T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE TAUBER TİPİ TEOREMLER

İlker MUMCU

Bu tez,

Matematik Anabilim Dalında

Yüksek Lisans

derecesi için hazırlanmıştır

ORDU 2014

TEZ ONAYI

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi İlker MUMCU'nun YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "**İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE TAUBER TİPİ TEOREMLER**" başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Cemal BELEN

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Başkan: Doç. Dr. Erhan SET

Üye: Yrd. Doç. Dr. İmdat İŞCAN

Üye: Yrd. Doç. Dr. Cemal BELEN

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 25/07/2014 tarih ve 2014/302 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet Fikret BALTA

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza:

İlker MUMCU

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirimlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE TAUBER TİPİ TEOREMLER
İlker MUMCU
Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2014
Yüksek Lisans Tezi, 45 s.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Cemal BELEN

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmıdır ve burada Tauber tipi teoremlerin ve istatistiksel yakınsaklık kavramının tarihsel gelişiminden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde toplanabilme metotları ve istatistiksel yakınsaklık kavramı ile ilgili temel tanım ve teoremlerden bahsedilmiş ve ayrıca klasik Tauber tipi teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ilk olarak istatistiksel yakınsaklıktan yakınsaklığın ve istatistiksel Cesàro toplanabilmeden istatistiksel yakınsaklığın elde edildiği, bilinen Tauber tipi teoremler ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu bölümün ikinci kısmında ise istatistiksel $(\overline{N}, p)$ toplanabilmeden istatistiksel yakınsaklığın elde edildiği Tauber tipi teoremler ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, Tauber tipi teoremler, Cesaro toplanabilme metodu, Ağırlıklı ortalama metodu.

ABSTRACT

STATISTICAL CONVERGENCE AND TAUBERIAN THEOREMS

İlker MUMCU
Ordu University
Institute for Graduate Stadies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2014
MSc. Thesis, 45 p.

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Cemal BELEN

This thesis consist of three chapters.

The first chapter of this thesis is introduction chapter and in this chapter, historical development of Tauberian theorems and the concept of statistical convergence are considered.

In the second chapter, fundamental definitions and theorems related to concepts of summabilty methods and statistical convergence are mentioned. Moreover, the classic Tauberian theorems are established.

In the first part of third chapter, the known Tauberian theorems, in which usual convergence follows from statistical convergence and statistical convergence follows from statistical Cesaro summability, are examined in detail. In the second part of this chapter some Tauberian theorems, in which statistical convergence follows from statistical $(\overline{N}, p)$ summability, are proved.

Keywords: Statistical convergence, Tauberian theorems, Ces aro summability method, Weighted mean summability method.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının belirlenmesi ve hazırlanması esnasında ilgisini hiç eksik etmeyen, bilgi ve tecrübesiyle her konuda destek olan ve bir dost gibi davranan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Cemal BELEN'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu çalışma boyunca desteğini hiç esirgemeyen ve hep yanımda olan sevgili eşime sonsuz sevgilerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

s	Tüm dizilerin uzayı
ℓ_∞	Tüm sınırlı dizilerin uzayı
c	Tüm yakınsak dizilerin uzayı
$x_n = O(1)$	(x_n) dizisinin sınırlılığı
$x_n = o(1)$	(x_n) dizisinin sıfıra yakınsaması
$\sigma_n(x)$	(x_n) dizisinin aritmetik ortalaması
st	Tüm istatistiksel yakınsak diziler kümesi
$\sigma_{n,p}^{(1)}(x)$	(x_n) dizisinin ağırlıklı ortalamalar dizisi
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
$h.h.k$	Hemen hemen her k
Δx_n	(x_n) dizisinin geri farkı
$V_{n,p}^{(0)}(\Delta x)$	(x_n) dizisinin ağırlıklı üreteci
$\omega_{n,p}^{(0)}(x)$	(x_n) dizisinin ağırlıklı klasik kontrol modülosu
λ_n	λn sayısının tam değeri

1. GİRİŞ

Toplanabilme teorisi, Euler'in (1707-1783) yakınsak olmayan sonsuz bir seriye uygun bir toplam karşılık getirdiği günden beri matematiğin çok geniş bir çalışma alanı olmuştur. Abel (1826) yakınsak bir serinin aynı noktaya Abel toplanabilir olduğunu kanıtlamıştır fakat bu durumun tersi geçerli değildir. 1897 yılında Avusturyalı matematikçi Alfred Tauber, Abel toplanabilir bir serinin bir yan koşul altında yakınsak olduğunu kanıtlamıştır. Tauber'in yaptığı bu ilk çalışma nedeniyle, genel olarak bir toplanabilme metodundan bir dizinin ya da serinin yakınsaklığının elde edildiği teoremler Tauber tipi teoremler olarak adlandırılmıştır. Hardy (1910), Tauber'in kullandığı koşulun zayıflatılabileceğini iddia etmiş, Littlewood (1911) ise Hardy'nin hipotezinin doğru olduğunu kanıtlamıştır. Littlewood'un yaptığı çalışma oldukça etkileyici olmasına rağmen kullandığı ispat yöntemi çok karmaşıktı. Karamata (1930) Littlewood'un teoreminin Weierstrass yaklaşım teoremine bağlı daha basit bir ispatını yapmıştır. Sadece Abel toplanabilme metodu için değil, diğer bir çok özel toplanabilme metotları için de Tauber tipi teoremler elde edilmiştir. Landau (1910), Schmidt (1925), Karamata (1931), Wiener (1932) klasik Tauber teorisinin öncüleri arasında yer almaktadır. Tauber teorisinin tarihsel gelişimi ve diğer bir çok alandaki uygulamaları hakkında detaylı bilgi Korevaar'ın (2004) "Tauberian Theory" isimli kitabında yer almaktadır.

Alışılmış yakınsaklıktan daha genel olan istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk defa Fast (1951) tarafından kullanıldı. Fast bu kavramı Steinhaus'a (1951) dayandırsa da, aslında Antoni Zygmund (1935) yazdığı "Trigonometric Series" isimli kitapta "hemen hemen yakınsaklık" adıyla bu kavramdan bahsetmiştir. Schoenberg (1959), Šalát (1980), Freedman ve Sember (1981), Fridy (1985, 1993), Connor (1988), Fridy ve Orhan (1997a, 1997b) gibi birçok matematikçi istatistiksel yakınsaklığın gelişimine katkıda bulunmuştur.

Buck (1953) reel ve kompleks diziler için istatistiksel yakınsaklığı geliştirerek bu kavramın genelleştirme fikrini ortaya atmıştır. Schoenberg (1959) toplanabilme teorisi ile istatistiksel yakınsaklığın ilişkisini incelemiştir. Fridy (1993) istatistiksel limit ve istatistiksel yığılma noktası kavramlarını, Fridy ve Orhan (1997a, 1997b) istatistiksel üst ve alt limit ve istatistiksel çekirdek kavramlarını tanımlamışlardır. İstatistiksel yakınsaklığın, fonksiyonel analiz (Connor ve ark. 2000), sayılar teorisi (Niven ve Zuckerman 1980, Erdös ve Tenenbaum 1989), ölçü teorisi (Miller 1995), topoloji (Connor ve Swardson 1993, Di Maio ve Kocinac 2008), yaklaşım teorisi (Gadjiev ve Orhan 2002) gibi alanlarla ilişkisi vardır. Son zamanlarda, Di Maio ve ark. (2009) ve Djurčić ve ark. (2009) tarafından yapılan çalışmalarda istatistiksel yakınsaklığın asimptotik analiz, seçme prensipleri ve oyun teorileri gibi farklı alanlarda da uygulandığı görülmektedir.

Fridy (1985) ve Fridy ve Khan (2000), Hardy'nin (1910) ve Landau'nun (1910) Tauber tipi teoremlerini istatistiksel yakınsaklık durumuna genişletmişlerdir. Móricz (2002) istatistiksel Cesàro toplanabilmeden istatistiksel yakınsaklığın, Móricz ve Orhan (2004) ise istatistiksel $(\overline{N}, p)$ toplanabilmeden istatistiksel yakınsaklığın elde edildiği gerekli ve yeterli koşulları vermişlerdir.

Hazırlanan bu tez çalışmasında öncelikli olarak yukarıda belirtilen çalışmalar detaylı olarak incelenmiş, sonrasında ise Totur ve Çanak (2012) tarafından verilen ve ağırlıklı ortalama metodu ile toplanabilmeden yakınsaklığın elde edildiği Tauber tipi teoremler istatistiksel yakınsaklık durumuna genelleştirilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tezin temelini oluşturan tanım ve teoremlere yer verilecektir. Birinci kısımda toplanabilme metotlarından bahsedilecek ve bunlar arasındaki ilişki incelenecektir. Ardından yoğunluk ve istatistiksel yakınsaklık kavramları ele alınacaktır. Son kısımda ise bilinen klasik Tauber tipi teoremler ve sonraki bölümde ihtiyaç duyulacak olan bazı kavram ve sonuçlar ele alınacaktır.

2.1 Toplanabilme Metotları

Kompleks ya da reel terimli tüm dizilerin uzayını s, tüm sınırlı dizilerin uzayını ℓ_∞ ve tüm yakınsak dizilerin uzayını c ile gösterelim. c ve ℓ_∞ uzayları, $\| x \|_\infty = \sup_n |x_n|$ normuyla birlikte birer Banach uzayıdır.

Iraksak bir diziyi veya ıraksak bir seriyi toplamanın en yaygın yöntemi sonsuz matrisleri kullanmaktır.

Tanım 2.1.1 X ve Y, s nin iki alt kümesi ve $A = (a_{nk})$, $n, k = 0, 1, 2, \cdots$, reel veya kompleks terimli bir sonsuz matris olmak üzere, bir $x = (x_k) \in X$ dizisi ve her n için

$$y_n := (Ax)_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serisi yakınsak ise $Ax := ((Ax)_n)$ dönüşüm dizisi (x in A-dönüşüm dizisi) mevcuttur denir. Eğer her $x \in X$ için $((Ax)_n)$ dönüşüm dizisi mevcut ve $((Ax)_n) \in Y$ ise A matrisi X den Y ye bir dönüşüm tanımlar denir ve $A \in (X, Y)$ ile gösterilir.
Eğer bir x dizisi için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve bir L değerine yakınsak ise x dizisi L değerine A-toplanabilirdir (veya A-limitlenebilirdir) denir ve bu durum $A - \lim x = L$ ile gösterilir.
Özel olarak, $X = Y = c$ olmak üzere $A \in (c, c)$ ise A ya konservatif matris denir. Her yakınsak (x_k) dizisi için $\lim_k x_k = L$ olduğunda $\lim_n (Ax)_n = L$ koşulu sağlanırsa A regüler matris adını alır. Bu durum kısaca $A \in (c, c; p)$ ile gösterilir (Hardy 1949; Boos 2000).

En basit toplanabilme metodu aritmetik ortalamalar metodu olarak da bilinen Cesàro toplanabilme metodudur.

Tanım 2.1.2 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun. Eğer

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + s_2 + ... + s_n}{n+1} \longrightarrow L \;\; (n \longrightarrow \infty)$$

ise (s_n) dizisi L sayısına $(C,1)$ yakınsaktır veya $(C,1)$ limitlenebilir ya da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi L ye Cesàro toplanabilirdir denir ve bu durum $(C,1) - \lim s_n = L$ veya $C_1 - \lim s_n = L$ şeklinde gösterilir. Cesàro metoduna karşılık gelen matris

$$c_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & 0 \leq k \leq n \text{ ise} \\ \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olup, $C_1 = (c_{nk})$ matrisi regüler bir matristir.

Örnek 2.1.1 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ serisini ele alalım.

$$(s_n) = (1,0,1,0,...) = \left(\frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right)\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right)\right] \\ &= \frac{n+1}{2(n+1)} + \frac{1 + (-1)^n}{4(n+1)} \to \frac{1}{2} \ \ (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

dir. O halde $C_1 - \lim s_n = \frac{1}{2}$ veya $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}(C_1)$ dir. Dolayısıyla bilinen anlamda ıraksak olan $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ serisi $\frac{1}{2}$ sayısına C_1-toplanabilirdir.

Cesàro metodundan daha genel bir metod olan Abel metodu veya diğer adıyla kuvvet serisi metodu şu şekilde tanımlanır.

Tanım 2.1.3 Eğer $|x| < 1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi $f(x)$ fonksiyonuna yakınsak ve

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = L$$

ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi L sayısına Abel toplanabilirdir denir ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L\,(A_1) \ \text{ veya } A_1 - \lim s_n = L$$

ile gösterilir.

Örnek 2.1.2 $|x| < 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

ve

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \frac{1}{2}\,(A_1)$$

olur.

Yukarıdaki örneklerden de anlaşılacağı üzere toplanabilme teorisinin esas problemi ıraksak olan bir seriye bir toplam karşılık getirmektir.

Teorem 2.1.1 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak olsun. Bu durumda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi her $|x|<1$ için yakınsak ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dir (Abel 1826).

Örnek 2.1.2 den görüldüğü gibi Abel teoreminin tersi geçerli değildir.

Tanım 2.1.4 $p=(p_k)$ terimleri negatif olmayan, $p_0>0$ ve

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \to \infty \quad (n\to\infty) \tag{2.1.1}$$

özelliklerine sahip bir dizi olsun. Bir (x_n) dizisinin n. dereceden ağırlıklı ortalaması

$$\sigma_{n,p}^{(1)} := \sigma_{n,p}^{(1)}(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k x_k, \quad n=0,1,2\ldots$$

şeklinde tanımlanır. Ağırlıklı ortalama metoduna karşılık gelen matris

$$w_{nk} = \begin{cases} \dfrac{p_k}{P_n}, & k\le n \text{ ise} \\ 0, & k>n \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve (2.1.1) koşulu altında $W=(w_{nk})$ matrisi regülerdir. Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{n,p}^{(1)} = L \tag{2.1.2}$$

ise x dizisi $p=(p_k)$ ile belirlenen ağırlıklı ortalama metoduna göre L sayısına toplanabilirdir, kısaca $(\overline{N},p)$ toplanabilir denir. Bazı kaynaklarda ağırlıklı ortalama metodu Riesz metodu olarak adlandırılmaktadır. Özel olarak her k için $p_k=1$ ise bu durumda $(\overline{N},p)$ toplanabilme $(C,1)$ toplanabilmeye indirgenmektedir.

2.2 İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda ilk olarak istatistiksel yakınsaklık kavramının temelini oluşturan doğal yoğunluk kavramı ele alınacaktır.

Tanım 2.2.1 $\mathbb{N}$ tüm doğal sayılar kümesi olsun. Bir $A \subset \mathbb{N}$ kümesi için $A_n := \{k \leq n : k \in A\} = A \cap \{1, 2, \cdots, n\}$ olmak üzere A_n kümesinin eleman sayısını $|A_n|$ ile gösterelim. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A_n|}{n}$$

limiti mevcut ise bu limit değerine A kümesinin yoğunluğu (veya doğal yoğunluğu) denir ve $\delta(A)$ ile gösterilir. Ayrıca (a_n) pozitif tamsayıların bir dizisi ve

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ise bu durumda

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}$$

ile verilir (Niven ve Zuckerman 1980).

Örneğin, $\delta(\mathbb{N}) = 1$, $\delta(\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}) = 0$, $\delta(\{2n : n \in \mathbb{N}\}) = \delta(\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}) = 1/2$ dir. Tanımdan, doğal sayılar kümesinin her sonlu alt kümesinin sıfır yoğunluklu olduğu açıktır.

$$\begin{array}{rcl} \delta : \ P(\mathbb{N}) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longrightarrow & \delta(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|A_n|}{n} \end{array}$$

yoğunluk fonksiyonunun sağladığı özellikler kısaca şu şekilde verilebilir: $A, B \in P(\mathbb{N})$ için;

1) $\delta(\mathbb{N} - A) = 1 - \delta(A)$ dır.

2) $\delta(\mathbb{N}) = 1$ ve $\delta(\emptyset) = 0$ dır.

3) $A \subseteq B$ ise $\delta(A) \leq \delta(B)$ dir.

4) $A \sim B$ ise (yani $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ sonlu ise) $\delta(A) = \delta(B)$ dir.

5) A sonlu küme ise $\delta(A) = 0$ dır (Freedman ve Sember 1981).

Alışılmış yakınsaklık kavramının daha genel bir hali olan istatistiksel yakınsaklık kavramı aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.2.2 $x=(x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\delta(\{k\in\mathbb{N}:|x_k-L|\geq\varepsilon\})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\leq n:|x_k-L|\geq\varepsilon\}|=0 \tag{2.2.1}$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st-\lim x=L$ şeklinde gösterilir (Fast 1951).

Uyarı 2.2.1 (2.2.1) yerine denk olarak, $K(\varepsilon):=\{k:|x_k-L|\geq\varepsilon\}$ olmak üzere

$$\lim_n\left(C_1\chi_{K(\varepsilon)}\right)_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{K(\varepsilon)}(k)=0$$

yazılabilir. Burada $\chi_{K(\varepsilon)}$, $K(\varepsilon)$ kümesinin karakteristik fonksiyonudur, yani

$$\chi_{K(\varepsilon)}(k):=\begin{cases}1, & k\in K(\varepsilon)\\ 0, & k\in\mathbb{N}\backslash K(\varepsilon)\end{cases}$$

şeklindedir.

Örnek 2.2.1 $x=(x_k)$ dizisi

$$x_k=\begin{cases}1, & k=m^2\ (m=1,2,...)\\ 0, & k\neq m^2\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Her $\varepsilon>0$ sayısı için

$$\{k\leq n:|x_k|\geq\varepsilon\}\subset\{k\leq n:x_k\neq 0\}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\leq n:|x_k|\geq\varepsilon\}|\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\leq n:x_k\neq 0\}|\leq\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}=0$$

elde edilir. Böylece $st-\lim x=0$ olur.

Tüm istatistiksel yakınsak diziler kümesini st ile gösterirsek, tanıma göre $c\subset st$ dir. Fakat yukarıdaki örnekten görüleceği gibi tersi geçerli değildir.

Yakınsak her dizinin sınırlı olduğunu biliyoruz. Fakat istatistiksel yakınsak bir dizinin sınırlı olması gerekmez.

Örnek 2.2.2

$$x_k=\begin{cases}\sqrt{k}, & k=m^2\ (m=1,2,...)\\ 2, & k\neq m^2\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan sınırsız ve ıraksak $x=(x_k)$ dizisi için $st-\lim x=2$ dir.

Örnek 2.2.3 P tüm asal sayıların kümesi olmak üzere $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} 1, & k \in P \\ 0, & k \notin P \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bir n sayısından küçük veya eşit olan asal sayıların sayısı yaklaşık olarak $\dfrac{n}{\log n}$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \approx \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$$

dır. Böylece $st - \lim x = 0$ dır.

Buck (1953) istatistiksel yakınsaklık tanımına denk olan bir tanımı aşağıdaki şekilde vermiştir.

Tanım 2.2.3 $A \subseteq \mathbb{N}$ ve $\delta(A) = 0$ olsun. Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $k \geq N$ ve her $k \notin A$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına hemen hemen her k için yakınsaktır denir (Buck 1953).

Eğer bir $x = (x_k)$ dizisi, $K \subseteq \mathbb{N}$, $\delta(K) = 1$ olmak üzere her $k \in K$ için bir p özelliğine sahip ise bu durumda x dizisi hemen hemen her k için p özelliğine sahiptir denir ve bu durum kısaca h.h.k. ile gösterilir.

Tanım 2.2.4 Her $\varepsilon > 0$ ve h.h.k. için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı mevcut ise, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir (Fridy 1985).

Teorem 2.2.1 Aşağıdaki ifadeler denktir.
(i) x istatistiksel yakınsak bir dizidir.
(ii) x bir istatistiksel Cauchy dizisidir.
(iii) $\delta(\{k \in \mathbb{N} : x_k = y_k\}) = 1$ yani h.h.k. için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır (Fridy 1985).

Sonuç 2.2.1 Bir x dizisi bir L sayısına istatistiksel yakınsak ise x aynı noktaya yakınsayan bir alt dizi içerir (Fridy 1985, Connor 1989).

Bir reel sayı dizisinin istatistiksel alt limiti ve istatistiksel üst limiti kavramları ilk defa Fridy ve Orhan (1997) tarafından tanımlandı.

Tanım 2.2.5 Bir $x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel üst limiti

$$B_x = \{b \in \mathbb{R} : \delta \{k \in \mathbb{N} : x_k > b\} \neq 0\}$$

olmak üzere

$$st - \limsup x = \begin{cases} \sup B_x, & B_x \neq \emptyset \text{ ise} \\ -\infty, & B_x = \emptyset \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde bir $x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel alt limiti

$$A_x = \{a \in \mathbb{R} : \delta \{k \in \mathbb{N} : x_k < a\} \neq 0\}$$

olmak üzere

$$st - \liminf x = \begin{cases} \inf A_x, & A_x \neq \emptyset \text{ ise} \\ +\infty, & A_x = \emptyset \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Fridy ve Orhan 1997).

Bir x reel sayısı için

$$\liminf x \leq st - \liminf x \leq st - \limsup x \leq \limsup x$$

eşitsizliği geçerlidir.

Örnek 2.2.4 Bir $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k := \begin{cases} k, & k \text{ bir tek kare ise} \\ 2, & k \text{ bir çift kare ise} \\ 1, & k \text{ tek ve kare değil ise} \\ 0, & k \text{ çift ve kare değil ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $B_x = (-\infty, 1)$ ve $A_x = (0, \infty)$ olup $st - \limsup x = 1$ ve $st - \liminf x = 0$ dır.

Tanım 2.2.6 Bir $x = (x_k)$ dizisi için $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k$ olmak üzere eğer

$$st - \lim_n \sigma_n = L$$

ise x dizisi L sayısına istatistiksel $(C, 1)$ toplanabilir denir (Móricz 2002).

Tanım 2.2.7 Bir $x = (x_k)$ dizisi için eğer

$$st - \lim_n \sigma_{n,p}^{(1)} = L \tag{2.2.2}$$

ise x dizisi L sayısına istatistiksel $(\overline{N}, p)$ toplanabilirdir denir (Móricz ve Orhan 2004).

Eğer negatif olmayan bütün n sayıları için $p_n = 1$ alınırsa istatistiksel $(\overline{N}, p)$ toplanabilme istatistiksel $(C, 1)$ toplanabilmeye indirgenmiş olur.

2.3 Tauber Tipi Teoremler

Bu kısımda klasik Tauber tipi teoremlere ve sonraki bölümde kullanılacak olan bazı kavram ve sonuçlara yer verilecektir. Bundan sonra, bir (x_n) dizisi için $x_n = O(1)$ gösterimi (x_n) dizisinin sınırlılığını, $x_n = o(1)$ gösterimi (x_n) dizisinin bir sıfır dizisi olduğunu ve bir λ reel sayısı için λ_n gösterimi ise λn sayısının tam kısmını gösterecektir.

Birinci kısımdan biliniyor ki, sonsuz bir seri kendisi ıraksak olduğu halde çeşitli metodlar aracılığıyla toplanabilir olabilir. Tersine, bir metod ile toplanabilir olan bir seri yakınsak olabilir. Bu tipteki ilk sonuç 1897 yılında Avusturyalı matematikçi Alfred Tauber tarafından verilmiştir. Tauber, Abel teoreminin tersinin $na_n = o(1)$ ek koşulu altında geçerli olduğunu ispatlamıştır. Bu yüzden genel olarak bir toplanabilme metodundan yakınsaklığın yeniden elde edilmesi için konulan koşullara *Tauber koşulları* ve bu koşulları içeren teoremlere *Tauber tipi teoremler* denir. Tauber'in teoremi şu şekildedir:

Teorem 2.3.1 Eğer $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi $|x| < 1$ için yakınsak, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = A$ ve $na_n = o(1)$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır ve bu serinin toplamı A 'dır (Tauber 1897).

Literatürde görülen bu tipteki klasik çalışmalardaki amaç Tauber'in verdiği koşulları zayıflatmak olmuştur.

Hardy (1910), Tauber'in teoremini $na_n = o(1)$ koşulunu $na_n = O(1)$ zayıf koşulu ile değiştirerek Cesàro toplanabilme için ispatlanmıştır.

Teorem 2.3.2 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi Cesàro toplanabilir ve $na_n = O(1)$, yani her n için $n|a_n| \leq C$ olacak şekilde en az bir $C > 0$ sabiti var ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır (Hardy 1910).

Buradaki $n|a_n| \leq C$ şartı Hardy'nin iki taraflı Tauber koşulu olarak bilinir.

Landau (1910), Hardy' nin verdiği $na_n = O(1)$ iki taraflı sınırlılık koşulunu tek taraflı sınırlılık koşulu ile değiştirmiştir.

Teorem 2.3.3 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi Cesàro toplanabilir ve $na_n \geq -c$ olacak şekilde en az bir $c > 0$ sabiti varsa bu durumda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır (Landau 1910).

Bu teoremdeki $na_n \geq -c$ şartı literatürde Landau'nun tek taraflı Tauber şartı olarak bilinir.

Littlewood (1911), Hardy'nin teoremini Abel toplanabilme için ispatlamıştır.

Teorem 2.3.4 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi $|x| < 1$ için yakınsak ve $na_n = O(1)$ olsun. Eğer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = A$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ dır (Littlewood 1911).

Bu teorem Abel teoreminin tersinin $na_n = O(1)$ koşulu altında geçerli olduğunu söyler.

Schmidt (1925), Teorem 2.3.3 de kullanılan $na_n \geq -c$ veya buna denk olarak, $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ olmak üzere $n(s_n - s_{n-1}) \geq -c$ tek taraflı sınırlılık koşulunu daha zayıf olan (s_n) dizisinin yavaş azalan olma koşulu ile değiştirmiştir. Schmidt'e (1925) göre eğer

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \liminf_{n\to\infty} \min_{n<k\leq\lambda_n} (s_k - s_n) \geq 0 \tag{2.3.1}$$

oluyorsa bu durumda (s_n) reel terimli dizisine yavaş azalandır denir. Bu tanım daha açık olarak şöyle verilebilir: Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısın için bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı ve 1'e yeterince yakın bir $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 1$ sayısı var öyleki

$$n_0 \leq n < k \leq \lambda_n \text{ iken } s_k - s_n \geq -\varepsilon$$

oluyorsa o zaman (s_n) dizisi yavaş azalandır.

$$f(\lambda) := \liminf_{n\to\infty} \min_{n<k\leq\lambda_n} (s_k - s_n)$$

fonksiyonu $(1,\infty)$ aralığında λ ya göre artan olduğundan tanımda $\lim_{\lambda\to 1^+}$ yerine $\sup_{\lambda>1}$ alınabilir. Móricz (2004) (2.3.1) koşulu ile

$$\lim_{\lambda\to 1^-} \liminf_{n\to\infty} \min_{\lambda_n\leq k<n} (s_n - s_k) \geq 0 \tag{2.3.2}$$

koşulunun denk olduğunu ispatlamıştır. Tanıma göre her artan reel sayı dizisi yavaş azalandır. Örneğin, $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ dizisi yavaş azalan bir dizidir.

Teorem 2.3.5 (s_n) bir L sayısına $(C,1)$ toplanabilir (limitlenebilir) olan yavaş azalan reel terimli bir dizi ise bu durumda (s_n) dizisi L sayısına yakınsaktır (Schmidt 1925).

Bir kompleks sayı dizisinin yavaş salınımlı olması tanımı ilk kez Hardy (1910, 1949) tarafından verilmiştir. (s_n) kompleks terimli bir dizi olmak üzere eğer

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \limsup_{n\to\infty} \max_{n<k\leq\lambda_n} |s_k - s_n| = 0 \tag{2.3.3}$$

oluyorsa bu durumda (s_n) dizisine yavaş salınımlıdır denir. Bu tanım daha açık olarak şöyle verilebilir: Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı ve 1'e yeterince yakın bir $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 1$ sayısı var öyleki

$$n_0 \leq n < k \leq \lambda_n \text{ iken } |s_k - s_n| \leq \varepsilon$$

oluyorsa o zaman (s_n) dizisi yavaş salınımlıdır. Móricz (2004), (2.3.3) koşulu ile

$$\lim_{\lambda \to 1^-} \limsup_{n\to\infty} \max_{\lambda_n \leq k < n} |s_n - s_k| = 0 \tag{2.3.4}$$

koşulunun denk olduğunu ispatlamıştır. Yavaş salınımlı bir diziye örnek olarak $(\log n)$ dizisi verilebilir.

Uyarı 2.3.1 $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ olmak üzere (s_n) dizisi için Teorem 2.3.2 deki $n|s_n - s_{n-1}| = O(1)$ koşulu sağlanıyorsa (s_n) dizisi yavaş salınımlıdır. Gerçekten, $n|s_n - s_{n-1}| = O(1)$ ise her n için $|s_n - s_{n-1}| \leq \frac{M}{n}$ olacak biçimde bir $M > 0$ vardır. Böylece bir $\lambda > 1$ sayısı için

$$\max_{n<k\leq\lambda_n} |s_k - s_n| \leq \max_{n<k\leq\lambda_n} \sum_{j=n+1}^{k} |s_j - s_{j-1}| \leq M\frac{\lambda n - n}{n} = \lambda - 1$$

olur. Bu eşitsizlikte önce $\limsup$ alınıp sonra $\lambda \to 1^+$ için limit alınırsa (2.3.3) gereğince (s_n) dizisinin yavaş salınımlı olduğu görülür.

Teorem 2.3.6 (s_n) kompleks sayıların bir L sayısına $(C,1)$ toplanabilir olan yavaş salınımlı bir dizisi ise bu durumda (s_n) dizisi L sayısına yakınsaktır (Hardy 1910).

Ağırlıklı ortalama metodu ile toplanabilme için bilinen Tauber tipi teoremleri ifade etmeden önce bu tezde sıklıkla kullanılacak olan bazı kavramları verelim.

Bir $x = (x_n)$ dizisinin ağırlıklı üreteç dizisi ve ağırlıklı klasik kontrol modülosu kavramları Çanak ve Totur (2011) tarafından tanımlanmıştır. (x_n) bir sayı dizisi olmak üzere x_n ile onun n. ağırlıklı ortalaması $\sigma^{(1)}_{n,p}(x)$ arasındaki fark $V^{(0)}_{n,p}(\Delta x)$ ile gösterilir ve $\left(V^{(0)}_{n,p}(\Delta x)\right)$ dizisine (x_n) dizisinin ağırlıklı üreteç dizisi denir. Ayrıca

$$x_n - \sigma^{(1)}_{n,p}(x) = V^{(0)}_{n,p}(\Delta x)$$

eşitliğine ağırlıklı Kronecker eşitliği denir. Burada

$$V^{(0)}_{n,p}(\Delta x) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} P_{k-1} \Delta x_k$$

ve $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ dir. Eğer $p_n = 1$ ise $\left(V_n^{(0)}(\Delta x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k\Delta x_k\right)$ dizisine üreteç dizisi denir. Bir (x_n) dizisinin ağırlıklı klasik kontrol modülosu ise

$$\omega_{n,p}^{(0)}(x) = \frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta x_n$$

ile tanımlanır. $p_n = 1$ için Tauber (1897) tarafından

$$\omega_n^{(0)}(x) = n\Delta x_n$$

şeklinde tanımlanan klasik kontrol modülo elde edilir. Totur ve Çanak (2012) ağırlıklı klasik kontrol modülo kavramını şu şekilde genelleştirmiştir. $m \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere bir (x_n) dizisinin salınım davranışlarının m. mertebeden ağırlıklı genel kontrol modülosu

$$\omega_{n,p}^{(m)}(x) = \omega_{n,p}^{(m-1)}(x) - \sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m-1)}(x)\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

şeklinde tanımlanır (Totur ve Çanak 2012). $\omega_{n,p}^{(m)}(x)$ tanımında $p_n = 1$ alınırsa $\left(\omega_{n,p}^{(m)}(x)\right)$ dizisi Dik (2002) tarafından tanımlanan ve $\left(\omega_n^{(m)}(x)\right)$ ile gösterilen (x_n) dizisinin salınım davranışlarının m. mertebeden genel kontrol modülosu elde edilir. Her $m \geq 0$ tamsayısı için $\sigma_{n,p}^{(m)}(x)$ ve $V_{n,p}^{(m)}(x)$ ortalamaları ise sırasıyla

$$\sigma_{n,p}^{(m)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{P_n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k \sigma_{k,p}^{(m-1)}(x), & m \geq 1 \\[2ex] x_n, & m = 0 \end{cases}$$

ve

$$V_{n,p}^{(m)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{P_n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k V_{k,p}^{(m-1)}(x), & m \geq 1 \\[2ex] V_{n,p}^{(0)}(\Delta x), & m = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Çanak ve Totur 2011).

Ağırlıklı ortalama metodu ile toplanabilme için bilinen ilk Tauber tipi teorem Hardy (1949) tarafından verilmiştir.

Teorem 2.3.7 Eğer (x_n) dizisi bir L sayısına $(\overline{N}, p)$ toplanabilir ve $\omega_{n,p}^{(0)}(x) = O(1)$ ise bu durumda (x_n) dizisi L sayısına yakınsaktır (Hardy 1949).

Totur ve Çanak (2012), Teorem 2.3.7 den yararlanarak daha genel Tauber tipi teoremler elde etmişlerdir ve bu teoremler, bu tezin bir sonraki bölümünde alışılmış yakınsaklıktan daha zayıf olan istatistiksel yakınsaklık kullanılarak genelleştirilmiştir.

Teorem 2.3.8 Eğer (x_n) dizisi bir L sayısına $(\overline{N},p)$ toplanabilir ve bir $m \geq 0$ tamsayısı için $\omega_{n,p}^{(m)}(x) = O(1)$ ise bu durumda (x_n) dizisi L sayısına yakınsaktır (Totur ve Çanak 2012).

Teorem 2.3.9 Eğer $\left(\sigma_{n,p}^{(1)}(x)\right)$ dizisi bir L sayısına $(\overline{N},p)$ toplanabilir ve bir $m \geq 0$ tamsayısı için $\omega_{n,p}^{(m)}(x) = O(1)$ ise bu durumda (x_n) dizisi L sayısına yakınsaktır (Totur ve Çanak 2012).

Teorem 2.3.10

$$\begin{aligned} \lambda &> 1 \text{ için } 1 < \liminf_n \frac{P_{\lambda_n}}{P_n} \leq \limsup_n \frac{P_{\lambda_n}}{P_n} < \infty \\ 0 &< \lambda < 1 \text{ için } 1 < \liminf_n \frac{P_n}{P_{\lambda_n}} \leq \limsup_n \frac{P_n}{P_{\lambda_n}} < \infty \end{aligned}$$

ve

$$\frac{P_{n-1}}{p_n} = O(n)$$

olsun. Eğer $\left(\sigma_{n,p}^{(1)}(x)\right)$ dizisi bir L sayısına $(\overline{N},p)$ toplanabilir ve bir $m \geq 0$ tamsayısı için $\sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m)}(x)\right) = O(1)$ ise bu durumda (x_n) dizisi L sayısına $(\overline{N},p)$ toplanabilirdir (Totur ve Çanak 2012).

3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE TAUBER TİPİ TEOREMLER

Bu bölümde ilk olarak istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cesàro toplanabilme ile ilgili tauber tipi teoremlerden bahsedilecek. Sonrasında ise istatistiksel $(\overline{N}, p)$ toplanabilme ile ilgili Tauber tipi teoremler ele alınacaktır.

3.1 İstatistiksel Yakınsaklık ve İstatistiksel Cesàro Toplanabilme için Tauber Tipi Teoremler

Önceki kısımdan alışılmış anlamda yakınsaklığın istatististiksel yakınsaklığı gerektirdiğini fakat tersinin doğru olmadığını biliyoruz. Diğer taraftan Schoenberg (1959) sınırlı ve bir L sayısına istatistiksel yakınsak (x_k) dizisinin aynı sayıya $(C, 1)$ toplanabilir ve böylece istatistiksel $(C, 1)$ toplanabilir olduğunu kanıtlamıştır. Ancak bunun tersi geçerli değildir. Örneğin, $((-1)^n)$ dizisi sıfıra $(C, 1)$ toplanabilir ve böylece istatistiksel $(C, 1)$ toplanabilirdir fakat sınırlı olan bu dizi ne bilinen anlamda yakınsak ne de istatistiksel yakınsaktır.

Bazı ek koşullar altında yakınsaklık hem istatistiksel yakınsaklıktan hemde istatistiksel $(C, 1)$ toplanabilmeden elde edilebilir. Bu kısımda ilk olarak yakınsaklığın istatistiksel yakınsaklıktan elde edildiği Tauber tipi teoremlere yer verilecektir. Bu tipteki teoremlerden tek taraflı ve iki taraflı Tauber koşulları kullanılan teoremler Fridy (1985) ve Fridy ve Khan (2000) tarafından ispatlanırken, yavaş salınımlılık ve yavaş azalanlık gibi Tauber koşullarını içeren teoremler Móricz (2004) tarafından ispatlanmıştır.

Fridy (1985) Teorem 2.3.2 deki $(C, 1)$ yakınsaklık koşulunu istatistiksel yakınsaklık ile değiştirmiştir.

Teorem 3.1.1 $x = (x_k)$ bir dizi olmak üzere $st - \lim x = L$ ve $\Delta x_k = O(1/k)$ ise $\lim x = L$ dir. Burada $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$ dır (Fridy 1985).

İspat. $st - \lim x = L$ olduğundan Teorem 2.2.1 den $\lim_k y_k = L$ ve h.h.k. için $x_k = y_k$ olacak şekilde $y = (y_k)$ dizisi seçilebilir. $m(k) = \max\{i \leq k : x_i = y_i\}$ olmak üzere her k indisini $k = m(k) + p(k)$ şeklinde tanımlayalım. Eğer $\{i \leq k : x_i = y_i\}$ kümesi boş ise

$m(k) = -1$ olsun (Bu, en fazla sonlu sayıda k için sağlanır).

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p(k)}{m(k)} = 0 \tag{3.1.1}$$

olduğunu iddia ediyoruz. $\lim\limits_{k} \frac{p(k)}{m(k)} \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O halde $\frac{p(k)}{m(k)} \geq \varepsilon > 0$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}\left|\{i \leq k : x_i \neq y_i\}\right| &\geq \frac{1}{m(k)+p(k)} p(k) \\
&\geq \frac{p(k)}{\dfrac{p(k)}{\varepsilon} + p(k)} \\
&= \frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon} + 1} \\
&= \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}
\end{aligned}$$

olur. Bu ise h.h.k. için $x_k = y_k$ olması ile çelişir. O halde (3.1.1) doğrudur. $\Delta x_k = O(1/k)$ olduğundan her k için $|\Delta x_k| \leq B/k$ olacak şekilde pozitif bir B sabiti vardır. Buradan,

$$\begin{aligned}
\left|y_{m(k)} - x_k\right| &= \left|x_{m(k)} - x_{m(k)+p(k)}\right| \\
&\leq \sum_{i=m(k)}^{m(k)+p(k)-1} |\Delta x_i| \\
&\leq \sum_{i=m(k)}^{m(k)+p(k)-1} \frac{B}{i} \\
&\leq p(k) \frac{B}{m(k)} \to 0,\ k \to \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. $\lim\limits_{k} y_k = L$ olduğundan $\lim\limits_{k} x_k = L$ bulunur. □

Bir sonraki teoremde, Teorem 3.1.1 de kullanılan sınırlılık koşulu yerine boşluk koşulu kullanılmaktadır.

$\{k(i)\}$ pozitif tamsayıların artan bir dizisi olmak üzere eğer $\frac{k(i+1)}{k(i)} \geq \lambda > 1$ ve bir $x = (x_k)$ dizisi $(k(i), k(i+1)]$ aralığında sabit değerler alıyorsa yani $k \neq k(i)$ için $\Delta x_k = 0$ oluyorsa x dizisine $\{k(i)\}$ indisine karşılık gelen boşluk dizisi denir.

Teorem 3.1.2 $\{k(i)\}_{i=1}^{\infty}$ pozitif tamsayıların artan bir dizisi ve $\liminf_i \frac{k(i+1)}{k(i)} > 1$ olsun. x ise $\{k(i)\}$ indis dizisine karşılık gelen boşluk dizisi olsun. Eğer $st - \lim\limits_{k} x_k = L$ ise $\lim\limits_{k} x_k = L$ dir (Fridy 1985).

İspat. $\liminf_i \frac{k(i+1)}{k(i)} = 1 + 2\delta > 1$ ise bu durumda yeterince büyük i için

$$\frac{k(i+1)}{k(i)} > 1 + \delta > 1$$

veya

$$k(i+1) - k(i) > \delta k(i)$$

olur. Bu, $(i+1)$. bloktaki terimlerin sayısının $\delta k(i)$ den büyük olması demektir. $st - \lim_k x_k = L$ fakat $\lim_k x_k \neq L$ olsun. O halde yeterince büyük k sayıları için

$$|x_k - L| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ seçebiliriz. Dolayısıyla böyle bir k sayısı, $(i+1)$. bloktan seçilirse

$$\frac{1}{k(i+1)} \left|\{k \leq k(i+1) : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| > \frac{k(i+1) - k(i)}{k(i+1)} > \frac{\delta}{1+\delta} > 0$$

olur. Bu ise $st - \lim x_k = L$ olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Yani $\lim\limits_k x_k = L$ dir. $\square$

Fridy ve Khan (2000) Teorem 3.1.1 deki $\Delta x_k = O(1/k)$ sınırlılık koşulunu tek taraflı sınırlılık koşulu ile, ayrıca Teorem 2.3.2 ve Teorem 2.3.3 deki $\lim\limits_n \sigma_n = L$ koşulunu $st - \lim\limits_n \sigma_n = L$ zayıf koşulu ile değiştirerek daha genel Tauber tipi teoremler elde etmişlerdir. Bu teoremlerde uygunluk açısından $x_{-1} = 0$ olmak üzere $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ gösterimi kullanılmıştır. Bu teoremleri ifade ve ispat etmeden önce gerekli olan bir lemma verilecektir.

Lemma 3.1.1 Bir x dizisi için $\Delta x_k = O(1/k)$ ise $\Delta\sigma_n = O(1/n)$ dir (Fridy ve Khan 2000).

İspat. $n > 1$ için

$$\begin{aligned}
n\Delta\sigma_n &= n\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} x_k\right\} \\
&= \frac{1}{n-1}\left\{(n-1)\sum_{k=1}^{n} x_k - n\sum_{k=1}^{n-1} x_k\right\} \\
&= \frac{1}{n-1}\left\{(n-1)x_n - \sum_{k=1}^{n-1} x_k\right\} \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(x_n - x_k) \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} \Delta x_j \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{j=2}^{n}(j-1)\Delta x_j \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{j=2}^{n} O(1) \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

dir. Böylece ispat biter. □

Teorem 3.1.3 Bir $x = (x_k)$ dizisi için $st - \lim_n \sigma_n = L$ ve $\Delta x_k = O(1/k)$ ise $\lim_k x_k = L$ dir (Fridy ve Khan 2000).

İspat. $\Delta x_k = O(1/k)$ ise Lemma 3.1.1 den $\Delta\sigma_n = O(1/n)$ dir. O halde Teorem 3.1.1 den $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = L$ dir ve böylece Teorem 2.3.2 den $\lim x = L$ sonucuna ulaşılır. □

Fridy ve Khan (2000), Teorem 2.3.3 deki $(C, 1)$ yakınsaklık koşulunun istatistiksel yakınsaklık ile değiştirilebileceğini ispatlamıştır.

Teorem 3.1.4 Bir $x = (x_k)$ dizisi için $st - \lim x = L$ ve her k için $k\Delta x_{k+1} \geq -c$ olacak biçimde bir $c > 0$ var ise $\lim x = L$ dir (Fridy ve Khan 2000).

İspat. $st - \lim x = L$ ise Teorem 2.2.1 den öyle bir $y = (y_k)$ dizisi vardır öyleki $\lim y = L$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : y_k \neq x_k\}\right| = 0 \tag{3.1.2}$$

dir. $y_k \neq x_k$ şartını sağlayan k indislerinin dizisi $m(i)$ olsun ve $m(i) \to \infty$ $(i \to \infty)$ olduğunu kabul edelim. Aksi halde $\lim x = L$ olduğu aşikardır. Şimdi varsayalım ki $\limsup x \leq L$ olsun. Aksi halde öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki sonsuz sayıda i için $x_{m(i)} \geq y_{m(i)} + 2\varepsilon$ dur. Herbir i için $p(i)$ sayısını şu şekilde tanımlayalım: $x_{m(i)+p(i)}$, $x_{m(i)}$ den sonraki

$$x_{m(i)+p(i)} < y_{m(i)+p(i)} + \varepsilon$$

olacak şekildeki terim olsun. Dolayısıyla yeterince büyük i değerleri için

$$x_{m(i)} - x_{m(i)+p(i)} > \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.1.3}$$

dir.

$$\frac{|\{k \leq m(i)+p(i) : y_k \neq x_k\}|}{m(i)+p(i)} \geq \frac{p(i)}{m(i)+p(i)}$$

olduğundan (3.1.2) den

$$\lim_{i\to\infty} \frac{p(i)}{m(i)} = 0$$

elde ederiz. $k\Delta x_{k+1} \geq -c$ olduğundan

$$\begin{aligned} x_{m(i)} - x_{m(i)+p(i)} &= \sum_{k=m(i)+1}^{m(i)+p(i)} -\Delta x_k \\ &\leq \sum_{k=m(i)+1}^{m(i)+p(i)} \frac{c}{k-1} \\ &\leq c\frac{p(i)}{m(i)} \to 0 \ \ (i \to \infty) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu (3.1.3) ile çelişir. O halde $\limsup x \leq L$ dir.

$\liminf x \geq L$ olduğunu göstermek için $x_k \leq y_k - \varepsilon$ ifadesinin sonsuz çoklukta k sayısı tarafından sağlandığını kabul edelim. Ayrıca sonsuz çokluktaki i için $x_i = y_i$ dir ve herbir i den sonra $x_{m(i)} \leq y_{m(i)} - \varepsilon$ olacak şekilde bir $m\,(i)$ gelir. Böylece yeterince büyük i için

$$x_i - x_{m(i)} = y_i - y_{m(i)} > y_i - \left(y_{m(i)} - \varepsilon\right) > \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.1.4}$$

olur. Yukarıdaki durum gibi, $-\Delta x_k \leq \dfrac{c}{k-1}$ olması, $x_i - x_{m(i)}$ nin sıfıra yaklaşmasını gerektirir. Bu da (3.1.4) ile çelişir. O halde yeterince büyük k sayıları için $x_k > y_k - \varepsilon$ dur. Bu ise $\liminf x \geq \liminf y$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak $\lim x = L$ dir. Böylece ispat biter. □

Teorem 3.1.5 Bir $x = (x_k)$ dizisi için $st-\lim_n \sigma_n = L$ ve her k için $k\Delta x_{k+1} \geq -c$ olacak biçimde bir $c > 0$ var ise $\lim_k x_k = L$ dir (Fridy ve Khan 2000).

İspat. Lemma 3.1.1 den dolayı $k\Delta x_{k+1} \geq -c$ şartı x dizisi için sağlanıyorsa σ_n aritmetik ortalaması içinde sağlanır. Çünkü

$$n\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=2}^{n+1}(j-1)\Delta x_j \geq \frac{1}{n+1}\sum_{j=2}^{n+1}(-c) = \frac{-nc}{n+1} \geq -c$$

dir. Yani Teorem 3.1.4 ün hipotezi σ_n için de sağlanır. O halde $\lim \sigma_n = L$ dir. Böylece Teorem 2.3.3 den $\lim x = L$ sonucu elde edilir. □

Móricz (2004), Teorem 2.3.5 in ve Teorem 2.3.6 nın hipotezlerindeki $(C,1)$ toplanabilmenin istatistiksel $(C,1)$ toplanabilme zayıf hipotezi ile değiştirilebileceğini ispatlamış ve böylece Fridy ve Khan (2000) tarafından elde edilen sonuçları genelleştirmiştir. İlk olarak bu teoremlerin ispatında kullanılacak olan bazı lemmalardan bahsedilecektir.

Lemma 3.1.2 (x_k) reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer $m_0 \leq k < n \leq \lambda k$ şartını sağlayan her k ve n için

$$x_n - x_k \geq -1 \tag{3.1.5}$$

olacak biçimde bir m_0 pozitif tamsayısı ve bir $\lambda > 1$ reel sayısı varsa bu durumda

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_n - x_k)$$

dizisi alttan sınırlıdır (Armitage ve Maddox 1990).

Lemma 3.1.3 (x_k) kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer $m_0 \leq k < n \leq \lambda k$ şartını sağlayan her k ve n için

$$|x_n - x_k| \leq 1 \tag{3.1.6}$$

olacak biçimde bir m_0 pozitif tamsayısı ve bir $\lambda > 1$ reel sayısı varsa bu durumda, her $1 \leq k \leq \frac{n}{\lambda}$ için

$$|x_n - x_k| \leq B \log\left(\frac{n}{k}\right) \tag{3.1.7}$$

olacak biçimde pozitif bir B sabiti vardır (Móricz 2004).

İspat. Genelliği bozmadan m_0 sayısını

$$m_0 \geq \frac{2\lambda}{\lambda - 1} \tag{3.1.8}$$

şartını sağlayacak derecede büyük seçelim. $n > m_0$ olsun. $n_0 := n$ ve

$$n_p := 1 + \left[\frac{n_{p-1}}{\lambda}\right] \quad p = 1, 2, .., q \tag{3.1.9}$$

olacak şekilde n_p sayıları tanımlansın. Burada q sayısı

$$n_{q+1} \leq m_0 < n_q \tag{3.1.10}$$

şartı ile belirlenmiştir. (3.1.9) dan

$$n_0 := n > n_1 > n_2 > ... > n_q > m_0 > n_{q+1}$$

yazılabilir. k sayısını $1 \leq k \leq \frac{n}{\lambda}$ şartını sağlayacak şekilde seçelim. Eğer $m_0 \leq k \leq \frac{n}{\lambda}$ ise $1 \leq p \leq q$ için

$$n_{p+1} \leq k < n_p \tag{3.1.11}$$

olur. (3.1.6) ifadesi göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} |x_n - x_k| &\leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - x_{n_2}| + ... + \left|x_{n_{p-1}} - x_{n_p}\right| + \left|x_{n_p} - x_k\right| \\ &\leq p + 1 \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

olur. (3.1.9) dan

$$n_1 \leq 1 + \frac{n}{\lambda}$$

$$n_2 \leq 1 + \frac{n_1}{\lambda} \leq 1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{n}{\lambda^2}$$

$$n_p \leq 1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + ... + \frac{1}{\lambda^{p-1}} + \frac{n}{\lambda^p} < \frac{1 - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^p}{1 - \frac{1}{\lambda}} + \frac{n}{\lambda^p} < \frac{\lambda}{\lambda - 1} + \frac{n}{\lambda^p}$$

elde edilir. (3.1.8) den $\frac{\lambda}{(\lambda-1)m_0} \leq \frac{1}{2}$ ve buradan da

$$1 - \frac{\lambda}{(\lambda - 1)\, m_0} \geq \frac{1}{2} \tag{3.1.13}$$

yazılabilir. $n_p > k \geq m_0$ ise

$$-\frac{\lambda}{(\lambda - 1)\, n_p} > -\frac{\lambda}{(\lambda - 1)\, m_0} \tag{3.1.14}$$

olur. Ayrıca

$$1 < \frac{\lambda}{(\lambda - 1)\, n_p} + \frac{n}{n_p \lambda^p}$$

olduğundan

$$1 - \frac{\lambda}{(\lambda - 1)\, n_p} < \frac{n}{n_p \lambda^p} < \frac{n}{n_p} \tag{3.1.15}$$

dir. (3.1.13), (3.1.14) ve (3.1.15) den

$$\frac{1}{2}\lambda^p \leq \lambda^p \left(1 - \frac{\lambda}{(\lambda - 1)\, m_0}\right) \leq \lambda^p \left(1 - \frac{\lambda}{(\lambda - 1)\, n_p}\right) < \frac{n}{n_p} < \frac{n}{k}$$

elde edilir. Son eşitsizlikten $\lambda^p \leq \frac{2n}{k}$ sonucu çıkar. Böylece

$$p \leq \frac{1}{\log \lambda} \log \frac{2n}{k} \quad , n_{p+1} \leq k < n_p, \quad 1 \leq p \leq q \tag{3.1.16}$$

olur. (3.1.12) den

$$|x_n - x_k| \leq 1 + \frac{1}{\log \lambda} \log \frac{2n}{k}, \quad m_0 \leq k \leq \frac{n}{\lambda} \tag{3.1.17}$$

sonucu çıkar.

Eğer $1 \leq k < m_0$ ise (3.1.6) dan

$$\begin{aligned} |x_n - x_k| &\leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - x_{n_2}| + ... + \left|x_{n_q} - x_{m_0}\right| + |x_{m_0} - x_k| \\ &\leq q + 1 + c \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

yazılabilir. Burada

$$c := \max_{1 \leq k < m_0} |x_{m_0} - x_k| \tag{3.1.19}$$

şeklinde tanımlıdır. Yukarıdaki işlemler q için yapılırsa (3.1.16)'ya benzer biçimde

$$q < \frac{1}{\log \lambda} \log \frac{2n}{k} \tag{3.1.20}$$

elde edilir. (3.1.20) ve (3.1.18) ifadelerinden

$$|x_n - x_k| \leq 1 + c + \frac{1}{\log \lambda} \log \frac{2n}{k}, \quad 1 \leq k < m_0 \tag{3.1.21}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.1.16) da $c \geq 0$ olduğundan hem (3.1.17) hemde (3.1.21) durumu için

$$\begin{aligned} |x_n - x_k| &\leq 1 + c + \frac{1}{\log \lambda} \log \frac{2n}{k} \\ &= 1 + c + \frac{1}{\log \lambda} \log 2 + \frac{1}{\log \lambda} \log \frac{n}{k} \end{aligned}$$

olur. Eğer

$$B := \frac{1}{\log \lambda} \left(2 + c + \frac{\log 2}{\log \lambda} \right)$$

olarak tanımlanırsa $m_0 \leq k \leq \frac{n}{\lambda}$ için $\log \lambda \leq \log \dfrac{n}{k}$ olduğundan

$$\begin{aligned} 1 + c + \frac{1}{\log \lambda} \log 2 + \frac{1}{\log \lambda} \log \frac{n}{k} &= \left(B - \frac{1}{\log \lambda} \right) \log \lambda + \frac{1}{\log \lambda} \log \frac{n}{k} \\ &\leq \left(B - \frac{1}{\log \lambda} \right) \log \frac{n}{k} + \frac{1}{\log \lambda} \log \frac{n}{k} \\ &= B \log \frac{n}{k} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat biter. □

Lemma 3.1.4 (x_k) kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer (3.1.6) sağlanacak şekilde bir m_0 pozitif tamsayısı ve bir $\lambda > 1$ reel sayısı var ise, bu durumda

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_n - x_k| \tag{3.1.22}$$

dizisi sınırlıdır (Móricz 2004).

İspat. Lemma 3.1.3 den bir B sabit sayısı vardır öyleki $1 \leq k \leq \dfrac{n}{\lambda}$ şartını sağlayan her k sayısı için

$$|x_n - x_k| \leq B\log\left(\frac{n}{k}\right) \tag{3.1.23}$$

dır. $k = 2, 3, ..., n$ olmak üzere

$$\log k > \int_{k-1}^{k} \log u du$$

eşitsizliğinden

$$-\sum_{k=2}^{n}\log k < -\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\log u du = -\int_{1}^{n}\log u du = -n\log n + n - 1$$

yazılabilir. Son eşitsizlikle birlikte (3.1.6) ve (3.1.23) den $n \geq \lambda m_0$ için aşağıdaki işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}|x_n - x_k| &= \left\{\sum_{k=1}^{[n/\lambda]} + \sum_{k=1+[n/\lambda]}^{n}\right\}|x_n - x_k| \\
&\leq B\sum_{k=1}^{[n/\lambda]}\log\left(\frac{n}{k}\right) + \left(n - \left[\frac{n}{\lambda}\right]\right) \\
&\leq B\sum_{k=1}^{[n/\lambda]}\log(n/k) + n \\
&= B\left\{n\log n - \sum_{k=2}^{n}\log k\right\} + n \\
&\leq B\left\{n\log n - \int_{1}^{n}\log u du\right\} + n \\
&< (B+1)\,n
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.1.22) ile verilen dizinin sınırlılığı kanıtlanmış olur. □

Aşağıdaki lemmada Landau'nun (1910) tek yönlü Tauber koşulu yerine daha zayıf bir koşul olan yavaş azalanlık koşulu kullanılarak istatistiksel yakınsaklıktan yakınsaklık elde edilmiştir.

Lemma 3.1.5 (x_k) reel sayıların bir dizisi olsun. (x_k) bir L sayısına istatistiksel yakınsak ve yavaş azalan ise (x_k) dizisi L sayısına yakınsaktır (Móricz 2004).

İspat. Teorem 2.2.1 (iii) den h.h.k için $y_k = x_k$ şartını sağlayan k indislerinin alt kümesini $1 \leq l_1 < l_2 < ...$ ile gösterelim. $n := l_m$ yazarsak $m \to \infty$ için

$$\frac{1}{l_m} \left|\{k \leq l_m : y_k = x_k\}\right| = \frac{m}{l_m} \to 1$$

olur. Buradan

$$\lim_{m\to\infty} \frac{l_m + 1}{l_m} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{l_m + 1}{m+1} \frac{m+1}{m} \frac{m}{l_m} \right) = 1 \qquad (3.1.24)$$

sonucu çıkar. (l_m) alt dizisinin tanımı gereği

$$\lim_{m\to\infty} x_{l_m} = \lim_{m\to\infty} y_{l_m} = L \qquad (3.1.25)$$

dir. (x_k) yavaş azalan olduğundan (2.3.1) den her $\varepsilon > 0$ için

$$\liminf_{m\to\infty} \min_{n<k\leq\lambda n} (x_k - x_n) \geq -\varepsilon \qquad (3.1.26)$$

olacak şekilde bir $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 1$ vardır. (3.1.24) den yeterince büyük m değerleri için $l_{m+1} < \lambda l_m$ yazılabilir. Buradan

$$\min_{l_m<k<l_m+1} (x_k - x_{l_m}) \geq \min_{l_m<k<\lambda l_m} (x_k - x_{l_m})$$

ve (3.1.26) dan

$$\liminf_{m\to\infty} \min_{n<k\leq\lambda n} (x_k - x_{l_m}) \geq -\varepsilon \qquad (3.1.27)$$

olur. $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi olduğundan

$$\liminf_{m\to\infty} \min_{l_m<k<l_m+1} (x_k - x_{l_m}) \geq 0$$

elde edilir.

$$\min_{l_m<k<l_m+1} x_k = \min_{l_m<k<l_{m+1}} (x_k - x_{l_m}) + x_{l_m}$$

eşitliği göz önüne alınırsa (3.1.25) den

$$\liminf_{m\to\infty} \min_{l_m<k<l_m+1} x_k \geq L \qquad (3.1.28)$$

sonucunu elde ederiz. Diğer taraftan (2.3.2) den her $\varepsilon > 0$ için

$$\liminf_{m\to\infty} \min_{\lambda n\le k<n} (x_n - x_k) \ge -\varepsilon \tag{3.1.29}$$

olacak şekilde bir $\lambda = \lambda(\varepsilon) < 1$ sayısı vardır. Yeterince büyük m değerleri için

$$\min_{l_m<k<l_m+1} \left(x_{l_{m+1}} - x_k\right) \ge \min_{\lambda l_{m+1}\le k<l_{m+1}} (x_k - x_{l_m})$$

olduğundan (3.1.29) dan

$$\liminf_{m\to\infty} \min_{l_m<k<l_m+1} \left(x_{l_{m+1}} - x_k\right) \ge -\varepsilon$$

sonucu elde edilir. $\varepsilon > 0$ sayısının keyfi olmasından dolayı

$$\liminf_{m\to\infty} \min_{l_m<k<l_m+1} \left(x_{l_{m+1}} - x_k\right) \ge 0$$

yazılabilir.

$$\min_{l_m<k<l_m+1} (-x_k) = \min_{l_m<k<l_{m+1}} \left(x_{l_{m+1}} - x_k\right) - x_{l_{m+1}}$$

olduğu göz önüne alınırsa (3.1.25) den

$$\liminf_{m\to\infty} \min_{l_m<k<l_m+1} (-x_k) \ge -L$$

elde edilir ve bu son ifade

$$\limsup_{m\to\infty} \max_{l_m<k<l_m+1} x_k \le L \tag{3.1.30}$$

ifadesine denktir. (3.1.28) ve (3.1.30) ifadelerini birleştirirsek

$$L \le \liminf_{m\to\infty} \min_{l_m<k<l_m+1} x_k \le \limsup_{m\to\infty} \max_{l_m<k<l_m+1} x_k \le L$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise (x_k) dizisinin L sayısına yakınsadığını gösterir. $\square$

Bir sonraki lemmada ise Hardy'nin (1910) iki yönlü Tauber şartı yerine daha zayıf bir şart olan yavaş salınımlılık şartı kullanılarak istatistiksel yakınsaklıktan yakınsaklık elde edilmiştir.

Lemma 3.1.6 (x_k) kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer (x_k) bir L sayısına istatistiksel yakınsak ve yavaş salınımlı ise bu durumda (x_k) dizisi L sayısına yakınsaktır (Móricz 2004).

İspat. Teorem 2.2.1 (iii) den h.h.k için $y_k = x_k$ şartını sağlayan k indislerinin alt kümesini $1 \le l_1 < l_2 < ...$ ile gösterirsek (3.1.24) ile (3.1.25) sağlanır. x_k yavaş salınımlı olduğundan her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 1$ vardır öyleki

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{n<k\le\lambda n} |x_k - x_n| \le \varepsilon \tag{3.1.31}$$

olur. (3.1.26) ve (3.1.27) ye benzer olarak (3.1.24) ve (3.1.31) den

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{l_m<k\leq l_{m+1}} |x_k - x_n| \leq \varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi olduğundan

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{l_m<k\leq l_{m+1}} |x_k - x_n| = 0 \tag{3.1.32}$$

yazılabilir. (3.1.25) ve (3.1.32) den (x_k) dizisinin L ye yakınsadığı sonucunu elde edilir. □

Teorem 3.1.6 (x_k) reel sayı dizisi bir L sayısına istatistiksel $(C,1)$ toplanabilir ve yavaş azalan ise bu durumda (x_k) dizisi L sayısına yakınsaktır (Móricz 2004).

İspat. İlk olarak (x_k) yavaş azalan bir dizi ise (σ_n) dizisinin de yavaş azalan olduğunu gösterelim. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. (x_k) dizisinin yavaş azalan olmasından dolayı

$$n_0 \leq n < k \leq \lambda_0 n \text{ iken } x_k - x_n \geq -\varepsilon \tag{3.1.33}$$

olacak şekilde en az bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ve 1 sayısına istediğimiz kadar yakın seçebileceğimiz bir $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon) > 1$ sayısı vardır. $n_0 \leq n < k \leq \lambda_0 n$ olsun. σ_n ortalamasının tanımından

$$\begin{aligned} \sigma_k - \sigma_n &= -\frac{k-n}{kn}\sum_{j=1}^{n} x_j + \frac{1}{k}\sum_{j=n+1}^{n} x_j \\ &= \frac{k-n}{kn}\sum_{j=1}^{n}(x_k - x_j) + \frac{1}{k}\sum_{j=n+1}^{n}(x_k - x_j) \end{aligned} \tag{3.1.34}$$

yazılabilir. Lemma 3.1.2 den

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_k - x_j) \geq -B, \quad n = 1, 2, ...$$

olacak biçimde pozitif bir B sabiti vardır. Bu eşitsizliği ve (3.1.33) ü kullanırsak

$$\sigma_k - \sigma_n \geq \frac{k-n}{k}(-B) + \frac{1}{k}(k-n)(-\varepsilon) = -\left(1 - \frac{n}{k}\right)(B + \varepsilon) \tag{3.1.35}$$

olur. $n < k \leq \lambda_0 n$ ve $\lambda_0 > 1$ olduğundan

$$1 - \frac{n}{k} \leq 1 - \frac{1}{\lambda_0} < \lambda_0 - 1 \tag{3.1.36}$$

elde edilir. Böylece λ_0 sayısı

$$1 < \lambda_0 \leq 1 + \frac{\varepsilon}{B + \varepsilon} \tag{3.1.37}$$

olacak şekilde seçilip (3.1.35) de yerine yazılırsa, $n_0 \leq n < k \leq \lambda_0 n$ için

$$\sigma_k - \sigma_n \quad \geq -(\lambda_0 - 1)(B+\varepsilon) \geq \frac{-\varepsilon}{B+\varepsilon}(B+\varepsilon) = -\varepsilon$$

elde edilir. Bu ise (σ_n) dizisinin yavaş salınımlı olduğunu gösterir. Sonuç olarak Lemma 3.1.6 dan (σ_n) ortalaması L sayısına alışılmış anlamda yakınsaktır. Böylece Teorem 2.3.5 den (x_k) dizisinin L sayısına yakınsak olduğu elde edilir. □

Teorem 3.1.7 Kompleks terimli bir (x_k) dizisi bir L sayısına istatistiksel $(C,1)$ toplanabilir ve (x_k) yavaş salınımlı ise bu durumda (x_k) dizisi L sayısına yakınsaktır (Móricz 2004).

İspat. İlk olarak (x_k) dizisi yavaş salınımlı ise (σ_n) dizisininde yavaş salınımlı olduğunu göstereceğiz. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. (x_k) yavaş salınımlı olduğundan

$$n_0 \leq n < k \leq \lambda_0 n \text{ iken } |x_k - x_n| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı ve 1'e yeterince yakın bir $\lambda_o = \lambda_0(\varepsilon) > 1$ sayısı vardır. (3.1.34) den

$$|\sigma_k - \sigma_n| \leq \frac{k-n}{kn} \sum_{j=1}^{n} |x_n - x_j| + \frac{1}{k} \sum_{j=n+1}^{n} |x_n - x_j|$$

yazılabilir. Lemma 3.1.4 den

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |x_n - x_j| \leq B, \quad n = 1, 2, ...$$

olacak biçimde bir B sabiti vardır. (3.1.35)'e ve (3.1.36)'ya benzer şekilde işlemler yapılır ve λ_0, (3.1.37) deki gibi seçilirse $n_0 \leq n < k \leq \lambda_0 n$ iken

$$|\sigma_k - \sigma_n| \leq \left(1 - \frac{n}{k}\right)(B+\varepsilon) < (\lambda_0 - 1)(B+\varepsilon) < \varepsilon$$

sonucu çıkar. Bu ise (σ_n) dizisinin yavaş salınımlı olduğunu gösterir. Böylece, Teorem 3.1.6 dan (σ_n) dizisi L sayısına yakınsak olur. Sonuç olarak Teorem 2.3.6 dan (x_k) dizisinin L sayısına yakınsak olduğu elde edilir. □

3.2 İstatistiksel $(\overline{N}, p)$ Toplanabilme için Tauber Tipi Teoremler

$x = (x_k)$ reel yada kompleks terimli bir dizi olmak üzere sonlu bir L sayısı için eğer

$$st - \lim_k x_k = L \tag{3.2.1}$$

ise bu durumda

$$st - \lim_{n} \sigma_{n,p}^{(1)}(x) = L \tag{3.2.2}$$

olur fakat tersi her zaman doğru değildir. Móricz ve Orhan (2004), (3.2.1) in (3.2.2) den elde edildiği gerekli ve yeterli koşulları vermişlerdir. Bu kısımda önce bu koşullara değinilecek ve daha sonra Móricz ve Orhan (2004) tarafından verilen koşullar genelleştirilerek elde edilen sonuçlar ispatlanacaktır.

Lemma 3.2.1 $p = (p_k)$ negatif olmayan sayıların $p_0 > 0$ şartını sağlayan bir dizisi olsun. O halde her $\lambda > 1$ için

$$st - \liminf \frac{P_{\lambda_n}}{P_n} > 1 \tag{3.2.3}$$

ve her $0 < \lambda < 1$ için

$$st - \liminf \frac{P_n}{P_{\lambda_n}} > 1 \tag{3.2.4}$$

şartları denktir (Móricz ve Orhan 2004).

Uyarı 3.2.1 (3.2.3) veya (3.2.4) şartları $P_n \to \infty$ olmasını gerektirir (Móricz ve Orhan 2004).

Teorem 3.2.1 $p = (p_k)$ negatif olmayan sayıların $p_0 > 0$ ve (3.2.3) koşullarını sağlayan bir dizisi olsun. Eğer (x_k) reel sayıların sonlu bir L sayısına istatistiksel $(\overline{N}, p)$ toplanabilir olan sınırlı bir dizisi ise bu durumda (x_k) dizisinin aynı L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \leq N : \frac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k (x_k - x_n) \leq -\varepsilon \right\} \right| = 0$$

ve

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \leq N : \frac{1}{P_n - P_{\lambda_n}} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_k (x_n - x_k) \leq -\varepsilon \right\} \right| = 0$$

koşullarının sağlanmasıdır (Móricz ve Orhan 2004).

Teorem 3.2.2 $p = (p_k)$ negatif olmayan sayıların $p_0 > 0$ ve (3.2.3) koşullarını sağlayan bir dizisi olsun. Eğer (x_k) kompleks sayıların sonlu bir L sayısına istatistiksel $(\overline{N}, p)$ toplanabilir olan sınırlı bir dizisi ise bu durumda (x_k) dizisinin aynı L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \leq N : \left| \frac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k (x_k - x_n) \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

veya

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \le N : \left| \frac{1}{P_n - P_{\lambda_n}} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_k \left(x_n - x_k\right) \right| \ge \varepsilon \right\} \right| = 0$$

koşullarından birinin sağlanmasıdır (Móricz ve Orhan 2004).

Belen (2014b), Teorem 3.2.1 de ve Teorem 3.2.2 de verilen koşullarda (x_k) dizisi yerine onun ağırlıklı üreteç dizisini alarak daha zayıf Tauber koşulları elde etmiştir. Bu koşulları içeren Tauber tipi teoremleri ifade ve ispat etmeden önce gerekli olan bazı yardımcı teoremleri verelim.

Kolk'un (1993) vermiş olduğu önemli bir karakterizasyonun küçük bir modifikasyonu aşağıdaki gibidir.

Lemma 3.2.2 $A \in (st \cap \ell_\infty, c; p) \Leftrightarrow A$ regülerdir ve $\delta(K) = 0$ şartını sağlayan her $K \subset \mathbb{N}$ için $\lim_n \sum_{k\in K} a_{nk} = 0$ dır (Kolk 1993).

Lemma 3.2.2 ye göre eğer $x \in st \cap \ell_\infty$ ve $P_n \to \infty$ ise $\lim_n \sigma_{n,p}^{(1)}(x) = L$ ve böylece $st - \lim_n \sigma_{n,p}^{(1)}(x) = L$ dir.

Lemma 3.2.3 $p = (p_k)$ negatif olmayan sayıların $p_0 > 0$ ve (3.2.3) koşullarını sağlayan bir dizisi ve (x_k) kompleks sayıların, sonlu bir L sayısına istatistiksel $(\overline{N}, p)$ toplanabilir bir dizisi olsun. O halde, her $\lambda > 0$ için $st - \lim \sigma_{\lambda_n,p}^{(1)} = L$ dir (Móricz ve Orhan 2004).

Lemma 3.2.4 (i) Eğer $\lambda > 1$ ise

$$\frac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k x_k = \sigma_{n,p}^{(1)} + \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} \left(\sigma_{\lambda_n,p}^{(1)} - \sigma_{n,p}^{(1)} \right)$$

dir.

(ii) Eğer $0 < \lambda < 1$ ise

$$\frac{1}{P_n - P_{\lambda_n}} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_k x_k = \sigma_{n,p}^{(1)} + \frac{P_{\lambda_n}}{P_n - P_{\lambda_n}} \left(\sigma_{n,p}^{(1)} - \sigma_{\lambda_n,p}^{(1)} \right)$$

dir (Móricz ve Orhan 2004).

Aşağıdaki lemma ispatlarda yararlı olacaktır.

Lemma 3.2.5 $p=(p_k)$ negatif olmayan sayıların $p_0>0$ şartını sağlayan bir dizisi olsun ve (3.2.3) sağlansın. Eğer (x_k) kompleks sayıların sonlu bir L sayısına istatistiksel $(\overline{N},p)$ toplanabilir sınırlı bir dizisi ise bu durumda her $\lambda>1$ için

$$st-\lim \frac{1}{P_{\lambda_n}-P_n}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k V_{k,p}^{(0)}(\Delta x)=0 \tag{3.2.5}$$

ve her $0<\lambda<1$ için

$$st-\lim \frac{1}{P_n-P_{\lambda_n}}\sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_k V_{k,p}^{(0)}(\Delta x)=0 \tag{3.2.6}$$

dır (Belen 2014b).

İspat. *$\lambda>1$ durumu.* (x_k) dizisi sonlu bir L sayısına istatistiksel $(\overline{N},p)$ toplanabilir ise tanım gereğince $st-\lim \sigma_{n,p}^{(1)}=L$ dir. Ayrıca Lemma 3.2.2 den $st-\lim \sigma_{n,p}^{(2)}=L$ dir. Ağırlıklı Kronecker özdeşliğinden $st-\lim V_{n,p}^{(1)}(\Delta x)=0$ olur. Dolayısıyla Lemma 3.2.3 den $st-\lim V_{\lambda_n,p}^{(1)}(\Delta x)=0$ elde edilir. Lemma 3.2.4 (i) de x_n yerine $V_{n,p}^{(0)}(\Delta x)$ yazarsak

$$\frac{1}{P_{\lambda_n}-P_n}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k V_{k,p}^{(0)}(\Delta x)=V_{n,p}^{(1)}(\Delta x)+\frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n}-P_n}\left(V_{\lambda_n,p}^{(1)}(\Delta x)-V_{n,p}^{(1)}(\Delta x)\right) \tag{3.2.7}$$

elde edilir. Ayrıca Lemma 3.2.1 den

$$st-\limsup \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n}-P_n}=st-\limsup \frac{1}{\frac{P_{\lambda_n}}{P_n}-1}=\frac{1}{st-\liminf \frac{P_{\lambda_n}}{P_n}-1}<\infty \tag{3.2.8}$$

olur. Böylece (3.2.7) ve (3.2.8) den (3.2.5) elde edilir.
$0<\lambda<1$ durumu. Eğer Lemma 3.2.4 (ii) de x_n yerine $V_{n,p}^{(0)}(\Delta x)$ yazarsak

$$\frac{1}{P_n-P_{\lambda_n}}\sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_k V_{k,p}^{(0)}(\Delta x)=V_{n,p}^{(1)}(\Delta x)+\frac{P_{\lambda_n}}{P_n-P_{\lambda_n}}\left(V_{n,p}^{(1)}(\Delta x)-V_{\lambda_n,p}^{(1)}(\Delta x)\right) \tag{3.2.9}$$

bulunur. Dolayısıyla (3.2.4) den

$$st-\limsup \frac{P_{\lambda_n}}{P_n-P_{\lambda_n}}=\frac{1}{st-\liminf \frac{P_n}{P_{\lambda_n}}-1}<\infty \tag{3.2.10}$$

olur. Böylece (3.2.9) ve (3.2.10) dan (3.2.6) elde edilir. □

Uyarı 3.2.2 Eğer (3.1.2), (2.2.2) ve (3.2.3) koşulları sağlanırsa, Lemma 3.2.5 den ve ağırlıklı Kronecker özdeşliğinden her $\lambda>1$ sayısı için

$$st-\lim \frac{1}{P_{\lambda_n}-P_n}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k\left(V_{k,p}^{(0)}(\Delta x)-V_{n,p}^{(0)}(\Delta x)\right)=0$$

ve her $0 < \lambda < 1$ sayısı için

$$st - \lim \frac{1}{P_n - P_{\lambda_n}} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_k \left(V_{n,p}^{(0)}(\Delta x) - V_{k,p}^{(0)}(\Delta x) \right) = 0$$

sonuçları elde edilir.

Aşağıdaki sonuç reel sayı dizilerinin istatistiksel $(\overline{N}, p)$ toplanabilirliğinden istatistiksel yakınsaklığının elde edildiği bir Tauber tipi teoremdir.

Teorem 3.2.3 $p = (p_k)$ negatif olmayan sayıların $p_0 > 0$ şartını sağlayan bir dizisi olsun ve (3.2.3) şartı sağlansın. Eğer (x_k) reel sayıların sonlu bir L sayısına istatistiksel $(\overline{N}, p)$ toplanabilir sınırlı bir dizisi ise bu durumda (x_k) dizisinin aynı L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için

$$\inf_{\lambda > 1} \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \le N : \frac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k \left(V_{k,p}^{(0)} - V_{n,p}^{(0)} \right) \le -\varepsilon \right\} \right| = 0 \qquad (3.2.11)$$

ve

$$\inf_{0 < \lambda < 1} \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \le N : \frac{1}{P_n - P_{\lambda_n}} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_k \left(V_{n,p}^{(0)} - V_{k,p}^{(0)} \right) \le -\varepsilon \right\} \right| = 0 \qquad (3.2.12)$$

koşullarının sağlanmasıdır (Belen 2014b)

İspat. İspatın gereklilik kısmı Uyarı 3.2.2 den elde edilir. Tersine (2.2.2), (3.2.3) ve (3.2.11)-(3.2.12) koşullarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda Lemma 3.2.5 de olduğu gibi $st - \lim V_{n,p}^{(1)}(\Delta x) = 0$ ve böylece Lemma 3.2.3 den $st - \lim V_{\lambda_n,p}^{(1)} = 0$ elde ederiz. $x_n - \sigma_{n,p}^{(1)} = V_{n,p}^{(0)}(\Delta x)$ olduğundan ispat için $st - \lim V_{n,p}^{(0)}(\Delta x) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak $\lambda > 1$ durumunu ele alalım. (3.2.7) den

$$V_{n,p}^{(0)} - V_{n,p}^{(1)} = \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} \left(V_{\lambda_n,p}^{(1)} - V_{n,p}^{(1)} \right) - \frac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k \left(V_{k,p}^{(0)} - V_{n,p}^{(0)} \right) \qquad (3.2.13)$$

yazılabilir. Dolayısıyla her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\begin{aligned} &\left\{ n \le N : V_{n,p}^{(0)} - V_{n,p}^{(1)} \ge \varepsilon \right\} \\ &\quad \subset \left\{ n \le N : \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n} - P_n} \left(V_{\lambda_n,p}^{(1)} - V_{n,p}^{(1)} \right) \ge \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\ &\quad \cup \left\{ n \le N : \frac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k \left(V_{k,p}^{(0)} - V_{n,p}^{(0)} \right) \le -\frac{\varepsilon}{2} \right\} \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan, verilen herhangi bir $\delta > 0$ için, (3.2.11) den

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \le N : \frac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k \left(V_{k,p}^{(0)} - V_{n,p}^{(0)} \right) \le -\frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \le \delta \qquad (3.2.14)$$

olacak biçimde bir $\lambda > 1$ sayısı vardır. Diğer taraftan (3.2.8) den

$$\lim_{N\to\infty}\left|\left\{n \leq N : \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n}-P_n}\left(V^{(1)}_{\lambda_n,p}-V^{(1)}_{n,p}\right) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| = 0. \tag{3.2.15}$$

dır. (3.2.14) ve (3.2.15) birlikte düşünüldüğünde

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\left|\left\{n \leq N : V^{(0)}_{n,p}-V^{(1)}_{n,p} \geq \varepsilon\right\}\right| \leq \delta$$

sonucunu verir. $\delta > 0$ sayısı keyfi olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\left|\left\{n \leq N : V^{(0)}_{n,p}-V^{(1)}_{n,p} \geq \varepsilon\right\}\right| = 0 \tag{3.2.16}$$

elde edilir. Şimdi de $0 < \lambda < 1$ durumunu ele alalım. (3.2.9) dan

$$V^{(0)}_{n,p}-V^{(1)}_{n,p} = \frac{P_{\lambda_n}}{P_n-P_{\lambda_n}}\left(V^{(1)}_{n,p}-V^{(1)}_{\lambda_n,p}\right)+\frac{1}{P_n-P_{\lambda_n}}\sum_{k=\lambda_n+1}^{n}p_k\left(V^{(0)}_{n,p}-V^{(0)}_{k,p}\right) \tag{3.2.17}$$

yazılabilir. Buradan her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\begin{aligned}&\left\{n \leq N : V^{(0)}_{n,p}-V^{(1)}_{n,p} \leq -\varepsilon\right\}\\ &\subset \left\{n \leq N : \frac{P_{\lambda_n}}{P_n-P_{\lambda_n}}\left(V^{(1)}_{n,p}-V^{(1)}_{\lambda_n,p}\right) \leq -\frac{\varepsilon}{2}\right\}\\ &\cup \left\{n \leq N : \frac{1}{P_n-P_{\lambda_n}}\sum_{k=\lambda_n+1}^{n}p_k\left(V^{(0)}_{n,p}-V^{(0)}_{k,p}\right) \leq -\frac{\varepsilon}{2}\right\}\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki $\lambda > 1$ durumunun ispatına benzer bir düşünceyle (3.2.10) ve (3.2.12) den

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\left|\left\{n \leq N : V^{(0)}_{n,p}-V^{(1)}_{n,p} \leq -\varepsilon\right\}\right| = 0 \tag{3.2.18}$$

elde ederiz. O halde (3.2.16) ve (3.2.18) den her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\left|\left\{n \leq N : \left|V^{(0)}_{n,p}-V^{(1)}_{n,p}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

sonucunu elde ederiz. Böylece $st-\lim\left(V^{(0)}_{n,p}-V^{(1)}_{n,p}\right) = 0$ ve buradan da $st-\lim V^{(0)}_{n,p}(\Delta x) = 0$ bulunur. □ $p_k = 1$ özel durumunda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.1 Eğer (x_k) reel sayıların sonlu bir L sayısına istatistiksel $(C,1)$ toplanabilir sınırlı bir dizisi ise bu durumda (x_k) dizisinin aynı L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için

$$\inf_{\lambda>1}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\left|\left\{n \leq N : \frac{1}{\lambda_n-n}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n}\left(V^{(0)}_k-V^{(0)}_n\right) \leq -\varepsilon\right\}\right| = 0$$

ve

$$\inf_{0<\lambda<1}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\left|\left\{n \leq N : \frac{1}{n-\lambda_n}\sum_{k=\lambda_n+1}^{n}\left(V^{(0)}_n-V^{(0)}_k\right) \leq -\varepsilon\right\}\right| = 0$$

koşullarının sağlanmasıdır (Belen 2014a)

İlk kez reel sayı dizilerinin $(C, 1)$ toplanabilirliği durumu için Schmidt (1925) tarafından verilen yavaş azalanlık kavramı Móricz (2002) tarafından şu şekilde genelleştirilmiştir: Eğer bir (x_k) reel sayı dizisi verildiğinde, her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \leq N : \min_{n<k\leq\lambda_n} (x_k - x_n) \leq -\varepsilon \right\} \right| = 0 \tag{3.2.19}$$

veya

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \leq N : \min_{\lambda_n<k\leq n} (x_n - x_k) \leq -\varepsilon \right\} \right| = 0 \tag{3.2.20}$$

oluyorsa bu durumda (x_k) dizisi istatistiksel yavaş azalandır denir. (3.2.19) ve (3.2.20) koşullarının denk olduğu Móricz (2002) tarafından kanıtlanmıştır. Eğer (3.2.19) ve (3.2.20) de x_k ve x_n yerine sırasıyla $V_{k,p}^{(0)}$ ve $V_{n,p}^{(0)}$ yazılırsa, bu durumda (3.2.11) ve (3.2.12) koşulları (3.2.19) ve (3.2.20) den elde edilir. Böylece Teorem 3.2.3 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.2 $p = (p_k)$ negatif olmayan sayıların $p_0 > 0$ şartını sağlayan bir dizisi olsun ve (3.2.3) koşulu sağlansın. (x_k) reel sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere eğer $\left(V_{k,p}^{(0)}(\Delta x)\right)$ dizisi istatistiksel yavaş azalan ise bu durumda

$$st - \lim \sigma_{n,p}^{(1)} = L \Rightarrow st - \lim x_k = L \tag{3.2.21}$$

gerektirmesi sağlanır (Belen 2014b).

Bir sonraki teoremde kompleks sayı dizilerinin istatistiksel $(\overline{N}, p)$ toplanabilirliğinden istatistiksel yakınsaklığının elde edildiği gerek ve yeter şartlar verilmiştir.

Teorem 3.2.4 $p = (p_k)$ negatif olmayan sayıların $p_0 > 0$ şartını sağlayan bir dizisi olsun ve (3.2.3) şartı sağlansın. Eğer (x_k) kompleks sayıların sonlu bir L sayısına istatistiksel $(\overline{N}, p)$ toplanabilir sınırlı bir dizisi ise bu durumda (x_k) dizisinin aynı L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \leq N : \left| \frac{1}{P_{\lambda_n} - P_n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_k \left(V_{k,p}^{(0)} - V_{n,p}^{(0)} \right) \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \tag{3.2.22}$$

veya

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \leq N : \left| \frac{1}{P_n - P_{\lambda_n}} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_k \left(V_{n,p}^{(0)} - V_{k,p}^{(0)} \right) \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \tag{3.2.23}$$

koşullarından birinin sağlanmasıdır (Belen 2014b)

Teoremin ispatı, Teorem 3.2.3 ün ispatında kullanılan yöntemle kolaylıkla elde edilebilir.

Sonuç 3.2.3 Eğer (x_k) kompleks sayıların sonlu bir L sayısına istatistiksel $(C,1)$ toplanabilir sınırlı bir dizisi ise bu durumda (x_k) dizisinin aynı L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \leq N : \left| \frac{1}{\lambda_n - n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} \left(V_k^{(0)} - V_n^{(0)} \right) \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

veya

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \leq N : \left| \frac{1}{n - \lambda_n} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} \left(V_n^{(0)} - V_k^{(0)} \right) \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

koşullarından birinin sağlanmasıdır (Belen 2014a)

Kompleks terimli bir dizinin yavaş salınımlı olması tanımı ilk kez Hardy (1910) tarafından kullanılmıştır. Móricz (2002) ise kompleks terimli bir (x_k) dizisinin istatistiksel yavaş salınımlı olması tanımını şu şekilde vermiştir: Her $\varepsilon > 0$ için

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \leq N : \max_{n<k\leq\lambda_n} |x_k - x_n| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \tag{3.2.24}$$

veya buna denk olarak

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left| \left\{ n \leq N : \max_{\lambda_n<k\leq n} |x_n - x_k| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \tag{3.2.25}$$

oluyorsa bu durumda (x_k) dizisi istatistiksel yavaş salınımlıdır denir. Eğer (3.2.24) ve (3.2.25) de x_k ve x_n yerine sırasıyla $V_{k,p}^{(0)}$ ve $V_{n,p}^{(0)}$ yazarsak bu durumda (3.2.22) ve (3.2.23) şartları (3.2.24) ve (3.2.25) şartlarından elde edilir. Böylece Teorem 3.2.4 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.4 $p = (p_k)$ negatif olmayan sayıların $p_0 > 0$ şartını sağlayan bir dizisi olsun ve (3.2.3) koşulu sağlansın. (x_k) kompleks sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere eğer $\left(V_{k,p}^{(0)} (\Delta x) \right)$ dizisi istatistiksel yavaş salınımlı ise bu durumda (3.2.21) gerektirmesi doğrudur.

Totur ve Çanak (2012), $(\overline{N}, p)$ toplanabilmeden yakınsaklığın elde edildiği Tauber tipi teoremler ispatlamak için daha zayıf koşullar kullandılar. Alışılmış yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığı gerektirdiğinden $st - \lim \sigma_{n,p}^{(1)} (x) = L$ hipotezi Totur ve Çanak'ın (2012) Teorem 2.3.8-2.3.10 da kullandığı hipotezlere göre daha zayıf bir varsayımdır. Bununla ilgili sonuçlara geçmeden önce gerekli olan bazı yardımcı teoremler verilecektir.

Lemma 3.2.6 Bir (x_n) dizisi ve her $m \geq 1$ tamsayısı için

$$\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\sigma_{n,p}^{(m)}(x) = V_{n,p}^{(m-1)}(\Delta x)$$

dir (Totur ve Çanak 2012).

Lemma 3.2.7 Bir (x_n) dizisi ve her $m \geq 1$ tamsayısı için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

(i)

$$\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta x_n - V_{n,p}^{(0)}(\Delta x) = \frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta V_{n,p}^{(0)}(\Delta x)$$

(ii)

$$V_{n,p}^{(m-1)}(\Delta x) - V_{n,p}^{(m)}(\Delta x) = \frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta V_{n,p}^{(m)}(\Delta x)$$

(Totur ve Çanak 2012).

Lemma 3.2.8 Bir (x_n) dizisi için

$$\sigma_{n,p}^{(1)}\left(\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta V_{n,p}^{(0)}(\Delta x)\right) = \frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta V_{n,p}^{(1)}(\Delta x)$$

dir (Totur ve Çanak 2012).

Bir $x = (x_n)$ dizisi için

$$\left(\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\right)_m x_n = \left(\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\right)_{m-1}\left(\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta x_n\right) = \frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\left(\left(\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\right)_{m-1} x_n\right)$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\left(\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\right)_0 x_n = x_n$ ve $\left(\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\right)_1 x_n = \frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta x_n$ dir.

Lemma 3.2.9 Bir (x_n) dizisi ve her $m \geq 1$ tamsayısı için

$$\omega_{n,p}^{(m)}(x) = \left(\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\right)_m V_{n,p}^{(m-1)}(\Delta x)$$

dir (Totur ve Çanak 2012).

Şimdi ise bundan sonraki sonuçlarda ihtiyaç duyulacak olan düzenli değişen dizi kavramını verelim.

Tanım 3.2.1 Her $\lambda > 0$ için

$$\phi(\lambda) := \lim_{n\to\infty}\frac{P_{\lambda_n}}{P_n}$$

limiti mevcut ve $0 < \phi(\lambda) < \infty$ ise (P_n) dizisine düzenli değişen dizi denir. Eğer (P_n) dizisi düzenli değişen bir dizi ise

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{\lambda_n}}{P_n} = \lambda^{\rho}$$

olacak şekilde bir $\rho \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. Bu durumda (P_n) dizisi ρ indeksine sahip düzenli değişen dizi adını alır.

Örneğin, $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olmak üzere $\left(n^{\beta}\right)$ dizisi düzenli değişen bir dizidir (Bingham ve ark. 1973).

Uyarı 3.2.3 Eğer (P_n) pozitif indekse sahip düzenli değişen bir dizi ise bu durumda her $\lambda > 1$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{\lambda_n}}{P_n} > 1 \tag{3.2.26}$$

ve her $0 < \lambda < 1$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{\lambda_n}} > 1 \tag{3.2.27}$$

olacaktır.

Bundan böyle $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k$ ile tanımlı (P_n) dizisinin pozitif indekse sahip düzenli değişen bir dizi olduğu kabul edilecektir.

Teorem 3.2.5 $x = (x_n)$ dizisi için $st - \lim \sigma_{n,p}^{(1)}(x) = L$ and $\omega_{n,p}^{(0)}(x) = O(1)$ ise $\lim x = L$ ve böylece $st - \lim x = L$ dir (Chen ve Chang 2007).

Teorem 3.2.5 kullanılarak, dizinin sınırlı olması şartıyla aşağıdaki daha genel koşullu Tauber tipi teorem ispatlanabilir.

Uyarı 3.2.4 Bundan sonraki iki teoremin ispatında Totur ve Çanak (2012) tarafından verilen Teorem 2.3.8 in ve Teorem 2.3.10 un ispat tekniği kullanılacaktır.

Teorem 3.2.6 $x = (x_n)$ sınırlı bir dizisi ve $st - \lim \sigma_{n,p}^{(1)}(x) = L$ olsun. Eğer bir $m \geq 0$ tamsayısı için

$$\omega_{n,p}^{(m)}(x) = O(1) \tag{3.2.28}$$

ise bu durumda $st - \lim x = L$ dir.

İspat. $x = (x_n)$ sınırlı bir dizi, $st - \lim \sigma_{n,p}^{(1)}(x) = L$ olsun ve (3.2.28) koşulu sağlansın. $st - \lim \sigma_{n,p}^{(1)}(x) = L$ olduğundan, ağırlıklı Kronecker özdeşliğinden ve Lemma 3.2.2 den her $m \geq 1$ için $st - \lim V_{n,p}^{(m)}(x) = 0$ olur. Ayrıca $\alpha_n := \sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m-1)}(x)\right) = \left(\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\right)_{m-1} V_n^{(m-1)}(\Delta x)$ olduğundan Lemma 3.2.9 dan

$$\sigma_{n,p}^{(1)}(\alpha) = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{m-2}{j} \frac{P_{n-1}}{p_n} \Delta V_{n,p}^{(j+2)}(\Delta x)$$

yazılabilir. Burada $\alpha = (\alpha_n)$ dir. Böylece $st - \lim_n \sigma_{n,p}^{(1)}(\alpha) = 0$ olur. Diğer yandan (3.2.28)'i ve

$$\begin{aligned} \omega_{n,p}^{(m)}(x) &= \left(\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\right)\left(\left(\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\right)_{m-1} V_{n,p}^{(m-1)}(\Delta x)\right) \\ &= \left(\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\right)\left(\sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m-1)}(x)\right)\right) \end{aligned}$$

eşitliğini kullanarak

$$\left(\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\right)\left(\sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m-1)}(x)\right)\right) = O(1)$$

elde ederiz. Teorem 3.2.5 $\left(\sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m-1)}(x)\right)\right)$ dizisine uygulanırsa

$$\lim_n \sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m-1)}(x)\right) = 0 \qquad (3.2.29)$$

olur. (3.2.28) ile (3.2.29) dikkate alındığında

$$\omega_{n,p}^{(m-1)}(x) - \sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m-1)}(x)\right) = \omega_{n,p}^{(m)}(x)$$

eşitliğinden

$$\omega_{n,p}^{(m-1)}(x) = O(1)$$

elde ederiz. Benzer biçimde

$$\omega_{n,p}^{(m-1)}(x) = \left(\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\right)\left(\left(\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\right)_{m-2} V_{n,p}^{(m-2)}(\Delta x)\right) = \left(\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\right)\left(\sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m-2)}(x)\right)\right)$$

eşitliğinden $\left(\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\right)\left(\sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m-2)}(x)\right)\right) = O(1)$ sonucunu elde ederiz. Ayrıca $st - \lim \sigma_{n,p}^{(1)}(x) = L$ olduğundan $st - \lim \sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m-2)}(x)\right) = 0$ olur. Teorem 3.2.5, $\left(\sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m-2)}(x)\right)\right)$ dizisine uygulanırsa

$$\lim_n \sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m-2)}(x)\right) = 0$$

olur. Bu şekilde devam edildiğinde $\lim_n \sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{1}(x)\right) = 0$ bulunacaktır.
$st - \lim V_{n,p}^{(1)}(\Delta x) = 0$ olduğunu ve $\sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(1)}(x)\right) = V_{n,p}^{(0)}(\Delta x) - V_{n,p}^{(1)}(\Delta x)$ eşitliğini kullanırsak $st - \lim V_{n,p}^{(0)}(\Delta x) = 0$ sonucuna ulaşırız. Böylece ağırlıklı Kronecker özdeşliğinden istediğimiz sonuç elde edilir. □

Sonuç 3.2.5 $x = (x_n)$ sınırlı bir dizi ve $st - \lim \sigma_n^{(1)}(x) = L$ olsun. Eğer bir $m \geq 0$ tamsayısı için $\omega_n^{(m)}(x) = O(1)$ ise bu durumda $st - \lim x = L$ dir (Belen 2014a).

Teorem 3.2.6 nın ispatına benzer bir şekilde aşağıdaki sonuç kanıtlanabilir.

Teorem 3.2.7 $x = (x_n)$ sınırlı bir dizi, $\left(\sigma_{n,p}^{(1)}(x)\right)$ bir L sayısına istatistiksel $\left(\overline{N}, p\right)$ toplanabilir, yani $st - \lim \sigma_{n,p}^{(2)}(x) = L$ ve bir $m \geq 0$ tamsayısı için $\omega_{n,p}^{(m)}(x) = O(1)$ ise bu durumda $st - \lim x = L$ dir.

Teorem 3.2.8 $p = (p_k)$ dizisi yukarıdaki özelliklere ilave olarak

$$\frac{p_n}{P_{n-1}} = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.2.30}$$

koşulunu sağlıyor olsun. $x = (x_n)$ sınırlı bir dizi olmak üzere eğer $\left(\sigma_{n,p}^{(1)}(x)\right)$ dizisi bir L sayısına istatistiksel $\left(\overline{N}, p\right)$ toplanabilir ve bir $m \geq 0$ tamsayısı için

$$\sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m)}(x)\right) = O(1) \tag{3.2.31}$$

ise bu durumda (x_n) dizisi L sayısına istatistiksel $\left(\overline{N}, p\right)$ toplanabilirdir.

İspat. $x = (x_n)$ sınırlı bir dizi, $\left(\sigma_{n,p}^{(1)}(x)\right)$ dizisi bir L sayısına istatistiksel $\left(\overline{N}, p\right)$ toplanabilir ve (3.2.30)-(3.2.31) koşullarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $st - \lim \sigma_{n,p}^{(2)}(x) = L$ dir ve ağırlıklı Kronecker özdeşliğinden $\left(V_{n,p}^{(1)}(\Delta x)\right)$ dizisi sıfıra istatistiksel $\left(\overline{N}, p\right)$ toplanabilir yani $st - \lim V_{n,p}^{(2)}(\Delta x) = 0$ dır. Böylece $\left(\sigma_{n,p}^{(2)}\left(\omega^{(m-1)}(x)\right)\right)$ dizisi sıfıra istatistiksel $\left(\overline{N}, p\right)$ toplanabilirdir. Lemma 3.2.9 dan

$$\sigma_{n,p}^{(2)}\left(\omega^{(m-1)}(x)\right) = \left(\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\right)_{m-1} V_{n,p}^{(m)}(\Delta x)$$

dir ve böylece

$$\sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m)}(x)\right) = \frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\left(\left(\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\right)_{m-1} V_{n,p}^{(m)}(\Delta x)\right)$$

eşitliğinden ve (3.2.31) varsayımından

$$\omega_{n,p}^{(0)}\left(\sigma^{(2)}\left(\omega^{(m-1)}(x)\right)\right) = \frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\left(\sigma_{n,p}^{(2)}\left(\omega^{(m-1)}(x)\right)\right) = O(1)$$

dir. Teorem 3.2.5 $\left(\sigma_{n,p}^{(2)}\left(\omega^{(m-1)}(x)\right)\right)$ dizisine uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{n,p}^{(2)}\left(\omega^{(m-1)}(x)\right) = 0 \tag{3.2.32}$$

bulunur. (3.2.31) ile (3.2.32) dikkate alındığında

$$\sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m-1)}(x)\right) - \sigma_{n,p}^{(2)}\left(\omega^{(m-1)}(x)\right) = \sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m)}(x)\right)$$

eşitliğinden

$$\sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m-1)}(x)\right) = O(1)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m-1)}(x)\right)=\left(\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\right)_{m-2}V_{n,p}^{(m-1)}(\Delta x)$$

eşitliğinden

$$\omega_{n,p}^{(0)}\left(\sigma^{(2)}\left(\omega^{(m-2)}(x)\right)\right)=\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\left(\sigma_{n,p}^{(2)}\left(\omega^{(m-2)}(x)\right)\right)=O(1)$$

dir. Teorem 3.2.5 $\left(\sigma_{n,p}^{(2)}\left(\omega^{(m-2)}(x)\right)\right)$ dizisine uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{n,p}^{(2)}\left(\omega^{(m-2)}(x)\right)=0 \tag{3.2.33}$$

olur. (3.2.31) ile (3.2.32) dikkate alındığında

$$\sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m-2)}(x)\right)-\sigma_{n,p}^{(2)}\left(\omega^{(m-2)}(x)\right)=\sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m-1)}(x)\right)$$

eşitliğinden

$$\sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(m-2)}(x)\right)=O(1)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde $\sigma_{n,p}^{(1)}\left(\omega^{(0)}(x)\right)=\frac{P_{n-1}}{p_n}\Delta\sigma_{n,p}^{(1)}(x)=O(1)$ bulunacaktır. (3.2.13) eşitliğinde $V_{n,p}^{(0)}$ yerine $\sigma_{n,p}^{(1)}$ yazılır ve her n için $\Delta\sigma_{n,p}^{(1)}(x)=O\left(\frac{p_n}{P_{n-1}}\right)$ olduğu kullanılırsa bir $C>0$ sabiti için (3.2.30) dan

$$\begin{aligned}
\sigma_{n,p}^{(1)}-\sigma_{n,p}^{(2)} &= \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n}-P_n}\left(\sigma_{\lambda_n,p}^{(2)}-\sigma_{n,p}^{(2)}\right)+\frac{1}{P_{\lambda_n}-P_n}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n}p_k\left(\sigma_{n,p}^{(1)}-\sigma_{k,p}^{(1)}\right)\\
&= \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n}-P_n}\left(\sigma_{\lambda_n,p}^{(2)}-\sigma_{n,p}^{(2)}\right)+\frac{1}{P_{\lambda_n}-P_n}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n}p_k\sum_{j=k+1}^{n}\Delta\sigma_{j,p}^{(1)}(x)\\
&\le \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n}-P_n}\left(\sigma_{\lambda_n,p}^{(2)}-\sigma_{n,p}^{(2)}\right)+\frac{C}{P_{\lambda_n}-P_n}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n}p_k\sum_{j=k+1}^{n}\frac{p_j}{P_{j-1}}\\
&\le \frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n}-P_n}\left(\sigma_{\lambda_n,p}^{(2)}-\sigma_{n,p}^{(2)}\right)+C\log\frac{\lambda_n}{n}
\end{aligned}$$

yazılır. Lemma 3.2.2, Lemma 3.2.3 ve (3.2.26) dan

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{P_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n}-P_n}\left(\sigma_{\lambda_n,p}^{(2)}-\sigma_{n,p}^{(2)}\right)=0$$

dır. O halde

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\sigma_{n,p}^{(1)}-\sigma_{n,p}^{(2)}\right)\le C\log\lambda$$

bulunur. Son eşitsizliğin her iki tarafının $\lambda\to 1^+$ iken limiti alınırsa

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\sigma_{n,p}^{(1)}-\sigma_{n,p}^{(2)}\right)\le 0 \tag{3.2.34}$$

elde edilir. Benzer şekilde, yukarıdakilerden farklı olarak, (3.2.17) eşitliğinden ve (3.2.27) den

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\sigma_{n,p}^{(1)}-\sigma_{n,p}^{(2)}\right)\geq 0 \tag{3.2.35}$$

olduğu gösterilebilir. Böylece $\lim_n \sigma_{n,p}^{(1)} = \lim_n \sigma_{n,p}^{(2)} = L$ dir. O halde $st-\lim_n \sigma_{n,p}^{(1)} = L$ bulunur ve ispat biter. □

KAYNAKLAR

[1] Abel, N.H. 1826. Recherches sur la serie $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + ...$ Journal für die reine und angewandte Mathematik 1: 311-339.

[2] Armitage, D.H, Maddox, I.J. 1990. Discrete Abel Means. Analysis 10: 177-186.

[3] Belen, C. 2014a. Some Tauberian theorems for statistical $(C, 1)$ summability. Applied Mathematics and Computation. 240: 252-258.

[4] Belen, C. 2014b. Some Tauberian theorems obtained through weighted generator sequences. Georgian Mathematical Journal. Yayına Kabul Edildi.

[5] Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J.L. 1973. Regular variation. Cambridge University Press, New York, USA, 494 pp.

[6] Boos, J., 2000. Classical and Modern Methods in Summability. Oxford University Press, UK, 586 pp.

[7] Buck, R.C., 1953. Generalized asymptotic density . American Journals of Mathematics, 75: 335-346.

[8] Chen, C.-P., Chang, C.-T. 2007. Tauberian conditions under which the original convergence of double sequences follows from the statistical convergence of their weighted means. Journal of. Mathematical Analysis and Applications, 332: 1242–1248.

[9] Connor, J. 1988. The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences. Analysis, 8: 47-63.

[10] Connor, J. 1989. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. Canadian Mathematical Bulletin, 32: 194-198.

[11] Connor, J., Swadson, M.A. 1993. Strong integral summability and the Stone-Čech compactification of the half-line. Pacific Journal of Mathematics, 157: 201-224.

[12] Connor, J., Ganichev, M., Kadets, V. 2000. A characterization of Banach spaces with seperable duals via weak statistical convergence. Journal of. Mathematical Analysis and Applications, 244: 251-261.

[13] Çanak, İ., Totur, Ü. 2011. Some Tauberian theorems for the weighted mean methods of summability. Computers and Mathematics with Applications, 62: 2609–2615.

[14] Dik, M. 2002. Tauberian theorems for sequences with moderately oscillatory control moduli. Doctoral Dissertation, University of Missouri-Rolla, Missouri.

[15] Di Maio, G., Kocinac, Lj.D.R. 2008. Statistical convergence in topology. Topology and its Applications, 156: 28-45.

[16] Di Maio, G., Djurčić, D., Kočinac, Lj.D.R. and Žižović, M.R. 2009. Statistical convergence, selection principles and asymptotic analysis. Chaos Solitons Fractals, 42: 2815-2821.

[17] Djurčić, D., Kočinac, Lj.D.R. and Žižović, M.R. 2009. A few remarks on divergent sequences: Rates of divergence. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 360: 588-598.

[18] Erdös, P. Tenenbaum, G. 1989. Sur les desities de certaines suites d'entries. Proceedings of the London Mathematical Society 59: 417-438.

[19] Fast, J.A. 1951. Sur la convergence statistique. Colloquium Mathematicum, 2: 241-244.

[20] Freedman, A.R., Sember J.J. 1981. Dentsities and summability. Pacific Journal of Mathematics, 95: 293–305.

[21] Fridy, J.A. 1985. On Statistical Convergence. Analysis, 5: 301-312.

[22] Fridy, J.A. 1993. Statistical limit points. Proceedings of the American Mathematical Society, 118: 1187-1192.

[23] Fridy, J.A., Orhan, C. 1997a. Statistical limit superior and limit inferior. Proceedings of the American Mathematical Society, 125: 3625-3631.

[24] Fridy, J.A., Orhan, C. 1997b. Statistical core theorems. Journal of Mathematical Analysis and Aplications, 208: 520-527.

[25] Fridy, J.A., Khan, M.K. 2000. Statistical extensions of some classical Tauberian Theorems. Proceedings of the American Mathematical Society, 128: 2347-2355.

[26] Gadjiev, A.D., Orhan, C., 2002. Some approximation theorems via statistical convergence. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 32:129-138.

[27] Hardy, G.H. 1910. Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series. Proceedings of the London Mathematical Society. 2(8): 310-320.

[28] Hardy, G.H., Littlewood, J.E. 1913. Tauberian theorems concerning series of positive terms. Messenger of Mathematics, 42: 191-192.

[29] Hardy, G.H. 1949. Divergent Series. Clarendon press, Oxfod, 396 pp.

[30] Karamata, J. 1930. Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes. Mathematische Zeitschrift, Springer, 32: 319-320.

[31] Karamata, J. 1931. Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche and Stieltjessche Transformation betreffen. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 164: 27-39.

[32] Kolk, E. 1993. Matrix summability of statistically convergent sequences, Analysis 13: 77 83.

[33] Korevaar, J. 2004. Tauberian Theory: A Century of Developments. Springer, Berlin, 483 pp.

[34] Landau, E. 1910. Über die Bedeutung einiger Grenzwertsatze der herren Hardy and Axel. Prace Matematyczno-Fizyczne, 21:97-177.

[35] Littlewood, J.E. 1911. The converse of Abel's theorem on power series. Proceedings of the London Mathematical Society, 9(2): 434-448.

[36] Miller, H. 1995. A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence. Transactions of the American Mathematical Society, 347: 1811-1819.

[37] Móricz, F. 2002. Tauberian conditions, under which statistical convergence follows from statistical summability $(C, 1)$, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 275: 277-287.

[38] Móricz, F. 2004. Ordinary convergence follows from statistical summability (C,1) in the case of slowly decreasing or oscillating sequences. Colloquium Mathematicum, 99(2): 207-219.

[39] Móricz, F., Orhan, C. 2004. Tauberian conditions under which statistical convergence follows from statistical summability by weighted means. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 41: 391-403.

[40] Niven, I., Zuckerman, H.S. 1980. An Introduction to the Theory of Numbers, Fourth Edition. New York.

[41] Šalát, T. 1980. On statistical convergent sequences of real numbers. Mathematica Slovaca, 30: 139-150.

[42] Schmidt, R. 1925. Über divergente Folgen und Mittelbildungen. Mathematische Zeitschrift,22: 89-152.

[43] Schoenberg, I.J. 1959. The integrability of certain functions and related summability methods. American Mathematical Monthly, 66: 361-375.

[44] Tauber, A., 1897. Ein Satz aus der Theorie der unend lichen Reihen. Monatshefte für Mathematic und Physik, 8: 273-277.

[45] Totur, Ü., Çanak, İ. 2012. Some general Tauberian conditions for the weighted mean summability method. Computers and Mathematics with Applications, 63: 999–1006.

[46] Wiener, N. 1932. Tauberian theorems. Annals of Mathematics, 33: 1-100.

[47] Zygmund, A. 1959. Trigonometric series. Cambridge University Press. USA, 747pp.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	**:**	İlker MUMCU
Doğum Yeri	**:**	Akçaabat
Doğum Tarihi	**:**	21.02.1979
Medeni Hali	**:**	Evli
Bildiği Yabancı Dil	**:**	İngilizce
İletişim Bilgileri	**:**	Ordu Cumhuriyet Anadolu Lisesi mumcuilker@msn.com
Lise	**:**	Trabzon Fatih Lisesi
Lisans	**:**	KTÜ Eğitim Fak. Ortaöğretim Matematik Öğrt. Böl.