^2\mathrm{Q} \\ \mathrm{P} + \mathrm{Q} & \mathrm{PQ} + \mathrm{Q}^2 \end{pmatrix} \coloneqq \mathrm{M}$$

dir. Şimdi M^{D} yi hesaplayalım. Bunun için M matrisinin

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{PQ} & \mathrm{P}^2\mathrm{Q} \\ 0 & \mathrm{PQ} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{P}^2 & 0 \\ \mathrm{P} + \mathrm{Q} & \mathrm{Q}^2 \end{pmatrix} \coloneqq \mathrm{G} + \mathrm{F}$$

şeklinde bir parçalanışını göz önüne alalım. $PQP = 0$ ve $PQ^2 = 0$ şartlarından $GF = 0$ ve $G^2 = 0$ olduğu görülür. Bu durumda

$$X = \sum_{i=0}^{\lfloor (r-1)/2 \rfloor} (Q^D)^{2i+4} (P+Q) P^{2i} P^{\pi} + \sum_{i=0}^{\lfloor (s-1)/2 \rfloor} Q^{\pi} Q^{2i} (P+Q) (P^D)^{2i+4}$$

$$-(Q^D)^2 (P+Q)(P^D)^2$$

olmak üzere,

$$M^D = (G+F)^D = F^D + (F^D)^2 G, \tag{4.72}$$

$$F^D = \begin{pmatrix} (\mathrm{P}^{\mathrm{D}})^2 & 0 \\ \mathrm{X} & (\mathrm{Q}^{\mathrm{D}})^2 \end{pmatrix}, \tag{4.73}$$

yazılabilir. Eğer (4.73) ifadesi (4.72) de yerine yazılırsa,

$$M^D = \begin{pmatrix} (P^D)^2 + (P^D)^3 Q & (P^D)^2 Q \\ X + XP^D Q + (Q^D)^2 XPQ & (Q^D)^2 + XPP^D Q + (Q^D)^2 XP^2 Q + (Q^D)^4 PQ \end{pmatrix}$$

(4.74)

elde edilir. Benzer şekilde (4.74) ifadesi (4.72) eşitliğinde yerine yazılırsa teoremin ifadesi kolaylıkla doğrulanır. Bunun sonucu olarak, Teorem 4.5 in bir simetrik formunu aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Teorem 4.6. $P, Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisleri $Ind(P) = r,\ Ind(Q) = s, QPQ = 0$ ve

$PQ^2 = 0$ olacak şekilde verilmiş olsun. Bu takdirde,

$$(P+Q)^D = Q^\pi \sum_{i=0}^{s-1} Q^i (P^D)^{i+1} + \sum_{i=0}^{r-1} (Q^D)^{i+1} P^i P^\pi + P \sum_{i=0}^{r-1} (Q^D)^{i+2} P^i P^\pi$$

$$+P \sum_{i=0}^{r-2} Q^\pi Q^{i+1} (P^D)^{i+3} - PQ^D P^D - PQQ^D (P^D)^2$$

dir.

4.6. İki Matrisin Toplamının Drazin İnversine Ait Bazı Formüller

Bu kısımda öncelikle kullanacağımız bazı yararlı Lemmaları ispatsız olarak verelim.

Lemma 4.13. $A \in \mathbb{C}^{mxn}$, $B \in \mathbb{C}^{nxm}$ olsun. Bu takdirde, $(AB)^D = A((BA)^D)^2 B$ dir.

Lemma 4.14. A ve C kare matrisler olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{nxn}$, $k = Ind(A)$ ve $j = Ind(C)$ olsun. Bu takdirde

$$X = \sum_{i=0}^{j-1} (A^D)^{i+2} B C^i C^\pi + A^\pi \sum_{i=0}^{k-1} A^i B (C^D)^{i+2} - A^D B\, C^D$$

olmak üzere M^D

$$M^D = \begin{pmatrix} A^D & X \\ 0 & C^D \end{pmatrix},$$

şeklindedir.

Lemma 4.15. $P, Q \in \mathbb{C}^{nxn}$; $Ind(P) = r$, $Ind(Q) = s$ indeksli matrisler olsun.

$$Y_1 = \sum_{i=0}^{s-1} Q^\pi Q^i (P^D)^{i+1}, \quad Y_2 = \sum_{i=0}^{r-1} (Q^D)^{i+1} P^i P^\pi \tag{4.75}$$

olsun. Eğer $PQP^2 = 0$, $PQPQ = 0$, $PQ^2P = 0$ ve $PQ^3 = 0$ ise, bu takdirde

$$(P+Q)^D = Y_1 + Y_2 + \left(Y_1 (P^D)^2 + (Q^D)^2 Y_2 - \sum_{i=1}^{2} (Q^D)^i (P^D)^{3-i}\right) PQ$$

$$+\left(Y_1 (P^D)^3 + (Q^D)^3 Y_2 - \sum_{i=1}^{3} (Q^D)^i (P^D)^{4-i}\right)(PQP + PQ^2)$$

dir.

Lemma 4.16. $P, Q \in \mathbb{C}^{nxn}$; $Ind(P) = r$, $Ind(Q) = s$ indeksli matrisler olsun. Y_1 ve Y_2 (4.75) de tanımlandığı gibi olmak üzere, eğer $QPQ = 0$ ve $P^2Q = 0$ ise, bu takdirde

$(P+Q)^D = Y_1 + Y_2 + PQ\left(Y_1(P^D)^2 + (Q^D)^2 Y_2 - \sum_{i=1}^{2}(Q^D)^i (P^D)^{3-i}\right)$

şeklindedir.

Lemma 4.17. A ve D kare matrisler olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Eğer $S = D - CA^D B = 0$, $A^\pi B = 0$ ve $CA^\pi = 0$ ise, bu takdirde $W = AA^D + A^D BCA^D$ olmak üzere,

$$M^D = \begin{pmatrix} I \\ CA^D \end{pmatrix} ((AW)^D)^2 A (I \quad A^D B),$$

olacaktır.

Teorem 4.7. S_i matrisi $S_i = (P+Q)^i$ formunda bir matris ve $P, Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Eğer $S_{2i-1}PS_{2i-1}P = 0$, $S_{2i-1}PS_{2i-1}QS_{2(i-1)} = 0$ ve $QS_{2(i-1)}PQS_{2(i-1)}Q^2 = 0$ ise, bu takdirde

$$(P+Q)^D = S_{2i+1}\left((S_1 Q S_{2(i-1)})^D\right)^3 S_{2(2i-1)}$$

şeklindedir, burada

$$\begin{aligned}\left((S_1 Q S_{2(i-1)})^D\right)^3 = {} & Y_1\left((PQS_{2(i-1)})^D\right)^2 + \left((Q^2 S_{2(i-1)})^D\right)^2 Y_2 \\ & - \sum_{j=1}^{2}\left((Q^2 S_{2(i-1)})^D\right)^j \left((PQS_{2(i-1)})^D\right)^{3-j} + PQS_{2(i-1)}Q^2 S_{2(i-1)} \\ & \times \left(Y_1\left(\left(PQS_{2(i-1)}\right)^D\right)^4 + \left(\left(Q^2 S_{2(i-1)}\right)^D\right)^4 Y_2\right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^{4}\left((Q^2 S_{2(i-1)})^D\right)^j \left((PQS_{2(i-1)})^D\right)^{5-j}\right)\end{aligned}$$

ve

$$Y_1 = \sum_{j=0}^{t-1}\left(Q^2 S_{2(i-1)}\right)^\pi \left(Q^2 S_{2(i-1)}\right)^j \left((PQS_{2(i-1)})^D\right)^{j+1},$$

$$Y_2 = \sum_{j=0}^{t-1}\left((Q^2 S_{2(i-1)})^D\right)^{j+1}\left(PQS_{2(i-1)}\right)^j \left(PQS_{2(i-1)}\right)^\pi, \tag{4.76}$$

$$t = \max\left\{Ind\left(PQS_{2(i-1)}\right), Ind\left(Q^2 S_{2(i-1)}\right)\right\}$$

dir.

İspat: Lemma 4.13 uygulanarak

$$(P+Q)^D = (P \quad I)\left(\begin{pmatrix} P & I \\ QP & Q \end{pmatrix}^D\right)^2 \begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix} = (P \quad I)\begin{pmatrix} S_1P & S_1 \\ QS_1P & QS_1 \end{pmatrix}^D \begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix}$$

$$= (P \quad I)\begin{pmatrix} S_1P & I \\ QS_1P & Q \end{pmatrix}(M^2)^D \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & S_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ Q \end{pmatrix} = (S_2P \quad S_1)(M^i)^D M^{i-2}\begin{pmatrix} I \\ S_1Q \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

elde edilir. Şimdi

$$M = \begin{pmatrix} S_1P & I \\ S_1QS_1P & S_1Q \end{pmatrix}$$

alalım. Bu durumda S_i yukarıda tanımlandığı gibi olmak üzere

$$M^i = \begin{pmatrix} S_{2i-1}P & S_{2(i-1)} \\ S_1QS_{2i-1}P & S_1QS_{2(i-1)} \end{pmatrix}, \quad (4.78)$$

yazılabilir. M^i matrisini

$$F = \begin{pmatrix} S_{2i-1}P & S_{2(i-1)} \\ 0 & S_1QS_{2(i-1)} \end{pmatrix} \text{ ve } G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S_1QS_{2i-1}P & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $M^i = F + G$ şeklinde parçalayalım. Bu durumda $G^2 = 0$ ve $G^D = 0$ olduğu kolayca görülür. $S_{2i-1}PS_{2i-1}P = 0$ ve $S_{2i-1}PS_{2i-1}QS_{2(i-1)} = 0$ olduğundan, $FGFG = 0$, $FGF^2 = 0$ ve dolayısıyla,

$$(M^i)^D = F^D + G(F^D)^2 + (F^D)^2G + G(F^D)^3G + (F^D)^3GF + G(F^D)^3GF \quad (4.79)$$

olduğu görülür. Buradan

$$F^D = \begin{pmatrix} (S_{2i-1}P)^D & \Sigma \\ 0 & (S_1QS_{2(i-1)})^D \end{pmatrix}$$

yazılabilir. $S_{2i-1}PS_{2i-1}P = 0$ ve $S_{2i-1}PS_{2i-1}QS_{2(i-1)} = 0$ olduğundan

$(S_{2i-1}P)^D = 0$ ve $\Sigma = S_{2(i-1)}\,(S_1QS_{2(i-1)})^{2D}$ olacaktır. Gerekli hesaplamalar yapılırsa $k \geq 1$ için

$$(F^D)^k = \begin{pmatrix} 0 & S_{2(i-1)}\left((S_1QS_{2(i-1)})^D\right)^{k+1} \\ 0 & \left((S_1QS_{2(i-1)})^D\right)^k \end{pmatrix}, \quad (4.80)$$

elde edilir. $R = PQS_{2(i-1)}$ ve $T = Q^2S_{2(i-1)}$ olmak üzere $S_1QS_{2(i-1)} = R + T$ alalım. Bu durumda $QS_{2(i-1)}PQS_{2(i-1)}Q^2 = 0$ olduğundan $TRT = 0$, $R^2T = 0$ elde edilir. Böylece Y_1 ve Y_2 yukarıda tanımlandığı gibi olmak üzere

$$(S_1QS_{2(i-1)})^D = Y_1 + Y_2 + \left(PQS_{2(i-1)}Q^2S_{2(i-1)}\right)$$

$$\times\left(Y_1\left(\left(PQS_{2(i-1)}\right)^D\right)^2 + \left(\left(Q^2S_{2(i-1)}\right)^D\right)^2 Y_2\right.$$

$$\left.-\textstyle\sum_{j=1}^{2}\left((Q^2S_{2(i-1)})^D\right)^j\left((PQS_{2(i-1)})^D\right)^{3-j}\right),$$

elde edilir. Buradan da $k \geq 1$ olmak üzere

$$\left((S_1QS_{2(i-1)})^D\right)^k = Y_1\left(\left(PQS_{2(i-1)}\right)^D\right)^{k-1} + \left(\left(Q^2S_{2(i-1)}\right)^D\right)^{k-1} Y_2$$

$$-\textstyle\sum_{j=1}^{k-1}\left((Q^2S_{2(i-1)})^D\right)^j\left((PQS_{2(i-1)})^D\right)^{k-j}\Big) + PQS_{2(i-1)}Q^2S_{2(i-1)}$$

$$\times\left(Y_1\left(\left(PQS_{2(i-1)}\right)^D\right)^{k+1} + \left(\left(Q^2S_{2(i-1)}\right)^D\right)^{k+1} Y_2\right.$$

$$\left.-\textstyle\sum_{j=1}^{k+1}\left((Q^2S_{2(i-1)})^D\right)^j\left((PQS_{2(i-1)})^D\right)^{k+2-j}\right) \tag{4.81}$$

yazılabilir.(4.80) ve (4.81) ifadelerini (4.79) de yerine yazarsak ve daha sonara da (4.79) ve (4.78) ifadelerini (4.77) de yerine yazarsak Teorem (4.6) daki sonucu elde ederiz.

Teorem (4.7) in bir sonucu olarak $i = 1$ için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.4. $P, Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Eğer

$(P+Q)P(P+Q)P = 0$, $(P+Q)P(P+Q)Q = 0$ ve $QPQ^3 = 0$ ise, bu takdirde

$$(P+Q)^D = (P+Q)^3(((P+Q)Q)^D)^3(P+Q)^2$$

olacaktır. Burada

$$(((P+Q)Q)^D)^3 = Y_1((PQ)^D)^2 + (Q^D)^4Y_2 - \textstyle\sum_{i=1}^{2}(Q^D)^{2i}((PQ)^D)^{3-i}$$

$$+PQ^3\left(Y_1((PQ)^D)^4 + (Q^D)^8Y_2 - \textstyle\sum_{i=1}^{4}(Q^D)^{2i}((PQ)^D)^{5-i}\right)$$

ve

$Y_1 = \sum_{i=0}^{t-1}(Q^2)^{\pi}(Q)^{2i}((PQ)^D)^{i+1}$,

$Y_2 = \sum_{i=0}^{t-1}(Q^D)^{2(i+1)}(PQ)^i\,(PQ)^{\pi}$

$t = \max\{Ind(PQ), Ind(Q^2)\}$

dir.

$i = 2$ olması durumunda aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.5. $P, Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Eğer $(P+Q)^3P(P+Q)^3P = 0$, $(P+Q)^3P(P+Q)^3Q(P+Q)^2 = 0$ ve $Q(P+Q)^2PQ(P+Q)^2Q^2 = 0$ eşitlikleri sağlanırsa, bu takdirde

$$(P+Q)^D = (P+Q)^5\left(\left((P+Q)Q(P+Q)^2\right)^D\right)^3(P+Q)^6$$

olacaktır. Burada

$$\begin{aligned}\left(\left((P+Q)Q(P+Q)^2\right)^D\right)^3 &= Y_1((PQ(P+Q)^2)^D)^2 + ((Q^2(P+Q)^2)^D)^2Y_2\\ &\quad -\sum_{i=1}^{2}((Q^2(P+Q)^2)^D)^i\,((PQ(P+Q)^2)^D)^{3-i}\\ &\quad +PQ(P+Q)^2Q^2(P+Q)^2\\ &\quad \times (Y_1((PQ(P+Q)^2)^D)^4 + ((Q^2(P+Q)^2)^D)^4)Y_2\\ &\quad -\sum_{i=1}^{4}((Q^2(P+Q)^2)^D)^i((PQ(P+Q)^2)^D)^{5-i}),\end{aligned}$$

ve

$Y_1 = \sum_{i=0}^{t-1}(Q^2(P+Q)^2)^{\pi}(Q^2(P+Q)^2)^i((PQ(P+Q)^2)^D)^{i+1}$,

$Y_2 = \sum_{i=0}^{t-1}((Q^2(P+Q)^2)^D)^{i+1}(PQ(P+Q)^2)^i\,(PQ(P+Q)^2)^{\pi}$

$t = max\{Ind(PQ(P+Q)^2), Ind(Q^2(P+Q)^2)\}$

dir.

Yorum 4.1. $P, Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ için $P^2 = 0$, $QPQ^2 = 0$ ve $PQPQ = 0$ olması durumunda

$$(P+Q)^D = Q^D + (Q^D)^2P + (Q^D)^3PQ + (Q^D)^4PQP + P(Q^D)^2 + P(Q^D)^3P$$
$$+P(Q^D)^4PQ + P(Q^D)^5PQP$$

olacaktır.

$P^2 = 0$, $QPQ^2 = 0$ ve $PQPQ = 0$ şartları altında $(P+Q)^D$ nin gösterimini açıklamak için aşağıdaki örneği gözönüne alalım.

Örnek 4.3. $P, Q \in \mathbb{C}^{4x4}$ matrislerini aşağıdaki şekilde alalım.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Buradan Q^D matrisini

$$Q^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde ederiz. Bu durumda $P^2 = 0$, $QPQ^2 = 0$, $QPQ \neq 0$ ve $PQP \neq 0$ olduğu kolayca görülür. $P^2 = 0$, $QPQ^2 = 0$ ve $PQPQ = 0$ olduğundan sonuç 4.5. i uygulayarak

$$(P+Q)^D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak bulunmuş olur.

4.7. $2x2$ Tipindeki Bazı Blok Matrislerin Drazin İnversi İçin Bazı Formüller

Bu kısımda genelleştirilmiş Schur komplementi sıfır olan blok matrislerin bir sınıfını, yani

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{nxn}, \; A \in \mathbb{C}^{rxr}, D = CA^DB \tag{4.82}$$

biçimindeki matrisleri gözönüne alacağız. Bu durumda $AA^{\pi}BCA = 0$, $CA^{\pi}BCA = 0$ ve $BCA^{\pi}BC = 0$ koşulları altında M^D için bazı ifadeler elde edeceğiz.

Teorem 4.8. M matrisi (4.82) biçiminde tanımlanmış bir 2x2 lik blok matris olsun. Eğer $AA^{\pi}BCA = 0$, $CA^{\pi}BCA = 0$ ve $BCA^{\pi}BC = 0$ ise, bu takdirde M^D Drazin inversi

$$M^D = \left(I + \begin{pmatrix} 0 & A^{\pi}B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E\right) E \left(I + \sum_{i=0}^{k-1} E^{i+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ CA^iA^{\pi} & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$+ \left(I + \begin{pmatrix} 0 & A^{\pi}B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E\right) E^2 \left(\begin{pmatrix} 0 & A^{\pi}B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{k-1} E^{i+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & CA^iA^{\pi}B \end{pmatrix}\right)$$

$$+ \left(I + \begin{pmatrix} 0 & A^{\pi}B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E\right) E^3 \left(\begin{pmatrix} A^{\pi}BC & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{k-1} E^{i+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ CA^iA^{\pi}BC & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$+ \left(I + \begin{pmatrix} 0 & A^{\pi}B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E\right) E^4 \left(\begin{pmatrix} 0 & A^{\pi}BCA^{\pi}B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{k-1} E^{i+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & CA^iA^{\pi}BCA^{\pi}B \end{pmatrix}\right),$$

biçimindedir, burada $Ind(A) = k$ olup $W = AA^D + A^DBCA^D$ ve $i \geq 1$ için

$$E^i = \begin{pmatrix} I \\ CA^D \end{pmatrix} \left((AW)^D\right)^{i+1} A \begin{pmatrix} I & A^DB \end{pmatrix}$$

dir.

İspat: $M = \begin{pmatrix} 0 & A^{\pi}B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & AA^DB \\ C & CA^DB \end{pmatrix} := P + Q$ olarak alalım. Bu durumda $AA^{\pi}BCA = 0$, $CA^{\pi}BCA = 0$ ve $BCA^{\pi}BC = 0$ olduğundan $P^2 = 0$, $QPQ^2 = 0$ ve $PQPQ = 0$ olacaktır. Böylece Sonuç 4.5. i uygulayarak

$$M^D = Q^D + (Q^D)^2P + (Q^D)^3PQ + (Q^D)^4PQP + P(Q^D)^2 + P(Q^D)^3P$$

$$+P(Q^D)^4PQ + P(Q^D)^5PQP$$

elde edilir. Şimdi

$$Q = \begin{pmatrix} AA^{\pi} & 0 \\ CA^{\pi} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^2A^D & AA^DB \\ CAA^D & CA^DB \end{pmatrix} := P_1 + Q_1$$

alalım. Bu durumda $P_1Q_1 = 0$, $P_1^{k+1} = 0$, $k = Ind(A)$ olduğu kolayca görülür. Buradan

$$Q^D = Q_1^D + Q_1^D \sum_{i=0}^{k-1} (Q_1^D)^{i+1} P_1^{i+1}$$

olduğu ve $i \geq 1$ için

$$(Q^D)^s = (Q_1^D)^s + (Q_1^D)^s \sum_{i=0}^{k-1} (Q_1^D)^{i+1} P_1^{i+1}\ ,\ P_1^{i+1} = \begin{pmatrix} A^{i+1}A^\pi & 0 \\ CA^iA^\pi & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu gösterilebilir. Böylece Q_1 için

$$S_1 = CA^DB - CAA^D(A^2A^D)^D AA^DB = 0,\ (A^2A^D)^\pi AA^DB = 0 \text{ ve } CAA^D(A^2A^D)^\pi = 0$$

eşitlikleri elde edilir.

$E = Q_1^D$ olsun. Bu durumda Lemma 4.17 ten $W = AA^D + A^DBCA^D$ olmak üzere

$$E = \begin{pmatrix} I \\ CA^D \end{pmatrix} [(AW)^D]^2 A(I \quad A^DB),$$

olduğu görülür. Gerekli hesaplamalar yapılırsa $i \geq 1$ için

$$E^i = \begin{pmatrix} I \\ CA^D \end{pmatrix} ((AW)^D)^{i+1} A(I \quad A^DB)$$

elde edilir. Bunu $(Q^D)^s$ için yukarıda verilen ifade de yerine yazarak Teorem 4.8. deki sonuç elde edilir.

Örnek 4.4. Teorem 4.8 yi açıklamak için

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{7x7}$ matrisini gözönüne alalım. Bu takdirde

$Ind(A) = 2$ olup $A^D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ve

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu durumda $A^\pi BC \neq 0$ ve $D = CA^D B$ olduğu açıktır. Ayrıca $AA^\pi BCA = 0$, $CA^\pi BCA = 0$, $BCA^\pi BC = 0$ ve $D = CA^D B$ olduğundan Teorem 4.8. e göre

$$M^D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Şimdi $CA^\pi BC = 0$, $BCA^\pi AB = 0$ ve $BCA^\pi A^2 = 0$ koşulları altında M^D Drazin inversi için bir ifade verelim.

Teorem 4.9. M matrisi (4.82) de tanımlandığı gibi bir blok matris osun. Eğer $CA^\pi BC = 0$, $BCA^\pi AB = 0$ ve $BCA^\pi A^2 = 0$ ise bu takdirde

$$M^D = \left(I + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ CA^\pi & 0 \end{pmatrix} E + \sum_{i=0}^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & A^i A^\pi B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E^{i+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & CA^i A^\pi B \end{pmatrix} E^{i+2} \right) E$$

$$\times \left(I + E \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ CA^\pi & 0 \end{pmatrix} + E^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ CA^\pi A & CA^\pi B \end{pmatrix} \right),$$

olacaktır, burada $Ind(A) = k$ ve $W = AA^D + A^D BCA^D$ olmak üzere

$$E^i = \begin{pmatrix} I \\ CA^D \end{pmatrix} ((AW)^D)^{i+1} A(I \quad A^D B), \quad i \geq 1$$

dir.

İspat: $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ CA^\pi & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ CAA^D & CA^D B \end{pmatrix} \coloneqq P + Q$ alalım. Eğer $CA^\pi BC = 0$, $BCA^\pi AB = 0$ ve $BCA^\pi A^2 = 0$ ise $P^2 = 0$, $QPQ^2 = 0$ ve $PQP = 0$ olacaktır. Bu durumda Sonuç 4.5. uygulanırsa,

$$M^D = Q^D + (Q^D)^2 P + (Q^D)^3 PQ + P(Q^D)^2 + P(Q^D)^3 P + P(Q^D)^4 PQ$$

elde edilir. Şimdi

$$Q = \begin{pmatrix} A^2 A^D & AA^D B \\ CAA^D & CA^D B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} AA^\pi & A^\pi B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} := P_1 + Q_1$$

parçalanışını gözönüne alalım. Bu durumda $P_1 Q_1 = 0$ olup $k = Ind(A)$ olmak üzere $Q_1^{k+1} = 0$ dır. Böylece

$$Q^D = P_1^D + \sum_{i=0}^{k-1} Q_1^{i+1} (P_1^D)^{i+1} P_1^D$$

ve $i \geq 1$ için

$$(Q^D)^s = (P_1^D)^s + \sum_{i=0}^{k-1} Q_1^{i+1} (P_1^D)^{i+1} (P_1^D)^s, \quad Q_1^{i+1} = \begin{pmatrix} A^{i+1} A^\pi & A^i A^\pi B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. P_1 matrisi için $S_1 = CA^D B - CAA^D (A^2 A^D)^D AA^D B = 0$, $(A^2 A^D)^\pi AA^D B = 0$ ve $CAA^D (A^2 A^D)^\pi = 0$ olacaktır. $E = Q_1^D$ alalım. Bu durumda $W = AA^D + A^D BCA^D$ olmak üzere

$$E = \begin{pmatrix} I \\ CA^D \end{pmatrix} [(AW)^D]^2 A(I \quad A^D B),$$

yazılabilir. Böylece gerekli hesaplamalar yapılırsa $i \geq 1$ için

$$E^i = \begin{pmatrix} I \\ CA^D \end{pmatrix} ((AW)^D)^{i+1} A(I \quad A^D B)$$

elde dilir. Bu ifade yukarıda $(Q^D)^s$ için verilen ifadede yerine yazılırsa ve gerekli hesaplamalar yapılırsa Teorem 4.9. deki sonuç elde edilir.

Örnek 4.5. Teorem 4.9. i açıklamak için

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{7x7}$ matrisini gözönüne alalım. Bu durumda $Ind(A) = 3$ olmak üzere

$$A^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu durumda $CA^\pi BC = 0$ ve $CA^\pi AB \neq 0$. $CA^\pi A^2 \neq 0$ ve $D = CA^D B$ olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla $CA^\pi BC = 0$, $BCA^\pi AB = 0$ $BCA^\pi A^2 = 0$ ve $S = CA^D B$ olduğundan Teorem 4.8. den

$$M^D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Lemma 4.18. $P, Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Eğer $PQ = 0$ ise, $t = \max\{Ind(P), Ind(Q)\}$ olmak üzere

$(P+Q)^D = Q^\pi \sum_{i=0}^{t-1} Q^i (P^D)^{i+1} + \sum_{i=0}^{t-1} (Q^D)^{i+1} P^i P^\pi$

olacaktır.

Lemma 4.19. A ve B kare matrisler, $Ind(A) = r$ ve $Ind(B) = s$ olmak üzere

$$M_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

olsun. Bu takdirde,

$$M_1^D = \begin{pmatrix} A^D & 0 \\ X & B^D \end{pmatrix}, \; M_2^D = \begin{pmatrix} B^D & X \\ 0 & A^D \end{pmatrix}$$

olacaktır, burada $X = \sum_{i=0}^{r-1} (B^D)^{i+2} C A^i A^\pi + \sum_{i=0}^{r-1} B^\pi B^i C (A^D)^{i+2} - B^D C A^D$ dır.

Lemma 4.20. $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{nxn}$ (A ve D kare matrisler) olsun. Eğer

$S = D - CA^D B = 0$, $A^\pi B = 0$ ve $CA^\pi = 0$ ise, bu takdirde $W = AA^D + A^D BCA^D$ olmak üzere

$$M^D = \begin{pmatrix} I \\ CA^D \end{pmatrix} ((AW)^D)^2 A \begin{pmatrix} I & A^D B \end{pmatrix}$$

dir.

Teorem 4.10. $P, Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Eğer $P^2 Q + QPQ = 0$ ve $P^3 Q = 0$ ise, bu takdirde

$$(P+Q)^D = \begin{pmatrix} I & Q \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{t-1} \begin{pmatrix} (PQ)^\pi & PQX_2 + (P^2Q + PQ^2)(PQ)^D \\ 0 & (PQ)^\pi \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} PQ & P^2Q + PQ^2 \\ 0 & PQ \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} (P^D)^2 & X_2 \\ X_1 & (Q^D)^2 \end{pmatrix}^{i+1} \begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} I & Q \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{t-1} \begin{pmatrix} (PQ)^D & X_2 \\ 0 & (PQ)^D \end{pmatrix}^{i+1} \begin{pmatrix} P^2 & 0 \\ P+Q & Q^2 \end{pmatrix}^i$$

$$\times \begin{pmatrix} P^\pi & 0 \\ P^D + Q(P^D)^2 + Q^2 X_1 & Q^\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix}$$

olacaktır, burada $t = \max\{Ind(P^2), Ind(Q^2), Ind(PQ)\}$ olmak üzere

$X_1 = \sum_{i=0}^{t-1}(Q^D)^{2i+4}\,(P+Q)P^{2i}P^{\pi} + \sum_{i=0}^{t-1} Q^{\pi}Q^{2i}\,(P+Q)(P^D)^{2i+4}$

$\quad -(Q^D)^2(P+Q)(P^D)^2$,

$X_2 = \sum_{i=0}^{t-1}((PQ)^D)^{i+2}\,(P^2Q+PQ^2)(PQ)^i(PQ)^{\pi}$

$\quad + \sum_{i=0}^{t-1}(PQ)^{\pi}(PQ)^i(P^2Q+PQ^2)((PQ)^D)^{i+2} - (PQ)^D(P^2Q+PQ^2)(PQ)^D$

dir.

İspat: Lemma 4.13. kullanılarak

$$(P+Q)^D = \left(\begin{pmatrix} I & Q\end{pmatrix}\begin{pmatrix} P \\ I\end{pmatrix}\right)^D = \begin{pmatrix} I & Q\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} P & PQ \\ I & Q\end{pmatrix}^2\right)^D\begin{pmatrix} P \\ I\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & Q\end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^2+PQ & P^2Q+PQ^2 \\ P+Q & Q^2+PQ\end{pmatrix}^D\begin{pmatrix} P \\ I\end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$E = \begin{pmatrix} P^2 & 0 \\ P+Q & Q^2\end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} PQ & P^2Q+PQ^2 \\ 0 & PQ\end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$M = \begin{pmatrix} P^2+PQ & P^2Q+PQ^2 \\ P+Q & Q^2+PQ\end{pmatrix} = E+F\ ,$$

olsun. Buradan $P^2Q + QPQ = 0$ ve $P^3Q = 0$ olduğundan $EF = 0$ olduğu elde edilir. Lemma 4.18. den $t = \max\{Ind(E), Ind(F)\}$ olmak üzere

$$M^D = \sum_{i=0}^{t-1} F^{\pi}F^i(E^D)^{i+1} + \sum_{i=0}^{t-1}(F^D)^{i+1}\,E^iE^{\pi}$$

olduğu görülür. Lemma 4.19 dikkate alınırsa

$$E^D = \begin{pmatrix} (P^D)^2 & 0 \\ X_1 & (Q^D)^2\end{pmatrix},\quad F^D = \begin{pmatrix} (PQ)^D & X_2 \\ 0 & (PQ)^D\end{pmatrix}$$

yazılabilir, burada $t = \max\{Ind(P^2), Ind(Q^2), Ind(PQ)\}$ olmak üzere

$X_1 = \sum_{i=0}^{t-1}(Q^D)^{2i+4}\,(P+Q)P^{2i}P^{\pi} + \sum_{i=0}^{t-1} Q^{\pi}Q^{2i}\,(P+Q)(P^D)^{2i+4}$

$-(Q^D)^2(P+Q)(P^D)^2$,

$X_2 = \sum_{i=0}^{t-1}((PQ)^D)^{i+2}\,(P^2Q+PQ^2)(PQ)^i(PQ)^\pi$

$+\sum_{i=0}^{t-1}(PQ)^\pi(PQ)^i(P^2Q+PQ^2)((PQ)^D)^{i+2} - (PQ)^D(P^2Q+PQ^2)(PQ)^D$

dir. E^D ve F^D ifadeleri $(P+Q)^D$ de yerine yazılarak istenen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 4.11. $P,Q \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Eğer $PQ^2+PQP=0$ ve $PQ^3=0$ ise, bu takdirde

$$(P+Q)^D = (I \quad Q)\sum_{i=0}^{t-1}\begin{pmatrix} P^\pi & 0 \\ P^D+Q(P^D)^2+Q^2X_1 & Q^\pi \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} P^2 & 0 \\ P+Q & Q^2 \end{pmatrix}^i\begin{pmatrix} (PQ)^D & X_2 \\ 0 & (PQ)^D \end{pmatrix}^{i+1}\begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix}$$

$$+(I \quad Q)\sum_{i=0}^{t-1}\begin{pmatrix} (P^D)^2 & 0 \\ X_1 & (Q^D)^2 \end{pmatrix}^{i+1}\begin{pmatrix} PQ & P^2Q+PQ^2 \\ 0 & PQ \end{pmatrix}^i$$

$$\times\begin{pmatrix} (PQ)^\pi & PQX_2+(P^2Q+PQ^2) \\ 0 & (PQ)^\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix}$$

olacaktır, burada $t=\max\{Ind(P^2), Ind(Q^2), Ind(PQ)\}$ olmak üzere

$X_1 = \sum_{i=0}^{t-1}(Q^D)^{2i+4}\,(P+Q)P^{2i}P^\pi + \sum_{i=0}^{t-1}Q^\pi Q^{2i}\,(P+Q)(P^D)^{2i+4}$

$-(Q^D)^2(P+Q)(P^D)^2$,

$X_2 = \sum_{i=0}^{t-1}((PQ)^D)^{i+2}\,(P^2Q+PQ^2)(PQ)^i(PQ)^\pi$

$+\sum_{i=0}^{t-1}(PQ)^\pi(PQ)^i(P^2Q+PQ^2)((PQ)^D)^{i+2} - (PQ)^D(P^2Q+PQ^2)(PQ)^D$

dir.

Şimdi $P^2Q=0$ ve $Q^2=0$ şartlarını sağlamayan fakat yukarıda verilen Teorem 4.10. un şartlarını sağlayan bir sayısal örnek verelim.

Örnek 4.6. $P,Q \in \mathbb{C}^{4x4}$ matrisleri

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak verilsin. Bu durumda $P^2Q = 0$ ve $Q^2 \neq 0$ olduğu kolayca görülür. Öte yandan $P^2Q + QPQ = 0$, $P^3Q = 0$ eşitlikleri sağlanır. Öte yandan $Ind(P^2) = 1$, $Ind(Q^2) = 1$, $Ind(PQ) = 2$ ve $X_2 = 0$, $(PQ)^D = 0$ olup

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olacaktır, dolayısıyla Teorem 4.10. uygulanırsa

$$(P + Q)^D = P^D + PQP^D + QX_1P + Q^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür.

Şimdi de blok matrisin Drazin inversi için bazı ilave gösterimler vereceğiz. Burada Schur komplementinin sıfıra eşit olduğu dikkate alınacaktır.

Teorem 4.12. A ve D kare matrisler olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Bu durumda eğer $S = D - CA^DB = 0$, $BCA^\pi A = 0$ and $BCA^\pi B = 0$ ise, bu takdirde

$$M^D = P^D + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ CAA^\pi & CA^\pi B \end{pmatrix} (P^D)^3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ CA^2A^\pi & CAA^\pi B \end{pmatrix} X_1 P^D$$

$$+ \begin{pmatrix} AA^\pi & A^\pi B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_1 \begin{pmatrix} A^2A^D & AA^DB \\ C & CA^DB \end{pmatrix},$$

olacaktır, burada $i \geq 1$ ve $t = \max\{Ind(A^2), Ind((AW)^2)\}$ olmak üzere

$$(P^D)^i = (P_1^D)^i + (P_1^D)^{i+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ CA^\pi & 0 \end{pmatrix},$$

$$(P_1^D)^i = \begin{pmatrix} I \\ CA^D \end{pmatrix} [(AW)^D]^{i+1} A(I \quad A^DB),$$

$W = AA^D + A^D BCA^D$,

$$X_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} (P^D)^4 + \sum_{i=1}^{t-1} \begin{pmatrix} A^{2i}A^\pi & A^{2i-1}A^\pi B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} (P^D)^{2i+4}$$

dir.

İspat: $P = \begin{pmatrix} A^2A^D & AA^D B \\ C & CA^D B \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} AA^\pi & A^\pi B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = P + Q$$

olsun.

$BCA^\pi A = 0$ ve $BCA^\pi B = 0$ olduğundan $P^2 Q + QPQ = 0$ ve $P^3 Q = 0$ olacaktır. Bu durumda Q matrisi $t = Ind(A)$ olmak üzere $(t+1) - \text{nilpotent}$ ve dolayısıyla $Q^D = 0$ $Q^\pi = I$ dır. Öte yandan $(PQ)^2 = 0$ olacağından $(PQ)^D = 0$ olacaktır. Bu durumda Teorem 4.11. e göre X_1 matrisi daha önce verildiği gibi olmak üzere

$$M^D = P^D + PQ(P^D)^3 + PQ^2 X_1 P^D + QX_1 P$$

elde edilir.

$P_1 = \begin{pmatrix} A^2A^D & AA^D B \\ CAA^D & CA^D B \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ CA^\pi & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere $P = P_1 + P_2$ olsun. Bu durumda $P_2 P_1 = 0$ ve $P_2^2 = 0$ olacaktır. Buradan Lemme 4.18. e göre

$$(P^D)^i = (P_1^D)^i + (P_1^D)^{i+1} P_2 \,, \; i \geq 1$$

olduğu görülür. Şimdi S_1 matrisi P_1 matrisinin genelleştirilmiş Schur komplementi olsun. Bu takdirde

$$S_1 = CA^D B - CAA^D (A^2 A^D)^D AA^D B = 0$$

$$(A^2 A^D)^\pi AA^D B = 0 \,, \; CAA^D (A^2 A^D)^\pi = 0$$

olacaktır. Böylece

$$(P_1^D)^i = \begin{pmatrix} I \\ CA^D \end{pmatrix} [(AW)^D]^{i+1} A \begin{pmatrix} I & A^D B \end{pmatrix}$$

$W = AA^D + A^D BCA^D$, $i \geq 1$

elde edilir.

Teorem 4.13. A ve D kare matrisler olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. Eğer

$S = D - CA^D B = 0$, $A^\pi BCA^\pi = 0$, ve $ABCA^\pi = 0$ ise, bu takdirde

$$M^D = P^D + \begin{pmatrix} BCA^\pi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (P^D)^3 + \begin{pmatrix} BCA^\pi A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X_1 P^D$$

$$+ \begin{pmatrix} AA^\pi & 0 \\ CA^\pi & 0 \end{pmatrix} X_1 \begin{pmatrix} A^2A^D & B \\ CAA^D & CA^D B \end{pmatrix}$$

olacaktır, burada $i \geq 1$ ve $t = \max\{Ind(A^2), Ind((AW)^2)\}$ olmak üzere

$$(P^D)^i = (P_1^D)^i + \begin{pmatrix} 0 & A^\pi B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (P_1^D)^{i+1},$$

$$(P_1^D)^i = \begin{pmatrix} I \\ CA^D \end{pmatrix} [(AW)^D]^{i+1} A(I \quad A^D B),\ W = AA^D + A^D BCA^D,$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} (P^D)^4 + \sum_{i=1}^{t-1} \begin{pmatrix} A^{2i}A^\pi & 0 \\ CA^{2i-1}A^\pi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} (P^D)^{2i+4}$$

dir.

İspat: $P = \begin{pmatrix} A^2A^D & B \\ CAA^D & CA^D B \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} AA^\pi & 0 \\ CA^\pi & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = P + Q$ olsun. İspatın geri kalan kısmı Teorem 4.12. den direkt olarak elde edilir.

Şimdi elde ettiğimiz sonucun bir uygulaması olarak Schur komplementi sıfır olan ve Teorem 5.6.5 in şartlarını da sağlayan bir sayısal örnek verelim.

Örnek 4.7.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ olsun. Gerekli hesaplamalar yapılırsa $S = D - CA^D B = 0$ ve $BCA^\pi A = 0$ ve $BCA^\pi B = 0$ olduğu görülür. Öte yandan $Ind(A^2) = 1$, $Ind((AW)^2) = 1$,

$$A^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (AW)^D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Bu durumda Teorem 4.12. uygulanarak

$$M^D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında kare olmayan ya da kare olduğu halde bilinen anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve lineer denklem sistemlerinin genel durumda çözümünde kullanılan ve bilinen anlamdaki invers özelliklerini de sağlayan genelleştirilmiş invers adı verilen bir kavram ele alınmış, bir matrisin genelleştirilmiş inversi, yansımalı genelleştirilmiş inversi ve Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi tanımları verilerek bu inverslerin çeşitli özellikleri ortaya konulmuştur. Ayrıca bir matrisin Drazin inversi kavramı tanımlanmış ve her hangi bir matrisi 2x2 lik blok matrise parçalayarak çeşitli durumlarda bu matrisin Drazin inversi ve bu inversi hesaplama yöntemleri verilmiştir. Son olarak iki matrisin toplamının Drazin inversi için çeşitli formüller ve hesaplama yöntemleri geliştirilmiştir.

Yapılan bu çalışmalara ilaveten daha değişik tipte parçalanmış matrislerin ve ikiden fazla matrisin toplamının Drazin inversleri için hesaplama yöntemleri geliştirilebilir. Ayrıca bu inverslerin hesaplanmasında kullanılmak üzere çeşitli bilgisayar programları türetilerek bu programlardan veya algoritmalardan faydalanılabilir. Elde edilen bu inversler lineer denklem sistemlerinin çözümlerine uygulanabilir.

6. KAYNAKLAR

Akdeniz, F., Öztürk, F. 1996. Lineer Modeller. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, No: 38.

Ben-Israel, A., Charnes, A. 1963. Contributions to the theory of generalized inverses. SIAM J. Appl. Math., Vol. 11, 667-699 s.

Ben-Israel A., Greville, T.N.E. 2003. Generalized Inverses: Theory and Applications. second ed., Springer Verlag, New York

Bjerhammer, A., 1951, (a). Rectangular reciprocal matrices with special reference to geodetic calculations. Bull. Geodesique, Vol. 52, 188-220 s.

Bjerhammer, A. 1951, (b). Application of the calculus of matrices to the method of least squares with special reference to geodetic calculations. Kungl. Tekn. H11gsk. Hand. Stockholm. No. 49, 1-86 s.

Bjerhammer, A. 1958. A generalized matrix algebra. Kungl. Tekn. Hogsk. Handl. Stockholm. No. 124, 1-32 s.

Bose, R. C., 1959, *Analysis of Variance*. unpublished lecture notes, University of North Carolina.

Bott, R., Duffin, R. J., 1953, On the algebra of Networks. Trans. Amer. Math. Soc.. Vol. 74, 99-109 s.

Branson, R. 1999. Matris İşlemleri Schoum Serisi. (Editör: H.H. Hacısalihoğlu), Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 212 s.

Changjiang, B., Chundi, Z. 2013. A note on the formulas for Drazin inverse of the sum of two matrices, Linear Algebra and its Appl. 439, 565-576s.

Chernoff, H. 1953. Locally optimal designs for estimating parameters. Ann. Math. Statist., Vol. 24, 586-602 s.

Chipman, J.S. 1964. On least squares with insufficient observations. J. Armer. Stati.st. Assoc., Vol.59, 1078-1111 s.

Chipman, J.S. 1968. Specification problems in regression analysis, Theory and Application of Generalized Inverses and Matrices. Symposium Proceedings, Texas Technological College. Mathematics Series No. 4, 114-176 s.

Chipman, J.S., Rao, M.M. 1964. Projections, generalized inverses and quadratic forms. J. Math. Anal. Appl., Vol. 9, 1-11 s.

Cvetkovic-Ilic, D.S., Chen, J., Xu, Z. 2007. Explicit representations of the Drazin inverse of block matrix and modified matrix. Preprint submitted to Linear and Multilinear Algebra.

Deng, C.Y. 2009. A note on the Drazin inverse with Banachiewicz-Schur forms. Applied Mathematics and Cumputation 213, 230-234s.

Deng, C.Y., Dragana, S., Cvetkovic-Ilic. 2008. (Revision, dec.18, 2008), Some Results on the Generalized Drazin Inverse of Operator Matrices, Preprint submitted to Linear Multilinear Algebra.

Deng, C., Wei, Y. 2011. Representations for the Drazin inverse of 2x2 block-operator matrix with singular Schur complement. Linear Algebra appl. 435, 2766-2783.

Drazin M.P. 1958. Pseudo-inverses in associative rings and semigroups. Amer.Math. Monthly 65, 506-514 s.

Greville, T.N.E. 1959. The pseudo-inverse of a rectangular matrix and its application to the solution of systems of linear equations, SIA M Rev., Vol. 1, 38-43 s.

Güney, E. 2013. Matrislerin Genelleştirilmiş Terslerini Hesaplama Yöntemleri. Y. Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı, Fen Edebiyat Fakültesi.

Hacısalihoğlu H.H. 1977. *Lineer Cebir*. Matbaa Teknisyenleri Koll. Şti., İstanbul, 716 s.

Hartwing R.E., Li, X., Wei, Y. 2006. Representations for the Drazin inverse of a 2x2 block matrix. SIAM J. Matrix Anal. Appl.27,757-771.

Hartwing R.E., Wang, G. and Wei, Y. 2001. Some Additive result on Drazin inverse. Lineer Algebra and its Applications 322, 207-217.

Hu, Y., Xifu L. 2011. The Drazin inverse of the sum of two matrices and its applications. Journal of Computational and Applied Mathematics 235, 1412-1417.

Lancaster, P. 1969. *Theory of Matrices*. Academic Pres, New York, 570 s.

Li, X. 2011. A representation for the Drazin inverse of block matrices with a singular generalized Schur complement. Appl. Math.Comput. 217, 7531-7536.

Liping, Z. 2001. A characterization of the Drazin inverse. Linear Algebra and its Applications 335, 183-188.

Martinez-Serrano, M.F., Castro-Gonzalez, N. 2009. On the Drazin inverse of block matrices and generalized Schur complement, Appl. Math.Comput.215,2733-2740.

Martinez-Serrano, M.F., Castro-Gonzalez, N. 2010. Drazin inverse of partitioned matrices in terms of Banachiewicz-Schur forms. Linear Algebra Appl. 432,1691-1702.

Miao, J. 1989. Result of the Drazin inverse of block matrices. J. Shanghai Normal Univ. (In Chinese), 18, 25-31.

Mitra, S.K., Bhimasankaram, P. 1970. Some results on idempotent matrices and a matrix equation connected with the distribution of quadratic forms, Sankhya Ser. A. Vol. 32, 353-356 s.

Mitra, S.K. 1968, (a). On a generalized inverse of a matrix and applications. Sankhya Ser. A, Vol. 30, 107-114 s.

Mitra, S.K. 1968, (b). A new class of g-inverse of square matrices. Sankhya Ser. A, Vol. 30, 323-330 s.

Mitra, S.K. 1968, (c). Some results in estimation and tests of hypotheses under the Gauss-Markov model. Sankhya Ser. A, Vol. 30, 281-290 s.

Mitra, S.K. 1969. Conditions for optimality and validity of simple least squares theory. Ann. Math. Statist., Vol. 40, 1617-1624 s.

Mitra, S.K., Rao, C.R. 1968, (a). Simultaneous reduction of a pair of quadratic forms. Sankhya Ser. A, Vol. 30, 313-322 s.

Mitra, S.K., Rao, C.R. 1968, (b). A note on a previous lemma in the theory of least squares and some further results. Sankhya Ser. A. Vol. 30, 245-252 s.

Moore, E.H. 1920. On the reciprocal of the general algebraic matrix (abstract), Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 26, 394-395 s.

Moore, E.H. 1935. *General Analysis*. American Philosophical Society, Philadelphia.

Penrose, R. 1955. A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 51, 406-413 s.

Penrose, R. 1956. On best approximate solutions of linear matrix equations, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 52, 17-19 s.

Radhakrishna Rao, C. 1955. Analysis of dispersion for multiply classified data with unequal numbers in cells. Sankhya, Vol. 15, 253-280 s.

Radhakrishna Rao, C. 1961. A study of large sample test criteria through properties of efficient estimates, Sankhya Ser. A, Vol. 23, 25-40 s.

Radhakrishna Rao, C. 1962. A note on a generalized inverse of a matrix with applications to problems in mathematical statistics. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. Vol. 24, 152-158 s.

Radhakrishna Rao, C. 1965, (a). Linear Statistical Inference and its Applications. New York, Wiley.

Radhakrishna Rao, C. 1965, (b). On the theory of least squares when parameters are stochastic and its application to analysis of growth curves. Biometrika, Vol. 52, 447-458 s.

Radhakrishna Rao, C. 1966. *Generalized inverse for matrices and its applications in mathematical statistics*. Research papers in Statistics, Festschrift for J. Neyman, New York, Wiley,

Radhakrishna Rao, C. 1967, (a). Least squares theory using an estimated dispersion matrix and its application to measurement of signals. Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Statistics and Probability, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, Vol. 1, 355-372 s.

Radhakrishna Rao, C. 1967, (b). Calculus of generalized inverse of matrices. Part 1: General theory, Sankhya Ser. A, Vol. 29, 317-342 s.

Rao, C.R., Mitra, S.K. 1971. Generalized inverse if matrices and its Applications. Wiley, New York.

Robert, E.H., Guorong, W., Yimin, W. 2001. Some additive result on Drazin inverse. LinearvAlgebra and its Applications, 322, 207-217.

Scroggs, J. E., Odell, P. L. 1966. An alternative definition of the pseudo-inverse of a matrix. SIA M J. Appl. Math., Vol. 14, 796-810 s.

Shakoor, A., Yang, H. and Ilyas A. 20013. The Drazin inverses of the sum of two matrices and block matrix. Journal of Applied Mathematics and Informatics, Vol. 31 No:3-4 pp, 343-352

Tseng, Y.Y. 1949, (a), Generalized inverses of unbounded operators between two unitary spaces. Dokl. Akad. Nauk. SSSR., Vol. 67, 431-434 s.

Tseng, Y.Y. 1949, (b), Properties and classifications of generalized inverses of closed operators. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol. 67, 607-610 s.

Tseng, Y.Y. 1956. Virtual solutions and general inversions, Uspehi. Mat. Nauk., Vol. 11, 213-215 s.

Xiaoji, L., Shuxia, W. and Yaoming, Y. 2010. The represantations of the drazin inverse of differences of two matrices. Applied Mathematics and Computition 216, 3652-3661.

Xiaoji, L., Shuxia, W. and Yaoming, Y. 2011. on the Drazin inverse of the sum of two matrices. Journal of Applied Mathematics, 2-14, doi:10.1155/2011/831892.

Yang, H., Liu, X. 2011. The Drazin inverse of the sum of two matrices and itsapplications. J. Comput. Appl.Math. 235, 1412-1417.

Yang, H., Liu, X. 2013. Improved result on the Drazin inverse of a 2x2 block matrix in terms of Banachiewicz-Schur forms. Published by Faculty of Sciences and Mathematics,University of Nis, Serbia, Filomat 27:1, 75-83s.

Zhang, L. 2001. A characterion of Drazin inverse. Linear Algebra and its Applications 335,183-188s.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Emine GÜLDEREN

Doğum Yeri : İskenderun

Doğum Tarihi : 12.02.1987

Yabancı Dili : İngilizce

E-mail : emine.gulderen@hotmail.com-gulderenemineе@gmail.com

İletişim Bilgileri : Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/ Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik	Ordu Üniversitesi	2011
Pedagolojik Formasyon	Matematik Öğretmenliği	Atatürk Üniversitesi	2012
Y. Lisans	Matematik	Ordu Üniversitesi	2014