T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2x2 TİPİNDEKİ BLOK PARÇALI MATRİSLERİN NONSİNGÜLERLİĞİ VE BAZI UYGULAMALARI

HARUN SAKA

Bu tez,
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans
derecesi için hazırlanmıştır.

ORDU 2014

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Harun SAKA tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Selahattin MADEN danışmanlığında yürütülen "2x2 Tipindeki Blok Parçalı Matrislerin Nonsingülerliği ve Bazı Uygulamaları" adlı bu tez, jürimiz tarafından 10 / 06 / 2014 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Selahattin MADEN

Başkan : Doç. Dr. Selahattin MADEN
Matematik, Ordu Üniversitesi
İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Selim NUMAN
Matematik, Giresun Üniversitesi
İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL
Matematik, Ordu Üniversitesi
İmza :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 13.06.2014 tarih ve ...243...sayılı kararı ile onaylanmıştır.

13../06../2014

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Mehmet Fikret BALTA

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza
Harun SAKA

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

2x2 TİPİNDEKİ BLOK PARÇALI MATRİSLRİN NONSİNGÜLERLİĞİ VE BAZI UYGULAMALARI

Harun SAKA

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2014
Yüksek Lisans Tezi, 15s.

Danışman: Doç. Dr. Selahattin MADEN

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin amacından ve bu konuda yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Matrislerin genelleştirilmiş inversleri açıklanmış ve bir algoritma verilerek örneklerle pekiştirilmiştir. Daha sonra Moore-Penrose tipi genelleştirilmiş inverslerin özellikleri açıklanmış ve örneklendirilmiştir. Üçüncü bölümde $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ biçiminde verilen 2x2 tipindeki bir kare matrisin nonsingülerliği ile ilgili bazı ifadeler verilmiştir. Dördüncü bölümde matrisin durumuna göre invers tamamlama problemleri ele alınmıştır. Beşinci bölümde sonuç ve öneriler verilmiş, altıncı bölümde ise yararlanılan kaynaklar listelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kare Matris, Singüler Matris, Nonsingüler Matris, Bir Matrisin Rankı, Determinant, Genelleştirilmiş İnvers, Parçalı matris, Moore-Penrose İnvers.

ABSTRACT

NONSINGULARITY OF TWO-BY-TWO BLOCK PARTITIONED MATRICES AND ITS SOME APPLICATIONS

Harun SAKA

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2014
MSc. Thesis, 15p.

Supervisor: Doç. Dr. Selahattin MADEN

This thesis is consist of six chapters. In the first chapter, it is mentioned about the object of the thesis and previous studiesin this subject. In the second chapter, basic definitions and theorems that were used in the thesis are given. Generalized inverses of Matrices are explained and it's reincforced with the examples with an algorithm. Than, some properties of the Moore-Penrose generelazied inverses are explained and some examles are given. In the third chapter, it is given some expressions nonsingularity of two-by-two block partitioned matrices in the form of $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ and its some applications. In the fourth chapter, it is considered completing of matrix inverses. Conclusion and success are given in fifth chapter and
listed some used references.

Key Words: Square Matrix, Singular Matrix, Nonsingular Matrix, Rank of Matrix, Determinant, Generalized İnverse, Partitioned Matrix, Moore-Penrose Generalized İnverse.

TEŞEKKÜR

Eğitimim boyunca ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli hocam sayın Doç. Dr. Selahattin MADEN' e, lisans eğitiminde bana yardımcı olan hocalarıma, hem bu zorlu ve uzun süreçte hem de hayatım boyunca yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan değerli aileme ve her zaman yanımda olan ve hiçbir desteği esirgemeyen sevgili Yeşim CAMCI' ya yürekten teşekkürlerimi sunarım. Tez çalışmalarım boyunca destek ve yardımlarını esirgemeyen değerli arkadaşım Cemil KURU' ya ve diğer dostlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{K}$	: K kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{K}_n^m$	: $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\mathbb{C}_n^m$	: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
A^T	: A matrisinin transpozu
$\overline{A}$	: A matrisinin eşlenik matrisi (eş matrisi)
I_n	: $n \times n$ tipindeki birim matris
$\lvert A \rvert$ veya $\det(A)$	: A matrisinin determinantı
A^*	: A matrisinin eşlenik transpoz matrisi (Hermitian matrisi)
A_{ij}	: A matrisinin bir a_{ij} elemanının kofaktörü
A^{-1}	: A matrisinin inversi
$r(A)$ veya $rank(A)$	: A matrisinin rankı
$\mathrm{Ek}(A)$	: A matrisinin ek matrisi
$\mathcal{N}(A)$	: A marisinin null (sıfır) uzayı
$\mathcal{R}(A)$	: A marisinin ranj (sütun) uzayı
$P_{(\mathcal{R}(A))}$	: A marisinin $\mathcal{R}(A)$ sütun (ranj) uzayının yansıtıcısı (izdüşümü)
A^- veya $A^{(1)}$	: A matrisinin genelleştirilmiş inversi (iç inversi)
$A^{(2)}$	: A matrisinin dış inversi
A_0 veya $A^{(1,2)}$	: A matrisinin yansımalı genelleştirilmiş inversi
$A^\dagger$	: A matrisinin Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi

1. GİRİŞ

Günümüzde elementer matris cebiri, teorik matematik, istatistik, istatistik için olduğu kadar sosyoloji, kimya, fizik eğitimi ve elektrik mühendisliği gibi çeşitli teknik alanlar içinde gerekli matematiksel temel bilginin ayrılmaz bir kısmı haline gelmiştir. Matris hesabı, 19. yüzyıl ortalarından beri bilinmektedir. İngiliz matematikçi Sylvester, 1950 yılında ‘matris’ kavramını kullanmıştır. 1853 yılında İngiliz bilgini Hamilton ‘Linear and Vector Functions’ isimli eserinde matrislerin bazı özelliklerden faydalanmış fakat matris ismini kullanmamıştır. Yine bir İngiliz matematikçisi olan Cayley, 1858 yılında çok meşhur olan ‘Memorie On The Theory Of Matrices’ isimli çalışmasında matris cebirinin modern esaslarını göstermiştir. Daha sonraları Fransız Laguerre ve Alman Frobenius matrislerle ilgili yeni kavram ve teoremler üzerinde durmuşlardır.

Bir singüler matrisin inversi fikri ilk defa 1920 yılında Moore (1920, 1935) tarafından ortaya atılmıştır. Bu fikrin genel operatörlere genişletilmesi ise Tseng (1949a, 1949b, 1956) tarafından yapılmıştır. Ancak, daha sonra 1955 yılına kadar bu konuda her hangi bir sistematik çalışmaya rastlanamamaktadır. 1955 yılında, önceki çalışmalardan habersiz olarak, Penrose (1955, 1956) biraz farklı bir yoldan Moore tarafından verilen invers kavramını tekrar tanımlamıştır. Penrose ile aynı zamanlarda yaşayan bilim adamlarından birisi olan Rao (1955), bir singüler matrisin Pseudo İnversi olarak adlandırdığı, en küçük kareler teorisinde singüler matrisli normal denklemlerin çözümünde ve tahmin edicilerin varyanslarının hesaplanmasında kullanılan yeni bir invers kavramı geliştirmiştir. Rao tarafından geliştirilen Pseuda invers, Moore ve Penrose tarafından ortaya konulan kısıtlamaların tümünü sağlamamaktadır. Bu nedenle de bu invers, Moore–Penrose inversten farklıdır, fakat gözlem denklemlerinin rankları üzerinde herhangi bir kısıtlama konulmaması durumunda en küçük kareler yönteminin genel teorisinin ortaya konulmasında oldukça yararlıdır. Rao (1962), daha sonraki bir çalışmasında, lineer denklemlerle ilgili problemlerinin çözümünde yeterli olabilecek ve Moore ve Penrose’ un vermiş olduğu tanımdan çok daha zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Böyle bir invers, bir genelleştirilmiş invers (g–invers) olarak adlandırılmış ve bunun uygulamaları Rao (1961, 1965a, 1965b, 1966, 1967)’ nun birçok çalışmasında yer almıştır.

Genelleştirilmiş inversler üzerinde 1955' lerden itibaren çalışan başlıca bilim adamları arasında Greville (1959), Bjerhammer (1951a, 1951b, 1958), Ben-Israel ve Charnes (1963), Chipman (1964, 1968), Chipman ve Rao (1964), Scroggs ve Odell (1966) sayılabilir. Bose (1959), "Analysis of Variance" adlı ders notlarında g–inversi kullanmıştır. Bott ve Duffin (1953) bir kare matrisin kısıtlamalı inversini tanımlamıştır ki bu invers bilinen g–inversten farklıdır ve bazı uygulamalarda kullanılır. Chernoff (1953), singüler nonnegatif tanımlı bir matrisin g–inversini göz önüne almıştır ki bu invers, bir g–invers olmamasına rağmen bazı tahmin problemlerinin incelenmesinde yararlıdır. Rao (1962) tarafından verilen daha zayıf tanımı sağlayan g–invers tek olmamakla birlikte matris cebirinde ilginç bir çalışma olarak kabul edilir. 1967 yılında bir yayınında Rao (1967), değişik amaçlarla kullanılmak üzere g–inverslerin bir sınıflandırmasını vermiştir. Bu çalışmalar daha sonra genelleştirilmiş inverslerin yeni bir sınıflandırmasını ortaya atan Mitra (1968a, 1968b), Mitra ve Bhimasankaram (1969) tarafından geliştirilmiştir. Genelleştirilmiş inverslerin diğer çeşitli uygulamaları Mitra ve Rao (1968a, 1968b) tarafından yapılan bir dizi çalışmada ele alınmıştır.

Genelleştirilmiş inverslerin hesaplanmasındaki sistematik gelişmeler ve onların çeşitli uygulamaları Generalized Inverse of Matrices and Its Applications (Wiley, 1971) adlı kitapta verilmiştir.

Bu çalışmada $2x2$ tipindeki blok parçalı matrislerin inversleri ele alınmıştır. Literatürde $n \times n$ biçimindeki bir M matrisi için M nin inversinin açık bir ifadesini elde etmede kullanılan çok önemli şartlar ortaya konulmuştur. Bu sonuçlar altında 3. kısımda parçalı bir matrisin inversinin bazı ilginç açık gösterimlerini ve çeşitli örnekler vereceğiz. Bu durumda verilecek sonuçlar inverslerin bulunmasında oldukça kullanışlıdır.

Matrislerin inversleri lineer, diferansiyel veya fark denklemlerinde, markov zincirlerinde, cryptografyada, tekrarlamalı metotlarda ve nümerik analizde çok çeşitli uygulamalara sahiptir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1. a. $\mathbb{K}$ bir cisim olsun. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ olmak üzere bütün (i, j) sıralı ikililerinin kümesi $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olsun.

$f: A \longrightarrow \mathbb{K}$ fonksiyonu

$(i, j) \longrightarrow f(i, j) = a_{ij}$

olarak tanımlansın. $a_{ij} \in \mathbb{K}$ olacak şekilde seçilen $m.n$ tane elemanın oluşturduğu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

sayı tablosuna $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipinde bir matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

matrisi kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir. Her $(i, j),\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ ikilisine karşılık gelen a_{ij} elemanına A matrisinin (i, j)–yinci bileşeni denir.

b. $m \times n$ tipinde olan ve bileşenleri bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinden seçilen bütün $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrislerinin kümesi $\mathbb{K}_n^m$ ile gösterilir.

c. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ $m \times n$ tipinde her hangi iki matris olmak üzere, her (i, j) için

$a_{ij} = b_{ij},\ 1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ ise bu iki matrise eşit matrisler denir.

d. $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, her bir a_{ij} elemanı sıfıra eşitse A matrisine sıfır matris denir.

e. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ $m \times n$ tipinde iki matris olmak üzere, A ve B matrislerinin toplamı, (i, j)–yinci bileşeni $a_{ij} + b_{ij}$ olan bir matris olup

$+: \mathbb{K}_n^m \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$

$(A, B) \longrightarrow A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}++b_{12} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

f. $c \in \mathbb{K}$ bir skaler olmak üzere $cA \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi (i,j)–yinci bileşeni ca_{ij} olan bir matristir. Yani

$$.: \ \mathbb{K} \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(c,A) \longrightarrow cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

olur. O halde her $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için $0 \in \mathbb{K}$ olmak üzere, $0A = 0 \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi, $m \times n$ tipinde sıfır matristir.

g. $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}_p^m$ ve $B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}_n^p$ olmak üzere, A ve B matrislerinin çarpımı $C = [c_{ij}] \in \mathbb{K}_n^m$ şeklinde bir matristir ve

$$.: \ \mathbb{K}_p^m \times \mathbb{K}_n^p \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(A,B) \longrightarrow A.B = C$$

$$[a_{ij}].[b_{ij}] = [c_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right], \ 1 \le i \le m, \ \ 1 \le j \le n$$

şeklindedir, yani

$$A.B = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \dots + a_{1p}b_{p1}) & \dots & (a_{11}b_{1n} + \dots + a_{1p}b_{pn}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}b_{11} + \dots + a_{mp}b_{p1}) & \dots & (a_{m1}b_{1n} + \dots + a_{mp}b_{pn}) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. O halde matris çarpımının tanımlı olabilmesi için birinci çarpanın sütun sayısı, ikinci çarpanın satır sayısına eşit olmalıdır. Herhangi A ve B matrislerinin çarpımı $A.B$ veya AB ile gösterilir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Tanım 2.2. a. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, reel sayılar kümesi olarak alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki A matrisine bir reel matris denir.

b. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, kompleks sayılar kümesi olarak alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki bir A matrisine bir kompleks matris denir. (Branson R., 1999)

Tanım 2.3. a. Bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinde $m = n$ ise, A matrisine kare matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

kare matrisinde $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarına köşegen (esas köşegen) elemanları denir.

b. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ köşegen elemanları dışındaki tüm elemanları sıfır ise yani, $a_{ij} = 0 \ (i \neq j)$ ise bu matrise köşegen matris denir ve $A =$ Köş$\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ ile gösterilir.

c. Bir köşegen matriste $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} = \mathrm{k}$, $\mathrm{k} \in \mathbb{K}$ ise bu matrise skaler matris denir.

d. Köşegen üzerindeki elemanları 1 ve köşegen dışındaki elemanları 0 olan $n \times n$ tipindeki bir matrise birim matris denir ve

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Her hangi bir $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için, $I_m A = A I_n = A$ olur.

e. Bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinden aynı numaralı satırlar ve sütunlar kendi aralarında yer değiştirilerek elde edilen $A^T = [a_{ij}]_{n\times m}$ matrisine A matrisinin transpozu (transpoze matrisi) denir. Buna göre A ve B uygun matrisler olmak üzere

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad \text{ve} \quad (AB)^T = B^T A^T$$

eşitlikleri sağlanır.

f. A bir reel kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise, A matrisine simetrik matris denir.

g. A bir reel kare matris olmak üzere eğer, A matrisi her iki esas köşegene göre simetrik ise A matrisine bisimetrik matris denir.

h. A ve B kare matrisleri arasında $AB = BA$ bağıntısı varsa, bu matrislere değişmeli (komutatif) matrisler denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Tanım 2.4. a. $\{1,2,\ldots n\}$ kümesinin kendisi üzerine bir birebir ve örten bağıntısı veya eş değer olarak $1,2,\ldots n$ sayılarının yeniden bir sıralanmasına $\{1,2,\ldots n\}$ kümesinin bir σ permütasyonu denir. Böyle bir permütasyon,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$$

veya

$$\sigma = j_1, j_2, \ldots, j_n \quad , \; j_i = \sigma(i)$$

ile gösterilir. Bu permütasyonların tümünün kümesi S_n ile gösterilir. S_n de gelişigüzel bir σ permütasyonu, örneğin $\sigma = j_1, j_2, \ldots, j_n$ düşünüldüğünde σ da çift veya tek sayıda permütasyonlar olmasına göre σ ya çift veya tek permütasyon denir. O halde bir σ nın işareti

$$sgn\sigma = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \sigma \text{ çift ise} \\ -1, & \text{eğer } \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $sgn\sigma$ ile gösterilir.

b. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı kare matris olsun.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisinin her satırından ve her sütunundan yalnız ve yalnız bir eleman alınmak üzere n elemanın bir çarpımı düşünülsün. Böyle bir çarpım $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}$ şeklinde yazılır. Burada çarpanlar ardışık satırlardan gelir ve bu yüzden alt indisler $1, 2, \ldots, n$ doğal sayı sırasındadır. Çarpanlar farklı sütunlardan geldiğinden, ikinci alt indislerin dizisi S_n de bir $\sigma = j_1, j_2, \ldots, j_n$ permütasyonunu oluşturur. Tersine, S_n deki her permütasyon yukarıdaki şekilde bir çarpım tanımlar. Böylece A matrisi böyle $n!$ çarpım kapsar.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin determinantı $\det(A)$ veya $|A|$ şeklinde gösterilir ve yukarıdaki her çarpanı $sgn\sigma$ ile çarpılan veya $n!$ tane çarpımların toplamıdır. Yani,

$$|A| = \sum_\sigma (sgn\sigma) a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}$$

veya

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n}(sgn\sigma)a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots , a_{n\sigma(n)}$$

şeklinde n mertebedendir.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı aşağıdaki şekilde de tanımlanmaktadır.

c. 1×1 tipinde bir A matrisinin determinantı kendisidir. $A = [a]$ ise, $\det(A) = |a| = a$ olur.

d. 2×2 tipinde bir A matrisinin determinantı aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

olur.

n > 2 için bir kare matrisin determinantı, aşağıda gösterildiği gibi bir indirgeme işlemi ve minörleri ile işaretli minörleri kullanılan bir açılımla hesaplanır.

e. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının $|M_{ij}|$ şeklinde tanımlanan minörü, A matrisinden i–yinci satırın ve j–yinci sütunun atılması ile oluşan $(n-1) \times (n-1)$ tipindeki kare matrisin determinantıdır.

f. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının minörü $|M_{ij}|$ olsun. A matrisinin bir a_{ij} elemanının A_{ij} şeklinde gösterilen kofaktörü (işaretli minörü veya eş çarpanı),

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.\,|M_{ij}|$$

şeklinde tanımlanır.

g. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı her hangi bir satır (sütun) elemanlarının kendi kofaktörleriyle çarpılıp bu çarpanların toplanmasıyla bulunur. Yani herhangi i ve j $(i, j = 1,2,3, \dots , n)$ için

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}|M_{ik}| \qquad (2.4)$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}|M_{ik}| \qquad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır.

Her bir i için, (2.4) ile verilen toplama, A matrisinin determinantının i–yinci satır elemanlarına göre açılımı, her bir j için, (2.5) ile verilen toplama ise A matrisinin determinantının j–yinci sütun elemanlarına göre açılımı denir.

h. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi için $|A| = 0$ ise, A matrisine singüler (tekil) matris, $|A| \neq 0$ ise, A matrisine nonsingüler (tekil olmayan veya regüler) matris denir. (Branson R., 1999)

Tanım 2.5. a. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinde bir a_{ij} elemanının kofaktörü A_{ij} olsun.

$$\text{Ek}(A) = [A_{ij}]^T = [A_{ji}]$$

şeklinde tanımlanan matrise A matrisinin ek matrisi denir. Buna göre,

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

olur.

b. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için $A.B = B.A = I_n$ olacak şekilde bir $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ matrisi varsa, B matrisine A matrisinin inversi denir ve $A^{-1} = B$ ile gösterilir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.1. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi ile bu matrisin ek matrisinin çarpımı bir skaler matris olup,

$$A.\text{Ek}(A) = \text{Ek}(A).A = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A| I_n \tag{2.6}$$

ile verilir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat: $$A.\text{Ek}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$$

olur ki bu matris bir skaler matristir. Benzer şekilde,

$$\text{Ek}(A).A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. O halde,

$$A.\mathrm{Ek}(A) = \mathrm{Ek}(A).A = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A| I_n$$

bulunur.

Teorem 2.2. Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ nonsingüler matrisinin inversi,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\mathrm{Ek}(A) \tag{2.7}$$

dır. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat: (2.6) bağıntısından dolayı $A.\mathrm{Ek}(A) = |A|I$ olur. Bu ifadenin her iki yanı A^{-1} ile çarpıldığında,

$$(A^{-1}A).\mathrm{Ek}(A) = A^{-1}|A|I \;\Rightarrow\; \mathrm{Ek}(A) = |A|A^{-1}I \;\Rightarrow\; \mathrm{Ek}(A) = |A|A^{-1}$$

olur. Öte yandan A matrisi nonsingüler olduğundan $|A| \neq 0$ olup,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\mathrm{Ek}(A)$$

elde edilir.

Teorem 2.3. $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ nonsingüler bir matris, B ve C çarpıma uygun matrisler olmak üzere $AB = AC$ ise $B = C$ olur. (Hacısalihoğlu H.H.. 1977)

İspat: $AB = AC$ eşitliğinin her iki tarafı soldan A^{-1} ile çarpılmasıyla $A^{-1}AB = A^{-1}AC$ yani $B = C$ elde edilir.

Teorem 2.4. a. Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ nonsingüler matris olsun. A^{-1} matrisi tektir.

b. A nonsingüler matris ise A^{-1} matrisi de nonsingüler olup $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

c. A ve B çarpmaya uygun nonsingüler matrisler ise AB matrisi de nonsingüler olup $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

d. A nonsingüler bir matris ise A^T matrisi de nonsingüler olup $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir. (Branson R., 1999)

İspat: a. Bve C matrislerinin A matrisinin herhangi iki inversi olduğu varsayılsın. O zaman $AB = BA = I$ ve $AC = CA = I$ olur. Buradan $C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$ elde edilir.

b. $(A^{-1})^{-1}$ matrisi A^{-1} matrisinin inversidir. Aynı zamanda A matrisi de A^{-1} matrisinin inversidir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

c. $(AB)^{-1}$ matrisi AB matrisinin inversidir. Ayrıca

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

ve

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

yazılabilir. Böylece $B^{-1}A^{-1}$ matrisi de AB matrisinin inversi olur. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

d. $(A^T)^{-1}$ matrisi A^T matrisinin inversidir. Ayrıca $I^T = I$ olduğundan $I = I^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T(A)^T$ olur. Bu durum, $(A^{-1})^T$ matrisinin A^T matrisinin bir inversi olduğunu gösterir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ elde edilir.

Tanım 2.6. a. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için $A^2 = A$ ise, A matrisine idempotent matris denir.

b. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı A matrisinin elemanlarının yerlerine eşlenikleri yazılarak elde edilen matrise A matrisinin eşleniği (eş matrisi) denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

c. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı A matrisi için $\left(\overline{A}\right)^T = A$ ise A matrisine hermitian matris denir ve $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ ile gösterilir.

d. Bir A matrisi için $AA^* = A^*A$ ise A matrisine normal matris denir.

e. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^*$ (veya $AA^* = A^*A = I$) ise A matrisine birimsel (unitary) matris denir.

f. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^T$ ise A matrisine ortogonal (dik) matris denir.

g. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ reel simetrik bir matris olmak üzere, sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{R}_1^n$ vektörü için $x^T A x > 0$ ($x^T A x \geq 0$) ise, A matrisine Pozitif Tanımlı (Pozitif Yarı Tanımlı) Matris denir.

h. A, $n \times n$ tipinde bir kare matris olsun. $(A - \lambda I)x = 0$ eşitliğini sağlayan λ skalerine A matrisinin bir özdeğeri, sıfır olmayan x vektörüne de A matrisinin bir özvektörü denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.5. A ve B uygun matrisler olmak üzere,

a. $\left(\overline{A}\right)^T = \overline{(A^T)}$.

b. $(A^*)^* = A$.

c. $(A + B)^* = A^* + B^*$.

d. $(AB)^* = B^* A^*$.

eşitlikleri sağlanır. (Branson R., 1999)

İspat: **a.** $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu takdirde $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]$ ve $\left(\overline{A}\right)^T = [\overline{a_{ji}}]$ olur. Diğer taraftan $A^T = [a_{ji}]$ ve $\overline{(A^T)} = [\overline{a_{ji}}]$ olduğundan $\overline{(A^T)} = \left(\overline{A}\right)^T$ olduğu görülür.

b. $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ olduğundan, $(A^*)^* = \left(\overline{\left(\overline{A}\right)^T}\right)^T = (A^T)^T = A$ elde edilir.

c. Hermitian matris tanımına göre,

$$(A + B)^* = \left(\overline{A + B}\right)^T = \left(\overline{A} + \overline{B}\right)^T = \left(\overline{A}\right)^T + \left(\overline{B}\right)^T = A^* + B^*$$

elde edilir.

d. Hermitian matris tanımına göre,

$$(AB)^* = \left(\overline{AB}\right)^T = \left(\overline{A}\,\overline{B}\right)^T = \left(\overline{B}\right)^T \left(\overline{A}\right)^T = B^* A^*$$

yazılabilir.

Teorem 2.6. Reel simetrik bir A matrisinin pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olması için gerek ve yeter şart, tüm özdeğerlerinin (sıfırdan farklı özdeğerlerinin) pozitif olmasıdır. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat: A matrisi pozitif tanımlı olmak üzere, λ özdeğerine ve ilgili x özvektörüne sahip olsun. Bu takdirde bu x vektörü için $Ax = \lambda x$ ve $\langle Ax, x\rangle > 0$ bağıntıları vardır. O halde $0 < \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$ olur. x bir özvektör olduğundan, sıfırdan farklıdır ve dolayısıyla $\langle x, x\rangle$ pozitiftir. Bu durumda $\lambda > 0$ olmalıdır.

A matrisi pozitif yarı tanımlı olmak üzere, λ özdeğerine ve ilgili x özvektörüne sahip olsun. Bu takdirde bu x vektörü için $Ax = \lambda x$ ve $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ bağıntıları vardır. O halde,

$$0 \leq \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$$

olur. x bir özvektör olduğundan, sıfırdan farklıdır ve dolayısıyla $\langle x, x\rangle$ pozitiftir. Bu durumda $\lambda \geq 0$ olmalıdır.

Tüm (sıfırdan farklı) özdeğerleri pozitif olması halinde A matrisinin pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olacağı benzer şekilde gösterilebilir. (Lanchester, P., 1969)

Tanım 2.7. a. $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörler kümesi verilmiş olsun. $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği ancak $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinin tümü birden sıfır olduğunda sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine lineer bağımsızdır denir. Aksi halde yani, $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine lineer bağımlıdır denir.

b. A matrisi$m \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. A matrisinin sütun vektörlerini $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$ ile, ve satır vektörlerini $A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}$ ile gösterelim. A_{i*} , $i = 1, 2, \dots, m$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına A matrisinin satır rankı, A_{*j} , $j = 1, 2, \dots, n$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına ise A matrisinin sütun rankı denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.7. Bir matrisin iki satırının kendi aralarında yer değiştirmesi matrisin satır rankını değiştirmez. (Branson R., 1999)

İspat: A matrisinin herhangi iki satırı yer değiştirdiğinde satır vektörlerinin kümesi değişmeyeceğinden, bu durum matrisin satırları arasındaki lineer bağımsızlığı değiştirmez. Yani satır rankını değiştirmez.

Teorem 2.8. $AX = 0$ ve $BX = 0$ denklemlerinin çözüm kümeleri aynı ise, o zaman A ve B $n \times n$ tipindeki matrislerin sütun rankları aynıdır. (Branson R., 1999)

İspat: $AX = 0$ sistemi,

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n = 0 \tag{2.8}$$

olarak yazılabilir. Burada A_i, A matrisinin i-yinci sütunudur ve $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ olur. Benzer şekilde, $Bx = 0$ sistemi,

$$x_1B_1 + x_2B_2 + \cdots + x_nB_n = 0 \tag{2.9}$$

olarak yazılabilir.

A matrisinin sütun rankı a, B matrisinin sütun rankı b ile gösterilsin. A matrisinin sütun rankı, B matrisinin sütun rankından büyük kabul edilsin. Böylece $a > b$ olur. Bu durumda A matrisinin a tane lineer bağımsız sütunu olmalıdır. Genellik kaybedilmeden, bunların A matrisinin ilk a sütunu olduğu varsayılabilir. (Eğer değilse, A matrisinin sütunları bu şekilde yeniden düzenlenebilir. Bu durum ise Teorem 2.7' ye benzer şekilde A matrisinin sütun rankını değiştirmez.) Ancak $a > b$ kabul edildiğinden B matrisinin ilk a sütunu lineer bağımlıdır. Böylece, hepsi sıfır olmayan öyle $d_1, d_2, \dots, d_n$ vardır ki,

$$d_1B_1 + d_2B_2 + \cdots + d_aB_a = 0$$

olur. Buradan,

$$d_1B_1 + d_2B_2 + \cdots + d_aB_a + 0B_{a+1} + \cdots + 0B_n = 0$$

ve (2.9) sisteminin çözümü olarak,

$$x_1 = d_1 \quad x_2 = d_2 \quad \dots \quad x_a = d_a \quad x_{a+1} = x_{a+2} = \cdots = x_n = 0$$

bulunur. Bu aynı değerler (2.8) sisteminin de çözümü olarak verildiğinden,

$$d_1A_1 + d_2A_2 + \cdots + d_aA_a = 0$$

dır. Burada, belirtildiği gibi, $d_1, d_2, \dots, d_a$ sabitlerinin tümü sıfır değildir. Ancak bu $A_1, A_2, \dots, A_a$ matrislerinin lineer bağımlı olduğunu gösterir ki, bu da bir çelişkidir.

A ve B matrislerinin rollerini değiştirerek yapılan benzer bir çalışma, B matrisinin sütun rankının da A matrisinin sütun rankından daha büyük olamayacağını gösterir. Böylece bu iki matrisin sütun rankları eşit olmalıdır.

Teorem 2.9. Elemanter satır işlemleri herhangi bir matrisin sütun rankını değiştirmez. (Branson R., 1999)

İspat: A matrisine elementer satır işlemleri uygulanarak elde edilen matris B olsun. Bu durumda $Ax = 0$ ve $Bx = 0$ homojen denklem sistemlerinin çözüm kümeleri aynıdır. Teorem 2.8 yardımıyla A ve B matrislerinin sütun rankları aynıdır.

Teorem 2.10. Herhangi bir A matrisi için satır rankı sütun rankına eşittir. (Branson R., 1999)

İspat: $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin satır rankının r ve sütun rankının ise c olduğu kabul edilsin. $r = c$ olduğu gösterilecektir. A matrisinin satırları ilk r satırı lineer bağımsız ve kalan $m - r$ satırı ilk r satırın lineer birleşimi olacak şekilde yeniden düzenlenirse, Teorem 2.7 ve Teorem 2.8 yardımıyla bu işlemin A matrisinin satır ve sütun ranklarını değiştirmediği görülür. A matrisinin satırları sırasıyla $A_1, A_2, \dots, A_m$ ile gösterilsin ve C ve D matrisleri,

$$C = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_r \end{bmatrix} \text{ ve } D = \begin{bmatrix} A_{r+1} \\ A_{r+2} \\ \cdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın. O zaman A matrisi $\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$ bloklanmış matrisidir. Ayrıca D matrisinin her bir satırı C matrisinin satırlarının bir lineer birleşimi olduğundan, öyle bir T matrisi vardır ki, $D = TC$ olur. Özel durumda eğer,

$$A_{r+1} = d_1A_1 + d_2A_2 + \cdots + d_rA_r$$

ise, o zaman $[d_1, d_2, \dots, d_r]$ vektörü T matrisinin ilk satırıdır. Buradan, her hangi bir n boyutlu x vektörü için,

$$Ax = \begin{bmatrix} Cx \\ Dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx \\ TCx \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Bu durumda, ancak ve ancak $Cx = 0$ ise, $Ax = 0$ olur ve Teorem 2.8 den dolayı A ve B matrislerinin sütun rankı c dir. Ancak B matrisinin sütunları r boyutlu vektörlerdir. Böylece B matrisinin sütun rankı r den büyük olamaz. Yani,

$$c \leq r \tag{2.10}$$

olur.

Yukarıdaki durum A^T matrisi için tekrarlanırsa, A^T matrisinin sütun rankının A^T matrisinin satır rankından büyük olamayacağı görülür. Ancak, A^T matrisinin sütunları A matrisinin satırları olduğundan bu durum A matrisinin satır rankının A matrisinin sütun rankından büyük olamayacağı anlamına gelir. Yani,

$$r \leq c \tag{2.11}$$

olur. (2.10) ve (2.11) bağıntılarından $r = c$ olduğu görülür.

Tanım 2.8. Herhangi bir A matrisinin rankı, satır ve sütun rankı olarak tanımlanır ve $\text{rank}(A)$ veya $r(A)$ şeklinde gösterilir. (Branson R., 1999)

Teorem 2.11. A bir matris olmak üzere $r(A) = r(A^T)$ dir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat: A matrisinin satırları A^T matrisinin sütunları ve A matrisinin sütunları A^T matrisinin satırları olduğundan, Teorem 2.10 dan istenilen sonuç elde edilir.

Tanım 2.9. $n \times n$ tipindeki bir A kare matrisi için eğer $r(A) = n$ ise A matrisine Nonsingüler (Tekil Olmayan) Matris denir. Aksi durumda yani, $r(A) < n$ ise A matrisine Singüler (Tekil) Matris denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Tanım 2.10. a. $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. $\mathcal{N}(A) = \{x: Ax = 0\}$ şeklinde tanımlanan kümeye A marisinin null (sıfır) uzayı denir.

b. $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. $\mathcal{R}(A) = \{y: Ax = y\}$ şeklinde tanımlanan kümeye A matrisinin ranj (sütun) uzayı denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.12. Eğer A, r ranklı $m \times n$ tipinde bir matris ise, bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan nonsingüler P ve Q matrisleri vardır. I, $r \times r$ boyutlu birim matris olmak üzere,

a. $m = n = r \Longrightarrow PAQ = I.$

b. $m = r < n \Longrightarrow PAQ = [I, 0]$.

c. $m > r,\ n > r \Longrightarrow PAQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (2.12)

İspat: Lancaster, P., (1969)

Teorem 2.13. Çarpmaya uygun A ve B matrislerinin çarpımının rankı A ve B matrislerinin rankını geçemez. Yani,

$$r(AB) \leq \min\{r(A),\ r(B)\} \tag{2.13}$$

dir. (Lancaster, P., 1969)

İspat: AB matrisinin her bir sütunu A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonu olduğundan AB matrisinin sütun uzayı A matrisinin sütun uzayının alt kümesi olur. Böylece $r(AB) \leq r(A)$ eşitsizliği bulunur. Benzer şekilde $r(AB) \leq r(B)$ eşitsizliği de sağlanır. Böylece $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ elde edilir.

2.2. Genelleştirilmiş İnversler

Herhangi bir A matrisi bir inverse sahip olabilmesi için A matrisinin nonsingüler ve kare matris olması gerekir. Bu durumda A matrisi yardımıyla

$$AX = B \tag{2.14}$$

lineer denklem sisteminin var olan tek çözümü $X = A^{-1}$B şeklindedir. Ayrıca,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

şartını sağlayan ve A matrisinin inversi olarak adlandırılan A^{-1} matrisi vardır. Bununla birlikte A matrisinin kare matris olmadığı durumlarda ya da A matrisinin kare matris fakat singüler olduğu durumlarda inversi yoktur. Bu durumlarda A^{-1} matrisinin özelliklerini de içeren ve genelleştirilmiş invers (g–invers) matris adını alan yeni bir kavram sayesinde (2.14) sisteminin bir çözümü olabilir.

$\mathbb{C}_n^m$, kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesini göstersin. Bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisi için aşağıdaki dört şartı (Moore–Penrose şartları) sağlayan bir G matrisine A matrisinin Moore–Penrose inversi denir ve A^+ veya $A^\dagger$ ile gösterilir.

(i) $AGA = A$,

(ii) $GAG = G$,

(iii) $(AG)^* = AG$,

(iv) $(GA)^* = GA$. (2.15)

Eğer G matrisi sadece (i) şartını sağlıyorsa, bu G matrisine, A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi (iç inversi) denir ve A^- veya $A^{(1)}$ ile gösterilir. Sadece (ii) şartını sağlayan G matrisine, A matrisinin bir dış inversi denir ve $A^{(2)}$ ile gösterilir. Hem (i) hem de (ii) şartını sağlayan G matrisine ise, A matrisinin bir yansımalı genelleştirilmiş inversi denir ve $A^{(1,2)}$ veya A_0 ile gösterilir.

Moore–Penrose şartlarından sadece (i) şartını sağlayan yani,

$$AGA = A \tag{2.16}$$

olacak şekildeki G matrisine, A matrisinin bir g–inversi (genelleştirilmiş inversi) denir.

Bir matrisin g–inversini bulmak için aşağıdaki algoritma kullanılır.

Algoritma 2.1. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ r ranklı herhangi bir matris olsun.

1. Adım: r ranklı A matrisinde, $r \times r$ tipinde nonsingüler her hangi bir B alt matrisi seçilir.

2. Adım: Seçilen B alt matrisinin inversi bulunup bu inversin transpozu alınır.

3. Adım: A matrisinde B alt matrisinin her bir elemanına karşılık gelen yere $(B^{-1})^T$ matrisinin elemanları yerleştirilir.

4. Adım: A matrisinin diğer tüm elemanlarının yerine sıfır yazılır.

5. Adım: Elde edilen matrisin transpozu alınır. Bu matrise G denirse, G matrisi A matrisinin bir g–inversidir.

Örnek 2.1. Algoritma 2.1 $3x3$ tipindeki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisine uygulansın. A matrisi rankı 2 olan singüler bir matristir.

1. Adım: A matrisinin $2x2$ tipinde bir nonsingüler $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ alt matrisi seçilsin.

2. Adım: $|B| = 10 - (-3) = 13 \neq 0$ olduğundan B^{-1} mevcut olup

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}.\text{Ek}(B) = 1/13.\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/13 & -3/13 \\ 1/13 & 2/13 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu matrisin transpozu alınırsa

$$(B^{-1})^T = \begin{bmatrix} 5/13 & 1/13 \\ -3/13 & 2/13 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Bulunan $(B^{-1})^T$ matrisi A matrisinde elemanları B alt matrisinin elemanlarının yerlerine karşılık gelecek şekilde yerleştirilir. Diğer tüm elemanları sıfır alınır. Böylece

$$\begin{bmatrix} 5/13 & 1/13 & 0 \\ -3/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

5. Adım: Bir önceki adımda bulunan matrisin transpozu alınarak

$$G = \begin{bmatrix} 5/13 & -3/13 & 0 \\ 1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi oluşturulur. Bu şekilde oluşturulan G matrisi A matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten

$$AG = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 5/13 & -3/13 & 0 \\ 1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup,

$$AGA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} = A$$

olduğu görülür.

Verilen A matrisinin başka bir B alt matrisini seçerek, seçilen bu yeni B alt matrisine Algoritma 2.1 uygulansın.

1. Adım: A matrisinin rankı 2 olduğundan B matrisi $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ şeklinde seçilsin.

2. Adım: $|B| = 10 - 0 = 10 \neq 0$ olduğundan,

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}.\text{Ek}(B) = 1/15.\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ -3/5 & 1/3 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece,

$$(B^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

3. ve 4. Adımlar: Bu durumda,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

olur.

5. Adım: Bu şekilde bulunan matrisin transpozu alındığında

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -3/5 & 1/3 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bulunan bu G matrisi A matrisinin bir g–inversi olur. Gerçekten

$$AG = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -3/5 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$AGA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} = A$$

olduğu görülür.

Sonuç 2.1. Yukarıdaki iki seçim, bir matrisin g–inversinin tek olmadığını gösterir. Bu nedenle bir matrisin tanımlı birden çok g–inversi bulunabilir.

Örnek 2.2. $2x3$tipindeki $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$dikdörtgen matrisi alınsın. E matrisinin rankının 2 olacağı açıktır. Algoritma 2.1 E matrisine uygulansın.

1. Adım: Bu durumda M matrisi $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ olarak seçilebilir.

2. Adım: $|M| = -1 - 1 = -2 \neq 0$ olup

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}.\text{Ek}(M) = \frac{-1}{2}.\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla,

$$(M^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen

$$G = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi E matrisinin bir g–inversi olduğu gösterilebilir. Gerçekten,

$$EG = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$EGE = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = E$$

olduğu görülür.

Örnek 2.3. $5x2$ tipindeki

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

dikdörtgen matrisi alınsın. E matrisinin rankının 2 olacağı açıktır. Algoritma 2.1 E matrisine uygulansın.

1. Adım: Bu durumda M matrisi, $M = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ olarak seçilebilir.

2. Adım: $|M| = -4 - 0 = \ -4 \neq 0$ olup,

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}.\text{Ek}(M) = -1/4\,.\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla

$$(M^{-1})^T = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi, E matrisinin bir g–inversi olduğu gösterilebilir. Gerçekten,

$$EG = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/4 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$EGE = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/4 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = E$$

olduğu görülür.

Algoritma 2.1 rankı 1 olan matrislerin g–inversini bulmak için aşağıdaki şekilde uyarlanabilir.

Algoritma 2.2.

1. Adım: A matrisinin sıfırdan farklı her hangi bir elemanı B olarak seçilir.

2. Adım: Seçilen bu elemanın inversi bulunur.

3. Adım: Bulunan bu invers A matrisinde karşılık gelen yere yazılır.

4. Adım: A matrisinin diğer tüm elemanlarının yerine sıfır yazılır.

5. Adım: Elde edilen matrisin transpozu alınır. Bu matrise G denirse, G matrisi A matrisinin bir g–inversidir.

Örnek 2.4. A matrisi, $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ olarak alınsın. Amatrisinin rankı 1 dir. Algoritma 2.2 A matrisine uygulansın.

1. Adım: $B = [-3]$ alınsın.

2. Adım: $B^{-1} = [-1/3]$ olur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$ olacaktır.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi A matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten,

$$AG = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$AGA = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = A$$

olur.

Örnek 2.5. $3x4$ tipindeki $L = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & 8 \\ 3 & -6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ matrisi alınsın. L dikdörtgen matrisinin rankı 1 dir. Algoritma 2.2 L matrisine uygulansın.

1. Adım: $M = [8]$ seçilsin.

2. Adım: $M^{-1} = [1/8]$ olur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ elde edilir.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi L matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten,

$$LG = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & 8 \\ 3 & -6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$LGL = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & 8 \\ 3 & -6 & 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & 8 \\ 3 & -6 & 9 & 12 \end{bmatrix} = L$$

olur. L matrisi $3x4$ tipinde olduğu için 3.4 = 12 tane g–inversi bulunabilir.

Sonuç 2.2. Genel olarak 1 ranklı ve $m \times n$ tipindeki matrislerin m.n tane g–inversi bulunabilir. Matrisin sıfırdan farklı herhangi bir elemanının inversini alıp, diğer tüm elemanlarını sıfır aldıktan sonra elde edilen matrisin transpozu alınarak g–inversi bulunur. Eğer A matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde 1 ranklı bir matris ise, A matrisinin,

1–ncisi; $\begin{bmatrix} (a_{11})^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

2–ncisi; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (a_{12})^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

… … … … … … … … … … … …

(m.n)–ncisi; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (a_{mn})^{-1} \end{bmatrix}$

şeklinde m.n tane g–inversi bulunabilir.

2.3. Moore–Penrose İnverslerin Varlığı

A nonsingüler matrisinin inversi olan A^{-1} matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayacağı açıktır. Yani $A^{-1} = A^{+}$ olur. Bununla birlikte, eğer A bir singüler matris veya kare olmayan bir matris ise, bu durumda Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir A^{+} matrisinin mevcut olup olmadığı ile ilgili bir soru ortaya çıkar. Bu kısımda her A matrisi için bir A^{+} matrisinin var ve tek olduğu gösterilecektir. Ayrıca bu şekilde tanımlanan Moore–Penrose inversin bir takım özellikleri ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 2.14. Eğer A matrisi $m \times n$ tipinde sıfır matris ise, A^{+} matrisi $n \times m$ tipinde sıfır matristir.

İspat: Açık olarak $A^{+} = 0$ alındığında Moore–Penrose şartlarının sağlandığı görülür.

Teorem 2.15. Her A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir A^{+} matrisi vardır.

İspat: Eğer $A = 0$ ise $A^{+} = 0$ olduğu açıktır. $A \neq 0$ olsun. A matrisinin r ranklı olduğu kabul edilsin. Bu durumda A matrisi,

$$A = BC \tag{2.17}$$

şeklinde parçalanabilir. Burada B matrisi $m \times r$ tipinde $r > 0$ ranklı ve C matrisi $r \times n$ tipinde $r > 0$ ranklı matrisler olup, $B^{*}B$ ve CC^{*} çarpımlarının her ikisi de nonsingülerdir. Bu durumda eğer A^{+} matrisi,

$$A^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*} \tag{2.18}$$

olarak alınırsa, A^{+} matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $AA^{+}A = (BC)C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}(BC)$

$= B(CC^{*})(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}(B^{*}B)C$

$= BC = A,$

(ii) $A^{+}AA^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}(BC)C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}$

$= C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}(B^{*}B)(CC^{*})(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}$

$= C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*} = A^{+},$

(iii) $(AA^{+})^{*} = [(BC)C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}]^{*} = B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}(CC^{*})B^{*}$

$$= B(B^*B)^{-1}B^* = B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

$$= (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = AA^+,$$

(iv) $(A^+A)^* = [C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)]^*$

$$= C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}C$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC) = A^+A$$

olduğu görülür.

Teorem 2.16. Herhangi bir A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir tek A^+ matrisi vardır. Yani, her A matrisinin bir tek Moore–Penrose inversi vardır.

İspat: A matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayan herhangi iki Moore–Penrose inversi A_1^+ ve A_2^+ olsun. Bu durumda,

$$A_1^+ = A_1^+AA_1^+ = A_1^+(AA_1^+)^* = A_1^+(A_1^+)^*A^* = A_1^+(A_1^+)^*(AA_2^+A)^*$$

$$= A_1^+(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A^* = A_1^+(AA_1^+)^*(AA_2^+)^* = A_1^+AA_1^+AA_2^+ = A_1^+AA_2^+$$

$$= A_1^+A(A_2^+AA_2^+) = (A_1^+A)^*(A_2^+A)^*A_2^+ = A^*(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A_2^+$$

$$= (AA_1^+A)^*(A_2^+)^*A_2^+ = A^*(A_2^+)^*A_2^+ = (A_2^+A)^*A_2^+ = A_2^+AA_2^+ = A_2^+$$

olduğundan $A_1^+ = A_2^+$ olur. Yani, A^+ matrisi tektir.

Teorem 2.17. $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin bir Moore–Penrose inversi varsa $n \times m$ tipindedir.

İspat: AA^+ matrisinin simetrik ve dolayısıyla kare olması gerçeğinden ispat görülür.

Teorem 2.18. a. $m \times n$ tipindeki bir $A = [a_{ij}]$ matrisinin tüm elemanları 1 ise bu takdirde, $A^+ = \frac{1}{m.n}A^*$ dir.

b. $a,\ n \times 1$ tipinde $a \neq 0$ olan bir sütun vektörü ise, bu durumda $a^+ = (a^*a)^{-1}a^*$ şeklindedir.

c. $a,\ 1 \times n$ tipinde $a \neq 0$ olan bir satır vektörü ise, bu durumda $a^+ = a^*(aa^*)^{-1}$ şeklindedir.

İspat: a. İspat için teoremde verilen A^+ matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Bu durumda,

(i) $AA^+A = A\left(\frac{1}{m.n}A^*\right)A = A\frac{1}{m.n}(A^*A) = A.\frac{1}{m.n}.m.n = A,$

(ii) $A^+AA^+ = \left(\frac{1}{m.n}A^*\right)A\left(\frac{1}{m.n}A^*\right) = \frac{1}{m.n}(A^*A)\left(\frac{1}{m.n}A^*\right) = \frac{1}{m.n}.m.n.\left(\frac{1}{m.n}A^*\right)$

$= \left(\frac{1}{m.n}A^*\right) = A^+,$

(iii) $(AA^+)^* = \left(A\frac{1}{m.n}A^*\right)^* = A\frac{1}{m.n}A^* = AA^+,$

(iv) $(A^+A)^* = \left(\frac{1}{m.n}A^*A\right)^* = \frac{1}{m.n}A^*A = A^+A$

olduğu görülür.

b. a^+ matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $aa^+a = a(a^*a)^{-1}a^*a = a(a^*a)^{-1}(a^*a) = a,$

(ii) $a^+aa^+ = (a^*a)^{-1}a^*a(a^*a)^{-1}a^* = (a^*a)^{-1}(a^*a)(a^*a)^{-1}a^*$

$= (a^*a)^{-1}a^* = a^+,$

(iii) $(aa^+)^* = [a(a^*a)^{-1}a^*]^* = a(a^*a)^{-1}a^* = aa^+,$

(iv) $(a^+a)^* = [(a^*a)^{-1}a^*a]^* = (a^*a)^{-1}a^*a = a^+a$

olduğu görülür.

c. a^+ matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $aa^+a = aa^*(aa^*)^{-1}a = (aa^*)(aa^*)^{-1}a = a,$

(ii) $a^+aa^+ = a^*(aa^*)^{-1}aa^*(aa^*)^{-1} = a^*(aa^*)^{-1}(aa^*)(aa^*)^{-1}$

$= a^*(aa^*)^{-1} = a^+,$

(iii) $(aa^+)^* = [aa^*(aa^*)^{-1}]^* = aa^*(aa^*)^{-1} = aa^+,$

(iv) $(a^+a)^* = [a^*(aa^*)^{-1}a]^* = a^*(aa^*)^{-1}a = a^+a$

olduğu görülür.

Örnek 2.6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. $m = 2,\ n = 3$ ve

$$A^{*} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak alınırsa,

$$A^{+} = \frac{1}{m.n} A^{*} = \frac{1}{2.3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 1/6 & -1/6 \\ 1/6 & -1/6 \end{bmatrix}$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $AA^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 1/6 & -1/6 \\ 1/6 & -1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

$$AA^{+}A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = A,$$

(ii) $A^{+}A = \begin{bmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 1/6 & -1/6 \\ 1/6 & -1/6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

$$A^{+}AA^{+} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 1/6 & -1/6 \\ 1/6 & -1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 1/6 & -1/6 \\ 1/6 & -1/6 \end{bmatrix} = A^{+},$$

(iii) $(AA^{+})^{*} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = AA^{+},$

(iv) $(A^{+}A)^{*} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = A^{+}A$

olduğu görülür.

Örnek 2.7. $a = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda,

$$a^{+} = (a^{*}a)^{-1}a^{*} = \left([3 \quad 2] . \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} . [3 \quad 2]$$

$$= [13]^{-1} . [3 \quad 2] = [1/13] . [3 \quad 2] = [3/13 \quad 2/13]$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $aa^{+} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} . [3/13 \quad 2/13] = \begin{bmatrix} 9/13 & 6/13 \\ 6/13 & 4/13 \end{bmatrix}$

$aa^+a = \begin{bmatrix} 9/13 & 6/13 \\ 6/13 & 4/13 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = a,$

(ii) $a^+a = [3/13 \quad 2/13] . \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = [1]$

$a^+aa^+ = [1] . [3/13 \quad 2/13] = [3/13 \quad 2/13] = a^+,$

(iii) $(aa^+)^* = \begin{bmatrix} 9/13 & 6/13 \\ 6/13 & 4/13 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 9/13 & 6/13 \\ 6/13 & 4/13 \end{bmatrix} = aa^+,$

(iv) $(a^+a)^* = [1]^* = [1] = a^+a$

olduğu görülür.

Örnek 2.9. $\mathrm{a} = [1 \quad 2 \quad 1]$ alınırsa,

$$a^+ = a^*(aa^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} . \left([1 \quad 2 \quad 1] . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} . [6]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $aa^+ = [1 \quad 2 \quad 1] . \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix} = [1]$

$aa^+a = [1] . [1 \quad 2 \quad 1] = [1 \quad 2 \quad 1] = a,$

(ii) $a^+a = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix} . [1 \quad 2 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$

$a^+aa^+ = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix} = a^+,$

(iii) $(aa^+)^* = [1]^* = [1] = aa^+,$

(iv) $(a^+a)^* = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix} = a^+a$

olduğu görülür.

Teorem 2.19. A herhangi bir matris olmak üzere,

$$(A^*)^+ = (A^+)^* \tag{2.19}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: (2.17) bağıntısındaki gibi $A = BC$ olsun. $A^* = C^*B^*$ olduğundan,

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

alınırsa,

$$(A^+)^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \tag{2.20}$$

olur ki, bu da A^* matrisinin Moore–Penrose inversidir. Gerçekten,

(i) $A^*(A^*)^+A^* = C^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^* = C^*B^* = A^*$,

(ii) $(A^*)^+A^*(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$

$= B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = (A^*)^+$,

(iii) $[A^*(A^*)^+]^* = [(C^*B^*)B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C]^* = [C^*(CC^*)^{-1}C]^*$

$= C^*(CC^*)^{-1}C = C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = A^*(A^*)^+$,

(iv) $[(A^*)^+A^*]^* = [B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C(C^*B^*)]^* = [B(B^*B)^{-1}B^*]^*$

$= B(B^*B)^{-1}B^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^* = (A^*)^+A^*$

olur. Böylece,

$$(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \tag{2.21}$$

elde edilir. (2.20) ve (2.21) bağıntılarından ve bir matrisin Moore–Penrose inversi varsa tek olacağından dolayı, $(A^*)^+ = (A^+)^*$ olduğu görülür.

Teorem 2.20. Bir matrisin Moore–Penrose inversinin Moore–Penrose inversi matrisin kendisine eşittir. Yani, her hangi bir A matrisi için, $(A^+)^+ = A$ olur.

İspat: Moore–Penrose invers tanımından,

(i) $A^+(A^+)^+A^+ = A^+AA^+ = A^+$,

(ii) $(A^+)^+A^+(A^+)^+ = AA^+A = A = (A^+)^+$,

(iii) $[A^+(A^+)^+]^* = [A^+A]^* = A^+A = A^+(A^+)^+$,

(iv) $[(A^+)^+A^+]^* = [AA^+]^* = AA^+ = (A^+)^+A +^\dagger$

olduğu görülür.

Teorem 2.21. A matrisinin Moore–Penrose inversinin rankı A matrisinin rankına eşittir. Yani,

$$r(A) = r(A^{+}) \tag{2.22}$$

dır.

İspat: Teorem 2.13 $AA^{+}A = A$ Moore–Penrose şartına uygulandığında,

$$r(A) = r(AA^{+}A) \leq \min\{r(A),\ r(A^{+})\} \leq r(A^{+}) \tag{2.23}$$

elde edilir. Benzer şekilde, Teorem 2.13 $A^{+}AA^{+} = A^{+}$ Moore–Penrose şartına uygulanırsa

$$r(A^{+}) = r(A^{+}AA^{+}) \leq \min\{r(A),\ r(A^{+})\} \leq r(A) \tag{2.24}$$

elde edilir. (2.23) ve (2.24) bağıntılarından dolayı (2.22) bağıntısı sağlanır.

Sonuç 2.3. A matrisinin rankı r ise, $A^{+}, AA^{+}, A^{+}A, AA^{+}A, A^{+}AA^{+}$ matrislerinin her birinin rankı da r dir.

Teorem 2.22. A simetrik ve idempotent matris ise, $A^{+} = A$ olur.

İspat: Moore–Penrose invers tanımından,

(i) $AA^{+}A = AAA = A^{2}A = AA = A^{2} = A$,

(ii) $A^{+}AA^{+} = AAA = A^{2}A = AA = A^{2} = A = A^{+}$,

(iii) $[AA^{+}]^{*} = [AA]^{*} = [A^{2}]^{*} = A^{*} = A = A^{2} = AA = AA^{+}$,

(iv) $[A^{+}A]^{*} = [AA]^{*} = [A^{2}]^{*} = A^{*} = A = A^{2} = AA = A^{+}A$

olduğu görülür.

Teorem 2.23. $B = \text{Köş}\{\mathrm{b}_{11}, \mathrm{b}_{22}, \dots, \mathrm{b}_{nn}\}$ ise, B matrisinin Moore–Penrose inversi B^{+}, i–yinci satırı ve i–yinci sütununda yer alan köşegen elemanı $\mathrm{b}_{ii} \neq 0$ ise b_{ii}^{-1} ve $\mathrm{b}_{ii} = 0$ ise "0" olan bir köşegen matristir.

İspat: B^{+} matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığı açıkça görülür.

Örnek 2.10. $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ şeklinde verilen bir D matrisinin Moore–Penrose inversi

$$D^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

matrisidir. Gerçekten,

$$DD^+ = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$DD^+D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D$$

olduğu görülür.

Teorem 2.24. a. A, $m \times n$ tipinde tam satır ranklı bir matris ise, bu durumda $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$ ve $AA^+ = I_m$ olur.

b. A, $m \times n$ tipinde tam sütun ranklı bir matris ise, bu durumda $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$ ve $A^+A = I_n$ olur.

İspat: Teoremde verilen A^+ matrislerinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Buna göre,

a. (i) $AA^+A = AA^*(AA^*)^{-1}A = (AA^*)(AA^*)^{-1}A = A$,

(ii) $A^+AA^+ = A^*(AA^*)^{-1}AA^*(AA^*)^{-1} = A^*(AA^*)^{-1}(AA^*)(AA^*)^{-1}$

$= A^*(AA^*)^{-1} = A^{+\dagger}$,

(iii) $(AA^+)^* = (AA^*(AA^*)^{-1})^* = ((AA^*)(AA^*)^{-1})^* = I^* = I$

$= (AA^*)(AA^*)^{-1} = AA^*(AA^*)^{-1} = AA^+$,

(iv) $(A^+A)^* = (A^*(AA^*)^{-1}A)^* = A^*(AA^*)^{-1}A = A^+A$

olduğu görülür. Benzer şekilde,

b. (i) $AA^+A = A(A^*A)^{-1}A^*A = A(A^*A)^{-1}(A^*A) = A$,

(ii) $A^+AA^+ = (A^*A)^{-1}A^*A(A^*A)^{-1}A^* = (A^*A)^{-1}(A^*A)(A^*A)^{-1}A^*$

$$= (A^*A)^{-1}A^* = A^+,$$

(iii) $(AA^+)^* = (A(A^*A)^{-1}A^*)^* = A(A^*A)^{-1}A^* = AA^+,$

(iv) $(A^+A)^* = ((A^*A)^{-1}A^*A)^* = ((A^*A)^{-1}(A^*A))^* = I^* = I$

$$= (A^*A)^{-1}(A^*A) = (A^*A)^{-1}A^*A = A^+A$$

olduğu görülür.

Örnek 2.11. 2×3 tipindeki bir $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi alındığında rank(A) = 2 olduğu açıktır. Yani, A tam satır ranklı bir matristir. O halde Teorem 2.24 a. dan dolayı

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9/5 & 7/5 \\ 7/5 & 6/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 16/5 & 13/5 \\ 32/5 & 26/5 \end{bmatrix}$$

olur.

Örnek 2.12. $3x2$ tipinde bir $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda, rank$(A) = 2$ olduğu açıktır. Yani, A tam sütun ranklı bir matristir. O halde,

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^* = \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} . \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/3 & 2/9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7/3 & 2 & 4/3 \\ 8/9 & 2/3 & 5/9 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

Teorem 2.25. $B \neq 0$ ve $C \neq 0$ matrisleri sırasıyla $m \times r$ ve $r \times n$ tipinde matrisler, r ranklı olsun. Bu durumda,

$$(BC)^+ = C^+B^+ \tag{2.25}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: Teorem 2.24 e göre $C^+ = C^*(CC^*)^{-1}$ ve $B^+ = (BB^*)^{-1}B^*$ olur ve buradan,

$C^+B^+ = C^*(CC^*)^{-1}(BB^*)^{-1}B^*$ elde edilir. Bu değer zaten $(BC)^+$ matrisidir. O halde, $C^+B^+ = (BC)^+$ olduğu görülür.

3. 2X2 LİK BLOK MATRİSLERİN NONSİNGÜLERLİĞİ

Bu kısımda singüler değer ayrışımı ve blok matrislerin Moore-Penrose inversleri yardımıyla $2x2$ tipindeki bir blok matrisin nonsingülerliğini garanti etmek için bazı gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Bu şartlar Decker ve Keller tarafından verilen şartlardan daha basittir ve aynı zamanda Bai tarafından verilenlerden de kolayca elde edilir. Ayrıca $2x2$ tipindeki matrislerin rankı için genel formüller verilmiştir.

3.1. Giriş

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

formundaki $2x2$ tipindeki bir blok matrisin nonsingülerliğini garanti eden şartları tartışacağız ve $A \epsilon \mathbb{C}^{mxm}, B \epsilon \mathbb{C}^{mxn}, C \epsilon \mathbb{C}^{nxm}, D \epsilon \mathbb{C}^{nxn}$ kompleks matrisler olmak üzere M matrisinin rankı için genel formüller türeteceğiz. Uygun bir parçalanış altında herhangi bir matrisin (3.1) formunda yazılabileceği açıktır.

Temel ve önemli problemlerden biri nonsingülerliğin nasıl kontrol edileceği ya da genel olarak bir matrisin rankının nasıl belirleneceğidir.

A pozitif semi-definit, D hermityan pozitif semi-definit ve $C = -B^*$ tam ranklı olduğunda eğer

$$\mathcal{N}\big(\mathcal{H}(A)\big) \cap \mathcal{N}(B^*) = \{0\}$$

ise M'nin nonsingüler olduğu ve eğer M nonsingüler ise

$$\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B^*) = \{0\}$$

olduğu bilinmektedir.

Yukarıdaki şartların tersinin genelde doğru olmadığını, dolayısıyla onların ya sadece yeter ya da sadece gerek şart olduğunu belirtelim. Eğer A'nın $\mathcal{H}(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$ hermityan kısmı, hermityan pozitif semi-definit ise A matrisine pozitif definit (semi-definit) denir. Burada $(*)$ ve $\mathcal{N}(\cdot)$ sembolleri sırasıyla karşılık gelen matrisin eşlenik transpozunu ve sıfır uzayını göstermektedir. Ayrıca $D = 0$ ve $m \geq n$ olduğunda gösterilir ki eğer M nonsingüler ise bu takdirde

$$rank(B) = n \quad \text{ve} \quad rank\binom{A}{C} = n$$

dir. Bu şartlar sadece gerekliliği gösterir.

Genelde $2x2$'lik M blok matrisinin nonsingülerliği hakkında birkaç sonuç vardır.

Teorem 3.1. (3.1)'de tanımlanan $2x2$ tipindeki bir M blok matrisi için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) Eğer $boy(\mathcal{N}(A)) = n \geq 1$ ise A singülerdir. Bu takdirde M matrisinin nonsingüler olması için gerek ve yeter koşul

(i) $boy(ranj(B)) = n$

(ii) $ranj(A) \cap ranj(B) = \{0\}$

(iii) $boy(ranj(C)) = n$ ve

(iv) $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(C) = \{0\}$

olmasıdır.

2) Eğer A nonsingüler ise M nonsingülerdir ancak ve ancak $S = D - CA^{-1}$ Schur tümleyeni nonsingülerdir.
3) Eğer A singüler ve $boy(\mathcal{N}(A)) > n$ ise M tekildir.

Açıkça görülüyor ki bu şartlar A'nın singüler ve $boy(\mathcal{N}(A)) < n$ olması durumundaki gibi sağlanmaz. Son zamanlarda M'nin nonsingülerliğini garanti eden gerek ve yeter şartlar ortaya konuluştur. Bunlar aşağıdaki teoremde açıkça yeniden ifade edilmiştir. Buna ilaveten herhangi bir M matrisinin rankı için singüler değer ayrışımını ve onun alt matrislerinin Moore-Penrose yalancı inversini göz önüne alarak bazı ifadeler verilmiştir.

Bu çalışmada ya singüler değer ayrışımı ya da M'nin alt matrislerinin Moore-Penrose yalancı inverslerini kullanarak $2x2$ M blok matrisinin nonsingülerliğini garanti eden gerek ve yeter şartlar türetilmiştir. Bu şartlar tamdır ve Decker ve Keller tarafından verilenlerden çok daha basittir ve üstelik hesaplama açısından orada verilenlerden daha kolay kontrol edilebilir. Ayrıca uniterlik ve izdüşürülmüş matrislerin ortogonalliği dikkate alınarak $2x2$'lik bir blok matrisin rankı için genel formüller türetilmiştir.

Bu kısmın sonunda bazı gerekli notasyonlar ve tanımlar verelim. Bir blok matris için eğer onun alt bloklarından birisi sıfır ise bu alt bloğa karşılık gelen satırlar ve sütunlar silinebilir. $(\cdot)^*$ herhangi bir vektör veya matrisin eşlenik transpozunu gösterir. $N(\cdot), range(\cdot), (\cdot)^+$ ve $rank(\cdot)$ ele alınan matrisin sırasıyla sıfır uzayı, range uzayı, Moore-Penrose yalancı inversi ve rankını gösterir. $boy(\cdot)$ ise karşılık gelen lineer uzayın boyutunu göstermektedir.

3.2. Tekil Değer Ayrışımlarına Dayalı Durumlar

(3.1)'de tanımlanan $M\epsilon\mathbb{C}^{(m+n)x(m+n)}$ $2x2$'lik blok matrisinin $A\epsilon\mathbb{C}^{mxm}$ bloğunu

(i) $A = 0$

(ii) $A \neq 0$ ve A singüler

(iii) A nonsingüler

durumlarına ayırarak M matrisinin nonsingülerliğini garanti eden bazı gerek ve yeter şartlar, buna karşılık gelen alt matrise göre singüler değer ayrışımı cinsinden ifade edilmiştir.

Genelliği bozmaksızın, bu kısımda (3.1)'de tanımlanan $M\epsilon\mathbb{C}^{(m+n)x(m+n)}$ $2x2$'lik blok matrisin tanımında $m \leq n$ olduğunu farz edelim. Aksi takdirde M'nin yerine

$$\widetilde{M} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix}$$

matrisini göz önüne alabiliriz. Önce $A = 0$ durumunu tartışalım.

Teorem 3.2. Farz edelim ki (3.1)'de tanımlı $M\epsilon\mathbb{C}^{(m+n)x(m+n)}$ $2x2$ blok matrisinin $A\epsilon\mathbb{C}^{mxm}$ matris bloğu sıfır olsun. Öyleyse M nonsingülerdir ancak ve ancak B tam satır rankı, C tam sütun rankı ve D_{22} ya tekil ya da sıfırdır. Burada

$$\widetilde{U}^* D\widehat{V} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

$\widehat{U}, \widehat{V}$ ve $\widetilde{U}, \widetilde{V}$ uniter matrislerdir öyle ki; B_{21}, $C_{12}\epsilon\mathbb{C}^{mxm}$ nonsingüler matris blokları ve $D_{11}\epsilon\mathbb{C}^{mxm}$, $D_{22}\epsilon\mathbb{C}^{(n-m)x(n-m)}$, $D_{12}\epsilon\mathbb{C}^{mx(n-m)}$, $D_{21}\epsilon\mathbb{C}^{(n-m)xm}$ olmak üzere

$$\widehat{U}^* B\widehat{V} = [B_{21} \quad 0] \text{ ve } \widetilde{U}^* C\widetilde{V} = \begin{bmatrix} C_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

olacak şekilde uniter matrislerdir.

İspat. İlk olarak gerekliliği ispat edeceğiz. Eğer M matrisi nonsingülerse o zaman B ve C matrislerinin her ikisi tam rank olmak zorundadır. Aksi takdirde, eğer ya B ya da C eksik ranklı ise $\hat{x}^{*}B = 0$ veya $C\tilde{x} = 0$ olmasına bağlı olarak ya sıfırdan farklı $\hat{x}\epsilon\mathbb{C}^{m}$ ya da sıfırdan farklı $\tilde{x}\epsilon\mathbb{C}^{m}$ vektörleri mevcuttur. $\hat{z} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\tilde{z} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ 0 \end{bmatrix}$ olsun. O zaman $\hat{z} \neq 0$ ve $\tilde{z} \neq 0$ olacaktır. Bununla beraber B matrisinin satıra göre eksik ranklı veya C matrisinin sütuna göre eksik ranklı olması durumuna paralel olarak ya $\hat{z}^{*}M = 0$ ya da $M\hat{z} = 0$ eşitlikleri sağlanır. Bu nedenle M singülerdir. Bu durum M matrisinin nonsingüler olması varsayımıyla çelişir. Eğer D_{22} $(n > m)$ sıfır değilse $D_{22}\bar{y} = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı $\bar{y}\epsilon\mathbb{C}^{nxm}$ vektörü mevcuttur. M matrisini

$$\begin{bmatrix} \hat{U}^{*} & 0 \\ 0 & \tilde{U}^{*} \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} \tilde{V} & 0 \\ 0 & \hat{V} \end{bmatrix}$$

uniter matrisleriyle soldan ve sağdan çarpar ve elde edilen matrisi $\widehat{M}$ ile gösterirsek $\widehat{M}$'ın rankı M ile aynıdır ve

$$\widehat{M} = \begin{bmatrix} 0 & B_{21} & 0 \\ C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ 0 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

dir. Burada B_{21} ve C_{12}'in matris blokları olduğunu belirtelim. $\widehat{M}$ matrisini

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -D_{11}B_{21}^{-1} & I & 0 \\ -D_{21}B_{21}^{-1} & 0 & I \end{bmatrix} \text{ve } \begin{bmatrix} I & 0 & -C_{12}^{-1}D_{12} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

nonsingüler matrisleriyle soldan ve sağdan çarpar ve elde edilen matrisi $\overline{M}$ ile gösterirsek $\overline{M}$'nin rankı hem M ile hem de $\widehat{M}$ ile aynıdır ve

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} 0 & B_{21} & 0 \\ C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{22} \end{bmatrix}$$

dir.

$\bar{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{y} \end{bmatrix}$ olsun. Bu takdirde $\bar{z} \neq 0$ ve $\overline{M}\bar{z} = 0$ olduğu görülür. Bu nedenle M singüler olur ki bu da M'nin nonsingüler olduğu varsayımıyla çelişir.

Şimdi yeterliliği gösterelim. Eğer B tam satır ranklı, C tam sütun ranklı ve D_{22} $(m = n)$ ya sıfır ya da nonsingüler ise Bu durumda yukarıda tanımlanan $\overline{M}$, $\widehat{M}$ ve M matrisleri aynı ranka sahiptir. Yani $rank(\overline{M}) = rank(\widehat{M}) = rank(M)$ olacaktır. Çünkü

$$rank(M) = rank(\bar{M})$$

$$= rank(B_{21}) + rank(C_{12}) + rank(D_{22})$$

$$= \begin{cases} m+n, & \text{eğer } D_{22}\ (m=n) \text{ sıfır ise} \\ m+m+(n-m), & \text{eğer } D_{22} \text{ nonsingüler ise} \end{cases}$$

Teorem 3.3. (3.1)' de tanımlanan $M \epsilon \mathbb{C}^{(m+n)x(m+n)}$ $2x2$ blok matrisinin $A \epsilon \mathbb{C}^{mxm}$ matris bloğunun sıfır ve nonsingüler olduğunu ve $A_{11} \epsilon \mathbb{C}^{rxr}$ nonsingüler olmak üzere $U, V \epsilon \mathbb{C}^{mxm}$ matrislerinin

$$U^* A V = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

olacak şekilde iki uniter matris olduğunu farz edelim. $B_1 \epsilon \mathbb{C}^{rxn}, B_2 \epsilon \mathbb{C}^{(m-r)xn}$ ve $C_1 \epsilon \mathbb{C}^{nxr}$, $C_2 \epsilon \mathbb{C}^{nx(m-r)}$ olmak üzere

$$U^* B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad CV = [C_1 \quad C_2] \tag{3.5}$$

matrislerini tanımlayalım. Bu takdirde M'nin nonsingüler olması için gerek ve yeter koşul B_2'nin tam satır ranklı, C_2'nin tam sütun ranklı ve $D_{22} - C_{21} A_{11}^{-1} B_{12}$'nin nonsingüler olmasıdır. Burada

$$\tilde{U}^* D \hat{V} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, \quad B_1 \hat{V} = [B_{11} \quad B_{12}] \text{ ve } \tilde{U}^* C_1 = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

ve $\hat{U}, \hat{V}$ ve $\tilde{U}, \tilde{V}$ $B_{21}, C_{12} \epsilon \mathbb{C}^{(m-r)x(m-r)}$ nonsingüler matrisler $D_{11} \epsilon \mathbb{C}^{(m-r)x(m-r)}$, $D_{12} \epsilon \mathbb{C}^{(m-r)x(n+r-m)}$, $D_{21} \epsilon \mathbb{C}^{(n+r-m)x(m-r)}$ ve $D_{22} \epsilon \mathbb{C}^{(n+r-m)x(n+r-m)}$ olmak üzere

$$\hat{U}^* B_2 \hat{V} = [B_{21} \quad 0] \text{ve} \quad \tilde{U}^* C_2 \tilde{V} = \begin{bmatrix} C_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

olacak şekilde uniter matrislerdir. Diğer matris blokları $B_{11} \epsilon \mathbb{C}^{rx(m-r)}$, $B_{12} \epsilon \mathbb{C}^{rx(n+r-m)}$, $C_{11} \epsilon \mathbb{C}^{(m-r)xr}$ ve $C_{21} \epsilon \mathbb{C}^{(n+r-m)xr}$ ‘dir.

İspat. Önce gerekliliği gösterelim. (3.5) ve (3.6)'ten

$$W = \begin{bmatrix} U^* & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \\ C_1 & C_2 & D \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

elde edilir. Bu nedenle M'nin nonsingüler olması için gerek ve yeter koşul W'nin nonsingüler olmasıdır.

Eğer M nonsingüler ise hem B_2 hem de C_2 matrislerinin ful ranklı olması gerekir. Aksi takdirde B_2 ya da C_2'den biri eksik ranklı ise bu durumda $\hat{x}^*M = 0$ ve $C_2\tilde{x} = 0$ koşullarına bağlı olarak ya sıfırdan farklı $\hat{x}\epsilon\mathbb{C}^{m-r}$ ya da sıfırdan farklı $\tilde{x}\epsilon\mathbb{C}^{m-r}$ vektörü mevcut olmalıdır.

$$\hat{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \tilde{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{x} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

Bu takdirde $\hat{z} \neq 0$ ve $\tilde{z} \neq 0$'dır. Bununla beraber B_2 matrisinin satıra göre eksik ranklı veya C_2 matrisinin sütuna göre eksik ranklı olmasına paralel olarak ya $\hat{z}^*W = 0$ ya da $W\bar{z} = 0$ eşitlikleri sağlanır. Bu W'nin dolayısıyla M'nin singüler olması demektir. Bu ise M matrisinin nonsingüler olduğu varsayımıyla çelişir.

Eğer $D_{22}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{12}$ singüler ise bu durumda $\left(D_{22}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{12}\right)\bar{y} = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı $\bar{y}\epsilon\mathbb{C}^{n+r-m}$ vektörü mevcuttur. W matrisini soldan ve sağdan

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \hat{U}^* & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{U}^* \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{V} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{V} \end{bmatrix}$$

uniter matrisleriyle soldan ve sağdan çarpar ve elde edilen matrisi $\widehat{W}$ ile gösterirsek $\widehat{W}$'ın W ve M ile aynı ranklı olduğunu ve

$$\widehat{W} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 & B_{21} & 0 \\ C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & 0 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

verildiğini görürüz. Ayrıca $\widehat{W}$ matrisini

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ -C_{11}A_{11}^{-1} & 0 & I & 0 \\ -C_{21}A_{11}^{-1} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} I & 0 & -A_{11}^{-1}B_{11} & -A_{11}^{-1}B_{12} \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

nonsingüler matrisiyle soldan ve sağdan çarpar ve elde edilen matrisi $\widetilde{W}$ ile gösterirsek $\widetilde{W}$' ın M, W ve $\widehat{W}$ ile aynı ranklı olduğunu ve

$$\widetilde{W} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{12} & 0 & D_{11}-C_{11}A_{11}^{-1}B_{11} & D_{12}-C_{11}A_{11}^{-1}B_{12} \\ C_{21} & 0 & 0 & D_{21}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{11} & D_{22}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{12} \end{bmatrix}$$

$$:= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{12} & 0 & X_{11} & X_{12} \\ 0 & 0 & 0 & X_{21} & D_{22}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{12} \end{bmatrix}$$

verildiğini görürüz.

Buna ek olarak B_{21} ve C_{12} nonsingüler olduğundan $\widetilde{W}$'yı

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & -X_{11}B_{21}^{-1} & 0 & I & 0 \\ 0 & -X_{21}B_{21}^{-1} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & -C_{12}^{-1}X_{12} \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

nonsingüler matrisleriyle soldan ve sağdan çarpar ve elde edilen matrisi $\overline{W}$ ile gösterirsek $\overline{W}$'nin M, W, $\widehat{W}$ ve $\widetilde{W}$ ile aynı ranklı olduğunu ve

$$\overline{W} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{22}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{12} \end{bmatrix}$$

ile verildiğini görürüz.

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{y} \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

Bu takdirde $\bar{z} \neq 0$ ve $\overline{W}\bar{z} = 0$ olduğu görülür. Bu ise $\overline{W}$'nin ve dolayısıyla M'nin singüler olduğunu gösterir. Bu durum M matrisinin nonsingüler olması varsayımıyla çelişir.

Şimdi yeterliliği gösterelim.

Eğer B_2 tam satır ranklı, C_2 tam sütun ranklı ve $D_{22}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{12}$ nonsingüler ise bu takdirde yukarıda tanımlanan $\overline{W}$, $\widehat{W}$, $\widetilde{W}$,W ve M matrisi aynı ranklıdır. Yani

$$rank(\overline{W}) = rank(\widehat{W}) + rank(\widetilde{W}) + rank(W) + rank(M)$$

dır. Çünkü

$$rank(M) = rank(\overline{W})$$

$= rank(A_{11}) + rank(B_{21}) + rank(C_{12}) + rank(D_{22} - C_{21}A_{11}^{-1}B_{12})$

$= r + (m - r) + (m - r) + (n + r - m)$

$= m + n$

olup M matrisi nonsingülerdir.

U, V , $\widehat{U}, \widehat{V}$ ve $\widetilde{U}, \widetilde{V}$ uniter matrisleri sırayla A, B_2 ve C_2 matrislerinin singüler değer ayrışımlarıyla elde edilebilir.

Son olarak A'nın nonsingüler olması durumunu tartışalım.

Teorem 3.4. (3.1)'de tanımlanan $M \epsilon \mathbb{C}^{(m+n)x(m+n)}$ $2x2$'lik blok matrisinin $A \epsilon \mathbb{C}^{mxm}$ bloğunun nonsingüler olduğunu varsayalım. Bu takdirde M nonsingülerdir ancak ve ancak $D - CA^{-1}B$ nonsingülerdir.

İspat. A singüler olduğundan

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu nedenle M'nin nonsingüler olması için gerek ve yeter koşul $D - CA^{-1}B$'nin nonsingüler olmasıdır.

3.3. Moore-Penrose İnverse Bağlı Durumlar

Bu kısımda (3.1) bağıntısında verilen $2x2$ tipindeki $M \epsilon \mathbb{C}^{(m+n)x(m+n)}$ blok matrisinin nonsingülerliğini garanti eden gerek ve yeter şartlar ortaya konulacaktır. Burada alt matrislere göre ortogonal izdüşümler kullanılacaktır. Kısım 3.2' ye benzer olarak genelliği bozmaksızın bu kısımda da $m \leq n$ alacağız.

Teorem 3.5. (3.1)'de tanımlanan $M \epsilon \mathbb{C}^{(m+n)x(m+n)}$ $2x2$ blok matris nonsingülerdir ancak ve ancak

(i) $rank(P) = m - rank(A)$,

(ii) $rank(Q) = m - rank(A)$ ve

(iii) $rank(G) = n + rank(A) - m$' dir.

Burada

$$P = (I - AA^T)B, \qquad Q = C(I - A^T A)$$

ve

$$G = (I - QQ^T)(D - CA^T B)(I - P^T P)$$

olacaktır.

İspat.

Bu durumu (3.1)' de verilen matrisin A bloğunun 3 durumuna göre açıklayalım.

(i) $A = 0$

(ii) $A \neq 0$ ve singülerdir

(iii) A nonsingülerdir.

(iv) İlk olarak $A = 0$ durumunu ele alalım . Bu durumda Teorem 3.1 denkleminden M'nin nonsingüler olması için gerek ve yeter şart $rank(B) = m,\ rank(C) = m,\quad rank(D_{22}) = n - m$ olmasıdır. Burada D_{22} (3.2)'de tanımlanmıştır. Ayrıca (3.2) ve (3.3) bağıntılarından

$$rank(B_{21}) = rank(C_{12}) = m$$

ve

$$\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{U} & 0 \\ 0 & \widetilde{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_{21} & 0 \\ C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ 0 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{V}^* & 0 \\ 0 & \widehat{V}^* \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

olduğu görülür. $\widetilde{U}$ ve $\widehat{V}$ uniter matrislerini $\widetilde{U}_1$, $\widehat{V}_1 \epsilon\, \mathbb{C}^{nxm}$ ve $\widetilde{U}_2, \widehat{V}_2\, \epsilon\, \mathbb{C}^{nx(n-m)}$ olmak üzere $\widetilde{U} = [\widetilde{U}_1 \quad \widetilde{U}_2]$ ve $\widehat{V} = [\widehat{V}_1 \quad \widehat{V}_2]$ olarak parçalayalım. Bu takdirde (3.10) bağıntısı ve $A = 0$ ifadesi dikkate alınırsa

$$\begin{cases} P = \left(I - AA^T\right)B = B = \widehat{U}[B_{21} \quad 0]\widehat{V}^* = \widehat{U}B_{21}\widehat{V}_1^*, \\ Q = C\left(I - A^T A\right) = C = \widetilde{U}\begin{bmatrix} C_{12} \\ 0 \end{bmatrix}\widetilde{V}^* = \widetilde{U}_1 C_{12}\widetilde{V}^*. \end{cases} \tag{3.11}$$

elde edilir. Basit bir hesaplamayla

$$I - P^T P = I - \widehat{V}_1\widehat{V}_1^* = \widehat{V}_2\widehat{V}_2^* \quad \text{ve} \quad I - QQ^T = I - \widetilde{U}_1\widetilde{U}_1^* = \widetilde{U}_2\widetilde{U}_2^*$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\begin{cases} B\left(I - P^T P\right) = \widehat{U}[B_{21} \quad 0]\widehat{V}^*\left(\widehat{V}_2\widehat{V}_2^*\right) = 0 \\ \left(I - QQ^T\right)C = \left(\widetilde{U}_2\widetilde{U}_2^*\right)\widetilde{U}\begin{bmatrix} C_{12} \\ 0 \end{bmatrix}\widetilde{V}^* = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

ve

$$\left(I - QQ^T\right)D(I - P^TP) = \left(\tilde{U}_2\tilde{U}_2^*\right)D\left(\hat{V}_2\hat{V}_2^*\right) = \tilde{U}_2D_{22}\hat{V}_2^* \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.12) ve (3.13) eşitlikleri (3.10) ile birlikte göz önüne alınırsa G matrisinin açık bir ifadesinin

$$G = (I - QQ^T)(D - CA^TB)(I - P^TP) = \tilde{U}_2D_{22}\hat{V}_2^* \tag{3.14}$$

şeklinde olduğu görülür.

(3.11) ve (3.14)'te tanımlanan P, Q ve G matrislerinden

$$rank(P) = rank(B_{21}),\ \ rank(Q) = rank(C_{12})\ \text{ ve }\ rank(G) = rank(D_{22})$$

eşitlikleri kolayca görülür. Bu eşitlikler

$$rank(A) = 0,\ \ rank(B) = m,\ \ rank(C) = m\ \text{ ve }\ rank(D_{22}) = n - m$$

gerçekleriyle birleştirildiklerinde tartışma kolayca sağlanır.

Şimdi $A \neq 0$ ve singüler durumunu göz önüne alalım. Bu durumda Teorem 3.2' den kolayca görülür ki M' nin nonsingüler olması için gerek ve yeter şart

$$rank(B_2) = m - r\ ,\ \ rank(C_2) = m - r\ \text{ ve }\ rank(D_{22} - C_{21}A_{11}^{-1}B_{12}) = n + r - m$$

olmasıdır. Burada A_{11}, B_2, C_2, B_{12}, C_{21} ve D_{22} (3.4)-(3.7)'da tanımlandığı gibidir. Ayrıca uniter matris parçalanışları dikkate alınarak (3.8) ve (3.9)'den

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{U} & 0 \\ 0 & \tilde{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 & B_{21} & 0 \\ C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & 0 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}^* & 0 \\ 0 & \hat{V}^* \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

Burada

$$\bar{U} = U\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \hat{U} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \bar{V} = V\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{V} \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi de $\bar{U}, \tilde{U}$ ve $\bar{V}, \hat{V}$ uniter matrislerini $\bar{U}_1$, $\bar{V}_1 \epsilon\ \mathbb{C}^{mxr}$, $\bar{U}_2$, $\bar{V}_2 \epsilon\ \mathbb{C}^{mx(m-r)}$, $\tilde{U}_1, \hat{V}_1 \epsilon\ \mathbb{C}^{nx(m-r)}$ ve $\tilde{U}_2, \hat{V}_2 \epsilon\ \mathbb{C}^{nx(n+r-m)}$ olmak üzere

$$\bar{U} = [\bar{U}_1 \quad \bar{U}_2], \quad \tilde{U} = [\tilde{U}_1 \quad \tilde{U}_2]$$

ve

$$\bar{V} = [\bar{V}_1 \quad \bar{V}_2], \quad \hat{V} = [\hat{V}_1 \quad \hat{V}_2]$$

olarak parçalayalım. Bu taktirde (3.15) bağıntısından

$$P=(I-AA^T)B=\overline{U}_2B_{21}\widehat{V}_1^* \text{ ve } Q=C(I-A^TA)=\widetilde{U}_1C_{12}\overline{V}_2^* \tag{3.16}$$

elde edilir. Burada $A=\overline{U}_1A_{11}\overline{V}_1^*$, $AA^T=\overline{U}_1\overline{U}_1^*$ ve $A^TA=\overline{V}_1\overline{V}_1^*$ ifadeleri kullanılmıştır. Basit bir hesaplamayla

$$I-P^TP=I-\widehat{V}_1\widehat{V}_1^*=\widehat{V}_2\widehat{V}_2^* \quad \text{ve} \quad I-QQ^T=I-\widetilde{U}_1\widetilde{U}_1^*=\widetilde{U}_2\widetilde{U}_2^*$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{cases} B(I-P^TP)=U\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \widehat{U}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & 0\end{bmatrix}\widehat{V}^*\left(\widehat{V}_2\widehat{V}_2^*\right)=\overline{U}_1B_{12}\widehat{V}_2^* \\ \left(I-QQ^T\right)C=\left(\widetilde{U}_2\widetilde{U}_2^*\right)\widetilde{U}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \widetilde{V}^*\end{bmatrix}V^*=\widetilde{U}_2C_{21}\overline{V}_1^* \end{cases} \tag{3.17}$$

ve

$$\left(I-QQ^T\right)D(I-P^TP)=\widetilde{U}_2\left(\widetilde{U}_2^*D\widehat{V}_2\right)\widehat{V}_2^*=\widetilde{U}_2D_{22}\widehat{V}_2^* \tag{3.18}$$

eşitlikleri sağlanır. (3.17) ve (3.18) eşitlikleri (3.15) ile birleştirilerek G matrisinin açık bir ifadesi olarak

$$G=(I-QQ^T)(D-CA^TB)(I-P^TP)=\widetilde{U}_2(D_{22}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{12})\widehat{V}_2^* \tag{3.19}$$

eşitliği elde edilir. Böylece (3.16) ve (3.19)'da tanımlanan P,Q ve G matrisinin ifadeleri bize

$$rank(P)=rank(B_{21}),\ \ rank(Q)=rank(C_{12})$$

ve

$$rank(G)=rank(D_{22}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{12})$$

eşitliklerini verir. Bu eşitlikler

$$rank(A)=rank(A_{11}),\ \ rank(B_2)=m-r,\ \ ve\ \ rank(C_2)=m-r$$

ve

$$rank(D_{22}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{12})=n+r-m$$

gerçekleriyle birleştirilirse istenen sonuç kolayca görülür.

Son olarak A'nın nonsingüler olması durumunu göz önüne alalım. Bu durumda Teorem 3.5 denkleminden kolayca görülür ki M matrisinin nonsingüler olması için gerek ve yeter şart $D-CA^{-1}$'in nonsingüler olmasıdır. $A^T=A^{-1}$ olduğundan basit bir hesaplamayla

$$P = (I - AA^T)B = 0, \quad Q = C(I - A^T A) = 0$$

$$G = (I - QQ^T)(D - CA^T B)(I - P^T P) = D - CA^{-1}B$$

olduğu görülür. Bu ise

$$rank(A) = m, \; rank(P) = 0, \; rank(Q) = 0$$

ve

$$rank(G) = rank(D - CA^{-1}B) = n$$

eşitliklerini sağlar. Böylece Teorem ispatlanmış olur.

3.4. Matris Rankı İçin Genel Formüller

Bu kısımda (3.1)'de tanımlanan $2x2$'lik $M\epsilon\mathbb{C}^{(m+n)x(m+n)}$ blok matrisinin rankı için genel formülleri singüler değer ayrışımı ve alt matrislere göre ortogonal izdüşümler cinsinden ifade edeceğiz.

Teorem 3.6. (3.1)' de tanımlanan $M\epsilon\mathbb{C}^{(m+n)x(m+n)}$ $2x2$ 'lik blok matrisi için $U, V\epsilon\mathbb{C}^{mxm}$

$$U^* AV = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.20}$$

olacak şekilde iki uniter matris olsun. Burada A_{11} ya sıfırdır ya da rxr 'lik nonsingüler bir matris bloğudur. B_1 ya sıfır ya da rxn'lik bir matris bloğu, C_1 ya sıfır ya da nxr 'lik bir matris bloğu ve bunlara karşılık olarak $B_2\epsilon\mathbb{C}^{(m-r)xn}$ ve $C_2\epsilon\mathbb{C}^{nx(m-r)}$ olmak üzere

$$U^* B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad CV = [C_1 \quad C_2] \tag{3.21}$$

olsun. Ayrıca $\widehat{U}\epsilon\mathbb{C}^{(m-r)x(m-r)}$, $\widehat{V}\epsilon\mathbb{C}^{nxn}$ ve $\widetilde{U}\epsilon\mathbb{C}^{nxn}$, $\widetilde{V}\epsilon\mathbb{C}^{(m-r)x(m-r)}$ matrisleri $B_{21}\epsilon\mathbb{C}^{s_1xs_1}$, $C_{12}\epsilon\mathbb{C}^{s_2xs_2}$ ya sıfır ya da nonsingüler olmak üzere

$$\widehat{U}^* B_2 \widehat{V} = \begin{bmatrix} B_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \widetilde{U}^* C_2 \widetilde{V} = \begin{bmatrix} C_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

olacak şekilde uniter matrisler olsun. $B_{11}\epsilon\mathbb{C}^{rxs_1}$, $B_{12}\epsilon\mathbb{C}^{rx(n-s_1)}$, $C_{11}\epsilon\mathbb{C}^{s_2xr}$, $C_{21}\epsilon\mathbb{C}^{(n-s_2)xr}$ ve $D_{11}\epsilon\mathbb{C}^{s_2xs_1}$, $D_{22}\epsilon\mathbb{C}^{(n-s_2)x(n-s_1)}$, $D_{12}\epsilon\mathbb{C}^{s_2x(n-s_1)}$ ve $D_{21}\epsilon\mathbb{C}^{(n-s_2)xs_1}$ olmak üzere

$$B_1\hat{V} = [B_{11} \quad B_{12}], \qquad \tilde{U}^* C_1 = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix} \qquad \text{ve} \quad \tilde{U}^* D\hat{V} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

matrislerini tanımlayalım. Bu takdirde

$$rank(M) = rank(A_{11}) + rank(B_{21}) + rank(C_{12}) + rank(D_{22} - C_{21}A_{11}^{-1}B_{12}) \tag{3.24}$$

eşitliği sağlanır. Burada eğer $A_{11} = 0$ ise $D_{22} - C_{21}A_{11}^{-1}B_{12}$ ile D_{22} yer değiştirir ve eğer A_{11}, B_{21} ve C_{12} matris blokları sıfır ise $rank(A_{11})$, $rank(B_{21})$, $rank(C_{12})$ yerine sıfır konur.

İspat. (3.20) ve (3.21)' den

$$\begin{bmatrix} U^* & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \\ C_1 & C_2 & D \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. (3.22) ve (3.23) ifadeleri kullanılarak basit bir hesaplamadan sonra

$\bar{U} = U\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \hat{U} \end{bmatrix}$ ve $\bar{V} = V\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{V} \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{U} & 0 \\ 0 & \tilde{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 & 0 & B_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & 0 & 0 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}^* & 0 \\ 0 & \hat{V}^* \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

elde edilir.

$$\widehat{W} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 & 0 & B_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & 0 & 0 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

olsun. Bu takdirde M ve $\widehat{W}$ matrislerinin aynı ranklı olduğu görülür. $A_{11} = 0$ olması durumunda (3.25)' ya göre M matrisiyle

$$\begin{bmatrix} 0 & B_{21} & 0 \\ C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ 0 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

matrisinin aynı ranka sahip olduğu görülür. Bu ise B_{21} veya C_{12}'nin sıfır olmasına bağlı olarak $\begin{bmatrix} C_{12} & D_{12} \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix}$ ya da $\begin{bmatrix} B_{21} & 0 \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$ ' a dönüşür ve B_{21} ve C_{12} nonsingüler ise

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -D_{11}B_{21}^{-1} & I & 0 \\ -D_{21}B_{21}^{-1} & 0 & I \end{bmatrix} \text{ve} \begin{bmatrix} I & 0 & C_{12}^{-1}D_{12} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

nonsingüler matrisleriyle soldan ve sağdan çarpıldığında

$$\begin{bmatrix} 0 & B_{21} & 0 \\ C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{22} \end{bmatrix}$$

Matrisine dönüşür. Bu nedenle $rank(M) = rank(B_{21}) + rank(C_{12}) + rank(D_{22})$' dır. Bu ise (3.24)' te verilen rank formülünün doğruluğunu gösterir. A_{11} nonsingüler olduğundan $\widehat{W}$ matrisini soldan ve sağdan sırasıyla

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ -C_{11}A_{11}^{-1} & C_{12} & 0 & I & 0 \\ -C_{21}A_{11}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & -A_{11}^{-1}B_{11} & -A_{11}^{-1}B_{12} \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

nonsingüler matrisleriyle çarpar ve elde edilen matrisi $\widetilde{W}$ ile gösterirsek $\widetilde{W}$'nın M ve $\widehat{W}$ ile aynı ranka sahip olduğunu ve

$$\widetilde{W} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{12} & 0 & D_{11}-C_{11}A_{11}^{-1}B_{11} & D_{12}-C_{11}A_{11}^{-1}B_{12} \\ C_{21} & 0 & 0 & D_{21}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{11} & D_{22}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{12} \end{bmatrix}$$

$$:= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{12} & 0 & X_{11} & X_{12} \\ 0 & 0 & 0 & X_{21} & D_{22}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{12} \end{bmatrix}$$

ile verildiğini görürüz. Bunun sonucu olarak ya B_{21} veya C_{12} sıfır ise M matrisi

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{12} & X_{12} \\ 0 & 0 & D_{22}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{12} \end{bmatrix} \text{ ya da } \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & B_{21} & 0 \\ 0 & X_{21} & D_{22}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{12} \end{bmatrix}$$

matrisleriyle aynı ranka sahip olacaktır. Bu nedenle (3.24) rank formülü doğrudur. Öte yandan hem B_{12} hemde C_{21} nonsingüler ise $\widetilde{W}$ matrisin soldan ve sağdan

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & -X_{11}B_{21}^{-1} & 0 & I & 0 \\ 0 & -X_{21}B_{21}^{-1} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & -C_{12}^{-1}X_{12} \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

ile çarpar ve elde edilen matrisi $\overline{W}$ ile gösterirsek $\overline{W}$'nin $M, \widehat{W}$ ve $\widetilde{W}$ matrisleriyle aynı ranka sahip olduğunu ve

$$\overline{W} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{22}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{12} \end{bmatrix}$$

şeklinde verildiğini görürüz. Bu nedenle (3.24) rank formülü gerçeklenir.

Teorem 3.7. (3.1)'de tanımlanan $M\epsilon\mathbb{C}^{(m+n)x(m+n)}$ $2x2$'lik blok matrisi için

$$P = (I - AA^T)B, \;\; Q = C(I - A^TA)$$

ve

$$G = (I - QQ^T)(D - CA^TB)(I - P^TP)$$

olmak üzere

$$rank(M) = rank(A) + rank(P)rank(Q) + rank(G) \tag{3.26}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Teorem 3.6 denklemindeki gibi (3.20)-(3.23) matris çarpılışlarını uyarlayalım ve $\widetilde{U}_1\, \epsilon\mathbb{C}^{nxs_2}$, $\widetilde{U}_2\epsilon\mathbb{C}^{nx(n-s_2)}$, $\widehat{V}_1\epsilon\mathbb{C}^{nxs_1}$ ve $\widehat{V}_2\, \epsilon\mathbb{C}^{nx(n-s_1)}$ olmak üzere

$$\widetilde{U} = [\widetilde{U}_1 \quad \widetilde{U}_2] \qquad \text{ve} \quad \widehat{V} = [\widehat{V}_1 \quad \widehat{V}_2]$$

alalım. Bu takdirde (3.24)' ten (3.26)' nin ispatı için sadece

$$rank(A) = rank(A_{11}), rank(P) = rank(B_{21}), rank(Q) = rank(C_{12}) \quad (3.27)$$

ve

$$rank(G) = rank(D_{22} - C_{21}A_{11}^{-1}B_{12}) \quad (3.28)$$

eşitliklerinin gösterilmesi gerekmektedir. (3.20)' den kolayca görülür ki

$rank(A) = rank(A_{11})'$ dir. Dolayısıyla (3.27)' deki ilk eşitlik sağlanır. Ayrıca

$$A = U\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^* \quad \text{ve} \quad A^T = V\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^* \quad (3.29)$$

olur. Eğer $A_{11} = 0$ ise bu takdirde

$$A^T = 0, \quad I - AA^T = I - A^T A = I$$

ve

$$P = B = B_2, \; Q = C = C_2 \text{ ve } \; G = (I - C_2C_2^T)D(I - B_2^T B_2)$$

olacaktır. (3.22)' e göre B_{21} veya C_{12}'nin sıfır olup olmamasına göre

$rank(P) = rank(B_2) = rank(B_{21})$ ve $rank(Q) = rank(C_2) = rank(C_{12})$ elde edilir ki bu da (3.27)' deki son iki eşitliği verir. Dolayısıyla sadece (3.28) eşitliğinin sağlandığını göstermemiz gerekir. Bu durumda $rank(G) = rank(D_{22})$ olduğunun gösterilmesine indirgenir. Gerçekten hem B_{21} hem de C_{12} sıfır ise bu takdirde $B_2 = 0, \quad C_2 = 0$ ve $\widetilde{U}^* D\widehat{V} = D_{22}$ olur. Dolayısıyla $G = D = \widetilde{U}D_{22}\widehat{V}^*$ olur ki bu da $rank(G) = rank(D_{22})$ eşitliğini sağlar. Eğer $B_{21} = 0$ ve C_{12} nonsingüler ise

$$\widetilde{U}^* D\widehat{V} = \begin{bmatrix} D_{12} \\ D_{22} \end{bmatrix}, \; C_2 = \widetilde{U}\begin{bmatrix} C_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\widetilde{V}^*, \quad C_2^T = \widetilde{V}\begin{bmatrix} C_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\widetilde{U}^*$$

ve

$$G = (I - C_2C_2^T)D = \left(I - \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\widetilde{U}^*\right)D = \widetilde{U}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\widetilde{U}^* D$$

$$= \widetilde{U}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}(\widetilde{U}^* D\widehat{V})\widehat{V}^* = \widetilde{U}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{12} \\ D_{22} \end{bmatrix}\widehat{V}^* = \widetilde{U}\begin{bmatrix} 0 \\ D_{22} \end{bmatrix}\widehat{V}^*$$

elde edilir. Bu ise $rank(G) = rank(D_{22})$ olduğunu gösterir. Eğer $C_{12} = 0$ ve B_{21} nonsingüler ise bu takdirde $C_2 = 0$'dır.

$$\widetilde{U}^* D\widehat{V} = [D_{21} \quad D_{22}], \quad B_2 = \widehat{U}\begin{bmatrix} B_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\widehat{V}^*, \; B_2^T = \widehat{V}\begin{bmatrix} B_{21}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\widehat{U}^*$$

ve benzer şekilde

$$G = D(I - B_2^T B_2) = D\left(I - \hat{V}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\hat{V}^*\right) = D\hat{V}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\hat{V}^*$$

$$= \widetilde{U}(\widetilde{U}^* D\hat{V})\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\hat{V}^* = \widetilde{U}[D_{21} \quad D_{22}]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\hat{V}^* = \widetilde{U}[0 \quad D_{22}]\hat{V}^*$$

elde edilir. Bu ise $rank(G) = rank(D_{22})$ olması demektir.

Eğer hem B_{21} hem de C_{12} matrisleri nonsingüler ise bu takdirde

$$B_2 = \hat{U}\begin{bmatrix} B_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\hat{V}^*, \quad B_2^T = \hat{V}\begin{bmatrix} B_{21}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\hat{U}^*, \; B_2^T B_2 = \hat{V}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\hat{V}^*$$

ve

$$C_2 = \widetilde{U}\begin{bmatrix} C_{12} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\widetilde{V}^*, \quad C_2^T = \widetilde{V}\begin{bmatrix} C_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\widetilde{U}^*, \; C_2 C_2^T = \widetilde{U}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\widetilde{U}^*$$

olacaktır. Basit bir hesaplamayla

$$G = (I - C_2 C_2^T)D(I - B_2^T B_2) = \widetilde{U}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\widetilde{U}^* D\hat{V}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\hat{V}^* = \widetilde{U}_2 D_{22}\hat{V}_2^*$$

elde edilir ki bu da

$$rank(G) = rank(D_{22})$$

olduğunu gösterir. Eğer A_{11} nonsingüler ise (3.20)' dan

$$I - AA^T = U\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}U^* \quad \text{ve} \quad I - A^T A = V\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}V^*$$

elde edilir. (3.21) ve (3.22)' e uygun olarak

$$P = U\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}U^* = U\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = U\begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$= U\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \hat{U} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\hat{V}^* \tag{3.30}$$

ve

$$Q = CV\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}V^* = [C_1 \quad C_2]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}V^* = [0 \quad C_2]V^*$$

$$= \widetilde{U}\begin{bmatrix} 0 & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \widetilde{V}^* \end{bmatrix}V^* \tag{3.31}$$

elde edilir. Bu ise (3.27)' deki son iki eşitliği verir. Böylece sadece (3.28) eşitliğinin sağlandığını göstermemiz gerekir. Eğer B_{21} ve C_{12} nonsingüler ise (3.30) ve (3.31) eşitliklerinden

$$I - P^T P = \hat{V} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \hat{V}^* = \hat{V}_2 \hat{V}_2^*$$

ve

$$I - QQ^T = \tilde{U} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tilde{U}^* = \tilde{U}_2 \tilde{U}_2^*$$

elde edilir.

Bu durumda (3.20) ve (3.23) ifadeleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} G &= (\tilde{U}_2 \tilde{U}_2^*)(D - CA^T B)(\hat{V}_2 \hat{V}_2^*) \\ &= \left(\tilde{U}_2 \tilde{U}_2^*\right) \tilde{U} \left[\left(\tilde{U}^* D \hat{V}\right) - \left(\tilde{U}^* C V\right)(U^* A V)^T \left(U^* B \hat{V}\right)\right] \hat{V}^* \left(\hat{V}_2 \hat{V}_2^*\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \tilde{U}_2 \end{bmatrix} \left(\tilde{U}^* D \hat{V} - \tilde{U}^* C_1 A_{11}^{-1} B_1 \hat{V}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{V}_2^* \end{bmatrix} \\ &= \tilde{U}_2 (D_{22} - C_{21} A_{11}^{-1} B_{12}) \hat{V}_2^* \qquad (3.32) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $rank(G) = rank(D_{22} - C_{21} A_{11}^{-1} B_{12})$ olduğunu gösterir. Eğer B_{21} ve C_{12}' nin her ikisi de sıfır ise $B_2 = 0, C_2 = 0,\ B_1 \hat{V} = B_{12},\ \tilde{U}^* C_1 = C_{21}$ olacaktır. Bu nedenle $P = 0,\ Q = 0,\ \tilde{U}^* D \hat{V} = D_{22}$ ve

$$\begin{aligned} G &= D - CA^T B = D - CV(U^* A V)^T U^* B \\ &= D - \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = D - C_1 A_{11}^{-1} B_1 \\ &= \tilde{U} \left(\tilde{U}^* D \hat{V} - \tilde{U}^* C_1 A_{11}^{-1} B_1 \hat{V}\right) \hat{V}^* = \tilde{U} (D_{22} - C_{21} A_{11}^{-1} B_{12}) \hat{V}^* \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $rank(G) = rank(D_{22} - C_{21} A_{11}^{-1} B_{12})$ olduğunu gösterir.

Eğer B_{21} nonsingüler ve $C_{12} = 0$ ise bu taktirde $C_2 = 0$ ve $\tilde{U}^* C_1 = C_{21}$ 'dir. Bu nedenle

$$Q = 0,\ \ D - CA^T B = D - C_1 A_{11}^{-1} B_1,\ \tilde{U}^* D \hat{V} = \begin{bmatrix} D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

ve (3.30)' e benzer şekilde

$$P = U \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \hat{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{V}^*$$

elde edilir. $I-P^TP=\hat{V}_2\hat{V}_2^*$ olduğundan (3.32)' e benzer şekilde

$$G=(D-C_1A_{11}^{-1}B_1)(\hat{V}_2\hat{V}_2^*)$$

$$=\widetilde{U}(\widetilde{U}^*D\hat{V}-\widetilde{U}^*C_1A_{11}^{-1}B_1\hat{V})\hat{V}^*(\hat{V}_2\hat{V}_2^*)$$

$$=\widetilde{U}[D_{21}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{11}\quad D_{22}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{12}]\begin{bmatrix}0\\ \hat{V}_2^*\end{bmatrix}$$

$$=\widetilde{U}(D_{22}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{12})\hat{V}_2^*$$

elde edilir. Bu ise $rank(G)=rank(D_{22}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{12})$ olduğunu gösterir. Son olarak eğer $B_{21}=0$ ve C_{12} nonsingüler ise bu takdirde $B_2=0$ ve $B_1\hat{V}=B_{12}$ olacaktır. Dolayısıyla

$$P=0,\qquad D-CA^TB=D-C_1A_{11}^{-1}B_1,\quad \widetilde{U}^*D\hat{V}=\begin{bmatrix}D_{12}\\ D_{22}\end{bmatrix}$$

olup (3.31)' e benzer şekilde

$$Q=\widetilde{U}\begin{bmatrix}0 & C_{12} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & \tilde{V}^*\end{bmatrix}V^*$$

olduğu görülür. $I-QQ^T=\widetilde{U}_2\widetilde{U}_2^*$ olduğundan (3.32)' e benzer şekilde

$$G=(\widetilde{U}_2\widetilde{U}_2^*)(D-C_1A_{11}^{-1}B_1)$$

$$=(\widetilde{U}_2\widetilde{U}_2^*)\widetilde{U}(\widetilde{U}^*D\hat{V}-\widetilde{U}^*C_1A_{11}^{-1}B_1\hat{V})\hat{V}^*$$

$$=[0\quad \widetilde{U}_2]\begin{bmatrix}D_{12}-C_{11}A_{11}^{-1}B_{12}\\ D_{22}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{12}\end{bmatrix}\hat{V}^*$$

$$=\widetilde{U}_2(D_{22}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{12})\hat{V}^*$$

elde edilir ki bu da $rank(G)=rank(D_{22}-C_{21}A_{11}^{-1}B_{12})$ olması demektir.

Teorem 3.8. (3.1)' de tanılanan $M\epsilon\mathbb{C}^{(m+n)x(m+n)}$ $2x2$ tipindeki blok matrisi nonsingüler olması için gerek ve yeter koşul

$$rank(A)+rank(P)+rank(Q)+rank(G)=m+n$$

olmasıdır.

Bu kısımda $2x2$ tipindeki blok matrislerin inversini göstereceğiz.

Önce

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \tag{3.33}$$

$2x2$ tipindeki blok matrisi için açık invers formülleri 3 farklı kısımda verilecektir. Daha sonra bu sonuçlar blok üçgensel matrislerin inverslerinin elde edilmesinde ve bisimetrik, Hamilton, per-Hermityan ve centro-Hermityan matrisler gibi değişik yapıdaki matrislere uygulanacaktır. Son olarak $2x2$ tipinde blok matrisler ve onların inverslerini tamamlama problemleri tartışılacaktır. $2x2$ tipinde blok matrisin (3.33) bağıntısında verilen ters matrisi birçok konuda sıklıkla ortaya çıkmıştır ve uzun zamandır çalışılmaktadır. A^{-1} veya D^{-1} cinsinden inversler lineer cebir ile ilgili birçok standart kaynaklarda bulunabilir.

Bununla beraber burada tam bir işleyiş vereceğiz. (3.33) bağıntısındaki A matrisinin $D - CA^{-1}B$ Schur bileşeni pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Lazutkin $2x2$ tipindeki blok matrislerin yapısını incelemiştir. Bapat ve Kwong $2x2$ tipindeki pozitif definit blok matrislerin Schur çarpımı için eşitsizlikler elde etmiştir.

Bu çalışmanın 3 amacı vardır. Birincisi $2x2$ tipindeki blok matris ve onların tersleri ile ilgili tüm formüllerin tam bir listesi verilecektir. İkinci olarak $2x2$ tipindeki bir blok matrisle ilgili simetrik yapılı matrisler ele alınacaktır. Ayrıca bilgisayar cebir sistemleri de kullanılarak şu ana kadar bilinen formüller alışılmış yolla ispatlanacaktır. Gerçekten belirli $2x2$ ve $3x3$ tipindeki blok matris tamamlama problemlerini çözmede kullanılan paket programlar oluşturulmuştur. Son amacımız ise bu gerçeği göstermek ve bu tekniklerin detaylı bir çalışmasıdır.

$$R = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ ve } R^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

nonsingüler bir R matrisi ve onun tersi R^{-1} (3.34) şeklinde parçalanabilir olsun. R ile R^{-1} ve R^{-1} ile R çarpımlarının mümkün olması için tüm alt blokların büyüklükleri keyfi alınamaz. Bu nedenle A, B, C ve D matrislerinin $k + l = m + n$ olmak üzere sırasıyla kxm, kxn, lxm ve lxn boyutlu olduğunu varsayalım. Bu takdirde E, F, G ve H matrislerinin boyutları sırasıyla mxk, mxl, nxk ve nxl tipinde olmak zorundadır. Başka bir deyişle R^{-1}, R matrisinin eşlenik parçalanışındadır. Bu kısımda A, B, C ve D cinsinden E, F, G ve H için formüller vereceğiz. Genelleştirilmiş inverslerden kaçınmak için A, B, C veya D bloklarından birinin nonsingüler bir kare matris olduğunu varsayalım. Böylece sadece 3 mümkün parçalanış söz konusudur.

- Kare köşegen parçalanış: $k = m$ ve $l = n$
- Kare köşegen olmayan parçalanış: $k = n$ ve $l = m$
- Tüm kare parçalanış: $k = l = m = n$

Şüphesiz ki R orijinal matrisi ve R^{-1} inversi tüm kare parçalanışa uygun boyutta olmalıdır. İlk olarak R ve R^{-1} matrislerinin kare köşegen parçalanışını göz önüne alalım. Bu durumda A, D, E, H kare matrislerinde A ve E aynı boyutta ve dolayısıyla D ve H da aynı boyuttadır.

Teorem 3.9.

i. A nonsingüler olsun. Bu takdirde (3.34) bağıntısındaki R matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter şart A matrisinin $D - CA^{-1}B$ Schur tümleyeninin tersinir olmasıdır ve

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

elde edilir.

ii. D nonsingüler olsun. Bu takdirde R matrisi tersinir olması için gerek ve yeter şart D matrisinin $A = BD^{-1}C$ Schur tümleyeninin tersinir olmasıdır ve

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Bu iki formülün farklı durumlarda kullanıldığı, dolayısıyla A ve D matrislerinin her ikisinin de nonsingüler olması durumunda bunların birbirine denk olduğu açıkça görülür.

Bu teoremin ispatlanması için çeşitli yollar vardır. Fakat R matrisinin blok Gauss eliminasyonu cinsinden yapılan ispat daha önemsizdir. Daha açık bir şekilde Teorem 3.9 bağıntısının birinci kısmı için

$$R = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

ikinci kısmı için

$$R=\begin{bmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

Öte yandan R ve R^{-1} matrislerinin kare fakat köşegen olmayan parçalanışını göz önüne alalım. Bu durumda B, C, G ve H matrisleri kare matrisler olup B ve G matrisleri aynı boyutlu ve dolayısıyla C ve H matrisleri de aynı boyutludur. Satır ve sütunların uygun bir permütasyonu ile R ve R^{-1} matrisleri kare köşegen parçalanışa dönüştürülebilir.

Örneğin J matrisi ikinci köşegen 1, diğerleri 0 olan bir matris olsun. Bu durumda RJ matrisi, R matrisinin sütunlarının sırasını değiştirir ve dolayısıyla kare köşegen parçalanış olur. Bu nedenle

$$RJ=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} BJ & AJ \\ DJ & CJ \end{bmatrix}$$

matrisine Teorem 3.9 denklemini uygulayabiliriz. Fakat tamlık ve daha sonraki kullanımlar için bu formülleri verelim.

Teorem 3.10.

i. B matrisi nonsingüler olsun. Bu takdirde (3.34) bağıntısındaki R matrisinin tersinir olabilmesi için gerek ve yeter şart B matrisinin $C-DB^{-1}A$ Schur tümleyeninin tersinir olmasıdır ve bu durumda

$$R^{-1}=\begin{bmatrix} -(C-DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & (C-DB^{-1}A)^{-1} \\ B^{-1}+B^{-1}A(C-DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}A(C-DB^{-1}A)^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

elde edilir.

ii. C matrisi nonsingüler olsun. Bu takdirde R matrisinin tersinir olması için gerek ve yeter şart C matrisinin $B-AC^{-1}D$ Schur tümleyeninin tersinir olmasıdır ve bu durumda

$$R^{-1}=\begin{bmatrix} C^{-1}D(B-AC^{-1}D)^{-1} & C^{-1}+C^{-1}D(B-AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \\ (B-AC^{-1}D)^{-1} & -(B-AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

elde edilir.

Yukarıdaki duruma benzer şekilde bu iki formül farklı durumlarda kullanılır ve hem B hem de C matrisi nonsingüler ise bu iki formül birbirine denktir.

Son olarak tüm kare parçalanış, yani R ve R^{-1} matrislerindeki tüm blokların kare olması durumunu göz önüne alalım. Bu durumda R ve R^{-1} matrisleri aynı boyutlu olmak zorundadır. Bu parçalanış kare köşegen parçalanış olarak düşünülebileceğinden yukarıda verilen iki teorem uygulanabilir. Fakat farklı varsayımlar altında kullanılır.

Bazı özel durumlarda bu formüller özdeştir.

i. Eğer A ve B matrisleri tersinirse (3.35)≡(3.37)
ii. Eğer A ve C matrisleri tersinirse (3.35)≡(3.38)
iii. Eğer B ve D matrisleri tersinirse (3.36)≡(3.37)
iv. Eğer C ve D matrisleri tersinirse (3.36)≡(3.38)

R nonsingüler matrisi için A, B, C, D bloklarının tümünün singüler olma ihtimalinde mevcut olduğunu hatırlayalım. Dolayısıyla R^{-1} matrisini hesaplamak için yukarıdaki formüllerin hiçbiri uygulanamaz. Bunun için tipik bir örnek

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisidir. Gerçekten bu matrisin tüm kare köşegen parçalanışları A ve D matrislerinin nonsingülerliği için geçersizdir. Bu nedenle $m = 1$ ve $n = 3$ olmak üzere kare köşegen olmayan parçalanış bunun tersini elde etmede uygulanabilir. Bundan dolayı diğer metodların hiçbiri sağlanmadığında istenilen inversi bulmak için birden çok seçim yapabileceğimizi gösteriyor ve seçimlerin herbiri ilerideki kısımlarda göstereceğimiz gibi önemlidir.

3.5. Blok Üçgensel Matrisler

Bu kısımda 2x2 tipindeki blok köşegen matrisler için verdiğimiz temel teoremleri blok üçgensel matrislere uygulayacağız. İlk olarak blok köşegen ve blok ikinci köşegen matrislerin inversleri için önemli sonuçları verelim.

Sonuç 3.1.

i. Kare köşegen parçalanış için $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ matrisinin tersinir olması için gerek ve yeter şart A ve D matrislerinin tersinir olmasıdır ve bu durumda tersi

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$$

olur.

ii. Kare köşegen olmayan parçalanış için $\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin tersinir olması için gerek ve yeter şart B ve C matrislerinin tersinir olmasıdır. Bu durumda tersi

$$\begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Blok köşegen bir matrisin tersi de blok köşegen matristir. Benzer şekilde blok ikinci köşegen matrisin tersi de blok ikinci köşegen matristir. Fakat parçalı transpoz alınmış şekildedir. Dolayısıyla B ve C matrisleri arasında bir değişim söz konusudur. Bu sonuç $n.T$ tipindeki blok köşegen ve ikinci blok köşegen matrislere de kolayca genişletilebilir.

Bu kısmın devamında blok üçgensel matrislerinin terslerini inceleyeceğiz. Teorem 3.7 ve Teorem 3.8 denklemlerinden aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 3.2. $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ üst üçgensel blok matrisini göz önüne alalım.

i. Kare köşegen parçalanış için bu matrisin tersinir olması için gerek ve yeter şart A ve D matrislerinin tersinir olmasıdır ve tersi

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

olur.

ii. Kare köşegen olmayan parçalanış için B matrisi nonsingüler olmak üzere bu matrisin tersinir olması için gerek ve yeter şart $DB^{-1}A$ matris bloğunun tersinir olmasıdır ve tersi

$$\begin{bmatrix} (DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & (DB^{-1}A)^{-1} \\ B^{-1} + B^{-1}A(DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & B^{-1}A(DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

olur.

Kolayca görülür ki bir blok üst üçgensel matrisin tersi sadece kare köşegen parçalanması durumunda yine blok üst üçgensel olacaktır.

Genel olarak kare köşegen olmayan parçalanış için bu doğru değildir. Ayrıca eğer parçalanış gerçekten bir tüm kare parçalanış ise ve A, B, D matrislerinin her biri tersinir ise bu takdirde (3.40)≡(3.39). Benzer şekilde kare köşegen parçalanıştaki blok alt üçgensel matris için

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Kare köşegen olmayan parçalanış için ise

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} C^{-1}D(AC^{-1}D)^{-1} & C^{-1} - C^{-1}D(AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \\ -(AC^{-1}D)^{-1} & (AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}$$

olur. $A = 0$ veya $D = 0$ gibi en fazla iki mümkün durum söz konusudur. Birinci durum için Teorem 3.9 ve Teorem 3.10 aşağıdaki sonuca dönüşür.

Sonuç 3.3. $\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}$ matrisini göz önüne alalım.

i. Kare köşegen olmayan parçalanış için bu matrisin tersinir olması için gerek ve yeter şart B ve C matrislerinin tersinir olmasıdır ve bu durumda tersi

$$\begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

olur.

ii. D matrisi nonsingüler olmak üzere kare köşegen parçalanış için bu matrisin tersinir olabilmesi için gerek ve yeter şart $BD^{-1}C$ matris bloğunun tersinir olmasıdır ve bu durumda tersi

$$\begin{bmatrix} -(BD^{-1}C)^{-1} & (BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ D^{-1}C(BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

olur.

Teoremin birinci kısmında matrisin tersi transpozu alınmış şekilde olduğu halde hala dağınıktır.

İkinci kısımda dağınıklığı genelde bozulacaktır. Üstelik eğer parçalanış gerçekten bir tam kare parçalanış ise B, C ve D matrislerinin her biri tersinir ise (3.41)≡(3.42) olur.

Benzer şekilde kare köşegen olmayan parçalanış için

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}AC^{-1} \end{vmatrix}$$

ve kare köşegen parçalanış için

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} - A^{-1}B(CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & A^{-1}B(CA^{-1}B)^{-1} \\ (CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde parçalanır.

3.6. Yapılandırılmış Matrisler

Bu kısımda temel teoremlerimizi bisimetrik, Hamilton, Hamiltonian, Hankel, Toeplitz, circulant, Hermityan, per-Hermityan, centro-Hermityan ve onların çapraz hermityan matrislerini içeren yapılandırılmış matrislere uygulayacağız. Bir hermityan ya da simetrik matris için doğal parçalanış kare köşe parçalanıştır. Bu köşegen blokların simetrisini korur. Tersine olarak kare köşegen olmayan parçalanış genelde hermityan matrislerin simetrikliğini bozar. Bununla beraber Teorem 3.9 ve Teorem 3.10 yine de tüm kare parçalanmış tek boyutlu hermityan matris için uygulanabilir. Özet olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.4.

i. Bir matrisin hermityan olabilmesi için gerek ve yeter şart o matrisin A ve D hermityan olmak üzere kare köşegen parçalanışta

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & D \end{bmatrix}$$

formunda olmasıdır. Bu durumda bu matrisin tersi istenen tersler mevcutsa

$$\begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - B^*A^{-1}B)^{-1}B^*A^{-1} & -A^{-1}B(D - B^*A^{-1}B)^{-1} \\ -(D - B^*A^{-1}B)^{-1}B^*A^{-1} & (D - B^*A^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

ya da

$$\begin{bmatrix} (A - BD^{-1}B^*)^{-1} & -(A - BD^{-1}B^*)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}B^*(A - BD^{-1}B^*)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}B^*(A - BD^{-1}B^*)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

ile hesaplanabilir.

ii. Tüm kare parçalanmış formdaki

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & D \end{bmatrix}$$

hermityan matrisi gerekli tersler mevcutsa

$$\begin{bmatrix} -(B^* - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & (B^* - DB^{-1}A)^{-1} \\ B^{-1} + B^{-1}A(B^* - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}A(B^* - DB^{-1}A)^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

ve

$$\begin{bmatrix} (B^*)^{-1}D(B - A(B^*)^{-1}D)^{-1} & (B^*)^{-1} + (B^*)^{-1}D(B - A(B^*)^{-1}D)^{-1}A(B^*)^{-1} \\ (B - A(B^*)^{-1}D)^{-1} & -(B - A(B^*)^{-1}D)^{-1}A(B^*)^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

terslerine sahiptir. Burada $(B^*)^{-1} = (B^{-1})^*$ notasyonu kullanılmıştır. Bu sonuçlar Teorem 3.9 ve Teorem 3.10 denklemlerinden elde edilir.

Ayrıca (i) şıkkındaki A^{-1}, $(D - B^*A^{-1}B)^{-1}$, D^{-1} ve $(A - BD^{-1}B^*)^{-1}$ tersleri aynı parçalanış metoduyla da hesaplanabilir. Böylece hermityan matrislerinin terslerini elde etme için bir tekrarlama metodu elde edilmiş olur ki bu metot pratikte ve paralel hesaplamada yaralıdır. Bir hermityan matrisin

$$\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

tersinin de hermityan olduğu bilinmektedir. Bu nedenle kare köşegen parçalanış için E ve H hermityan olup $G = F^*$ olur. Bu gerçek yukarıdaki matris tersi formüllerinden de kontrol edilebilir. Dolayısıla G ve F matris bloklarından yalnız bir tanesini ve E ve H matris bloklarının tamamının hesaplamamız gerekir. Bir özel durum olarak pozitif definit matrisi göz önüne alalım. Pozitif definit matrisler hermityandır. Bu matris

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & D \end{bmatrix}$$

olarak parçalanmış olsun ve onun esas A ve D alt matrisleri de pozitif definit olsun. Dolayısıyla hem A hem de D nonsingülerdir. Böyle bir matrisin tersi (3.43)-(3.46) kullanılarak hesaplanabilir. Bu matrisin ters matrisi pozitif definittir ve dolayısıyla bu ters matrisin esas alt matrisleridir. Bu nedenle (3.43)-(3.46) bağıntılarındaki tüm köşegen bloklar pozitif definittir.

Şimdi çapraz hermityan ya da çapraz simetrik matrise dönelim. Kare köşegen parçalanış çapraz simetrikliği korumak için doğru bir seçimdir. Gerçekten aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.5. Bu matrisin çapraz hermityan olması için gerek ve şart A ve D çapraz hermityan olmak üzere kare köşegen parçalanışta

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -B^* & D \end{bmatrix}$$

gösterime sahip olmasıdır. Bunun tersi (3.35) ve (3.36) bağıntılarından hesaplanabilir. Buna ilaveten tüm kare parçalanış için (3.37) ve (3.38) bağıntıları kullanılabilir. Kolayca görülebilir ki türetilmiş ters matris de çapraz hermityandır. Çift mertebeden bir çapraz simetrik matrisin singüler olması gerektiğinden ve hiçbir terse sahip olmadığından tek mertebeden bir çapraz simetrik matrisin tersini göz önüne almak yeterlidir. Bir bi-simetrik matris A ve D köşegen blokları aynı boyutlu simetrik negatif semi-definit ve

$$\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$$

kalan matrisi çapraz simetrik olmak üzere

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -B^T & D \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

formunda bir reel matristir. Bisimetrik bir matrisin negatif semi-definit olduğunu göstermek mümkündür. Quadratic programlamanın lineer tamamlayıcı problemlerinde ortaya çıkar. Bir bi-simetrik matris tüm kare parçalanış olduğundan Teorem 3.9 ve Teorem 3.10 denklemlerine göre bu matrisin

$$\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

terslerini elde edebiliriz.

Sonuç 3.6. (3.47) ile verilen bi-simetrik matrisin tersi (3.35)-(3.38) bağıntılarına göre hesaplanabilir. (3.35) ve (3.36) denklemleri A ve D farklı boyutta olsa bile sağlanır. Bisimetrik bir matrisin tersi de bi-simetriktir. Bunu görmek için $G = -F^T$ ve E ve H matris bloklarının simetrik olduğunu kontrol edelim. Bu bi-simetrik matris bir terse sahip olduğundan negatif definit olmak zorundadır. Dolayısıyla tersi de negatif definit olmalıdır. E ve H esas alt matrisleri de negatif definit olmalıdır. Bir $R = (r_{ij})$ matrisine per-hermityan denir. Eğer $\forall i, j$ için $r_{ij} = \bar{r}_{n+1-j,n+1-i}$ kısaca j ikinci kısımda tanımlanan matris olmak üzere $R = JR^*J$' dir. Bir reel per-hermityan matris per-simetrik veya ikinci simetrik olarak adlandırılır. Bunun elemanları ikinci köşegenine göre simetriktir. Bir per-hermityan matris için doğal parçalanış kare köşegen olmayan parçalanıştır. Bu köşegen dışındaki blokların simetrikliğini korur. Tersine tüm kare köşegen parçalanış genelde per-hermityan matrisin simetrikliğini bozacaktır.

Sonuç 3.7. Bir matrisin per-hermityan olması için gerek ve yeter şart B ve C per-hermityan olmak üzere kare köşegen olmayan parçalanışta

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & JA^TJ \end{bmatrix}$$

formuna sahip olmasıdır. Bu matrisin tersi (3.37) ve (3.38) kullanılarak hesaplanabilir. Özel olarak eğer parçalanışı tüm kare matris ise bu takdirde (3.35) ve (3.36) bağıntıları da kullanılabilir. Benzer şekilde (3.37) ve (3.38) bağıntılarındaki B^{-1}, $(C - JA^*JB^{-1}A)^{-1}$, C^{-1}, $(B - AC^{-1}JA^*J)^{-1}$ tersleri aynı parçalanış metoduyla ardışık olarak hesaplanabilir.

$$R^{-1} = (JR^*J)^{-1} = J(R^{-1})^*J$$

olduğundan bir per-hermityan R matrisinin

$$\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

tersinin de per-hermityan olduğu kolayca görülür. Bu nedenle kare köşegen olmayan parçalanış için F ve G per hermityan olmak üzere $H = JE^*J$ dir. Bu tüm matris tersi formüllerinden de kolayca kontrol edilebilir. Dolayısıyla E ve H alt matrislerinden yalnız bir tanesini, F ve G alt matrislerinin tamamını hesaplamak gerekir. Eğer $R = -JR^*J$ ise R matrisine çapraz per-hermityan denir.

Sonuç 3.8. Bir matrisin çapraz hermityan olması için gerek ve yeter şart B ve C çapraz per-hermityan olmak üzere kare köşegen olmayan parçalanışta

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & -JA^*J \end{bmatrix}$$

formunda olmasıdır. Bunun tersi (3.37) ve (3.38) bağıntılarından hesaplanabilir. Tüm kare parçalanmış bir matris için (3.35) ve (3.36) bağıntıları da kullanılabilir. Bir reel çapraz per-hermityan matrise genellikle çapraz per-simetrik matris veya ikinci çapraz simetrik matris denir. Çift mertebeden her çapraz per-simetrik matrisin singüler olduğunu dolayısıyla hiçbir terse sahip olmadığını hatırlayalım.

Öncelikle belirtelim ki J matrisinin determinantı 1 veya -1 olur. Dolayısıyla nxn tipindeki çapraz per-simetrik matrisi

$$detR = (-1)^n detJ.detR^T.detJ = (-1)^n detR$$

eşitliğini sağlar. Bu nedenle n çift olduğunda $detR$ yok olur.

Bir Hamilton matris B ve C aynı boyutlu simetrik matrisler olmak üzere

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{bmatrix} \qquad (3.48)$$

formundaki bir matristir.

Böyle bir matris kontrol teorideki cebirsel Ricatti denklemiyle ilgilidir. Bu matris tam kare matris parçalanmış olduğundan hem Teorem 3.9 hem de Teorem 3.10 uygulanabilir.

Sonuç 3.9. (3.48) Hamilton matrisinin tersi (3.35)-(3.38) ile hesaplanabilir. B ve C farklı boyutlu olsa bile (3.37) ile (3.38) bağıntılarının sağladığını belirtelim. Bunun tersi $\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$ olsun. Ters formüllerinden F ve G alt matrislerinin simetrik olduğu ve $H = -E^T$ olduğu kolayca görülür. Bu nedenle bir Hamilton matrisinin tersi de Hamilton matristir. Bir $r_{ij} = \bar{r}_{n+1-i,n+1-j}$ ise başka bir deyişle $r = J\bar{R}J$ olur. Gerçekten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.10. Bir matris tek mertebeli centro-hermiyandır ancak ve ancak A ve B aynı boyutlu olmak üzere

$$\begin{bmatrix} A & BJ \\ J\bar{B} & J\bar{A}J \end{bmatrix}$$

formundadır. Bu tüm kare parçalanışa karşılık geldiğinden bu matrisin tersini hesaplamada (3.35)-(3.38) formüllerinin herbiri kullanılabilir.

$$R^{-1} = J^{-1}\bar{R}^{-1}J^{-1} = J\overline{R^{-1}}J$$

olduğundan bir centro-hermityan matrisin $\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$ tersi de centro-hermityandır. Dolayısıyla E ve H alt matrislerinden yalnız birini ve F ve G alt matrislerinin de birini hesaplamamız yeterlidir. Bir reel centro-hermityan matrise merkezi simetriktir denir ve elemanları matrisin merkezine göre simetriktir. Tek mertebeli her merkezi simetrik matris bir blok köşegen matrise benzerdir. Yani

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & J \\ -I & J \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

olmak üzere (3.49) bağıntısının üstüdür. Sonuç 3.10 denklemine ilaveten eğer bu matrisin tersi mevcutsa Sonuç 3.1 in i bağıntısına göre (3.49) bağıntısı

$$K^{-1}\begin{bmatrix} A+B & 0 \\ 0 & A-B \end{bmatrix}^{-1} K = K^{-1}\begin{bmatrix} (A+B)^{-1} & 0 \\ 0 & (A-B)^{-1} \end{bmatrix}^{-1} K$$

altı ile hesaplanabilir. Çift mertebeden bir merkezi simetrik matris için benzer bir sonuç verebiliriz. Böyle bir matris A ve B aynı boyutlu matrisler x ve y sütun vektörleri ve r bir skaler olmak üzere

$$\begin{bmatrix} A & x & BJ \\ y^T & r & y^TJ \\ JB & Jx & JAJ \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilebilir.

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & 0 & J \\ 0 & 1 & 0 \\ -I & 0 & J \end{bmatrix}$$

olsun. Bu takdirde

$$R = \begin{bmatrix} A & x & BJ \\ y^T & r & y^TJ \\ JB & Jx & JAJ \end{bmatrix}$$

olup Sonuç 3.1 in i bağıntısına göre

$$R^{-1} = K^{-1}\begin{bmatrix} A+B & 2x & 0 \\ y^T & r & 0 \\ 0 & 0 & A-B \end{bmatrix} K$$

elde edilir. $2x2$ tipindeki blok matrisin üst sol tersi önceki gibi hesaplanabilir. Daha açık olması için Teorem 3.9 i bağıntısına uygun olarak eğer $A+B$ tersinir ve

$$t = r - 2y^T(A+B)^{-1}x \neq 0$$

ise bu takdirde $p = 2(A+B)^{-1}x$ ve $q^T = y^T(A+B)^{-1}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} A+B & 2x \\ y^T & r \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{t}\begin{bmatrix} t(A+B)^{-1}+pq^T & -p \\ -q^T & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Öte yandan Teorem 3.10 ii bağıntısından eğer $r \neq 0$ ve $M = (A+B) - \frac{2}{r}xy^T$ nonsingüler ise

$$\begin{bmatrix} A+B & 2x \\ y^T & r \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{r^2}\begin{bmatrix} r^2M^{-1} & -2rM^{-1}x \\ ry^TM^{-1} & r+2y^TM^{-1}x \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde eğer $R = -J\bar{R}J$ aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.11. Bir matris tek mertebeden çapraz centro-hermityan matrisdir ancak ve ancak tüm kare parçalanışta

$$\begin{bmatrix} A & BJ \\ -J\bar{B} & -J\bar{A}J \end{bmatrix}$$

formuna sahiptir. Bu nedenle böyle bir matrisin tersini hesaplamak için (3.35)-(3.38) kullanılabilir. Bu matrisin tersi de çapraz centro-hermityan matris olduğundan tersinin sadece ikinci bloğunu hesaplamak yeterlidir. Bir reel çapraz centro-hermityan matrise aynı zamanda çapraz merkezi simetriktir denir. Tek mertebeli çapraz centro-hermityan matris aşağıdaki parçalanışa sahiptir. K , (3.49) bağıntısındaki gibi olmak üzere

$$\begin{bmatrix} A & BJ \\ -J\bar{B} & -J\bar{A}J \end{bmatrix} = -K^{-1}\begin{bmatrix} 0 & A-B \\ A+B & 0 \end{bmatrix}K$$

olup bu matrisin tersi Sonuç 3.1 ii bağıntısına uygun olarak

$$-K^{-1}\begin{bmatrix} 0 & A-B \\ A+B & 0 \end{bmatrix}^{-1}K = -K^{-1}\begin{bmatrix} 0 & (A+B)^{-1} \\ (A-B)^{-1} & 0 \end{bmatrix}K$$

olur. Çift mertebeden bir çapraz merkezi simetrik matris daima singülerdir. Dolayısıyla hiçbir terse sahip değildir. Bu durum

$$detR = (-1)^n detJ.detR.detJ$$

eşitliğiyle görülebilir.

Yukarıda verdiğimiz formüller diğer yapılandırılmış matrisler için de kullanılabilir. Örneğin; tüm Hankel matrisler simetriktir. Dolayısıyla terlerini hesaplamada Sonuç

3.4 ve kare köşegen parçalanışı kullanmak gerekir. Tek mertebeden Hankel matrisler için tüm kare parçalanış en iyi seçimdir ve buna göre $\begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}$ formundadır. Buna göre (3.35)-(3.38) bağıntılarının her biri kullanılabilir.

Toeplitz ve circulant matrisler otomatik olarak persimetriktir. Dolayısıyla kare köşegen olmayan parçalanış ve Sonuç 3.7 ilk seçimdir. Tek mertebeli bu iki tip matris için tüm kare parçalanış en iyi kullanımdır. Bu durumda Toeplitz matris $\begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix}$ formundadır ve circulant matris $\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$ olarak sadeleştirilebilir.

4. TERSLERİNİN DURUMUNA GÖRE MATRİS TAMAMLAMA

4.1. Tersinin Bazı Blokları Bilindiğinde Matrisi Tamamlama

A_{11}, pxq tipinde bir matris olmak üzere

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

nxn tipinde bir matris olsun. Eğer A nonsingüler ise A^{-1} matrisinin

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

şeklinde parçalandığını varsayalım.

İlk olarak A_{11} ve B_{22} sıfırlıklarının eşit olduğunu göstereceğiz. Bu sonucu kullanarak nxn tipindeki A matrisinin her köşegeninin bir sıfır elemanını içermesi için gerek ve yeter koşul $p + q = n + 1$ olmak üzere A matrisinin pxq tipinde bir sıfır alt matrisine sahip olmasıdır. D. König tarafından verilen teoremin bir kısmını genelleştirebiliriz. Gerçekten Teorem 4.5' te B pxq tipinde r ranklı bir matris olmak üzere B'nin nxn tipinde nonsingüler bir matrise tamamlanabilmesi için gerek ve yeter koşulun $n \geq p + q - r$ olduğunu göstereceğiz.

Bu çalışmanın geri kalan kısmı aşağıdaki tamamlama problemiyle ilgilidir. Farz edelim ki

$$m_1 + m_2 = n_1 + n_2 = n > 0$$

olacak şekilde negatif olmayan tamsayılar olsun. A_{11}, A_{12}, A_{21} ve A_{22} matrisleri sırasıyla m_1xn_1, m_1xn_2, m_2xn_1 ve m_2xn_2 boyutlu matrisler olsun. Bu takdirde

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

matrisi nonsingüler ve B_{22}, A^{-1}' in parçalanışının sağ alt bloğu olacak şekilde m_2xn_2 tipinde bir A_2 matrisinin mevcut olması için gerek ve yeter şartları belirleyeceğiz. Burada bu sonucun özel kısımlarının literatürde bulunabileceğini belirtelim.

Blattner A, mxn tipinde bir kompleks matris U, sütunları A^* matrisinin sıfır uzayı için bir taban olacak şekilde $mx(m - r)$ tipinde tam sütun ranklı bir matris ve V de sütunları A' nın sıfır uzayı için bir taban olacak şekilde $nx(n-r)$ tipinde tam sütun ranklı bir matris ise

$$\begin{bmatrix} A & U \\ V^* & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin nonsingüler olduğunu ve A^+ A'nın Moore-Penrose inversini göstermek üzere tersinin

$$\begin{bmatrix} A^+ & (V^*)^+ \\ (U)^+ & 0 \end{bmatrix}$$

olduğunu göstermiştik. Burada hatırlatalım ki A mxn tipinde herhangi bir matris ve X de nxm tipinde

i. $AXA = A$
ii. $XAX = X$
iii. $(AX)^* = AX$
iv. $(XA)^* = XA$

koşullarını sağlayan bir matris ise X' e A matrisinin Moore-Penrose inversi adı verilir. Blattner'in sonucuna benzer diğer sonuçlar Reid ve Ben-Israel'in çalışmalarında bulunabilir.

Teorem 4.1. n_1, n_2 pozitif tamsayı olmak üzere $n_1 + n_2 = n$ olsun. Eğer A_1 nxn_1 tipinde bir matris ve B_2 n_2xn tipinde bir matris ise

$$(A_1 \quad A_2)\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = I \tag{4.1}$$

olacak şekilde nxn_2 tipinde bir A_2 matrisi ve n_1xn tipinde bir B_1 matrisinin bulunabilmesi için gerek ve yeter şart

$$rank(A_1) = n_1 \tag{4.2}$$

$$rank(B_2) = n_2 \tag{4.3}$$

$$B_2A_1 = 0 \tag{4.4}$$

olmasıdır. Eğer (4.2) ve (4.4) koşulları sağlanırsa bu takdirde A_2, B_2'nin herhangi bir B_2^+ olarak yani

$$B_2B_2^+ = I_n \tag{4.5}$$

İspat. Eğer (4.1)' i sağlayan A_2 ve B_1 matrisleri mevcutsa bu takdirde $\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}(A_1 \quad A_2) = I$ olduğundan (4.2) ve (4.4) koşulları sağlanır.

Tersine olarak (4.2) ve (4.4) sağlansın ve B_2^+ (4.5) bağlantısını gerçeklesin. İlk olarak $(A_1 \quad B_2^+)$ matrisinin nonsingüler olduğunu gösterelim.

Eğer bu matris nonsingüler değilse herhangi bir $y^T \neq 0$ için $y^T(A_1 \quad B_2^+) = 0$ olacaktır. $B_2A_1 = 0$ ve $rank(B_2) = n - n_1$ olduğundan $y^TA_1 = 0$ olması herhangi bir z^T için $y^T = z^TB_2$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde $y^TB_2^+ = 0$ olduğundan $z^TB_2B_2^+ = 0$ elde edilir ki buradan (4.5) bağıntısına göre $z^T = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $y^T = 0$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Şimdi

$$VA_1 = 0 \tag{4.6}$$

$$VB_2^+ = I_{n_2} \tag{4.7}$$

bağıntıları sağlanmak üzere

$$(A_1 \quad B_2^+)^{-1} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

alalım. Bu takdirde yine (4.6) bağıntısından Q, n_2xn_2 tipinde matris olmak üzere $V = QB_2$ şeklinde yazılabileceği görülür. Öte yandan (4.7)' ye göre $QB_2B_2^+ = I_{n_2}$ olur. Bu nedenle (4.5) bağıntısından $Q = I$ ve $V = B_2$ olduğu görülür. Böylece B_1 matrisi U olarak seçilir.

Teorem 4.2. Nonsingüler bir A matrisinin bir parçalanışı (simetrik olması gerekmez)

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

olsun ve

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

matrisi ise A^{-1}' in A' nın parçalanışına uygun bir parçalanışı olsun. Bu takdirde $n(A_{11})$ ve $n(B_{22})$ uzayları birbirine eşittir.

İspat.

$$\begin{bmatrix} B_{22} & B_{21} \\ B_{12} & B_{11} \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} A_{22} & A_{21} \\ A_{12} & A_{11} \end{bmatrix}$$

matrisleri birbirinin inversi olduğundan $n(A_{11}) \leq n(B_{22})$ olduğunu kabul edebiliriz. Eğer $n(B_{22}) = 0$ ise $n(A_{11}) = 0$ olması gerekir. Bu durumda ispat tamamlanır. Böylece $c > 0$ için $n(B_{22}) = c$ alalım. Bu takdirde $B_{22}F = 0$ koşulunu sağlayan c tane lineer bağımsız sütuna sahip bir F matrisi mevcuttur. Dolayısıyla

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0$$

bağlantısını kullanarak

$$A_{11}B_{12}F = 0 \tag{4.8}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = I_2$$

denkleminden

$$A_{21}B_{12}F = F$$

ve dolayısıyla

$$rank(B_{12}F) > c$$

olduğu görülür. (4.8) eşitliği göz önüne alınırsa

$$n(A_{11}) \geq rank(B_{12}F) \geq c \geq n(B_{22})$$

olur ki; bu da $n(A_{11}) = n(B_{22})$ olduğunu gösterir.

Sonuç 4.1. A_{11} nxn tipindeki nonsingüler bir A matrisinin pxq tipinde bir alt matrisi olsun. Bu takdirde A^{-1}' in B_{22} tamamlayıcı alt matrisi, $rank(A_{11})$, A_{11}' in rankı olmak üzere

$$rank(B_{22}) = rank(A_{11}) + n - p - q \tag{4.9}$$

rankına sahiptir.

İspat. B_{22} , $(n-q)x(n-p)$ tipinde olduğundan dolayı A_{11} ve B_{22} ' nin sıfırlayıcıları

$$n(A_{11}) = q - rank(A_{11})$$

$$n(B_{22}) = n - p - rank(B_{22})$$

eşitliklerini sağlar. Böylece Teorem 4.2' den (4.9) eşitliği elde edilir.

Sonuç 4.2. nxn tipinde nonsingüler bir matrisin pxq tipindeki bir alt matrisinin rankı için daima

$$r \geq p + q - n \tag{4.10}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. İnversin tamamlayıcı alt matrisi en azından sıfır rank' ına sahip olacağından iddia (4.10)' dan kolayca görülür.

Teorem 4.3. pxq tipindeki r ranklı bir B matrisinin nxn tipindeki bir nonsingüler matrise tamamlanabilir olması için gerek ve yeter şart

$$n \geq p + q - r \tag{4.11}$$

olmasıdır. $n_0 = p + q - r$ için eğer

$$A = \begin{pmatrix} B & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

matrisi $n_0 x n_0$ tipinde nonsingüler bir matris ise A^{-1} de B ' yi tamamlayan matrisin sıfır alt matrisidir. Ayrıca $B_{22} = 0$ olacak şekilde (4.12) formunda nonsingüler bir A matrisi mevcuttur. P, pxq ve Q da rxq tipinde matrisler olmak üzere $B = PQ$ olsun. Bu takdirde eğer B_{12} ve B_{21} matrisleri

$$det(P \quad B_{12}) \neq 0 \tag{4.13}$$

$$det\begin{pmatrix} Q \\ B_{21} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{4.14}$$

bağıntılarını sağlarsa böyle bir matris (4.12)'deki gibi elde edilir. Bu durumda eğer

$$(P \quad B_{12})^{-1} = \begin{pmatrix} S \\ C_{21} \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

$$\begin{pmatrix} Q \\ B_{21} \end{pmatrix}^{-1} = (R \quad C_{12}) \tag{4.16}$$

eşitlikleri sağlanırsa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} RS & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eğer B matrisi nxn tipindeki nonsingüler bir matrise tamamlanabilirse (4.10) bağıntısına göre (4.11) eşitsizliği sağlanır. Tersini göstermek için n_0xn_0 tipinde bir matrisin varlığını ispatlamak yeterlidir. Sıfır alt matris hakkındaki iddia (4.9)' dan kolayca sağlandığından eğer (4.17)' yi ispatlayabilirsek ispat tamamlanacaktır. Eğer $B_{22} = 0$ ve P ve Q matrisleri sırasıyla pxr, rxq tipinde olmak üzere $B = PQ$ ise (4.12) bağıntısı

$$A = \begin{pmatrix} PQ & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. (4.13) ve (4.14) varsayımları altında

$$\begin{pmatrix} PQ & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & B_{12} & 0 \\ 0 & 0 & I_{q-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_{p-r} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

eşitliği ve (4.15) bağıntısından iddia edildiği gibi (4.16) 'nın

$$\begin{pmatrix} PQ & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} R & 0 & C_{12} \\ 0 & I_{p-r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ C_{21} & 0 \\ 0 & I_{q-r} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} RS & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

eşitliğini sağladığı görülür.

Teorem 4.4. m_1, m_2, n_1, n_2

$$m_1 + m_2 = n_1 + n_2 = n > 0$$

olacak şekilde negatif olmayan tamsayılar olsun. A_{11}, A_{12}, A_{21}, B_{22} sırasıyla m_1xn_1, m_1xn_2 , m_2xn_1 , m_2xn_2 boyutlu matrisler olsun. Bu takdirde (4.18) matrisi nonsingüler ve B_{22}, A^{-1}' in sağ alt bloğu olacak şekilde m_2xn_2 tipinde bir A_{22} matrisinin mevcut olması için gerek ve yeter şart (4.19)-(4.23) koşullarının her birinin sağlanmasıdır.

$$rank\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix} = m_1 \tag{4.19}$$

$$rank\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} = n_1 \tag{4.20}$$

$$n_1 - rank(A_{11}) = m_2 - rank(B_{22}) \tag{4.21}$$

olur. Eğer $r = rank(A_{11})$, P matrisi $m_1 x r$, Q matrisi $r x n_1$ tipinde olmak üzere $A_{11} = PQ$ ve $s = rank(B_{22})$, R matrisi $n_1 x s$, S matrisi $s x m_1$ tipinde olmak üzere $B_{22} = RS$ ise bu takdirde

$$A_{12}R = PH \tag{4.22}$$

$$SA_{21} = KQ \tag{4.23}$$

olacak şekilde sırasıyla rxs ve sxr tipinde H ve K matrisleri mevcuttur. Eğer (4.19) ve (4.20) şartları sağlanırsa (4.18)' deki A matrisi nonsingüler olacak şekilde bir A_{22} matrisi mevcut olup

$$rank(A_{22}) \leq rank(B_{22}) \tag{4.24}$$

ve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

için

$$rank(B_{11}) \leq rank(A_{11}) \tag{4.25}$$

olur. Böyle bir seçim R^+, S^+ matrisleri $R^+R = I_s$ ve $SS^+ = I_s$ eşitliklerini sağlayan keyfi matrisler olmak üzere

$$A_{22} = S^+(I_s + \mathrm{KH})R^+ \tag{4.26}$$

şeklinde verilebilir. Bu takdirde B_{11}, B_{12}, B_{21} matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A_1 = \begin{pmatrix} Q \\ A_{21} \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} -K & S \end{pmatrix}$$

matrisleri Teorem 4.1' deki (4.1)-(4.4) şartlarını sağlar.

$$B_2^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ S^+ \end{pmatrix}$$

seçilerek (4.5) sağlanır ve

$$\begin{pmatrix} Q & S \\ A_{21} & S^+ \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Q^+ & \widetilde{A}_{12} \\ -K & S \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

olacak şekilde Q^+ ve $\widetilde{A}_{12}$ matrisleri mevcuttur. Benzer şekilde R^+' nın yukarıdaki seçimi için

$$\begin{pmatrix} P & A_{12} \\ 0 & R^+ \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} P^+ & -H \\ \widetilde{A}_{21} & R \end{pmatrix} \qquad (4.28)$$

olacak şekilde P^+ ve $\widetilde{A}_{21}$ matrisleri de mevcuttur. Bu takdirde

$$B_{11} = Q^+(I \quad HK)P^+ \qquad (4.29)$$

$$B_{12} = \widetilde{A}_{12} - Q^+HS \qquad (4.30)$$

$$B_{21} = \widetilde{A}_{21} - RKP^+ \qquad (4.31)$$

olur.

HATIRLATMA: Eğer $r = 0$ ve/veya $s = 0$ ise iddia ispatlanacağı gibi gerçeklenir. $r = 0$ durumunda P, Q, H, K matrisleri P^+, Q^+ geçersiz olarak göz önüne alınacak şekilde seçilir ve (4.22),(4.23), (4.26) v.b'de PH, KQ, KH, S^+K v.b şeklindeki tüm çarpanlar sıfır matrisleri olarak alınır. Bu durumun formülasyonu Sonuç 4.3 olur. Eğer $s = 0$ ve $r \neq 0$ ise $B_{22} = 0$' dır. Dolayısıyla (4.22), (4.23) şartları geçersizdir. (4.24)' den $A_{22} = 0$, A_1 kare matris ve $B_{12} = \widetilde{A}_{12}$ ve $B_{21} = \widetilde{A}_{21}$ alınır. Eğer $r = s = 0$ ise (4.21)'e göre $n_1 = m_2$ ve $n_2 = m_1$ olup A_{12} ve A_{21} matrislerinin her ikiside kare nonsingülerdir. (4.24) bağıntısından $A_{22} = 0$, (4.25) bağıntısından $B_{11} = 0$ ve $B_{21} = A_{12}^{-1}$, $B_{12} = A_{21}^{-1}$ olduğu görülür.

İspat. (4.18) nonsingüler bir matris ve B_{22}, A^{-1}'in karşılık gelen matrisi olacak şekilde m_2xn_2 tipinde A_{22} matrisi mevcutsa (4.19) ve (4.20) bağıntısı sağlanır. Öte yandan Sonuç 4.1' e göre (4.21) sağlanır. (4.22) ve (4.23)' ün sağlandığını göstermek için P, Q, R, S matrisleri teoremdeki gibi tanımlanmış olsun ve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

olsun. Bu takdirde

$$A_{12}B_{22} = -A_{11}B_{12}$$

eşitliğinden

$$A_{12}RS = -PQB_{12}$$

elde edilir. Bu eşitliği $SS^+ = I_S$ koşulunu sağlayan herhangi bir S^+ matrisiyle sağdan çarparak $H = -QB_{12}S^+$ için (4.22) bağıntısı elde edilir. Benzer şekilde

$$B_{22}A_{21} = -B_{21}A_{11}$$

eşitliği

$$RSA_{21} == -B_{21}PQ$$

olarak yazılabilir. Bu son eşitliği $R^+R = I_S$ koşulunu sağlayan herhangi bir R^+ matrisiyle soldan çarparak $K = -R^+B_{21}P$ için (4.23) bağıntısı elde edilir.

Ters yönde ispat için (4.26) ile verilen A_{22} için (4.29)-(4.31) şartlarının (4.24) ve (4.25)' i sağlayan A' nın inversine yol açtığını göstermek yeterlidir. (4.24) ve (4.25), (4.26) ve (4.29) ' un sonuçları olduğundan (4.27) ve (4.28) ile tanımlanan $P^+, Q^+, \widetilde{A}_{21}, \widetilde{A}_{12}$ için

$$\begin{pmatrix} PQ & A_{12} \\ A_{21} & S^+(I_S + KH)R^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^+(I_r + HK)P^+ & \widetilde{A}_{12} - Q^+HS \\ \widetilde{A}_{21} - RKP^+ & RS \end{pmatrix} = I \tag{4.32}$$

olduğunu göstereceğiz. (4.28)'e göre

$$\begin{aligned} &PQQ^+(I_r + HK)P^+ + A_{12}(\tilde{A}_{21} - RKP^+) \\ &\qquad = P(I_r + HK)P^+ + (I - PP^+) - A_{12}RKP^+ \\ &\qquad = I + PHKP^+ - PHKP^+ = I \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (4.27)'e göre $Q\tilde{A}_{12} = 0$ olduğundan

$$PQ\big(\tilde{A}_{12} - Q^+HS\big) + A_{12}RS = -PHS + PHS = 0$$

Böylece (4.28)'e göre $R^+\widetilde{A}_{21} = 0$, (4.27)'e göre $A_{21}Q^+ = S^+K$ olup

$$\begin{aligned} &A_{21}Q^+(I_r + HK)P^+ + S^+(I_r + KH)R^+\big(\widetilde{A}_{21} - RKP^+\big) \\ &\qquad = S^+K(I_r + HK)P^+ - S^+(I_r + KH)R^+RKP^+ = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3. m_1, m_2, n_1, n_2

$$m_1 + m_2 = n_1 + n_2 = n > 0$$

koşulunu sağlayan nonnegatif tamsayılar olsun. A, B, C matrisleri sırasıyla $m_1xn_2, m_2xn_1, n_2xm_2$ tipinde matrisler olsun. Bu takdirde

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & X \end{pmatrix}$$

nonsingüler ve C, Z^{-1}'in sağ alt matrisi olacak şekilde bir m_2xn_2 tipinde bir X matrisinin mevcut olması için gerek ve yeter şart $s = m_2 - n_1$ için

$$rank(A) = m_1, \quad rank(B) = n_1 \tag{4.33}$$

P matrisi $n_2 x s$ ve Q matrisi $s x m_2$ tipinde olduğunda

$$rank(C) = s \text{ ve } \quad c = PQ \tag{4.34}$$

$$AC = 0 \tag{4.35}$$

ve

$$CB = 0 \tag{4.36}$$

olmasıdır. Eğer tüm şartlar sağlanırsa X matrisi P^+, Q^+

$$P^+P = I_s \qquad QQ^+ = I_s$$

şartlarını sağlayan keyfi alt matrisler olmak üzere

$$X = Q^+P^+ \tag{4.37}$$

olarak seçilebilir. X' in bu seçimi ile U matrisi Teorem 4.1' e göre

$$\begin{pmatrix} B & Q^+ \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} U \\ Q \end{pmatrix}$$

şartlarını sağlayan bir matris ve benzer şekilde V' de

$$\begin{pmatrix} A \\ P^+ \end{pmatrix}^{-1} = (V \quad P)$$

şartını sağlayan bir matris olmak üzere

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & X \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & U \\ V & C \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

İspat. İspat $r = 0$ için Teorem 4.4' ten kolayca elde edilir.

4.2. 2x2 Tipinde Simetrik Blok Matrisleri Tamamlama ve Tersi

Aşağıdaki tamamlama problemlerini göz önüne alalım. n_1, n_2

$$n_1 + n_2 = n > 0$$

olacak şekilde nonnegatif tamsayılar olsun.

A_{11}, A_{12}, A_{21}, B_{22} sırasıyla $n_1 x n_1$, $n_1 x n_2$. $n_2 x n_1$ ve $n_2 x n_2$ boyutlu matrisler olsun. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

olacak şekilde $n_2 x n_2$ A_{22} matrisinin ve ayrıca

i. A nonsingüler ve simetrik ve B_{22}, A^{-1}' in parçalanışının sağ alt bloğudur,

ii. A simetrik pozitif tanımlı ve B_{22}, A^{-1}' in parçalanışının sağ alt bloğudur,

matrislerinin mevcut olması için gerek ve yeter şartları belirleyeceğiz.

$\mathbb{R}^{mxn}$, mxn tipindeki reel matrislerin kümesini göstersin ve T üstindisi transpozu göstermek üzere

$$\mathbb{R}_r^{mxn} = \{A \in \mathbb{R}^{mxn}: rank(A) = r\}$$

$$S\mathbb{R}^{nxn} = \{A \in \mathbb{R}^{nxn}: A^T = A\}$$

olsun. A pozitif sıfır gösterimi A' nın simetrik pozitif definit olmasını I_n ise n-yinci mertebeden birim matrisi göstersin. Bir yanlış anlama olmadıkça n alt indisini genel olarak kullanmayacağız. $A^+ + A$ matrisinin Moore-penrose genelleştirilmiş inversini gösterir. Fieldler ve Markham $\mathbb{R}^{nxn}$'deki bir A matrisi için aşağıdaki tamamlama problemini ele almıştır. m_1, m_2, n_1, n_2

$$m_1 + m_2 = n_1 + n_2 = n > 0$$

olacak şekilde nonnegatif tamsayılar olsun.

$A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 x n_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 x n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 x n_1}$, $B_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 x n_2}$ olsun. $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ matrisi nonsingüler ve B_{22}, A^{-1}'in transpozu alınmış parçalınışının alt sağ bloğu olsun. Problemin çözümünün varlığı için gerek ve yeter şartlar Bai Z.-Z.(2006) verilmiştir. Bu çalışmada simetrik ve simetrik pozitif-definit matrislerle ilgili aşağıdaki tamamlama problemleri göz önüne alınmıştır. Farz edelim ki n_1, n_2 $n_1 + n_2 = n > 0$ olacak şekilde negatif olmayan tamsayılar olsun. $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 x n_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 x n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 x n_1}$ ve $B_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 x n_2}$ olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde bir $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 x n_2}$ matrisini belirleyelim.

1) (4.38) formundaki A parçalı matrisi nonsingüler ve simetrik ve B_{22}, A^{-1}' in parçalanışın alt sağ bloğudur.
2) (4.38) formundaki A parçalı matrisi simetrik pozitif definit ve B_{22}, A^{-1}' in parçalanışın alt sağ bloğudur.

Yukarıdaki problemlerin çözümü için gerek ve yeter şartlar verip problemin çözümü için ifade vereceğiz.

Bu çalışmanın amacı aşağıdaki sonuçları vermektir.

Teorem 4.5. n_1, n_2 sayıları $n_1 + n_2 = n > 0$ olacak şekilde negatif olmayan tamsayılar ve $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 x n_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 x n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 x n_1}$, $B_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 x n_2}$ olsun. Bu takdirde

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

matrisi nonsingüler ve simetrik ve B_{22}, A^{-1}' in sağ alt bloğu olacak şekilde bir $A_{22} \in S\mathbb{R}^{n_2 x n_2}$ matrisinin mevcut olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$A_{11}^T = A_{11}, \quad A_{21} = A_{12}^T, \quad B_{22}^T = B_{22} \tag{4.40}$$

$$rank(A_{11} \quad A_{12}) = n_1 \tag{4.41}$$

$$n_1 - rank(A_{11}) = n_2 - rank(B_{22}) \tag{4.42}$$

$$range(A_{12} \quad B_{22}) \subseteq range(A_{11}) \tag{4.43}$$

ifadelerinin sağlanmasıdır. Bu durumda A_{11} ve B_{22}' nin spektral ayrışımları

$$A_{11} = QDQ^T = Q \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^T \tag{4.44}$$

$$B_{22} = U\Lambda U^T = U \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T \tag{4.45}$$

olur. Burada $Q = (Q_1 \quad Q_2) \in \mathbb{R}^{n_1 x n_1}$ ve $U = (U_1 \quad U_2) \in \mathbb{R}^{n_2 x n_2}$ ortogonal matrisler

$$D_1 = diag(d_1\, d_2 \ldots d_r), d_i \neq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, r), \ r = rank(A_{11}) \tag{4.46}$$

$$\Lambda_1 = diag(\boldsymbol{\lambda}_1\, \boldsymbol{\lambda}_2 \ldots \ \boldsymbol{\lambda}_r), \ \boldsymbol{\lambda}_i \neq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, s), \ s = rank(B_{22}) \tag{4.47}$$

$Q_1 \in R^{n_1 xr}, U_1 \in \mathbb{R}^{n_2 xs}$ dir.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \tag{4.48}$$

alalım. Bu takdirde A_{22}, B_{11}, B_{12} matrisleri

$$\begin{aligned} A_{22} = {} & B_{22}^{+} + A_{12}^T A_{11}^{+} A_{12} - U_2 U_2^T A_{12}^T A_{11}^{+} A_{12} U_2 U_2^T + B_{22}^{+} \widehat{H}^T A_{12} + A_{12}^T \widehat{H} B_{22}^{+} \\ & + U_2 G U_2^T \end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned} B_{11} = {} & A_{11}^{+} + A_{11}^{+} A_{12} B_{22} A_{12}^T A_{11}^{+} + A_{11}^{+} A_{12} \widehat{H}^T + \widehat{H} A_{12}^T A_{11}^{+} + \widehat{H} B_{22}^{+} \widehat{H}^T \\ & - A_{11}^{+} A_{12} U_2 (Q_2^T A_{12} U_2)^{-1} Q_2^T - Q_2 (U_2^T A_{12}^T Q_2)^{-1} U_2^T A_{12}^T A_{11}^{+} \\ & + Q_2 (U_2^T A_{12}^T Q_2)^{-1} (U_2^T A_{12}^T A_{11}^{+} A_{12} U_2 - G)(Q_2^T A_{12} U_2)^{-1} Q_2^T \end{aligned} \tag{4.50}$$

$$B_{12} = -A_{11}^{+}A_{12}B_{22} + Q_2\left(U_2^T A_{12}^T Q_2\right)^{-1} U_2^T - \widehat{H} \tag{4.51}$$

şeklinde elde edilir. Burada $G \in \mathbb{R}S^{(n_2-s)x(n_2-s)}$ ve $H \in \mathbb{R}^{(n_1-r)xs}$ olmak üzere

$$\widehat{H} = Q_2 H U_1^T \tag{4.52}$$

dir.

Sonuç 4.4. n_1, n_2 Teorem 4.5' teki gibi tanımlanmış olsun. Bu takdirde (4.39) bağıntısındaki A matrisi nonsingüler ve simetrik ve B_{22}, A^{-1}' in alt sağ bloğu olacak şekilde bir tek A_{22} eleman matrisinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul

$$A_{11}^T = A_{11}, \quad A_{21} = A_{12}^T, \quad B_{22}^T = B_{22} \tag{4.53}$$

$$rank(A_{11}) = n_1,\ rank(B_{22}) = n_2 \tag{4.54}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Bu durumda çözüm

$$A_{22} = B_{22}^{-1} + A_{12}^T A_{11}^{-1} A_{12} \tag{4.55}$$

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} B_{22} A_{12}^T A_{11}^{-1} \tag{4.56}$$

$$B_{12} = A_{11}^{-1} A_{12} B_{22} \tag{4.57}$$

ile verilir.

Sonuç 4.5. n_1, n_2 Teorem 4.5' teki gibi tanımlanmış olsun. Bu takdirde (4.39) bağıntısındaki A matrisi simetrik pozitif definit ve B_{22}, A^{-1}' in alt sağ bloğu olacak şekilde bir A_{22} eleman matrisinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul

$$A_{11} > 0, \qquad A_{21} = A_{12}^T, \quad B_{22} > 0 \tag{4.58}$$

olmasıdır. Bu durumda çözüm yine (4.55)-(4.57) ile verilir.

Teoremin ispatına geçmeden önce aşağıdaki bilinen lemmaları verelim.

Lemma 4.1. A_{11}, nxn tipindeki nonsingüler A matrisinin pxq tipinde bir alt matrisi olsun. Bu takdirde A^{-1}' in B_{22} tamamlayıcı alt matrisi

$$rank(B_{22}) = rank(A_{11}) + n - p - q \tag{4.59}$$

rankına sahiptir.

Lemma 4.2. $E \in \mathbb{R}^{mxn}$ ve $F \in \mathbb{R}^{mxn}$ ve E matrisinin singüler değer ayrışımı

$U = (U_1 \quad U_2) \in \mathbb{R}^{mxm}$ ve $V = (V_1 \quad V_2) \in \mathbb{R}^{nxn}$ ortogonal matrisler

$\Sigma = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, $\sigma_i > 0$ $(i = 1, \ldots, r)$, $r = rank(E)$, $U_1 \in \mathbb{R}^{mxr}$, $V_1 \in \mathbb{R}^{nxr}$

olmak üzere

$$E = U \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{V}^{\mathrm{T}}$$

olsun. Bu takdirde $EX = F$ matris denkleminin bir $X \in S\mathbb{R}^{nxn}$ simetrik çözümüne sahip olması için gerek ve yeter şart

$$EF^T = DE^T, \ \ U_2^T F = 0 \tag{4.60}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Bu durumda bir genel simetrik çözüm $G \in SR^{(n-r)x(n-r)}$ keyfi bir simetrik matris olmak üzere

$$X = V_1 \Sigma^{-1} U_1^T F + V_2 V_2^T F^T U_1 \Sigma^{-1} V_1^T + V_2 G V_2^T \tag{4.61}$$

şeklindedir.

Lemma 4.3. Bir reel matris

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ F^T & \mathrm{G} \end{pmatrix}$$

şeklinde parçalanmış olsun. Burada E ve G kare matrisleridir. Bu takdirde bu matrisin simetrik pozitif definit olması için gerek ve yeter şart $E > 0$ ve $G - F^T E^{-1} F > 0$ olmasıdır.

Lemma 4.4. nxn tipindeki nonsingüler bir matrisin pxp'lik bir alt matrisinin r rankı daima $r \geq p + q - n$ eşitsizliğini sağlar.

Şimdi teoremin ispatına geçelim.

Eğer (4.39)'deki A matrisi nonsingüler ve simetrik ve B_{22}, A^{-1}'in karşılık gelen bloğu olacak şekilde bir $A_{22} \in S\mathbb{R}^{n_2 x n_2}$ varsa bu takdirde (4.40) ve (4.41) bağıntıları sağlanır. Dolayısıyla Lemma 4.1' den (4.42) bağıntısı da sağlanır. (4.39), (4.48) ve $AA^{-1} = I$ bağıntıları göz önüne alınırsa

$$A_{12} B_{22} = -A_{11} B_{12}$$

elde edilir. Bu takdirde $ranj(A_{12} \quad B_{22}) = ranj[A_{11}(-B_{12})] \subseteq ranj(A_{11})$ olur. Dolayısıyla (4.43) bağıntısı da sağlanır. Tersi yönde ispat için (4.39)' deki A matrisi nonsingüler ve simetrik ve B_{22}, A^{-1}' in alt sağ bloğu olacak şeklide n_2xn_2 tipinde simetrik bir A_{22} matrisi oluşturmak yeterlidir. (4.43) ve (4.44) ' den

$$ranj(A_{12} \quad B_{22}) \subseteq ranj(Q_1)$$

elde edilir. Dolayısıyla $Q_2^T A_{12} B_{22} = 0$' dır. (4.45) bağıntısı göz önüne alınırsa

$$Q_2^T A_{12} U_1 = 0 \tag{4.62}$$

elde edilir. (4.44), (4.45) ve (4.62)' den

$$Q^T (A_{11} \quad A_{12}) \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = (Q^T A_{11} Q \quad Q^T A_{12} U) = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & Q_1^T A_{12} U_1 & Q_1^T A_{12} U_2 \\ 0 & 0 & 0 & Q_2^T A_{12} U_2 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Bu takdirde

$$rank(A_{11} \quad A_{12}) = rank(D_1) + rank(Q_2^T A_{12} U_2)$$

elde edilir. (4.41), (4.42) ve (4.46) bağıntılarından $Q_2^T A_{12} U_2$' nin nonsingüler olduğu görülür. (4.43) bağıntısından

$$A_{12} B_{22} = A_{11} F \tag{4.63}$$

olacak şekilde bir $F \in R^{n_1 x n_2}$ matrisi vardır. (4.44) ve (4.45) göz önüne alınırsa $\widehat{F} = Q^T F U$ olmak üzere (4.63) eşitliği

$$D \widehat{F} = Q^T A_{12} U \Lambda \tag{4.64}$$

eşitliğine denktir. Burada $F_{11} \in \mathbb{R}^{rxs}$ olmak üzere

$$\widehat{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \tag{4.65}$$

olsun. (4.65) bağıntısındaki blokları karşılaştırarak

$$F = \begin{pmatrix} D_1^{-1} Q_1^T A_{12} U_1 \Lambda_1 & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \tag{4.66}$$

elde edilir. $F_{21} = H$ $(n_1 - r)xs$ tipinde bir matris olsun.

$$F_{22} = -\left(U_2^T {A_{12}}^T Q_2\right)^{-1} \tag{4.67}$$

$$B_{12} = -F = -Q \widehat{F} U^T \tag{4.68}$$

alalım. Bu takdirde $A_{12} B_{22} = -A_{11} B_{12}$

$$B_{22}\left(I-B_{12}^{T}A_{12}\right)^{T}=B_{22}\left(I-A_{12}^{T}B_{12}\right)=B_{22}+B_{12}^{T}A_{11}B_{12}$$

$$A_{11}\left(I-A_{12}B_{12}^{T}\right)^{T}=A_{11}\left(I-B_{12}A_{12}^{T}\right)=A_{11}+A_{12}B_{22}A_{12}^{T}$$

olur. Yani $B_{22}\left(I-B_{12}^{T}A_{12}\right)^{T}$ ve $A_{11}\left(I-A_{12}B_{12}^{T}\right)^{T}$ simetrik olup

$$U_2^T\left(I-B_{12}^{T}A_{12}\right)=U_2^T\left(I+U\widehat{F}^{T}Q^TA_{12}\right)=0$$

$$Q_2^T\left(I-A_{12}B_{12}^{T}\right)=Q_2^T\left(I+A_{12}U\widehat{F}^{T}Q^T\right)=0$$

elde edilir. Lemma 4.2’ den

$$B_{22}A_{22}=I-B_{12}^{T}A_{12}=I+U\widehat{F}^{T}Q^TA_{12}$$

$$A_{11}B_{11}=I-A_{12}B_{12}^{T}=I+A_{12}U\widehat{F}^{T}Q^T$$

matris denklemlerinin sırasıyla $A_{22}\in S\mathbb{R}^{n_2xn_2}$ ve $B_{11}\in S\mathbb{R}^{n_1xn_1}$ simetrik çözümlerine sahip olacağı ve genel çözümlerinin ise $G\in\mathbb{R}S^{(n_2-s)x(n_2-s)}$ ve $G_B\in\mathbb{R}^{(n_1-r)x(n_1-r)}$ olmak üzere

$$A_{22}=U_1\Lambda_1^{-1}U_1^T\left(I+U\hat{F}^TQ^TA_{12}\right)+U_2U_2^T\left(I+A_{12}^TQ\hat{F}U^T\right)U_1\Lambda_1^{-1}U_1^T+U_2GU_2^T \quad (4.69)$$

$$B_{11}=Q_1\mathrm{D}_1^{-1}Q_1^T\left(I+A_{12}U\hat{F}^TQ^T\right)+Q_2Q_2^T\left(I+Q\hat{F}U^TA_{12}^T\right)Q_1\mathrm{D}_1^{-1}Q_1^T+Q_2G_BQ_2^T \quad (4.70)$$

biçiminde olduğu görülür.(4.44), (4.45), (4.66) ve (4.67) bağıntılarından

$$\begin{aligned}A_{22}=&\,U_1\Lambda_1^{-1}U_1^T\\&+U_1\Lambda_1^{-1}(I\quad 0)\begin{pmatrix}\Lambda_1U_1^TA_{12}^TQ_1\mathrm{D}_1^{-1} & H^T\\ 0 & -(Q_2^TA_{12}U_2)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1^TA_{12}\\ Q_2^TA_{12}\end{pmatrix}\\&+U_2U_2^TA_{12}^T(Q_1\quad Q_2)\begin{pmatrix}\mathrm{D}_1^{-1}Q_1^TA_{12}U_1\Lambda_1 & 0\\ H & -(U_2^TA_{12}^TU_2)^{-1}\end{pmatrix}\\&x\begin{pmatrix}\Lambda_1^{-1}U_1^T\\ 0\end{pmatrix}+U_2GU_2^T\\&=B_{22}^{+}+A_{12}^TA_{11}^{+}A_{12}-U_2U_2^TA_{12}^TA_{11}^{+}A_{12}U_2U_2^T+B_{22}^{+}\widehat{H}^TA_{12}+A_{12}^T\widehat{H}B_{22}^{+}\\&+U_2GU_2^T \qquad (4.71)\end{aligned}$$

$$B_{11}=Q_1\mathrm{D}_1^{-1}Q_1^T+Q_1\mathrm{D}_1^{-1}Q_1^TA_{12}$$

$$x\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Lambda_1 U_1^T A_{12}^T Q_1 \mathrm{D}_1^{-1} & H^T \\ 0 & -(Q_2^T A_{12} U_2)^{-1} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix}$$

$$+Q_2\begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{D}_1^{-1} Q_1^T A_{12} U_1 \Lambda_1 & 0 \\ H & -(U_2^T A_{12}^T U_2)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$x\begin{pmatrix} U_1^T A_{12}^T \\ U_2^T A_{12}^T \end{pmatrix} Q_1 \mathrm{D}_1^{-1} Q_1^T + Q_2 G_B Q_2^T$$

$$= A_{11}^+ + A_{11}^+ A_{12} B_{22} A_{12}^T A_{11}^+ + A_{11}^+ A_{12} \widehat{H}^T + \widehat{H} A_{12}^T A_{11}^+$$

$$-A_{11}^+ A_{12} U_2 (Q_2^T A_{12} U_2)^{-1} Q_2^T - Q_2 (U_2^T A_{12}^T U_2)^{-1} U_2^T A_{12}^T A_{11}^+$$

$$+Q_2 G_B Q_2^T \qquad (4.72)$$

elde edilir. A_{22}, B_{11} ve B_{12} matrisleri $B_{11}A_{11} + B_{12}A_{22} = 0$ eşitliğini veya buna denk olarak $(Q^T B_{11} Q)(Q^T A_{12} U) - \widehat{F} U^T A_{22} U = 0$ eşitliğini sağladığından, bu takdirde (4.62), (4.65), (4.67), (4.71) ve (4.72) bağıntılarından G ve G_B' nin

$$G_B Q_2^T A_{12} U_2 + \left(U_2^T A_{12}^T U_2\right)^{-1} G - H \Lambda_1^{-1} H^T Q_2^T A_{12} U_2$$

$$-(U_2^T A_{12}^T U_2)^{-1} U_2^T A_{12}^T A_{11}^+ A_{12} U_2 = 0$$

eşitliğini sağladığı görülür. Dolayısıyla

$$G_B = -\left(U_2^T A_{12}^T Q_2\right)^{-1} G \left(Q_2^T A_{12}^T U_2\right)^{-1} + H \Lambda_1^{-1} H^T$$

$$+(U_2^T A_{12}^T Q_2)^{-1} U_2^T A_{12}^T A_{11}^+ A_{12} U_2 (Q_2^T A_{12}^T U_2)^{-1} \qquad (4.73)$$

olur. Öte yandan (4.66) – (4.68) bağıntılarından

$$B_{12} = -A_{11}^+ A_{12} B_{22}^+ + Q_2 \left(U_2^T A_{12}^T Q_2\right)^{-1} U_2^T - \widehat{H}$$

elde edilir. Basit bir hesaplamayla (4.49)-(4.51) bağıntıları ile verilen A_{22}, B_{11} ve B_{12} matrislerinin

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^T & B_{22} \end{pmatrix} = I$$

eşitliğini sağladığı görülür. Bu nedenle (4.39) bağıntısındaki A matrisi nonsingüler ve simetriktir.

HATIRLATMALAR:

(1) Teoremin ispatı çözümlerin bir kümesinin elde etmek için bir inşa metodu verir. Gerçekten (4.49) – (4.52) (i) probleminin bir genel çözümünü verir. Bu nedenle çözümlerin kümesi $(G,H) \in \mathbb{R}S^{(n_2-s)x(n_2-s)}x\mathbb{R}^{(n_1-r)xs}$ matris ikilileriyle birebir eşlenir. Teoremin bir özel çözümü durumu $rank(A_{11}) = n_1$ ve $rank(B_{22}) = n_2$ olarak Sonuç 4.4 kolayca elde edilir.

(2) Simetrik pozitif definit bir matrisin tüm özalt matrislerinin ve tersinin de simetrik pozitif definit olduğu bilinmektedir. Sonuç 4.5, Sonuç 4.4 ve Lemma 4.3 denklemlerinden elde edilir.

(3) İspatın yanı sıra iddia $r = 0$ ve / veya $s = 0$ olsa bile geçerlidir. Eğer $r = s = 0$ ise $A_{11} = 0$, $Q_1 = 0$, $Q = 0_2 = I$ ve $B_{22} = 0$, $U_1 = 0$, $U = U_2 = I$ elde edilir. (4.41) - (4.42) bağıntılarına göre $n_1 = n_2$ ve A_{12} kare nonsingülerdir. (4.49)-(4.52) bağıntılarından A_{22}, n_2xn_2 tipindeki keyfi simetrik bir matrisi olmak üzere $B_{11} = -(A_{12}^T)^{-1}A_{22}A_{12}^{-1}$ ve $B_{12} = (A_{12}^T)^{-1}$ olduğu görülür.

Eğer $r = 0$ ise $A_{11} = 0$, $Q_1 = 0$, $Q = 0_2 = I$ ‘ dir.

Eğer $s = 0$ ise $B_2 = 0$, $U_1 = 0$, $U = U_2 = I$ ‘ dir.

Sonuç 4.6. Bir $A_{11} \in \mathbb{R}_r^{n_1xn_1}$ matrisinin nansingüler bir nxn simetrik matrisine tamamlanabilir olması için gerekli ve yeter şart (4.75) olmasıdır.

$n_0 = 2n_1 - r$ için eğer (4.76) matrisi nonsingüler bir n_0xn_0 simetrik matris ise bu takdirde A^{-1}’ de A_{11} için tamamlayıcı alt matrisi sıfır alt matrisidir. Öte yandan eğer A_{12}, $\det(Q_1 \quad A_{12})$ şartını sağlarsa (4.56) bağıntısındaki nonsingüler simetrik bir A matrisi mevcut olup $A_{22} = 0$ elde edilir. Bu durumda

$$(Q_1 \quad A_{12})^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1^T[I - A_{12}\left(Q_2^TA_{12}\right)^{-1}Q_2^T] \\ (Q_2^TA_{12})^{-1}Q_2^T \end{pmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \left[I - Q_2\left(A_{12}^TQ_2\right)^{-1}A_{12}^T\right]A_{11}^+[I - A_{12}\left(Q_2^TA_{12}\right)^{-1}Q_2^T] & Q_2\left(A_{12}^TQ_2\right)^{-1} \\ \left(Q_2^TA_{12}\right)^{-1}Q_2^T & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

(4) Sonuç 4.6, Lemma 4.3 ve Lemma 4.4 denklemlerinden $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 x n_1}$ matrisinin nxn tipinde simetrik pozitif definit bir matrise tamamlanabilmesi için gerekli ve yeter şartın $A_{11} > 0$ ve $n > n_1$ olduğu görülür.

(5) Son olarak bu çalışmadaki sonuçlar kompleks cisimde tanımlı hermityan ve pozitif definit matrislere de genelleştirilebilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu Yüksek lisans tez çalışmasında $2x2$ tipindeki blok parçalanmış matrislerin nonsingülerliği incelenmiştir. Bu amaçla öncelikle matrislerle ilgili temel kavramlar detaylı bir şekilde verilmiş ve kare olmayan ya da kare olduğu halde bilinen anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve lineer denklem sistemlerinin genel durumda çözümünde kullanılan ve bilinen anlamda invers özelliklerini de sağlayan genelleştirilmiş invers kavramı ele alınmıştır. Bir matrisin genelleştirilmiş inversi, yansımalı genelleştirilmiş inversi ve Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi tanımları verilerek bu inverslerin çeşitli özellikleri ortaya konulmuştur. Daha sonra $2x2$ tipindeki blok parçalanmış matrislerin nonsingülerliği ile ilgili çeşitli özelliklerin verildiği kapsamlı bir literatür araştırması yapılarak temin edilen çalışmalar incelenmiştir. Ayrıca keyfi boyutlu bir kare matrisi $2x2$ blok parçalı matrise indirgeyerek, bu matrisin nonsingülerliği incelenerek matrisin tersinir olması durumunda bu tersler için hesaplama yöntemleri geliştirilmiştir.

Yapılan bu çalışmalara ilaveten verilen bir kare matrisin daha değişik tipten parçalanışları için de mevcut olmaları durumunda inversleri hesaplama yöntemleri geliştirilebilir. Ayrıca bu inverslerin hesaplanmasında kullanılmak üzere bilgisayar programları ya da algoritmalar geliştirilebilir. Elde edilen invers hesaplama yöntemleri lineer denklem sistemlerinin çözümlerine ve çeşitli problemlere uygulanabilir.

5. KAYNAKLAR

Adetunde I.A. ve ark., 2010. On the Generalized Inverse of a Matrix. American Journalof Scientific Research, Issue 7, 77-89 s.

Akdeniz, F., Öztürk, F. 1996. Lineer Modeller, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, No: 38.

Bai Z. J., Consruction and analysis of structured preconditioners for block two by two matrices, J. Shanghai Univ.(English Edition), 8(2004) 397-405.

Bai Z. J., Structured preconditioners for nonsingular matrices of block two by two structures, Math. Comput. 75(2006) 791-815.

Bai Z. J., (a) Eigenvalue estimates for saddle point matrices of Hermitian and Indefinite leading blocks, J. Comput. Appl. Math., 237(2013) 295-306.

Bai Z. J., (b) On nonsingularity of block two by two matrices, Linear Algebra Appl. 439(2013) 2388-2404.

Baksalary, J. K., Styan, G.P.H., 2002. Generalized inverses of partitioned matrices in Banachiewicz-Schur form, Linear Algebra and its Appl. 354,41-47.

Baksalary K.J., Baksalary, O. M. 2004. Relationships between generalized inverses of a matrix and generalized inverses of its rank-one-modifications. Linear Algebra and its Appl. 388, 31-44.

Baksalary K.J., Baksalary, O. M. 2007. Particular formulae for the moore-Penrose inverse of a coloumnwise partitioned matrix, Linear Algebra and its Appl. 421, 16-23.

Ben-Israel, A., Charnes, A., 1963, Contributions to the theory of generalized inverses. SIAM J. Appl. Math., Vol. 11, 667-699 s.

Benitez J., Liu X., Zhu T., Nonsingularity and group invertibility of linear combination of two matrices, Linear and Multilinear Algebra 58(2010) 1023-1035.

Bhimasankaram, P., Mitra, S. K., 1969, On a theorem of Rao on g-inverses of matrices, Sankhya Ser. A, Vol. 31, 365-368 s.

Bjerhammer, A., (a) 1951, Rectangular reciprocal matrices with special reference to geodetic calculations, Bull. Geodesique, Vol. 52, 188-220 s.

Bjerhammer, A., (b) 1951, Application of the calculus of matrices to the method of least squares with special reference to geodetic calculations, Kungl. Tekn. H11gsk. Hand. Stockholm. No. 49, 1-86 s.

Bjerhammer, A., 1958, A generalized matrix algebra, Kungl. Tekn. Hogsk. Handl. Stockholm. No. 124, 1-32 s.

Bose, R. C., 1959, Analysis of Variance unpublished lecture notes, University of North Carolina.

Bott, R., Duffin, R. J., 1953, On the algebra of Networks. Trans. Amer. Math. Soc.. Vol. 74, 99-109 s.

Branson R., 1999. Matris İşlemleri. Schaum Serisi. (Editör: H. Hilmi Hacısalihoğlu), Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 212 s.

Chernoff, H., 1953, Locally optimal designs for estimating parameters. Ann. Math. Statist., Vol. 24, 586-602 s.

Chipman, J. S., 1968, Specification problems in regression analysis, Theory and Application of Generalized Inverses and Matrices, Symposium Proceedings, Texas Technological College. Mathematics Series No. 4, 114-176 s.

Chipman, J. S., Rao, M. M., 1964, Projections, generalized inverses and quadratic forms. J. Math. Anal. Appl., Vol. 9, 1-11 s.

Doymuş, N., 2006. Matrislerin Genelleştirilmiş Tersleri ve Kronecker Çarpımlarının Bazı Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sivas, 63 s.

Fredler M. and Markham T.L., comletin a matrix when certain entires of its inverse are specified, Linear Algebra Appl. 74(1986) 225-237.

Greville, T. N. E., 1959, The pseudo-inverse of a rectangular matrix and its application to the solution of systems of linear equations, SIA M Rev., Vol. 1, 38-43 s.

Hacısalihoğlu H.H., 1977. Lineer Cebir. Matbaa Teknisyenleri Koll. Şti., İstanbul, 716 s.

Hua D., Completing a symetric 2x2 blok matrix and its inverse, Linear Algebra Appl. 235(1996) 235-245.

Hua D. and Hao L., inverse problems for nonsymetric matrices with a submatrix constraint, Appl. Math. Comput. 189(2007) 1320-1330.

Hua D. and Yongxin Y., inverse problems for symetric matrices with a submatrix constraint, Appl. Math. Comput. 57(2007) 646-656.

Hung, C.H., Markham, T.L. 1975. (a) The Moore-penrose inverces of a partitioned matrix $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$. Czechoslavak Math. Journal, 25, 3, 354-361.

Hung, C.H., Markham, T.L. 1975. (b) The Moore-penrose inverces of a partitioned matrix $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Linear Algebra and its Applications, 11,73-86.

Lancaster, P., 1969. *Theory of Matrices*, Academic Pres, New York, 570 s.

Mihalyffy, L. 1971. An Alternative representation of the generalized inverces of partitioned matrices, Linear Algebra and its Appl. 4, 95-100.

Mitra, S. K., 1968, (a) On a generalized inverse of a matrix and applications, Sankhya Ser. A, Vol. 30, 107-114 s.

Mitra, S. K., 1968, (b) A new class of g-inverse of square matrices, Sankhya Ser. A, Vol. 30, 323-330 s.

Mitra, S. K., Bhimasankaram, P., 1970, Some results on idempotent matrices and a matrix equation connected with the distribution of quadratic forms, Sankhya Ser. A. Vol. 32, 353-356 s.

Mitra, S. K., Radhakrishna Rao, C., 1968, Simultaneous reduction of a pair of quadratic forms. Sankhya Ser. A, Vol. 30, 313-322 s.

Mitra, S. K., Rao, C. R., 1968, A note on a previous lemma in the theory of least squares and some further results. Sankhya Ser. A. Vol. 30, 245-252 s.

Moore, E. H., 1920, On the reciprocal of the general algebraic matrix (abstract), Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 26, 394-395 s.

Moore, E. H., 1935, General Analysis, American Philosophical Society, Philadelphia.

Penrose, R., 1955, A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 51, 406-413 s.

Penrose, R., 1956, On best approximate solutions of linear matrix equations, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 52, 17-19 s.

Radhakrishna Rao, C., 1955, Analysis of dispersion for multiply classified data with unequal numbers in cells, Sankhya. Vol. 15, 253-280 s.

Radhakrishna Rao, C., 1961, A study of large sample test criteria through properties of efficient estimates, Sankhya Ser. A, Vol. 23, 25-40 s.

Radhakrishna Rao, C., 1962, A note on a generalized inverse of a matrix with applications to problems in mathematical statistics, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. Vol. 24, 152-158 s.

Radhakrishna Rao, C., 1965, (a) Linear Statistical Inference and its Applications, New York, Wiley.

Radhakrishna Rao, C., 1965, (b) On the theory of least squares when parameters are stochastic and its application to analysis of growth curves, Biometrika, Vol. 52, 447-458 s.

Radhakrishna Rao, C., 1966, *Generalized inverse for matrices and its applications in mathematical statistics*, Research papers in Statistics, Festschrift for J. Neyman, New York, Wiley,

Radhakrishna Rao, C., 1967, Calculus of generalized inverse of matrices. Part 1: General theory, Sankhya Ser. A, Vol. 29, 317-342 s.

Rao, C.R., Mitra, S.K. 1971. Generalized inverse if matrices and its Applications, Wiley, New York.

Scroggs, J. E., Odell, P. L., 1966, An alternative definition of the pseudo-inverse of a matrix, SIA M J. Appl. Math., Vol. 14, 796-810 s.

Shiou J. T. and Shiou S. H., İnverses of 2x2 blok matrices, Computers and math. Appl. 43(2002) 119-129.

Tian, Y., Takane, Y. 2004. More on generalized invercces of partitioned matrices with Banachiewicz-Schur forms, Applied Mathematics and Computation, 148, 1-13 s.

Tian Y. and Takane Y., The inverse of any two by two nansingular partitioned matrix and three matrix inverse completion problems, Linear Algebra Appl. 55(2009) 1-12.

Tseng, Y. Y., 1949, (a) Generalized inverses of unbounded operators between two unitary spaces, Dokl. Akad. Nauk. SSSR., Vol. 67, 431-434 s.

Tseng, Y. Y., 1949, (b) Properties and classifications of generalized inverses of closed operators, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol. 67, 607-610 s.

Tseng, Y. Y., 1956, Virtual solutions and general inversions, Uspehi. Mat. Nauk., Vol. 11, 213-215 s.

Yongge Tian, George P.H. Styan. 2009. On some matrix equalities for generalized inverses with applications, Linear Algebra and its Appl. 430, 2716-2733.

Yongge T., Jürgen G. 2006. Invariance properties of a triple matrix product involving generalized inverses, Linear Algebra and its Appl. 417, 94-107.

Zekraoui, H., Guedjiba, S., 2008. On Algebric Properties of Generalized Inverses of Matrices, Internal Journal of Algebra. Vol. 2, no. 13, 633-643 s.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Harun SAKA

Doğum Yeri : Zonguldak

Doğum Tarihi : 14.08.1989

Yabancı Dili : İngilizce

E-mail : harun.saka@gmail.com

İletişim Bilgileri : Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Öğrenim Durumu :

Derece	Bölüm/ Program	Üniversite	Yıl
Lisans	Matematik	Ordu Üniversitesi	2008
Y. Lisans	Matematik	Ordu Üniversitesi	2013

İş Deneyimi:

Görev	Görev Yeri	Yıl
Matematik Öğretmeni	Zonguldak Endüstri Meslek ve Teknik Lisesi	2012-2013
Matematik Öğretmeni	Bulancak Mutlu Bilim Dershanesi	2013-2014