T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

k- POTENT MATRİSLERİN LİNEER KOMBİNASYONLARININ TERSİNİRLİĞİ VE BAZI UYGULAMALARI

HATİCE ASLANCI

Bu tez,
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans
derecesi için hazırlanmıştır.

ORDU 2014

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Hatice ASLANCI tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Selahattin MADEN danışmanlığında yürütülen hazırlanan "k-Potent Matrislerin Lineer Kombinasyonlarının Tersinirliği ve Bazı Uygulamaları" adlı bu tez, jürimiz tarafından 11 / 07 / 2014 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Selahattin MADEN

Başkan : Doç. Dr. Selahattin MADEN
Matematik, Ordu Üniversitesi
İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Selim NUMAN
Matematik, Giresun Üniversitesi
İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL
Matematik, Ordu Üniversitesi
İmza :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 18.07.2014. tarih ve 2014/285 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

18./07./2014

Prof. Dr. Mehmet Fikret BALTA
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza
Hatice ASLANCI

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

k- POTENT MATRİSLERİN LİNEER KOMBİNASYONLARININ TERSİNİRLİĞİ VE BAZI UYGULAMALARI

Hatice ASLANCI

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2014
Yüksek Lisans Tezi, 98s.

Danışman: Doç. Dr. Selahattin MADEN

Bu tez altı bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde çalışmanın amacından bahsedilerek bir giriş verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamızda gerekli olacak temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde k-potent matrislerin lineer kombinasyonlarının tersinirlikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise idempotent matrislerin lineer kombinasyonlarının tersinirlikleri ele alınmıştır. Beşinci bölümde sonuç ve öneriler verilmiş ve altıncı bölümde ise tezde yararlanılan kaynaklar listelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Matris, Kare Matris, Singüler Matris, Nonsingüler Matris, İdempotent Matris, k-Potent Matris, Rank, Determinant, Bir Matrisin İnversi, Genelleştirilmiş İnvers, Moore–Penrose İnvers.

ABSTRACT

INVERTIBILITY OF THE LINEAR COMBINATIONS OF k-POTENT MATRICES AND ITS SOME APPLICATIONS

Hatice ASLANCI

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2014
MSc. Thesis, 98p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Selahattin MADEN

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, it is given an introduction and the aim of the thesis. In the second chapter, basic definitions and theorems in this thesis stated and proved. In the third chapter, the invertibility of some linear combinations of k-potent matrices are considered, In the fourth chapter, the invertibility of some linear combinations of idempotent matrices are considered. In the fifth chapter, it is given some results and propositions and references that used in this thesis are listed in sixth chapter.

Key Words: Matrix, Square Matrix, Singular Matrix, Nonsingular Matrix, Idempotent Matrix, k-Potent Matrix, Rank, Determinant, Inverse of a Matrix, Generalized Inverse, Moore-Penrose Inverse.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında her türlü yardımını esirgemeyen ve biz genç araştırmacılara büyük destek sağlayarak bizleri cesaretlendiren danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Selahattin MADEN' e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hem bu zorlu ve uzun süreçte hem de hayatım boyunca yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan, başta ablam Sayın Yrd. Doç. Dr. Seher ASLANCI olmak üzere değerli aileme yürekten teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, Lisans ve Lisansüstü eğitimim sırasında ders aldığım ve değerli tecrübelerinden yararlandığım tüm hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{K}$	: K kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{K}_n^m$	: $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\mathbb{C}_n^m$	: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
I_n	: $n \times n$ tipindeki birim matris
A^{T}	: A matrisinin transpoz matrisi
$\overline{A}$	: A matrisinin eşlenik matrisi (eş matrisi)
A^*	: A matrisinin eşlenik transpoz matrisi (Hermitian matrisi)
$\|A\|$	: A matrisinin determinantı
$\mathrm{Ek}(A)$	: A matrisinin ek matrisi
A_{ij}	: A matrisinin bir a_{ij} elemanının kofaktörü
A^{-1}	: A matrisinin inversi
$r(A)$	: A matrisinin rankı
$\mathcal{N}(A)$	: A marisinin null (sıfır) uzayı
$\mathcal{R}(A)$	: A marisinin ranj (sütun) uzayı
$P_{(\mathcal{R}(A))}$	: A matrisinin $\mathcal{R}(A)$ sütun (ranj) uzayının yansıtıcısı (izdüşümü)
A^- veya $A^{(1)}$	: A matrisinin genelleştirilmiş inversi (iç inversi)
$A^{(2)}$	: A matrisinin dış inversi
A_0 veya $A^{(1,2)}$	: A matrisinin yansımalı genelleştirilmiş inversi
$A^{\dagger}$	: A matrisinin Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi
X_L^-	: $X_L^-.X = I$ şartını sağlayan X matrisinin bir sol inversi
X_R^-	: $X.X_R^- = I$ şartını sağlayan X matrisi

1. GİRİŞ

Günümüzde elementer matris cebiri, teorik matematik, istatistik, istatistik için olduğu kadar sosyoloji, kimya, fizik eğitimi ve elektrik mühendisliği gibi çeşitli teknik alanlar içinde gerekli matematiksel temel bilginin ayrılmaz bir kısmı haline gelmiştir. Matris hesabı, 19-uncu yüzyıl ortalarından beri bilinmektedir. İngiliz matematikçi Sylvester, 1850 yılında ‘matris’ kavramını kullanmıştır. 1853 yılında İngiliz bilgini Hamilton ‘Lineer and Vector Functions’ isimli eserinde matrislerin bazı özelliklerden faydalanmış fakat matris ismini kullanmamıştır. Yine bir İngiliz matematikçisi olan Cayley, 1858 yılında çok meşhur olan ‘Memorie On The Theory Of Matrices’ isimli çalışmasında matris cebirinin modern esaslarını göstermiştir. Daha sonraları fransız Laguerre ve Alman Frobenius matrislerle ilgili yeni kavram ve teoremler üzerinde durmuşlardır.

Bir singüler matrisin inversi fikri ilk defa 1920 yılında Moore (1920, 1935) tarafından ortaya atılmıştır. Bu fikrin genel operatörlere genişletilmesi ise Tseng (1949a, 1949b, 1956) tarafından yapılmıştır. Ancak, daha sonra 1955 yılına kadar bu konuda her hangi bir sistematik çalışmaya rastlanamamaktadır. 1955 yılında, önceki çalışmalardan habersiz olarak, Penrose (1955, 1956) biraz farklı bir yoldan Moore tarafından verilen invers kavramını tekrar tanımlamıştır. Penrose ile aynı zamanlarda yaşayan bilim adamlarından birisi olan Rao (1955), bir singüler matrisin Pseudo İnversi olarak adlandırdığı, en küçük kareler teorisinde singüler matrisli normal denklemlerin çözümünde ve tahmin edicilerin varyanslarının hesaplanmasında kullanılan yeni bir invers kavramı geliştirmiştir. Rao tarafından geliştirilen Pseudo invers, Moore ve Penrose tarafından ortaya konulan kısıtlamaların tümünü sağlamamaktadır. Bu nedenle de bu invers, Moore–Penrose inversten farklıdır, fakat gözlem denklemlerinin rankları üzerinde herhangi bir kısıtlama konulmaması durumunda en küçük kareler yönteminin genel teorisinin ortaya konulmasında oldukça yararlıdır. Rao (1962), daha sonraki bir çalışmasında, lineer denklemlerle ilgili problemlerinin çözümünde yeterli olabilecek ve Moore ve Penrose’ un vermiş olduğu tanımdan çok daha zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Böyle bir invers, bir genelleştirilmiş invers (g–invers) olarak adlandırılmış ve bunun uygulamaları Rao (1962, 1965a, 1965b, 1966, 1967)’ nun birçok çalışmasında yer almıştır.

Genelleştirilmiş inversler üzerinde 1955 li yıllardan itibaren çalışan başlıca bilim adamları arasında Greville (1959), Bjerhammer (1951a, 1951b, 1958), Ben-Israel ve Charnes (1963), Chipman (1964, 1968), Chipman ve Rao (1964), Scroggs ve Odell (1966) sayılabilir. Bose (1959), "Varyans Analizi" adlı ders notlarında g–inversi kullanmıştır. Bott ve Duffin (1953) bir kare matrisin kısıtlamalı inversini tanımlamıştır ki bu invers bilinen g–inversten farklıdır ve bazı uygulamalarda kullanılır. Chernoff (1953), singüler nonnegatif tanımlı bir matrisin g–inversini göz önüne almıştır ki bu invers, bir g–invers olmamasına rağmen bazı tahmin problemlerinin incelenmesinde yararlıdır. Rao (1962) tarafından verilen daha zayıf tanımı sağlayan g–invers tek olmamakla birlikte matris cebirinde ilginç bir çalışma olarak kabul edilir.1967 yılında bir yayınında Rao (1967), değişik amaçlarla kullanılmak üzere g–inverslerin bir sınıflandırmasını vermiştir. Bu çalışmalar daha sonra genelleştirilmiş inverslerin yeni bir sınıflandırmasını ortaya atan Mitra (1968a, 1968b), Mitra ve Bhimasankaram (1969, 1971) tarafından geliştirilmiştir. Genelleştirilmiş inverslerin diğer çeşitli uygulamaları Mitra ve Rao (1968a, 1968b, 1969) ve Rao (1967) tarafından yapılan bir dizi çalışmada ele alınmıştır.

Genelleştirilmiş inverslerin hesaplanmasındaki sistematik gelişmeler ve onların çeşitli uygulamaları Generalized Inverse of Matrices and Its Applications (Wiley, 1971) adlı kitapta verilmiştir.

Matrisler üzerine yapılan bu çalışmada Benitez, J. ve Thome, N. (2005); Benitez, J., Liu, X., Zhu, T.(2010) ve Baksalary, J.K.(2004) tarafından verilen çalışmalarda ele alınan k-potent Matrislerin Lineer Kombinasyonları detaylı bir biçimde ele alınmıştır. Ayrıca iki idempotent matrisin, bir idempotent matris ile bir tripotent matrisin lineer kombinasyonlarının nonsingülerliği ve idempotentliği ile ilgili bir dizi kriterler verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.a. $\mathbb{K}$ bir cisim olsun. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ olmak üzere bütün (i, j) sıralı ikililerinin kümesi $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olsun.

$$f : A \longrightarrow \mathbb{K}$$

fonksiyonu

$$(i, j) \longrightarrow f(i, j) = a_{ij}$$

olarak tanımlansın. $a_{ij} \in \mathbb{K}$ olacak şekilde seçilen $m.n$ tane elemanın oluşturduğu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

sayı tablosuna $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipinde bir **matris** denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

matrisi kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir. Her (i, j), $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ ikilisine karşılık gelen a_{ij} elemanına A matrisinin $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$**–yinci bileşeni** denir.

b. $m \times n$ tipinde olan ve bileşenleri bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinden seçilen bütün $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrislerinin kümesi $\mathbb{K}_n^m$ ile gösterilir.

c. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ $m \times n$ tipinde her hangi iki matris olmak üzere, her bir (i, j) ikilisi için $a_{ij} = b_{ij}$, $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ ise bu iki matrise **eşit matrisler** denir.

d. $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, her bir a_{ij} elemanı sıfıra eşitse A matrisine **sıfır matris** denir.

e. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ $m \times n$ tipinde iki matris olmak üzere, A ve B **matrislerinin toplamı**, (i, j)–yinci bileşeni $a_{ij} + b_{ij}$ olan bir matris olup

$$+ : \mathbb{K}_n^m \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(A, B) \longrightarrow A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + +b_{12} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

f. $c \in \mathbb{K}$ bir skaler olmak üzere $cA \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi $(i, j)-$yinci bileşeni ca_{ij} olan bir matristir. Yani

$.: \ \mathbb{K} \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$

$$(c, A) \longrightarrow cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

olur. O halde her $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için $0 \in \mathbb{K}$ olmak üzere, $0A = 0 \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi, $m \times n$ tipinde sıfır matristir.

g. $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}_p^m$ ve $B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}_n^p$ olmak üzere, A ve B **matrislerinin çarpımı** $C = [c_{ij}] \in \mathbb{K}_n^m$ şeklinde bir matristir ve

$.: \ \mathbb{K}_p^m \times \mathbb{K}_n^p \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$

$$(A, B) \longrightarrow A.B = C$$

$$[a_{ij}].[b_{ij}] = [c_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right], 1 \leq i \leq m, \ \ 1 \leq j \leq n$$

şeklindedir, yani

$$A.B = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1p}b_{p1}) & \dots & (a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1p}b_{pn}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mp}b_{p1}) & \dots & (a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{mp}b_{pn}) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. O halde matris çarpımının tanımlı olabilmesi için birinci çarpanın sütun sayısı, ikinci çarpanın satır sayısına eşit olmalıdır. Herhangi A ve B matrislerinin çarpımı $A.B$ veya AB ile gösterilir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Tanım 2.2.a. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, reel sayılar kümesi olarak alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki A matrisine bir **reel matris** denir.

b. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, kompleks sayılar kümesi olarak alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki bir A matrisine bir **kompleks matris** denir. (Branson R., 1999)

Tanım 2.3.a. Bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinde $m = n$ ise, A matrisine **kare matris** denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

kare matrisinde $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemanlarına **köşegen(esas köşegen) elemanları** denir.

b. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ köşegen elemanları dışındaki tüm elemanları sıfır ise yani, $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ ise bu matrise **köşegen matris** denir ve $A =$ Köş$\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$ ile gösterilir.

c. Bir köşegen matriste $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} = k$, $k \in \mathbb{K}$ ise bu matrise **skaler matris** denir.

d. Köşegen üzerindeki elemanları 1 ve köşegen dışındaki tüm elemanları 0 olan $n \times n$ tipindeki bir matrise **birim matris** denir ve

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Her hangi bir $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için, $I_m A = A I_n = A$ olur.

e. Bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinden aynı numaralı satırlar ve sütunlar kendi aralarında yer değiştirilerek elde edilen $A^T = [a_{ij}]_{n\times m}$ matrisine A matrisinin **transpozu(veya transpoze matrisi)** denir. Buna göre A ve B uygun matrisler olmak üzere

$(A + B)^T = A^T + B^T$ ve $(AB)^T = B^T A^T$

eşitlikleri sağlanır.

f. A bir reel kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise, A matrisine **simetrik matris** denir.

g. A ve B kare matrisleri arasında $AB = BA$ bağıntısı varsa, bu matrislere **değişmeli (komutatif) matrisler** denir.(Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Tanım 2.4.a. $\{1,2,\dots n\}$ kümesinin kendisi üzerine birebir ve örten bir bağıntı veya buna eşdeğer olarak $1,2,\dots,n$ sayılarının yeniden bir sıralanmasına $\{1,2,\dots,n\}$ kümesinin bir **σ permütasyonu** denir. Böyle bir permütasyon

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

veya

$$\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n \quad , \; j_i = \sigma(i)$$

ile gösterilir. Bu permütasyonların tümünün kümesi ise S_n ile gösterilir. S_n de gelişigüzel bir σ permütasyonu, örneğin $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ düşünüldüğünde σ da çift veya tek sayıda permütasyonlar olmasına göre σ ya **çift** veya **tek permütasyon** denir. O halde bir σ nın işareti

$$\text{sgn}\sigma = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \sigma \text{ çift ise} \\ -1, & \text{eğer } \sigma \text{ tekise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

b. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı kare matris olsun.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisinin her satırından ve her sütunundan yalnız ve yalnız bir eleman alınmak üzere n elemanın bir çarpımı düşünülsün. Böyle bir çarpım $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$ şeklinde yazılır. Burada çarpanlar ardışık satırlardan gelir ve bu yüzden alt indisler $1, 2, \dots, n$ doğal sayı sırasındadır. Çarpanlar farklı sütunlardan geldiğinden, ikinci alt indislerin dizisi S_n de bir $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ permütasyonunu oluşturur. Tersine, S_n deki her permütasyon yukarıdaki şekilde bir çarpım tanımlar. Böylece A matrisi böyle n! çarpım kapsar.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin **determinantı** $\det(A)$ veya $|A|$ şeklinde gösterilir ve yukarıdaki her çarpanı sgnσ ile çarpılan veya n! tane çarpımların toplamıdır. Yani

$$|A| = \sum_{\sigma} (\text{sgn}\sigma) a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$$

veya

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (sgn\sigma) a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots , a_{n\sigma(n)}$$

şeklinden mertebedendir.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı aşağıdaki şekilde de tanımlanmaktadır.

c. 1×1 tipinde bir Amatrisinin determinantı kendisidir.

$A = [a]$ ise, $\det(A) = |a| = a$

olur.

d. 2×2 tipinde bir Amatrisinin determinantı aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

olur.

$n > 2$ için bir kare matrisin determinantı, aşağıda gösterildiği gibi bir indirgeme işlemi ve minörleri ile işaretli minörleri kullanılan bir açılımla hesaplanır.

e. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının $|M_{ij}|$ şeklinde tanımlanan **minörü**, A matrisinden i–yinci satırın ve j–yinci sütunun atılması ile oluşan $(n-1) \times (n-1)$ tipindeki kare matrisin determinantıdır.

f. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin bira_{ij}elemanının minörü $|M_{ij}|$ olsun. A matrisinin bir a_{ij} elemanının A_{ij} şeklinde gösterilen **kofaktörü(işaretli minörü veya eş çarpanı)**

$A_{ij} = (-1)^{i+j}.|M_{ij}|$

Şeklinde tanımlanır.

g. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı her hangi bir satır(sütun) elemanlarının kendi kofaktörleriyle çarpılıp bu çarpanların toplanmasıyla bulunur. Yani herhangi i ve $j(i, j = 1,2,3, \dots, n)$için

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}|M_{ik}| \tag{2.4}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj}|M_{ik}| \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır.

Her bir i için, (2.4) ile verilen toplama, A matrisinindeterminantının i–yinci satır elemanlarına göre açılımı, her bir j için, (2.5) ile verilen toplama ise A matrisinin determinantının j–yinci sütun elemanlarına göre açılımı denir.

h. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi için $|A| = 0$ ise A matrisine **singüler(tekil) matris**, $|A| \neq 0$ ise, A matrisine **nonsingüler(tekil olmayan veya regüler) matris** denir. (Branson R., 1999)

Tanım 2.5. a. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinde bir a_{ij} elemanının kofaktörü A_{ij} olsun.

$$\mathrm{Ek}(A) = [A_{ij}]^T = [A_{ji}]$$

şeklinde tanımlanan matrise A matrisinin **ek matrisi** denir. Buna göre

$$\mathrm{Ek}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

olur.

b. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için $A.B = B.A = I_n$ olacak şekilde bir $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ matrisi varsa, B matrisine **A matrisinin inversi** denir ve $A^{-1} = B$ ile gösterilir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.1: Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi ile bu matrisin ek matrisinin çarpımı bir skaler matris olup

$$A.\mathrm{Ek}(A) = \mathrm{Ek}(A).A = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A| I_n \tag{2.6}$$

ile verilir.(Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat: $A.\mathrm{Ek}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$$

olur ki bu matris bir skaler matristir. Benzer şekilde

$$\mathrm{Ek}(A).A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. O halde

$$A.\mathrm{Ek}(A) = \mathrm{Ek}(A).A = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A| I_n$$

bulunur.

Teorem 2.2: Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matrisinin inversi

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\mathrm{Ek}(A) \tag{2.7}$$

dır.(Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat: (2.6) bağıntısından dolayı $A.\mathrm{Ek}(A) = |A|I$ olur. Bu ifadenin her iki yanı A^{-1} ile çarpıldığında

$(A^{-1}A).\mathrm{Ek}(A) = A^{-1}|A|I \;\Rightarrow\; \mathrm{Ek}(A) = |A|A^{-1}I \;\Rightarrow\; \mathrm{Ek}(A) = |A|A^{-1}$

olur. Öte yandan A matrisi nonsingüler olduğundan $|A| \neq 0$ olup

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\mathrm{Ek}(A)$$

elde edilir.

Teorem 2.3. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler bir matris ve B ve C çarpıma uygun matrisler olmak üzere $AB = AC$ ise $B = C$ olur.(Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat: $AB = AC$ eşitliğinin her iki tarafı soldan A^{-1} ile çarpılmasıyla

$A^{-1}AB = A^{-1}AC$ yani $B = C$ elde edilir.

Teorem 2.4.a. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matris olsun. A^{-1} matrisi tektir.

b. A nonsingüler matris ise A^{-1} matrisi de nonsingüler olup $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

c. A ve B çarpmaya uygun nonsingüler matrisler ise AB matrisi de nonsingüler olup $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dır.

d. A nonsingüler bir matris ise A^T matrisi de nonsingüler olup $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir. (Branson R., 1999)

İspat: a. B ve C matrislerinin A matrisinin herhangi iki inversi olduğu varsayılsın. O zaman $AB = BA = I$ ve $AC = CA = I$ olur. Buradan

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$$

elde edilir.

b. $(A^{-1})^{-1}$ matrisi A^{-1} matrisinin inversidir. Aynı zamanda A matrisi de A^{-1} matrisinin inversidir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

c. $(AB)^{-1}$ matrisi AB matrisinin inversidir. Ayrıca

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

ve

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

yazılabilir. Böylece $B^{-1}A^{-1}$matrisi de AB matrisinin inversi olur. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

d. $(A^T)^{-1}$ matrisi A^T matrisinin inversidir. Ayrıca $I^T = I$ olduğundan

$$I = I^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T(A)^T$$

olur. Bu durum, $(A^{-1})^T$ matrisinin A^T matrisinin bir inversi olduğunu gösterir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ elde edilir.

Tanım 2.6.a. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için $A^2 = A$ ise, A matrisine **idempotent matris** denir.

b. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı A matrisinin elemanlarının yerlerine eşlenikleri yazılarak elde edilen matrise Amatrisinin **eşleniği (eş matrisi)** denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

c. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı A matrisi için $\left(\overline{A}\right)^T = A$ ise A matrisine **hermitian matris** denir ve $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ ile gösterilir.

d. Bir A matrisi için $AA^* = A^*A$ ise A matrisine **normal matris** denir.

e. $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$nonsingüler bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^*$ (veya $AA^* = A^*A = I$) ise A matrisine **birimsel(unitary) matris** denir.

f. $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^T$ ise A matrisine **ortogonal(dik) matris** denir.

g. $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ reel simetrik bir matris olmak üzere, sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{R}_1^n$ vektörü için $x^TAx > 0$ ($x^TAx \geq 0$) ise, A matrisine **Pozitif Tanımlı(Pozitif Yarı Tanımlı) Matris** denir.

h. $A, n \times n$ tipinde bir kare matris olsun. $(A - \lambda I)x = 0$ eşitliğini sağlayan λ skalerine A matrisinin bir **özdeğeri**, sıfır olmayan x vektörüne de A matrisinin bir **özvektörü** denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.5. A ve Buygun matrisler olmak üzere

a. $\left(\overline{A}\right)^T = \overline{(A^T)}$.

b. $(A^*)^* = A$.

c. $(A + B)^* = A^* + B^*$.

d. $(AB)^* = B^*A^*$.

eşitlikleri sağlanır. (Branson R., 1999)

İspat: a. $A = \left[a_{ij}\right]$ $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu takdirde

$\overline{A} = \left[\overline{a_{ij}}\right]$ ve $\left(\overline{A}\right)^T = \left[\overline{a_{ji}}\right]$

olur. Diğer taraftan

$A^T = [a_{ji}]$ ve $\overline{(A^T)} = [\overline{a_{ji}}]$

olduğundan

$$\overline{(A^T)} = (\overline{A})^T$$

olduğu görülür.

b. $A^* = (\overline{A})^T$ olduğundan

$$(A^*)^* = \left(\overline{(\overline{A})^T}\right)^T = (A^T)^T = A$$

elde edilir.

c. Hermitian matris tanımına göre

$$(A+B)^* = \left(\overline{A+B}\right)^T = \left(\overline{A}+\overline{B}\right)^T = (\overline{A})^T + (\overline{B})^T = A^* + B^*$$

elde edilir.

d. Hermitian matris tanımına göre

$$(AB)^* = \left(\overline{AB}\right)^T = \left(\overline{A}\overline{B}\right)^T = (\overline{B})^T(\overline{A})^T = B^*A^*$$

yazılabilir.

Teorem 2.6. Reel simetrik bir A matrisinin pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olması için gerek ve yeter şart, tüm özdeğerlerinin (sıfırdan farklı özdeğerlerinin) pozitif olmasıdır. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat: A matrisi pozitif tanımlı olmak üzere, λ özdeğerine ve ilgili x özvektörüne sahip olsun. Bu takdirde bu x vektörü için $Ax = \lambda x$ ve $\langle Ax, x\rangle > 0$ bağıntıları vardır. O halde $0 < \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$ olur. x bir özvektör olduğundan, sıfırdan farklıdır ve dolayısıyla $\langle x, x\rangle$ pozitiftir. Bu durumda $\lambda > 0$ olmalıdır.

A matrisi pozitif yarı tanımlı olmak üzere, λ özdeğerine ve ilgili x özvektörüne sahip olsun. Bu takdirde bu xvektörü için $Ax = \lambda x$ ve $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ bağıntıları vardır. O halde $0 \leq \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$ olur. x bir özvektör olduğundan, sıfırdan farklıdır ve dolayısıyla $\langle x, x\rangle$ pozitiftir. Bu durumda $\lambda \geq 0$ olmalıdır.

Tüm (sıfırdan farklı) özdeğerleri pozitif olması halinde A matrisinin pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olacağı benzer şekilde gösterilebilir. (Lanchester, P., 1969)

Tanım 2.7.a. $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörler kümesi verilmiş olsun. $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği ancak $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinin tümü birden sıfır olduğunda sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine **lineer bağımsızdır** denir. Aksi halde yani, $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine **lineer bağımlıdır** denir.

b. Amatrisi $m \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. A matrisinin sütun vektörlerini $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$ ile, ve satır vektörlerini $A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}$ ile gösterelim. $A_{i*}, i = 1, 2, \dots, m$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına Amatrisinin **satır rankı**, A_{*j}, $j = 1, 2, \dots, n$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına ise Amatrisinin **sütun rankı** denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.7. Bir matrisin iki satırının kendi aralarında yer değiştirmesi matrisin satır rankını değiştirmez. (Branson R., 1999)

İspat: A matrisinin herhangi iki satırı yer değiştirdiğinde satır vektörlerinin kümesi değişmeyeceğinden, bu durum matrisin satırları arasındaki lineer bağımsızlığı değiştirmez . Yani satır rankını değiştirmez.

Teorem 2.8. $AX = 0$ve$BX = 0$ denklemlerinin çözüm kümeleri aynı ise, o zaman A ve B $n \times n$ tipindeki matrislerin sütun rankları aynıdır. (Branson R., 1999)

İspat: $AX = 0$ sistemi

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = 0 \qquad (2.8)$$

olarak yazılabilir. Burada A_i, A matrisinin i-yinci sütunudur ve $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ olur. Benzer şekilde, $Bx = 0$ sistemi

$$x_1 B_1 + x_2 B_2 + \cdots + x_n B_n = 0 \qquad (2.9)$$

olarak yazılabilir.

A matrisinin sütun rankı a, B matrisinin sütun rankı b ile gösterilsin. A matrisinin sütun rankı, B matrisinin sütun rankından büyük kabul edilsin. Böylece $a > b$ olur. Bu durumda A matrisinin a tane lineer bağımsız sütunu olmalıdır. Genellik kaybedilmeden, bunların A matrisinin ilk a sütunu olduğu varsayılabilir. (Eğer değilse, A matrisinin sütunları bu şekilde yeniden düzenlenebilir. Bu durum ise Teorem 2.7'ye benzer şekildeA matrisinin sütun rankını değiştirmez.) Ancak $a > b$ kabul edildiğinden B matrisinin ilk a sütunu lineer bağımlıdır. Böylece, hepsi sıfır olmayan öyle $d_1, d_2, \dots, d_n$ vardır ki

$$d_1B_1 + d_2B_2 + \cdots + d_aB_a = 0$$

olur. Buradan

$$d_1B_1 + d_2B_2 + \cdots + d_aB_a + 0B_{a+1} + \cdots + 0B_n = 0$$

ve (2.9) sisteminin çözümü olarak

$$x_1 = d_1 x_2 = d_2 \quad \dots \quad x_a = d_a x_{a+1} = x_{a+2} = \cdots = x_n = 0$$

bulunur. Bu aynı değerler (2.8) sisteminin de çözümü olarak verildiğinden

$$d_1A_1 + d_2A_2 + \cdots + d_aA_a = 0$$

dır. Burada, belirtildiği gibi, $d_1, d_2, \dots, d_a$ sabitlerinin tümü sıfır değildir. Ancak bu $A_1, A_2, \dots, A_a$ matrislerinin lineer bağımlı olduğunu gösterir ki, bu da bir çelişkidir.

A ve B matrislerinin rollerini değiştirerek yapılan benzer bir çalışma, B matrisinin sütun rankının da A matrisinin sütun rankından daha büyük olamayacağını gösterir. Böylece bu iki matrisin sütun rankları eşit olmalıdır.

Teorem 2.9. Elemanter satır işlemleri herhangi bir matrisin sütun rankını değiştirmez. (Branson R., 1999)

İspat. A matrisine elementer satır işlemleri uygulanarak elde edilen matris B olsun. Bu durumda $Ax = 0$ ve $Bx = 0$ homojen denklem sistemlerinin çözüm kümeleri aynıdır. Teorem 2.8 yardımıyla A ve B matrislerinin sütun rankları aynıdır.

Teorem 2.10. Herhangi bir Amatrisi için satır rankı sütun rankına eşittir. (Branson R., 1999)

İspat. $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin satır rankının r ve sütun rankının ise c olduğu kabul edilsin. $r = c$ olduğu gösterilecektir. Amatrisinin satırları ilk r satırı lineer bağımsız ve kalan $m - r$ satırı ilk r satırın lineer birleşimi olacak şekilde yeniden düzenlenirse, Teorem 2.7 ve Teorem 2.8 yardımıyla bu işlemin A matrisinin satır ve sütun ranklarını değiştirmediği görülür. A matrisinin satırları sırasıyla $A_1, A_2, \dots, A_m$ ile gösterilsin ve C ve D matrisleri

$$C = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_r \end{bmatrix} \text{ve} D = \begin{bmatrix} A_{r+1} \\ A_{r+2} \\ \cdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın. O zaman A matrisi $\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$ bloklanmış matrisidir. Ayrıca D matrisinin her bir satırı C matrisinin satırlarının bir lineer birleşimi olduğundan, öyle bir T matrisi vardır ki, $D = TC$ olur. Özel durumda eğer

$$A_{r+1} = d_1A_1 + d_2A_2 + \cdots + d_rA_r$$

ise o zaman $[d_1, d_2, \dots, d_r]$vektörü T matrisinin ilk satırıdır. Buradan, her hangi bir n boyutlu x vektörü için

$$Ax = \begin{bmatrix} Cx \\ Dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx \\ TCx \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Bu durumda, ancak ve ancak $Cx = 0$ ise $Ax = 0$ olur ve Teorem 2.8'den dolayı A ve B matrislerinin sütun rankı c dir. Ancak B matrisinin sütunları r boyutlu vektörlerdir. Böylece B matrisinin sütun rankı r den büyük olamaz. Yani

$$c \leq r \tag{2.10}$$

olur.

Yukarıdaki durum A^T matrisi için tekrarlanırsa, A^T matrisinin sütun rankının A^T matrisinin satır rankından büyük olamayacağı görülür. Ancak, A^T matrisinin sütunları A matrisinin satırları olduğundan bu durum A matrisinin satır rankının A matrisininsütun rankından büyük olamayacağı anlamına gelir. Yani

$$r \leq c \tag{2.11}$$

olur. (2.10) ve (2.11) bağıntılarından $r = c$ olduğu görülür.

Tanım2.8. Herhangi bir A matrisinin rankı, satır ve sütun rankı olarak tanımlanır ve $\mathrm{rank}(A)$ veya $r(A)$ şeklinde gösterilir. (Branson R., 1999)

Teorem 2.11. A bir matris olmak üzere $r(A) = r(A^T)$ dir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat. A matrisinin satırları A^T matrisinin sütunları ve A matrisinin sütunları A^T matrisinin satırları olduğundan, Teorem 2.10'dan istenilen sonuç elde edilir.

Tanım 2.9. $n \times n$ tipindeki bir A kare matrisi için eğer $r(A) = n$ ise A matrisine **Nonsingüler(Tekil Olmayan) Matris** denir. Aksi durumda yani, $r(A) < n$ ise A matrisine **Singüler(Tekil) Matris** denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Tanım 2.10.a. $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun.

$\mathcal{N}(A) = \{x: Ax = 0\}$

şeklinde tanımlanan kümeye Amarisinin **null (sıfır) uzayı** denir.

b. $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun.

$\mathcal{R}(A) = \{y: Ax = y\}$

şeklinde tanımlanan kümeye A matrisinin **ranj(sütun) uzayı** denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.12. Eğer A, r ranklı $m \times n$tipinde bir matris ise, bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan nonsingüler P ve Q matrisleri vardır. I, $r \times r$ boyutlu birim matris olmak üzere

a. $m = n = r \Rightarrow PAQ = I$.

b. $m = r < n \Rightarrow PAQ = [I, 0]$.

c. $m > r,\ n > r \Rightarrow PAQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (2.12)

İspat: Lancaster, P., (1969)

Teorem 2.13. Çarpmaya uygun A ve B matrislerinin çarpımının rankı A ve B matrislerinin rankını geçemez. Yani

$r(AB) \leq \min\{r(A),\ r(B)\}$ (2.13)

dir.(Lancaster, P., 1969)

İspat. AB matrisinin her bir sütunu A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonu olduğundan AB matrisinin sütun uzayı A matrisinin sütun uzayının alt kümesi olur. Böylece $r(AB) \leq r(A)$ eşitsizliği bulunur. Benzer şekilde $r(AB) \leq r(B)$ eşitsizliği de sağlanır. Böylece $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ elde edilir.

2.2. Genelleştirilmiş İnversler

Herhangi bir A matrisi bir inverse sahip olabilmesi için A matrisinin nonsingüler ve kare matris olması gerekir. Bu durumda A matrisi yardımıyla

$$AX = B \tag{2.14}$$

lineer denklem sisteminin var olan tek çözümü $X = A^{-1}$B şeklindedir. Ayrıca $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

şartını sağlayan ve A matrisinin inversi olarak adlandırılan A^{-1} matrisi vardır. Bununla birlikte A matrisinin kare matris olmadığı durumlarda ya da A matrisinin kare matris fakat singüler olduğu durumlarda inversi yoktur. Bu durumlarda A^{-1} matrisinin özelliklerini de içeren ve genelleştirilmiş invers (g–invers) matris adını alan yeni bir kavram sayesinde (2.14) sisteminin bir çözümü olabilir.

$\mathbb{C}_n^m$, kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesini göstersin. Bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisi için aşağıdaki dört şartı (Moore–Penrose şartları) sağlayan bir G matrisine A matrisinin Moore–Penrose inversi denir ve A^+ veya $A^\dagger$ ile gösterilir.

(i) $AGA = A,$

(ii) $GAG = G,$

(iii) $(AG)^* = AG,$

(iv) $(GA)^* = GA.$ (2.15)

Eğer G matrisi sadece (i) şartını sağlıyorsa bu G matrisine A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi (iç inversi) denir ve A^- veya $A^{(1)}$ ile gösterilir. Sadece (ii) şartını sağlayan G matrisine A matrisinin bir dış inversi denir ve $A^{(2)}$ ile gösterilir. Hem (i) hem de (ii) şartını sağlayan G matrisine ise A matrisinin bir yansımalı genelleştirilmiş inversi denir ve $A^{(1,2)}$ veya A_0 ile gösterilir.

2.3. Bir Matrisin Genelleştirilmiş İnversi İçin Bir Algoritma

Moore–Penrose şartlarından sadece (i) şartını sağlayan, yani

$$AGA = A \tag{2.16}$$

olacak şekildeki G matrisine A matrisinin bir g–inversi (genelleştirilmiş inversi) denir.

Bir matrisin g–inversini bulmak için aşağıdaki algoritma kullanılır.

Algoritma 2.1 : $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ r ranklı herhangi bir matris olsun.

1. Adım: r ranklı A matrisinde, $r \times r$ tipinde nonsingüler her hangi bir B alt matrisi seçilir.

2. Adım: Seçilen B alt matrisinin inversi bulunup bu inversin transpozu alınır.

3. Adım: A matrisinde B alt matrisinin her bir elemanına karşılık gelen yere $(B^{-1})^T$ matrisinin elemanları yerleştirilir.

4. Adım: A matrisinin diğer tüm elemanlarının yerine sıfır yazılır.

5. Adım: Elde edilen matrisin transpozu alınır. Bu matrise G denirse, G matrisi A matrisinin bir g–inversidir.

Örnek 2.1: Algoritma 2.1 3×3 tipindeki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisine uygulansın. A matrisi rankı 2 olan singüler bir matristir.

1. Adım: A matrisinin 2×2 tipinde bir nonsingüler

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

alt matrisi seçilsin.

2. Adım: $|B| = 10 - (-3) = 13 \neq 0$ olduğundan B^{-1} mevcut olup

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}.\text{Ek}(B) = 1/13.\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/13 & -3/13 \\ 1/13 & 2/13 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu matrisin transpozu alınırsa

$$(B^{-1})^T = \begin{bmatrix} 5/13 & 1/13 \\ -3/13 & 2/13 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Bulunan $(B^{-1})^T$ matrisi A matrisinde elemanları B alt matrisinin elemanlarının yerlerine karşılık gelecek şekilde yerleştirilir. Diğer tüm elemanları sıfır alınır. Böylece

$$\begin{bmatrix} 5/13 & 1/13 & 0 \\ -3/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

5. Adım: Bir önceki adımda bulunan matrisin transpozu alınarak

$$G = \begin{bmatrix} 5/13 & -3/13 & 0 \\ 1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi oluşturulur. Bu şekilde oluşturulan G matrisi A matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten

$$AG = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5/13 & -3/13 & 0 \\ 1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup

$$AGA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = A$$

olduğu görülür.

Verilen A matrisinin başka bir B alt matrisini seçerek, seçilen bu yeni B alt matrisine Algoritma 2.1 uygulansın.

1. Adım: A matrisinin rankı 2 olduğundan B matrisi

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde seçilsin.

2. Adım: $|B| = 10 - 0 = 10 \neq 0$ olduğundan

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}.\text{Ek}(B) = 1/10. \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ -3/5 & 1/2 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece

$$(B^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

3. ve 4. Adımlar: Bu durumda

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

olur.

5. Adım: Bu şekilde bulunan matrisin transpozu alındığında

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -3/5 & 1/2 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bulunan bu G matrisi A matrisinin bir g–inversi olur. Gerçekten

$$AG = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -3/5 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$AGA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = A$$

olduğu görülür.

Sonuç 2.1: Yukarıdaki iki seçim, bir matrisin g–inversinin tek olmadığını gösterir. Bu nedenle bir matrisin tanımlı birden çok g–inversi bulunabilir.

Örnek 2.2: 2×3 tipindeki

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

dikdörtgen matrisi alınsın. E matrisinin rankının 2 olacağı açıktır. Algoritma 2.1 E matrisine uygulansın.

1. Adım: Bu durumda M matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak seçilebilir.

2. Adım: $|M| = -1 - 1 = -2 \neq 0$ olup

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}.\text{Ek}(M) = -1/2.\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla

$$(M^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen

$$G = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi E matrisinin bir g–inversi olduğu gösterilebilir. Gerçekten

$$EG = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$EGE = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = E$$

olduğu görülür.

Örnek 2.3: 5×2 tipindeki

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

dikdörtgen matrisi alınsın. E matrisinin rankının 2 olacağı açıktır. Algoritma 2.1 E matrisine uygulansın.

1. Adım: Bu durumda M matrisi $M = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ olarak seçilebilir.

2. Adım: $|M| = -4 - 0 = -4 \neq 0$ olup

$M^{-1} = \frac{1}{|M|}.\text{Ek}(M) = -1/4.\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

ve dolayısıyla

$(M^{-1})^T = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen

$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$

matrisi E matrisinin bir g–inversi olduğu gösterilebilir. Gerçekten

$$EG = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/4 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$EGE = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/4 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = E$$

olduğu görülür.

Algoritma 2.1 rankı 1 olan matrislerin g–inversini bulmak için aşağıdaki şekilde uyarlanabilir.

Algoritma 2.2:

1. Adım: A matrisinin sıfırdan farklı her hangi bir elemanı B olarak seçilir.

2. Adım: Seçilen bu elemanın inversi bulunur.

3. Adım: Bulunan bu invers A matrisinde karşılık gelen yere yazılır.

4. Adım: A matrisinin diğer tüm elemanlarının yerine sıfır yazılır.

Örnek 2.4: A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak alınsın. A matrisinin rankı 1 dir. Algoritma 2.2 A matrisine uygulansın.

1. Adım: $B = [3]$ alınsın.

2. Adım: $B^{-1} = [1/3]$ olur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$ olacaktır.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi A matrisinin bir g–inversidir.

Gerçekten

$$AG = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$AGA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = A$$

olur.

Örnek 2.5: 3×4 tipindeki

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

matrisi alınsın. L dikdörtgen matrisinin rankı 1 dir. Algoritma 2.2 L matrisine uygulansın.

1. Adım: $M = [8]$ seçilsin.

2. Adım: $M^{-1} = [1/8]$ olur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ elde edilir.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi L matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten

$$LG = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$LGL = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} = L$$

olur. L matrisi 3 × 4 tipinde olduğu için 3.4 = 12 tane g–inversi bulunabilir.

Sonuç 2.2: Genel olarak 1 ranklı ve $m \times n$ tipindeki matrislerin m.n tane g–inversi bulunabilir. Matrisin sıfırdan farklı herhangi bir elemanının inversini alıp, diğer tüm elemanlarını sıfır aldıktan sonra elde edilen matrisin transpozu alınarak g–inversi bulunur. Eğer A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde 1 ranklı bir matris ise, A matrisinin

1–ncisi; $\begin{bmatrix} (a_{11})^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

2–ncisi; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (a_{12})^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

… … … … … … … … … … … …

(m.n)–ncisi; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (a_{mn})^{-1} \end{bmatrix}$

şeklinde m.n tane g–inversi bulunabilir.

2.4. Moore–Penrose İnverslerin Varlığı

A nonsingüler matrisinin inversi olan A^{-1} matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayacağı açıktır. Yani $A^{-1} = A^{+}$ olur. Bununla birlikte, eğer A bir singüler matris veya kare olmayan bir matris ise bu durumda Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir A^{+} matrisinin mevcut olup olmadığı ile ilgili bir soru ortaya çıkar. Bu kısımda her A matrisi için bir A^{+} matrisinin var ve tek olduğu gösterilecektir. Ayrıca bu şekilde tanımlanan Moore–Penrose inversin bir takım özellikleri ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 2.14: Eğer A matrisi $m \times n$ tipinde sıfır matris ise, A^{+} matrisi $n \times m$ tipinde sıfır matristir.

İspat: $A^{+} = 0$ alındığında Moore–Penrose şartlarının sağlandığı görülür.

Teorem 2.15: Her A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir A^{+} matrisi vardır.

İspat: Eğer $A = 0$ ise $A^{+} = 0$ olduğu açıktır. $A \neq 0$ olsun. A matrisinin r ranklı olduğu kabul edilsin. Bu durumda A matrisi

$$A = BC \tag{2.17}$$

şeklinde parçalanabilir. Burada B matrisi $m \times r$ tipinde $r > 0$ ranklı ve C matrisi $r \times n$ tipinde $r > 0$ ranklı matrisler olup, B^*B ve CC^* çarpımlarının her ikisi de nonsingülerdir. Bu durumda eğer A^{+} matrisi

$$A^{+} = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \tag{2.18}$$

olarak seçilirse, A^{+} matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $$AA^{+}A = (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)$$
$$= B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C = BC = A,$$

(ii) $$A^{+}AA^{+} = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$
$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = A^+,$$

(iii) $(AA^+)^* = [(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*]^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^*$

$$= B(B^*B)^{-1}B^* = B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

$$= (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = AA^+,$$

(iv) $(A^+A)^* = [C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)]^*$

$$= C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}C$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC) = A^+A$$

olduğu görülür.

Teorem 2.16: Herhangi bir A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir tek A^+ matrisi vardır. Yani her A matrisinin bir tek Moore–Penrose inversi vardır.

İspat: A matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayan herhangi iki Moore–Penrose inversi A_1^+ ve A_2^+ olsun. Bu durumda

$$A_1^+ = A_1^+AA_1^+ = A_1^+(AA_1^+)^* = A_1^+(A_1^+)^*A^* = A_1^+(A_1^+)^*(AA_2^+A)^*$$

$$= A_1^+(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A^* = A_1^+(AA_1^+)^*(AA_2^+)^* = A_1^+AA_1^+AA_2^+ = A_1^+AA_2^+$$

$$= A_1^+A(A_2^+AA_2^+) = (A_1^+A)^*(A_2^+A)^*A_2^+ = A^*(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A_2^+$$

$$= (AA_1^+A)^*(A_2^+)^*A_2^+ = A^*(A_2^+)^*A_2^+ = (A_2^+A)^*A_2^+ = A_2^+AA_2^+ = A_2^+$$

olduğundan $A_1^+ = A_2^+$ olur. Yani A^+ matrisi tektir.

Teorem 2.17. $m \times n$ tipinde verilen bir A matrisinin Moore–Penrose inversi $n \times m$ tipinde bir matris olacaktır.

İspat: AA^+ matrisinin simetrik ve dolayısıyla kare olması gerçeğinden ispat görülür.

Teorem 2.18: a. Eğer $m \times n$ tipindeki bir $A = [a_{ij}]$ matrisinin tüm elemanları 1 ise bu takdirde A^{+} matrisi

$$A^{+} = \frac{1}{m.n} A^{*}$$

şeklindedir.

b. Eğer $a,\ n \times 1$ tipinde ve $a \neq 0$ olan bir sütun vektörü ise bu durumda a^{+}

$$a^{+} = (a^{*}a)^{-1}a^{*}$$

şeklindedir.

c. Eğer $a,\ 1 \times n$ tipinde ve $a \neq 0$ olan bir satır vektörü ise bu durumda a^{+}

$$a^{+} = a^{*}(aa^{*})^{-1}$$

şeklindedir.

İspat: a. İspat için teoremde verilen A^{+} matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Bu durumda

(i) $AA^{+}A = A\left(\frac{1}{m.n} A^{*}\right)A = A\frac{1}{m.n}(A^{*}A) = A.\frac{1}{m.n}.m.n = A,$

(ii) $A^{+}AA^{+} = \left(\frac{1}{m.n} A^{*}\right)A\left(\frac{1}{m.n} A^{*}\right) = \frac{1}{m.n}(A^{*}A)\left(\frac{1}{m.n} A^{*}\right) = \frac{1}{m.n}.m.n.\left(\frac{1}{m.n} A^{*}\right)$

$= \left(\frac{1}{m.n} A^{*}\right) = A^{+},$

(iii) $(AA^{+})^{*} = \left(A\frac{1}{m.n} A^{*}\right)^{*} = A\frac{1}{m.n} A^{*} = AA^{+},$

(iv) $(A^{+}A)^{*} = \left(\frac{1}{m.n} A^{*}A\right)^{*} = \frac{1}{m.n} A^{*}A = A^{+}A$

olduğu görülür.

b. İddiada verilen a^{+} matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $aa^{+}a = a(a^{*}a)^{-1}a^{*}a = a(a^{*}a)^{-1}(a^{*}a) = a,$

(ii) $a^{+}aa^{+} = (a^{*}a)^{-1}a^{*}a(a^{*}a)^{-1}a^{*} = (a^{*}a)^{-1}(a^{*}a)(a^{*}a)^{-1}a^{*}$

$$= (a^*a)^{-1}a^* = a^+,$$

(iii) $(aa^+)^* = [a(a^*a)^{-1}a^*]^* = a(a^*a)^{-1}a^* = aa^+,$

(iv) $(a^+a)^* = [(a^*a)^{-1}a^*a]^* = (a^*a)^{-1}a^*a = a^+a$

olduğu görülür.

c. Verilen a^+ matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $aa^+a = aa^*(aa^*)^{-1}a = (aa^*)(aa^*)^{-1}a = a,$

(ii) $a^+aa^+ = a^*(aa^*)^{-1}aa^*(aa^*)^{-1} = a^*(aa^*)^{-1}(aa^*)(aa^*)^{-1}$

$$= a^*(aa^*)^{-1} = a^+,$$

(iii) $(aa^+)^* = [aa^*(aa^*)^{-1}]^* = aa^*(aa^*)^{-1} = aa^+,$

(iv) $(a^+a)^* = [a^*(aa^*)^{-1}a]^* = a^*(aa^*)^{-1}a = a^+a$

olduğu görülür.

Örnek 2.6: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda

$m = 2,\ n = 3$ ve $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

olarak alınırsa

$$A^+ = \frac{1}{m.n}A^* = \frac{1}{2.3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

matrisi istenen Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $AA^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ $\qquad AA^+A =$

$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A,$

(ii) $A^{+}A = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

$$A^{+}AA^{+} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} = A^{+},$$

(iii) $(AA^{+})^{*} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = AA^{+},$

(iv) $(A^{+}A)^{*} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = A^{+}A$

olduğu görülür.

Örnek 2.7: $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda

$$a^{+} = (a^{*}a)^{-1}a^{*} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= [5]^{-1} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = [1/5] . \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $aa^{+} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix}$

$$aa^{+}a = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = a,$$

(ii) $a^{+}a = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [1]$

$$a^{+}aa^{+} = [1] . \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \end{bmatrix} = a^{+},$$

(iii) $(aa^{+})^{*} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix} = aa^{+},$

(iv) $(a^{+}a)^{*} = [1]^{*} = [1] = a^{+}a$

olduğu görülür.

Örnek 2.9: $a = [1 \quad 2 \quad 1]$ alınırsa

$$a^+ = a^*(aa^*)^{-1} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}.\left([1 \quad 2 \quad 1].\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}.[6]^{-1} = \begin{bmatrix}1/6\\1/3\\1/6\end{bmatrix}$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $aa^+ = [1 \quad 2 \quad 1].\begin{bmatrix}1/6\\1/3\\1/6\end{bmatrix} = [1]$

$$aa^+a = [1].[1 \quad 2 \quad 1] = [1 \quad 2 \quad 1] = a,$$

(ii) $a^+a = \begin{bmatrix}1/6\\1/3\\1/6\end{bmatrix}.[1 \quad 2 \quad 1] = \begin{bmatrix}1/6 & 1/3 & 1/6\\1/3 & 2/3 & 1/3\\1/6 & 1/3 & 1/6\end{bmatrix}$

$$a^+aa^+ = \begin{bmatrix}1/6 & 1/3 & 1/6\\1/3 & 2/3 & 1/3\\1/6 & 1/3 & 1/6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1/6\\1/3\\1/6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/6\\1/3\\1/6\end{bmatrix} = a^+,$$

(iii) $(aa^+)^* = [1]^* = [1] = aa^+,$

(iv) $(a^+a)^* = \begin{bmatrix}1/6 & 1/3 & 1/6\\1/3 & 2/3 & 1/3\\1/6 & 1/3 & 1/6\end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix}1/6 & 1/3 & 1/6\\1/3 & 2/3 & 1/3\\1/6 & 1/3 & 1/6\end{bmatrix} = a^+a$

olduğu görülür.

Teorem 2.19: A herhangi bir matris olmak üzere

$$(A^*)^+ = (A^+)^* \qquad (2.19)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: (2.17) bağıntısındaki gibi $A = BC$ olsun. $A^* = C^*B^*$ olduğundan

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

alınırsa, bu durumda

$$(A^+)^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \qquad (2.20)$$

olur ki bu da A^* matrisinin Moore–Penrose inversidir. Gerçekten

(i) $A^*(A^*)^+A^* = C^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^* = C^*B^* = A^*$,

(ii) $(A^*)^+A^*(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$

$= B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = (A^*)^+$,

(iii) $[A^*(A^*)^+]^* = [(C^*B^*)B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C]^* = [C^*(CC^*)^{-1}C]^*$

$= C^*(CC^*)^{-1}C = C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = A^*(A^*)^+$,

(iv) $[(A^*)^+A^*]^* = [B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C(C^*B^*)]^* = [B(B^*B)^{-1}B^*]^*$

$= B(B^*B)^{-1}B^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^* = (A^*)^+A^*$

olur. Böylece

$$(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \qquad (2.21)$$

elde edilir. (2.20) ve (2.21) bağıntılarından ve bir matrisin Moore–Penrose inversi varsa tek olacağından dolayı

$(A^*)^+ = (A^+)^*$

olduğu görülür.

Teorem 2.20: Bir matrisin Moore–Penrose inversinin Moore–Penrose inversi matrisin kendisine eşittir. Yani her hangi bir A matrisi için $(A^+)^+ = A$ olur.

İspat: Moore–Penrose invers tanımından

(i) $A^+(A^+)^+A^+ = A^+AA^+ = A^+$,

(ii) $(A^+)^+A^+(A^+)^+ = AA^+A = A = (A^+)^+$,

(iii) $[A^+(A^+)^+]^* = [A^+A]^* = A^+A = A^+(A^+)^+$,

(iv) $[(A^+)^+A^+]^* = [AA^+]^* = AA^+ = (A^+)^+A\,+^\dagger$

olduğu görülür.

Teorem 2.21: A matrisinin Moore–Penrose inversinin rankı A matrisinin rankına eşittir. Başka bir deyişle

$$r(A) = r(A^+) \tag{2.22}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: Teorem 2.13 $AA^+A = A$ Moore–Penrose şartına uygulandığında

$$r(A) = r(AA^+A) \leq \min\{r(A),\ r(A^+)\} \leq r(A^+) \tag{2.23}$$

elde edilir. Benzer şekilde Teorem 2.13 $A^+AA^+ = A^+$ Moore–Penrose şartına uygulanırsa

$$r(A^+) = r(A^+AA^+) \leq \min\{r(A),\ r(A^+)\} \leq r(A) \tag{2.24}$$

elde edilir. (2.23) ve (2.24) bağıntılarından dolayı (2.22) bağıntısı sağlanır.

Sonuç 2.3: A matrisinin rankı r ise, $A^+,\ AA^+,\ A^+A,\ AA^+A,\ A^+AA^+$ matrislerinin her birinin rankı da r dir.

Teorem 2.22: Eğer A matrisi simetrik ve idempotent matris ise, $A^+ = A$ olacaktır.

İspat: Moore–Penrose invers tanımından

(i) $AA^+A = AAA = A^2A = AA = A^2 = A,$

(ii) $A^+AA^+ = AAA = A^2A = AA = A^2 = A = A^+,$

(iii) $[AA^+]^* = [AA]^* = [A^2]^* = A^* = A = A^2 = AA = AA^+,$

(iv) $[A^+A]^* = [AA]^* = [A^2]^* = A^* = A = A^2 = AA = A^+A$

olduğu görülür.

Teorem 2.23: $B = \text{Köş}\{\mathrm{b}_{11}, \mathrm{b}_{22}, \dots, \mathrm{b}_{nn}\}$ ise, B matrisinin Moore–Penrose inversi B^+, i–yinci satırı ve i–yinci sütununda yer alan köşegen elemanı $\mathrm{b}_{ii} \neq 0$ ise b_{ii}^{-1} ve $\mathrm{b}_{ii} = 0$ ise "0" olan bir köşegen matristir.

İspat: B^+ matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığı açıkça görülür.

Örnek 2.10:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen D matrisinin Moore–Penrose inversi

$$D^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

matrisidir. Gerçekten

$$DD^+ = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$DD^+D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D$$

olduğu görülür.

Teorem 2.24: a. Eğer $A, m \times n$ tipinde tam satır ranklı bir matris ise, bu durumda

$A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$ ve $AA^+ = I_m$

olur.

b. Eğer $A, m \times n$ tipinde tam sütun ranklı bir matris ise, bu durumda

$A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$ ve $A^+A = I_n$

olacaktır.

İspat: Teoremde verilen A^+ matrislerinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Buna göre

a. (i) $AA^+A = AA^*(AA^*)^{-1}A = (AA^*)(AA^*)^{-1}A = A,$

(ii) $A^+AA^+ = A^*(AA^*)^{-1}AA^*(AA^*)^{-1} = A^*(AA^*)^{-1}(AA^*)(AA^*)^{-1}$

$$= A^*(AA^*)^{-1} = A^{+\dagger},$$

(iii) $(AA^+)^* = (AA^*(AA^*)^{-1})^* = ((AA^*)(AA^*)^{-1})^* = I^* = I$

$$= (AA^*)(AA^*)^{-1} = AA^*(AA^*)^{-1} = AA^+,$$

(iv) $(A^+A)^* = (A^*(AA^*)^{-1}A)^* = A^*(AA^*)^{-1}A = A^+A$

olduğu görülür. Benzer şekilde

b. (i) $AA^+A = A(A^*A)^{-1}A^*A = A(A^*A)^{-1}(A^*A) = A,$

(ii) $A^+AA^+ = (A^*A)^{-1}A^*A(A^*A)^{-1}A^* = (A^*A)^{-1}(A^*A)(A^*A)^{-1}A^*$

$$= (A^*A)^{-1}A^* = A^+,$$

(iii) $(AA^+)^* = (A(A^*A)^{-1}A^*)^* = A(A^*A)^{-1}A^* = AA^+,$

(iv) $(A^+A)^* = ((A^*A)^{-1}A^*A)^* = ((A^*A)^{-1}(A^*A))^* = I^* = I$

$$= (A^*A)^{-1}(A^*A) = (A^*A)^{-1}A^*A = A^+A$$

olduğu görülür.

Örnek 2.11: 2×3 tipindeki bir $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi alındığında rank(A) = 2 olduğu açıktır. Yani A tam satır ranklı bir matristir. O halde Teorem 5.11a'dan dolayı

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9/5 & 7/5 \\ 7/5 & 6/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 16/5 & 13/5 \\ 32/5 & 26/5 \end{bmatrix}$$

olur.

Örnek 2.12: 3×2 tipinde bir $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda rank(A) = 2 dir. Başka bir deyişle, A matrisi tam sütun ranklı bir matristir. O halde

$$A^{+} = (A^{*}A)^{-1}A^{*} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} . \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/3 & 2/9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7/3 & 2 & 4/3 \\ 8/9 & 2/3 & 5/9 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

Teorem 2.25: $B \neq 0$ ve $C \neq 0$ matrisleri sırasıyla $m \times r$ ve $r \times n$ tipinde matrisler olmak üzere r ranklı olsunlar. Bu durumda

$$(BC)^{+} = C^{+}B^{+} \tag{2.25}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: Teorem 2.24'e göre

$C^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}$ ve $B^{+} = (BB^{*})^{-1}B^{*}$

olur ve buradan da

$C^{+}B^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(BB^{*})^{-1}B^{*}$

elde edilir. Bu değer zaten $(BC)^{+}$ matrisidir. O halde

$C^{+}B^{+} = (BC)^{+}$

olduğu görülür.

Tanım 2.11. $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ olsun. $\text{rank}(A^{k+1}) = \text{rank}(A^k)$, koşulunu sağlayan en küçük k pozitif tamsayısına A matrisinin indeksi denir ve Ind(A), ile gösterilir. Eğer $\text{Ind}(A) = k$ ise

$$A^{k+1}A^D = A^k, \qquad A^D A A^D = A^D, \qquad AA^D = A^D A \tag{2.14}$$

koşullarını sağlayan bir ve yalnız bir tek $A^D \in \mathbb{C}^{nxn}$ matrisi vardır. Bu A^D matrisine A matrisinin Drazin inversi denir. Özel olarak $\text{Ind}(A) \leq 1$ olduğunda A^D matrisine A matrisin grup inversi denir ve $A^{\#}$ ile gösterilir. Açıkça görülmektedir ki $\text{Ind}(A) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul A nın nonsingüler olmasıdır. Bu durumda $A^D = A^{-1}$ yazılır. $k = \text{ind}(A)$ olmak üzere $A^{\pi} = I - AA^d$ ile $\mathcal{N}(A^k)$ üzerindeki $\mathcal{R}(A^k)$ boyunca iz düşümü göstereceğiz.

$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 2×2 lik blok matris olmak üzere M nin Drazin inversi özel şartlar altında formüller veren pek çok çalışma mevcuttur. Bu şartlardan bazıları aşağıda sıralanmıştır.

(i) $\text{rank}(M) = \text{rank}\,(A)$ ve $\text{Ind}(A) = 0$,

(ii) $B = 0$ (veya $D = 0$),

(iii) $BD = 0, CD = 0 \text{ve} BC = 0$

(iv) $BD = 0, CD = 0$ (veya $BC = 0$) ve C nilpotent,

(v) $A^{\pi}B = 0, DA^{\pi} = 0 \text{ve} C - DA^D B$ nonsingüler ya da sıfır,

(vi) $AA^{\pi}B = 0, DA^{\pi}B = 0 \text{ve} C - DA^D B$ nonsingüler ya da sıfır,

(vii) $AA^{\pi}B = 0, DA^{\pi}B = 0, BDAA^D = 0 \text{ve} CDAA^D = 0$

(viii) $A = I \text{ve} CD = 0$ (veya $BC = 0$)

3. k-POTENT MATRİSLERİN LİNEER KOMBİNASYONLARININ TERSİNİRLİĞİ

3.1. Giriş

H ve K ayrılabilir sonsuz boyutlu kompleks Hilbert uzayları olsun. H den K ya tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesini B(H,K) ile ve H=K olması durumunda B(H) ile gösterelim. $A \in B(H,K)$ için $\sigma(A)$, P(A) , N(A) sırasıyla A nın spektrumu, ranjı ve sıfır uzayını göstersin. U kapalı alt uzay üzerindeki özdeşlik operatörünü I_u ile veya yanlış anlaşılma söz konusu değilse I ile gösterelim. $P \in B(H)$ operatörüne $P^2 = P$ ise idempotent , $P^3 = P$ ise tripotent ve $k \geq 2$ bir pozitif tamsayı olmak üzere $P^k = P$ ise bir k-potent operatör adı verilir. $T \in B(H)$ için T nin grup inversi

$$TT^{\#} = T^{\#}T \, , T^{\#}TT^{\#} = T^{\#} \, , T = TT^{\#}T$$

eşitliğini sağlayacak şekilde varsa tek olan $T^{\#} \in B(H)$ dır. Eğer T grup tersinir ise P(T) kapalıdır ve T^{π} spektral idempotent matrisi $T^{\pi} = I - TT^{\#}$ ile verilir. Grup tersinir bir T operatörünün $H = P(T) \oplus N(T)$ uzay ayrışımına göre operatör matris formu $T = T_1 \oplus 0$ ile verilir. Burada T_1,B(P(T)) de tersinir olup bu durumda $T^{\#} = T_1^{-1} \oplus 0$ olacaktır. Herhangi bir $P \in B(H)$ operatörü için $P^0 = I$ ve $\overline{P} = I - P$ alışılmış notasyonlarını kullanacağız. Pozitif bir $k \geq 2$ tamsayısı için lineer k kompleks köklerinin kümesi

$$w_k = \exp\left(\frac{2\pi i}{k}\right), i = \sqrt{-1}$$

olmak üzere

$$\Omega_k = \{w_k^0, w_k^1, \dots, w_k^{k-1}\}$$

ile gösterilecektir. Ayrıca keyfi bir $\mu \in \leq$ için

$$\mu^{\#} = \begin{cases} \mu^{-1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

gösterimini kullanacağız.

k-potent matrislerin lineer kombinasyonları geçmiş yıllarda incelenmiştir.

(1) P_1 ve P_2 idempotent matris,

(2) P_1 idempotent , P_2 tripotent matris,

(3) P_1 ve P_2 değişmeli tripotent idempotent matris,

(4) P_1 idempotent , P_2 k-potent matris

durumları için $c_1P_1 + c_2P_2$ şeklindeki bir lineer kombinasyonun ne zaman bir idempotent (veya bir tripotent veya bir grup involutive matris) olduğunu belirleme problemi sırasıyla [1-7-23-27] de çalışılmıştır. Benitez ve Thome genelleştirilmiş izdüşümleri k-genelleştirilmiş iz düşümlere genişletmiş ve değişmeli k-genelleştirilmiş izdüşümlerin bir lineer kombinasyonunun yine bir k-genelleştirilmiş izdüşüm olduğu tüm durumları sıralamıştır. Bu çalışmanın amacı bazı k-potentler üzerine belirli komutatiflik özelliklerinin sağlanması şartı altında k-potentlerin ve çarpımlarının kombinasyonlarının k-potentliğini, grup tersinirliğini ve tersinirliğini karakterize etmektir. P_1 , P_2 sıfırdan farklı k-potentler , $c_1, c_2 \in X□\{0\}$, $c_3 \in X$ ve s de $0 < s < k-1$ koşulunu sağlayan bir pozitif tamsayı olsun. Bu durumda $c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1^sP_2^{k-1-s}$ şeklindeki kombinasyonların özelliklerini inceleyeceğiz. İlk olarak bazı kanonik ayrışımları ortaya koyalım.

Lemma 3.1. Eğer $P \in B(H)$ bir k-potent ise bu takdirde P(P) kapalıdır ve

$P(P)=P(P^2)=\ldots=P(P^k)$, $N(P)=N(P^2)=\ldots=N(P^k)$

olmak üzere P^{k-1} idempotenttir.

$H = P(P) \oplus N(P)$ uzay ayrışımını kullanarak P yi 2x2 lik operatör matrisi formunda

$$P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A \in B(P(P)) \text{ tersinirdir ve } A^{k-1} = I \qquad (3.1)$$

olarak yazabiliyoruz.

Lemma 3.2. $P \in B(H)$ matrisinin bir k-potent matris olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki 2 şartı sağlamasıdır.

(i) $\sigma(P) \subseteq \{0\} \cup \Omega_{k-1}$,

(ii) $SPS^{-1} = \sum_{\lambda\in\sigma(P)} \oplus \lambda E(\lambda)$,

olacak şekilde tersinir bir s operatörü mevcuttur. Burada $\oplus$ ortogonal direkt toplamı

$$\sum_{\lambda\in\sigma(P)} E(\lambda) = I \,, E(\lambda_i)E(\lambda_j) = E(\lambda_j)E(\lambda_i) = 0 \,, \lambda_i \,, \lambda_j \in \sigma(P) \,, \lambda_i \neq \lambda_j$$

olacak şekildeki $E(\lambda)$ ortogonal izdüşümleri gösterir.

Keyfi sonlu komutatif sıfırdan farklı $\{P_i\}_{i=1}^{m}$ k-potent matris ailesi için

$\sigma(\prod_{i=1}^{m} P_i)\subseteq\{0\}\cup\Omega_{k-1}$ ve $\sigma(c_1 I_n + c_2 \sum_{i=1}^{m} P_i)\subseteq\{c_1 + c_2\lambda : \lambda\in\{0\}\cup\Omega_{k-1}\}$

olduğunu belirtelim. Öte yandan keyfi $\lambda\in\Omega_{k-1}$ ve $c_1 , c_2 \in X\square\{0\}$ için

$c_1 + c_2\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq - c_1/c_2$

olduğunu belirtelim. Dolayısıyla

$c_1 I_n + c_2 \prod_{i=1}^{m} P_i$ tersinirdir $\Leftrightarrow \left(-\frac{c_1}{c_2}\right)^{k-1} \neq 1$

olacaktır. Herhangi bir k-potent P matrisi grup tersinirdir. Eğer $P^2 = P$ ise $P^{\#} = P$, eğer $k\geq 2$ olmak üzere $P^k = P$ ise $P^{\#} = P^{k-2}$ dir. Ayrıca aşağıdaki Lemma yı verebiliriz.

Lemma 3.3. $T_1, T_2, T_3 \in B(H)$ grup tersinir ve değişmeli operatörler olsun. Bu takdirde

$e_1 = (I - T_1^{\pi})(I - T_2^{\pi})(I - T_3^{\pi}),\ e_2 = (I - T_1^{\pi})(I - T_2^{\pi})T_3^{\pi}$,

$e_3 = (I - T_1^{\pi})T_2^{\pi}(I - T_3^{\pi})$, $e_4 = (I - T_1^{\pi})T_2^{\pi}T_3^{\pi}$,

$e_5 = T_1^{\pi}(I - T_2^{\pi})(I - T_3^{\pi}), e_6 = T_1^{\pi}(I - T_2^{\pi})T_3^{\pi}$,

$$e_7 = T_1^{\pi}T_2^{\pi}(I - T_3^{\pi}),\ e_8 = T_1^{\pi}T_2^{\pi}T_3^{\pi} \qquad (3.2)$$

idempotent olup

$$H = \oplus_{i=1}^{8} P(e_i),\ \sum_{i=1}^{8} e_i = I ,\ e_i e_j = e_j e_i = 0 ,\quad i \neq j,\quad i , j = \overline{1,8} \qquad (3.3)$$

dir.

3.2. Değişmeli k-potentlerin karakterizasyonları

Bu kısımda belirli komutatiflik özelliklerinin sağlanması şartı altında grup tersinir ve k-potent operatörlerin lineer kombinasyonlarının tersinirliğini, grup tersinirliğini ve idempotentliğini karakterize edeceğiz. Φ ile sıfırdan farklı k-potentlerin ailesini gösterelim ve P_1, P_2, P_3 biri diğerlerinin skaler katı olmayacak şekilde sıfırdan farklı k-potentler olsun.

Teorem 3.1. $T_1, T_2, T_3 \in B(H)$ grup tersinir ve değişmeli operatörler ve e_i, $i = \overline{1,8}$ (3.2) ile verilmiş olsun.

$\Phi = aT_1 + bT_2 + cT_3$, $a, b \in X\square\{0\}$, $c \in X$

şeklindeki bir lineer kombinasyon olsun. Bu takdirde Φ nin tersinir olması için gerek ve yeter şart

$$I + T_1^{\#}\left(\frac{b}{a}T_2 + \frac{c}{a}T_3\right)e_1,\ I + \frac{b}{a}T_1^{\#}T_2e_2,\ I + \frac{c}{a}T_1^{\#}T_3e_3,\ I + \frac{c}{b}T_2^{\#}T_3e_5, \tag{3.4}$$

ifadesinin tersinir ve $e_8 = 0$ olmasıdır.

İspat: e_i , $i = \overline{1,8}$ (3.2) deki gibi tanımlanmış olsun. $H = \oplus_{i=1}^{8} P(e_i)$ uzay parçalanışını kullanarak e_i nin i-yinci bloğunda 1 ve diğerleri 0 olan bir blok köşegen operatör olduğunu ve $X_i, Y_j, Z_I, i \in \{1,2,3,4\}, j \in \{1,2,5,6\}, I \in \{1,3,5,7\}$ tersinir olmak üzere

$$\begin{aligned} T_1 &= X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 ,\\ T_2 &= Y_1 \oplus Y_2 \oplus 0 \oplus 0 \oplus Y_5 \oplus Y_6 \oplus 0 \oplus 0 ,\\ T_3 &= Z_1 \oplus 0 \oplus Z_3 \oplus 0 \oplus Z_5 \oplus 0 \oplus Z_7 \oplus 0 , \end{aligned} \tag{3.5}$$

olduğunu biliyoruz. Bu nedenle

$$\begin{aligned} T_1^{\#} &= X_1^{-1} \oplus X_2^{-1} \oplus X_3^{-1} \oplus X_4^{-1} \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0\\ T_2^{\#} &= Y_1^{-1} \oplus Y_2^{-1} \oplus 0 \oplus 0 \oplus Y_5^{-1} \oplus Y_6^{-1} \oplus 0 \oplus 0\\ T_3^{\#} &= Z_1^{-1} \oplus 0 \oplus Z_3^{-1}\ 0 \oplus Z_5^{-1} \oplus 0 \oplus Z_7^{-1} \oplus 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} \Phi = aT_1 + bT_2 + cT_3 &= (aX_1 + bY_1 + cZ_1)e_1 + (aX_2 + bY_2)e_2 + (aX_3 + cZ_3)e_3\\ &\quad + aX_4e_4 + (bY_5 + cZ_5)e_5 + bY_6e_6 + cZ_7e_7 + 0e_8 \end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir.

$$I + T_1^{\#}\left(\frac{b}{a}T_2 + \frac{c}{a}T_3\right)e_1 = \left(I + \frac{b}{a}X_1^{-1}Y_1 + \frac{c}{a}X_1^{-1}Z_1\right) \oplus I \oplus I \oplus I \oplus I \oplus I \oplus I \oplus I,$$

$$I + \frac{b}{a}T_1^{\#}T_2e_2 = I \oplus \left(I + \frac{b}{a}X_2^{-1}Y_2\right) \oplus I \oplus I \oplus I \oplus I \oplus I \oplus I ,$$

$$I + \frac{c}{a}T_1^{\#}T_3e_3 = I \oplus I \oplus \left(I + \frac{c}{a}X_3^{-1}Z_3\right) \oplus I \oplus I \oplus I \oplus I \oplus I , \tag{3.8}$$

$$I+\frac{c}{b}T_2^{\#}T_3e_5 = I\oplus I\oplus I\oplus I\oplus\left(I+\frac{c}{b}Y_5^{-1}Z_5\right)\oplus I\oplus I\oplus I,$$

olduğunu belirtelim.(3.7) ve (3.8) den Φ nin tersinir olması için gerek ve yeter koşul $e_8 = 0$ ve (3.4) bağıntısının sağlanmasıdır.

Sonuç 3.1. $P_1, P_2, P_3 \in \Phi$ k-potentler ve Φ de

$\left(-\frac{b}{a}\right)^{k-1} \neq 1,\ \left(-\frac{c}{a}\right)^{k-1} \neq 1,\ \left(-\frac{c}{b}\right)^{k-1} \neq 1$

olmak üzere

$\Phi = aP_1 + bP_2 + cP_3, \qquad a, b \in X \square \{0\}, \qquad c \in X$

şeklinde bir lineer kombinasyonu olsun. Bu takdirde Φ nin tersinir olması için gerek ve yeter koşul $I + P_1^{\#}\left(\frac{b}{a}P_2 + \frac{c}{a}P_3\right)e_1$ matrisinin tersinir ve $e_8 = 0$ olmasıdır.

İspat. Teorem 3.1 in ispatındaki notasyonları kullanalım. $\left(-\frac{b}{a}\right)^{k-1} \neq 1$ ve $P_1^{\#}P_2e_2$ k-potent olduğundan $-\frac{a}{b} \notin \Omega_{k-1} \cup \{0\}$ ve $\sigma(P_1^{\#}P_2e_2) \subset \Omega_{k-1} \cup \{0\}$ olduğu görülür. Bu nedenle $-\frac{a}{b}I - P_1^{\#}P_2e_2$ tersinirdir yani $I + \frac{b}{a}P_1^{\#}P_2e_2$ tersinirdir. Benzer şekilde $I + \frac{c}{a}P_1^{\#}P_3e_3$ ve $I + \frac{c}{b}P_2^{\#}P_3e_5$ nin de tersinir olduğu görülür. Sonuç Teorem 3.1 den kolayca elde edilir.

Teorem 3.1 de $T_3 = 0$ olsun. Bu takdirde $e_i = 0, i \in \{1, 3, 5, 7\}$, $e_j, j \in \{2, 4, 6, 8\}$ sırasıyla

$$e_1' = (I - T_1^{\pi})(I - T_2^{\pi}),\ e_2' = (I - T_1^{\pi})T_2^{\pi},\ e_3' = T_1^{\pi}(I - T_2^{\pi}),\ e_4' = T_1^{\pi}T_2^{\pi}, \qquad (3.9)$$

olarak yeniden yazılabilir. Aşağıdaki sonuçlar teorem 3.1 den türetilmiştir.

Sonuç 3.2. $P_1, P_2 \in B(H)$ grup tersinir ve değişmeli operatörler, e_i', $i = \overline{1,4}$ (3.9) daki gibi tanımlı ve Φ′ de

$\Phi' = aP_1 + bP_2,\ a, b \in X \square \{0\}.$

biçiminde bir lineer kombinasyon olsun. Φ′ nün tersinir olması için gerek ve yeter koşul $I + \frac{b}{a}P_1^{\#}P_2e_1'$ nün tersinir ve $e_4' = 0$ olmasıdır. Buna ilaveten eğer P_1, P_2 matrisleri k-potentler ve $\left(-\frac{b}{a}\right)^{k-1} \neq 1$ ise bu takdirde

Φ' tersinirdir $\Leftrightarrow e'_4 = 0 \Leftrightarrow N(P_1) \cap N(P_2) = \{0\}$ (3.10)

olacaktır.

İspat . Teorem 3.1 de $P_3 = 0$ ve Sonuç 3. 1 de $c = 0$ alınarak iddia doğrulanır.

Hatırlatma 3.1. Teorem 3.2.1' in ispatına göre Sonuç 3.2 de verilen P_1, P_2 ve Φ' matrisleri sırasıyla $\oplus_{i=1}^{4} P(e'_i)$ uzay ayrışımına göre

$$P_1 = X_2 \oplus X_4 \oplus 0 \oplus 0\,,$$

$$P_2 = Y_2 \oplus 0 \oplus Y_6 \oplus 0\,,$$

$$\Phi' = (aX_2 + bY_2) \oplus aX_4 \oplus bY_6 \oplus 0$$

ye dönüşür. P_1, P_2 nin k-potent olması durumunda

$e'_4 = 0 \Leftrightarrow P_1^{k-1} + \left(I - P_1^{k-1}\right)P_2$ tersinirdir $\Leftrightarrow P_1 + \left(I - P_1^{k-1}\right)P_2$ tersinirdir.

Sonuç 3.2 de P_1, P_2 nin tripotent operatörler, a=1,b=-1 olması özel durumunu Liu'nun çalışmasında ispatlanmıştır.

Sonuç 3.3. $P_1, P_2 \in X^{nxn}$ iki değişmeli tripotent olsun. Bu takdirde $P_1 - P_2$ nin nonsingüler olması için gerek ve yeter koşul $I_n - P_1P_2$ ve $P_1 + (I_n - P_1^2)P_2$ nin de non singüler olmasıdır.

Aşağıda verilen sonuçlar k-potentlere genelleştirilmiştir.

Teorem 3.2. $P_1, P_2, P_3 \in \Phi$ k-potentler ve $e_i, i = \overline{1,8,}$ (2) deki gibi tanımlı olsun. Φ ise $\Phi = aP_1 + bP_2 + cP_3$, $a, b, c \in X$ şeklinde bir lineer kombinasyon olsun. Bu takdirde Φ her zaman grup tersinirdir. Özel olarak $k = 2$ ise Φ nin m- potent olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} (a+b+c)^m = a+b+c, & e_1 \neq 0, \\ (a+b)^m = a+b, & e_2 \neq 0, \\ (a+c)^m = a+c, & e_3 \neq 0, \\ (b+c)^m = b+c\,, & e_5 \neq 0, \\ a^m = a, & e_4 \neq 0, \\ b^m = b, & e_6 \neq 0, \\ c^m = c, & e_7 \neq 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

ve

$$\Phi^{\#} = (a+b+c)^{\#}e_1 + (a+b)^{\#}e_2 + (a+c)^{\#}e_3$$
$$+a^{\#}e_4 + (b+c)^{\#}e_5 + b^{\#}e_6 + c^{\#}e_7 \qquad (3.12)$$

olmasıdır.

İspat. Teorem 3.2.1 in ispatındaki notasyonları kullanalım. k-potentlik durumunda $I - P_i^{\pi} = P_i^{k-1}$, $i = 1,2,3$ olduğunu hatırlayalım. (3.7) den X_i, Y_j, Z_l k-potentleri $X_i^{k-1} = I, Y_j^{k-1} = I, Z_l^{k-1} = I$, $i\in\{1,2,3,4\}$, $j\in\{1,2,5,6\}$, $l \in \{1,3,5,7\}$ olmak üzere

$$\Phi=(aX_1 + bY_1 + cZ_1)e_1 + (aX_2 + bY_2)e_2 + (aX_3 + cZ_3)e_3 + aX_4e_4$$
$$+ (bY_5 + cZ_5)e_5 + bY_6e_6 + cZ_7e_7$$

olduğunu biliyoruz. Lemma 3.1.2 ye göre k-potent operatör köşegenleştirilebilirdir. X_1, Y_1, Z_1 sırasıyla X_2 ve Y_2; veya X_3 ve Z_3; veya Y_5 ve Z_5 k-potentler ve karşılıklı olarak komutatif olduklarından bunlar eş zamanlı olarak köşegenleştirilebilirdir. Bu nedenle öyle bir S tersinir operatörü vardır ki $S_1X_1S_1^{-1}, S_1Y_1S_1^{-1}, S_1Z_1S_1^{-1}$ in her birisi köşegen operatör olup onların köşegen elemanları asal çarpanlarla Ω_{k-1} e aittir. Böylece $aX_1 + bY_1 + cZ_1$ grup tersinirdir. Benzer şekilde $aX_2 + bY_2$, $aX_3 + cZ_3$, $gY_5 + cZ_5$ de grup tersinirdir. Eğer $k = 2$ ise bu takdirde (3.7) deki X_i, Y_j, Z_l operatörleri özdeşlik operatörü olup (3.11) ve (3.12) sağlanır.

Sonuç 3.4. $P_1, P_2 \in \Phi$ sıfırdan farklı iki farklı idempotent olsun ve Φ' de $\Phi' = aP_1 + bP_2$, $a, b \in X\square\{0\}$ şeklindeP_1 ve P_2nin bir lineer kombinasyonu olsun. Φ' nün idempotent olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki üç durumdan herhangi birinin sağlanmasıdır.

(i) a=1, b=1, $P_1P_2 = 0$;

(ii) a=1, b=-1, $\overline{P_1}P_2 = 0$;

(iii) a=-1, b=1, $P_1\overline{P_2} = 0$.

İspat. Teorem 3.2 de $m = 2$ ve $c = 0$ alınarak elde edilir.

3.3 $\mathbf{c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1^sP_2^{k-1-s}}$ Formundaki Kombinasyonların Özellikleri

P_1 ve P_2 iki k-potent matris olsun. Öncelikle $c_1P_1 + c_2P_2 - (c_1 + c_2)P_1^{k-1}P_2$ lineer kombinasyonunun çekirdeğinin $c_1, c_2 \in X\square\{0\}$ ların seçiminden bağımsız olduğunu gösterelim.

Teorem 3.3. P_1 ve P_2 iki k-potent matris ve $c_1, c_2 \in X\square\{0\}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler gerçekleşir.

(i) $N(P_1 - P_2) = N\left(c_1P_1 + c_2P_2 - (c_1 + c_2)P_1^{k-1}P_2\right)$

(ii) Eğer P_1 ve P_2 matrisleri komutatif ise bu takdirde herhangi bir $0<s<k$ pozitif tamsayısı için,

$$N(P_1 - P_2) = N\left(c_1P_1 + c_2P_2 - (c_1 + c_2)P_1^sP_2^{k-s}\right) \cap N(P_1^sP_2^{k-s} - P_2)$$

dir.

İspat. (i) Lemma 3.1 e göre $A \in B(P(P_1))$ matrisi tersinir ve $A^{k-1} = I$ olmak üzere P_1 ve P_2

$$P_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

ile verilir. Buradan

$$P_1 - P_2 = \begin{pmatrix} A - X & -Y \\ -Z & -W \end{pmatrix}$$

ve

$$c_1P_1 + c_2P_2 - (c_1 + c_2)P_1^{k-1}P_2 = \begin{pmatrix} c_1(A - X) & -c_1Y \\ c_2Z & c_2W \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu durum $N(P_1 - P_2) = N\left(c_1P_1 + c_2P_2 - (c_1 + c_2)P_1^{k-1}P_2\right)$ olduğunu gösterir.

(ii) P_1 ve P_2 matrisleri komutatif matrisler olduğundan bunlar aynı zamanda köşegenleştirilebilirdir ve dolayısıyla $p(\lambda, \mu) = \lambda - \mu$, $q(\lambda, \mu) = c_1\lambda + c_2\mu - (c_1 + c_2)\lambda^s\mu^{k-s}$, $r(\lambda, \mu) = \lambda^s\mu^{k-s} - \mu$, ile verilen

$p,q,r : (\Omega_{k-1}\cup\{0\})x(\Omega_{k-1}\cup\{0\}) \to X$ için

$$p(\lambda, \mu) = 0 \Leftrightarrow q(\lambda, \mu) = 0 \text{ ve } r(\lambda, \mu) = 0 \tag{3.14}$$

ifadesinin sağlandığını ispatlamak yeterlidir. Bu durumda

(a) $\lambda=\mu=0$,

(b) $\lambda=0$, $\mu\neq 0$,

(c) $\lambda\neq 0$, $\mu=0$,

(d) $\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$ dört durumu göz önüne alınarak (3.14) ün sağlandığı görülür. Dolayısıyla (ii) ispatlanmış olur.

P_1, P_2 matrisleri sıfırdan farklı k-potentler olsun. (3.13) bağıntısına göre $P_1P_2 = 0$ eşitliği $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Z & W \end{pmatrix}$ yı sağlar. Dolayısıyla $c_1P_1 + c_2P_2 = \begin{pmatrix} c_1A & 0 \\ c_2Z & c_2W \end{pmatrix}$ ve $P_1 + P_2 - P_2P_1^{k-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}$ elde edilir. Böylece $c_1, c_2 \in X\square\{0\}$ için $c_1P_1 + c_2P_2$ nin tersinir olması için gerek ve yeter koşul $P_1 + P_2 - P_2P_1^{k-1}$ nin tersinir olmasıdır. $P_1P_2 \neq 0$ durumu için aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.4. P_1, P_2 , $P_1P_2\neq 0$ ve $k\geq 3$ olacak şekilde sıfırdan farklı k-potentler olsun. $c_1, c_2 \in X\square\{0\}$, $c_3 \in X$ ve $0<s<k-1$ pozitif tamsayısı için

(i) Eğer $P_2^{k-1}P_1 = P_1^{k-1}P_2$ ve $(c_1 + c_2)^{k-1} \neq c_3^{k-1}$ ise
$c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1^sP_2^{k-1-s}$ tersinirdir $\Leftrightarrow$ $P_1 + P_2 - P_2P_1^{k-1}$ tersinirdir.

(ii) Eğer $P_2^{k-1}P_1 = P_1^{k-1}P_2$ ve $(c_1 + c_2)^{k-1} = c_3^{k-1}$ ise

$c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1^sP_2^{k-1-s}$ ve $\sum_{i=1}^{k-2} c_3^{k-2-i}(c_1P_1 + c_2P_2)^i + c_3^{k-2}P_1^sP_2^{k-1-s}$

den en az birisi tersinirdir.

İspat. (i) (3.13) ile eğer $P_2^{k-1}P_1 = P_1^{k-1}P_2$ ise

$Y=0$, $X^{k-1}A = X \neq 0$, $\sum_{i=0}^{k-2} W^iZX^{k-2-i} = 0$

olduğu sonucunu çıkartırız. P_2 matrisi k-potent ve

$$P_2 = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^k & 0 \\ \sum_{i=0}^{k-1} W^iZX^{k-1-i} & W^k \end{pmatrix} = P_2^k,$$

olduğu için

X ve W k-potentler ve $Z=\sum_{i=0}^{k-1} W^iZX^{k-1-i}$ yani $X^2 = XA$,

$$Z = \sum_{i=0}^{k-1} W^iZX^{k-1-i} = \left(\sum_{i=0}^{k-2} W^iZX^{k-2-i}\right)X + W^{k-1}Z = W^{k-1}Z \qquad (3.15)$$

ve

$$Z = \sum_{i=0}^{k-1} W^i Z X^{k-1-i} = ZX^{k-1} + W\left(\sum_{i=0}^{k-2} W^i Z X^{k-2-i}\right) = ZX^{k-1} \tag{3.16}$$

dir.

$$P_1 + P_2 - P_2 P_1^{k-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

olduğunu belirtelim.

$P(P_1) = P(X) \oplus N(X)$ ve $N(P_1) = P(W) \oplus N(W)$ olduğundan P_1 ve P_2 4x4 lük operatör matris şeklinde yazılabilir:

$$P_1 = \begin{pmatrix} A_3 & A_4 & 0 & 0 \\ A_2 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_1 & Z_2 & W_1 & 0 \\ Z_3 & Z_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

$X_1^{k-1} = I$ ve $W_1^{k-1} = I$ dir. $X^2 = XA$ dan biz $A_3 = X_1$ ve $A_4 = 0$ elde ederiz.

$A = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}$ tersinir ve $A^{k-1} = I$ olduğunu belirtelim. Böylece A_1 tersinir ve $A_1^{k-1} = I$ dır. (3.15) ve (3.16) ile

$$W^{k-1}Z = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix} = ZX^{k-1} = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde ederiz. Bunu $Z_2 = 0$, $Z_3 = 0$, $Z_4 = 0$ takip eder. Böylece (3.18) ile

$$c_1 P_1 + c_2 P_2 - c_3 P_1^s P_2^{k-1-s} =$$

$$= \begin{pmatrix} (c_1 + c_2)X_1 - c_3 I & 0 & 0 & 0 \\ c_1 A_2 - c_3 \sum_{i=0}^{s-1} A_1^i A_2 X_1^{k-2-i} & c_1 A_1 & 0 & 0 \\ c_2 Z_1 & 0 & c_2 W_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

olacaktır. A_1, X_1 ve W_1 tersinir k-potentler olduğu durumda

$$\left((c_1 + c_2)X_1 - c_3 I\right).\left([(c_1 + c_2)X_1]^{k-2} + [(c_1 + c_2)X_1]^{k-3} c_3 + [(c_1 + c_2)X_1]^{k-4} c_3^2 + \cdots + c_3^{k-2} I\right) = \left((c_1 + c_2)^{k-1} - c_3^{k-1}\right) I \tag{3.20}$$

eşitliği elde edilir. $(c_1 + c_2)^{k-1} \neq c_3^{k-1}$ den $(c_1 + c_2)X_1 - c_3 I$ ifadesinin her zaman tersinir olduğunu elde ederiz. Şimdi (3.19) ifadesi $c_1 P_1 + c_2 P_2 - c_3 P_1^s P_2^{k-1-s}$ tersinirdir ancak ve ancak N(W)=0 olduğunu ima eder. (3.17) den

N(W)=0⇔W tersinirdir ⇔$P_1 + P_2 - P_2P_1^{k-1}$ tersinirdir.

Buradan $c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1^sP_2^{k-1-s}$ ifadesinin tersinir olması için gerek ve yeter koşul $P_1 + P_2 - P_2P_1^{k-1}$ ifadesinin tersinir olmasıdır.

(ii) Eğer $(c_1 + c_2)^{k-1} = c_3^{k-1}$ ise (3.20) den $(c_1 + c_2)X_1 - c_3I$ ve

$[(c_1 + c_2)X_1]^{k-2} + [(c_1 + c_2)X_1]^{k-3}c_3 + [(c_1 + c_2)X_1]^{k-4}c_3^2 + \cdots + c_3^{k-2}I$

işlemcilerinden birinin tersinir olmadığını ve bu durum ise

$c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1^sP_2^{k-1-s}ve\sum_{i=1}^{k-2} c_3^{k-2-i}(c_1P_1 + c_2P_2)^i + c_3^{k-2}P_1^sP_2^{k-1-s}$

işlemcilerinden birinin tersinir olmadığını ifade eder.

Hatırlatma 3.2. (1) Teorem 3.3.2 deki (i) şıkkı $c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1^sP_2^{k-1-s}$ matrisinin tersinir olma şartının $c_1P_1 + c_2P_2 - c_3I$ matrisinin tersinir olma şartının eşdeğer olduğunu gösterir. Benzer şekilde aynı teoremin (ii) şıkkı ise

$c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1^sP_2^{k-1-s}$ ve $\sum_{i=1}^{k-2} c_3^{k-2-i}(c_1P_1 + c_2P_2)^i + c_3^{k-2}P_1^sP_2^{k-1-s}$

operatörlerinden en az birinin tersinir olmama şartıyla $c_1P_1 + c_2P_2 - c_3I$ ve $\sum_{i=0}^{k-2} c_3^{k-2-i}(c_1P_1 + c_2P_2)^i$ operatörlerinden en az birinin tersinir olmaması şartıyla yer değiştirebildiğini gösterir.

(2) Teorem 3.3 nin (i) şıkkında eğer P_2 tersinir ise bu durumda (3.18) ve (3.19) bağıntılarındaki 2. ve 4. satır ve sütunlar kalkacaktır. Böylece $P_1 = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $P_2 = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ Z_1 & W_1 \end{pmatrix}$ olacaktır. Buradan da $P_1 + P_2 - P_2P_1^{k-1} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & W_1 \end{pmatrix}$ nin tersinir olduğu açıktır. Böylece $c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1^sP_2^{k-1-s} = \begin{pmatrix} (c_1 + c_2)X_1 - c_3I & 0 \\ c_2Z_1 & c_2W_1 \end{pmatrix}$ matrisi her zaman tersinirdir. Öte yandan

$$((c_1 + c_2)^{k-1} - c_3^{k-1})((c_1 + c_2)X_1 - c_3I)^{-1}$$

$$= [(c_1 + c_2)X_1]^{k-2} + [(c_1 + c_2)X_1]^{k-3}c_3 + [(c_1 + c_2)X_1]^{k-4}c_3^2 + \cdots + c_3^{k-2}I$$

$$= c_3^{k-2-i}\sum_{i=0}^{k-2}\left((c_1 + c_2)X_1\right)^i$$

ve

$$\left(c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1^sP_2^{k-1-s}\right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} ((c_1+c_2)X_1 - c_3I)^{-1} & 0 \\ -W_1^{-1}Z_1((c_1+c_2)X_1 - c_3I)^{-1} & \frac{1}{c_2}W_1^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -W_1^{-1}Z_1 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ((c_1+c_2)X_1 - c_3I)^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_2}W_1^{-1} \end{pmatrix}$$

olduğunu belirtelim. Buradan gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\left(c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1^sP_2^{k-1-s}\right)^{-1}$$

$$= \left[I + P_2^{k-2}(P_1 - P_2)P_1^{k-1}\right].\left[\frac{c_3^{k-2-i}}{(c_1+c_2)^{k-1} - c_3^{k-1}}P_1^{k-1}\sum_{i=0}^{k-2}((c_1+c_2)P_1)^i + \frac{1}{c_2}P_2^{k-2}\left(I - P_1^{k-1}\right)\right] \tag{3.21}$$

elde edilir.

(3) Teorem 3.3 ün (i) şıkkında eğer P_1 matrisi tersinir ise bu durumda P_1 ve P_2

$P_1 = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$ ve $P_2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ile gösterilebilir. Burada $A^{k-1} = I$ ve $A \in B(P(P_2))$ dir. $P_1^{k-1}P_2 = P_2^{k-1}P_1$ şartı $Y = 0$ ve $X = A$ olmasını sağlar. P_1 matrisinin tersinir olması A ve W nin tersinir k-potent olduklarını gösterir. Böylece $P_1 + P_2 - P_2P_1^{k-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ Z & W \end{pmatrix} = P_1$ tersinirdir. Bu durumda

$$c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1^sP_2^{k-1-s} = \begin{pmatrix} (c_1+c_2)A - c_3I & 0 \\ c_1Z - c_3DA^{k-1-s} & C_1W \end{pmatrix}$$

matrisi de tersinirdir. Burada herhangi bir D operatörü için $P_1^s = \begin{pmatrix} A^s & 0 \\ D & W^s \end{pmatrix}$ matrisidir. $(c_1+c_2)^{k-1} \neq c_3^{k-1}$ olduğundan $(c_1+c_2)A - c_3I$ tersinir olup direkt bir hesaplamayla

$$\left(c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1^sP_2^{k-1-s}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{c_1}P_1^{k-2}\left(I - P_2^{k-1}\right) + \left[I - \frac{1}{c_1}P_1^{k-2}\left(I - P_2^{k-1}\right)(c_1P_1 - c_3P_1^sP_2^{k-1-s})\right] x \left[\frac{c_3^{k-2-i}}{(c_1+c_2)^{k-1} - c_3^{k-1}}P_2^{k-1}\sum_{i=0}^{k-2}((c_1+c_2)P_2)^i\right] \tag{3.22}$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç 3.5. P_1, P_2 sıfırdan farklı tripotentler olmak üzere bunlardan birisi tersinir olsun. $P_1^2 P_2 = P_2^2 P_1$ ve $c_1, c_2 \in X\backslash\{0\}$, $c_3 \in X$ olsun. Eğer $(c_1 + c_2)^2 = c_3^2$ ise $c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1P_2$ veya $c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_1P_2$ tersinir olamaz. Eğer $(c_1 + c_2)^2 \neq c_3^2$ ise $c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1P_2$ tersinirdir. Ayrıca eğer P_1 matrisi tersinir ise

$$(c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1P_2)^{-1} = \frac{1}{c_1}(P_1 - P_1P_2^2)$$
$$+\frac{1}{(c_1 + c_2)^2 - c_3^2}(I - \frac{1}{c_1}(P_1 - P_1P_2^2)(c_1P_1 - c_3P_1P_2))(c_3P_2^2 + (c_1 + c_2)P_2)$$

dır. Eğer, P_2 matrisi tersinir ise o zaman

$$(c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1P_2)^{-1} = [I + P_2(P_1 - P_2)P_1^2]$$
$$\text{x}\left[\frac{1}{(c_1 + c_2)^2 - c_3^2}(c_3P_1^2 + (c_1 + c_2)P_1) + \frac{1}{c_2}P_2(I - P_1^2)\right]$$

olacaktır.

P_1, P_2 matrisleri Sonuç 3.3.1 in şartlarını sağlasın. Bu durumda $(c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1P_2)^{-1}$ in iki gösterimi aşağıdaki gibi verilebilir.

(1) Eğer P_1 nonsingüler ise

$$[(c_1 + c_2)^2 - c_3^2](c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1P_2)^{-1}$$
$$= (c_1 + c_2)P_1 + c_3P_2^2 + c_1^{-1}c_2c_3(P_2^2 - P_1P_2)$$
$$+c_1^{-1}c_3^2(P_2 - P_1P_2^2) + c_1^{-1}(c_2^2 + c_1c_2 - c_3^2)(P_1 - P_1P_2^2) \qquad (3.23)$$

olacaktır.

(2) Eğer P_2 nonsingüler ise

$$[(c_1 + c_2)^2 - c_3^2](c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1P_2)^{-1}$$
$$= (c_1 + c_2)P_1 - c_3(2P_1^2 - P_1P_2) + c_2^{-1}(c_1^2 + c_1c_2 - c_3^2)(P_2 - P_2P_1^2) \qquad (3.24)$$

dir. (3.23) ve (3.24) formüllerinin Sonuç 3.3.1 deki formüllerden olduğunu belirtelim. Öte yandan Teorem 3.3 deki formüller (3.21) ve (3.22) formüllerinin özel durumları olup $k \geq 3$ ve $0 < s < k - 1$ herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere herhangi k-potentler için gerçeklenir. Üstelik sonuç 3.3.1 de eğer $c_3 = 0$ ise Sonuç 3.3.1 e dönüşür.

Sonuç 3.6. P_1, P_2 sıfırdan farklı tripotentler olmak üzere bunlardan bir tanesi tersinir olsun. $P_1^2 P_2 = P_2^2 P_1$ ve $c_1, c_2 \in X\square\{0\}$ olsun. Bu takdirde $c_1 P_1 + c_2 P_2$ nin tersinir olması için gerek ve yeter koşul $c_1 + c_2 \neq 0$ olmasıdır. Bu durumda eğer P_1 nonsingüler ise

$$(c_1 P_1 + c_2 P_2)^{-1} = \frac{1}{c_1 + c_2}(P_1 + c_2 c_1^{-1} P_1 (I - P_2^2))$$

ve eğer P_2 nonsingüler ise

$$(c_1 P_1 + c_2 P_2)^{-1} = \frac{1}{c_1 + c_2}(P_2 + c_1 c_2^{-1} P_2 (I - P_1^2))$$

olacaktır.

İspat. Sadece P_2 nin tersinir olma durumunu göz önüne alalım. Diğer durum aynı şekilde ispatlanabilir. P_2 nin tersinirliğinden $P_2^2 = I$, $P_1 = P_1^2 P_2$ ve $P_1^2 = P_1 P_2$ olduğu görülür. Bu durumda sonuç 3.3.1 e göre

$$\begin{aligned}
(c_1 P_1 + c_2 P_2)^{-1} &= [(I + P_2(P_1 - P_2)P_1^2] x \left[\frac{1}{(c_1 + c_2)^2}(c_1 + c_2) P_1 + \frac{1}{c^2} P_2 (I - P_1^2)\right] \\
&= \frac{1}{c_1 + c_2}[I - P_1^2 + P_2 P_1] x \left[P_1 + \frac{c_1 + c_2}{c_2} P_2 (I - P_1^2)\right] \\
&= \frac{1}{c_1 + c_2}\left[P_2 P_1^2 + \frac{c_1 + c_2}{c_2} P_2 (I - P_1^2)\right] \\
&= \frac{1}{c_1 + c_2}[P_2 + c_1 c_2^{-1} P_2 (I - P_1^2)]
\end{aligned}$$

dir. $P_1^{k-1} P_2 = P_2^{k-1} P_1$, $c_1, c_2 \in X\square\{0\}$, $c_1 + c_2 \neq 0$ olmak üzere P_1, P_2 iki k-potent matris ($k \geq 3$) olsun. Bu durumda $P_1^{\#} = P_1^{k-2}$ ve $P_2^{\#} = P_2^{k-2}$ olacaktır. Böylece (3.19) bağıntısından

$$c_1 P_1 + c_2 P_2 = \begin{pmatrix} (c_1 + c_2) X_1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 A_2 & c_1 A_1 & 0 & 0 \\ c_2 z_1 & 0 & c_2 W_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Teorem 3.5. $P_1, P_2, P_1^{k-1}P_2 = P_2^{k-1}P_1$ olacak şekilde sıfırdan farklı k-potentler olsun. $c_1, c_2 \in X \setminus \{0\}$, $c_3 \in X$ olmak üzere $c_1 + c_2 \neq c_3$ ve s de $0 < s < k - 1$ olacak şekilde bir pozitif tamsayı olsun. Bu takdirde

$c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1^sP_2^{k-s}$ tersinirdir $\Leftrightarrow$ $P_1 + P_2 - P_2P_1^{k-1}$ tersinirdir.

İspat. $P_1^{k-1}P_2 = P_2^{k-1}P_1$ ise Teorem 3.3 ün (i) şıkkının ispatından A_1, X_1, W_1 tersinir k-potentler olmak üzere

$$c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1^sP_2^{k-s} = \begin{pmatrix} (c_1 + c_2 - c_3)X_1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1A_2 - \sum_{i=0}^{s-1} A_1^i A_2 X_1^{k-1-i} & c_1A_1 & 0 & 0 \\ c_2z_1 & 0 & c_2W_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

elde edilir. $c_1 + c_2 \neq c_3$ olduğundan

$c_1P_1 + c_2P_2 - c_3P_1^sP_2^{k-s}$ tersinirdir

$\Leftrightarrow$ N (W)={0}

$\Leftrightarrow$ W matrisi tersinir

$\Leftrightarrow$ $P_1 + P_2 - P_2P_1^{k-1}$ matrisi tersinirdir.

4. İDEMPOTENT MATRİSLERİN LİNEER KOMBİNASYONLARI

4.1. İki İdempotent Matrisin Lineer Kombinasyonlarının İdempotentliği

Φ bir cisim $c_1, c_2 \in \Phi$ sıfırdan farklı cismin elemanı P_1, P_2 Φ cismi üzerinde iki farklı idempotent matris yani $P_1 = P_1^2$, $P_2 = P_2^2$ ve $P_1 \neq P_2$ olsun. Bu kısımda P_1 ile P_2 nin lineer kombinasyonlarının idempotentlik özelliğini sağladığı tüm durumların karakterizasyonu problemine çözüm aranacaktır. Bununla ilgili olarak idempotent matrislerin lineer kombinasyonlarının idempotentliğiyle ilgili aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1. P_1, P_2 sıfırdan farklı iki idempotent matris c_1, c_2 sıfırdan farklı skalerler olmak üzere

$$P = c_1 P_1 + c_2 P_2 \tag{4.1}$$

formundaki lineer kombinasyonunu göz önüne alalım. Bu durumunda P matrisinin idempotent olduğu dört durum söz konusudur.

(a) $P_1 P_2 = P_2 P_1$;

(i) $c_1 = 1 , c_2 = 1 , P_1 P_2 = 0$;

(ii) $c_1 = 1 , c_2 = -1 , P_1 P_2 = P_2$;

(iii) $c_1 = -1 , c_2 = 1 , P_1 P_2 = P_1$;

(b) $P_1P_2 \neq P_2P_1$; $c_1 \in \Phi$□$\{0,1\}$, $c_2 = 1 - c_1$, $(P_1 - P_2)^2 = 0$

İspat. Direkt bir hesaplamayla (4.1) deki P matrisinin idempotent olması için gerek ve yeter şart

$$c_1(1 - c_1)P_1 - c_1c_2P_1P_2 - c_1c_2P_2P_1 + c_2(1 - c_2)P_2 = 0 \tag{4.2}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Bu nedenle teoremin yeterlilik kısmı kolayca elde edilir. Gerekliliğin ispatı ise (a) ve (b) durumlarına karşılık olarak sırasıyla $P_1P_2 = P_2P_1$ ve $P_1P_2 \neq P_2P_1$ eşitliklerinin gösterilmesine dönüşür. Bu durumda (4.2) ifadesini önce P_1 ile sonra da P_2 ile soldan çarpmak suretiyle sırasıyla

$$c_1(1 - c_1)P_1 + c_2(1 - 2c_1 - c_2)P_1P_2 = 0, \tag{4.3}$$
$$c_2(1 - c_2)P_2 + c_1(1 - c_1 - 2c_2)P_1P_2 = 0, \tag{4.4}$$

eşitlikleri ve (4.3) eşitliğini P_2 ile sağdan (4.4) eşitliğini ise P_1 ile soldan çarparak

$$[c_1 + c_2 - (c_1 + c_2)^2]P_1P_2 = 0, \tag{4.5}$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda (4.3) ve (4.4) ten kolayca görülür ki $P_1P_2 = 0$ ise $P_1 \neq 0$, $P_2 \neq 0$ ve $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ durumları göz önüne alınarak hem c_1 in hem c_2 nin 1'e eşit olması gerektiği dolayısıyla (i) ifadesinin sağlandığı görülür. Öte yandan eğer $P_1P_2 \neq 0$ ise (4.5) eşitliğinden

$$c_1 + c_2 = 1 \tag{4.6}$$

veya

$$c_1 + c_2 = 0 \tag{4.7}$$

olduğu görülür. Bu takdirde (4.3) ve (4.4) eşitlikleri (4.6) dikkate alındığında

$$c_1c_2(P_1 - P_1P_2) = 0 \text{ ve } c_1c_2(P_2 - P_1P_2) = 0 \tag{4.8}$$

ve (4.7) dikkate alındığında

$$c_1(1 - c_1)(P_1 - P_1P_2) = 0 \text{ ve } c_1(1 + c_1)(P_2 - P_1P_2) = 0 \tag{4.9}$$

olduğu görülür. $P_1 \neq P_2$ varsayımı gözönüne alındığında $P_1P_2 = P_1$ ve $P_1P_2 = P_2$ eşitliklerinin her ikisi de aynı anda sağlanmaz. Sonuç olarak $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ olduğundan (4.9) şartları sağlanırken (4.8) şartlarının asla sağlanmaması için gerek ve yeter koşul $c_1 = 1$ (dolayısıyla $c_2 = -1$) ve $P_1P_2 = P_2$ olmasıdır ki bu (ii) durumudur ya da $c_1 = -1$ (dolayısıyla $c_2 = 1$) ve $P_1P_2 = P_1$ olmasıdır ki bu ise (iii) durumudur.

Şimdi tekrar (4.2) gerek ve yeter şartına dönelim. Bunu P_1 ile soldan ve sağdan çarpmak suretiyle sırasıyla

$$c_1(1 - c_1)P_1 + c_2(1 - c_1 - c_2)P_1P_2 - c_1c_2P_1P_2P_1 = 0,$$

$$c_1(1 - c_1)P_1 + c_2(1 - c_1 - c_2)P_2P_1 - c_1c_2P_1P_2P_1 = 0$$

elde edilir. Bu nedenle

$$c_2(1 - c_1 - c_2)(P_1P_2 - P_2P_1) = 0, \tag{4.10}$$

eşitliği sağlanır. Öte yandan (b) durumunda $c_2 \neq 0$ şartı $P_1P_2 \neq P_2P_1$ şartı ile denk olduğundan kolayca görülür ki (4.10) eşitliği (4.6) eşitliğine denktir. (4.6) eşitliği (4.2) de yerine yazılırsa

$$c_1c_2(P_1 - P_1P_2 - P_2P_1 + P_2) = 0,$$

eşitliği elde edilir. Burada $c_1c_2 \neq 0$ olacağından (b) deki son koşul sağlanmış olur ve böylece teoremin ispatı tamamlanır.

P_1 ve P_2 idempotent matrislerinin diğer fonksiyonları literatürde geniş bir şekilde çalışılmıştır. P_1 ve P_2 nin hermityen olması durumundaki idempotent durumları için bakınız [2,5].

Sonuç 4.1. Teoremin varsayımları altında $P = c_1P_1 + c_2P_2$ matrisinin idempotent bir matris olması için bir gerek şart P_1P_2 ve P_2P_1 çarpımlarının her ikisinin de bir idempotent olmasıdır.

İspat. Yukarıdaki teoremin (a) kısmında bu sonucun iddiası açıkça verilmiştir. (b) durumunda

$$P_1 - P_1P_2 - P_2P_1 + P_2 = 0, \qquad (4.11)$$

alınır ve (4.11) ifadesi P_1 ile soldan çarpılırsa $P_1 = P_1P_2P_1$ eşitliği elde edilir ki bu da P_1P_2 ve P_2P_1 in her ikisinin de idempotent olduğunu gösterir.

Tersi durum P_1, P_2 matrislerinin kompleks matrisler ve farklarının da bir hermityen matris olması özel durumuyla ilgilidir. Bu iddia açıkça hem P_1 hem de P_2 nin hermityen olduğu durumla uyuşmaktadır.

Sonuç 4.2. Q_1, Q_2 sıfırdan farklı iki farklı kompleks idempotent matris olmak üzere $Q_1 - Q_2$ farkı hermityen olsun. Ayrıca α_1, α_2 sıfırdan farklı sayılar olmak üzere $Q = \alpha_1Q_1 + \alpha_2Q_2$ lineer kombinasyonu verilsin. Bu takdirde Q matrisinin de idempotent olduğu üç durum söz konusudur:

(i) $Q = Q_1 + Q_2$ ve $Q_1Q_2 = 0 = Q_2Q_1$,

(ii) $Q = Q_1 - Q_2$ ve $Q_1Q_2 = Q_2 = Q_2Q_1$,

(iii) $Q = -Q_1 + Q_2$ ve $Q_1Q_2 = Q_1 = Q_2Q_1$.

İspat. Yukarıda verilen teoreme göre (b) de verilen ifadenin $Q_1 - Q_2$ farkı bir hermityen matris olması durumunda sağlandığını göstermek yeterlidir. $(Q_1 - Q_2)^2 = 0$ eşitliği aynı zamanda $(Q_1 - Q_2)(Q_1 - Q_2)^* = 0$ şeklinde yeniden ifade edilebileceğinden $Q_1 - Q_2$ nin hermityen olduğu bir gerçektir. Bu nedenle $Q_1 = Q_2$ aşikar durumu hariç bu durum imkansızdır. Basit bir örnek olarak

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrislerini göz önüne alalım. Her iki matris de idempotent olduğundan $P_1P_2 = P_2$ ve $P_2P_1 = P_1$ eşitliklerinden $P_1P_2 \neq P_2P_1$ olmak üzere $(P_1 - P_2)^2 = P_1 - P_1P_2 - P_2P_1 + P_2 = 0$ olduğu görülür. Böylece teoremin (b) kısmı sağlanır. Öte yandan sıfır ve birden farklı herhangi bir c skaleri için

$$P = c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (1-c)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-c & 1 \end{pmatrix}$$

formundaki her matris de idempotenttir.

İkinci bir örnek olarak

$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

alınırsa Sonuç 4.2 deki varsayımlardan $Q_1 - Q_2$ farkının bir hermityen matris olduğu kolayca görülür. Bu durum hem Q_1 in hem de Q_2 nin hermityen matris olmasını gerektirdiğinden daha zayıf bir koşuldur. Dolayısıyla sonuç 4.2 deki koşullar Q_1Q_2 ve Q_2Q_1 çarpımlarının her ikisine de karşılık gelir.

4.2 Bir İdempotent Matrisle Bir Tripotent Matrisin Lineer Kombinasyonlarının İdempotentliği

Bu kısımda A bir idempotent matris ve B de bir tripotent matris olmak üzere $C = c_1A + c_2B$ şeklindeki lineer kombinasyonun bir idempotent matris olmasını karakterize eden bazı ifadeler verilecektir.

$A \in X_{n,n}$ bir idempotent matris, $B \in X_{n,n}$ bir tripotent matris yani $A^2 = A$ ve $B^3 = B$ olsun. Bir idempotent matrisin çok kullanışlı bir özelliği $B_1B_2 = 0$ ve $B_2B_1 = 0$ olmak üzere B_1 ve B_2 idempotent matrislerinin farkı olarak yazılabilmesidir.[7]

Bu kısımda A ve B matrislerinin lineer kombinasyonlarının bir idempotent matris olması durumlarını karakterize eden problemlerin tam bir çözümü verilecektir.

B nin tripotentliğinin iki özel versiyonu vardır. Bunlardan birincisi B nin bir idempotent matris olmasıdır ki bu durumda $B_2 = 0$ olmak üzere B nin $B = B_1 - B_2$ biçiminde B_1 ve B_2 matrislerine parçalanışıdır.

Bu takdirde bir önceki kısımdaki teorem $C = c_1A + c_2B$ matrisinin $C = C^2$ eşitliğini sağlayabilmesi için tam olarak dört durumun varlığını ifade eder.

(i) $c_1 = 1,\ c_2 = 1,\ AB_1 = 0 = B_1A$,

(ii) $c_1 = 1,\ c_2 = -1,\ AB_1 = B_1 = B_1A$,

(iii) $c_1 = -1,\ c_2 = 1,\ AB_1 = A = B_1A$,

(iv) $c_1,\ c_2 \neq 0,\ c_1 + c_2 = 1,\ AB_1 \neq B_1A, (A - B_1)^2 = 0$.

$-B$ nin idempotent bir matris olması olduğu ikinci özel versiyon $B_1 = 0$ olması anlamına gelir. Bu takdirde aynı teoreme göre $C = c_1A + c_2B$ matrisinin idempotent olduğu diğer bir durum söz konusudur.

(i) $c_1 = 1,\ c_2 = -1,\ AB_2 = 0 = B_2A$

(ii) $c_1 = 1,\ c_2 = 1,\ AB_2 = B_2 = B_2A$

(iii) $c_1 = -1,\ c_2 = -1,\ AB_2 = A = B_2A$

(iv) $c_1,\ c_2 \neq 0,\ c_1 - c_2 = 1,\ AB_2 \neq B_2A,\ (A - B_2)^2 = 0.$

Yukarıdaki bilgiler ışığı altında aşağıda hem B_1 in hem B_2 nin A sıfırdan farklı idempotent matrisler olması göz önüne alınacaktır. Bu durumda $B = B_1 - B_2$ matrisine bir esaslı tripotent matris adı verilecektir. Problemin genel çözümü Kısım 2 de verilmiştir. Kısım 3 te ise 2 ilave sonuç ve bazı durumlar ele alınmıştır. Bunlardan birincisi $C = c_1A + c_2(B_1 - B_2)$ lineer kombinasyonunun idempotentliğinin A ve $B_1 + B_2$ idempotent matrislerinin iki mümkün çarpımlarının idempotentliği ile nasıl bir ilişkisinin olduğunu açıklar.

2. sonuç ise $A - B_1$ ve $A - B_2$ farkları hermityen olduğundan nasıl bir çözümün söz konusu olduğunu gösterir. Bu varsayımlar A, B_1, B_2 matrislerinin hermityen olması durumuyla açık bir şekilde örtüşür.

Teorem 4.2. $A \in X_{n,n}$ sıfırdan farklı bir idempotent matris, $B \in X_{n,n}$,

$$B = B_1 - B_2 \tag{4.11}$$

şeklinde tek türlü olarak parçalanmış esaslı bir tripotent matris olsun. Burada $B_1 \in X_{n,n}$ ve $B_2 \in X_{n,n}$ sıfırdan farklı matrisler;

$$B_1 = B_1^2\ ,\quad B_2 = B_2^2\ ,\quad B_1B_2 = 0 = B_2B_1 \tag{4.12}$$

olacak şekilde verilmiş olsun. Yani $c_1, c_2 \in X$ sıfırdan farklı olmak üzere

$$C = c_1A + c_2B_1 - c_2B_2 \tag{4.13}$$

olsun. Bu takdirde C matrisinin bir idempotent matris olması için aşağıdaki durumlar sağlanır.

(a) $AB_1 = B_1A\ ,\quad AB_2 = B_2A$ (4.14) ve aşağıdaki koşullardan herhangi birisi sağlanır.

(a_1) $c_1 = 1, c_2 = 1,\ AB_1 = 0,\ AB_2 = B_2$,

(a_2) $c_1 = 2,\ c_2 = 1,\ A = B_2$,

(a_3) $c_1 = 1,\ c_2 = -1,\ AB_1 = B_1, AB_2 = 0$,

(a_4) $c_1 = 2,\ c_2 = -1,\ A = B_1$,

(a_5) $c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = \frac{1}{2},\ A = B_1 + B_2$,

(a_6) $c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = -\frac{1}{2},\ A = B_1 + B_2$,

(b) $AB_1 \neq B_1A,\ \ AB_2 \neq B_2A$ (4.15)

şartlarının yanında aşağıdakilerden birisi sağlanır.

(b_1) $c_1 = 2,\ c_2 = 1,\ (A - B_2)^2 = 0$,

(b_2) $c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = -\frac{1}{2},\ (A - B_2)^2 = B_1$,

(c) $AB_1 \neq B_1A,\ AB_2 = B_2A$ (4.16)

nın yanında aşağıdakilerden herhangi birisi sağlanırsa

(c_1) $c_1 = 2,\ c_2 = -1,\ (A - B_1)^2 = 0$,

(c_2) $c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = \frac{1}{2},\ (A - B_1)^2 = B_2$,

(d) $AB_1 \neq B_1A,\ \ AB_2 \neq B_2A$, (4.17)

ve $c_1 = 1$ olmak üzere c_2

$$(A - B_1)^2 - (A - B_2)^2 = c_2\,(B_1 + B_2) \tag{4.18}$$

denkleminin bir çözümüdür.

İspat. $A = A^2$ eşitliği ve (4.12) şartı gözönüne alındığında direkt bir hesaplama yapılarak (4.13) de verilen C matrisinin idempotent olması için gerek ve yeter şartın

$$c_1(1 - c_1)A - c_1c_2(AB_1 + B_1A) + c_1c_2(AB_2 + B_2A) + c_2(1 - c_2)B_1 - c_2(1 + c_2)B_2 = 0 \tag{4.19}$$

eşitliğinin sağlanması olduğu görülür.

İspatı (4.14)-(4.17) de verilen koşullara uygun olarak dört kısımda ele alalım. (4.14) şartları altında (4.19) eşitliği

$$c_1(1-c_1)A - 2c_1c_2(AB_1 - AB_2) + c_2(1-c_2)B_1 - c_2(1+c_2)B_2 = 0 \tag{4.20}$$

formuna indirgenir. (4.12) gözönüne alınırsa (4.20) denklemi sırasıyla B_1 ve B_2 ile sağdan çarparak

$$c_1(1-c_1-2c_2)AB_1 + c_2(1-c_2)B_1 = 0 \tag{4.21}$$

$$c_1(1-c_1+2c_2)AB_2 - c_2(1+c_2)B_2 = 0 \tag{4.22}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$ ve $c_2 \neq 0$ olduğundan

$$AB_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 1 \tag{4.23}$$

$$AB_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -1 \tag{4.24}$$

elde edilir.

$$(c_1+c_2)(1-c_1-c_2)AB_1 = 0, \tag{4.25}$$

$$(c_1-c_2)(1-c_1+c_2)AB_2 = 0, \tag{4.26}$$

eşitliklerinden kolayca görülür ki

$$AB_1 \neq 0 \Rightarrow c_1+c_2 = 0 \text{ veya } c_1+c_2 = 1, \tag{4.27}$$

$$AB_2 \neq 0 \Rightarrow c_1-c_2 = 0 \text{ veya } c_1-c_2 = 1, \tag{4.28}$$

dir. Bu durumda (4.23) ve (4.24) ifadeleri $AB_1 = 0$ ve $AB_2 = 0$ eşitliklerinin aynı anda sağlanamayacağını gösterir. İkinci ihtimal $AB_1 = 0$ ile $AB_2 \neq 0$ ifadelerini birlikte ele almaktır. Bu takdirde (4.23) ve (4.28) den $c_2 = 1$ olması gerektiği ve ayrıca $c_1 = 1$ veya $c_1 = 2$ olduğu görülür. Her iki durumda (4.22) şartı $AB_2 = B_2$eşitliğini sağlar. Fakat bir sonraki adımda (4.20) $A = B_2$ olmasını gerektirir. Bu durumlar (a_1) ve (a_2) deki şartların gerekliliğini gösterir. (a_3) ve (a_4) teki şartlarda benzer şekilde elde edilebilir. (4.24) ve (4.27) dikkate alındığında $AB_1 \neq 0$ ile $AB_2 \neq 0$ın birlikte ele alınması $c_2 = -1$ olduğunu ve dolayısıyla $c_1 = 1$ veya $c_1 = 2$ olması gerektiğini gösterir. Her iki durumda da (4.21) şartı $AB_1 = B_1$ eşitliğini sağlar. Fakat bir sonraki adımda (4.20) $A = B_1$ olmasını gerektirir. Son olarak $AB_1 \neq 0$ ile $AB_2 \neq 0$ ı birlikte göz önüne alalım. $c_1 \neq 0$ ve $c_2 \neq 0$ olduğundan (4.27) ve (4.28) den ya $c_1=\frac{1}{2}$, $c_2=\frac{1}{2}$ ya da $c_1=\frac{1}{2}$, $c_2=-\frac{1}{2}$ olduğu görülür. Her iki durumda da (4.21) ve (4.22) koşulları $AB_1 = B_1$, $AB_2 = B_2$ eşitliklerini sağlar ki bu durumda (4.20) a göre $A = B_1 + B_2$ elde edilir. Bu ise (a_5) ve (a_6)daki koşulların gerekliğini gösterir. (a_1)-(a_6) daki şartların yeterliliği (4.20) un basit bir doğrulanmasıyla aşağıdaki şekilde elde edilir. (a_2)de $A = B_2$ eşitliği $AB_1 = 0$ olmasını (a_4) de $A = B_1$ eşitliği $AB_2 = 0$ olmasını ve (a_5) ve (a_6) da ise $A = B_1 + B_2$ eşitliği hem $AB_1 = B_1$ hem de $AB_2 = B_2$ olmasını gerektirir. Böylece ispat tamamlanmış olur. İspatın geri kalan kısmında

$$c_1(1-c_1)AB_1 - c_1c_2(AB_1 + B_1AB_1) + c_1c_2B_2\,AB_1 + c_2(1-c_2)B_1 = 0, \tag{4.29}$$

$$c_1(1-c_1)B_1\,A - c_1c_2(B_1A + B_1AB_1) + c_1c_2B_1AB_2 + c_2(1-c_2)B_1 = 0, \tag{4.30}$$

$$c_1(1-c_1)AB_2 - c_1c_2B_1AB_2 + c_1c_2(AB_2 + B_2AB_2) - c_2(1+c_2)B_2 = 0, \tag{4.31}$$

$$c_1(1-c_1)B_2A - c_1c_2B_2AB_1 + c_1c_2(B_2A + B_2AB_2) - c_2(1+c_2)B_2 = 0, \tag{4.32}$$

eşitliklerini kullanacağız. Bu eşitlikler sırasıyla (4.19) bağıntısını B_1 ile sağdan B_1 ile soldan B_2 ile sağdan ve B_2 ile soldan çarpmak suretiyle elde edilir. (4.29) ve (4.30) ile daha sonra da (4.31) i (4.32) ile birleştirirsek

$$c_1(1-c_1-c_2)(AB_1 - B_1A) - c_1c_2(B_1AB_2 - B_2AB_1) = 0, \tag{4.33}$$

$$c_1(1-c_1+c_2)(AB_2 - B_2A) - c_1c_2(B_1AB_2 - B_2AB_1) = 0 \tag{4.34}$$

eşitlikleri elde edilir. $c_1 \neq 0$ ve (4.11) deki B matrisinin parçalanışındaki B_1 ve B_2 matrislerinin farklılığı göz önüne alınırsa (4.15) de verilen ifadedeki (4.34) ün açık bir sonucu olarak

$$c_1 - c_2 = 1 \tag{4.35}$$

elde edilir.(4.29) eşitliğinde $B_1AB_1 = AB_1$, $B_2AB_1 = 0$ ifadeleri yerine yazılırsa

$$c_1(1-c_1-2c_2)AB_1 + c_2(1-c_2)B_1 = 0 \tag{4.36}$$

ve dolayısıyla bu ifadeyi A ile soldan çarpar ve (4.35) bağıntısını kullanırsak

$$(1-c_1)(1-2c_1)AB_1 = 0 \tag{4.37}$$

elde edilir. $1 - c_1 = 0$ ile (4.35) i birleştirdiğimizde $c_2 = 0$ olacağından (4.37) eşitliği $AB_1 = 0$ veya $AB_1 \neq 0$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$ olmasını gerektirir. $c_2 \neq 0$ olduğunda ise (4.36) bağıntısından eğer $AB_1 = 0$ ise $c_2 = 1$ ve (4.35) e göre $c_1 = 2$ olduğu görülür. Böylece (4.19) gerek ve yeter şartı $A - AB_2 - B_2 A + B_2 = 0$ formunu ele alır. Bu ise bir taraftan $AB_1 = 0$ sağlarken diğer taraftan $(A - B_2)^2 = 0$ şeklinde yazılabileceğini gösterir. Böylece (b_1) durumunda gerekliliğin ispatı tamamlanmış olur. Öte yandan $AB_1 \neq 0$ ve $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$ olduğunda (4.36) nın açık bir sonucu $AB_1 = B_1$ olur. Bu durumda ise (4.19) şartı $A - AB_2 - B_2A + B_2 = B_1$ formunu alır ki bu açıkça $(A - B_2)^2 = B_1$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda (4.12) ve (4.15) in birinci kısmı göz önüne alınırsa $AB_1 = B_1$ olduğu görülür. Bu ise (b_2) nin gerekliliğinin ispatıdır. (b_1) ve (b_2) nin yeterliliği ise direkt bir hesaplama ile görülebilir. Öte yandan (4.13) ifadesindeki C matrisi $C = c_1A + (-c_2)(B_2 - B_1)$ şeklinde yazılabileceğinden (c) nin ispatı (b) nin ispatına benzer şekilde c_2 yerine $-c_2$ alıp B_1 ile B_2 nin rolleri değiştirilerek yapılabilir. (d) nin ispatı için öncelikle (4.33) ü B_2 ile sağdan veya (4.34) ü B_1 ile soldan çarparak

$$c_1(1 - c_1)B_1AB_2 = 0 \tag{4.38}$$

elde edelim. Daha sonra da (4.33) ü B_2 ile soldan (4.34) ü ise B_1 ile sağdan çarparak

$$c_1(1 - c_1)B_2AB_1 = 0 \tag{4.39}$$

elde edilir. Ayrıca (4.33) ve (4.34) den (d) durumunda $B_1AB_2 = B_2AB_1$ eşitliğinin sağlanmadığı görülür. Bu nedenle (4.38) ve (4.39) dan kolayca görülür ki $c_1 = 1$ olmalıdır. $c_2 \neq 0$ olduğunda (4.19) bağıntısından problemin (4.17) ye ilaveten AB_1 ve B_2 matrislerinin hem $B_1AB_2 \neq B_2AB_1$ hem de

$$AB_1 + B_1A - AB_2 - B_2A - (1 - c_2)B_1 + (1 + c_2)B_2 = 0 \tag{4.40}$$

ifadelerini sağlayacağı durumların karakterize edilmesine dönüştüğü görülür. Böylece (d) deki şartların gerekliliği (4.40) ifadesinin uygun bir şekilde yeniden düzenlenmesiyle yeterliliği ise direkt bir hesaplamayla görülebilir. Bu ise ispatın geri kalan kısmını tamamlar.

Şimdi Teorem 4.2. de istenen şartları sağlayan matrislerin mevcut olduğu onbir farklı durumun her birini gösteren aşağıdaki örneği göz önüne alalım. (4.14) de karakterize edilen (a) durumundaki örneklerin oluşturulması kolaydır:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.41}$$

matrisleri için eşitliğini sağlamak yeterlidir ki bu matrisler $\alpha, \beta \in \{0,1\}$ olduğunda idempotenttirler ve dolayısıyla $B_1B_2 = 0 = B_2B_1$, $AB_1 = B_1A$ ve $AB_2 = B_2A$ eşitlikleri sağlanır. Böylece $\alpha = 0, \beta = 1$ olduğunda (a_1) ve (a_2) deki şartlar gerçeklenir. Öte yandan $\alpha = 1, \beta = 0$ olduğunda (a_3) ve (a_4) teki şartlar ve $\alpha = \beta = 1$ olduğunda ise (a_5) ve (a_6) daki şartların sağlandığı görülür.

(b) durumu için

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.43}$$

üçlülerini göz önüne alalım. Bu durumda bu matrisler idempotent olup $B_1B_2 = 0 = B_2B_1$, $AB_1 = B_1A$, $AB_2 \neq B_2A$ olup (4.42) durumunda $(A - B_2)^2 = 0$ ve (4.43) durumunda ise $(A - B_2)^2 = B_1$ olduğu görülür.

(c_1) ve (c_2) yi karakterize eden şartlar B_1 ile B_2nin yerlerini değiştirmek üzere (b_1) ve (b_2) yi karakterize eden şartlara denk olduğundan (d) durumu hakkında yorum yapılamamıştır. Hem (c_1) in hem de (c_2) nin değerlerinin tek türlü olarak belirli olduğu durum diğer durumlardan farklıdır. (d) de c_2 nin değeri (4.18) matris denkleminin bir skaler çözümü olarak göz önüne alınırken sadece c_1 bilinmektedir(1 e eşit olduğu).

Yukarıdaki durumda denklemler gerçekten bir çözüme sahiptir. Öyle ki

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisleri göz önüne alınırsa $B_1B_2 = 0 = B_2B_1$, $AB_1 \neq B_1A$, $AB_2 \neq B_2A$ olduğundan (4.17) varsayımı sağlanır ve (4.18) bağıntısı

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

formunu alır ve böylece tek çözüm olarak $c_2 = -1$ elde edilir.

Aşağıda idempotent matrislerle ilgili olarak A ve $B^2 = B_1 + B_2$ matrislerinin yer değiştirilmesiyle elde edilen aynı tipte bir problem verilecektir.

Teorem 4.3. Teorem 4.2 nin varsayımları altında (4.13) formundaki C matrisinin idempotent olması için bir gerek şart $A(B_1 + B_2)$ ve $(B_1 + B_2)A$ çarpımlarının her birinin bir idempotent matris olmasıdır.

İspat. Teorem 4.2 nin (a) maddesinde verilen durumda (4.14) şartları A ve $B_1 + B_2$ nin komutatif olduğunu gösterir. Bu durum $A(B_1 + B_2)$ ve $(B_1 + B_2)A$ çarpımlarının her birinin bir idempotent matris olması için yeterlidir. (b) durumunda $AB_1 = B_1A$ ve $B_1B_2 = 0 = B_2B_1$ çarpımlarının bir sonucu

$$(B_1 + B_2)A(B_1 + B_2) = B_1AB_1 + B_1AB_2 + B_2AB_1 + B_2AB_2 \tag{4.44}$$

ifadesini ve dolayısıyla

$$(B_1 + B_2)A(B_1 + B_2) = B_1AB_1 + B_2AB_2 \tag{4.45}$$

eşitliğini sağlamasıdır. Öte yandan (b_1) ve (b_2) de verilen $A - AB_2 - B_2A + B_2 = 0$ ve $A - AB_2 - B_2A + B_2 = B_1$ şartlarından her birisi sırasıyla $B_2AB_2 = B_2$ yi sağladığından (4.45) ifadesi $(B_1 + B_2)\,A\,(B_1 + B_2) = B_1A + B_2 = AB_1 + B_2$ formuna dönüşür. Böylece teoremin iddiası kolayca sağlanır. (c) durumunda ispat yukarıdakine benzer şekilde yapılabilir. Sonuç olarak (4.18) eşitliğini önce B_1 ile soldan sonra B_2 ile sağdan çarpmak suretiyle

$$B_1AB_1 = \frac{1}{2}(1 - c_2)B_1 \text{ ve } B_2AB_2 = \frac{1}{2}(1 + c_2)B_2 \tag{4.46}$$

elde edilir. Eğer (4.46) bağıntıları (4.40) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$AB_1 + B_1A - AB_2 - B_2A - 2B_1AB_1 + 2B_2AB_2 = 0 \tag{4.47}$$

elde edilir. (4.47) ifadesi A ile soldan ve daha sonra B_i ile sağdan çarptığımızda

$$AB_i = (AB_1 + AB_2)AB_i\,,\ i = 1, 2 \tag{4.48}$$

elde edilir. (4.48) ifadesi (4.44) de yerine yazılırsa $A(B_1 + B_2)$ nin idempotentliği görülür. Benzer şekilde (4.47) ifadesini B_i ile soldan çarptığımızda ve A ile sağdan çarparak

$$B_iA = B_iA\,(B_1A + B_2A)\,,\ i = 1, 2, \tag{4.49}$$

elde edilir. (4.49) eşitliği (4.44) de yerine yazılırsa $(B_1 + B_2)A$ 'nın idempotentliği gösterilmiş olur. Bu kısmın ikinci sonucu teorem 4.4. de verilmiştir. Bu durum ise $A - B_1$ ve $A - B_2$ farklarının bir hermityen matris yani

$$A - B_1 = (A - B_1)^* \text{ve} A - B_2 = (A - B_2)^* \quad (4.50)$$

olacak şekilde A, B_1, B_2 matrislerinin her birinin hermityen matris olduğu durumuyla örtüşür. Teorem 4.4 ün ortaya konulmasındaki esas rol aşağıdaki Lemma ile verilir. P_1, P_2 idempotent matrislerinin $P_1.P_2$ çarpımının sıfırdan farklı öz değerleri $(P_1 - P_2)^2$ matrisinin öz değerleriyle ve tersine olarak $(P_1 - P_2)^2$ nin özdeğerleri $P_1.P_2$ çarpımının öz değerleriyle nasıl bir ilişkiye sahip olduğu bu Lemma da verilir. Bu Lemma P_1, P_2 nin idempotent olmalarına ilaveten hermityen olmaları için de genelleştirilebilir.

Lemma 4.1. $P_1, P_2 \in \mathbb{C}_{n,n}$ idempotent yani $P_i = P_i^2,\ i = 1,2$olsun. Eğer $\lambda \neq 0$ sayısı $(P_1 - P_2)^2$ matrisinin bir öz değeri ise bu takdirde I-λ da $P_1.P_2$ matrisinin bir öz değeridir. Tersine olarak eğer μ≠0 sayısı $P_1.P_2$ matrisinin bir özdeğeri ise 1-μ de $(P_1 - P_2)^2$ matrisinin bir öz değeridir.

İspat. Farz edelim ki λ sayısı $(P_1 - P_2)^2$nin bir özdeğeri olsun ve u≠0 buna karşılık gelen öz vektörler yani

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ -P_2 \end{pmatrix}^2 u = \lambda u \quad (4.51)$$

olsun. Bu eşitliği P_1ile soldan çarparak

$$P_1P_2P_1u = (1 - \lambda)P_1u \quad (4.52)$$

elde edilir. Eğer $P_1u \neq 0$ ise (4.52) dan kolayca görülür ki 1-λ değeri $P_1.P_2$ matrisinin bir öz değeridir. Öte yandan eğer $P_1u = 0$ ise bu takdirde (4.51)

$$(P_2 - P_1P_2)u = \lambda u \quad (4.53)$$

şeklini alır. Öte yandan P_2u vektörü sıfırdan farklı olmalıdır. Aksi takdirde (4.53) λ≠0 varsayımıyla çelişecektir. Sonuç olarak (4.53) eşitliğini P_2 ile soldan çarparak $P_2P_1P_2u = (1 - \lambda)P_2u$ elde edilir. Böylece 1-λ sayısı P_2P_1 matrisinin bir özdeğeri olmuş olur ve dolayısıyla P_1P_2 nin de bir özdeğeridir.

Teoremin ikinci kısmı benzer şekilde ispatlanabilir. Farz edelim ki μ, P_1P_2 nin bir özdeğeri ve v≠0 buna karşılık gelen bir öz vektör yani $P_1P_2v = \mu v$ olsun. Bu eşitlik P_1 ile soldan çarpılır ve μ≠0 varsayımı göz önüne alınırsa $v = P_1v$ olduğu görülür. Buradan $P_1P_2P_1v = \mu P_1v$ veya buna denk olarak

$$(P_1 - P_1P_2P_1)v = (1 - \mu)P_1v \tag{4.54}$$

elde edilir. Fakat $P_1 - P_1P_2P_1 = (P_1 - P_2)^2P_1$ olduğundan (4.54) eşitliği $(P_1 - P_2)^2P_1v = (1 - \mu)P_1v$ şeklinde yeniden yazılabilir. Öte yandan $P_1v = v \neq 0$ olduğundan 1-μ sayısı $(P_1 - P_2)^2$ matrisinin bir özdeğeridir.

Teorem 4.3. $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ sıfırdan farklı bir idempotent matris ve $B_1, B_2 \in \mathbb{C}_{n,n}$ (4.12) şartlarını sağlayan sıfırdan farklı matrisler olmak üzere $A - B_1$ ve $A - B_2$ farkları hermityen olsun. C matrisi c_1, c_2™ℂ sıfırdan farklı olmak üzere A, B_1, B_2 nin (2.3) formundaki bir lineer kombinasyonu olsun. Bu takdirde C matrisinin idempotent olduğu tamı tamına altı durum söz konusudur:

(i) $C = A + (B_1 - B_2)$ ve $AB_1 = 0 = B_1A$, $AB_2 = B_2 = B_2A$,

(ii) $C = 2A + (B_1 - B_2)$ ve $A = B_2$

(iii) $C = A - (B_1 - B_2)$ ve $AB_1 = B_1 = B_1A$, $AB_2 = 0 = B_2A$

(iv) $C = 2A - (B_1 - B_2)$ ve $A = B_1$

(v) $C = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(B_1 - B_2)$ ve $A = B_1 + B_2$

(vi) $C = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}(B_1 - B_2)$ ve $A = B_1 + B_2$

İspat: İlk olarak (i)-(vi) deki şartları kesin olarak sağlayan matrislerin mevcut olduğunu belirtelim. Bu durum (i)-(vi) durumlarının teorem 4.2.1 deki $(a_1) - (a_6)$ durumlarıyla çakıştığı ve (4.41) deki tüm matrislerin hermityen olduğu gerçeğine dayanır. Dolayısıyla eğer A, B_1, B_2 matrisleri (4.50) deki ikinci varsayım altında $(b_1), (b_2), (c_1), (c_2), (d)$ durumlarının her birinin sağlandığını ispatlamış oluruz.(4.50) deki ikinci varsayım altında (b_1) deki $(A - B_2)^2 = 0$ eşitliği

$$(A - B_2)(A - B_2)^* = 0 \tag{4.55}$$

ile yer değiştirilebilir.

K herhangi bir kompleks matris olmak üzere $KK^* = 0 \Leftrightarrow K = 0$ gerçeği (4.55) ye ygulanırsa $A - B_2 = 0$ elde edilir. Fakat bu durumda $AB_2 = B_2 = B_2A$ olur ki bu da $AB_2 \neq B_2A$ varsayımıyla çelişir. Benzer şekilde (b_2) de $(A - B_2)^2 = B_1$ eşitliği

$$(A - B_2)(A - B_2)^* = B_1 \tag{4.56}$$

ile yer değiştirilebilir.

Herhangi bir K kompleks matrisinin $\mathcal{C}(K)$ ile gösterilen sütun uzayı

$$\mathcal{C}(K)=\mathcal{C}(KK^*) \tag{4.57}$$

özelliğine sahip olduğundan (4.56) ve (4.57) nin bir sonucu

$$\mathcal{C}(A - B_2) = \mathcal{C}(B_1)$$

dir. B_1 matrisinin bir idempotent matris olduğu varsayımı göz önüne alınırsa burada

$$B_1(A - B_2) = A - B_2 \tag{4.58}$$

elde edilir. Fakat $(A - B_2)^2 = B_1$ ve $AB_1 = B_1A$ şartlarından $B_1A = B_1$ olduğu ve dolayısıyla $B_1B_2 = 0$ olacağından (4.58) eşitliği $A = B_1+B_2$ ye dönüşür. Buradan $AB_2 = (B_1 + B_2)B_2 = B_2 = B_2(B_1 + B_2) = B_2A$ elde edilir ki bu da yine $AB_2 \neq B_2A$ olması varsayımıyla çelişir.

(c) durumundaki ispat ise (b) durumuyla ilgili olan ispata simetriktir. Dolayısıyla

$$(A - B_1)(A - B_1)^* - (A - B_2)(A - B_2)^* = c_2(B_1 + B_2) \tag{4.59}$$

eşitliğinin sağlandığının gösterilmesi kalır ki bu da durum (4.50) ilave varsayımları altında (4.18) şartının değişik bir versiyonudur. (4.59) nın aşikar bir sonucu

$$c_2(B_1 + B_2) = \overline{c_2}(B_1 + B_2)^* \tag{4.60}$$

eşitliğidir. B_1+B_2 matrisi idempotent olduğundan rankı izine eşittir. Öte yandan B_1+B_2 nin idempotentliği $(B_1+B_2)^*$ ın idempotentliğine denktir. Sonuç olarak

$$\mathrm{iz}(B_1 + B_2) = r(B_1 + B_2) = r[(B_1 + B_2)^*] = \mathrm{iz}[(B_1 + B_2)^*]$$

ve böylece (4.60) in her iki tarafının da izi alınırsa $c_2 = \overline{c_2}$ elde edilir. Bu ise C nin (sıfırdan farklı) bir reel sayı olması demektir. Böylece

$$B_1+B_2 = (B_1+B_2)^* \tag{4.61}$$

olduğu görülür.(4.60) ile verilen özel durumda Teorem 4.2.1 in (d) kısmındaki (4.18) şartı üç non negatif definit matris içeren

$$(A - B_1)(A - B_1)^* = (A - B_2)(A - B_2)^* + c_2(B_1 + B_2)(B_1 + B_2)^* \tag{4.62}$$

eşitliği şeklinde yazılabilir.(4.62) de $c_2$nin 1 veye -1 olduğu ayrı ayrı göz önüne alınan iki durum söz konusudur. Birinci durumda (4.46) bağıntısındaki ilk eşitlik $B_1AB_1 = 0$ şeklini alır. Dolayısıyla (4.50) deki birinci varsayım altında

$$B_1(A - B_1)(A - B_1)^* = B_1 = (A - B_1)(A - B_1)^*B_1$$

elde edilir ve (4.61) eşitliği ve (4.12) varsayımından

$$B_1(B_1 + B_2)(B_1 + B_2)^* = B_1 = (B_1 + B_2)(B_1 + B_2)^*B_1$$

olur. Sonuç olarak $c_2 = 1$ olmak üzere (4.62) yi B_1 ile soldan ve sağdan çarparak

$$B_1(A - B_2)(A - B_2)^* = 0 = (A - B_2)(A - B_2)^*B_1$$

ve dolayısıyla

$$B_1(A - B_2) = 0 = (A - B_2)B_1$$

eşitliği elde edilir. Bu nedenle (4.12) ye göre $B_1A = 0 = AB_1$ olur ki bu da (4.17) deki birinci şartla çelişir.

$c_2 = -1$ olması durumunda (4.61) eşitliği

$$(A - B_2)(A - B_2)^* = (A - B_1)(A - B_1)^* + (B_1 + B_2)(B_1 + B_2)^*$$

şeklini alır ve (4.46) daki ikinci eşitlik $B_2AB_2 = 0$ a dönüştüğünden yukarıdakine benzer bir düşünceyle $B_2A = 0 = AB_2$ elde edilir ki bu da (4.17) deki ikinci şartla çelişir.

Şimdi $c_2 > 0$(fakat $c_2 \neq 1$) olduğunu varsayalım. (. : .) ve (. : . : .) sembolleriyle sırasıyla iki veya üçlü parçalı matrisleri göstersin. (4.62) ifadesi

$$(A - B_1)(A - B_1)^* = (A - B_2 : \sqrt{c_2}(B_1 + B_2))(A - B_2 : \sqrt{c_2}(B_1 + B_2))^*$$

formunda yazılabileceğinden (4.57) den

$$C(A - B_1) = C[(A - B_2 : B_1 + B_2)] \tag{4.63}$$

elde edilir. (4.12) deki B_1 ve B_2 matrislerinin özellikleri dikkate alınırsa $\mathcal{C}(B_1 + B_2) = \mathcal{C}(B_1) \oplus \mathcal{C}(B_2)$ olduğu görülür. Dolayısıyla (3.20) eşitliği

$$\mathcal{C}(A - B_1) = \mathcal{C}[(A : B_1 : B_2)] \tag{4.64}$$

eşitliğine denktir. Öte yandan $\mathcal{C}(A - B_1) \subseteq \mathcal{C}[(A : B_1)]$ ifadesi göz önüne alınırsa (4.64) deki sütun uzayı

$$r(A - B_1) = r[(A : B_1 : B_2)] \tag{4.65}$$

rank eşitliğiyle yer değiştirilebilir.

$r(B_i) = r_i$, $i = 1,2$ olsun. Bu durumda B_1 matrisi r_1 tane 1 e eşit öz değere sahiptir. Dolayısıyla (4.46) daki birinci eşitlik $B_1 A B_1$ in $\frac{1}{2}(1 - c_2)$ ye eşit r_1 öz değere sahip olduğunu gösterir. Fakat $AB_1^2 = A B_1$ matrisi $B_1 A B_1$ matrisi ile aynı özdeğere sahip olduğundan $c_2 \neq 1$ varsayımı altında yukarıdaki Lemma dan $(A - B_1)^2$ matrisinin de $1 - \frac{1}{2}(1 - c_2) = \frac{1}{2}(1 + c_2)$ ye eşit olan r_1 tane özdeğere sahip olduğu görülür. (4.50) varsayımlarının birincisi $(A - B_1)^2$ matrisinin $r[(A - B_1)^2] = r(A - B_1)$ ranklı nonnegatif definit bir matris olduğunu garanti ettiğinden ve (4.65) ve (4.12) ye göre

$$r(A - B_1) \geq r[(B_1 : B_2)] = r_1 + r_2$$

olduğundan $(A - B_1)^2$ matrisi ilaveten m tane pozitif özdeğere sahip olmalıdır. Dolayısıyla $r_2 \leq m \leq n - r_1$ olmak üzere

$$r(A - B_1) = r_1 + m \tag{4.66}$$

eşitliği sağlanır. Böyle bir ilave öz değer λ ise bu takdirde Lemma 1e göre AB_1 in $1 - \lambda$ öz değerine sahip olduğu bilinmektedir. Bu ise $(A - B_1)^2$ matrisinin $\lambda = 1$ olmadıkça tamı tamına r_1 tane sıfırdan farklı öz değere sahip olmasıyla çelişir. Bu nedenle $(A - B_1)^2$matrisi $\frac{1}{2}(1 + c_2)$ ye eşit olan $r_1$tane özdeğere ve 1 e eşit olan m tane öz değere sahip olacaktır ve dolayısıyla

$$\mathrm{iz}[(A-B_1)^2] = \frac{1}{2}r_1(1+c_2)+m \tag{4.67}$$

dır. Öte yandan $\mathrm{iz}(AB_1) = \mathrm{iz}(AB_1^2) = \mathrm{iz}(B_1AB_1)$ ve iz $(B_1) = r(B_1) = r_1$ olduğundan (3.3) ün birinci kısmının bir sonucu olarak

$$\mathrm{iz}(AB_1) = \frac{1}{2}(1-c_2)\mathrm{iz}(B_1) = \frac{1}{2}r_1(1-c_2)$$

yazılabilir. Buradan iz(A)=r(A) ve $\mathrm{iz}(AB_1) = \mathrm{iz}(B_1A)$ olduğundan

$$\mathrm{iz}[(A-B_1)^2] = r(A) - r_1(1-c_2) + r_1 = r(A) + r_1c_2 \tag{4.68}$$

elde edilir. (4.67) ve (4.68) birleştirilirse

$$r(A) = \frac{1}{2}r_1(1-c_2)+m \tag{4.69}$$

olduğu görülür. Eğer (4.46) bağıntısındaki birinci eşitlik $c_2 \neq -1$ olmak üzere sağlanırsa bu takdirde $2(1+c_2)^{-1}(B_1-AB_1)$ matrisinin bir idempotent matris olduğu gösterilebilir ve dolayısıyla (4.46) ya göre

$$\begin{aligned} r(B_1-AB_1) &= \mathrm{iz}[2(1+c_2)^{-1}(B_1-AB_1)] \\ &= 2(1+c_2)^{-1}[\mathrm{iz}(B_1) - \mathrm{iz}(B_1AB_1)] \\ &= 2(1+c_2)^{-1}[r_1 - \frac{1}{2}r_1(1-c_2)] = r_1 \end{aligned} \tag{4.70}$$

elde edilir. Bir idempotent matris kendisinin genelleştirilmiş inversi olduğundan

$$r[(A:B_1)] = r(A) + r[(I-A)B_1] = r(A) + r(B_1-AB_1) \tag{4.71}$$

eşitliği sağlanır. (4.69) ve (4.70) i (4.71) de yerine yazarsak

$$r[(A:B_1)] = \frac{3}{2}r_1 - \frac{1}{2}r_1c_2 + m \tag{4.72}$$

elde edilir. (4.65) in bir sonucu $r(A-B_1) = r[(A:B_1)]$ dir. Dolayısıyla (4.66) ve (4.72) ye göre buradan $c_2 = 1$ elde edilir ki bu $c_2 \neq 1$ varsayımıyla çelişir. Eğer $c_2 < 0$ (fakat $c_2 \neq -1$) ise yukarıdakine benzer bir durum (4.62) eşitliğine uygulanırsa (4.46) bağıntıları sırasıyla

$$(A-B_2)(A-B_2)^* = (A-B_1)(A-B_1)^* + (-c_2)(B_1+B_2)(B_1+B_2)^*$$

ve

$B_2AB_2 = \frac{1}{2}[1-(-c_2)]B_2$ ve $B_1AB_1 = \frac{1}{2}[1+(-c_2)]B_1$

şeklinde yazılabilir. Bu ise $c_2 = -1$ olması demektir ki bu da bir diğer çelişkidir.

Şimdi da $c_1, c_2 \in X$ sıfırdan farklı kompleks sayılar A bir idempotent matris ve B de bir k-potent matris olmak üzere $C = c_1A + c_2B$ şeklindeki lineer kombinasyonun bir idempotent matris olması problemini ele alalım. A ve B matrislerinin değişmeli olması durumunda bu problemin çözülebildiğini daha önce ifade etmiştik. k sayısının 2 veya 3 olması durumu daha önce ele alınmıştı.

$A \in X_{n,n}$ bir idempotent matris, $B \in X_{n,n}$ bir k-potent matris yani $A^2 = A$ ve $B^k = B$ olsun. B k-potent matrisinin sıfırdan farklı en az iki özdeğere sahip olduğunu varsayalım. Aksi durumda $P^2 = P$ olmak üzere $B = \lambda P$ yani $C = c_1A + c_2B = c_1A + c_2\lambda P$ olması durumu Baksalary (2000) tarafından çalışılmıştır.

Teorem 4.4. $A \in X_{n,n}$ sıfırdan farklı bir idempotent matris, $B \in X_{n,n}$ sıfırdan farklı bir k-potent matris, $c_1, c_2 \in X$ sıfırdan farklı olmak üzere $C = c_1A + c_2B$, $AB = BA$ ve $C^2 = C$ olsun. A ve B matrislerinin sırasıyla $A'\oplus 0$ ve $B'\oplus 0$ ile eşanlı olarak benzer olmadıklarını varsayalım. Ayrıca B matrisi $c_1 \neq 0 \neq c_2$ özdeğerlerine sahip olsun. Bu takdirde öyle bir S nonsingüler matrisi mevcuttur ki $c_1S^{-1}AS + c_2S^{-1}BS = S^{-1}CS$ ifadesi aşağıdaki lineer kombinasyonlardan biri formundadır:

$$\frac{u}{v-u}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \frac{1}{u-v}\begin{bmatrix} vI & 0 \\ 0 & uI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$-uv^{-1}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + v^{-1}\begin{bmatrix} uI & 0 \\ 0 & vI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$(1-uv^{-1})\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + v^{-1}\begin{bmatrix} uI & 0 \\ 0 & vI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + v^{-1}\begin{bmatrix} v^{-1}I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & vI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \text{eğer } 2|k \text{ ise}$$

$$\varepsilon\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon^{-1}u^{-1}\begin{bmatrix} \varepsilon^{-1}uI & 0 & 0 \\ 0 & uI & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon uI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \text{eğer } 6|k \text{ ise}$$

burada u, v™ $\sqrt[k]{1}$, $u \neq v$ $\varepsilon = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ dir.

İspat. A ve B ile eşanlı benzerlik dönüşümleriyle $A = \mathrm{I_r} \oplus 0$ alalım. $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ olduğundan $\mathrm{B} = \mathrm{B_1} \oplus \mathrm{B_2}$ yazılabilir. $B^{k+1} = B$ olduğundan hem $\mathrm{B_1}$ hem da $\mathrm{B_2}$ matrisleri köşegenleştirilebilir. $A = \mathrm{I_r} \oplus 0$ olmak üzere A ve B ile eşanlı benzerlik dönüşümleriyle $\beta_i^{k+1} = \beta_i$ olmak üzere $B = kö\text{ş}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ alalım. Yani β_i ™$\sqrt[k]{1}$ veya $\beta_i = 0$ olsun. A ve B dik olduklarından $C = diag(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ ve

$C^2 = C$ eşitliğinden $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ™$\{0,1\}$ olduğu görülür. Bu nedenle

$$\begin{bmatrix} 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_r \\ \beta_{r+1} \\ . \\ . \\ . \\ \beta_n \end{bmatrix} c_2 = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ . \\ . \\ . \\ \gamma_r \\ \gamma_{r+1} \\ . \\ . \\ . \\ \gamma_n \end{bmatrix}, \beta_i \text{ ™} \{0\} \cup \sqrt[k]{1} \;,\; \gamma_i \text{ ™} \{0,1\} \qquad (*)$$

yazılabilir. Çünkü $\beta_{r+1}, \dots, \beta_n$ ve c_2 lerin her birisi sıfırdan farklı olduğundan $\gamma_{r+1} = \cdots = \gamma_n = 1$ olacaktır. Böylece (*) denklemini c_1 ve c_2 ye göre bir lineer denklem sistemi olarak düşünebiliriz. Bu sistem çözülebilir olduğundan en fazla iki lineer bağımsız denklem vardır. Öte yandan $A \neq 0$ ve B matrisi en az iki sıfırdan farklı özdeğere sahip olduğundan lineer bağımsız denklemlerin sayısı ikidir. İki lineer bağımsız denklemi sabit tutalım. Bu durumda aşağıdaki durumlar söz konusudur:

Durum 1: Lineer bağımsız denklemler

$$\left.\begin{matrix} c_1 + c_2 u = 0 \\ c_1 + c_2 v = 0 \end{matrix}\right\}, (u \neq v)$$

formunda olsun. Bu durumda $c_2 = 0$ olur ki bu durum imkansızdır.

Durum 2: Lineer bağımsız denklemler

$$\left.\begin{matrix} c_1 + c_2 u = 1 \\ c_1 + c_2 v = 0 \end{matrix}\right\}, (u \neq v)$$

formunda olsun. Bu durumda $c_1 = \frac{v}{v-u}$ ve $c_2 = \frac{1}{v-u}$ olur. (*) dan her $i = 1, \dots, r$ için $\frac{v}{v-u} + \frac{\beta_i}{u-v}$ ™$\{0,1\}$ ve her $j = r+1, \dots, n$ için $\frac{\beta_j}{u-v} = 1$ elde edilir. Bu nedenle her $i = 1, \dots, r$ için $\beta_i = v$ veya $\beta_i = u$ ve her $j = r + 1, \dots, n$ için $\beta_j = u - v$ olduğu görülür.

Eğer $r = n$ ise gerektiğinde B nin özdeğerlerini yeniden düzenleyerek

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} vI & 0 \\ 0 & uI \end{bmatrix}$$

alınır. Eğer $r < n$ ise bu takdirde $\beta_j = \varepsilon u,\ v = \varepsilon^{-1} u$ olur ve $u = \beta_j + v$ ve u, β_j, v ™ $\sqrt[k]{1}$ olduğundan $6|k$ dir. Yine gerekli olması durumunda B matrisinin özdeğerlerini yeniden düzenleyerek

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1} uI & 0 & 0 \\ 0 & uI & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon uI \end{bmatrix}$$

alınabilir.

Durum 3: Lineer bağımsız denklemler

$$\left.\begin{array}{r} c_1 + c_2 u = 1 \\ c_1 + c_2 v = 1 \end{array}\right\}, (u \neq v)$$

formunda olsun. Bu durumda yine $c_2 = 0$ olacaktır ki bu durum imkansızdır.

Durum 4: Lineer bağımsız denklemler

$$\left.\begin{array}{r} c_1 + c_2 u = 0 \\ c_2 v = 1 \end{array}\right\}, (u \neq v)$$

formunda olsun. Bu durumda $c_1 = -uv^{-1}$ ve $c_2 = v^{-1}$ olacaktır. (*) dan her $i = 1, \dots, r$ için $-uv^{-1} + v^{-1}\beta_i$ ™$\{0,1\}$ ve her $j = r + 1, \dots, n$ için $v^{-1}\beta_j = 1$ olduğu görülür. Böylece her $i = 1, \dots, r$ için $\beta_i = u$ veya $\beta_i = u + v$ ve her $j = r + 1, \dots, n$ için $\beta_j = v$ elde edilir.

Eğer her $i = 1, \dots, r$ için $\beta_i = u$ ise gerekli olması durumunda B matrisinin özdeğerlerini yeniden düzenleyerek

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} uI & 0 \\ 0 & vI \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$\beta_i = u + v$ olacak şekilden az bir $i \in \{1, \dots, r\}$ nin varlığını kabul edelim. Eğer $\beta_i \neq 0$ ise $u = \varepsilon^{-1}\beta_i\,, v = \varepsilon\beta_i$ ve $\beta_i, u, v \in \sqrt[k]{1}$ olduğundan $6|k$ olacaktır. Yine gerekli olması durumunda B matrisinin özdeğerlerini yeniden düzenleyerek

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1}\beta_i I & 0 & 0 \\ 0 & \beta_i I & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon\beta_i I \end{bmatrix}$$

elde edilir ve böylece $c_1 = -uv^{-1} = \varepsilon,\ c_2 = v^{-1} = \varepsilon^{-1}\beta_i$ alınabilir. Eğer $\beta_i = 0$ ise $u = -v,\ c_1 = 1,\ c_2 = v^{-1}$ olup k tektir. Bu durumda gerekli olması durumunda B matrisinin özdeğerlerini yeniden düzenleyerek

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -vI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & vI \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Durum 5: Lineer bağımsız denklemler

$$\left.\begin{array}{r} c_1 + c_2 u = 1 \\ c_2 v = 1 \end{array}\right\},\ (u \neq v)$$

olsun. Bu durumda $c_1 = 1 - uv^{-1}$ ve $c_2 = v^{-1}$ olur. Böylece (*) dan her $i = 1, \dots, r$ için $1 - uv^{-1} + v^{-1}\beta_i$ ™$\{0,1\}$ ve her $j = r+1, \dots, n$ için $\beta_j = v$ olduğu görülür. Bu nedenle her $i = 1, \dots, r$ için $\beta_i = u$ veya $\beta_i = u - v$ ve her $j = r + 1, \dots, n$ için $\beta_j = v$ elde edilir.

Eğer her $i = 1, \dots, r$ için $\beta_i = u$ ise gerekli olması durumunda B matrisinin özdeğerlerini yeniden düzenleyerek

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} uI & 0 \\ 0 & vI \end{bmatrix}$$

elde edilir. Eğer $\beta_i = u - v$ olacak şekilde bir $i \in \{1, \dots, r\}$ sayısı varsa bu takdirde $\beta_i = \varepsilon^{-1}u,\ v = \varepsilon u$ olup $u, \beta_i, v \in \sqrt[k]{1}$ olduğundan $6|k$ olacaktır. Böylece gerekirse B matrisinin özdeğerlerini yeniden düzenleyerek

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1}uI & 0 & 0 \\ 0 & uI & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon uI \end{bmatrix}$$

ve buradan da $c_1 = 1 - uv^{-1} = \varepsilon,\quad c_2 = v^{-1} = \varepsilon^{-1}u^{-1}$ elde edilir.

Durum 6: Lineer bağımsız denklemler

$$\left.\begin{aligned} c_2u &= 1 \\ c_2v &= 1 \end{aligned}\right\}, \quad (u \neq v)$$

olsun. Bu sistem çözümsüzdür. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Özel olarak c_1 ve c_2 sıfırdan farlı reel sayılar olsun. A ve B sıfırdan farklı kompleks matrisler olmak üzere $c_1A + c_2B = C$ matrisi $A^2 = A$, $B^{k+1} = B$, $AB = BA$, $A \neq B$ ve $C^2 = C$ olsun. Bu takdirde $B^2 = B$ veya $B^3 = B$ olacaktır. Gerçekten $k = 1$ olması özel durumu Baksalary(2000) tarafından çalışılmıştır. $k > 1$ olduğunu varsayalım. Teorem 4.3 den $c_1 = \overline{c_1}$ ve $c_2 = \overline{c_2}$ olup $\{u, v\} = \{1, -1\}$ olduğu görülür. Bu nedenle B matrisi köşegenleştirilebilir olduğundan $B^3 = B$ elde edilir.

4.3. Değişmeli Tripotent Matrislerin Lineer Kombinasyonları

$c_1, c_2 \in X$ sıfırdan farklı kompleks sayılar ve $T_1, T_2 \in X_{n,n}$ n-mertebeli değişmeli sıfırdan farklı kompleks matrisler, yani $T_1 = T_1^3$, $T_2 = T_2^3$ ve $T_1T_2 = T_2T_1$ olsun. Bu kısımdaki çalışmamızın amacı T_1 ve T_2 nin

$$T = c_1T_1 + c_2T_2 \tag{4.73}$$

formundaki bir lineer kombinasyonunun da bir tripotent matris olduğu tüm durumları karakterize etmektir. Benzer bir problem sıfırdan farklı $P_1 = P_1^2, P_2 = P_2^2$ idempotent matrislerinin

$$P = c_1P_1 + c_2P_2 \tag{4.74}$$

lineer kombinasyonunun da ne zaman bir idempotent matris olduğu problemidir. Bu problem Baksalary tarafından çalışılmıştır. Eğer $P_1P_2 = P_2P_1$ ise bu takdirde $P = P_1 + P_2$ (idempotentir ancak ve ancak $P_1P_2 = 0$) ve $P = -P_1 + P_2$ (idempotenttir ancak ve ancak $P_1P_2 = P_1$) şeklinde ifade edilen klasik durumlar hariç (4.74) formunda hiçbir idempotent P matrisi mevcut değildir.

Bu kısımda T_2 nin T_1 in bir skaler katı olması özel durumu ele alınacaktır. T_1 ve T_2 matrislerinin sıfırdan farklı tripotent matrisler olması varsayımı altında $T_2 = T_1$ veya $T_2 = -T_1$ şeklinde iki mümkün durum söz konusudur. Bunlardan birincisi de (4.73) de tanımlanan T lineer kombinasyonu $T = (c_1 + c_2)T_1$ formunu alır ve dolayısıyla bunun tripotent olması için gerek ve yeter şart

$c_2 = -c_1$ veya $c_2 = -c_1 + 1$ veya $c_2 = -c_1 - 1$ (4.75)

veya buna denk olarak sırasıyla $T = 0,\ T = T_1, T = -T_1$ olmasıdır. İkinci durumda ise $T = (c_1 - c_2)T_1$ ve dolayısıyla $T = T^3$ olması için gerek ve yeter şart

$c_2 = c_1$ veya $c_2 = c_1 - 1$ veya $c_2 = c_1 + 1$ (4.76)

veya buna karşılık olarak $T = 0,\ T = T_1, T = -T_1$ olmasıdır. Sonuç olarak T_2 nin T_1 in bir skaler katı olması durumu ayrıca göz önüne alınabilir.

Teorem 4.5. Sıfırdan farklı $c_1, c_2 \in X$ kompleks sayıları $T_1T_2 = T_2T_1$ komutatiflik özelliğini sağlayan sıfırdan farklı $T_1, T_2 \in X$ tripotent matrisleri için T,bunların $T = c_1T_1 + c_2T_2$ formundaki bir lineer kombinasyonları olsun. Bu durumda $T_2 \neq T_1$ ve $T_2 \neq -T_1$ varsayımı altında T matrisinin tripotent olması için gerek ve yeter şart

(a) $c_1 = 1,\ c_2 = -1$ veya $c_1 = -1, c_2 = 1$ ve $T_1^2T_2 = T_1T_2^2$

(b) $c_1 = 1, c_2 = -2$ veya $c_1 = -1, c_2 = 2$ ve $T_1^2T_2 = T_2 = T_1T_2^2$

(c) $c_1 = 2,\ c_2 = -1$ veya $c_1 = -2,\ c_2 = 1$ ve $T_1^2T_2 = T_1 = T_1T_2^2$

(d) $c_1 = 1,\ c_2 = 1$ veya $c_1 = -1,\ c_2 = -1$ ve $T_1^2T_2 = -T_1T_2^2$

(e) $c_1 = 1, c_2 = 2$ veya $c_1 = -1,\ c_2 = -2$ ve $T_1^2T_2 = T_2 = -T_1T_2^2$

(f) $c_1 = 2,\ c_2 = 1$ veya $c_1 = -2,\ c_2 = -1$ ve $T_1^2T_2 = -T_1 = -T_1T_2^2$

(g) $c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = \frac{1}{2}$ veya $c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = -\frac{1}{2}$ veya $c_1 = -\frac{1}{2},\ c_2 = \frac{1}{2}$ veya $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$ ve $T_1^2T_2 = T_2,\ T_1T_2^2 = T_1$

olmasıdır.

İspat: T_1, T_2 tripotent matrisleri komutatif olduğundan (4.73) formundaki bir matrisin $T^3 = T$ eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter şart

$(c_1^3 - c_1)T_1 + 3c_1^2c_2T_1^2T_2 + 3c_1c_2^2T_1T_2^2 + (c_2^3 - c_2)T_2 = 0$ (4.77) olmasıdır. (4.77) ü önce T_2^2 ile ve daha sonra da T_1^2 ile çarpmak suretiyle

$$(c_1^3 - c_1)T_1T_2^2 + 3c_1^2c_2T_1^2T_2 + 3c_1c_2^2T_1T_2^2 + (c_2^3 - c_2)T_2 = 0 \tag{4.78}$$

ve

$$(c_1^3 - c_1)T_1 + 3c_1^2c_2T_1^2T_2 + 3c_1c_2^2T_1T_2^2 + (c_2^3 - c_2)T_1^2T_2 = 0 \tag{4.79}$$

elde edilir. (4.77) , (4.78) ve (4.79) ile birleştirilirse $(c_1^3 - c_1)(T_1 - T_1T_2^2) = 0$ ve $(c_2^3 - c_2)(T_2 - T_1^2T_2) = 0$ elde edilir ve böylece $c_1 \neq 0,\ c_2 \neq 0$ olduğundan (4.77) denklemi için aşağıdaki dört durum söz konusudur;

$$c_1 \in \{-1, 1\},\ \ c_2 \in \{-1, 1\}, \tag{4.80}$$

$$c_1 \in \{-1, 1\},\ \ c_2 \notin \{-1, 1\},\ \ T_1^2T_2 = T_2, \tag{4.81}$$

$$c_1 \notin \{-1, 1\},\ \ c_2 \in \{-1, 1\},\ \ T_1T_2^2 = T_1, \tag{4.82}$$

$$c_1 \notin \{-1,1\},\ \ c_2 \notin \{-1,1\},\ \ T_1^2T_2 = T_2,\ T_1T_2^2 = T_1 \tag{4.83}$$

(4.80) durumunda (4.77) ün iki uyarlaması söz konusudur. Bunlardan birincisi $T_1^2T_2 - T_1T_2^2 = 0$ olması durumudur. Bu ise $c_1 = 1,\ c_2 = -1$ ve $c_1 = -1,\ c_2 = 1$ ikililerine karşılık gelir. Diğeri ise $T_1^2T_2 + T_1T_2^2 = 0$ olması durumudur. Bu ise $c_1 = 1, c_2 = 1$ ve $c_1 = -1, c_2 = -1$ ikililerine karşılık gelir. Bu gözlem (a) ve (d) şıklarının sağlandığını gösterir. (4.81) durumunda (4.77) bağıntısının sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart

$$c_1 = -1,\ c_2 \notin \{-1\,, 1\,\},\quad T_1^2T_2 = T_2 \text{ ve } 3c_2T_1T_2^2 = (c_2^2 + 2)T_2 \tag{4.84}$$

veya

$$c_1 = 1,\ c_2 \notin \{-1, 1\},\quad T_1^2T_2 = T_2 \text{ ve } 3c_2T_1T_2^2 = -(c_2^2 + 2)T_2 \tag{4.85}$$

koşullarının sağlanmasıdır. (4.84) ve (4.85) ifadelerindeki son şartları T_1T_2 ile çarpar ve $T_1^2 = T_2$ eşitliği kullanılırsa bu durumda sırasıyla $3c_2T_2 = (c_2^2 + 2)T_1T_2^2$ ve $3c_2T_2 = -(c_2^2 + 2)T_1T_2^2$ eşitlikleri elde edilir. Bu ise (4.84) durumunda

$$(c_2^2 - 3c_2 + 2)(T_1T_2^2 + T_2) = 0 \text{ ve } (c_2^2 + 3c_2 + 2)(T_1T_2^2 - T_2) = 0 \tag{4.86}$$

denklemlerine (4.85) durumunda ise

$$(c_2^2 + 3c_2 + 2)(T_1T_2^2 + T_2) = 0 \text{ ve } (c_2^2 - 3c_2 + 2)(T_1T_2^2 - T_2) = 0 \tag{4.87}$$

denklemlerine yol açar. $c_2 \notin \{-1, 1\}$ varsayımı altında

$$c_2^2 - 3c_2 + 2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 2 \text{ ve } c_2^2 + 3c_2 + 2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = -2$$

olduğu görülür. Bu nedenle (4.86) şartları tam olarak iki durumda sağlanır. Birincisi $c_2 = 2$ ve $T_1T_2^2 = T_2$ olmasıdır ki bu (b) nin bir kısmıdır. İkincisi ise $c_2 = -2$ ve $T_1T_2^2 = -T_2$ olmaısıdır ki bu da (e) nin bir kısmıdır.(4.87) şartlarının benzer analizi (b) ve (e) kısımlarının ispatını tamamlar.

(4.82) ve (4.81) in bir ve iki alt indislerini yer değiştirilerek elde edilen simetrik bir uyarlaması olduğundan (c) ve (f) karakterizasyonları (b) ve (e) ye karşılık olarak elde edilir. Son olarak (4.83) durumunda (4.77) de $T_1T_2^2 = T_1$ ve $T_1^2T_2 = T_2$ alınırsa

$$(c_1^3 + 3c_1c_2^2 - c_1)T_1 + (c_2^3 + 3c_1^2c_2 - c_2)T_2 = 0 \tag{4.88}$$

elde edilir. Öte yandan (2.14) ifadesini T_1T_2 ile çarparak

$$(c_1^3 + 3c_1c_2^2 - c_1)T_2 + (c_2^3 + 3c_1^2c_2 - c_2)T_1 = 0 \tag{4.89}$$

ve (4.88) ifadesini (4.89) ifadesi ile birleştirerek

$$\gamma_1(T_1 + T_2) = 0 \text{ ve } (T_1 - T_2) = 0 \tag{4.90}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= c_1^3 + c_2^3 + 3c_1^2c_2 + 3c_1c_2^2 - c_1 - c_2 \\ &= (c_1 + c_2)(c_1 + c_2 + 1)(c_1 + c_2 - 1)\end{aligned} \tag{4.91}$$

ve

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= c_1^3 - c_2^3 - 3c_1^2c_2 + 3c_1c_2^2 - c_1 + c_2 \\ &= (c_1 - c_2)(c_1 - c_2 + 1)(c_1 - c_2 - 1)\end{aligned} \tag{4.92}$$

şeklindedir. $T_2 \neq T_1$ ve $T_2 \neq -T_1$ olduğundan (4.90) daki iki eşitliğin aynı anda sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $\gamma_1 = 0$ ve $\gamma_2 = 0$ olmasıdır. Bu ise (4.91) ve (4.92) ye göre

$$(c_1, c_2) \in \left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\} \tag{4.93}$$

ifadesine denktir. Bu ise (g) şıkkının doğruluğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şunu da belirtelim ki (b) ve (c) deki matris şartları (a) daki şartı açık olarak sağlar. Dolayısıyla eğer $T_1^2T_2 = T_2 = T_1T_2^2$ ($T_2 \neq T_1$ ve $T_2 \neq -T_1$ olmak üzere) ise (4.73) formunda tam olarak dört lineer kombinasyon mevcut olup bunlar tripotent matrislerdir:

$$T = T_1 - T_2, T = -T_1 + T_2, T = T_1 - 2T_2 \text{ ve } T = -T_1 + 2T_2 .$$

(d) nin (e)ile (d) nin (f) ile birleştirilmesinden elde edilenlere benzer tartışmalar (a) nın (c) ile birleştirilmesinden de elde edilebilir. Ayrıca eğer $T_2 = T_1$ ise (a), (b), (c) ve (g) deki matris denklemleri aşikar sağlanır ve dolayısıyla tepremin bu kısmında listelenen on (c_1, c_2) ikilisi (4.75) de verilen durumların özel bir durumu olarak ortaya çıkar. Açıkça görülür ki $T_2 = -T_1$ ise (d)-(g) deki matris denklemlerine ve (4.76) de verilen ifadelere başvurarak benzer bir hatırlatma yapılabilir. Kısım I de belirtildiği gibi Baksalary $P_1, P_2 \in X_{n,n}$ nin iki farklı idempotent matrisi komutatif ise bunların (4.74) formundaki bir lineer kombinasyonunun tripotent olabileceği sadece üç klasik durumun mevcut olduğunu göstermiştir. Bunlar $P = P_1 + P_2$, ($P_1P_2 = 0$ olmak şartıyla) $P = P_1 - P_2$ ($P_1P_2 = P_2$ olmak şartıyla) ve $P = -P_1 + P_2$ ($P_1P_2 = P_1$ olmak şartıyla) dır. Aynı tipte ilave şartlar altında bu çalışmanın temel sonucunu ele almak daha ilginç görülür.

Sonuç 4.4. Sıfırdan farklı $c_1, c_2 \in X$kompleks sayıları ve $T_1T_2 = T_2T_1$ komutatiflik özelliğini sağlayan sıfırdan farklı $T_1, T_2 \in X_{n,n}$ tripotent matrisleri için T, bunların $T = c_1T_1 + c_2T_2$ formundaki bir lineer kombinasyonları olsun. Ayrıca $T_2 \neq T_1$ ve $T_2 \neq -T_1$ olsun. Bu takdirde

(a) $T_1T_2 = 0$ olması durumunda T matrisi tripotenttir ancak ve ancak $(c_1, c_2) \in \{(1,1), (1,-1); (-1,1), (-1,-1)\}$

(b) $T_1T_2 = T_2$ olması durumunda T matrisi tripotenttir ancak ve ancak T_2 idempotent ve $(c_1, c_2) \in \{(1,-1), (-1,1), (1,-2), (-1,2)\}$ veya $-T_2$ idempotent ve $(c_1, c_2) \in \{(1,1), (-1,-1), (1,2), (-1,-2)\}$ veya T_1 idempotent ve $T_1 = T_1^2$ ve (c_1, c_2) ikilileri (4.93) te verildiği gibidir.

(c) $T_1T_2 = T_2$ olması durumunda T matrisi tripotenttir ancak ve ancak T_1 idempotent ve $(c_1, c_2) \in \{(1,-1), (-1,1), (2,-1), (-2,1)\}$ veya $-T_1$ idempotent ve $(c_1, c_2) \in \{(1,1), (-1,-1), (2,1), (-2,-1)\}$ veya T_2 idempotent ve $T_2 = T_1^2$ ve (c_1, c_2) ikilisi (4.93) da verildiği gibidir.

İspat (a) şıkkı teoremin sadece (a) ve (d) durumlarının göz önüne alınmasıyla elde edilir. $T_1T_2 = 0$ şartı $T_1 \neq 0, T_2 \neq 0$ şartıyla bir çelişki oluşturmaz. Ayrıca eğer $T_1T_2 = T_2$ ise $T_1^2T_2 = T_2$ ve $T_1T_2^2 = T_2^2$ olduğu açıktır. Bu eşitlikler sırasıyla teoremin (c) ve (f) şıklarındaki $T_1 \neq T_2$ ve $T_1 \neq -T_2$ ifadeleriyle çelişir. Hâlbuki geri kalan durumlar aşağıdaki sonucun (b) şıkkıyla uyumludur.(c) şıkkı teoremin ispatında verilen durumda (b) ye simetrik olarak elde edilir.

$A = A^3$ fakat $A \neq A^2$ ve $A \neq -A^2$ olması durumunda bir $A \in X_{n,n}$ matrisine esaslı tripotenttir denir.

Sonuç 4.4 den eğer $T_2 \neq T_1, T_2 \neq -T_1$ ve $T_1T_2 = T_2 = T_2T_1$ veya $T_1T_2 = T_1 = T_2T_1$ şartlarını sağlayan sıfırdan farklı T_1, T_2 matrislerinin her ikisi de esaslı tripotent ise bu takdirde $T = c_1T_1 + c_2T_2$ lineeer kombinasyonlarının tripotent olduğu hiçbir mümkün durumun bulunmadığı görülür. Genelde bununla beraber $T_1 = T_1^2$ ve $T_2 = T_2^2$ varsayımları altında teoremin içeriğinin analiz edimesi oldukça ilginçtir.

Sonuç 4.5. Sıfırdan farklı $c_1, c_2 \in X$ kompleks sayıları ve $P_1P_2 = P_2P_1$ komutatiflik özelliğini sağlayan sıfırdan farklı $P_1, P_2 \in X_{n,n}$ idempotent matrisleri için P matrisi bunların $P = c_1P_1 + c_2P_2$ formunda bir lineer kombinasyonu olsun. $P_2 \neq P_1$ varsayımı altında *P* matrisinin idempotent bir matris olması için gerek ve yeter şart

(a) $(c_1, c_2) \in \{(1,-1), \quad (-1,1)\}$

(b) $(c_1, c_2) \in \{(1,-2), (-1,2)\}$ ve $P_1P_2 = P_2$

(c) $(c_1, c_2) \in \{(2,-1),\ (-2,1)\}$ ve $P_1P_2 = P_1$

(d) $(c_1, c_2) \in \{(1,1),\ (-1,-1)\}$ ve $P_1P_2 = 0$

olmasıdır.

İspat. $P_2 = -P_1$ eşitliği $P_2 = P_2^2 = (-P_1)^2 = P_1$ eşitliğini sağladığından ve dolayısıyla $P_1 = 0 = P_2$ olduğundan $P_2 \neq -P_1$ varsayımı fazlalıktır. Verilen sonucun (a)-(d) şıkları $T_1 = P_1 = P_1^2$ ve $T_2 = P_2 = P_2^2$ alınmak suretiyle teoemin (a)-(d) şıklarından kolayca elde edilir. Teoremin (e) ve (f) şıklarındaki matris şartları sırasıyla $P_2 = 0$ ve $P_1 = 0$ a karşılık geldiğinden ispat tamamlanmış olur. Öte yandan (g) şıkkındaki şart $P_2 = P_1$ e karşılık gelir ki bu durum varsayımlarla çelişir.

4.4. İkisi Ayrık Üç İdempotent Matrisin Lineer Kombinasyonlarının İdempotentliği

$\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesini $\mathbb{C}_{n,n}$ kompleks matris A_1, A_2, A_3 sıfırdan farklı idempotent matrisler A_2, A_3 ayrık yani

$$A_i = A_i^2, i = 1,2,3 \text{ ve } A_2A_3 = 0 = A_3A_2, \tag{4.94}$$

olduğunu varsayalım.

Bu çalışma $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ sıfırdan farklı $\gamma = (c_1, c_2, c_3)$ olmak üzere

$$C = c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 \tag{4.95}$$

şeklinde verilen A_1, A_2, A_3 ün bir lineer kombinasyonunun bir idempotent matris olabileceği tüm durumları karakterize etme problemiyle ilgilidir.

Teorem 4.6. $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{C}_{n,n}$ (4.94) şartlarını sağlayan sıfırdan farklı matrisler C ise (4.95) formunda bir lineer kombinasyon olsun. Ayrıca $\mathbb{C}_0$ ve $\mathbb{C}_1$ sırasıyla $\mathbb{C} - \{0\}$ ve $\mathbb{C}_0 - \{1\}$ kümelerini göstersin. Bu takdirde C nin bir idempotent matris olduğu tüm durumları karakterize eden liste aşağıda verilmiştir.

(a) $A_1A_2 = A_2A_1, \quad A_1A_3 = A_3A_1,$ (4.96)

olmak üzere (a_1)-(a_{10}) da verilen tüm durumlar

(a_1) $A_1A_2 = 0,\ A_1A_3 = 0$ ve $\gamma = (1,1,1)$;

(a_2) $A_1A_2 = A_2,\ A_1A_3 = 0$ ve $\gamma = (1,-1,1)$;

(a_3) $A_1A_2 = 0,\ A_1A_3 = A_3$ ve $\gamma = (1,1,-1)$;

(a_4) $A_1A_2 = A_2,\ A_1A_3 = A_3$ ve $\gamma = (1,-1,-1)$;

(a_5) $A_1A_2 + A_1A_3 = A_1$ ve $\gamma = (-1,1,1)$;

(a_6) $A_1A_2 = A_1 - A_3$ veya $\gamma = (-1,1,1)$ ya da $\gamma = (-1,1,2)$;

(a_7) $A_1A_3 = A_1 - A_2$ ve ya $\gamma = (-1,1,1)$ ya da $\gamma = (-1,2,1)$;

(a_8) $A_2 = A_1$ ve ya $\gamma = (c_1,-c_1,1),\ c_1 \in \mathbb{C}_0$ ya da $\gamma = (c_1, 1 - c_1, 1),\ c_1 \in \mathbb{C}_1$;

(a_9) $A_3 = A_1$ ve ya $\gamma = (c_1, 1, -c_1),\ c_1 \in \mathbb{C}_0$ ya da $\gamma = (c_1, 1, 1 - c_1),\ c_1 \in \mathbb{C}_1$

(a_{10}) $A_2 + A_3 = A_1$ ve ya $\gamma = (c_1, -c_1, -c_1),\ c_1$™$\mathbb{C}_0$

ya da $\gamma = (c_1, -c_1, 1 - c_1),\ c_1 \in \mathbb{C}_1$ ya da $\gamma = (c_1, 1 - c_1, -c_1),\ c_1 \in \mathbb{C}_1$

ya da $\gamma = (c_1, 1 - c_1, 1 - c_1),\ c_1 \in \mathbb{C}_1$

(b) $A_1A_2 = A_2A_1, \qquad A_1A_3 \neq A_3A_1,$ (4.97)

olmak üzere $(b_1) - (b_3)$ de verilen tüm durumlar

(b_1) $(A_1 - A_3)^2 = A_1A_2$ ve $\gamma = (-1,1,2)$;

(b_2) $(A_1 - A_3)^2 = 0$ ve $\gamma = (c_1, 1, 1 - c_1),\ c_1 \in \mathbb{C}_1$

(b_3) $(A_1 - A_3)^2 = A_2$ ve ya $\gamma = (c_1, 1 - c_1, -c_1), c_1 \in \mathbb{C}_1$

ya da $\gamma = (c_1, 1 - c_1, 1 - c_1),\ c_1 \in \mathbb{C}_1$

(c) $A_1A_2 \neq A_2A_1, \quad A_1A_3 = A_3A_1,$ (4.98)

olmak üzere $(c_1) - (c_3)$ de verilen tüm durumlar

(c_1) $(A_1 - A_2)^2 = A_1A_3$ ve $\gamma = (-1,2,1)$;

(c_2) $(A_1 - A_2)^2 = 0$ ve $\gamma = (c_1, 1 - c_1, 1), c_1 \in \mathbb{C}_1$

(c_3) $(A_1 - A_2)^2 = A_3$ ve ya $\gamma = (c_1, 1 - c_1, -c_1), c_1 \in \mathbb{C}_1$

ya da $\gamma = (c_1, 1 - c_1, 1 - c_1), c_1 \in \mathbb{C}_1$

(d) $A_1A_2 \neq A_2A_1, \qquad A_1A_3 \neq A_3A_1$ (4.99)

olmak üzere $(d_1) - (d_2)$ de verilen durumlar

(d_1) $(A_1 - A_2)^2 + (A_1 - A_3)^2 = A_1$ ve $\gamma = (c_1, 1 - c_1, 1 - c_1), c_1 \in \mathbb{C}_1$

(d_2) $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ olmak üzere

$$c_1c_2(A_1 - A_2)^2 + c_1c_3(A_1 - A_3)^2 + c_2c_3(A_2 + A_3) = 0 \quad (4.100)$$

dır.

İspat. (4.94) varsayımı altında direkt bir hesaplamalarla gösterilebilir ki (4.95) formundaki bir C matrisinin idempotent olması için gerek ve yeter koşul

$$c_1(1 - c_1)A_1 + c_2(1 - c_2)A_2 + c_3(1 - c_3)A_3$$

$$= c_1c_2(A_1A_2 + A_2A_1) + c_1c_3(A_1A_3 + A_3A_1) \quad (4.101)$$

olmasıdır.

Teoremde verilen 18 durumdaki şartların yeterliliği (4.101) kriterinin direkt sağlanmasıyla ortaya çıkar. Gerekliliğin ispatı ise (4.96)-(4.99) de ayrı ayrı belirtilen dört kısımda verilir. (4.96) şartları altında (4.101) kriteri

$$c_1(1 - c_1)A_1 + c_2(1 - c_2)A_2 + c_3(1 - c_3)A_3 = 2c_1(c_2A_1A_2 + c_3A_1A_3) \quad 4.102)$$

şeklini alır. (4.102) den $(a_3), (a_7), (a_9)$ un sırasıyla $(a_2), (a_6), (a_8)$ ile benzer olduğu 2 ve 3 alt indislerini yer değiştirerek görülür. (a) durumundaki ispat böylece yedi duruma indirgenir. Birinci kısım (a_{10}) ve (a_8) durumlarıyla ilgilidir. Bu durumda kolayca gösterilebilir ki $A_2 + A_3 = A_1$ ise (4.102) ifadesi

$$(c_1 + c_2)(1 - c_1 - c_2)A_2 + (c_1 + c_3)(1 - c_1 - c_3)A_3 = 0 \quad (4.103)$$

e dönüşür. A_2 ve A_3 ün ayrıklığı göz önüne alınırsa (4.103) in bir sonucu $c_2 = -c_1$, $c_2 = 1 - c_1$ eşitliklerinden birisinin $c_3 = -c_1$, $c_3 = 1 - c_1$ eşitliklerinden birisinin sağlanması gerektiğidir. Böylece (a_{10}) gerçeklenir. Benzer şekilde $A_2 = A_1$ ise bu takdirde (4.102) eşitliği

$$(c_1 + c_2)(1 - c_1 - c_2)A_2 + c_3(1 - c_3)A_3 = 0 \tag{4.104}$$

ifadesine dönüşür. Yine A_2 ve A_3 ün ayrıklığından (4.104) den $c_2 = -c_1, c_2 = 1 - c_1$ eşitliklerinden birisi $c_3 = 1$ olmasını gerektirir. Böylece (a_8) elde edilir. (4.94) eşitlikleri göz önüne alınarak(4.102) yi önce A_2 ile daha sonra da A_3 ile sağdan çarparak

$$c_1(1 - c_1 - 2c_i)A_1A_i + c_i(1 - c_i)A_i = 0, \quad i = 2,3 \tag{4.105}$$

elde edilir. (4.105) bağıntısından $A_1A_2 = 0$ ve $A_1A_3 = 0$ ise $c_2 = 1, c_3 = 1$ olduğu kolayca görülür ve (4.102) $c_1(1 - c_1)A_1 = 0$ a dönüşür. Bu nedenle $c_1 = 1$ olur ki bu da (a_1) deki şartların ispatıdır. Diğer bir ihtimal $A_1A_2 \neq 0$ ile $A_1A_3 = 0$ ifadesini birleştirmektir. (4.105) ifadesini A_1 ile soldan çarptığımızda

$$(c_1 + c_i)(1 - c_1 - c_i)A_1A_i = 0, \; i = 2,3, \tag{4.106}$$

elde edileceğinden (4.105) ve (4.106) eşitliklerinden $c_3 = 1$ olmasının $c_2 = -c_1$ ya da $c_2 = 1 - c_1$ olmasını sağladığı görülür. Bu durumların her birinde (4.102) ifadesi

$$c_1(1 - c_1)(A_1 - A_1A_2) + c_2(1 - c_2)(A_2 - A_1A_2) = 0 \tag{4.107}$$

formunda yazılabilir.

Eğer $c_1 = 1$ ise bu takdirde $c_2 = -1$ olmalıdır. Bu ise (4.107) nin $A_1A_2 = A_2$ olmasına denk olduğunu gösterir. Böylece (a_2) deki şartlar tamamlanmış olur.

Ayrıca belirtelim ki eğer $c_2 = 1$ ise $c_1 = -1$ olmak zorundadır. Bu ise $A_1A_3 = 0$ ile değişmeli olan $A_1A_2 = A_1$ eşitliğine (4.107) nin uygulanmasının (a_5) i özel durumu olduğunu gösterir. Öte yandan eğer $c_1 \neq 1$ ve $c_2 \neq 1$ ise (4.107) yi soldan A_1 ile ve sağdan A_2 ile çarptığımızda $A_1A_2 = A_1$ ve $A_1A_2 = A_2$ elde edilir. Bu nedenle $A_2 = A_1$ olur ki bu da (a_8) de verilen durumdur. (4.106) in diğer bir sonucu ise şudur; Eğer $A_1A_2 \neq 0$ ve $A_1A_3 \neq 0$ ise $c_2 = -c_1$ ve $c_2 = 1 - c_1$ eşitliklerinden birisi $c_3 = -c_1$ ve $c_3 = 1 - c_1$ eşitliklerinden sadece birinin sağlanmasını gerektirir. $c_2 = -c_1$ ve $c_3 = -c_1$ için (4.102) bağıntısı

$$(1-c_1)A_1-(1+c_1)(A_2+A_3)+2c_1(A_1A_2+A_1A_3)=0 \tag{4.108}$$

bağıntısına denktir.

Eğer $c_1=1$ ise (4.108) den

$$A_1A_2+A_1A_3=A_2+A_3 \tag{4.109}$$

elde edilir.(4.109) u önce A_2 ile sonra A_3 ile sağdan çarptığımızda $A_1A_2=A_2$ ve $A_1A_3=A_3$ elde edilir ki bu da (a_4) deki şartları tamamlar. Ayrıca $c_1=-1$ ise bu durumda (4.108) eşitliği

$$A_1A_2+A_1A_3=A_1 \tag{4.110}$$

eşitliğine dönüşür. Böylece (a_5) karakteristiği kurulmuş olur. Öte yandan $c_1\neq 1$ ve $c_1\neq -1$ ise (4.108) ün A_1 ile sağdan çarpılması (4.110) i verir ve (4.108) ile (4.110) birleştirilerek $A_1+A_3=A_1$ eşitliği elde edilir. Bu ise (a_{10}) ile verilen durumla örtüşür. $c_2=-c_1$ ve $c_3=1-c_1$ için (4.102) bağıntısı

$$(1-c_1)(A_1+A_3-2A_1A_3)-(1+c_1)A_2+2c_1A_1A_2=0 \tag{4.111}$$

eşitliğine denktir.

c_1 in birden farklı olması gerektiğinden (4.111) i A_3 ile sağdan çarparak $A_1A_3=A_3$ elde edilir. Eğer $c_1=-1$ ise (4.111) den $A_1A_2+2A_1A_3=A_1+A_3$ ve dolayısıyla

$$A_1A_2=A_1-A_3 \tag{4.112}$$

elde edilir. Bu eşitlik $A_1A_3=A_3$ eşitliğini ve dolayısıyla (a_5) matris ilişkisini sağladığından (a_6) ifadesini tamamlamak için $\gamma=(-1,1,1)$ i $\gamma=(-1,1,2)$ ye eklemek yeterlidir. Ayrıca eğer $c_1\neq -1$ ise (4.111) yı A_2 ile sağdan çarparak $A_1A_2=A_2$ elde edilir. Böylece (4.111) ifadesi $A_2+A_3=A_1$ formuna dönüşür. Bu ise (a_{10}) ile verilen durumdur. Son olarak $c_2=1-c_1$ ve $c_3=1-c_1$ ise $c_1\neq 1$ olacağından (4.102) bağıntısı da

$$A_1+A_2+A_3=2(A_1A_2+A_1A_3) \tag{4.113}$$

bağıntısına denk olacaktır. (4.113) i sırasıyla A_2 ve A_3 ile sağdan çarparak $A_1A_2 = A_2$ ve $A_1A_3 = A_3$ elde edilir. Böylece (a_{10}) da verilen $A_2 + A_3 = A_1$ eşitliğine ulaşılır. (4.97) şartları altında (4.101) kriteri

$$c_1(1-c_1)A_1 + c_2(1-c_2)A_2 + c_3(1-c_3)A_3$$
$$= 2c_1c_2A_1A_2 + c_1c_3(A_1A_3 + A_3A_1) \tag{4.114}$$

formunu alır. A_3 ile soldan çarpılan (4.114) den elde edilen eşitliği A_3 ile sağdan çarpılan (4.114) den elde edilen eşitliği çıkararak

$$(1-c_1-c_3)(A_1A_3 - A_3A_1) = 0 \tag{4.115}$$

elde edilir. $A_1A_3 \neq A_3A_1$ olduğundan (4.115) nin bir sonucu $c_3 = 1 - c_1$ olacaktır. Bu ise $c_1 \neq 1$ olduğunu gösterir. Böylece (4.114)

$$c_1(1-c_1)(A_1 - A_3)^2 + c_2(1-c_2)A_2 - 2c_1c_2A_1A_2 = 0 \tag{4.116}$$

eşitliğine dönüşür. Ayrıca $A_3A_1A_2 = A_3A_2A_1 = 0$ olduğundan (4.116) i A_2 ile sağdan çarparak

$$c_1(1-c_1-2c_2)A_1A_2 + c_2(1-c_2)A_2 = 0 \tag{4.117}$$

elde edilir. Bu nedenle $A_1A_2 = 0$ ise $c_2 = 1$ olacağı açıktır. Bu durumda (4.116) $A_1A_3 + A_3A_1 = A_1 + A_3$ eşitliğine dönüşür. Böylece (b_2) şartları sağlanmış. Öte yandan eğer $A_1A_2 \neq 0$ ise (4.117) yi A_1 ile soldan çarparak c_1 ve c_2 nin ya $c_2 = -c_1$ ya da $c_2 = 1 - c_1$ eşitliğini sağlaması gerektiği görülür. Eğer $c_2 = -c_1$ ise (4.117) eşitliği

$$(1+c_1)(A_2 - A_1A_2) = 0 \tag{4.118}$$

eşitliğine dönüşür.

(4.118) ün birinci ihtimali $c_1 = -1$ (ve dolayısıyla $c_2 = 1$) olmasıdır ki bu durumda (4.116) (b_1) de verilen matris bağıntısına dönüşür. Diğer bir ihtimal ise $A_1A_2 = A_2$ olmasıdır. Bu durumda (4.116) in bir sonucu

$$(A_1 - A_3)^2 = A_2 \tag{4.119}$$

tür. (4.119) eşitliği $A_1A_2 = A_2$ şartını sağladığından (b_3) de verilen diğer durumlar yok olur. Üstelik $c_2 = 1 - c_1$ ise (4.117) $A_1A_2 = A_2$ ye dönüşür. Böylece (4.116) ifadesi (4.119) şeklini alır bu da (b_3) ün şartlarını tamamlar. $(c_1) - (c_3)$ karakteristikleri $(b_1) - (b_3)$ de ‘‘2’’ ve ‘‘3’’ alt indislerini değiştirerek kolayca elde edilir.

(d) durumundaki ispat için (4.101) eşitliğini önce A_2 ile ve daha sonra A_3 ile soldan ve sağdan çarparak elde edilen eşitlikleri birleştirirsek

$$c_1(1 - c_1 - c_2)(A_1A_2 - A_2A_1) = c_1c_3(A_3A_1A_2 - A_2A_1A_3) \tag{4.120}$$

ve

$$c_1(1 - c_1 - c_3)(A_1A_3 - A_3A_1) = c_1c_2(A_2A_1A_3 - A_3A_1A_2) \tag{4.121}$$

elde edilir. $c_1 \neq 0$ olduğundan (4.99) şartları altında bu eşitliklerin bir sonucu eğer

$$A_2A_1A_3 = A_3A_1A_2, \tag{4.122}$$

sağlanırsa $c_2 = 1 - c_1$ ve $c_3 = 1 - c_1$ olmasıdır. Böylece (4.101) kriteri

$$A_1 + A_2 + A_3 = A_1A_2 + A_2A_1 + A_1A_3 + A_3A_1 \tag{4.123}$$

formunu alır. Bu ise (d_1) deki matris eşitliğinin bir diğer ifadesidir. Bu eşitlik $A_2A_1A_3 = 0$ ve $A_3A_1A_2 = 0$ eşitliklerini sağlar böylece (4.122) gerçeklenir. Öte yandan A_3 ile sağdan çarpılmış (4.120) i A_2 ile sağdan çarpılmış (4.121) den çıkardığımızda

$$c_1(1 - c_1 - c_2 - c_3)(A_2A_1A_3 - A_3A_1A_2) = 0$$

elde edilir. Bu nedenle eğer (4.122) eşitliği sağlanmazsa c_1, c_2, c_3 , $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ eşitliğini sağlamalıdır. Bu şart altında (4.101) kriteri (4.100) formunda yeniden düzenlenebilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.7. Teorem 4.6 nın varsayımları altında (4.95) lineer kombinasyonunun bir idempotent matris olması için bir gerek şart $A_1(A_2 + A_3)$ ve $(A_2 + A_3)A_1$ çarpımlarının her birinin idempotent olmasıdır. Teorem 4.4.1(a) da verilen durumda (4.96) şartları A_1 ve $A_2 + A_3$ ün komutatif olduğunu dolayısıyla $A_1(A_2 + A_3)$ ve

$(A_2 + A_3)A_1$ in çarpımlarının her birinin bir idempotent matris olması için yeterli olduğunu gösterir.

(b) durumunda $A_1A_2 = A_2A_1$ in bir sonucu

$$(A_2 + A_3)A_1(A_2 + A_3) = A_2A_1A_3 + A_3A_1A_3 \qquad (4.128)$$

dir. Üstelik $(b_1) - (b_3)$ de verilen

$$(A_1 - A_3)^2 = A_1A_2, \ \ (A_1 - A_3)^2 = 0, \ \ (A_1 - A_3)^2 = A_2$$

şartlarının her birisi $A_3A_1A_3 = A_3$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla (4.128) ifadesi

$$(A_2 + A_3)A_1(A_2 + A_3) = A_1A_2 + A_3 = A_2A_1 + A_3$$

formuna dönüşür. Bu da gösterir ki teoremin iddiası doğrudur.(c) durumundaki ispat yukarıdaki ile benzer olduğundan benzer şekilde yapılabilir. Sonuç olarak (4.123) bağıntısının $A_2A_1A_3 = 0 = A_3A_1A_2$ eşitliğini sağladığı Teorem 4.6 nın ispatında belirtilmiş olup (4.128) eşitliği (d_1) durumunda da geçerlidir. (4.123) ifadesinin diğer sonuçları $A_2A_1A_2 = A_2$ ve $A_3A_1A_3 = A_3$ eşitlikleri olduğundan

$$(A_2 + A_3)A_1(A_2 + A_3) = A_2 + A_3$$

olup $A_1(A_2 + A_3)$ ve $(A_2 + A_3)A_1$ çarpımlarının her ikisi de idempotenttir. Sonuç olarak A_1 ile sağdan ve soldan çarpılarak (4.100) den elde edilen eşitlikleri birleştirerek

$$c_2c_3[A_1(A_2 + A_3) - (A_2 + A_3)A_1] = 0$$

elde edilir. Bu durum başlangıçta belirtildiği gibi A_1 ve $A_2 + A_3$ ün komutatifliğinin $A_1(A_2 + A_3)$ ve $(A_2 + A_3)A_1$ in her ikisininde idempotentğinden daha kuvvetli bir özellik olduğunu gösterir.

Bu kısmın ikinci sonucu A_1, A_2, A_3 matrislerinin $A_1 - A_2$ ve $A_1 - A_3$ hermityen matrisler yani

$$A_1 - A_2 = (A_1 - A_2)^* \text{ ve } A_1 - A_3 = (A_1 - A_3)^* \qquad (4.129)$$

olduğu özel durumlara karşılık gelir. Bu varsayım A_1, A_2, A_3 ün kendilerinin hermityen olması durumunda açık olarak sağlanır.

Teorem 4.8. $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{C}_{n,n}$ (4.94) ve (4.129) şartlarını sağlayan sıfırdan farklı matrisler $\mathbb{C} - \{0\}$ ve $\mathbb{C}_{\circ} - \{1\}$ olsun. Bu durumda A_1, A_2, A_3 ün (4.95) formundaki bir lineer kombinasyonu olan C matrisinin idempotent olabileceği tamı tamına 12 durum mevcuttur:

(i) $C = A_1 + A_2 + A_3$ durumu olup bu durumun gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul $A_1A_2 = 0 = A_2A_1$, $A_1A_3 = 0 = A_3A_1$ ile birlikte $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ olmasıdır.

(ii) $C = A_1 - A_2 + A_3$ durumu olup bu durumun gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul $A_1A_2 = A_2, A_1A_3 = 0$ ile birlikte $c_1 = c_3 = 1, c_2 = -1$ olmasıdır.

(iii) $C = A_1 + A_2 - A_3$ durumu olup bu durumun gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul $A_1A_2 = 0 = A_2A_1$, $A_1A_3 = A_3 = A_3A_1$ ile birlikte $c_1 = c_2 = 1, c_3 = -1$ olmasıdır.

(iv) $C = A_1 - A_2 - A_3$ durumu olup bu durumun gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul $A_1A_2 = A_2$, $A_1A_3 = A_3$ ile birlikte $c_1 = 1$, $c_3 = c_2 = -1$ olmasıdır.

(v) $C = -A_1 + A_2 + A_3$ durumu olup bu durumun gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul $A_1A_2 + A_1A_3 = A_1$ ile birlikte $c_1 = -1, c_2 = c_3 = 1$ olmasıdır.

(vi) $C = -A_1 + A_2 + 2A_3$ durumu olup bu durumun gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul $A_3 \neq A_1$, $A_1A_2 = A_1 - A_3$ ile birlikte $c_1 = -1, c_2 = 1, c_3 = 2$ olmasıdır.

(vii) $C = -A_1 + 2A_2 + A_3$ durumu olup bu durumun gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul $A_2 \neq A_1$, $A_1A_3 = A_1 - A_2$ ile $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 1$ olmasıdır.

(viii) $C = A_2 + A_3$ durumu olup bu durumun gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul c_1™ $\mathbb{C}_0$ ve $A_3 = A_1$ ile birlikte $c_2 = 1$, $c_3 = 1 - c_1$ olması veya $A_2 = A_1$ ile birlikte $c_2 = 1 - c_1$, $c_3 = 1$ olması ya da $A_2 + A_3 = A_1$ ile birlikte $c_2 = 1 - c_1$, $c_3 = 1 - c_1$ olmasıdır.

(ix) $C = A_2$ durumu olup bu durumun gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul $A_3 = A_1$ ile birlikte c_1™ $\mathbb{C}_0$ ve $c_2 = 1, c_3 = -c_1$ olması veya $A_2 + A_3 = A_1$ ile birlikte c_1™ $\mathbb{C}_1$ ve $c_2 = 1 - c_1, c_3 = -c_1$ olmasıdır.

(x) $C = A_3$ durumu olup bu durumun gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul $A_2 = A_1$ ile birlikte c_1™ $\mathbb{C}_0$ ve $c_2 = -c_1$, $c_3 = 1$ olması ya da $A_2 + A_3 = A_1$ ile birlikte c_1™ $\mathbb{C}_1$ ve $c_2 = -c_1$, $c_3 = 1 - c_1$ olmasıdır.

(xi) $C = 0$ durumu olup bu durumun gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul c_1™ $\mathbb{C}_0$ ve $A_2 + A_3 = A_1$ile birlikte $c_2 = -c_1$, $c_3 = -c_1$ olmasıdır.

(xii) $C = c_1(A_1 - A_3) + c_2(A_2 - A_3) + A_3$ durumu olup bu durumun gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}_0$ ve ile birlikte $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ olmasıdır.

İspat. Öncelikle C nin teoremin (i)-(xi)ye kadar kısımlarında verilen durumlarının teorem 4.6 nın $(a_1) - (a_{10})$ durumlarında karakterize eden şartların bir sonucu olduğunu belirtelim. Üstelik $(a_6), (a_7)$ durumlarında (4.95) lineer kombinasyonu sırasıyla (v), (vi) ve (v),(vii) formlarından birini alırken $(a_1) - (a_5)$ durumları (i)-(v) şıklarına karşılık gelir. $(a_8) - (a_9)$ durumlarını karakterize eden şartların her ikisi bir c_1™ $\mathbb{C}_0$ ve için $\gamma = (c_1, -c_1, 1)$ ve $\gamma = (c_1, 1, -c_1)$ olduğunda (x) ve (ix) e karşılık gelir. (a_8) durumunda c_1™ $\mathbb{C}_1$ olmak üzere $\gamma = (c_1, 1 - c_1, 1)$ olduğunda ve (a_9) durumunda c_1™ $\mathbb{C}_1$ olmak üzere $\gamma = (c_1, 1{,}1 - c_1)$ olduğunda bunlar (viii) e denktir. Öte yandan c_1™ $\mathbb{C}_0$ olmak üzere $\gamma = (c_1, -c_1, -c_1)$ olduğunda (a_{10}) ifadesi (xi) ifadesine; c_1™ $\mathbb{C}_0$ olmak üzere $\gamma = (c_1, -c_1, 1)$ olduğunda (a_{10}) eşitliği (x) eşitliğine; c_1™ $\mathbb{C}_1$ olmak üzere $\gamma = (c_1, 1 - c_1, -c_1)$ olduğunda (a_{10}) ifadesi (ix) ifadesine ve c_1™ $\mathbb{C}_1$ olmak üzere $\gamma = (c_1, 1 - c_1, 1 - c_1)$ olduğunda (a_{10}) ifadesi (viii) ifadesine karşılık gelir. Son olarak (xii) ifadesi ise (4.95) de $c_3 = 1 - c_1 - c_2$ alınarak elde edilir. Teorem 4.6 nın (d) durumunda ifade edilen c_1, c_2, c_3 hakkındaki şartlar geçerlidir.

(4.124) ve (4.127) ifadesindeki matrislerin her birisi hermityen olduğundan (i)-(xii) durumlarının her birisi gerçekten ulaşılabilirdir. Sonuç olarak eğer A_1, A_2, A_3 (4.129) şartlarını sağlarsa Teorem 4.6 daki $(b_1) - (b_3)$, $(c_1) - (c_3)$ ve (d_1) durumları gerçeklenir. (4.129) nin ikinci kısmına göre $(b_1) - (b_3)$ teki her bir matris eşitliği M, 0, A_2 veya $A_1A_2 = A_2A_1$ ri göstermek üzere

$$(A_1 - A_3)(A_1 - A_3)^* = M \text{ ve } (A_1 - A_3)^*(A_1 - A_3) = M \qquad (4.130)$$

e yol açar. (4.94) varsayımları altında (4.130) deki eşitliği sırasıyla A_3 ve A_3^* ile sağdan ve soldan çarparak ve daha sonra da elde edilen eşitliği A_3^* ve A_3 ile sağdan ve soldan çarparak

$$(A_3A_1 - A_3)(A_3A_1 - A_3)^* = 0 \text{ ve } (A_1A_3 - A_3)^*(A_1A_3 - A_3) = 0 \qquad (4.131)$$

elde edilir.

Herhangi bir K kompleks matrisi $KK^* = 0 \Leftrightarrow K = 0 \Leftrightarrow K^*K = 0$ koşulunu sağladığından (4.131) den $A_1A_3 = A_3 = A_3A_1$ elde edilir ki bu durum (4.97) nin ikinci kısmıyla çelişir. (c) durumunda ispat (b) durumundaki ispatla simetriktir. Dolayısıyla geriye (d_1) durumunu göz önüne almak kalır. (4.129) varsayımları altında (d_1) deki matris eşitliği A_1 in hermityen olduğunu gösterir ve bu nedenle

$$(A_1 - A_2)(A_1 - A_2)^* + (A_1 - A_3)(A_1 - A_3)^* = A_1 \qquad (4.132)$$

$$(A_1 - A_2)^*(A_1 - A_2) + (A_1 - A_3)^*(A_1 - A_3) = A_1^* \qquad (4.133)$$

alternatif formlarında ifade edilebilir. Herhangi bir K kompleks matrisinin sütun uzayı $\mathcal{C}(K) = \mathcal{C}(KK^*)$ özelliğine sahip olduğundan (4.132) ve (4.133) den

$$\mathcal{C}(A_1 - A_2 : A_1 - A_3) = \mathcal{C}(A_1) \qquad (4.134)$$

$$\mathcal{C}[(A_1 - A_2)^* : (A_1 - A_3)^*] = \mathcal{C}(A_1^*) \qquad (4.135)$$

elde edilir. Fakat A_1 ve A_1^* iz düşümler olduğundan (4.134) ve (4.135) in sonuçları

$$A_1(A_1 - A_i) = A_1 - A_i \text{ ve } (A_1 - A_i)A_1 = A_1 - A_i, \text{ i=2,3} \qquad (4.136)$$

dur. (4.136) eşitliği gösterir ki $A_1, A_2, A_3,\ A_1A_i = A_i = A_iA_1,\ i = 2{,}3$ eşitliklerini sağlar. Bu ise (4.99) varsayımıyla açık bir çelişkidir. C nin (xii) formundaki bir idempotent lineer kombinasyonunun belirli durumlarının ulaşılamaz olduğunu belirtmek önemsizdir. Örneğin eğer c_1, c_2, c_3 reel sayı olarak kabul edilirse $c_1\, c_2 > 0,\ c_1\, c_3 > 0,\ c_2\, c_3 > 0$ olması $c_1\, c_2 > 0,\ c_1\, c_3 < 0,\ c_2\, c_3 < 0$ olması ve $c_1\, c_2 < 0, c_1\, c_3 > 0,\ c_2\, c_3 < 0$ olması durumları imkânsızdır. Dolayısıyla Teorem 4.8 in son kısmına karşılık gelen C matrisi yalnızca $c_1\, c_2 < 0,\ c_1\, c_3 < 0,\ c_2\, c_3 > 0$ olduğunda bulunabilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında k-potent matrislerin çeşitli lineer kombinasyonlarının tersinirliği ve tersinin mevcut olması durumunda ters hesaplama yöntemleri incelenmiştir. Bununla ilgili olarak öncelikle bazı temel kavramlar verilmiş ve kare olmayan ya da kare olduğu halde bilinen anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve lineer denklem sistemlerinin genel durumda çözümünde kullanılan ve bilinen anlamdaki invers özelliklerini de sağlayan genelleştirilmiş invers adı verilen bir kavram ele alınmıştır. Bu amaçla bir matrisin genelleştirilmiş inversi, yansımalı genelleştirilmiş inversi ve Moore–Penrose genelleştirilmiş inversi tanımları verilerek bu inverslerin çeşitli özellikleri genel bilgiler başlığı altında ortaya konulmuştur.

Ayrıca bazı k-potentler üzerine belirli komutatiflik özelliklerinin sağlanması şartı altında k-potentlerin ve çarpımlarının kombinasyonlarının k-potentliğini, grup tersinirliğini ve tersinirliğini karakterize etme problemi ele alınmıştır. c_1, c_2 sıfırdan farklı cisim elemanı, P_1, P_2 ise cisim üzerinde iki farklı idempotent matris yani $P_1 = P_1^2$, $P_2 = P_2^2$ ve $P_1 \neq P_2$ olmak üzere P_1 ile P_2 nin lineer kombinasyonlarının idempotentlik özelliğinin sağlandığı tüm durumların karakterizasyonu problemine çözüm aranacaktır. Bununla ilgili olarak öncelikle idempotent matrislerin lineer kombinasyonlarının idempotentliği incelenmiştir. Daha sonra A bir idempotent matris ve B de bir tripotent matris olmak üzere $C = c_1A + c_2B$ şeklindeki lineer kombinasyonun bir idempotent matris olmasını karakterize eden bazı ifadeler verilmiştir. $c_1, c_2 \in X$ sıfırdan farklı kompleks sayılar ve $T_1, T_2 \in X_{n,n}$ n-mertebeli değişmeli sıfırdan farklı kompleks matrisler, yani $T_1 = T_1^3$, $T_2 = T_2^3$ ve $T_1T_2 = T_2T_1$ olmak üzere T_1 ve T_2 nin $T = c_1T_1 + c_2T_2$ formundaki bir lineer kombinasyonunun da bir tripotent matris olduğu tüm durumları karakterize etmektir. Son olarak $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ sıfırdan farklı elemanlar olmak üzere $C = c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3$ şeklinde verilen A_1 , A_2 , A_3 ün bir lineer kombinasyonunun bir idempotent matris olabileceği tüm durumları karakterize etme problemi ele alınmıştır.

Yapılan bu çalışmalara ilaveten üç ya da daha fazla k-potent matrisin lineer kombinasyonlarının tersinirlikleri ve k-potentlikleri incelenebilir. Ayrıca değişik tipte parçalanmış matrisler için blokların k-potentlikleri ile matrisin kendisinin k-potentliği arasındaki ilişkiler araştırılabilir. Ayrıca iki idempotent matrisin, bir idempotent matrisle bir tripotent matrisin ya da iki tripotent matrisin lineer kombinasyonunun grup tersinin veya Moore-Penrose tersinin hesaplanmasında kullanılmak üzere çeşitli algoritmalar ve bilgisayar programları türetilerek bu programlardan veya algoritmalardan faydalanılabilir. Elde edilen bu bulgular lineer denklem sistemlerinin çözümlerine uygulanabilir.

6. KAYNAKLAR

Adetunde I.A. ve ark., 2010. On the Generalized Inverse of a Matrix. American Journalof Scientific Research, Issue 7, 77-89 s.

Akdeniz, F., Öztürk, F. 1996. Lineer Modeller, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, No: 38.

Baksalary, J. K., Styan, G.P.H., 1993. Around a Formula for The Rank for a Matrix Product with Some Statistical Applications, in: R.S. Rees (Ed.), Graphs, Matrices, and Designs: Festschrift in Honor of Norman J. Pullman on His Sixtieth Birthday, Marcel Dekker, New York, 1-18 s.

Baksalary, J.K., Baksalary, O.M., 2000. Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices, Linear Algebra Appl. 321, 3-7.

Baksalary, J. K., Styan, G.P.H., 2002. Generalized inverses of partitioned matrices in Banachiewicz-Schur form, Linear Algebra and its Appl. 354,41-47.

Baksalary, J.K., Baksalary, O.M., Styan, G.P.H., 2002. Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a tripotent matrix, Linear Algebra Appl. 354, 21-34.

Baksalary, J.K., Baksalary, O.M., Özdemir, H., 2004. A note on linear combinations of commuting tripotent matrices, Linear Algebra Appl. *388, 45-51.*

Baksalary, O.M., 2004. Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are disjoint , Linear Algebra Appl. 388, 67-78.

Baksalary, O.M., Benitez, J., 2007. Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are commuting, Linear Algebra Appl. 424 320-337.

Baksalary K.J., Baksalary, O. M. 2007. Particular formulae for the moore-Penrose inverse of a coloumnwise partitioned matrix, Linear Algebra and its Appl. 421, 16-23.

Baksalary K.J., Baksalary, O. M. 2004. Relationships between generalized inverses of a matrix and generalized inverses of its rank-one-modifications. Linear Algebra and its Appl. 388, 31-44.

Benitez, J., Thome, N., 2005. Idempotency of linear combinations of an idempotent and a t-potent matrix that commute, Linear Algebra Appl. 403, 414-418.

Benitez, J., Liu, X., Zhu, T., 2010. Nonsingularity and group invertibility of linear combination of two k-potent matrices, Linear and Multilinear Algebra, *58, 1023-1035.*

Benitez, J., Liu, X., Wu, S., 2011. On nonsingularity of combinations of two group invertible matrices and two tripotent, Linear and multilinear Algebra, 59, 1409-1417.

Ben-Israel, A., Charnes, A., 1963, Contributions to the theory of generalized inverses. SIAM J. Appl. Math., Vol. 11, 667-699 s.

Bhimasankaram, P., Mitra, S. K., 1969, On a theorem of Rao on g-inverses of matrices, Sankhya Ser. A, Vol. 31, 365-368 s.

Bjerhammer, A., 1951, Rectangular reciprocal matrices with special reference to geodetic calculations, Bull. Geodesique, Vol. 52, 188-220 s.

Bjerhammer, A., 1951, Application of the calculus of matrices to the method of least squares with special reference to geodetic calculations, Kungl. Tekn. H11gsk. Hand. Stockholm. No. 49, 1-86 s.

Bjerhammer, A., 1958, A generalized matrix algebra, Kungl. Tekn. Hogsk. Handl. Stockholm. No. 124, 1-32 s.

Bose, R. C., 1959, *Analysis of Variance*. unpublished lecture notes, University of North Carolina.

Bott, R., Duffin, R. J., 1953, On the algebra of Networks. Trans. Amer. Math. Soc.. Vol. 74, 99-109 s.

Chernoff, H., 1953, Locally optimal designs for estimating parameters. Ann. Math. Statist., Vol. 24, 586-602 s.

Chipman, J. S., 1968, Specification problems in regression analysis, Theory and Application of Generalized Inverses and Matrices, Symposium Proceedings, Texas Technological College. Mathematics Series No. 4, 114-176 s.

Chipman, J. S., Rao, M. M., 1964, Projections, generalized inverses and quadratic forms. J. Math. Anal. Appl., Vol. 9, 1-11 s.

Doymuş, N., 2006. Matrislerin Genelleştirilmiş Tersleri ve Kronecker Çarpımlarının Bazı Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sivas, 63 s.

Greville, T. N. E., 1959, The pseudo-inverse of a rectangular matrix and its application to the solution of systems of linear equations, SIA M Rev., Vol. 1, 38-43 s.

Hacısalihoğlu H.H., 1977. *Lineer Cebir*. Matbaa Teknisyenleri Koll. Şti., İstanbul, 716 s.

Koliha, J.J., Rakocevic, V., 2006. The nullity and rank of linear combinations of idempotent matrices, Linear Algebra Appl. 418, 11-14.

Koliha, J.J., Rakocevic, V., 2007. Stability theorems for linear combinations of idempotents,İntegral Equations Operator Theory, 58, 597-601.

Lancaster, P., 1969. *Theory of Matrices*, Academic Pres, New York, 570 s.

Marsaglia, G., Styan, G.P.H., 1974. Rank Conditions for Generalized Inverses of Partitioned Matrices. Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A Vol. 36, No. 4 , 437-442 s.

Mihalyffy, L. 1971. An Alternative representation of the generalized inverces of partitioned matrices, Linear Algebra and its Appl. 4, 95-100.

Mitra, S. K., 1968, On a generalized inverse of a matrix and applications, Sankhya Ser. A, Vol. 30, 107-114 s.

Mitra, S. K., 1968, A new class of g-inverse of square matrices, Sankhya Ser. A, Vol. 30, 323-330 s.

Mitra, S. K., Radhakrishna Rao, C., 1968, Simultaneous reduction of a pair of quadratic forms. Sankhya Ser. A, Vol. 30, 313-322 s.

Mitra, S. K., Rao, C. R., 1968, A note on a previous lemma in the theory of least squares and some further results. Sankhya Ser. A. Vol. 30, 245-252 s.

Moore, E. H., 1920, On the reciprocal of the general algebraic matrix (abstract), Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 26, 394-395 s.

Moore, E. H., 1935, *General Analysis*, American Philosophical Society, Philadelphia.

Özdemir, H., Özban, A.Y., 2004. On idempotency of linear combinations of idempotent matrices, Appl. Math. Comput. 159, 439-448.

Özdemir, H., Sarduvan, M., Özban, A.Y., Güler, N., 2009. On idempotency and tripotency of inear combinations of two commuting tripotent matrices, Appl. Math. Comput. 207, 197-201.

Penrose, R., 1955, A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 51, 406-413 s.

Penrose, R., 1956, On best approximate solutions of linear matrix equations, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 52, 17-19 s.

Radhakrishna Rao, C., 1962, A note on a generalized inverse of a matrix with applications to problems in mathematical statistics, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. Vol. 24, 152-158 s.

Radhakrishna Rao, C., 1965, Linear Statistical Inference and its Applications, New York, Wiley.

Radhakrishna Rao, C., 1966, *Generalized inverse for matrices and its applications in mathematical statistics*, Research papers in Statistics, Festschrift for J. Neyman, New York, Wiley,

Radhakrishna Rao, C., 1967, Calculus of generalized inverse of matrices. Part 1: General theory, Sankhya Ser. A, Vol. 29, 317-342 s.

Rao, C. R., Mitra, S.K. 1971. Generalized inverse if matrices and its Applications, Wiley, New York.

Sarduvan, M., Özdemir, H., 2008. On linear combinations of two tripotent, idempotent,and involutive matrices, Appl. Math.Comput. 200, 401-406.

Sarduvan, M., Özdemir, H., 2008. On tripotency and idempotency of some linear combinations of two commuting quadripotent matrices, in: The 20th İnternational Congress of the Jangjeon Mathematical Society (Özet Metin), Bursa, pp. 88, 21-23.

Scroggs, J. E., Odell, P. L., 1966, An alternative definition of the pseudo-inverse of a matrix, SIA M J. Appl. Math., Vol. 14, 796-810 s.

Tian, Y., 2011. Two universal similarity factorization equalities for commutative involutory and idempotent matrices and their applications, Linear and Multilinear Algebra, 59, 129-144.

Tian, Y. 2004. Using rank formulas to characterize equalities for Moore-Penrose inverses of matrix products. Applied Mathematics and Computation, 147, 581-600 s.

Tian, Y., Takane, Y. 2004. More on generalized inverces of partitioned matrices with Banachiewicz-Schur forms, Applied Mathematics and Computation, 148, 1-13 s.

Tian, Y. 2004. Upper and lower bounds for ranks of matrix expressions using generalized inverses, Linear Algebra and its Appl. 355, 187-214.

Tian, Y. 2004. More on maximal and minimal ranks of Schur complements wih applications, Appl. Math. Comp.152, 675-692.

Tian, Y., Styan, G.P.H., 2001. Rank Equalities for Idempotent and Involutory Matrices. Linear Algebra Appl. 335, 101-117 s.

Tian, Y., 1999. Rank Equalities Related to Generalized Inverses of Matrices and Their Applications. Yüksek Lisans Tezi, Concordia University, Montréal, Quebec, Canada, 156 s.

Tseng, Y. Y., 1949, Generalized inverses of unbounded operators between two unitary spaces, Dokl. Akad. Nauk. SSSR., Vol. 67, 431-434 s.

Tseng, Y. Y., 1949, Properties and classifications of generalized inverses of closed operators, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol. 67, 607-610 s.

Tseng, Y. Y., 1956, Virtual solutions and general inversions, Uspehi. Mat. Nauk., Vol. 11, 213-215 s.

Yongge Tian, George P.H. Styan. 2009. On some matrix equalities for generalized inverses with applications, Linear Algebra and its Appl. 430, 2716-2733.

Yongge T., Jürgen G. 2006. Invariance properties of a triple matrix product involving generalized inverses, Linear Algebra and its Appl. 417, 94-107.

Zekraoui, H., Guedjiba, S., 2008. On Algebric Properties of Generalized Inverses of Matrices, Internal Journal of Algebra. Vol. 2, no. 13, 633-643 s.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	**:**	Hatice ASLANCI
Doğum Yeri	**:**	Ordu
Doğum Tarihi	**:**	08.07.1983
Yabancı Dili	**:**	İngilizce
E-mail	**:**	eda_gunerr@hotmail.com
İletişim Bilgileri	**:**	Özel Altaş Koleji, Matematik Öğretmeni, Ordu/Merkez

Öğrenim Durumu :

Derece	Bölüm/ Program	Üniversite	Yıl
Lisans	Matematik	Eskişehir Osmangazi Üniversitesi	2005
Y. Lisans(tezsiz)	Matematik Öğretmenliği	Ondokuz Mayıs Üniversitesi	2008
Y. Lisans	Matematik	Ordu Üniversitesi	2013