

**T.C.**  
**ORDU ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DUAL UZAYDA PARALEL EQUIDISTANT REGLE YÜZEYLER**

**SÜMEYYE GÜR**

**DOKTORA TEZİ**

**ORDU 2015**

## TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Sümeyye GÜR tarafından, Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT danışmanlığında hazırlanan “DUAL UZAYDA PARALEL EQUIDISTANT REGLE YÜZEYLER” adlı bu tez, jürimiz tarafından 24/07/2015 tarihinde oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT  
II. Danışman : Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi  
Erasmus Danışmanı : Prof. Luca GRILLI  
Universita degli Studi di Foggia

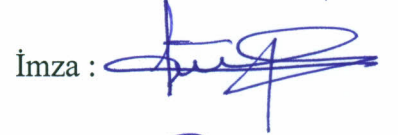
Başkan : Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL  
Matematik Anabilim dalı  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

İmza : 

Üye : Doç. Dr. Ayhan TUTAR  
Matematik Anabilim dalı  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

İmza : 

Üye : Doç. Dr. Selahattin MADEN  
Matematik Anabilim dalı  
Ordu Üniversitesi

İmza : 

Üye : Doç. Dr. Erhan SET  
Matematik Anabilim dalı  
Ordu Üniversitesi

İmza : 

Üye : Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT  
Matematik Anabilim dalı  
Ordu Üniversitesi

İmza : 

Üye : Yrd. Doç. Dr. Seher ASLANCI  
Matematik Anabilim dalı  
Ordu Üniversitesi

İmza : 

Üye : Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŞ  
Matematik Anabilim dalı  
Ordu Üniversitesi

İmza : 

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 23/10/2015 tarih ve 2015/447 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

12/11/2015



Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Kürşat KORKMAZ

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

*S. Gür...*

Sümeyye GÜR

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## ÖZET

### DUAL UZAYDA PARALEL EQUIDISTANT REGLE YÜZEYLER

Sümeyye GÜR

Ordu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı, 2015  
Doktora Tezi, 129s.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT

II. Danışman: Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL

Erasmus Danışmanı: Prof. Luca GRILLI

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin içeriğinde yol göstermiş olan kaynaklardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, araştırma bulguları bölümünde kullanılacak olan bazı tanımlar, teoremler ve örnekler şekillerle açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde, Öklid uzayında paralel p-equidistant regle yüzeylerin bazı karakteristik özelliklere yer verilmiştir.

Dördüncü bölüm tezimizin orijinal kısmıdır. Bu bölümde; Öklid uzayında striksiyon eğrileri boyunca üretici vektörler paralel ve karşılıklı noktalardaki düzlemler (asimptotik, polar ya da merkezi) arasındaki uzaklık sabit kabul edilerek elde edilen equidistant (sabit eş uzaklıklı) regle yüzeylerin, dual uzaydaki karşılıkları bulunmuştur. Bulunan bu dual regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin eğrilikleri arasındaki ve küresel göstergelerinin Blaschke vektörleri arasındaki ilişkiler verilmiştir. Ayrıca bu regle yüzeylerin striksiyon eğrilerinin kapalı olması durumunda meydana gelen kapalı regle yüzeylerin integral invaryantları ve bu invaryantlar arasındaki ilişkiler gösterilmiştir. Son olarak bu yüzeylerin Gauss eğrilikleri hesaplanıp, bu eğrilikler arasındaki ilişkiler ortaya koyulmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Dual uzay, paralel equidistant regle yüzeyler, integral invaryantlar, Gauss eğriliği

## ABSTRACT

# THE PARALLEL EQUIDISTANT RULED SURFACES ON THE DUAL SPACE

Sümeyye GÜR

University of Ordu  
Institute for Graduate Studies in Natural and Technology  
Department of Mathematic, 2015  
PhD Thesis, 129p.

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Süleyman ŞENYURT

II. Supervisor: Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL

Erasmus Supervisor: Prof. Luca GRILLI

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the summary of the literature.

The second chapter deals with definitions, theorems and examples which are necessary for the next chapter.

The third chapter contains some characteristic properties of parallel  $p$ -equidistant ruled surfaces in Euclidean 3-space.

The fourth chapter is original part of the thesis. It contains to correspondences in dual space of two ruled surfaces whose the generator vectors are parallel along their striction curves are examined by assuming that the distance between two planes (asymptotic, polar and central) at suitable points is constant, in Euclidean space. In this part, the relationships between of Blaschke vectors and curvatures belong to spherical indicatrix curves of these ruled surfaces are found. In case of striction curves of these ruled surfaces are close; the relationships between their integral invariants are computed. Also Gauss curvatures of these ruled surfaces are calculated and the relationships between these curvatures are given.

**Key Words:** Dual space, parallel equidistant ruled surfaces, integral invariants, Gauss curvature.

## TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalıőmanın yürütölmesi ve yazımı esnasında bilgilerini ve fikirlerini benimle cömertçe paylaşan, bana her konuda yol gösteren ve ışık tutan, bu zor süreçte bana daima cana yakın ve anlayışlı bir tutumla yaklaşan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT' a, tezime yeni bakış açıları ve düzeltmeler katabilmek için değerli vaktini ayıran Erasmus danışmanım Sayın Prof. Luca GRILLI' ye ve ikinci danışmanım Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL' e teşekkürlerimi sunarım.

Aynı zamanda, hayatım boyunca sadece varlıklarının bile bana her zaman güç verdiği, en büyük destekçilerim olan aileme, ihtiyacım olan her durumda yanımda olan arkadaşlarıma ve maddi desteklerinden dolayı Türk Eğitim Vakfı (TEV)' na teşekkürü bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
<b>TEZ BİLDİRİMİ</b> .....	I
<b>ÖZET</b> .....	II
<b>ABSTRACT</b> .....	III
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	IV
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	V
<b>ŞEKİLLER LİSTESİ</b> .....	VII
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR</b> .....	IX
<b>1. GİRİŞ</b> .....	1
<b>2. GENEL BİLGİLER</b> .....	2
2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar .....	2
2.2. Öklid Uzayında Regle Yüzeyler .....	6
2.3. Dual Uzayda Temel Kavramlar.....	21
2.4. Regle Yüzeyin Dual Vektörel İfadesi.....	29
<b>3. MATERYAL VE YÖNTEM</b> .....	35
3.1. Öklid Uzayında Paralel $p$ - Equidistant Regle Yüzeyler Ve Bazı Karakteristik Özellikleri.....	35
3.2. Dual Uzayda Regle Yüzeylerin İntegral İnvaryantları, Dağılma Parametreleri ve Gauss Eğrilikleri.....	38
<b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI</b> .....	40
4.1. Dual Paralel Equidistant Regle Yüzeyler.....	40
4.1.1. Dual Paralel Equidistant Regle Yüzeylerin Striksiyon Eğrileri ve Blaschke Vektörleri .....	43
4.1.2. Dual Paralel Equidistant Regle Yüzeylerin Dayanak Eğrilerinin Eğrilikleri..	53
4.2. Kapalı Dual Paralel Equidistant Regle Yüzeylerin İntegral İnvaryantları.....	56
4.2.1. Birim Dual Teğetler Göstergelerine Karşılık Gelen Kapalı Regle Yüzeylerin İntegral İnvaryantları.....	57



4.2.2.	Birim Dual Asli Normaller Göstergelerine Karşılık Gelen Kapalı Regle Yüzeylerin İntegral İnvaryantları.....	61
4.2.3.	Birim Dual Binormaller Göstergelerine Karşılık Gelen Kapalı Regle Yüzeylerin İntegral İnvaryantları.....	64
4.2.4.	Birim Dual Pol Göstergelerine Karşılık Gelen Kapalı Regle Yüzeylerin İntegral İnvaryantları.....	68
4.3.	Dual Paralel Equidistant Regle Yüzeylerin Gauss Eğrilikleri.....	81
4.3.1.	Birim Dual Teğetler Göstergelerine Karşılık Gelen Regle Yüzeylerin Gauss Eğrilikleri.....	82
4.3.2.	Birim Dual Asli Normaller Göstergelerine Karşılık Gelen Regle Yüzeylerin Gauss Eğrilikleri .....	88
4.3.3.	Birim Dual Binormaller Göstergelerine Karşılık Gelen Regle Yüzeylerin Gauss Eğrilikleri.....	102
4.3.4.	Birim Dual Pol Göstergelerine Karşılık Gelen Regle Yüzeylerin Gauss Eğrilikleri.....	111
<b>5.</b>	<b>TARTIŞMA ve SONUÇ .....</b>	<b>125</b>
<b>6.</b>	<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>126</b>
	<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>128</b>

## ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Şekil No</u>		<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1.	Darboux vektörü .....	5
Şekil 2.2.	Yüzey.....	6
Şekil 2.3.	Küre.....	7
Şekil 2.4.	Regle yüzey.....	8
Şekil 2.5	Teğet düzlem.....	9
Şekil 2.6.	Açılabilir regle yüzey.....	10
Şekil 2.7.	Dairesel helisin teğetinin meydana getirdiği regle yüzey.....	11
Şekil 2.8.	Dairesel helisin normalinin meydana getirdiği regle yüzey.....	11
Şekil 2.9.	Asimptotik düzlem .....	12
Şekil 2.10.	Striksiyon noktası ve striksiyon çizgisi .....	13
Şekil 2.11.	Regle yüzeyin dağılma parametresi .....	16
Şekil 2.12.	Ortogonal yörünge eğrisi .....	18
Şekil 2.13.	Regle yüzeyin açılım uzunluğu .....	19
Şekil 2.14.	Regle yüzeyin açılım açısı .....	19
Şekil 2.15.	Dual açı .....	23
Şekil 2.16.	Doğrunun doğrultu vektörü ve vektörel momenti.....	27
Şekil 2.17.	E. Study tekabül prensibi .....	29
Şekil 2.18.	Regle yüzeyin dual vektörel ifadesi .....	29
Şekil 4.1.	Dual küresel eğriler ve Blaschke çatıları.....	41
Şekil 4.2.	Dual paralel equidistant regle yüzeyler .....	42
Şekil 4.3.	Dual paralel equidistant regle yüzeyler ve striksiyon eğrileri .....	43
Şekil 4.4.	Birim dual küre üzerinde küresel göstergeler .....	57
Şekil 4.5	Birim dual teğetler göstergelerine karşılık gelen regle yüzeyler .....	58
Şekil 4.6.	Birim dual asli normaller göstergelerine karşılık gelen regle yüzeyler.....	62

<b>Şekil 4.7.</b>	Birim dual binormaller göstergelerine karşılık gelen regle yüzeyler .....	65
<b>Şekil 4.8.</b>	Ani Pfaff vektörleri .....	69
<b>Şekil 4.9.</b>	Birim dual pol göstergelerine karşılık gelen regle yüzeyler.....	71

## SİMGELER ve KISALTMALAR

$\mathbb{R}^3$	: 3- boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{D}^3$	: Dual uzay ( $D$ -Modül)
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: Öklid iç çarpımı
$\  \cdot \ $	: Norm
$\vec{d}$	: Steiner dönme vektörü
$\vec{D}$	: Dual Steiner dönme vektörü
$\vec{v}$	: Steiner öteleme vektörü
$\vec{V}$	: Dual Steiner öteleme vektörü
$p_x$	: Regle yüzeyin dağılma parametresi
$P_x$	: Dual regle yüzeyin dağılma parametresi
$\ell_x$	: Regle yüzeyin açılım uzunluğu
$L_x$	: Dual regle yüzeyin açılım uzunluğu
$\lambda_x$	: Regle yüzeyin açılım açısı
$\Lambda_x$	: Dual regle yüzeyin açılım açısı
$S$	: Regle yüzeyin şekil operatörü
$\bar{S}$	: Dual regle yüzeyin şekil operatörü
$K$	: Regle yüzeyin Gauss eğriliği
$\bar{K}$	: Dual regle yüzeyin Gauss eğriliği
$k_1$	: Eğrilik
$\kappa$	: Dual eğrilik
$k_2$	: Burulma (torsiyon)
$\tau$	: Dual burulma (torsiyon)
$\vec{w}$	: Darboux vektörü
$\vec{W}$	: Ani dual Pfaff vektörü

## 1. GİRİŞ

Öklid uzayında ve dual uzayda regle yüzeyler ile ilgili temel kavramlar birçok kaynaktan mevcuttur. Bunlardan bazıları Blaschke' nin (1949) (Kerim Erim tarafından çeviri) "*Diferansiyel Geometri Dersleri*", Müller' in (1963) "*Kinematik Dersleri*", Şenatalar' ın (1978) "*Diferansiyel Geometri (Eğriler ve Yüzeyler Teorisi)*", Biran' ın (1981) "*Diferansiyel Geometri Dersleri*", Hacısalihoğlu' nun (1983a-1994) "*Diferansiyel Geometri I-II*" ve (1983b) "*Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*" ve Sabuncuoğlu' nun (2006) "*Diferansiyel Geometri*" adlı kitaplarıdır. Valeontis' in (1986) "*Parallel P-Äquidistante Regelflachen*" adlı çalışmasında paralel  $p$ -equidistant regle yüzeyler tanımlanarak bazı karakteristik özellikler verilmiştir. Masal' ın (1994), Masal ve Kuruoğlu' nun (1999, 2000a ve 2000b) çalışmalarında paralel  $p$ -equidistant regle yüzeylerin integral invaryantları, şekil operatörleri ve küresel göstergeleri hesaplanmıştır. Güven (2010) doktora tezinde regle yüzeylerin Gauss eğriliklerini hesaplayarak bazı yeni sonuçlara ulaşmıştır. Sarıoğlugil ve ark. (2011) çizgiler uzayındaki bir paralel  $p$ -equidistant dual centroit eğrisinin oluşturduğu regle yüzeyin integral invaryantları üzerinde çalışmışlardır. Saraçoğlu ve Yaylı (2012) kapalı regle yüzeylerin dual küresel gösterge eğrileriyle ilgili bazı yeni sonuçlara ulaşmışlardır. Şenyurt (2012) tarafından ani Pfaff vektörünün oluşturduğu paralel  $p$ -equidistant regle yüzeylerin integral invaryantları bulunmuştur. As ve Şenyurt (2013) çalışmalarında asli normal vektörler paralel alınarak elde edilen equidistant regle yüzeylerin bazı özelliklerini vermişlerdir.

## 2. GENEL BİLGİLER

### 2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

**Tanım 2.1.1:**  $V$  bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

reel değerli fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bu fonksiyona  $V$  üzerinde bir **iç çarpım fonksiyonu** denir:  $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$  ve  $a, b \in \mathbb{R}$  için;

i) Bilineerlik aksiyomu:

$$\langle a\vec{x} + b\vec{y}, \vec{z} \rangle = a\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + b\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$$

$$\langle \vec{x}, a\vec{y} + b\vec{z} \rangle = a\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + b\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$$

ii) Simetri aksiyomu:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$$

iii) Pozitif tanımlılık aksiyomu:

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0, \quad \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

**Tanım 2.1.2:**  $\mathbb{R}^3$ , 3-boyutlu vektör uzayı olsun.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpıma  $\mathbb{R}^3$  te **standart iç çarpım** veya **Öklid iç çarpımı** denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

**Tanım 2.1.3:**  $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (y_i - x_i)^2}$  şeklinde tanımlı

fonksiyonuna  $\mathbb{R}^3$  te **uzaklık fonksiyonu**,  $d(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}$  sayısına da bu noktalar arasındaki **uzaklık** denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

**Tanım 2.1.4:**  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  ,  $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$  diferensiyellenebilir fonksiyonuna  $\mathbb{R}^3$  te bir **eğri**,  $\|\alpha'(s)\| = 1$  ise eğrinin parametresine de **yay parametresi** denir.

**Tanım 2.1.5:**  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Bu eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet vektörleri  $\vec{u}_1(s)$ ,  $\vec{u}_2(s)$  ve  $\vec{u}_3(s)$  ile gösterilirse;

**i)**  $s$  yay parametresi ise, bu durumda Frenet vektörleri;

$$\begin{cases} \vec{u}_1(s) = \vec{\alpha}'(s) \\ \vec{u}_2(s) = \frac{\vec{\alpha}''(s)}{\|\vec{\alpha}''(s)\|} \\ \vec{u}_3(s) = \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_2(s) \end{cases} , \quad (2.1)$$

**ii)**  $s$  keyfi parametre ise, bu durumda Frenet vektörleri;

$$\begin{cases} \vec{u}_1(s) = \frac{\vec{\alpha}'(s)}{\|\vec{\alpha}'(s)\|} \\ \vec{u}_2(s) = \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_3(s) \\ \vec{u}_3(s) = \frac{\vec{\alpha}'(s) \wedge \vec{\alpha}''(s)}{\|\vec{\alpha}'(s) \wedge \vec{\alpha}''(s)\|} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

**Tanım 2.1.6:**  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  diferensiyellenebilir eğrisinin eğrilik ve burulması;

$$\mathbf{i) \begin{cases} k_1(s) = \langle \vec{u}_1'(s), \vec{u}_2(s) \rangle \\ k_2(s) = \langle \vec{u}_2'(s), \vec{u}_3(s) \rangle \end{cases} , s \text{ yay parametresi} \quad (2.2)$$

$$\text{ii) } \left\{ \begin{array}{l} k_1(s) = \frac{\|\vec{\alpha}'(s) \wedge \vec{\alpha}''(s)\|}{\|\vec{\alpha}''(s)\|^3} \\ k_2(s) = \frac{\det(\vec{\alpha}'(s), \vec{\alpha}''(s), \vec{\alpha}'''(s))}{\|\vec{\alpha}'(s) \wedge \vec{\alpha}''(s)\|^2} \end{array} \right. , s \text{ keyfi parametre}$$

şeklinde tanımlanır, (Hacısalıhoğlu, 1983).

**Teorem 2.1.1:**  $\vec{u}_1(s)$ ,  $\vec{u}_2(s)$  ve  $\vec{u}_3(s)$  Frenet vektörleri ile bu vektörlerin türev vektörleri arasında,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_1'(s) = k_1(s)\vec{u}_2(s) \\ \vec{u}_2'(s) = -k_1(s)\vec{u}_1(s) + k_2(s)\vec{u}_3(s) \\ \vec{u}_3'(s) = -k_2(s)\vec{u}_2(s) \end{array} \right. \quad (2.3)$$

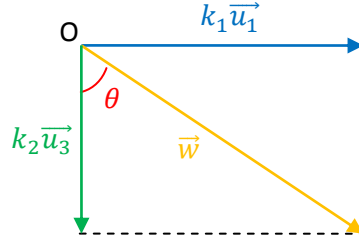
bağıntısı vardır. Bu bağıntıya Frenet formülleri adı verilir, (Hacısalıhoğlu, 1983).

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki  $\{\vec{u}_1(s), \vec{u}_2(s), \vec{u}_3(s)\}$  Frenet çatısının her  $s$  anında, bir eksen etrafında bir ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki **Darboux (ani dönme) eksenini**, bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektöre de **Darboux vektörü** denir. Bu vektör  $\vec{w}(s)$  ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} \vec{w}(s) &= \vec{u}_2(s) \wedge \vec{u}_2'(s), \\ \vec{w}(s) &= k_2(s)\vec{u}_1(s) + k_1(s)\vec{u}_3(s) \end{aligned} \quad (2.4)$$

şeklinde bulunur.  $\vec{u}_3(s)$  ile  $\vec{w}(s)$  arasındaki açığı  $\theta$  denilirse (Şekil 2.1),





**Şekil 2.1.** Darboux vektörü

$$\begin{cases} k_1(s) = \|\vec{w}(s)\| \cos \theta \\ k_2(s) = \|\vec{w}(s)\| \sin \theta \end{cases}$$

yazılır. Darboux yönündeki birim vektör  $\vec{c}(s)$  ile gösterilirse,

$$\vec{c}(s) = \sin \theta \vec{u}_1(s) + \cos \theta \vec{u}_3(s) \quad (2.5)$$

olur.

**Tanım 2.1.7:**  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  kapalı eğrisi boyunca eğrisel integraliyle belirtilen

$$\vec{d}(s) = \oint_{(\alpha)} \vec{w}(s) ds \quad (2.6)$$

vektörüne ani helis hareketinin **Steiner dönme vektörü**,

$$d\vec{\alpha}(s) = \alpha_1(s)\vec{u}_1(s) + \alpha_2(s)\vec{u}_2(s) + \alpha_3(s)\vec{u}_3(s) \quad (2.7)$$

olmak üzere,

$$\vec{v}(s) = \oint_{(\alpha)} d\vec{\alpha}(s) ds \quad (2.8)$$

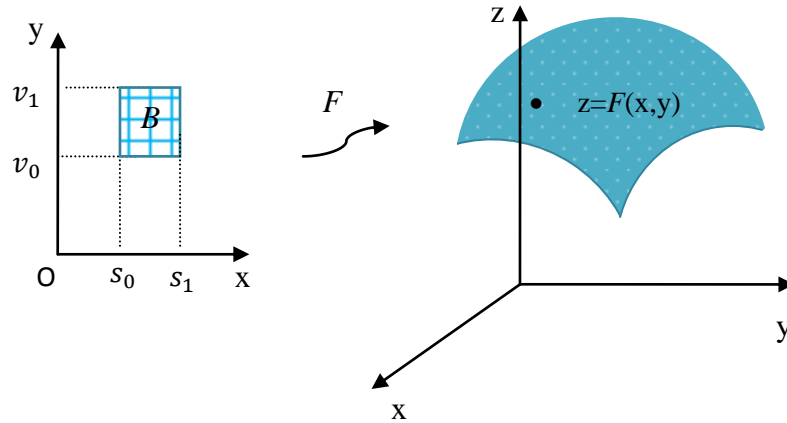
vektörüne de hareketin **Steiner öteleme vektörü** denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

## 2.2 Öklid Uzayında Regle Yüzeyler

$xoy$  düzleminin bir  $(B)$  bölgesindeki her bir  $(x, y)$  noktasının  $F$  diffeomorfizmi altındaki resmi  $z = F(x, y)$  olsun. Böylece  $(x, y)$  noktaları,  $xoy$  düzleminde  $(B)$  bölgesini tararken,  $(x, y, z)$  noktaları da uzayda bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeyin denklemi  $z = F(x, y)$  şeklindedir. Bu yazılış şekline **yüzeyin açık denklemi** veya **yüzeyin Monge gösterimi** denir. Yüzeyin kapalı formdaki yazılışı ise

$$F(x, y, z) = 0 \quad (2.9)$$

şeklinde verilir, (Şenatalar, 1978), (Sabuncuoğlu, 2006), (Şekil 2.2).



Şekil 2.2. Yüzey

$s_0 \leq s \leq s_1$ ,  $v_0 \leq v \leq v_1$  olmak üzere  $s, v$  bağımsız parametreleri bu aralıklarda sürekli ve sürekli türevlere sahiplerse, bu durumda

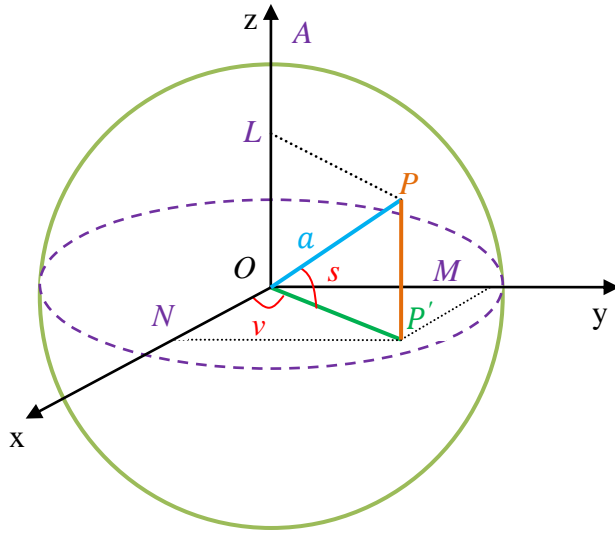
$$x = x(s, v), \quad y = y(s, v), \quad z = z(s, v) \quad (2.10)$$

ifadesine yüzeyin **parametrik denklemi** denir. Burada  $v = t_1$  sabit değeri için sadece  $s$  değişeceğinden bu denklemler bir  $t_1$  eğrisi gösterir. Aynı şekilde  $v = t_2$  sabit değeri için de  $t_2$  eğrisi elde edilir. Sonuç olarak  $v$  parametreleri

sürekli değiştikçe bu eğriler de sürekli olarak değişeceğinden bir yüzey meydana getirir. Benzer şeyler  $s$  parametresi için de söylenebilir. Başka bir deyişle  $(s, v)$  bağımsız parametrelerinin ikisinin de değişmeleri bir yüzey meydana getirir. Yani (2.10) denklemleri arasından  $(s, v)$  parametreleri yok edilirse  $F(x, y, z) = 0$  gibi bir denklem elde edilir. Bu ise bir yüzey gösterir. Eğer  $(s, v)$  aralarında lineer bağımlı ise bu durumda (2.10) denkleminin bir eğri göstereceği açıktır. Örneğin; yarıçapı  $a$  olan kürenin parametrik denklemi, küre üzerindeki bir nokta  $P(x, y, z)$  ise,

$$x = a \cos s \cos v, \quad y = a \cos s \sin v, \quad z = a \sin s \quad (2.11)$$

dir (Şekil 2.3).



Şekil 2.3. Küre

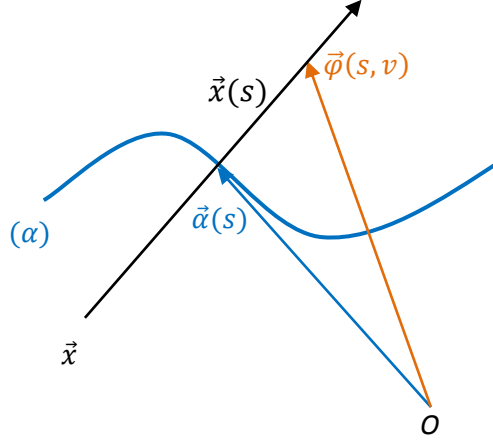
**Tanım 2.2.1:** Bir uzay eğrisinin teğetlerinin doğurduğu yüzeye **açılabilir yüzey** denir, (Biran, 1981).

**Tanım 2.2.2:**  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisi boyunca, eğriye bağlı bir  $\vec{x}(s)$  doğrusunun hareketiyle meydana gelen yüzeye **regle yüzey** denir. Burada  $(\alpha)$  eğrisine regle yüzeyin **dayanak eğrisi**,  $\vec{x}(s)$  doğrusunu da regle yüzeyin **anadoğrusu (doğrultmanı)** adı verilir. Bu tanıma göre bir regle yüzeyinin parametrik

denklemini

$$\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (s, v) \rightarrow \vec{\varphi}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{x}(s) \quad (2.12)$$

şeklinde verilir (Hacısalıhoğlu, 1983), (Şekil 2.4).



Şekil 2.4. Regle yüzey

**Örnek 2.2.1:** Bir doğrunun bir eğri üzerinde hareketi ile meydana gelen düzlem, silindir yüzeyi ve koni yüzeyi birer regle yüzeydir ancak küre yüzeyi bir regle yüzey değildir.

**Örnek 2.2.2:**  $x = a \frac{s-v}{s+v}$  ,  $y = b \frac{1+sv}{s+v}$  ,  $z = c \frac{sv-1}{s+v}$  yüzeyi bir regle

yüzeydir. Gerçekten;  $\frac{1}{s+v} = t$  denilirse,  $s = \frac{1-vt}{t}$  olur. Böylece

$$x = a(1-2vt) , y = b(t+v-tv^2) , z = c(v-t-tv^2)$$

değerleri bulunur. Bu ifade

$$x = a + t(-2av) , y = bv + t(b-bv^2) , z = cv + t(-c-cv^2)$$

şeklinde düzenlenirse, (2.12) deki yazılışa göre

$$\vec{\varphi}(v, t) = (a, bv, cv) + t(-2av, b(1-v^2), -c(1+v^2))$$

olur. Bu ise bir regle yüzey demektir. O halde her regle yüzey (2.12) formatında yazılır.

**Tanım 2.2.3:**  $\vec{\varphi}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{x}(s)$  regle yüzeyi  $\vec{\varphi}(s+T, v) = \vec{\varphi}(s, v)$ ,  $T > 0$  olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye **kapalı regle yüzey** denir, (Hacısalıhoğlu, 1994).

**Tanım 2.2.4:**  $\vec{\varphi}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{x}(s)$  regle yüzeyinin bir  $M$  noktasından geçen ve yüzeyin normaline dik olan düzleme regle yüzeyin **teğet düzlemi** denir, (Şenatalar, 1978).

$\vec{\varphi}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{x}(s)$  yüzeyinin normali  $\vec{n}(s)$  ile gösterilirse;

$$\vec{n}(s) = \vec{\varphi}_s(s) \wedge \vec{\varphi}_v(s)$$

veya

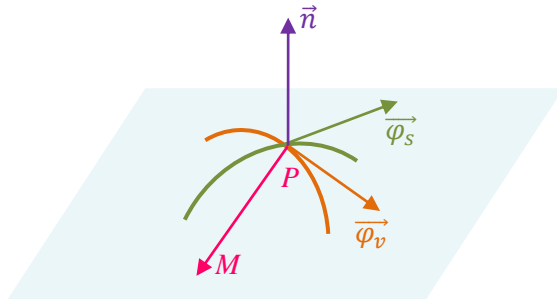
$$\vec{n}(s) = \vec{x}(s) \wedge \left( \vec{\alpha}'(s) + v\vec{x}'(s) \right) \quad (2.13)$$

olur. Düzlemin değişken bir noktası  $P$  olmak üzere, bu regle yüzeyin teğet düzleminin denklemi,

$$\langle \overrightarrow{MP}(s), \vec{n}(s) \rangle = 0,$$

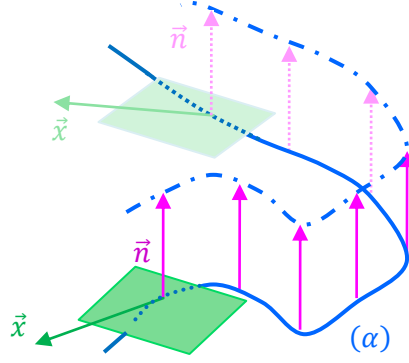
$$\det \left( \overrightarrow{MP}(s), \vec{x}(s), \vec{\alpha}'(s) + v\vec{x}'(s) \right) = 0 \quad (2.14)$$

şeklinde elde edilir (Şekil 2.5).



**Şekil 2.5.** Teğet düzlem

**Tanım 2.2.5:**  $\vec{\varphi}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{x}(s)$  regle yüzeyinin ana doğrusu boyunca normal doğrultusu (teğet düzlemi) aynı kalıyorsa, yüzeye **açılabilir regle yüzey** denir, (Biran, 1981), (Şekil 2.6).



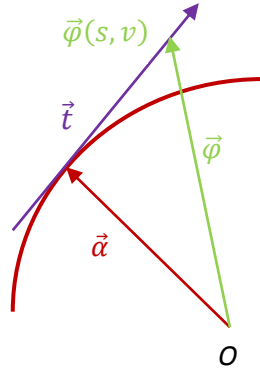
**Şekil 2.6.** Açılabilir regle yüzey

Bu tanıma göre  $\vec{\varphi}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{x}(s)$  regle yüzeyinin  $\vec{n}(s)$  normal vektörü  $v$  parametresinden bağımsız olmalıdır. Bu ise (2.13) ifadesine göre  $\vec{x}(s) \wedge \vec{\alpha}'(s)$  ve  $\vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s)$  vektörlerinin paralel olmasını gerektirir. Buradan,

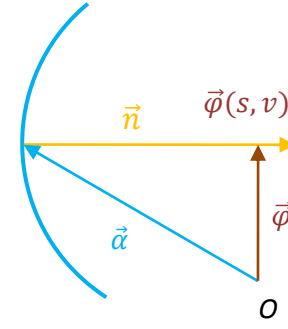
$$\begin{aligned} & \left( \vec{x}(s) \wedge \vec{\alpha}'(s) \right) \wedge \left( \vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s) \right) = 0, \\ & \left\langle \vec{x}(s) \wedge \vec{\alpha}'(s), \vec{x}'(s) \right\rangle \vec{x}(s) - \left\langle \vec{x}(s) \wedge \vec{\alpha}'(s), \vec{x}(s) \right\rangle \vec{x}'(s) = 0, \\ & \det \left( \vec{x}(s), \vec{\alpha}'(s), \vec{x}'(s) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

olur. Bu bağıntı  $\vec{\varphi}(s, v)$  regle yüzeyin açılabilir olma koşuludur.

**Örnek 2.2.3:**  $x = a \cos s$ ,  $y = a \sin s$ ,  $z = bs$  dairesel helisinin teğetinin meydana getirdiği regle yüzey açılabilirdir ancak asal normalinin meydana getirdiği regle yüzey açılabilir değildir. Gerçekten;



**Şekil 2.7.** Dairesel helisin teğetinin meydana getirdiği regle yüzey



**Şekil 2.8.** Dairesel helisin asli normalinin meydana getirdiği regle yüzey

dairesel helisin teğetinin meydana getirdiği regle yüzeyin denklemi

$$\vec{\varphi}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + vt(s)$$

dir (Şekil 2.7). (2.15) bağıntısından,

$$\det(\vec{t}(s), \vec{t}(s), k_1(s)\vec{n}(s)) = 0$$

olur. Bu ise yüzeyin açılabilir olması demektir. Diğer taraftan aynı eğrinin asal normalinin meydana getirdiği regle yüzeyin denklemi,

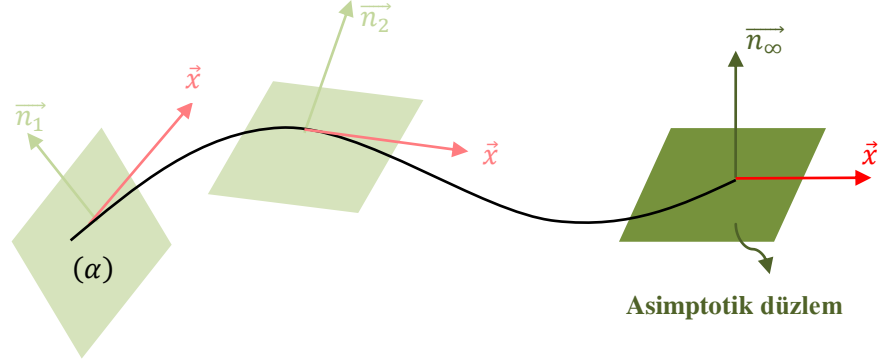
$$\vec{\varphi}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + vn(s)$$

dir (Şekil 2.8). (2.15) bağıntısından,

$$\begin{aligned} \det(\vec{n}(s), \vec{t}(s), -k_1(s)\vec{t}(s) + k_2\vec{b}(s)) &= \langle \vec{n}(s) \wedge \vec{t}(s), -k_1(s)\vec{t}(s) + k_2(s)\vec{b}(s) \rangle \\ &= \langle -\vec{b}(s), -k_1(s)\vec{t}(s) + k_2(s)\vec{b}(s) \rangle \\ &= -k_2(s) \end{aligned}$$

bulunur. Dairesel helis bir uzay eğrisi olduğundan  $k_2(s) \neq 0$  dir. Bu durumda yüzey açılabilir değildir.

**Tanım 2.2.6:**  $\vec{\varphi}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{x}(s)$  regle yüzeyin sonsuzdaki normal doğrultusuna karşılık gelen teğet düzleme **asimptotik düzlem** denir, (Biran, 1981), (Şekil 2.9).



**Şekil 2.9.** Asimptotik düzlem

Asimptotik düzlemin normal doğrultu vektörü için, (2.13) teki

$$\vec{n}(s) = \vec{x}(s) \wedge \left( \vec{\alpha}'(s) + v \vec{x}'(s) \right)$$

ifadesinde her iki taraf  $v$  ye bölüldüğünde, eşitliğin sağ tarafı  $\vec{n}(s)$  normal vektörün doğrultusu olacağından, bu vektör

$$\frac{1}{v} \vec{x}(s) \wedge \vec{\alpha}'(s) + \vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s)$$

olur.  $M$  noktasının ana doğru üzerinde sonsuza gitmesi halinde  $\vec{n}(s)$  nin limiti

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{v} \vec{x}(s) \wedge \vec{\alpha}'(s) + \vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s) \right) = \vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s) \quad (2.16)$$

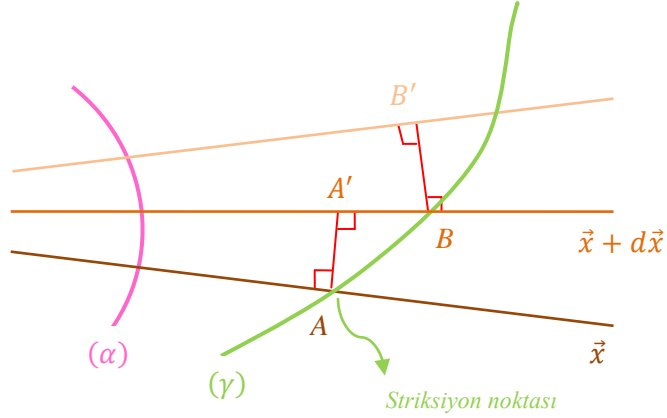
bulunur. Bulunan bu değer asimptotik düzlemin normaline paraleldir.

**Tanım 2.2.7:**  $\vec{\varphi}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{x}(s)$  regle yüzeyinin bir ana doğrusu üzerinde bir noktadaki teğet düzlemin asimptotik düzleme dik olduğu noktaya ana doğrunun **boğaz (merkezi veya striksiyon) noktası**, bu noktaların geometrik yerine de regle yüzeyin **boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi)** denir (Şenatalar, 1978).



Boğaz noktasının bir başka tanımı şu şekilde de verilebilir:

**Tanım 2.2.8:**  $\vec{\varphi}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{x}(s)$  regle yüzeyinin  $\vec{x}$  ana doğrusuna sonsuz yakın ana doğrunun ortak dikmesinin  $\vec{x}$  ana doğrusu üzerindeki ayağına **boğaz noktası** denir, (Hacısalıhoğlu, 1994), (Şekil 2.10).



**Şekil 2.10.** Striksiyon noktası ve striksiyon çizgisi

Striksiyon eğrisinin denklemini bulmak için  $\vec{\varphi}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{x}(s)$  yüzey denkleminde  $v$  nin hesaplanması gerekmektedir. Tanım 2.2.7 ye göre, asimptotik düzlemin  $\vec{n}_\infty(s)$  normali ile teğet düzlemin  $\vec{n}(s)$  normali birbirlerine dik olacağından

$$\langle \vec{n}_\infty(s), \vec{n}(s) \rangle = 0$$

olur. (2.13) ve (2.16) bağıntılarından

$$\langle \vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s), \vec{x}(s) \wedge \vec{\alpha}'(s) + v\vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s) \rangle = 0$$

yazılır. Buradan  $v$  hesaplanırsa;

$$v = -\frac{\langle \vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s), \vec{x}(s) \wedge \vec{\alpha}'(s) \rangle}{\langle \vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s), \vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s) \rangle}, \quad \|\vec{x}(s)\|^2 \neq sbt \quad (2.17)$$

bulunur.  $v$  nin bu değeri  $\vec{\varphi}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{x}(s)$  ifadesinde yerine yazılırsa striksiyon eğrisinin  $\vec{\gamma}(s)$  denklemi

$$\vec{\gamma}(s) = \vec{\alpha}(s) - \frac{\langle \vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s), \vec{x}(s) \wedge \vec{\alpha}'(s) \rangle}{\langle \vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s), \vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s) \rangle} \vec{x}(s) \quad (2.18)$$

şeklinde bulunur. Ayrıca (2.17) ifadesinin payı ve paydası açılırsa, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s), \vec{x}(s) \wedge \vec{\alpha}'(s) \rangle &= \|\vec{x}(s)\|^2 \langle \vec{x}'(s), \vec{\alpha}'(s) \rangle \\ &\quad - \langle \vec{x}(s), \vec{x}'(s) \rangle \langle \vec{x}(s), \vec{\alpha}'(s) \rangle, \end{aligned}$$

$$\langle \vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s), \vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s) \rangle = \langle \vec{x}(s), \vec{x}'(s) \rangle \langle \vec{x}(s), \vec{x}'(s) \rangle - \|\vec{x}(s)\|^2 \|\vec{x}'(s)\|^2$$

olur.  $\|\vec{x}(s)\|^2 = sbt$  olması (2.17) nin genel durumunu bozmayacağından, yukarıdaki eşitlikler

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s), \vec{x}(s) \wedge \vec{\alpha}'(s) \rangle &= \|\vec{x}(s)\|^2 \langle \vec{x}'(s), \vec{\alpha}'(s) \rangle, \\ \langle \vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s), \vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s) \rangle &= -\|\vec{x}(s)\|^2 \|\vec{x}'(s)\|^2 \end{aligned}$$

şekline dönüşür. Bu ifadeler (2.17) de yerine yazılırsa,

$$v = -\frac{\langle \vec{x}'(s), \vec{\alpha}'(s) \rangle}{\|\vec{x}'(s)\|^2}, \quad \|\vec{x}(s)\|^2 = sbt \quad (2.19)$$

olur. Bu ifade regle yüzey denkleminde yerine yazılırsa, striksiyon eğrisinin bir başka ifadesi

$$\vec{\gamma}(s) = \vec{\alpha}(s) - \frac{\langle \vec{x}'(s), \vec{\alpha}'(s) \rangle}{\|\vec{x}'(s)\|^2} \vec{x}(s) \quad (2.20)$$

şeklinde elde edilir.

**Örnek 2.2.4:**  $x(s, v) = a(v + s)$ ,  $y(s, v) = b(v - s)$ ,  $z(s, v) = vs$  yüzeyi

$$\vec{\varphi}(s, v) = (as, -bs, 0) + v(a, b, s)$$

şeklinde yazılabildiğinden bu bir regle yüzeydir. Bu regle yüzeyin doğrultman vektörünün uzunluğu  $s$  ye bağlı olduğundan (2.17) bağıntısından

$$\begin{aligned} v &= - \frac{\langle \vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s), \vec{x}(s) \wedge \vec{\alpha}'(s) \rangle}{\langle \vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s), \vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s) \rangle} \\ &= - \frac{\langle (b, -a, 0), (bs, as, -2ab) \rangle}{\langle (b, -a, 0), (b, -a, 0) \rangle} \\ &= - \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} s \end{aligned}$$

olur.  $v$  nin bu değeri yüzey denkleminde yerine yazılırsa striksiyon eğrisinin denklemi

$$\gamma(s) = (as, -bs, 0) - \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} s(a, b, s)$$

şeklinde elde edilir.

**Örnek 2.2.5:**  $x(s, v) = (a - v)\cos s$ ,  $y(s, v) = (a - v)\sin s$ ,  $z(s, v) = bs$  yüzeyi

$$\vec{\varphi}(s, v) = (a \cos s, a \sin s, bs) + v(-\cos s, -\sin s, 0)$$

şeklinde yazılabildiğinden bu bir regle yüzeydir. Bu regle yüzeyin doğrultman vektörünün uzunluğu sabit olduğundan (2.19) bağıntısından

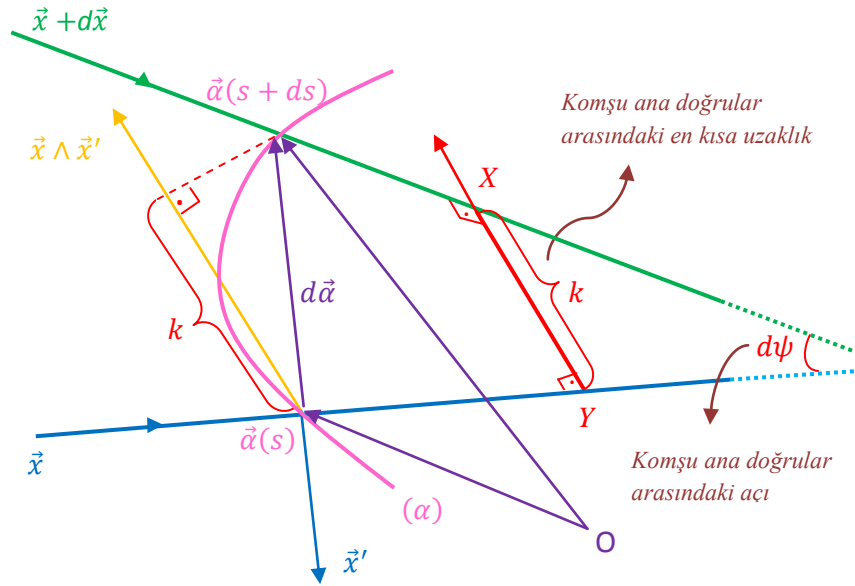
$$\begin{aligned}
v &= -\frac{\langle \vec{x}'(s), \vec{\alpha}'(s) \rangle}{\|\vec{x}'(s)\|^2} \\
&= -\frac{\langle (\sin s, -\cos s, 0), (-a \sin s, a \cos s, b) \rangle}{\|(\sin s, -\cos s, 0)\|^2} \\
&= a
\end{aligned}$$

olur.  $v$  nin bu değeri yüzey denkleminde yerine yazılırsa striksiyon eğrisinin denklemi

$$\gamma(s) = (0, 0, bs)$$

şeklinde bulunur.

**Tanım 2.2.9:**  $\vec{\varphi}(s, v)$  regle yüzeyinin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın, bu ana doğrular arasındaki açığa oranına regle yüzeyin **dağılma parametresi (drali)** denir, (Hacısalıhoğlu, 1994), (Şekil 2.11).



Şekil 2.11. Regle yüzeyin dağılma parametresi

Birim doğrultman vektörü  $\vec{x}(s)$  olan bir regle yüzeyin drali  $p_x$  ile gösterilsin.

$\langle \vec{x}(s), \vec{x}(s) \rangle = 1 \Rightarrow \vec{x}(s) \perp \vec{x}'(s)$  olduğundan komşu ana doğruların ortak dikmesi doğrultusundaki birim vektör

$$\frac{\vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s)}{\|\vec{x}'(s)\|}$$

dir. Dayanak eğrisinin komşu iki noktası  $\vec{\alpha}(s)$  ve  $\vec{\alpha}(s+ds) = \vec{\alpha}(s) + d\vec{\alpha}(s)$  olduğundan bu noktalardaki ana doğrular arasındaki en kısa uzaklık,  $d\vec{\alpha}$  vektörünün  $\frac{\vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s)}{\|\vec{x}'(s)\|}$  vektörü üzerindeki izdüşümüdür. Böylece en kısa

uzaklık  $k$  ile gösterilirse (Şekil 2.11).

$$k = \left\langle d\vec{\alpha}(s), \frac{\vec{x}(s) \wedge \vec{x}'(s)}{\|\vec{x}'(s)\|} \right\rangle$$

veya

$$k = \frac{\det \left( d\vec{\alpha}(s), \vec{x}(s), \vec{x}'(s) \right)}{\|\vec{x}'(s)\|}$$

şeklinde bulunur. Eğer ana doğruların küresel göstergeleri göz önüne alınırsa bu göstergelerin yay elementi olan

$$d\psi = \left\| \frac{d\vec{x}(s)}{ds} \right\| ds = \|\vec{x}'(s)\| ds$$

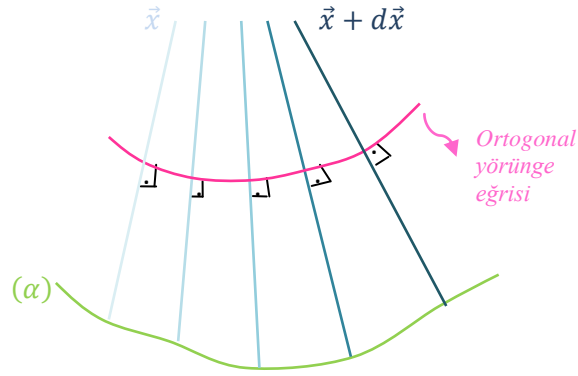
komşu iki ana doğru arasındaki açı olarak alınabilir. Böylece regle yüzeyin drali için,

$$p_x = \frac{k}{d\psi},$$

$$p_x = \frac{\det(\vec{\alpha}'(s), \vec{x}(s), \vec{x}'(s))}{\|\vec{x}'(s)\|^2} \quad (2.21)$$

bulunur (Hacısalihoglu, 1983).

**Tanım 2.2.10:**  $\vec{\varphi}(s, v)$  regle yüzeyinin ana doğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin **ortogonal yörüngesi** denir, (Hacısalihoglu, 1994), (Şekil 2.12).

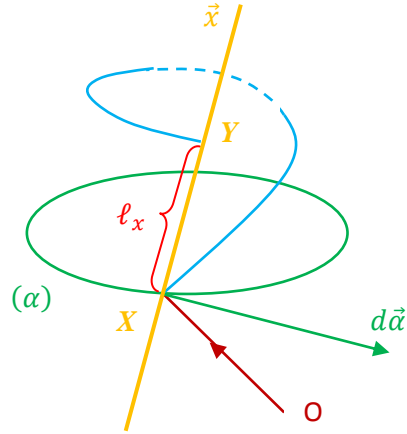


Şekil 2.12. Ortogonal yörünge eğrisi

**Tanım 2.2.11:**  $\vec{\varphi}(s, v)$  kapalı regle yüzeyinin ana doğrularının dik yörüngeleri için

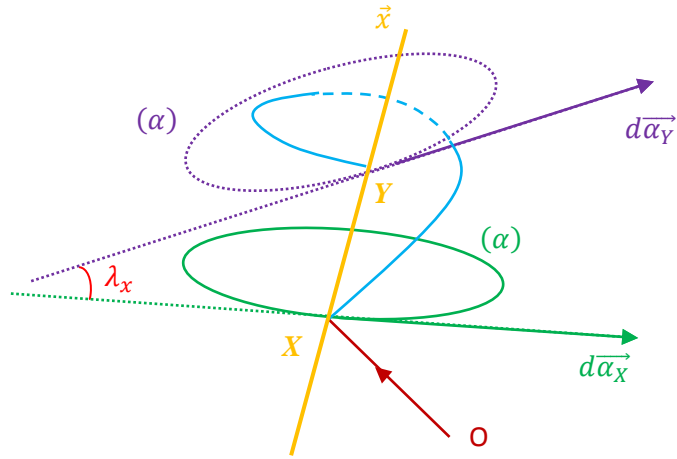
$$\ell_x = \oint_{(\alpha)} \langle d\vec{\alpha}(s), \vec{x}(s) \rangle = \oint_{(\alpha)} ds \quad (2.22)$$

şeklinde tanımlı  $\ell_x$  fonksiyonuna, regle yüzeyin **açılım uzunluğu (adımı)** denir, (Hacısalihoglu, 1994), (Şekil 2.13).



Şekil 2.13. Regle yüzeyin açılım uzunluğu

**Tanım 2.2.12:**  $\vec{\varphi}(s, v)$  regle yüzeyinin ana doğrularına dik bir doğrultunun bir periyot sonra ilk konumu ile yaptığı açığa regle yüzeyin **açılım açısı** denir ve bu açı  $\lambda_x$  ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1994), (Şekil 2.14).



Şekil 2.14. Regle yüzeyin açılım açısı

**Teorem 2.2.1:**  $\vec{\varphi}(s, v)$  kapalı regle yüzeyinin açılım uzunluğu ve açılım açısı sırasıyla,  $\vec{x}$  ana doğrusunun Steiner öteleme ve Steiner dönme vektörleri üzerindeki dik izdüşümlerine eşittir. Yani

$$\begin{cases} \ell_x = \langle \vec{v}(s), \vec{x}(s) \rangle \\ \lambda_x = -\langle \vec{d}(s), \vec{x}(s) \rangle \end{cases} \quad (2.23)$$

dır (Hacısalihoglu, 1994).

$\vec{x}(s)$  ana doğrusu yerine  $(\alpha)$  eğrisinin  $\vec{u}_1(s)$ ,  $\vec{u}_2(s)$  ve  $\vec{u}_3(s)$  Frenet vektörleri alındığında, elde edilen kapalı regle yüzeylerin açılım açıları, açılım uzunlukları ve dralleri sırasıyla,

$$\begin{cases} \lambda_{u_1} = \oint_{(\alpha)} k_2(s) ds, & \lambda_{u_2} = 0, & \lambda_{u_3} = \oint_{(\alpha)} k_1(s) ds \\ l_{u_1} = \oint_{(\alpha)} ds, & l_{u_2} = 0, & l_{u_3} = 0 \\ p_{u_1} = 0, & p_{u_2} = \frac{k_2(s)}{k_1^2(s) + k_2^2(s)}, & p_{u_3} = \frac{1}{k_2(s)} \end{cases} \quad (2.24)$$

şeklinde bulunur (Hacısalihoglu, 1994).

**Tanım 2.2.12:** Bir yüzeyin birim normal vektörü  $\vec{n}(s)$  ile gösterilirse  $S$  **şekil operatörü (Weingarten dönüşümü)**

$$S(\vec{x}) = D_x \vec{n}(s)$$

şeklinde tanımlı lineer ve simetrik bir dönüşümdür (Hacısalihoglu, 1994).

Yüzeyin bir bazı  $\{\vec{x}_1(s), \vec{x}_2(s)\}$  ile gösterilirse şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$S = \begin{bmatrix} \langle S(\vec{x}_1(s)), \vec{x}_1(s) \rangle & \langle S(\vec{x}_1(s)), \vec{x}_2(s) \rangle \\ \langle S(\vec{x}_2(s)), \vec{x}_1(s) \rangle & \langle S(\vec{x}_2(s)), \vec{x}_2(s) \rangle \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

şeklinde bulunur. Regle yüzeyin anadoğruları hem asimptotik hem de geodezik çizgiler olduğundan (Hacısalihoglu, 1994)



$$\langle S(\vec{x}_1(s)), \vec{x}_1(s) \rangle = \langle S(\vec{x}_2(s)), \vec{x}_2(s) \rangle = 0$$

olur. Yüzeyin  $P$  noktasındaki Gauss eğriliği  $K$  ile gösterilirse

$$K(P) = \det S(P) = -\langle S(\vec{x}_2(s)), \vec{x}_1(s) \rangle^2 \quad (2.26)$$

şeklinde bulunur (Hacısalıhoğlu, 1994).

### 2.3. Dual Uzayda Temel Kavramlar

$ID = \{A = (a, a^*) \mid a, a^* \in IR\}$  cümlesine **dual sayılar cümlesi** denir. Bu cümle üzerinde **toplama, çarpma, bölme ve eşitlik işlemleri** sırasıyla,

$$A \oplus B = (a, a^*) \oplus (b, b^*) = (a+b, a^* + b^*),$$

$$A \odot B = (a, a^*) \odot (b, b^*) = (ab, ab^* + a^*b),$$

$$\frac{B}{A} = \left( \frac{b}{a}, \frac{ab^* - a^*b}{a^2} \right), \quad a \neq 0,$$

$$A = B \Leftrightarrow a = b \text{ ve } a^* = b^*$$

şeklinde tanımlanır.  $(ID, \oplus, \odot)$  üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır ancak cisim değildir.

$A = (a, a^*) \in ID$  sayısı  $A = a + \varepsilon a^*$  şeklinde yazılabilir. Burada  $\varepsilon = (0,1)$  sayısı dual birimdir ve  $\varepsilon^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0,0) + (0,0) \equiv 0$ . Gerçekten;

$$\begin{aligned} A &= (a, a^*) \\ &= (a, 0) \oplus (0, a^*) \\ &= (a, 0) \oplus (0, 1) \odot (a^*, 0) \\ &= a + \varepsilon a^*. \end{aligned}$$

$ID^3 = ID \times ID \times ID = \{\vec{A} = (A_1, A_2, A_3) \mid A_i \in ID, 1 \leq i \leq 3\}$  cümlesi düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
ID^3 &= \left\{ \vec{A} = (a_1 + \varepsilon a_1^*, a_2 + \varepsilon a_2^*, a_3 + \varepsilon a_3^*) \mid a_i, a_i^* \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 3, \varepsilon^2 = 0 \right\} \\
&= \left\{ \vec{A} = (a_1, a_2, a_3) + \varepsilon (a_1^*, a_2^*, a_3^*) \mid a_i, a_i^* \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 3, \varepsilon^2 = 0 \right\} \\
&= \left\{ \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \mid \vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3, \varepsilon^2 = 0 \right\}
\end{aligned}$$

olur. Bu cümle üzerinde **toplama ve skalar ile çarpma işlemleri**

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_i) + (B_i) = (A_i + B_i),$$

$$\lambda \cdot \vec{A} = (\lambda A_i)$$

şeklinde tanımlanır.  $(ID^3, +, \cdot)$  cebirsel yapısı  $ID$  dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür, bu yapı kısaca **ID - Modül** şeklinde gösterilir. Bu modülün her bir elemanına **dual vektör** denir.

**Tanım 2.3.1:**  $ID$  - Modülde iki dual vektör  $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$  ve  $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^*$  olsun. Bu vektörlerin **iç çarpımı** ve **vektörel çarpımı** sırasıyla;

$$\text{i) } \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon \left( \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle \right)$$

$$\text{ii) } \vec{A} \wedge \vec{B} = (\vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*) \wedge (\vec{b} + \varepsilon \vec{b}^*) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon (\vec{a} \wedge \vec{b}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{b})$$

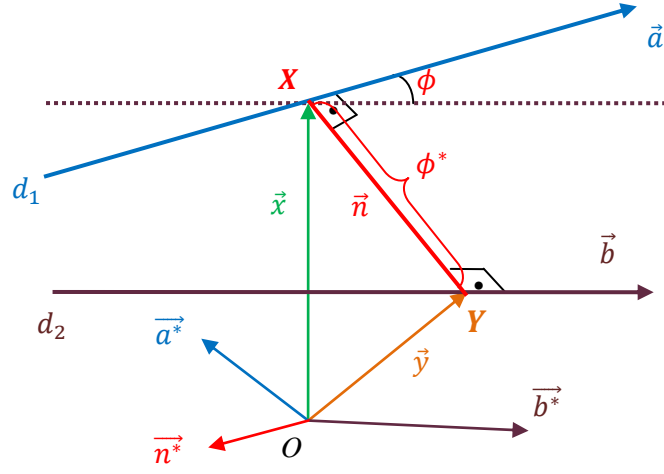
şeklinde tanımlanır.

**Teorem 2.3.1:**  $ID$  -Modülde iki birim dual vektör  $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$  ve  $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^*$  ise,

$$\text{i) } \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \Phi,$$

$$\text{ii) } \vec{A} \wedge \vec{B} = \sin \Phi \vec{N}.$$

**İspat: i)**  $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon \left( \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle \right)$  ifadesinin reel kısmının karşılığı bilinmektedir. Burada  $\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle$  ifadesinin geometrik manasına bakılmalıdır.



Şekil 2.15. Dual Açığı

$\vec{a}^*, \vec{b}^*$  vektörel momentleri sırasıyla  $d_1$  ve  $d_2$  yönlü doğruları üzerindeki  $X$  ve  $Y$  noktalarının seçilişinden bağımsız olduklarından, bu noktalar ortak dikmenin ayakları olarak anılabilirler. Bu ortak dikme yönündeki birim vektör  $\vec{n}$  ile gösterilirse

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}$$

dir.  $d_1$  ve  $d_2$  arasındaki en kısa uzaklık  $\phi^*$  ile gösterilirse, Şekil 2.15 ten  $\vec{x}, \vec{y}$  vektörleri için

$$\vec{x} - \vec{y} = \pm \phi^* \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}$$

yazılır. Diğer yandan  $\vec{a}^* = \vec{x} \wedge \vec{a}$  ve  $\vec{b}^* = \vec{y} \wedge \vec{b}$  değerleri  $\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle$  ifadesinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle &= \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle \\ &= \pm \left\langle \phi^* \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}, \vec{a} \wedge \vec{b} \right\rangle, \\ \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle &= \pm \phi^* \sin \phi\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu değer ve reel kısmın karşılığı dikkate alınırsa

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \phi \pm \varepsilon \phi^* \sin \phi$$

şeklinde olur. Burada  $(-)$  işareti için  $\Phi = \phi + \varepsilon \phi^*$  dual sayı olmak üzere Taylor açılımından

$$\cos \Phi = \cos(\phi + \varepsilon \phi^*) = \cos \phi - \varepsilon \phi^* \sin \phi$$

olur ve böylece

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos \Phi$$

şeklinde elde edilir.

**ii)**  $\vec{A} \wedge \vec{B} = (\vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*) \wedge (\vec{b} + \varepsilon \vec{b}^*) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon (\vec{a} \wedge \vec{b}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{b})$  ifadesinin reel kısmının karşılığı bilinmektedir. Burada  $\vec{a} \wedge \vec{b}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{b}$  ifadesinin geometrik manasına bakılmalıdır.

$$\begin{aligned}\vec{a} \wedge \vec{b}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{b} &= \vec{a} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{b}) + (\vec{x} \wedge \vec{a}) \wedge \vec{b} \\ &= \langle \vec{a}, \vec{y} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{y} - \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{a} + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{x} \\ &= \langle \vec{a}, \vec{y} \rangle \vec{b} - \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{a} + \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle (\vec{x} - \vec{y}) \\ &= \langle \vec{a}, \vec{y} \rangle \vec{b} - \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{a} \pm \phi^* \cos \phi \vec{n}\end{aligned}$$

dir. Ayrıca  $\vec{n}^* = \vec{x} \wedge \vec{n} = \vec{y} \wedge \vec{n}$  olduğundan

$$\begin{aligned}
\vec{n}^* &= \pm \vec{x} \wedge \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|} \\
&= \pm \frac{1}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|} \vec{x} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) \\
&= \pm \frac{1}{\sin \phi} (\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{b} - \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{a})
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\pm \sin \phi \vec{n}^* = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{b} - \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{a}$$

veya

$$\pm \sin \phi \vec{n}^* = \langle \vec{y}, \vec{a} \rangle \vec{b} - \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{a}$$

bulunur. Bu değer yukarıdaki  $\vec{a} \wedge \vec{b}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{b}$  eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\vec{a} \wedge \vec{b}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{b} = \pm \sin \phi \vec{n}^* \pm \phi^* \cos \phi \vec{n}$$

olur. Bulunan reel ve dua ifadeler yerlerine yazılırsa

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \pm \sin \phi \vec{n} \pm \varepsilon (\sin \phi \vec{n}^* \pm \phi^* \cos \phi \vec{n})$$

şeklinde bulunur. Burada (+) işareti için  $\Phi = \phi + \varepsilon \phi^*$  dual sayı olmak üzere

Taylor aılımlından

$$\sin \Phi = \sin(\phi + \varepsilon \phi^*) = \sin \phi + \varepsilon \phi^* \cos \phi$$

yazılır ve böylece

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \sin \Phi \vec{N}$$

elde edilir.

**Tanım 2.3.2:**  $\Phi = \phi + \varepsilon \phi^*$  dual sayısına  $\vec{A}$  ile  $\vec{B}$  birim dual vektörleri arasındaki **dual açı** denir. Burada  $\phi$  açısı eksenler arasındaki reel açıyı,  $\phi^*$  sayısı ise eksenler arasındaki en kısa uzaklığı ifade eder (şekil 2.15).

Bu tanımdan sonra  $\vec{A}$  ile  $\vec{B}$  birim dual vektörleri için aşağıdaki özellikler verilebilir:

$$\text{i)} \quad \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \text{Sırf dual,} \left( \phi = \frac{\pi}{2} \text{ ve } \phi^* \neq 0 \right),$$

ise  $\vec{A}$  ile  $\vec{B}$  birim dual vektörlerinin belirttikleri yönlü doğrular dik durumlu fakat aykırıdır.

$$\text{ii)} \quad \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \text{Sırf reel,} \left( \phi^* = 0 \right),$$

ise  $\vec{A}$  ile  $\vec{B}$  birim dual vektörlerinin belirttikleri yönlü doğrular kesişir ve  $\langle a^*, b \rangle + \langle a, b^* \rangle = 0$  bağıntısı doğruların kesişme şartıdır.

$$\text{iii)} \quad \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = 0, \left( \phi = \frac{\pi}{2} \text{ ve } \phi^* = 0 \right),$$

ise yönlü doğrular birbirini dik olarak keser.

$$\text{iv)} \quad \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = (1, 0), \left( \phi = 0 \right),$$

ise yönlü doğrular aynı yönlü ve paraleldir. Eğer  $\phi^* = 0$  ise bu iki doğru aynı zamanda çakışıktır.

$$\text{v)} \quad \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = -(1, 0), \left( \phi = \pi \right),$$

ise yönlü doğrular zıt yönlü ve paraleldir. Eğer  $\phi^* = 0$  ise bu iki doğru aynı zamanda çakışıktır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Bir  $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in ID^3$  dual vektörünün **normu**  $\|\vec{A}\|$  ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} \|\vec{A}\| &= \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle} = \sqrt{\langle \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \rangle} \\ &= \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + 2\varepsilon \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle} \end{aligned}$$

$$\|\vec{A}\| = \|\vec{a}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|}, \quad \|\vec{a}\| \neq 0 \quad (2.27)$$

şeklinde bulunur. Burada

$$a = \|\vec{a}\|, \quad a^* = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} \quad (2.28)$$

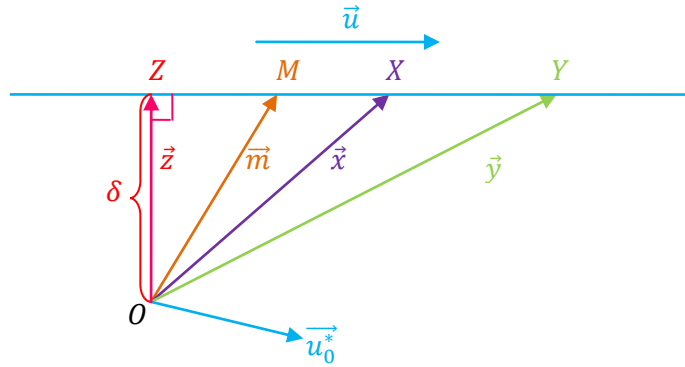
denilirse  $\|\vec{A}\| = a + \varepsilon a^*$  şeklinde bir dual sayı olur. Eğer  $\|\vec{A}\| = (1, 0)$  ise

$$\|\vec{a}\| = 1, \quad \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$$

olur ve bu noktaların geometrik yerine **birim dual küre** denir.

**Teorem 2.3.2: (E. Study)**  $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in ID\text{-Modül}$ ,  $\vec{a} \neq 0$  olmak üzere denklemi  $\|\vec{A}\| = (1, 0)$  olan birim dual kürenin dual noktaları,  $\mathbb{R}^3$  teki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir (Hacısalıhoğlu 1983), (Müller 1963).

**İspat:**  $\mathbb{R}^3$  teki bir doğru bir  $O$  başlangıç noktasına göre, üzerindeki bir  $M$  noktası ve doğrunun yönünü belirten bir  $\vec{u}$  vektörüyle belirlenir. Böyle bir doğrunun vektörel denklemi Şekil 2.16 dan



**Şekil 2.16.** Doğrunun doğrultu vektörü ve vektörel momenti

$$(\vec{x} - \vec{m}) \wedge \vec{u} = 0$$

şeklinde yazılır. Burada  $\vec{u}$  vektörü birim olarak alınabilir.

$$\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{m} \wedge \vec{u} = \vec{u}_0^*$$

denirse,  $\vec{u}_0^*$  vektörü  $\vec{u}$  vektörünün  $O$  noktasına göre vektörel momentini ifade eder ve bu vektör noktanın doğru üzerindeki seçilişinden bağımsızdır. Eğer  $O$  noktasından doğruya inilen dikmenin ayağı  $Z$  ise

$$\vec{z} \wedge \vec{u} = \vec{u}_0^*$$

yazılır. Bu eşitliğin her tarafının normu alınırsa  $\vec{u}_0^*$  vektörünün boyu

$$\|\vec{u}_0^*\| = \|\vec{z} \wedge \vec{u}\| = \|\vec{z}\| = \delta$$

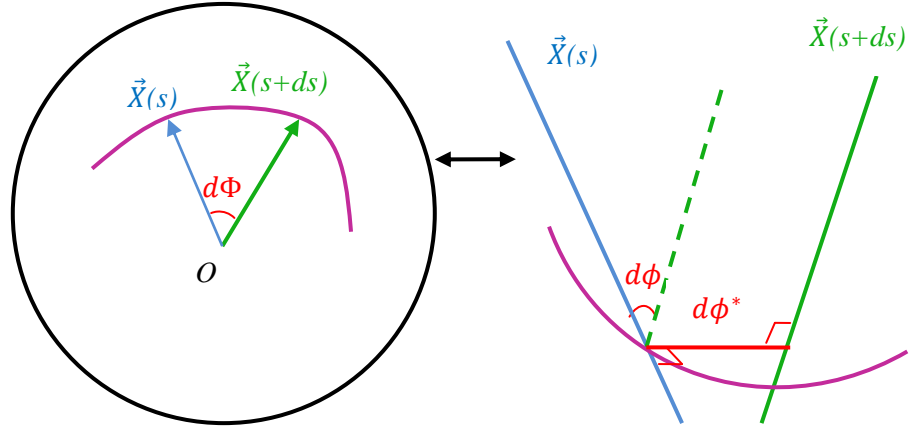
olur. Yani  $\vec{u}_0^*$  vektörü  $O$  başlangıç noktasına bağlıdır. Böylece  $(\vec{u}, \vec{u}_0^*)$  vektör çiftleri  $\mathbb{R}^3$  teki yönlü doğrulara karşılık gelmiş olur.  $(\vec{u}, \vec{u}_0^*)$  vektör çifti

$$\|\vec{u}\| = 1, \langle \vec{u}, \vec{u}_0^* \rangle = 0$$

şartlarını sağlamaktadır. Diğer taraftan  $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3$  birim dual vektör olsun. Yani  $\|\vec{a}\| = 1, \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$  dir. Buradan görülür ki  $(\vec{u}, \vec{u}_0^*)$  vektör çiftine  $(\vec{a}, \vec{a}^*)$  vektör çifti karşılık gelmektedir. O halde  $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$  birim dual vektörü  $\mathbb{R}^3$  te bir yönlü doğru belirtir. Yani  $\mathbb{R}^3$  teki yönlü doğrularla birim dual vektörler birebir karşılık gelir. Eğer  $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$  birim dual vektörleri  $\vec{AO} = \vec{A}$  yer vektörleri olarak alınırsa  $\mathbb{R}^3$  teki yönlü doğrular, denklemi  $\|\vec{A}\| = (1, 0)$  olan kürenin dual noktalarına birebir karşılık gelirler.

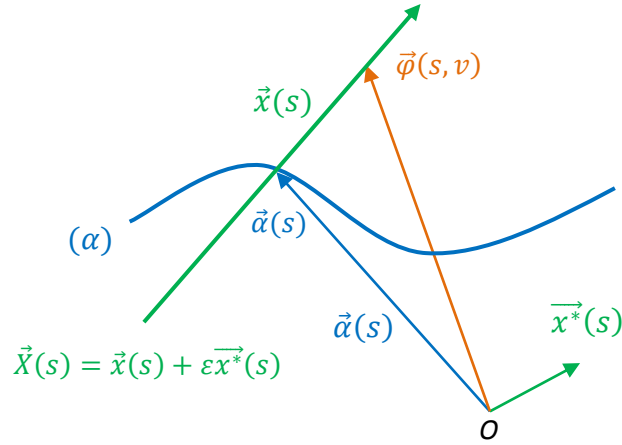
$ID$  – Modülde  $\vec{X}$  birim dual vektörü dual küre üzerinde  $\vec{X}(s)$  dual eğrisini çizer. Bu eğrinin noktaları E. STUDY tekabül prensibine göre 3- boyutlu Öklid uzayında yönlü doğrulara birebir karşılık gelir. Bu yönlü doğrular ailesi  $\mathbb{R}^3$  te regle yüzey meydana getirdiğinden,  $\vec{X} = \vec{X}(s)$  dual eğrisine bir regle yüzey gözüyle bakılır. Bu eğriye regle yüzeyin **dual küresel resmi** denir (Şekil 2.17).





Şekil 2.17. E. Study tekabül prensibi

#### 2.4. Regle Yüzeyin Dual Vektörel İfadesi



Şekil 2.18. Regle yüzeyin dual vektörel ifadesi

Dayanak eğrisi  $(\alpha)$  ve ana doğruları  $\vec{x} = \vec{x}(s)$  birim vektörü olan regle yüzeyin denklemi

$$\vec{\varphi}(s, u) = \vec{\alpha}(s) + u\vec{x}(s)$$

şeklinde yazılır. Şekil 2.18 den de görüldüğü gibi

$$\vec{x}^*(s) = \vec{\alpha}(s) \wedge \vec{x}(s),$$

$$\vec{x}(s) \wedge \vec{x}^*(s) = \vec{\alpha}(s) - \langle \vec{\alpha}(s), \vec{x}(s) \rangle \vec{x}(s)$$

olduğundan

$$v = u + \langle \vec{\alpha}(s), \vec{x}(s) \rangle$$

olmak üzere, regle yüzeyin dual ifade

$$\vec{\varphi}(s, v) = \vec{x}(s) \wedge \vec{x}^*(s) + v\vec{x}(s), \quad \vec{x}^*(s) = \vec{\alpha}(s) \wedge \vec{x}(s) \quad (2.29)$$

şeklinde yazılır.

**Tanım 2.4.1:**  $\vec{\varphi}(s, v) = \vec{x}(s) \wedge \vec{x}^*(s) + v\vec{x}(s)$  regle yüzeyi verilsin.

$$P_x = \frac{\langle d\vec{x}(s), d\vec{x}^*(s) \rangle}{\langle d\vec{x}(s), d\vec{x}(s) \rangle} = \frac{\langle d\vec{\varphi}(s), d\vec{\varphi}^*(s) \rangle}{\langle d\vec{\varphi}(s), d\vec{\varphi}(s) \rangle} = \frac{d\phi^*}{d\phi} \quad (2.30)$$

ifadesine regle yüzeyin **dağılma parametresi** veya **drali** denir.

$\vec{\varphi}(s, v) = \vec{x}(s) \wedge \vec{x}^*(s) + v\vec{x}(s)$  kapalı regle yüzeyin dual açılım açısı ve dual açılım uzunluğu sırasıyla,  $\vec{D}(s) = \vec{d}(s) + \varepsilon \vec{d}^*(s)$  dual Steiner dönme vektörü olmak üzere;

$$\Lambda_x = -\langle \vec{D}(s), \vec{X}(s) \rangle, \quad (2.31)$$

$$L_x = \langle \vec{d}^*(s), \vec{x}(s) \rangle + \langle \vec{d}(s), \vec{x}^*(s) \rangle \quad (2.32)$$

şeklinde yazılır (Hacısalihoglu, 1983). (2.31) ifadesi (2.23) ve (2.32) bağıntılarından

$$\Lambda_x = \lambda_x - \varepsilon L_x \quad (2.33)$$

şeklinde de yazılır (Hacısalihoglu, 1983).

$ID$ – Modülde,  $\vec{X}(s)$  üretici vektör olmak üzere, bir regle yüzeyin dual ortonormal sistemi

$$\begin{cases} \vec{U}_1(s) = \vec{X}(s) = \vec{u}_1(s) + \varepsilon \vec{u}_1^*(s) \\ \vec{U}_2(s) = \frac{\vec{X}'(s)}{\|\vec{X}'(s)\|} = \vec{u}_2(s) + \varepsilon \vec{u}_2^*(s) \\ \vec{U}_3(s) = \vec{U}_1(s) \wedge \vec{U}_2(s) = \vec{u}_3(s) + \varepsilon \vec{u}_3^*(s) \end{cases} \quad (2.34)$$

şeklinde alınırsa, bu sistemin  $\vec{u}_1(s), \vec{u}_2(s), \vec{u}_3(s)$  eksenleri boğaz noktasında kesişir ve bu kesişim noktası  $\vec{u}_1(s)$  eksenini üzerindedir.  $\vec{U}_3(s)$  doğrusu  $\vec{U}_1(s)$  doğrularına dik, yüzeyin boğaz noktasındaki teğettir.  $\vec{U}_2(s)$  ise yüzeyin boğaz noktasındaki normalidir. Bu şekilde elde edilen  $\{\vec{U}_1(s), \vec{U}_2(s), \vec{U}_3(s)\}$  vektörlerine **Blaschke vektörleri** denir. Bu vektörler ile onların türev vektörleri arasında

$$\begin{cases} \vec{U}_1'(s) = \kappa(s) \vec{U}_2(s) \\ \vec{U}_2'(s) = -\kappa(s) \vec{U}_1(s) + \tau(s) \vec{U}_3(s) \\ \vec{U}_3'(s) = -\tau(s) \vec{U}_2(s) \end{cases} \quad (2.35)$$

bağıntısı vardır (Blaschke, 1949). Burada

$$\begin{cases} \kappa(s) = k_1(s) + \varepsilon k_1^*(s) = \sqrt{\langle \vec{U}_1'(s), \vec{U}_1'(s) \rangle} \\ \tau(s) = k_2(s) + \varepsilon k_2^*(s) = \frac{\langle \vec{U}_1'(s), \vec{U}_1''(s), \vec{U}_1'''(s) \rangle}{\langle \vec{U}_1'(s), \vec{U}_1'(s) \rangle} \end{cases}$$

ifadeleri regle yüzeyin dual eğrilikleridir. (2.35) ifadesi reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$\left\{ \begin{array}{l}
\overline{u}_1'(s) = k_1(s)\overline{u}_2(s) \\
\overline{u}_2'(s) = -k_1(s)\overline{u}_1(s) + k_2(s)\overline{u}_3(s) \\
\overline{u}_3'(s) = -k_2(s)\overline{u}_2(s) \\
\overline{u}_1^*(s) = k_1^*(s)\overline{u}_2(s) + k_1(s)\overline{u}_2^*(s) \\
\overline{u}_2^*(s) = -k_1^*(s)\overline{u}_1(s) + k_2^*(s)\overline{u}_3(s) - k_1(s)\overline{u}_1^*(s) + k_2(s)\overline{u}_3^*(s) \\
\overline{u}_3^*(s) = -k_2^*(s)\overline{u}_2(s) - k_2(s)\overline{u}_2^*(s)
\end{array} \right. \quad (2.36)$$

olur. (2.29) bağıntısına göre  $(\overline{U}_1)$ ,  $(\overline{U}_2)$ ,  $(\overline{U}_3)$  regle yüzeylerinin denklemleri, sırasıyla,

$$\left\{ \begin{array}{l}
\overline{\varphi}_{U_1}(s, v) = \overline{u}_1(s) \wedge \overline{u}_1^*(s) + v\overline{u}_1(s), \quad \overline{u}_1^*(s) = \overline{\alpha}(s) \wedge \overline{u}_1(s) \\
\overline{\varphi}_{U_2}(s, v) = \overline{u}_2(s) \wedge \overline{u}_2^*(s) + v\overline{u}_2(s), \quad \overline{u}_2^*(s) = \overline{\alpha}(s) \wedge \overline{u}_2(s) \\
\overline{\varphi}_{U_3}(s, v) = \overline{u}_3(s) \wedge \overline{u}_3^*(s) + v\overline{u}_3(s), \quad \overline{u}_3^*(s) = \overline{\alpha}(s) \wedge \overline{u}_3(s)
\end{array} \right.$$

şeklinde yazılır.  $\overline{u}_1^*(s)$ ,  $\overline{u}_2^*(s)$ ,  $\overline{u}_3^*(s)$  vektörel momentlerin sırasıyla türevleri alınırsa;

$$\begin{aligned}
\overline{u}_1^*(s) &= \overline{\alpha}'(s) \wedge \overline{u}_1(s) + \overline{\alpha}(s) \wedge \overline{u}_1'(s) \\
&= k_1(s)\overline{\alpha}(s) \wedge \overline{u}_2(s) \\
&= k_1(s)\overline{u}_2^*(s),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u_2^*}'(s) &= \overrightarrow{\alpha}'(s) \wedge \overrightarrow{u_2}(s) + \overrightarrow{\alpha}(s) \wedge \overrightarrow{u_2}'(s) \\
&= \overrightarrow{u_3}(s) + \overrightarrow{\alpha}(s) \wedge (-k_1(s)\overrightarrow{u_1}(s) + k_2(s)\overrightarrow{u_3}(s)) \\
&= \overrightarrow{u_3}(s) - k_1(s)\overrightarrow{\alpha}(s) \wedge \overrightarrow{u_1}(s) + k_2(s)\overrightarrow{\alpha}(s) \wedge \overrightarrow{u_3}(s) \\
&= \overrightarrow{u_3}(s) - k_1(s)\overrightarrow{u_1^*}(s) + k_2(s)\overrightarrow{u_3^*}(s),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u_3^*}'(s) &= \overrightarrow{\alpha}'(s) \wedge \overrightarrow{u_3}(s) + \overrightarrow{\alpha}(s) \wedge \overrightarrow{u_3}'(s) \\
&= -\overrightarrow{u_2}(s) - k_2(s)\overrightarrow{\alpha}(s) \wedge \overrightarrow{u_3}(s) \\
&= -\overrightarrow{u_2}(s) - k_2(s)\overrightarrow{u_3^*}(s)
\end{aligned}$$

olur. Böylece (2.36) bağıntısındaki vektörel moment türevleri ile türev vektörleri arasındaki ilişki

$$\left\{ \begin{aligned}
\overrightarrow{u_1^*}'(s) &= k_1(s)\overrightarrow{u_2^*}(s) \\
\overrightarrow{u_2^*}'(s) &= \overrightarrow{u_3}(s) - k_1(s)\overrightarrow{u_1^*}(s) + k_2(s)\overrightarrow{u_3^*}(s) \\
\overrightarrow{u_3^*}'(s) &= -\overrightarrow{u_2}(s) - k_2(s)\overrightarrow{u_3^*}(s)
\end{aligned} \right. \quad (2.37)$$

şeklinde olur.  $\{\overrightarrow{U_1}(s), \overrightarrow{U_2}(s), \overrightarrow{U_3}(s)\}$  dual ortonormal sistemi her  $s$  anında ani dual Pfaff vektörü etrafında bir dual dönme hareketi yapar. Bu vektör

$$\overrightarrow{W}(s) = \tau(s)\overrightarrow{U_1}(s) + \kappa(s)\overrightarrow{U_3}(s) \quad (2.38)$$

denklemini ile bellidir. Hareketin dual Steiner dönme vektörü ise

$$\overrightarrow{D}(s) = \oint \overrightarrow{W}(s) = \overrightarrow{U_1}(s) \oint \tau(s) ds + \overrightarrow{U_3}(s) \oint \kappa(s) ds \quad (2.39)$$

dır. Regle yüzeyin  $(\vec{U}_1), (\vec{U}_2), (\vec{U}_3)$  kapalı regle yüzeylerinin dual açılım uzunlukları, dual açılım açıları ve dağılma parametreleri sırasıyla,

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{U_1} = \oint k_2^*(s) ds \\ \Lambda_{U_1} = -\oint \tau(s) ds \\ P_{U_1} = \frac{k_1^*(s)}{k_1(s)} \end{array} \right. \quad (2.40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{U_2} = \Lambda_{U_2} = 0 \\ P_{U_2} = \frac{k_1(s)k_1^*(s) + k_2(s)k_2^*(s)}{k_1^2(s) + k_2^2(s)} \end{array} \right. \quad (2.41)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{U_3} = \oint k_1^*(s) ds \\ \Lambda_{U_3} = -\oint \kappa(s) ds \\ P_{U_3} = \frac{k_2^*(s)}{k_2(s)} \end{array} \right. \quad (2.42)$$

şeklinde bulunur (Hacısalıhoğlu, 1983).

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

#### 3.1. Öklid Uzayında Paralel $p$ -Equidistant Regle Yüzeyler ve Bazı Karakteristik Özellikleri

$\mathbb{R}^3$  te yay parametresi ile verilen bir  $(\alpha)$  eğrisi diferensiyellenebilir eğri ve bu eğrinin  $\vec{\alpha}(s)$  noktasındaki Frenet çatısı  $\{\vec{u}_1(s), \vec{u}_2(s), \vec{u}_3(s)\}$  olsun. Dayanak eğrisi  $\vec{\alpha}(s)$  ve doğrultmanı  $\vec{u}_1(s)$  teğet vektörü olan bir  $\vec{\varphi}(s, v)$  regle yüzeyi

$$\vec{\varphi}(s, v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{u}_1(s), \quad (s, v) \in I \times \mathbb{R} \quad (3.1)$$

şeklinde verilir.  $\vec{\varphi}(s, v)$  yüzeyinin  $(\vec{\gamma})$  striksiyon eğrisi ve  $P_{u_1}$  dağılma parametresi sırasıyla,

$$\vec{\gamma}(s) = \vec{\alpha}(s) - \frac{\langle \vec{u}_1'(s), \vec{\alpha}'(s) \rangle}{\|\vec{u}_1'(s)\|^2} \vec{u}_1(s), \quad \vec{u}_1'(s) \neq 0, \quad (3.2)$$

$$P_{u_1} = \frac{\det(\vec{\alpha}'(s), \vec{u}_1(s), \vec{u}_1')}{\|\vec{u}_1'(s)\|^2} \quad (3.3)$$

şeklinde dir.

**Tanım 3.1.1:** Bir  $\vec{\varphi}(s, v)$  regle yüzeyinin striksiyon eğrisi boyunca  $Sp\{\vec{u}_1(s), \vec{u}_2(s)\}$ ,  $Sp\{\vec{u}_2(s), \vec{u}_3(s)\}$  ve  $Sp\{\vec{u}_1(s), \vec{u}_3(s)\}$  uzaylarına karşılık gelen düzlemlere, sırasıyla, **asimptotik**, **polar** ve **merkezi düzlemler** adı verilir (Valeontis, 1986), (Müller, 1963).

**Tanım 3.1.2:**  $\mathbb{R}^3$  te iki regle yüzey  $\vec{\varphi}(s, v)$  ve  $\vec{\varphi}(s, v)$  olsun. Eğer bu regle yüzeyler için;

- i) Striksiyon eğrileri boyunca üretici vektörleri paralel,
- ii) Karşılıklı noktalarda polar düzlemleri arasındaki  $p$  uzaklığı sabit

ise  $\vec{\varphi}(s,v)$  ve  $\overline{\overline{\varphi}}(s,v)$  regle yüzeylerine **paralel  $p$ -equidistant regle yüzeyler** adı verilir (Valeontis, 1986).

Bu tanıma göre  $\vec{\varphi}(s,v)$  ve  $\overline{\overline{\varphi}}(s,v)$  paralel  $p$ -equidistant regle yüzeylerinin parametrik ifadeleri

$$\begin{cases} \vec{\varphi}(s,v) = \vec{\alpha}(s) + v\vec{u}_1(s), & (s,v) \in I \times IR \\ \overline{\overline{\varphi}}(s,v) = \overline{\overline{\alpha}}(s) + v\vec{u}_1(s), & (s,v) \in I \times IR \end{cases} \quad (3.4)$$

şeklindedir.  $\vec{\varphi}(s,v)$  ve  $\overline{\overline{\varphi}}(s,v)$  paralel  $p$ -equidistant regle yüzeylerinin striksiyon eğrileri dayanak eğrileri olarak seçilsin. Bu yüzeylerin karşılıklı noktalarda merkezi, asimptotik ve polar düzlemler arasındaki uzaklıklar sırasıyla  $z, q$  ve  $p$  olsun. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir:

**Teorem 3.1.1:**  $\vec{\varphi}(s,v)$  ve  $\overline{\overline{\varphi}}(s,v)$  paralel  $p$ -equidistant regle yüzeyler,  $\vec{\varphi}(s,v)$  nin dayanak eğrisi  $\vec{\gamma}(s)$  striksiyon çizgisi ve  $\overline{\overline{\varphi}}(s,v)$  nin dayanak eğrisi de  $\overline{\overline{\alpha}}(s)$  olsun.

$$\overline{\overline{\alpha}}(s) = \vec{\gamma}(s) + p\vec{u}_1(s) + z\vec{u}_2(s) + q\vec{u}_3(s) \quad (3.5)$$

olmak üzere,  $\overline{\overline{\varphi}}(s,v)$  regle yüzeyinin striksiyon çizgisi,

$$\overline{\overline{\gamma}}(s) = \vec{\gamma}(s) + z\vec{u}_2(s) + q\vec{u}_3(s) - \left( \frac{z' - qk_2(s)}{k_1(s)} \right) \vec{u}_1(s) \quad (3.6)$$

şeklindedir (Valeontis, 1986).

**Sonuç 3.1.1:**  $\vec{\varphi}(s,v)$  ve  $\overline{\overline{\varphi}}(s,v)$  paralel  $p$ -equidistant regle yüzeylerinin polar düzlemleri arasındaki uzaklık

$$p = \frac{qk_2(s) - z'}{k_1(s)} \quad (3.7)$$

dır (Valeontis, 1986).



**Teorem 3.1.2:**  $\vec{\varphi}(s, \nu)$  ve  $\overline{\overline{\varphi}}(s, \nu)$  paralel  $p$ -equidistant regle yüzeyler olsun.  $\vec{\varphi}(s, \nu)$  nin dayanak eğrisinin yay parametresi  $s$ , eğriliği  $k_1(s)$  ve torsiyonu  $k_2(s)$ ,  $\overline{\overline{\varphi}}(s, \nu)$  nin dayanak eğrisinin yay parametresi  $\bar{s}$ , eğriliği  $\bar{k}_1(s)$  ve torsiyonu  $\bar{k}_2(s)$  ile gösterilsin. Bu eğrilikler arasında

$$\begin{cases} \bar{k}_1(s) = k_1(s) \frac{ds}{d\bar{s}} \\ \bar{k}_2(s) = k_2(s) \frac{ds}{d\bar{s}} \end{cases} \quad (3.8)$$

bağıntıları vardır (Valeontis, 1986).

**Teorem 3.1.3:**  $\vec{\varphi}(s, \nu)$  ve  $\overline{\overline{\varphi}}(s, \nu)$  kapalı paralel  $p$ -equidistant regle yüzeylerinin Frenet vektörleri, sırasıyla  $\{\vec{u}_1(s), \vec{u}_2(s), \vec{u}_3(s)\}$  ve  $\{\vec{v}_1(s), \vec{v}_2(s), \vec{v}_3(s)\}$  olsun. Bu vektörlerin çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$\begin{cases} \lambda_{v_1} = \lambda_{u_1} + a_1, & a_1 = \oint_{(pu_1 + zu_2 + qu_3)} k_2(s) ds \\ \lambda_{v_2} = \lambda_{u_2} = 0 \\ \lambda_{v_3} = \lambda_{u_3} + a_2, & a_2 = \oint_{(pu_1 + zu_2 + qu_3)} k_1(s) ds \end{cases} \quad (3.9)$$

(Masal, 1994).

**Teorem 3.1.4:**  $\vec{\varphi}(s, \nu)$  ve  $\overline{\overline{\varphi}}(s, \nu)$  kapalı paralel  $p$ -equidistant regle yüzeylerinin Frenet vektörleri, sırasıyla  $\{\vec{u}_1(s), \vec{u}_2(s), \vec{u}_3(s)\}$  ve  $\{\vec{v}_1(s), \vec{v}_2(s), \vec{v}_3(s)\}$  olsun. Bu vektörlerin çizdiği regle yüzeylerin açılım uzunlukları arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$\begin{cases} \overline{k_1} \ell_{v_1} = k_1 (\ell_{u_1} + a_3), & a_3 = \oint_{(pu_1+zu_2+qu_3)} ds \\ \ell_{v_2} = \ell_{u_2} = 0 \\ \ell_{v_3} = \ell_{u_3} = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

(Masal, 1994).

**Teorem 3.1.5:**  $\overline{\varphi}(s,v)$  ve  $\overline{\overline{\varphi}}(s,v)$  kapalı paralel  $p$ -equidistant regle yüzeylerinin Frenet vektörleri, sırasıyla  $\{\overline{u_1}(s), \overline{u_2}(s), \overline{u_3}(s)\}$  ve  $\{\overline{v_1}(s), \overline{v_2}(s), \overline{v_3}(s)\}$  olsun. Bu vektörlerin çizdiği regle yüzeylerin dralleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$\begin{cases} p_{v_1} = p_{u_1} = 0 \\ p_{v_2} = p_{u_2} \frac{d\overline{s}}{ds} \\ p_{v_3} = p_{u_3} \frac{d\overline{s}}{ds} \end{cases} \quad (3.11)$$

(Masal, 1994).

### 3.2. Dual Uzayda Regle Yüzeylerin İntegral İnvaryantları, Dağılma Parametreleri ve Gauss Eğrilikleri

Birim dual küre üzerindeki teğetler, asli normaller ve binormaller göstergelerine karşılık gelen regle yüzeylerin açılım uzunlukları ve açılım açıları sırasıyla,  $L_{U_1}$ ,  $L_{U_2}$ ,  $L_{U_3}$  ve  $\Lambda_{U_1}$ ,  $\Lambda_{U_2}$ ,  $\Lambda_{U_3}$  ise;

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{U_1} = \oint k_2^* \\ L_{U_2} = 0 \\ L_{U_3} = \oint k_1^* \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{U_1} = -\oint k_2 \\ \Lambda_{U_2} = 0 \\ \Lambda_{U_3} = -\oint k_1 \end{array} \right.$$

dır (Güven, 2010). Birim dual küre üzerindeki teğetler, asli normaller, binormaller ve pol göstergelerine karşılık gelen regle yüzeylerin dağılma parametreleri, sırasıyla,  $P_{U_1}$ ,  $P_{U_2}$ ,  $P_{U_3}$ ,  $P_C$  ve  $K_{U_1}$ ,  $K_{U_2}$ ,  $K_{U_3}$ ,  $K_C$  ile gösterilirse;

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{U_1} = 0 \\ P_{U_2} = \frac{k_2}{k_1^2 + k_2^2} \\ P_{U_3} = \frac{1}{k_2} \\ P_C = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} K_{U_1} = 0 \\ K_{U_2} = 0 \\ K_{U_3} = -\frac{k_2^2}{\left(k_2^2 (\langle \alpha, u_3 \rangle - \nu)^2 + 1\right)^2} \\ K_C = 0 \end{array} \right.$$

dır, (Güven, 2010).

#### 4. BULGULAR

Bu bölümde, Valeontis' in (1986) çalışmasından yola çıkarak  $ID$ -Modülde *dual paralel equidistant regle yüzey* tanımı verildi. Masal ve Kuruoğlu' nun (1999) çalışmasından hareketle, bu yüzeylerin Blaschke vektörlerinin birim dual küre üzerinde çizdikleri kapalı dual küresel gösterge eğrilerine Öklid uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzeylerin integral invaryantları arasındaki bağıntılar bulundu. Son olarak da Güven' in (2010) doktora tezinde kullandığı yöntemle, kapalı regle yüzeylerin Gauss eğrilikleri hesaplanarak bazı yeni sonuçlara ulaşıldı.

##### 4.1. Dual Paralel Equidistant Regle Yüzeyler

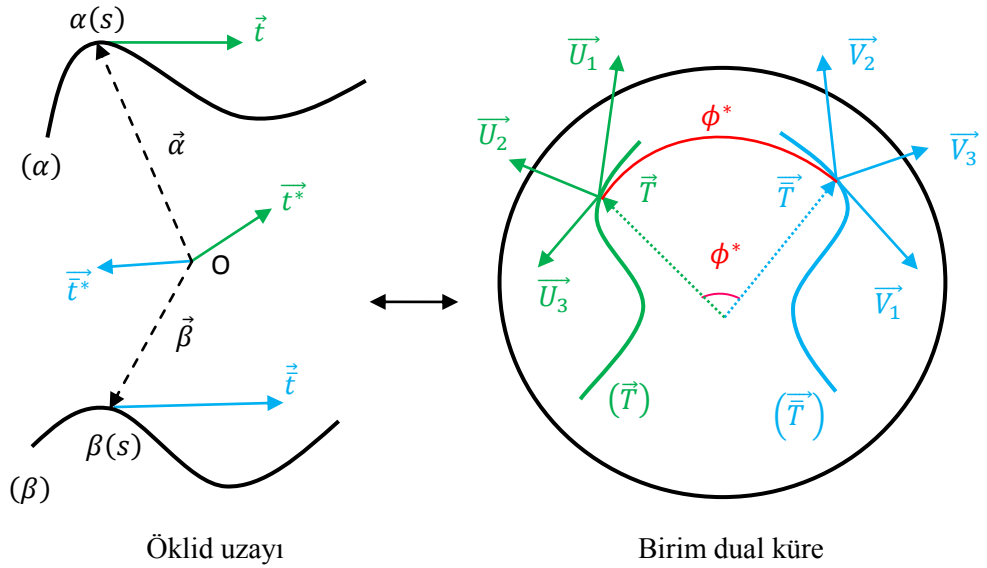
$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisinin birim teğet vektörü  $\vec{t}(s)$  ve vektörel momenti  $\vec{t}^*(s) = \vec{\alpha}(s) \wedge \vec{t}(s)$ ,  $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisinin birim teğet vektörü  $\vec{t}(s)$  ve vektörel momenti  $\vec{t}^*(s) = \vec{\beta}(s) \wedge \vec{t}(s)$  olsun.  $\vec{T}(s) = \vec{t}(s) + \varepsilon \vec{t}^*(s)$  ve  $\vec{\bar{T}}(s) = \vec{t}(s) + \varepsilon \vec{t}^*(s)$  dual vektörleri birim dual küre üzerinde birer dual eğri çizerler. Bu eğrilerin Blaschke vektörleri (2.34) bağıntısından, sırasıyla,

$$\begin{cases} \vec{U}_1(s) = \vec{T}(s) = \vec{u}_1(s) + \varepsilon \vec{u}_1^*(s) \\ \vec{U}_2(s) = \frac{\vec{T}'(s)}{\|\vec{T}'(s)\|} = \vec{u}_2(s) + \varepsilon \vec{u}_2^*(s) \\ \vec{U}_3(s) = \vec{U}_1(s) \wedge \vec{U}_2(s) = \vec{u}_3(s) + \varepsilon \vec{u}_3^*(s) \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \vec{V}_1(s) = \vec{T}(s) = \vec{v}_1(s) + \varepsilon \vec{v}_1^*(s) \\ \vec{V}_2(s) = \frac{\vec{T}'(s)}{\|\vec{T}'(s)\|} = \vec{v}_2(s) + \varepsilon \vec{v}_2^*(s) \\ \vec{V}_3(s) = \vec{V}_1(s) \wedge \vec{V}_2(s) = \vec{v}_3(s) + \varepsilon \vec{v}_3^*(s) \end{cases}$$

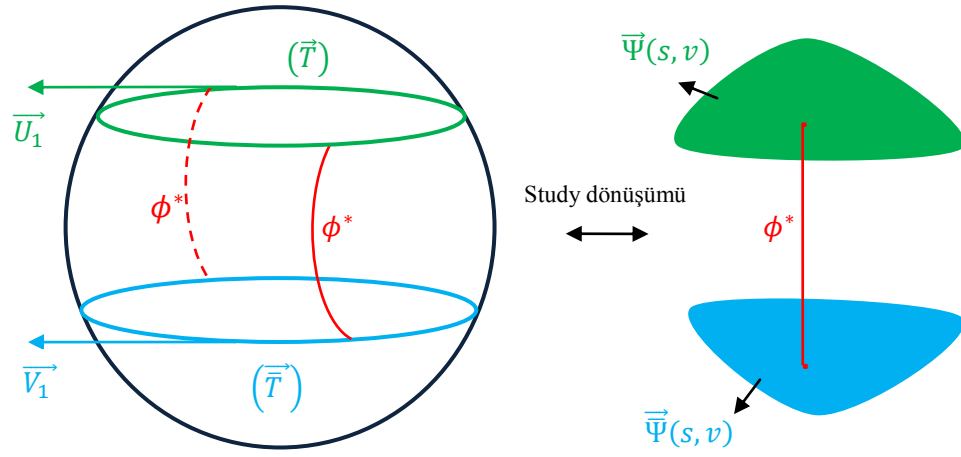
şeklinde verilir. Bu dual vektörlerin  $\vec{u}_1(s), \vec{u}_2(s), \vec{u}_3(s)$  ve  $\vec{v}_1(s), \vec{v}_2(s), \vec{v}_3(s)$  eksenleri boğaz noktalarında kesişir ve bu kesişim noktaları  $\vec{u}_1(s)$  ve  $\vec{v}_1(s)$  eksenleri üzerindedir. Tanım 3.1.2 ye göre, striksiyon eğrisi boyunca üretici vektörlerin paralel ve aynı yönlü, polar düzlemler arasındaki uzaklığın sabit olması için,  $\vec{U}_1(s)$  ve  $\vec{V}_1(s)$  dual vektörler arasındaki  $\Phi = \phi + \varepsilon \phi^*$  dual açısının sadece dual, yani  $\phi = 0$  ve  $\phi^*$  sabit, olması gerekmektedir. Buradaki  $\phi^*$  sabit değeri dual küre üzerinde  $\vec{U}_1(s)$  ve  $\vec{V}_1(s)$  dual noktaları arasındaki yay uzunluğuna karşılık gelmektedir (Şekil 4.1).



**Şekil 4.1.** Dual küresel eğriler ve Blaschke çatıları

Bu verilerden yararlanarak paralel equidistant regle yüzeylerin dual ifadesi şu şekilde verilebilir:

**Tanım 4.1.1:**  $\mathbb{R}^3$  te iki eğrinin birim teğet vektörleri ve vektörel momentlerinden oluşan iki birim dual vektörün, dual küre üzerinde çizdiği dual eğrilerin karşılık gelen dual noktaları arasındaki yay uzunluğu, sıfırdan farklı sabit ve sırf dual ise bu iki eğriye **dual paralel equidistant regle yüzeyle** denir (Şekil 4.2).



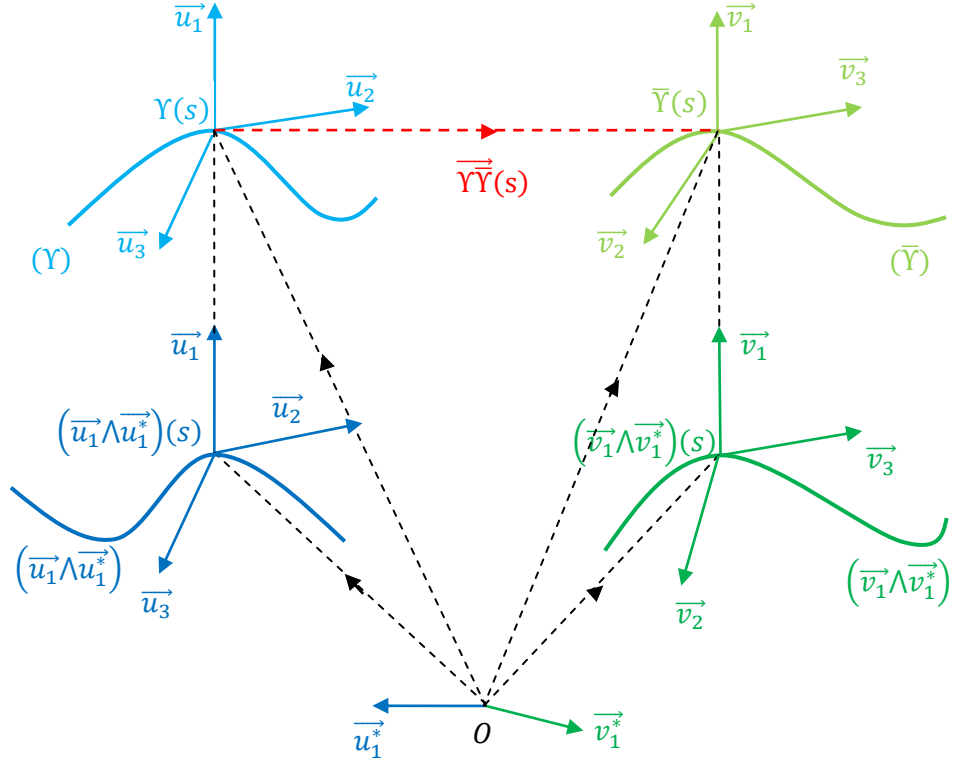
Şekil 4.2. Dual paralel equidistant regle yüzeyler

Bu tanımdan yola çıkarak,  $ID$ -Modülde,  $\vec{U}_1(s)$  ve  $\vec{V}_1(s)$  vektörlerinin, çizdiği  $(\vec{T})$  ve  $(\vec{\bar{T}})$  dual eğrilerine çizgiler uzayında karşılık gelen regle yüzeylerin parametrik denklemleri sırasıyla, (2.29) bağıntısından

$$\begin{cases} (\vec{T}) \equiv \vec{\Psi}(s, v) = \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_1^*(s) + v\vec{u}_1(s), & \vec{u}_1^*(s) = \vec{\alpha}(s) \wedge \vec{u}_1(s) \\ (\vec{\bar{T}}) \equiv \vec{\bar{\Psi}}(s, v) = \vec{v}_1(s) \wedge \vec{v}_1^*(s) + v\vec{v}_1(s), & \vec{v}_1^*(s) = \vec{\beta}(s) \wedge \vec{v}_1(s) \end{cases} \quad (4.1)$$

şeklinde yazılır (Şekil 4.3). Burada  $\vec{\beta}(s) = \vec{\alpha}(s) + \phi^* \vec{u}_1(s)$  dir.

#### 4.1.1. Dual Paralel Equidistant Regle Yüzeylerin Blaschke Vektörleri ve Striksiyon Eğrileri



Şekil 4.3. Dual paralel equidistant regle yüzeyler ve striksiyon eğrileri

$\bar{\Psi}(s, v)$  regle yüzeyinin striksiyon çizgisi  $\bar{Y}(s)$ , dual eğriliği  $\kappa(s) = k_1(s) + \varepsilon k_1^*(s)$ , dual torsiyonu  $\tau(s) = k_2(s) + \varepsilon k_2^*(s)$  ve  $\bar{\bar{\Psi}}(s, v)$  regle yüzeyinin striksiyon çizgisi  $\bar{\bar{Y}}(s)$ , dual eğriliği  $\bar{\kappa}(s) = \bar{k}_1(s) + \varepsilon \bar{k}_1^*(s)$ , dual torsiyonu  $\bar{\tau}(s) = \bar{k}_2(s) + \varepsilon \bar{k}_2^*(s)$  olsun. (3.2) bağıntısından striksiyon eğrileri sırasıyla,

$$\begin{aligned}
\bar{Y}(s) &= \bar{u}_1(s) \wedge \bar{u}_1^*(s) - \frac{\left\langle \bar{u}_1'(s), \left( \bar{u}_1(s) \wedge \bar{u}_1^*(s) \right)' \right\rangle}{\left\| \bar{u}_1'(s) \right\|^2} \bar{u}_1(s) \\
&= \bar{u}_1(s) \wedge \bar{u}_1^*(s) - \frac{\left\langle \bar{u}_1'(s), \bar{u}_1'(s) \wedge \bar{u}_1^*(s) + \bar{u}_1(s) \wedge \bar{u}_1^{*\prime}(s) \right\rangle}{\left\| \bar{u}_1'(s) \right\|^2} \bar{u}_1(s), \\
\bar{Y}(s) &= \bar{u}_1(s) \wedge \bar{u}_1^*(s) - \frac{\left\langle \bar{u}_1'(s), \bar{u}_1(s) \wedge \bar{u}_1^{*\prime}(s) \right\rangle}{\left\| \bar{u}_1'(s) \right\|^2} \bar{u}_1(s), \quad \bar{u}_1(s) \neq 0 \quad (4.2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{Y}(s) &= \bar{v}_1(s) \wedge \bar{v}_1^*(s) - \frac{\left\langle \bar{v}_1'(s), \left( \bar{v}_1(s) \wedge \bar{v}_1^*(s) \right)' \right\rangle}{\left\| \bar{v}_1'(s) \right\|^2} \bar{v}_1(s) \\
&= \bar{v}_1(s) \wedge \bar{v}_1^*(s) - \frac{\left\langle \bar{v}_1'(s), \bar{v}_1'(s) \wedge \bar{v}_1^*(s) + \bar{v}_1(s) \wedge \bar{v}_1^{*\prime}(s) \right\rangle}{\left\| \bar{v}_1'(s) \right\|^2} \bar{v}_1(s), \\
\bar{Y}(s) &= \bar{v}_1(s) \wedge \bar{v}_1^*(s) - \frac{\left\langle \bar{v}_1'(s), \bar{v}_1(s) \wedge \bar{v}_1^{*\prime}(s) \right\rangle}{\left\| \bar{v}_1'(s) \right\|^2} \bar{v}_1(s), \quad \bar{v}_1(s) \neq 0 \quad (4.3)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada (2.3) ve (2.37) bağıntılarındaki ifadeler yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa



$$\vec{Y}(s) = \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_1^*(s) - \frac{\left(k_1(s)\vec{u}_2(s), \vec{u}_1(s), k_1(s)\vec{u}_2^*(s)\right)}{\|k_1(s)\vec{u}_2(s)\|^2} \vec{u}_1(s),$$

$$\vec{Y}(s) = \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_1^*(s) - \left(\vec{u}_2(s), \vec{u}_1(s), \vec{u}_2^*(s)\right) \vec{u}_1(s), \quad (4.4)$$

$$\vec{Y}(s) = \vec{v}_1(s) \wedge \vec{v}_1^*(s) - \frac{\left(\vec{k}_1(s)\vec{v}_2(s), \vec{v}_1(s), \vec{k}_1(s)\vec{v}_2^*(s)\right)}{\|\vec{k}_1(s)\vec{v}_2(s)\|^2} \vec{v}_1(s),$$

$$\vec{Y}(s) = \vec{v}_1(s) \wedge \vec{v}_1^*(s) - \left(\vec{v}_2(s), \vec{v}_1(s), \vec{v}_2^*(s)\right) \vec{v}_1(s) \quad (4.5)$$

elde edilir. Şekil 4.3 teki  $\vec{Y}(s)$  vektörünün  $\vec{u}_1(s)$ ,  $\vec{u}_2(s)$ ,  $\vec{u}_3(s)$  birim vektörlerine dik izdüşümleri sırasıyla  $z$ ,  $q$  ve  $p$  ile gösterilsin. Bu durumda;

$$\vec{Y}(s) = p\vec{u}_1(s) + z\vec{u}_2(s) + q\vec{u}_3(s),$$

$$\vec{Y}(s) = \vec{Y}(s) + p\vec{u}_1(s) + z\vec{u}_2(s) + q\vec{u}_3(s) \quad (4.6)$$

şeklinde yazılır. Burada (4.5) bağıntısı yerine yazılırsa

$$\vec{v}_1(s) \wedge \vec{v}_1^*(s) - \left(\vec{v}_2(s), \vec{v}_1(s), \vec{v}_2^*(s)\right) \vec{v}_1(s) = \vec{Y}(s) + p\vec{u}_1(s) + z\vec{u}_2(s) + q\vec{u}_3(s)$$

bulunur. Tanım 4.1.1 gereği  $\phi = 0$  olduğundan doğrultman vektörler paralel olur ve böylece  $\vec{u}_1(s) = \vec{v}_1(s)$  alınırsa,

$$\vec{v}_1(s) \wedge \vec{v}_1^*(s) = \vec{Y}(s) + \left[ p + \left(\vec{v}_2(s), \vec{v}_1(s), \vec{v}_2^*(s)\right) \right] \vec{u}_1(s) + z\vec{u}_2(s) + q\vec{u}_3(s) \quad (4.7)$$

elde edilir. Bu ifadenin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\left(\bar{v}_1(s) \wedge \bar{v}_1^*(s)\right)' &= \bar{Y}'(s) + \left[ p + \left(\bar{v}_2(s), \bar{v}_1(s), \bar{v}_2^*(s)\right) \right]' \bar{u}_1(s) \\
&+ \left[ p + \left(\bar{v}_2(s), \bar{v}_1(s), \bar{v}_2^*(s)\right) \right] \bar{u}_1'(s) \\
&+ z' \bar{u}_2(s) + z \bar{u}_2'(s) + q' \bar{u}_3(s) + q \bar{u}_3'(s)
\end{aligned}$$

olur. Frenet formülleri yerine yazılırsa ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\left(\bar{v}_1(s) \wedge \bar{v}_1^*(s)\right)' &= \bar{Y}'(s) + \left( \left[ p + \left(\bar{v}_2(s), \bar{v}_1(s), \bar{v}_2^*(s)\right) \right]' - zk_1(s) \right) \bar{u}_1(s) \\
&+ \left( \left[ p + \left(\bar{v}_2(s), \bar{v}_1(s), \bar{v}_2^*(s)\right) \right] k_1(s) + z' - qk_2(s) \right) \bar{u}_2(s) \\
&+ (zk_2(s) + q') \bar{u}_3(s)
\end{aligned}$$

(4.8)

bulunur. Bu eşitliğin her iki yanını  $\bar{v}_1'(s)$  ile iç çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
\left\langle \bar{v}_1'(s), \left(\bar{v}_1(s) \wedge \bar{v}_1^*(s)\right)' \right\rangle &= \left\langle \bar{v}_1'(s), \bar{v}_1(s) \wedge \bar{v}_1^*(s) \right\rangle \\
&= \left\langle \bar{v}_1'(s), \bar{Y}'(s) \right\rangle \\
&+ \left( \left[ p + \left(\bar{v}_2(s), \bar{v}_1(s), \bar{v}_2^*(s)\right) \right]' - zk_1(s) \right) \left\langle \bar{v}_1'(s), \bar{u}_1(s) \right\rangle \\
&+ \left( \left[ p + \left(\bar{v}_2(s), \bar{v}_1(s), \bar{v}_2^*(s)\right) \right] k_1(s) + z' - qk_2(s) \right) \left\langle \bar{v}_1'(s), \bar{u}_2(s) \right\rangle \\
&+ (zk_2(s) + q') \left\langle \bar{v}_1'(s), \bar{u}_3(s) \right\rangle.
\end{aligned}$$

$$\vec{v}_1'(s) = \bar{k}_1(s) \vec{v}_2(s) \frac{d\bar{s}}{ds} = \vec{u}_1'(s) = k_1(s) \vec{u}_2(s)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{v}_1'(s), \vec{v}_1(s) \wedge \vec{v}_1^*(s) \right\rangle &= \left\langle \vec{v}_1'(s), \vec{Y}'(s) \right\rangle \\ &+ \left( \left[ p + \left( \vec{v}_2(s), \vec{v}_1(s), \vec{v}_2^*(s) \right) \right] k_1(s) + z' - qk_2(s) \right) k_1(s) \end{aligned} \quad (4.9)$$

bulunur. Ayrıca (4.4) ifadesinin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \vec{Y}'(s) &= \left( \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_1^*(s) \right)' - \left( \vec{u}_2(s), \vec{u}_1(s), \vec{u}_2^*(s) \right)' \vec{u}_1 \\ &- \left( \vec{u}_2(s), \vec{u}_1(s), \vec{u}_2^*(s) \right) k_1(s) \vec{u}_2(s) \end{aligned} \quad (4.10)$$

olur. (4.10) ifadesinin her iki yanını  $\vec{v}_1'(s)$  ile iç çarpılırsa

$$\left\langle \vec{v}_1'(s), \vec{Y}'(s) \right\rangle = \left\langle \vec{v}_1'(s), \left( \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_1^*(s) \right)' \right\rangle - \left( \vec{u}_2(s), \vec{u}_1(s), \vec{u}_2^*(s) \right) k_1^2(s)$$

elde edilir. Bu ifade (4.9) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{v}_1'(s), \left( \vec{v}_1(s) \wedge \vec{v}_1^*(s) \right)' \right\rangle &= \left\langle \vec{v}_1'(s), \left( \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_1^*(s) \right)' \right\rangle \\ &- \left( \vec{u}_2(s), \vec{u}_1(s), \vec{u}_2^*(s) \right) k_1^2(s) \\ &+ \left( \left[ p + \left( \vec{v}_2(s), \vec{v}_1(s), \vec{v}_2^*(s) \right) \right] k_1(s) + z' - qk_2(s) \right) k_1(s) \end{aligned} \quad (4.11)$$

olur. (4.7) ve (4.11) ifadeleri (4.3) te yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\bar{\bar{Y}}(s) &= \bar{Y}(s) + \left[ p + \left( \bar{v}_2(s), \bar{v}_1(s), \bar{v}_2^*(s) \right) \right] \bar{u}_1(s) + z\bar{u}_2(s) + q\bar{u}_3(s) \\ &\quad - \frac{\left\langle \bar{v}_1'(s), \left( \bar{u}_1(s) \wedge \bar{u}_1^*(s) \right)' \right\rangle - \left( \bar{u}_2(s), \bar{u}_1(s), \bar{u}_2^*(s) \right) k_1^2(s)}{k_1^2} \bar{v}_1(s) \\ &\quad - \frac{\left( \left[ p + \left( \bar{v}_2(s), \bar{v}_1(s), \bar{v}_2^*(s) \right) \right] k_1(s) + z' - qk_2(s) \right) k_1(s)}{k_1^2} \bar{v}_1(s)\end{aligned}$$

bulunur. Burada  $\bar{u}_1(s) = \bar{v}_1(s)$  eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\bar{\bar{Y}}(s) &= \bar{Y}(s) + \left( \begin{array}{l} p + \left( \bar{v}_2(s), \bar{v}_1(s), \bar{v}_2^*(s) \right) + \left( \bar{u}_2(s), \bar{u}_1(s), \bar{u}_2^*(s) \right) \\ \left\langle \bar{u}_1'(s), \left( \bar{u}_1(s) \wedge \bar{u}_1^*(s) \right)' \right\rangle \\ - \left[ p + \left( \bar{v}_2(s), \bar{v}_1(s), \bar{v}_2^*(s) \right) \right] - \frac{z' - qk_2(s)}{k_1(s)} \end{array} \right) \bar{u}_1(s) \\ &\quad + z\bar{u}_2(s) + q\bar{u}_3(s), \\ \bar{\bar{Y}}(s) &= \bar{Y}(s) + \left( \begin{array}{l} \left( \bar{u}_2(s), \bar{u}_1(s), \bar{u}_2^*(s) \right) - \frac{\left\langle \bar{u}_2(s), \left( \bar{u}_1(s) \wedge \bar{u}_1^*(s) \right)' \right\rangle}{k_1(s)} - \frac{z' - qk_2(s)}{k_1(s)} \end{array} \right) \bar{u}_1(s) \\ &\quad + z\bar{u}_2(s) + q\bar{u}_3(s)\end{aligned}\tag{4.12}$$

elde edilir. Diğer yandan  $\left(\vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_1^*(s)\right)'$  ifadesi, (2.3) ve (2.37) bağıntılarından

$$\begin{aligned} \left(\vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_1^*(s)\right)' &= \vec{u}_1'(s) \wedge \vec{u}_1^*(s) + \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_1^{*'}(s) \\ &= k_1(s) \vec{u}_2(s) \wedge \vec{u}_1^*(s) + \vec{u}_1(s) \wedge k_1(s) \vec{u}_2^*(s) \\ &= k_1(s) \left( \vec{u}_2(s) \wedge \vec{u}_1^*(s) + \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_2^*(s) \right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \vec{U}_3(s) &= \vec{U}_1(s) \wedge \vec{U}_2(s) \\ &= \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_2(s) + \varepsilon \left( \vec{u}_2(s) \wedge \vec{u}_1^*(s) + \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_2^*(s) \right) \\ &= \vec{u}_3(s) + \varepsilon \vec{u}_3^*(s) \end{aligned}$$

olduğundan  $\vec{u}_3^*(s)$  vektörel momenti

$$\vec{u}_3^*(s) = \vec{u}_2(s) \wedge \vec{u}_1^*(s) + \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_2^*(s)$$

dir. Buradan

$$\left(\vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_1^*(s)\right)' = k_1(s) \vec{u}_3^*(s)$$

şeklinde bulunur. Bu ifade (4.12) bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \vec{Y}(s) &= \vec{Y}(s) + \left[ \left( \vec{u}_2(s), \vec{u}_1(s), \vec{u}_2^*(s) \right) - \left\langle \vec{u}_2(s), \vec{u}_3^*(s) \right\rangle - \frac{z' - qk_2(s)}{k_1(s)} \right] \vec{u}_1(s) \\ &\quad + z \vec{u}_2(s) + q \vec{u}_3(s) \end{aligned}$$

(4.13)

elde edilir. Böylece  $(\vec{Y})$  ve  $(\overline{\vec{Y}})$  striksiyon eğrileri arasındaki bağıntı için şu teorem verilebilir:

**Teorem 4.1.1:**  $ID$ –Modülde  $(\vec{T})$  ve  $(\overline{\vec{T}})$  dual eğrilerine çizgiler uzayında karşılık gelen  $\vec{\Psi}(s, v)$  ve  $\overline{\vec{\Psi}}(s, v)$  dual paralel equidistant regle yüzeylerinin striksiyon çizgileri sırasıyla  $(\vec{Y})$  ve  $(\overline{\vec{Y}})$  olsun. Bu striksiyon çizgileri arasında

$$\overline{\vec{Y}}(s) = \vec{Y}(s) + p\vec{u}_1(s) + z\vec{u}_2(s) + q\vec{u}_3(s)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \overline{\vec{Y}}(s) = \vec{Y}(s) + & \left[ (\vec{u}_2(s), \vec{u}_1(s), \vec{u}_2^*(s)) - \langle \vec{u}_2(s), \vec{u}_3^*(s) \rangle - \frac{z' - qk_2(s)}{k_1(s)} \right] \vec{u}_1(s) \\ & + z\vec{u}_2(s) + q\vec{u}_3(s) \end{aligned}$$

bağıntısı vardır.

**Sonuç 4.1.1:**  $ID$ –Modülde  $(\vec{T})$  ve  $(\overline{\vec{T}})$  dual eğrilerine çizgiler uzayında karşılık gelen  $\vec{\Psi}(s, v)$  ve  $\overline{\vec{\Psi}}(s, v)$  dual paralel equidistant regle yüzeylerinin karşılık gelen dual noktaları arasındaki  $\varphi^*$  dual yay uzunluğu

$$\varphi^* = p = (\vec{u}_2(s), \vec{u}_1(s), \vec{u}_2^*(s)) - \langle \vec{u}_2(s), \vec{u}_3^*(s) \rangle - \frac{z' - qk_2(s)}{k_1(s)} \quad (4.14)$$

şeklinde bulunur.

$\vec{\Psi}(s, v)$  ve  $\overline{\vec{\Psi}}(s, v)$  dual paralel equidistant regle yüzeylerinin  $\vec{U}_1(s)$  ve  $\vec{V}_1(s)$  üretici birim dual vektörleri paralel olduğundan

$$\langle \vec{U}_1(s), \vec{V}_1(s) \rangle = 1$$

dir. Buradan bu vektörün reel ve dual bileşenleri

$$\langle \vec{u}_1(s), \vec{v}_1(s) \rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_1(s) = \vec{v}_1(s),$$

$$\vec{v}_1^*(s) = \vec{\beta}(s) \wedge \vec{v}_1(s) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1^*(s) = (\vec{\alpha}(s) + \phi^* \vec{u}_1(s)) \wedge \vec{u}_1(s)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1^*(s) = \vec{\alpha}(s) \wedge \vec{u}_1(s) + \phi^* \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_1(s)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1^*(s) = \vec{\alpha}(s) \wedge \vec{u}_1(s)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1^*(s) = \vec{u}_1^*(s)$$

şeklinde bulunur. Böylece

$$\vec{U}_1(s) = \vec{V}_1(s) \tag{4.15}$$

bağıntısı elde edilir. Ayrıca

$$\vec{V}_2(s) = \frac{\vec{V}_1'(s)}{\|\vec{V}_1'(s)\|} = \frac{\vec{v}_1'(s) + \varepsilon \vec{v}_1^{*'}(s)}{\|\vec{v}_1'(s) + \varepsilon \vec{v}_1^{*'}(s)\|}$$

ifadesi (2.27) bağıntısından

$$\vec{V}_2(s) = \frac{\vec{v}_1'(s) + \varepsilon \vec{v}_1^{*'}(s)}{\|\vec{v}_1'(s)\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{v}_1'(s), \vec{v}_1^{*'}(s) \rangle}{\|\vec{v}_1'(s)\|}}$$

olur. Bu eşitlikte (2.3), (2.37) bağıntıları ve dual bölme işlemi kullanılırsa, bu vektörün reel ve dual bileşenleri

$$\vec{v}_2(s) = \frac{\vec{v}_1'(s)}{\|\vec{v}_1'(s)\|} = \frac{\vec{u}_1'(s)}{\|\vec{u}_1'(s)\|} = \frac{k_1(s) \vec{u}_2(s)}{k_1(s)},$$

$$\vec{v}_2(s) = \vec{u}_2(s),$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}_2^*(s) &= \left( \frac{\vec{v}_1^*(s) \|\vec{v}_1'(s)\| - \frac{\langle \vec{v}_1'(s), \vec{v}_1^*(s) \rangle}{\|\vec{v}_1'(s)\|} \vec{v}_1'(s)}{\|\vec{v}_1'(s)\|^2} \right) \\
&= \frac{\vec{v}_1^*(s)}{\|\vec{v}_1'(s)\|} - \frac{\langle \vec{v}_1'(s), \vec{v}_1^*(s) \rangle}{\|\vec{v}_1'(s)\|^3} \vec{v}_1'(s) \\
&= \frac{\vec{u}_1^*(s)}{k_1(s)} - \frac{\langle \vec{u}_1'(s), \vec{u}_1^*(s) \rangle}{k_1^3(s)} \vec{u}_1'(s) \\
&= \frac{k_1(s) \vec{u}_2^*(s)}{k_1(s)} - \frac{\langle k_1(s) \vec{u}_2(s), k_1(s) \vec{u}_2^*(s) \rangle}{k_1^3(s)} k_1(s) \vec{u}_2(s),
\end{aligned}$$

$$\vec{v}_2^*(s) = \vec{u}_2^*(s)$$

şeklinde bulunur. Böylece

$$\vec{U}_2(s) = \vec{V}_2(s) \tag{4.16}$$

eşitliği elde edilir. Son olarak

$$\vec{V}_3(s) = \vec{V}_1(s) \wedge \vec{V}_2(s)$$

olduğundan bu vektörün reel ve dual bileşenleri

$$\vec{v}_3(s) = \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_2(s) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_3(s) = \vec{u}_3(s),$$

$$\vec{v}_3^*(s) = \vec{v}_1^*(s) \wedge \vec{v}_2(s) + \vec{v}_1(s) \wedge \vec{v}_2^*(s)$$

$$= \vec{u}_1^*(s) \wedge \vec{u}_2(s) + \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_2^*(s),$$

$$\vec{v}_3^*(s) = \vec{u}_3^*(s)$$



şeklinde bulunur. Buradan

$$\overline{U}_3(s) = \overline{V}_3(s) \quad (4.17)$$

olur. O halde bu yüzeylerin Blaschke vektörleri için şu teorem verilebilir:

**Teorem 4.1.2:**  $ID$ –Modülde  $(\overline{T})$  ve  $(\overline{\overline{T}})$  dual eğrilerine çizgiler uzayında

karşılık gelen  $\overline{\Psi}(s, v)$  ve  $\overline{\overline{\Psi}}(s, v)$  dual paralel equidistant regle yüzeylerinin

Blaschke çatıları sırasıyla  $\{\overline{U}_1(s), \overline{U}_2(s), \overline{U}_3(s)\}$  ve  $\{\overline{V}_1(s), \overline{V}_2(s), \overline{V}_3(s)\}$

olsun. Bu çatılar denktir. Yani:

$$\begin{bmatrix} \overline{V}_1(s) \\ \overline{V}_2(s) \\ \overline{V}_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U}_1(s) \\ \overline{U}_2(s) \\ \overline{U}_3(s) \end{bmatrix}.$$

#### 4.1.2. Dual Paralel Equidistant Regle Yüzeylerin Eğrilikleri

$\overline{\Psi}(s, v)$  ve  $\overline{\overline{\Psi}}(s, v)$  dual paralel equidistant regle yüzeyleri için (4.15)

bağıntısından

$$\overline{u}_1(s) = \overline{v}_1(s)$$

dir.  $\overline{\overline{\Psi}}(s, v)$  regle yüzeyinin dayanak eğrisinin yay parametresi  $\overline{s}$  olsun. Son eşitlikte türev alınır ve Frenet formülleri yerine yazılırsa,

$$\frac{d\overline{u}_1(s)}{ds} = \frac{d\overline{v}_1(s)}{d\overline{s}} \frac{d\overline{s}}{ds},$$

$$k_1(s)\overline{u}_2(s) = \overline{k}_1(s)\overline{v}_2(s) \frac{d\overline{s}}{ds}$$

olur. Bu ifade  $\overline{u}_2(s)$  ile iç çarpılırsa

$$k_1(s) = \overline{k}_1(s) \langle \overline{u}_2(s), \overline{v}_2(s) \rangle \frac{d\overline{s}}{ds},$$

$$\bar{k}_1(s) = k_1(s) \frac{ds}{d\bar{s}} \quad (4.18)$$

bulunur. Ayrıca (2.36) ve (2.37) ifadelerinden açıkça görülür ki;

$$\bar{k}_1^*(s) = k_1^*(s) = 0 \quad (4.19)$$

dir. (4.18) ve (4.19) bağıntılarından

$$\bar{k}_1(s) + \varepsilon \bar{k}_1^*(s) = (k_1(s) + \varepsilon k_1^*(s)) \frac{ds}{d\bar{s}}$$

elde edilir. Diğer yandan (4.17) bağıntısından

$$\bar{u}_3(s) = \bar{v}_3(s)$$

dir. Bu eşitlikte türev alınır ve Frenet formülleri yerine yazılırsa,

$$\frac{d\bar{u}_3(s)}{ds} = \frac{d\bar{v}_3(s)}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds},$$

$$-k_2(s) \bar{u}_2(s) = -\bar{k}_2(s) \bar{v}_2(s) \frac{d\bar{s}}{ds}$$

bulunur. Bu ifade  $\bar{u}_2(s)$  ile iç çarpılırsa

$$\bar{k}_2(s) = k_2(s) \frac{ds}{d\bar{s}} \quad (4.20)$$

elde edilir. O halde (2.36) ve (2.37) bağıntılarından

$$\bar{k}_2^*(s) = k_2^*(s) = 1 \quad (4.21)$$

olduğu açıktır. Bu takdirde (4.20) ve (4.21) bağıntılarından

$$\bar{k}_2(s) + \varepsilon \bar{k}_2^*(s) = (k_2(s) + \varepsilon k_2^*(s)) \frac{ds}{d\bar{s}}$$

elde edilir. Böylece şu teorem verilebilir:

**Teorem 4.1.3:**  $ID$ –Modülde  $(\bar{T})$  ve  $(\bar{\bar{T}})$  dual eğrilerine çizgiler uzayında

karşılık gelen  $\bar{\Psi}(s, v)$  ve  $\bar{\bar{\Psi}}(s, v)$  dual paralel equidistant regle yüzeylerinin

dayanak eğrilerinin sırasıyla eğrilikleri  $\kappa = k_1 + \varepsilon k_1^*$  ve  $\bar{\kappa} = \bar{k}_1 + \varepsilon \bar{k}_1^*$  ,  
 burulmaları  $\tau = k_2 + \varepsilon k_2^*$  ve  $\bar{\tau} = \bar{k}_2 + \varepsilon \bar{k}_2^*$  olsun. Bu eğrilikler arasında

$$\begin{cases} \bar{\kappa}(s) = \kappa(s) \frac{ds}{d\bar{s}} \\ \bar{\tau}(s) = \tau(s) \frac{ds}{d\bar{s}} \end{cases}$$

bağıntısı vardır.

Ayrıca (4.17) bağıntısından

$$\bar{u}_3^*(s) = \bar{v}_3^*(s)$$

ifadesinin türevi alınırsa

$$\frac{d\bar{u}_3^*(s)}{ds} = \frac{d\bar{v}_3^*(s)}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds}$$

dır. (2.37) bağıntısından

$$-\bar{u}_2(s) - k_2(s) \bar{u}_2^*(s) = \left( -\bar{v}_2(s) - \bar{k}_2(s) \bar{v}_2^*(s) \right) \frac{d\bar{s}}{ds}$$

bulunur. Burada (4.16) ve (4.20) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} -\bar{u}_2(s) - k_2(s) \bar{u}_2^*(s) &= \left( -\bar{u}_2(s) - k_2(s) \frac{ds}{d\bar{s}} \bar{u}_2^*(s) \right) \frac{d\bar{s}}{ds} \\ &= -\frac{d\bar{s}}{ds} \bar{u}_2(s) - k_2(s) \bar{u}_2^*(s) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikten

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = 1 \quad \Rightarrow \quad d\bar{s} = ds \quad ,$$

elde edilir. Böylece şu sonuç verilebilir:

**Sonuç 4.1.2:**  $ID$ –Modülde  $(\overrightarrow{T})$  ve  $(\overleftarrow{T})$  dual eğrilerine çizgiler uzayında karşılık gelen  $\overrightarrow{\Psi}(s, v)$  ve  $\overleftarrow{\Psi}(s, v)$  dual paralel equidistant regle yüzeylerinin dayanak eğrilerinin yay parametreleri arasında

$$d\overleftarrow{s} = ds$$

bağıntısı vardır.

#### 4.2. Kapalı Dual Paralel Equidistant Regle Yüzeylerin İntegral İnvaryantları

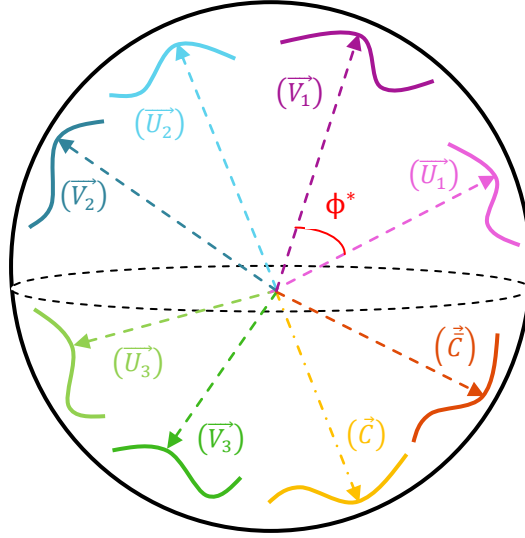
Birim dual küre üzerinde küresel gösterge eğrileri Şekil 4.4 te gösterildiği gibidir. Bu eğrilere Öklid uzayında karşılık gelen regle yüzeylerin dual açılım açıları, dual açılım uzunlukları ve dağılma parametreleri arasındaki bağıntılar bu kısımda hesaplanmıştır. Hesaplar yapılırken kısalığın hatırı için, (4.13) bağıntısında striksiyon eğrileri arasındaki eşitlik;

$$\begin{aligned} \overleftarrow{R}(s) = & \left[ \left( \overrightarrow{u}_2(s), \overrightarrow{u}_1(s), \overrightarrow{u}_2^*(s) \right) - \left\langle \overrightarrow{u}_2(s), \overrightarrow{u}_3^*(s) \right\rangle - \frac{z' - qk_2(s)}{k_1(s)} \right] \overrightarrow{u}_1(s) \\ & + z\overrightarrow{u}_2(s) + q\overrightarrow{u}_3(s) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\overleftarrow{Y}(s) = \overrightarrow{Y}(s) + \overleftarrow{R}(s) \quad (4.22)$$

şeklinde alınmıştır.



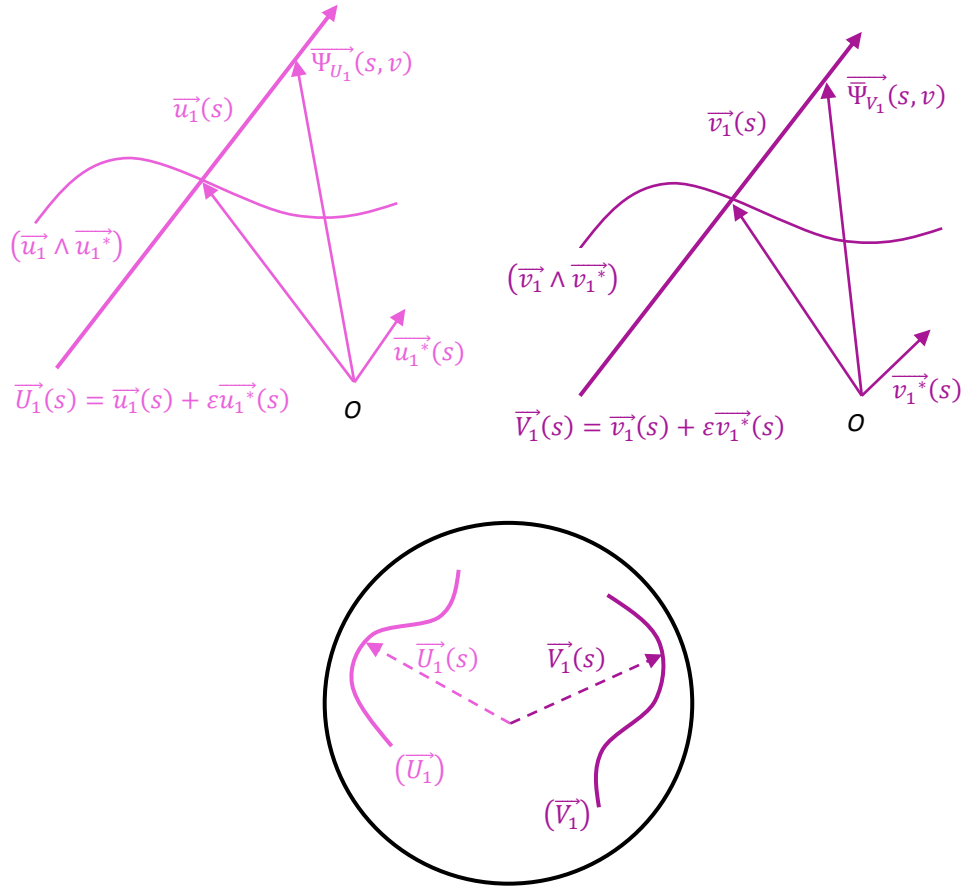
Şekil 4.4. Birim dual küre üzerinde küresel gösterge eğrileri

#### 4.2.1. Birim Dual Teğetler Göstergelerine Karşılık Gelen Kapalı Regle Yüzeylerin İntegral İnvaryantları

$\overline{\Psi}(s, v)$  ve  $\overline{\overline{\Psi}}(s, v)$  dual paralel equidistant regle yüzeylerinin  $\overline{U}_1(s)$  ve  $\overline{V}_1(s)$  teğet vektörlerinin birim dual küre üzerinde çizdikleri gösterge eğrilerine karşılık gelen regle yüzeylerin parametrik denklemleri sırasıyla,

$$\begin{cases} \overline{\Psi}_{U_1}(s, v) = \overline{u}_1(s) \wedge \overline{u}_1^*(s) + v\overline{u}_1(s), & \overline{u}_1^*(s) = \overline{\alpha}(s) \wedge \overline{u}_1(s) \\ \overline{\overline{\Psi}}_{V_1}(s, v) = \overline{v}_1(s) \wedge \overline{v}_1^*(s) + v\overline{v}_1(s), & \overline{v}_1^*(s) = \overline{\beta}(s) \wedge \overline{v}_1(s) \end{cases}$$

şeklindedir (Şekil 4.5).



Şekil 4.5. Birim dual teğetler göstergelerine karşılık gelen regle yüzeyler

Anadoğrusu  $\vec{U}_1(s)$  ve  $\vec{V}_1(s)$  olan kapalı regle yüzeylerin açılım uzunlukları (2.40), (4.21) bağıntılarından ve Sonuç 4.1.2 den, sırasıyla

$$L_{U_1} = \oint_{(\bar{Y})} k_2^*(s) ds = \oint_{(\bar{Y})} ds ,$$

$$L_{V_1} = \oint_{(\bar{Y})} \bar{k}_2^*(s) d\bar{s} = \oint_{(\bar{Y})} ds$$

şeklindedir.  $L_{V_1}$  ifadesinde (4.22) yerine yazılırsa

$$L_{V_1} = \oint_{(\bar{Y}+\bar{R})} ds = \oint_{(\bar{Y})} ds + \oint_{(\bar{R})} ds$$

bulunur. Burada

$$A_1 = \oint_{(\bar{R})} ds$$

alınırsa

$$L_{V_1} = \oint_{(\bar{Y})} ds + A_1$$

yazılır. Böylece bu yüzeylerin açılım uzunlukları arasında

$$L_{V_1} = L_{U_1} + A_1 \quad (4.23)$$

bağıntısı elde edilir. Ayrıca (2.40) ve (4.21) bağıntılarından, dual açılım açılırları sırasıyla,

$$\begin{aligned} \Lambda_{U_1} &= -\oint_{(\bar{Y})} \tau(s) ds \\ &= -\oint_{(\bar{Y})} k_2(s) ds - \varepsilon \oint_{(\bar{Y})} ds \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \Lambda_{V_1} &= -\oint_{(\bar{Y})} \bar{\tau}(s) d\bar{s} \\ &= -\oint_{(\bar{Y})} \bar{k}_2(s) d\bar{s} - \varepsilon \oint_{(\bar{Y})} d\bar{s} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.  $\Lambda_{V_1}$  ifadesi, (4.20) bağıntısı ve Sonuç 4.1.2 den

$$\Lambda_{V_1} = -\oint_{(\bar{Y})} k_2(s) ds - \varepsilon \oint_{(\bar{Y})} ds \quad (4.24)$$

şeklinde yazılır. (4.22) ifadesi (4.24) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Lambda_{V_1} &= - \oint_{(\bar{Y}+\bar{R})} k_2(s) ds - \varepsilon \oint_{(\bar{Y}+\bar{R})} ds \\ &= - \oint_{(\bar{Y})} k_2(s) ds - \varepsilon \oint_{(\bar{Y})} ds - \oint_{(\bar{R})} k_2(s) ds - \varepsilon \oint_{(\bar{R})} ds\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$A_2 = - \oint_{(\bar{R})} k_2(s) ds - \varepsilon \oint_{(\bar{R})} ds$$

alınırsa

$$\Lambda_{V_1} = - \oint_{(\bar{Y})} k_2(s) ds - \varepsilon \oint_{(\bar{Y})} ds + A_2,$$

$$\Lambda_{V_1} = \lambda_{U_1} + \varepsilon L_{U_1} + A_2$$

şeklinde yazılır. Böylece (2.33) bağıntısından, bu yüzeylerin dual açılım açıları arasında

$$\Lambda_{V_1} = \Lambda_{U_1} + A_2 \quad (4.25)$$

bağıntısı elde edilir. Ayrıca (2.40) ve (4.19) bağıntılarından, bu regle yüzeylerin dağılma parametreleri, sırasıyla,

$$P_{U_1} = \frac{k_1^*(s)}{k_1(s)} = 0$$

ve

$$P_{V_1} = \frac{\overline{k_1^*(s)}}{k_1(s)} = 0$$

şeklinde olur. Böylece şu teorem verilebilir:



**Teorem 4.2.1:**  $ID$ –Modülde  $(\overline{T})$  ve  $(\overline{\overline{T}})$  dual eğrilerine çizgiler uzayında karşılık gelen  $\overline{\Psi}(s, \nu)$  ve  $\overline{\overline{\Psi}}(s, \nu)$  kapalı dual paralel equidistant regle yüzeylerinin, sırasıyla  $\overline{U}_1(s)$  ve  $\overline{V}_1(s)$  birim dual teğet vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin dual açılım uzunlukları, dual açılım açıları ve dağılma parametreleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

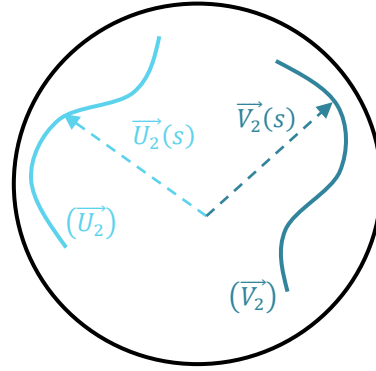
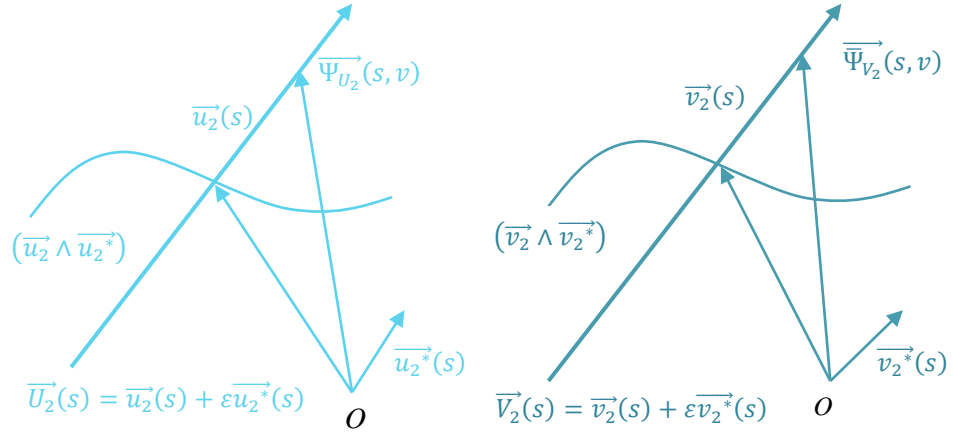
$$\begin{cases} L_{V_1} = L_{U_1} + A_1 & , & A_1 = \oint_{(\overline{R})} ds \\ \Lambda_{V_1} = \Lambda_{U_1} + A_2 & , & A_2 = -\oint_{(\overline{R})} k_2(s) ds - \varepsilon \oint_{(\overline{R})} ds \\ P_{V_1} = P_{U_1} = 0. \end{cases}$$

#### 4.2.2. Birim Dual Asli Normaller Göstergelerine Karşılık Gelen Kapalı Regle Yüzeylerin İntegral İnvaryantları

$\overline{\Psi}(s, \nu)$  ve  $\overline{\overline{\Psi}}(s, \nu)$  dual paralel equidistant regle yüzeylerinin  $\overline{U}_2(s)$  ve  $\overline{V}_2(s)$  asli normal vektörlerinin birim dual küre üzerinde çizdikleri eğrilere karşılık gelen regle yüzeylerin parametrik denklemleri sırasıyla,

$$\begin{cases} \overline{\Psi}_{U_2}(s, \nu) = \overline{u}_2(s) \wedge \overline{u}_2^*(s) + \nu \overline{u}_2(s), & \overline{u}_2^*(s) = \overline{\alpha}(s) \wedge \overline{u}_2(s) \\ \overline{\Psi}_{V_2}(s, \nu) = \overline{v}_2(s) \wedge \overline{v}_2^*(s) + \nu \overline{v}_2(s), & \overline{v}_2^*(s) = \overline{\beta}(s) \wedge \overline{v}_2(s) \end{cases}$$

şeklindedir (Şekil 4.6).



**Şekil 4.6.** Birim dual asli normaller göstergelerine karşılık gelen regle yüzeyler

Anadoğrusu  $\vec{U}_2(s)$  ve  $\vec{V}_2(s)$  olan regle yüzeylerin açılım uzunlukları (2.41) bağıntısından

$$L_{V_2} = L_{U_2} = 0 \quad (4.26)$$

ve dual açılım açıları

$$\Lambda_{V_2} = \Lambda_{U_2} = 0 \quad (4.27)$$

şeklindedir. Aynı yüzeyler için dağılma parametreleri yine (2.41), (4.19) ve (4.21) bağıntılarından

$$\begin{aligned}
P_{U_2} &= \frac{k_1(s)k_1^*(s) + k_2(s)k_2^*(s)}{k_1^2(s) + k_2^2(s)} \\
&= \frac{k_2(s)}{k_1^2(s) + k_2^2(s)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
P_{V_2} &= \frac{\bar{k}_1(s)\bar{k}_1^*(s) + \bar{k}_2(s)\bar{k}_2^*(s)}{\bar{k}_1^2(s) + \bar{k}_2^2(s)} \\
&= \frac{\bar{k}_2(s)}{\bar{k}_1^2(s) + \bar{k}_2^2(s)}
\end{aligned}$$

şeklindedir. (4.18) ve (4.20) ifadeleri  $P_{V_2}$  eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_{V_2} &= \frac{k_2(s) \frac{ds}{d\bar{s}}}{(k_1^2(s) + k_2^2(s)) \left( \frac{ds}{d\bar{s}} \right)^2} \\
&= \frac{k_2(s)}{k_1^2(s) + k_2^2(s)} \frac{d\bar{s}}{ds}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$P_{V_2} = P_{U_2} \frac{d\bar{s}}{ds}$$

bağıntısı elde edilir. Sonuç 4.1.2 den

$$P_{V_2} = P_{U_2} \tag{4.28}$$

dır. Böylece şu teorem verilebilir:

**Teorem 4.2.2:**  $ID$ –Modülde  $(\overline{T})$  ve  $(\overline{\overline{T}})$  dual eğrilerine çizgiler uzayında karşılık gelen  $\overline{\Psi}(s, v)$  ve  $\overline{\overline{\Psi}}(s, v)$  kapalı dual paralel equidistant regle yüzeylerin sırasıyla  $\overline{U}_2(s)$  ve  $\overline{V}_2(s)$  birim dual asli normal vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin dual açılım uzunlukları, dual açılım açıları ve dağılma parametreleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

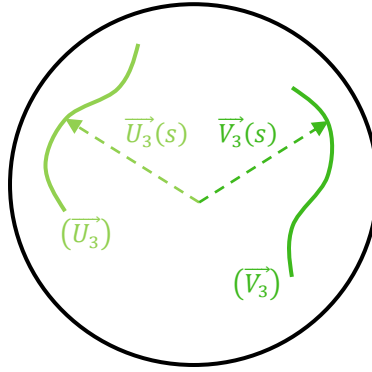
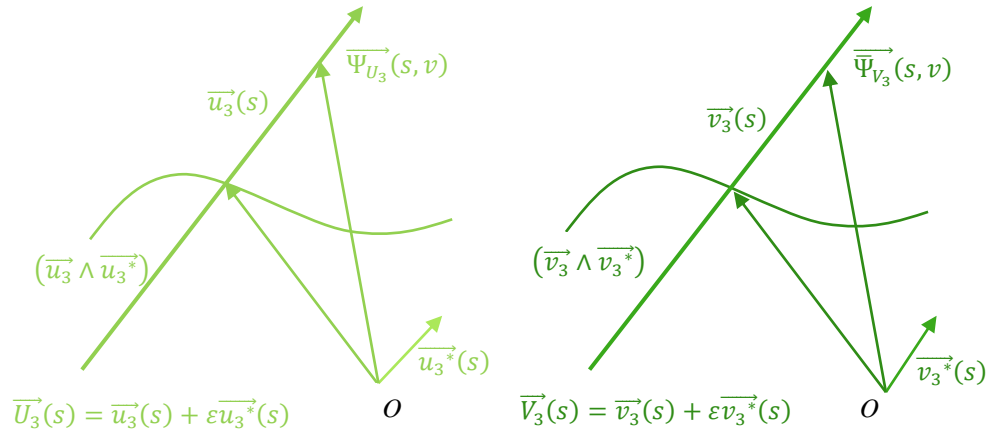
$$\begin{cases} L_{V_2} = L_{U_2} = 0 \\ \Lambda_{V_2} = \Lambda_{U_2} = 0 \\ P_{V_2} = P_{U_2}. \end{cases}$$

#### 4.2.3. Birim Dual Binormaller Göstergelerine Karşılık Gelen Kapalı Regle Yüzeylerin İntegral İnvaryantları

$\overline{\Psi}(s, v)$  ve  $\overline{\overline{\Psi}}(s, v)$  dual paralel equidistant regle yüzeylerinin  $\overline{U}_3(s)$  ve  $\overline{V}_3(s)$  binormal vektörlerinin birim dual küre üzerinde çizdikleri gösterge eğrilerine karşılık gelen regle yüzeylerin parametrik denklemleri sırasıyla,

$$\begin{cases} \overline{\Psi}_{U_3}(s, v) = \overline{u}_3(s) \wedge \overline{u}_3^*(s) + v\overline{u}_3(s), & \overline{u}_3^*(s) = \overline{\alpha}(s) \wedge \overline{u}_3(s) \\ \overline{\overline{\Psi}}_{V_3}(s, v) = \overline{v}_3(s) \wedge \overline{v}_3^*(s) + v\overline{v}_3(s), & \overline{v}_3^*(s) = \overline{\beta}(s) \wedge \overline{v}_3(s) \end{cases}$$

şeklinde (Şekil 4.7).



**Şekil 4.7.** Birim dual binormaller göstergelerine karşılık gelen regle yüzeyler

Anadoğrusu  $\vec{U}_3(s)$  ve  $\vec{V}_3(s)$  olan kapalı regle yüzeylerin açılım uzunlukları (2.42) bağıntısından, sırasıyla

$$L_{U_3} = \oint_{(\vec{Y})} k_1^*(s) ds,$$

$$L_{V_3} = \oint_{(\vec{Y})} \bar{k}_1^*(s) d\bar{s}$$

şeklinindedir. Burada  $\bar{k}_1^*(s) = k_1^*(s) = 0$  olduğundan bu kapalı eğrisel integraller sıfıra eşit olur. Böylece bu yüzeylerin açılım uzunlukları arasında

$$L_{V_3} = L_{U_3} = 0 \quad (4.29)$$

bağıntısı elde edilir. Aynı regle yüzeylerin dual açılım açıları (2.42) ve (4.19) bağıntılarından, sırasıyla

$$\Lambda_{U_3} = -\oint_{(\bar{Y})} \kappa(s) ds = -\oint_{(\bar{Y})} k_1(s) ds,$$

$$\Lambda_{V_3} = -\oint_{(\bar{Y})} \bar{\kappa}(s) d\bar{s} = -\oint_{(\bar{Y})} \bar{k}_1(s) d\bar{s}$$

şeklindedir.  $\Lambda_{V_3}$  ifadesinde (4.18) bağıntısı yerine yazılırsa

$$\Lambda_{V_3} = -\oint_{(\bar{Y})} k_1(s) ds \quad (4.30)$$

olur. (4.22) ifadesi (4.30) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \Lambda_{V_3} &= -\oint_{(\bar{Y}+\bar{R})} k_1(s) ds \\ &= -\oint_{(\bar{Y})} k_1(s) ds - \oint_{(\bar{R})} k_1(s) ds \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$A_4 = -\oint_{(\bar{R})} k_1(s) ds$$

alınırsa,

$$\Lambda_{V_3} = \lambda_{U_3} + \varepsilon L_{U_3} + A_4, \quad (L_{U_3} = 0)$$

şeklinde yazılır. (2.33) bağıntısından bu yüzeylerinin dual açılım açıları arasında

$$\Lambda_{V_3} = \Lambda_{U_3} + A_4 \quad (4.31)$$

bağıntısı elde edilir. Son olarak bu regle yüzeylerin dağılma parametreleri (2.42) ve (4.21) bağıntılarından, sırasıyla

$$P_{U_3} = \frac{k_2^*(s)}{k_2(s)} = \frac{1}{k_2(s)}$$

ve

$$P_{V_3} = \frac{\overline{k_2^*(s)}}{k_2(s)} = \frac{1}{k_2(s)}$$

olur. (4.20) bağıntısı  $P_{V_3}$  ifadesinde yerine yazılırsa

$$P_{V_3} = \frac{1}{k_2(s)} \frac{d\bar{s}}{ds},$$

bulunur. Buradan

$$P_{V_3} = P_{U_3} \frac{d\bar{s}}{ds}$$

bağıntısı elde edilir. Sonuç 4.1.2 den

$$P_{V_3} = P_{U_3} \tag{4.32}$$

dir. Böylece şu teorem verilebilir:

**Teorem 4.2.3:**  $ID$  – Modülde  $(\overline{T})$  ve  $(\overline{\overline{T}})$  dual eğrilerine çizgiler uzayında karşılık gelen  $\overline{\Psi}(s, \nu)$  ve  $\overline{\overline{\Psi}}(s, \nu)$  kapalı dual paralel equidistant regle yüzeylerinin, sırasıyla  $\overline{U}_3(s)$  ve  $\overline{\overline{V}}_3(s)$  dual birim binormal vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin dual açılım uzunlukları, dual açılım açıları ve dağılma parametreleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$\begin{cases} L_{V_3} = L_{U_3} = 0 \\ \Lambda_{V_3} = \Lambda_{U_3} + A_4, \quad A_4 = -\oint_{(\overline{R})} k_1(s) ds \\ P_{V_3} = P_{U_3}. \end{cases}$$

#### 4.2.4. Birim Dual Pol Göstergelerine Karşılık Gelen Kapalı Regle Yüzeylerin İntegral İnvaryantları

$\overline{\Psi}(s, \nu)$  ve  $\overline{\overline{\Psi}}(s, \nu)$  dual paralel equidistant regle yüzeylerinin dayanak eğrilerine ait ani dual Pfaff vektörleri sırasıyla  $\overline{W}(s) = \overline{w}(s) + \varepsilon \overline{w}^*(s)$  ve  $\overline{\overline{W}}(s) = \overline{\overline{w}}(s) + \varepsilon \overline{\overline{w}}^*(s)$  ile gösterilirse (2.38) bağıntısından

$$\overline{W}(s) = \tau(s) \overline{U}_1(s) + \kappa(s) \overline{U}_3(s),$$

$$\overline{\overline{W}}(s) = \overline{\tau}(s) \overline{\overline{V}}_1(s) + \overline{\kappa}(s) \overline{\overline{V}}_3(s)$$

yazılır. Bu vektörlerin reel ve dual bileşenleri

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{w}(s) = k_2(s) \overline{u}_1(s) + k_1(s) \overline{u}_3(s) \\ \overline{w}^*(s) = k_2^*(s) \overline{u}_1(s) + k_2(s) \overline{u}_1^*(s) + k_1^*(s) \overline{u}_3(s) + k_1(s) \overline{u}_3^*(s) \\ \overline{\overline{w}}(s) = \overline{k}_2(s) \overline{\overline{v}}_1(s) + \overline{k}_1(s) \overline{\overline{v}}_3(s) \\ \overline{\overline{w}}^*(s) = \overline{k}_2^*(s) \overline{\overline{v}}_1(s) + \overline{k}_2(s) \overline{\overline{v}}_1^*(s) + \overline{k}_1^*(s) \overline{\overline{v}}_3(s) + \overline{k}_1(s) \overline{\overline{v}}_3^*(s) \end{array} \right. \quad (4.33)$$

şekindedir. (4.33) ifadesinde (4.15), (4.17), (4.18), (4.19), (4.20) ve (4.21) bağıntıları yerlerine yazılırsa, bu vektörler

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{w}(s) = k_2(s) \overline{u}_1(s) + k_1(s) \overline{u}_3(s) \\ \overline{w}^*(s) = \overline{u}_1(s) + k_2(s) \overline{u}_1^*(s) + k_1(s) \overline{u}_3^*(s) \\ \overline{\overline{w}}(s) = \left( k_2(s) \overline{u}_1(s) + k_1(s) \overline{u}_3(s) \right) \frac{ds}{d\overline{s}} \\ \overline{\overline{w}}^*(s) = \left( \overline{u}_1(s) + k_2(s) \overline{u}_1^*(s) + k_1(s) \overline{u}_3^*(s) \right) \frac{ds}{d\overline{s}} \end{array} \right. ,$$



$$\begin{cases} \overline{\overline{w}}(s) = \overline{w}(s) \frac{ds}{d\overline{s}} \\ \overline{\overline{w}^*}(s) = \overline{w^*}(s) \frac{ds}{d\overline{s}} \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Sonuç 4.1.2 den

$$\begin{cases} \overline{\overline{w}}(s) = \overline{w}(s) \\ \overline{\overline{w}^*}(s) = \overline{w^*}(s) \end{cases} \quad (4.34)$$

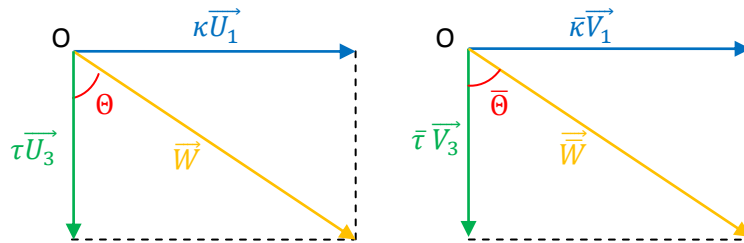
olur. Böylece şu teorem verilebilir:

**Teorem 4.2.4:**  $ID$  – Modülde  $(\overline{T})$  ve  $(\overline{\overline{T}})$  dual eğrilerine çizgiler uzayında karşılık gelen  $\overline{\Psi}(s, \nu)$  ve  $\overline{\overline{\Psi}}(s, \nu)$  kapalı dual paralel equidistant regle yüzeylerinin dayanak eğrilerine ait dual ani Pfaff vektörleri sırasıyla  $\overline{W}(s) = \overline{w}(s) + \varepsilon \overline{w^*}(s)$  ve  $\overline{\overline{W}}(s) = \overline{\overline{w}}(s) + \varepsilon \overline{\overline{w}^*}(s)$  olsun. Bu vektörler arasında

$$\overline{\overline{W}}(s) = \overline{W}(s)$$

bağıntı vardır.

$\overline{U}_3(s)$  ile  $\overline{W}(s)$  vektörleri arasındaki dual açı  $\Theta = \theta + \varepsilon \theta^*$ ,  $\overline{V}_3(s)$  ile  $\overline{\overline{W}}(s)$  vektörleri arasındaki dual açı da  $\overline{\Theta} = \overline{\theta} + \varepsilon \overline{\theta}^*$  ile gösterilirse Şekil 4.8 den,



Şekil 4.8. Ani Pfaff vektörleri

$$\begin{cases} \kappa(s) = \|\vec{W}(s)\| \cos \Theta \\ \tau(s) = \|\vec{W}(s)\| \sin \Theta \end{cases}, \quad \begin{cases} \bar{\kappa}(s) = \|\vec{\bar{W}}(s)\| \cos \bar{\Theta} \\ \bar{\tau}(s) = \|\vec{\bar{W}}(s)\| \sin \bar{\Theta} \end{cases}$$

yazılır. Buradan bu açılar arasında,

$$\bar{\kappa}(s) = \sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)} \cos \bar{\Theta} \Rightarrow \kappa(s) = \sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)} \cos \bar{\Theta},$$

ve

$$\bar{\tau}(s) = \sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)} \sin \bar{\Theta} \Rightarrow \tau(s) = \sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)} \sin \bar{\Theta}$$

eşitliklerinden

$$\begin{cases} \cos \bar{\Theta} = \cos \Theta \\ \sin \bar{\Theta} = \sin \Theta \end{cases} \quad (4.35)$$

bağıntısı elde edilir. Pfaff vektörleri yönündeki birim vektörler  $\vec{C}(s)$  ve  $\vec{\bar{C}}(s)$  ile gösterilirse,

$$\vec{C}(s) = \frac{\vec{W}(s)}{\|\vec{W}(s)\|} = \sin \Theta \vec{U}_1(s) + \cos \Theta \vec{U}_3(s) \quad (4.36)$$

$$\vec{\bar{C}}(s) = \frac{\vec{\bar{W}}(s)}{\|\vec{\bar{W}}(s)\|} = \sin \bar{\Theta} \vec{V}_1(s) + \cos \bar{\Theta} \vec{V}_3(s) \quad (4.37)$$

olur. Bu vektörler reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa,

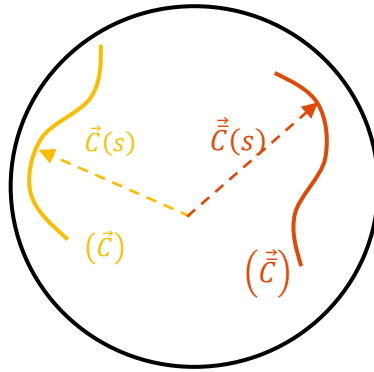
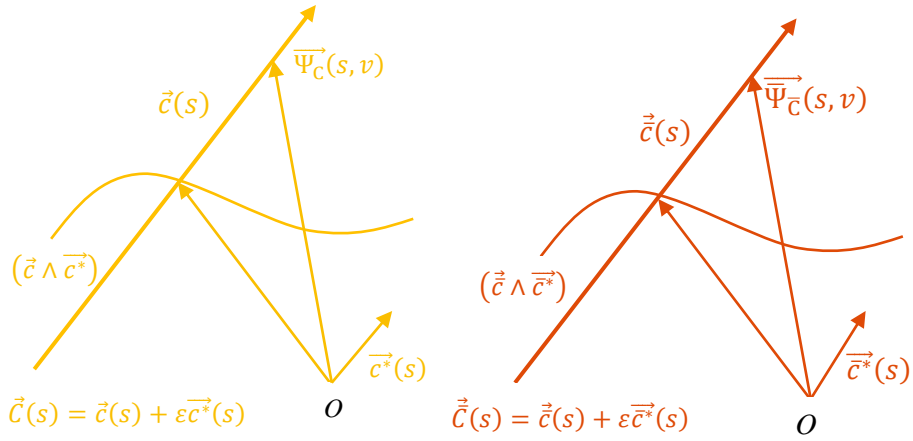
$$\begin{cases} \vec{c}(s) = \sin \Theta \vec{u}_1(s) + \cos \Theta \vec{u}_3(s) \\ \vec{c}^*(s) = \sin \Theta \vec{u}_1^*(s) + \cos \Theta \vec{u}_3^*(s) \end{cases}, \quad (4.38)$$

$$\begin{cases} \vec{\bar{c}}(s) = \sin \bar{\Theta} \vec{v}_1(s) + \cos \bar{\Theta} \vec{v}_3(s) \\ \vec{\bar{c}}^*(s) = \sin \bar{\Theta} \vec{v}_1^*(s) + \cos \bar{\Theta} \vec{v}_3^*(s) \end{cases} \quad (4.39)$$

olur.  $\vec{C}(s)$  ve  $\vec{\bar{C}}(s)$  vektörlerinin birim dual küre üzerinde çizdikleri pol gösterge eğrilerine karşılık gelen regle yüzeylerin parametrik denklemleri sırasıyla,

$$\begin{cases} \vec{\Psi}_C(s, v) = \vec{c}(s) \wedge \vec{c}^*(s) + v\vec{c}(s), & \vec{c}^*(s) = \alpha(s) \wedge \vec{c}(s) \\ \vec{\Psi}_{\bar{C}}(s, v) = \vec{\bar{c}}(s) \wedge \vec{\bar{c}}^*(s) + v\vec{\bar{c}}(s), & \vec{\bar{c}}^*(s) = \beta(s) \wedge \vec{\bar{c}}(s) \end{cases}$$

şeklindedir (Şekil 4.9).



Şekil 4.9. Birim dual pol göstergelerine karşılık gelen regle yüzeyler

Anadoğrusu  $\vec{C}(s)$  olan kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu (2.32) bağıntısından

$$L_c = \langle \vec{d}^*(s), \vec{c}(s) \rangle + \langle \vec{d}(s), \vec{c}^*(s) \rangle \quad (4.40)$$

ile hesaplanır. Ayrıca  $\vec{D}(s) = \vec{d}(s) + \varepsilon \vec{d}^*(s)$  dual Steiner vektörü için

$$\vec{D}(s) = \oint_{(\tilde{Y})} \vec{W}(s) ds = \vec{U}_1(s) \oint_{(\tilde{Y})} \tau(s) ds + \vec{U}_3(s) \oint_{(\tilde{Y})} \kappa(s) ds$$

olur. Bu eşitliğin reel ve dual kısımları,

$$\begin{cases} \vec{d}(s) = \vec{u}_1(s) \oint_{(\tilde{Y})} k_2(s) ds + \vec{u}_3(s) \oint_{(\tilde{Y})} k_1(s) ds \\ \vec{d}^*(s) = \vec{u}_1^*(s) \oint_{(\tilde{Y})} k_2(s) ds + \vec{u}_3^*(s) \oint_{(\tilde{Y})} k_1(s) ds + \vec{u}_1(s) \oint_{(\tilde{Y})} ds \end{cases} \quad (4.41)$$

şeklinde yazılır. (4.41) ve (4.38) ifadeleri, (4.40) bağıntısında yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle \vec{d}^*(s), \vec{c}(s) \rangle &= \sin \Theta \langle \vec{u}_1(s), \vec{u}_3^*(s) \rangle \oint_{(\tilde{Y})} k_1(s) ds \\ &\quad + \cos \Theta \langle \vec{u}_1^*(s), \vec{u}_3(s) \rangle \oint_{(\tilde{Y})} k_2(s) ds + \sin \Theta \oint_{(\tilde{Y})} ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{d}(s), \vec{c}^*(s) \rangle &= \sin \Theta \langle \vec{u}_1^*(s), \vec{u}_3(s) \rangle \oint_{(\tilde{Y})} k_1(s) ds \\ &\quad + \cos \Theta \langle \vec{u}_1(s), \vec{u}_3^*(s) \rangle \oint_{(\tilde{Y})} k_2(s) ds \end{aligned}$$

ifadeleri bulunur. Bu ifadelerin taraf tarafa toplanmasıyla açılım uzunluğu

$$\begin{aligned}
L_C = & \left( \left\langle \vec{u}_1(s), \vec{u}_3^*(s) \right\rangle + \left\langle \vec{u}_1^*(s), \vec{u}_3(s) \right\rangle \right) \cos \Theta \oint_{(\vec{r})} k_2(s) ds \\
& + \left( \left\langle \vec{u}_1(s), \vec{u}_3^*(s) \right\rangle + \left\langle \vec{u}_1^*(s), \vec{u}_3(s) \right\rangle \right) \sin \Theta \oint_{(\vec{r})} k_1(s) ds \\
& + \sin \Theta \oint_{(\vec{r})} ds
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.  $\vec{U}_1(s)$  ve  $\vec{U}_3(s)$  vektörleri ortogonal birim vektörler olduğundan

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{U}_1(s), \vec{U}_3(s) \right\rangle &= \left\langle \vec{u}_1(s), \vec{u}_3(s) \right\rangle + \varepsilon \left( \left\langle \vec{u}_1(s), \vec{u}_3^*(s) \right\rangle + \left\langle \vec{u}_1^*(s), \vec{u}_3(s) \right\rangle \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

dir. Yani

$$\left\langle \vec{u}_1(s), \vec{u}_3(s) \right\rangle = 0 ,$$

$$\left\langle \vec{u}_1(s), \vec{u}_3^*(s) \right\rangle + \left\langle \vec{u}_1^*(s), \vec{u}_3(s) \right\rangle = 0$$

dir. O halde bu son eşitlik  $L_C$  ifadesinde yerine yazılırsa bu yüzeyin açılım uzunluğu,

$$L_C = \sin \Theta \oint_{(\vec{r})} ds \quad (4.42)$$

veya

$$L_C = \sin \Theta L_{U_1}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde anadoğrusu  $\vec{C}(s)$  olan kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu (2.32) bağıntısından

$$L_{\bar{c}} = \left\langle \overrightarrow{\bar{d}}^*(s), \overrightarrow{\bar{c}}(s) \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\bar{d}}(s), \overrightarrow{\bar{c}}^*(s) \right\rangle \quad (4.43)$$

şeklinde yazılır. Ayrıca  $\overrightarrow{\bar{D}}(s) = \overrightarrow{\bar{d}}(s) + \varepsilon \overrightarrow{\bar{d}}^*(s)$  dual Steiner vektörü için

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\bar{D}}(s) &= \oint_{(\bar{Y})} \overrightarrow{\bar{W}}(s) ds \\ &= \overrightarrow{V}_1(s) \oint_{(\bar{Y})} \overrightarrow{\tau}(s) ds + \overrightarrow{V}_3(s) \oint_{(\bar{Y})} \overrightarrow{\kappa}(s) ds \end{aligned}$$

olur. Bu eşitliğin reel ve dual kısımları,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\bar{d}}(s) = \overrightarrow{v}_1(s) \oint_{(\bar{Y})} \overrightarrow{k}_2(s) ds + \overrightarrow{v}_3(s) \oint_{(\bar{Y})} \overrightarrow{k}_1(s) ds \\ \overrightarrow{\bar{d}}^*(s) = \overrightarrow{v}_1^*(s) \oint_{(\bar{Y})} \overrightarrow{k}_2(s) ds + \overrightarrow{v}_3^*(s) \oint_{(\bar{Y})} \overrightarrow{k}_1(s) ds + \overrightarrow{v}_1(s) \oint_{(\bar{Y})} ds \end{cases} \quad (4.44)$$

şeklinde yazılır. (4.44) ve (4.39) ifadeleri, (4.43) bağıntısında yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\bar{d}}^*(s), \overrightarrow{\bar{c}}(s) \right\rangle &= \sin \bar{\Theta} \left\langle \overrightarrow{v}_1(s), \overrightarrow{v}_3^*(s) \right\rangle \oint_{(\bar{Y})} \overrightarrow{k}_1(s) ds \\ &\quad + \cos \bar{\Theta} \left\langle \overrightarrow{v}_1^*(s), \overrightarrow{v}_3(s) \right\rangle \oint_{(\bar{Y})} \overrightarrow{k}_2(s) ds + \sin \bar{\Theta} \oint_{(\bar{Y})} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\bar{d}}(s), \overrightarrow{\bar{c}}^*(s) \right\rangle &= \sin \bar{\Theta} \left\langle \overrightarrow{v}_1^*(s), \overrightarrow{v}_3(s) \right\rangle \oint_{(\bar{Y})} \overrightarrow{k}_1(s) ds \\ &\quad + \cos \bar{\Theta} \left\langle \overrightarrow{v}_1(s), \overrightarrow{v}_3^*(s) \right\rangle \oint_{(\bar{Y})} \overrightarrow{k}_2(s) ds \end{aligned}$$

ifadeleri bulunur. Bu ifadelerin taraf tarafa toplanmasıyla açılım uzunluğu

$$\begin{aligned}
L_{\bar{C}} = & \left( \left\langle \vec{v}_1(s), \vec{v}_3^*(s) \right\rangle + \left\langle \vec{v}_1^*(s), \vec{v}_3(s) \right\rangle \right) \sin \bar{\Theta} \oint_{(\bar{Y})} \bar{k}_1(s) ds \\
& + \left( \left\langle \vec{v}_1(s), \vec{v}_3^*(s) \right\rangle + \left\langle \vec{v}_1^*(s), \vec{v}_3(s) \right\rangle \right) \cos \bar{\Theta} \oint_{(\bar{Y})} \bar{k}_2(s) ds \\
& + \sin \bar{\Theta} \oint_{(\bar{Y})} ds
\end{aligned}$$

şeklinde olur.  $\vec{V}_1(s)$  ve  $\vec{V}_3(s)$  vektörleri ortogonal birim vektörler olduğundan

$$\left\langle \vec{v}_1(s), \vec{v}_3^*(s) \right\rangle + \left\langle \vec{v}_1^*(s), \vec{v}_3(s) \right\rangle = 0$$

dir. Bu son eşitlik  $L_{\bar{C}}$  ifadesinde yerine yazılırsa, bu yüzeyin açılım uzunluğu

$$L_{\bar{C}} = \sin \bar{\Theta} \oint_{(\bar{Y})} ds \quad (4.45)$$

veya

$$L_{\bar{C}} = \sin \bar{\Theta} L_{V_1} \quad (4.45)$$

şeklinde elde edilir. (4.45) ifadesinde (4.22) bağıntısı yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
L_{\bar{C}} = & \sin \bar{\Theta} \oint_{(\bar{Y}+\bar{R})} ds \\
= & \sin \bar{\Theta} \oint_{(\bar{Y})} ds + \sin \bar{\Theta} \oint_{(\bar{R})} ds
\end{aligned}$$

olur. Burada (4.35) bağıntısı kullanılırsa, bu uzunluk

$$L_{\bar{C}} = \sin \bar{\Theta} \oint_{(\bar{Y})} ds + \sin \bar{\Theta} \oint_{(\bar{R})} ds$$

şeklinde yazılır ve bu ifadede

$$A_5 = \sin \Theta \oint_{(\bar{R})} ds$$

denirse bu yüzeyin açılım uzunluğu

$$L_{\bar{C}} = \sin \Theta \oint_{(\bar{r})} ds + A_5$$

veya

$$L_{\bar{C}} = \sin \Theta L_{v_1} + A_5$$

şeklinde elde edilir. (4.42) bağıntısından, bu yüzeylerin açılım uzunlukları arasında

$$L_{\bar{C}} = L_C + A_5 \quad (4.46)$$

bağıntısı elde edilir.

Anadoğrusu  $\bar{C}(s)$  olan kapalı regle yüzeyin dual açılım açısı (2.31)

bağıntısından

$$\begin{aligned} \Lambda_C(s) &= -\langle \bar{D}(s), \bar{C}(s) \rangle, \\ \Lambda_C(s) &= -\langle \bar{d}(s), \bar{c}(s) \rangle - \varepsilon \left( \langle \bar{d}^*(s), \bar{c}(s) \rangle + \langle \bar{d}(s), \bar{c}^*(s) \rangle \right) \end{aligned} \quad (4.47)$$

dir. Bu eşitliğin reel kısmı, (4.38) ve (4.41) bağıntılarından

$$\langle \bar{d}(s), \bar{c}(s) \rangle = \cos \Theta \oint_{(\bar{r})} k_1(s) ds + \sin \Theta \oint_{(\bar{r})} k_2(s) ds \quad (4.48)$$

şeklinde bulunur. (2.24) bağıntısından

$$\lambda_c = -\langle \bar{d}(s), \bar{c}(s) \rangle = -\cos \Theta \lambda_{v_3} - \sin \Theta \lambda_{v_1}$$

olur. (4.42) ve (4.48) ifadeleri (4.47) da yerine yazılırsa bu yüzeyin dual açılım açısı

$$\Lambda_C(s) = -\cos \Theta \oint_{(\bar{r})} k_1(s) ds - \sin \Theta \oint_{(\bar{r})} k_2(s) ds - \varepsilon \sin \Theta \oint_{(\bar{r})} ds$$



şeklinde elde edilir. (4.19) ve (4.21) ifadelerinden

$$\Lambda_C(s) = -\cos\Theta \oint_{(\bar{Y})} \kappa(s) ds - \sin\Theta \oint_{(\bar{Y})} \tau(s) ds \quad (4.49)$$

şeklinde yazılır. Benzer şekilde anadoğrusu  $\bar{\bar{C}}(s)$  olan kapalı regle yüzeyin dual açılım açısı (2.31) bağıntısından

$$\begin{aligned} \Lambda_{\bar{C}}(s) &= -\left\langle \bar{\bar{D}}(s), \bar{\bar{C}}(s) \right\rangle = \lambda_{\bar{C}}(s) - \varepsilon L_{\bar{C}}(s), \\ \Lambda_{\bar{C}}(s) &= -\left\langle \bar{\bar{d}}(s), \bar{\bar{c}}(s) \right\rangle - \varepsilon \left( \left\langle \bar{\bar{d}}^*(s), \bar{\bar{c}}(s) \right\rangle + \left\langle \bar{\bar{d}}(s), \bar{\bar{c}}^*(s) \right\rangle \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

yazılır. Bu eşitliğin reel kısmı (4.39) ve (4.44) bağıntılarından

$$\left\langle \bar{\bar{d}}(s), \bar{\bar{c}}(s) \right\rangle = \cos\bar{\Theta} \oint_{(\bar{Y})} \bar{k}_1(s) ds + \sin\bar{\Theta} \oint_{(\bar{Y})} \bar{k}_2(s) ds \quad (4.51)$$

şeklinde bulunur. (2.24) bağıntısından

$$\lambda_{\bar{C}} = -\left\langle \bar{\bar{d}}(s), \bar{\bar{c}}(s) \right\rangle = -\cos\bar{\Theta} \lambda_{u_3} - \sin\bar{\Theta} \lambda_{u_1}$$

olur. (4.45) ve (4.30) ifadeleri (4.50) da yerine yazılırsa yüzeyin dual açılım açısı

$$\Lambda_{\bar{C}}(s) = -\cos\bar{\Theta} \oint_{(\bar{Y})} \bar{k}_1(s) ds - \sin\bar{\Theta} \oint_{(\bar{Y})} \bar{k}_2(s) ds - \varepsilon \sin\bar{\Theta} \oint_{(\bar{Y})} ds$$

olur. (4.19) ve (4.21) ifadelerinden bu eşitlik

$$\Lambda_{\bar{C}}(s) = -\cos\bar{\Theta} \oint_{(\bar{Y})} \bar{\kappa}(s) ds - \sin\bar{\Theta} \oint_{(\bar{Y})} \bar{\tau}(s) ds \quad (4.52)$$

veya

$$\Lambda_{\bar{C}}(s) = \cos\bar{\Theta} \Lambda_{V_3} + \sin\bar{\Theta} \Lambda_{V_1}$$

şeklinde bulunur. (4.52) bağıntısında (4.22) yerine yazılırsa

$$\Lambda_{\bar{c}}(s) = -\cos\bar{\Theta} \oint_{(\bar{Y}+\bar{R})} \bar{\kappa}(s) ds - \sin\bar{\Theta} \oint_{(\bar{Y}+\bar{R})} \bar{\tau}(s) ds ,$$

$$\Lambda_{\bar{c}}(s) = -\cos\bar{\Theta} \oint_{(\bar{Y})} \bar{\kappa}(s) ds - \sin\bar{\Theta} \oint_{(\bar{Y})} \bar{\tau}(s) ds$$

$$- \cos\bar{\Theta} \oint_{(\bar{R})} \bar{\kappa}(s) ds - \sin\bar{\Theta} \oint_{(\bar{R})} \bar{\tau}(s) ds$$

olur. Burada (4.18), (4.19), (4.20), (4.21) ve (4.35) bağıntılarından

$$\Lambda_{\bar{c}}(s) = -\cos\Theta \oint_{(\bar{Y})} \kappa(s) ds - \sin\Theta \oint_{(\bar{Y})} \tau(s) ds$$

$$- \cos\Theta \oint_{(\bar{R})} \kappa(s) ds - \sin\Theta \oint_{(\bar{R})} \tau(s) ds$$

şeklinde yazılır ve bu ifadede

$$A_6 = -\cos\Theta \oint_{(\bar{R})} \kappa(s) ds - \sin\Theta \oint_{(\bar{R})} \tau(s) ds$$

alınırsa yüzeyin dual açılım açısı

$$\Lambda_{\bar{c}}(s) = -\cos\Theta \oint_{(\bar{Y})} \kappa(s) ds - \sin\Theta \oint_{(\bar{Y})} \tau(s) ds + A_6$$

şeklinde elde edilir. Böylece bu yüzeylerin dual açılım açıları arasında

$$\Lambda_{\bar{c}}(s) = \Lambda_c(s) + A_6 \quad (4.53)$$

bağıntısı elde edilir.

Son olarak, anadoğrusu  $\vec{C}(s)$  olan kapalı regle yüzeyin dağılma parametresi (2.30) bağıntısından

$$P_c = \frac{\langle d\vec{c}(s), d\vec{c}^*(s) \rangle}{\langle d\vec{c}(s), d\vec{c}(s) \rangle} \quad (4.54)$$

olur. (4.36) ifadesinden  $d\vec{C}(s)$  hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
d\vec{C}(s) &= \cos \Theta \vec{U}_1(s) + \sin \Theta \vec{U}_1'(s) - \sin \Theta \vec{U}_3(s) + \cos \Theta \vec{U}_3'(s) \\
&= \cos \Theta \vec{U}_1(s) + (\sin \Theta \kappa(s) - \cos \Theta \tau(s)) \vec{U}_2(s) \\
&\quad - \sin \Theta \vec{U}_3(s)
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\sin \Theta \kappa(s) - \cos \Theta \tau(s) = \|\vec{W}\| \cos \Theta \sin \Theta - \|\vec{W}\| \cos \Theta \sin \Theta = 0$$

olduğundan  $d\vec{C}(s)$  vektörü

$$d\vec{C}(s) = \cos \Theta \vec{U}_1(s) - \sin \Theta \vec{U}_3(s) \quad (4.55)$$

şeklinde elde edilir. Reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{cases}
d\vec{c}(s) = \cos \Theta \vec{u}_1(s) - \sin \Theta \vec{u}_3(s) \\
d\vec{c}^*(s) = \cos \Theta \vec{u}_1^*(s) - \sin \Theta \vec{u}_3^*(s)
\end{cases} \quad (4.56)$$

bulunur. (4.56) ifadesi (4.54) bağıntısında yerine yazılırsa ifadenin payı

$$\begin{aligned}
\langle d\vec{c}(s), d\vec{c}^*(s) \rangle &= \cos \Theta \sin \Theta \langle \vec{u}_1(s), \vec{u}_3^*(s) \rangle - \cos \Theta \sin \Theta \langle \vec{u}_1^*(s), \vec{u}_3(s) \rangle \\
&= \cos \Theta \sin \Theta \left( \langle \vec{u}_1(s), \vec{u}_3^*(s) \rangle + \langle \vec{u}_1^*(s), \vec{u}_3(s) \rangle \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade (4.54) te yerine yazılırsa bu regle yüzeyin dağılma parametresi

$$P_C = 0$$

olur. Benzer şekilde anadoğrusu  $\vec{\vec{C}}(s)$  olan kapalı regle yüzeyin dağılma parametresi (2.30) bağıntısından

$$P_{\bar{c}} = \frac{\langle \bar{d}\bar{c}(s), \bar{d}\bar{c}^*(s) \rangle}{\langle \bar{d}\bar{c}(s), \bar{d}\bar{c}(s) \rangle} \quad (4.57)$$

dır. (4.36) ifadesinden  $d\bar{C}(s)$  türevi hesaplanırsa

$$\begin{aligned} d\bar{C}(s) &= \cos \bar{\Theta} \bar{V}_1(s) + \sin \bar{\Theta} \bar{V}_1'(s) - \sin \bar{\Theta} \bar{V}_3(s) + \cos \bar{\Theta} \bar{V}_3'(s) \\ &= \cos \bar{\Theta} \bar{V}_1(s) + (\sin \bar{\Theta} \bar{\kappa}(s) - \cos \bar{\Theta} \bar{\tau}(s)) \bar{V}_2(s) - \sin \bar{\Theta} \bar{V}_3(s) \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\sin \bar{\Theta} \bar{\kappa}(s) - \cos \bar{\Theta} \bar{\tau}(s) = \|\bar{W}\| \cos \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} - \|\bar{W}\| \cos \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} = 0$$

olduğundan  $d\bar{C}(s)$  vektörü

$$d\bar{C}(s) = \cos \bar{\Theta} \bar{V}_1(s) - \sin \bar{\Theta} \bar{V}_3(s) \quad (4.58)$$

şeklinde olur. Bu vektörün reel ve dual kısımları

$$\begin{cases} \bar{d}\bar{c}(s) = \cos \bar{\Theta} \bar{v}_1(s) - \sin \bar{\Theta} \bar{v}_3(s) \\ \bar{d}\bar{c}^*(s) = \cos \bar{\Theta} \bar{v}_1^*(s) - \sin \bar{\Theta} \bar{v}_3^*(s) \end{cases} \quad (4.59)$$

şeklinde yazılır. (4.59) ifadeleri (4.57) bağıntısında yerlerine yazılırsa ifadenin payı

$$\begin{aligned} \langle \bar{d}\bar{c}(s), \bar{d}\bar{c}^*(s) \rangle &= \cos \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} \langle \bar{v}_1(s), \bar{v}_3^*(s) \rangle - \cos \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} \langle \bar{v}_1^*(s), \bar{v}_3(s) \rangle \\ &= \cos \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} \left( \langle \bar{v}_1(s), \bar{v}_3^*(s) \rangle + \langle \bar{v}_1^*(s), \bar{v}_3(s) \rangle \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Bu ifade (4.57) bağıntısında yerine yazılırsa bu regle yüzeyin dağılma parametresi

$$P_{\bar{C}} = 0$$

şeklinde olur. Yani bu yüzeylerin dağılma parametreleri arasında

$$P_{\bar{C}} = P_C = 0 \quad (4.60)$$

bağıntısı vardır. Böylece şu teorem verilebilir:

**Teorem 4.2.5:**  $ID$ –Modülde  $(\vec{T})$  ve  $(\overleftarrow{T})$  dual eğrilerine çizgiler uzayında karşılık gelen  $\overleftarrow{\Psi}(s, \nu)$  ve  $\overleftarrow{\overleftarrow{\Psi}}(s, \nu)$  kapalı dual paralel equidistant regle yüzeylerinin, sırasıyla  $\vec{C}(s)$  ve  $\overleftarrow{C}(s)$  ani Pfaff vektörleri yönündeki birim dual pol vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin dual açılım uzunlukları, dual açılım açıları ve dağılma parametreleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$\begin{cases} L_{\bar{C}} = L_C + A_5, & A_5 = \sin \Theta \oint_{(\bar{R})} ds \\ \Lambda_{\bar{C}} = \Lambda_C + A_6, & A_6 = -\cos \Theta \oint_{(\bar{R})} \kappa(s) ds - \sin \Theta \oint_{(\bar{R})} \tau(s) ds \\ P_{\bar{C}} = P_C = 0. \end{cases}$$

### 4.3. Dual Paralel Equidistant Regle Yüzeylerin Gauss Eğrilikleri

Bu kısımda,  $ID$ –Modülde  $(\vec{T})$  ve  $(\overleftarrow{T})$  dual eğrilerine çizgiler uzayında karşılık gelen  $\overleftarrow{\Psi}(s, \nu)$  ve  $\overleftarrow{\overleftarrow{\Psi}}(s, \nu)$  dual paralel equidistant regle yüzeylerin Gauss eğrilikleri, (Güven, 2010)' in tezinden yola çıkılarak, yüzeylerin şekil operatörlerinin matrisinden yararlanılarak hesaplanmıştır.

### 4.3.1 Birim Dual Teğetler Göstergelerine Karşılık Gelen Regle Yüzeylerin Gauss Eğrilikleri

$$\overrightarrow{\Psi}_{U_1}(s, v) = \overrightarrow{u}_1(s) \wedge \overrightarrow{u}_1^*(s) + v\overrightarrow{u}_1(s), \quad \overrightarrow{u}_1^*(s) = \overrightarrow{\alpha}(s) \wedge \overrightarrow{u}_1(s)$$

yüzeyinin  $v$  ve  $s$  ye göre türevleri alınırsa

$$\left(\overrightarrow{\Psi}_{U_1}\right)_v = \overrightarrow{u}_1(s), \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{\Psi}_{U_1}\right)_s &= \overrightarrow{u}_1'(s) \wedge \overrightarrow{u}_1^*(s) + \overrightarrow{u}_1(s) \wedge \overrightarrow{u}_1^{*'}(s) + v\overrightarrow{u}_1'(s) \\ &= k_1(s)\overrightarrow{u}_2(s) \wedge \overrightarrow{u}_1^*(s) + \overrightarrow{u}_1(s) \wedge (k_1(s)\overrightarrow{u}_2^*(s)) \\ &\quad + vk_1(s)\overrightarrow{u}_2(s) \\ &= k_1(s)\overrightarrow{u}_2(s) \wedge (\overrightarrow{\alpha}(s) \wedge \overrightarrow{u}_1(s)) \\ &\quad + k_1(s)\overrightarrow{u}_1(s) \wedge (\overrightarrow{\alpha}(s) \wedge \overrightarrow{u}_2(s)) + vk_1(s)\overrightarrow{u}_2(s), \end{aligned}$$

$$\left(\overrightarrow{\Psi}_{U_1}\right)_s = -k_1(s)\langle \overrightarrow{u}_2(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \overrightarrow{u}_1(s) + k_1(s)(-\langle \overrightarrow{u}_1(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle + v)\overrightarrow{u}_2(s) \quad (4.62)$$

olur. (4.61) ve (4.62) bağıntıları iç çarpıldığında

$$\left\langle \left(\overrightarrow{\Psi}_{U_1}\right)_v, \left(\overrightarrow{\Psi}_{U_1}\right)_s \right\rangle = -k_1(s)\langle \overrightarrow{u}_2(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \neq 0$$

olduğundan  $\left\{ \left(\overrightarrow{\Psi}_{U_1}\right)_v, \left(\overrightarrow{\Psi}_{U_1}\right)_s \right\}$  sistemi ortogonal değildir. Bu vektörlere Gram-Schmidt yöntemi uygulanırsa

$$\left(\overrightarrow{\Psi}_{U_1}\right)_v = \left(\overrightarrow{X}_{U_1}\right)_1(s),$$

$$\left(\overrightarrow{\Psi}_{U_1}\right)_s = \left(\overrightarrow{X}_{U_1}\right)_2(s)$$

olmak üzere,

$$\overrightarrow{(Y_{U_1})_1}(s) = \overrightarrow{(X_{U_1})_1}(s) = \overrightarrow{u_1}(s), \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(Y_{U_1})_2}(s) &= -\frac{\langle \overrightarrow{(Y_{U_1})_1}(s), \overrightarrow{(X_{U_1})_2}(s) \rangle}{\langle \overrightarrow{(Y_{U_1})_1}(s), \overrightarrow{(Y_{U_1})_1}(s) \rangle} \overrightarrow{(Y_{U_1})_1}(s) + \overrightarrow{(X_{U_1})_2}(s) \\ &= -\langle \overrightarrow{u_1}(s), -k_1(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \overrightarrow{u_1}(s) \rangle \overrightarrow{u_1}(s) \\ &\quad - \langle \overrightarrow{u_1}(s), k_1(s) (-\langle \overrightarrow{u_1}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle + \nu) \overrightarrow{u_2}(s) \rangle \overrightarrow{u_1}(s) \\ &\quad - k_1(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \overrightarrow{u_1}(s) + k_1(s) (-\langle \overrightarrow{u_1}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle + \nu) \overrightarrow{u_2}(s) \\ &= k_1(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \overrightarrow{u_1}(s) - k_1(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \overrightarrow{u_1}(s) \\ &\quad + k_1(s) (-\langle \overrightarrow{u_1}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle + \nu) \overrightarrow{u_2}(s), \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{(Y_{U_1})_2}(s) = k_1(s) (-\langle \overrightarrow{u_1}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle + \nu) \overrightarrow{u_2}(s) \quad (4.64)$$

bulunur. (4.63) ve (4.64) vektörleri birim hale getirilirse

$$\overrightarrow{(E_{U_1})_1}(s) = \frac{\overrightarrow{(Y_{U_1})_1}(s)}{\|\overrightarrow{(Y_{U_1})_1}(s)\|} = \overrightarrow{u_1}(s), \quad (4.65)$$

$$\overrightarrow{(E_{U_1})_2}(s) = \frac{\overrightarrow{(Y_{U_1})_2}(s)}{\|\overrightarrow{(Y_{U_1})_2}(s)\|} = \frac{k_1(s) (-\langle \overrightarrow{u_1}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle + \nu) \overrightarrow{u_2}(s)}{k_1(s) (-\langle \overrightarrow{u_1}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle + \nu)},$$

$$\overrightarrow{(E_{U_1})_2}(s) = \overrightarrow{u_2}(s) \quad (4.66)$$

elde edilir. Buradan

$$\left\langle \overrightarrow{(E_{U_1})_1}(s), \overrightarrow{(E_{U_1})_2}(s) \right\rangle = 0$$

olduğundan  $\left\{ \overrightarrow{(E_{U_1})_1}(s), \overrightarrow{(E_{U_1})_2}(s) \right\}$  bazına göre  $\overrightarrow{\Psi_{U_1}}(s, \nu)$  yüzeyinin şekil operatörü bulunabilir. Bu yüzeyin normal vektörü  $\overrightarrow{N_{U_1}}(s)$  ile gösterilirse

$$\overrightarrow{N_{U_1}}(s) = \overrightarrow{(E_{U_1})_1} \wedge \overrightarrow{(E_{U_1})_2} = \overrightarrow{u_1}(s) \wedge \overrightarrow{u_2}(s) = \overrightarrow{u_3}(s) \quad (4.67)$$

olur.  $\overrightarrow{\Psi_{U_1}}(s, \nu)$  yüzeyinin şekil operatörü  $S_{U_1}(s)$  ve Gauss eğriliği  $K_{U_1}(s)$  ile gösterilirse (2.26) bağıntısından

$$K_{U_1}(s) = \det S_{U_1}(s) = - \left( \left\langle S_{U_1} \left( \overrightarrow{(E_{U_1})_2}(s) \right), \overrightarrow{(E_{U_1})_1}(s) \right\rangle \right)^2 \quad (4.68)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned} S_{U_1} \left( \overrightarrow{(E_{U_1})_2}(s) \right) &= D_{(E_{U_1})_2} \overrightarrow{N_{U_1}}(s) \\ &= \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_1})_2}(s) \right\|} D_{(Y_{U_1})_2} \overrightarrow{N_{U_1}}(s) \\ &= \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_1})_2}(s) \right\|} \frac{d \overrightarrow{N_{U_1}}(s)}{ds} \\ &= \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_1})_2}(s) \right\|} \overrightarrow{u_3}'(s) \\ &= - \frac{k_2(s)}{k_1(s) \left( - \langle \overrightarrow{u_1}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle + \nu \right)} \overrightarrow{u_2}(s) \end{aligned}$$

olur. Bu ifade ve (4.65) bağıntısı (4.68) bağıntısında yerine yazılırsa yüzeyin Gauss eğriliği



$$K_{U_1}(s) = 0 \quad (4.69)$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde

$$\overrightarrow{\Psi}_{V_1}(s, \nu) = \overrightarrow{v}_1(s) \wedge \overrightarrow{v}_1^*(s) + \nu \overrightarrow{v}_1(s), \quad \overrightarrow{v}_1^*(s) = \overrightarrow{\beta}(s) \wedge \overrightarrow{v}_1(s)$$

yüzeyinin  $\nu$  ve  $s$  ye göre türevleri alınır

$$\left(\overrightarrow{\Psi}_{V_1}\right)_\nu = \overrightarrow{v}_1(s), \quad (4.70)$$

$$\left(\overrightarrow{\Psi}_{V_1}\right)_s = -\overline{k}_1(s) \langle \overrightarrow{v}_2(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \overrightarrow{v}_1(s) + \overline{k}_1(s) \left( -\langle \overrightarrow{v}_1(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle + \nu \right) \overrightarrow{v}_2(s) \quad (4.71)$$

olur. (4.70) ve (4.71) bağıntıları iç çarpıldığında

$$\left\langle \left(\overrightarrow{\Psi}_{V_1}\right)_\nu, \left(\overrightarrow{\Psi}_{V_1}\right)_s \right\rangle = -\overline{k}_1(s) \langle \overrightarrow{v}_2(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \neq 0$$

olduğundan  $\left\{ \left(\overrightarrow{\Psi}_{V_1}\right)_\nu, \left(\overrightarrow{\Psi}_{V_1}\right)_s \right\}$  sistemi ortogonal değildir. Bu vektörlere Gram-

Schmidt yöntemi uygulanırsa

$$\left(\overrightarrow{\Psi}_{V_1}\right)_\nu = \left(\overrightarrow{X}_{V_1}\right)_1(s),$$

$$\left(\overrightarrow{\Psi}_{V_1}\right)_s = \left(\overrightarrow{X}_{V_1}\right)_2(s)$$

olmak üzere,

$$\left(\overrightarrow{Y}_{V_1}\right)_1(s) = \left(\overrightarrow{X}_{V_1}\right)_1(s) = \overrightarrow{v}_1(s), \quad (4.72)$$

$$\left(\overrightarrow{Y}_{V_1}\right)_2(s) = -\frac{\left\langle \left(\overrightarrow{Y}_{V_1}\right)_1(s), \left(\overrightarrow{X}_{V_1}\right)_2(s) \right\rangle}{\left\langle \left(\overrightarrow{Y}_{V_1}\right)_1(s), \left(\overrightarrow{Y}_{V_1}\right)_1(s) \right\rangle} \left(\overrightarrow{Y}_{V_1}\right)_1(s) + \left(\overrightarrow{X}_{V_1}\right)_2(s),$$

$$\left(\overrightarrow{Y}_{V_1}\right)_2(s) = \overline{k}_1(s) \left( -\langle \overrightarrow{v}_1(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle + \nu \right) \overrightarrow{v}_2(s) \quad (4.73)$$

bulunur. (4.72) ve (4.73) vektörleri birim hale getirilirse

$$\overrightarrow{(E_{V_1})_1}(s) = \frac{\overrightarrow{(Y_{V_1})_1}(s)}{\|\overrightarrow{(Y_{V_1})_1}(s)\|} = \overrightarrow{v_1}(s), \quad (4.74)$$

$$\overrightarrow{(E_{V_1})_2}(s) = \frac{\overrightarrow{(Y_{V_1})_2}(s)}{\|\overrightarrow{(Y_{V_1})_2}(s)\|} = \frac{\overline{k_1}(s)(-\langle \overrightarrow{v_1}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle + \nu) \overrightarrow{v_2}(s)}{\overline{k_1}(s)(-\langle \overrightarrow{v_1}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle + \nu)},$$

$$\overrightarrow{(E_{V_1})_2}(s) = \overrightarrow{v_2}(s) \quad (4.75)$$

elde edilir. Buradan

$$\langle \overrightarrow{(E_{V_1})_1}(s), \overrightarrow{(E_{V_1})_2}(s) \rangle = 0$$

olduğundan  $\{\overrightarrow{(E_{V_1})_1}(s), \overrightarrow{(E_{V_1})_2}(s)\}$  bazına göre  $\overrightarrow{\Psi_{V_1}}(s, \nu)$  yüzeyinin şekil operatörü bulunabilir. Bu yüzeyin normal vektörü  $\overrightarrow{N_{V_1}}(s)$  ile gösterilirse

$$\overrightarrow{N_{V_1}}(s) = (\overrightarrow{\Psi_{V_1}})_1 \wedge (\overrightarrow{\Psi_{V_1}})_2 = \overrightarrow{v_1}(s) \wedge \overrightarrow{v_2}(s) = \overrightarrow{v_3}(s) \quad (4.76)$$

olur.  $\overrightarrow{\Psi_{V_1}}(s, \nu)$  yüzeyinin şekil operatörü  $\overrightarrow{S_{V_1}}(s)$  ve Gauss eğriliği  $\overline{K_{V_1}}(s)$  ile gösterilirse (2.26) bağıntısından

$$\overline{K_{V_1}}(s) = \det \overrightarrow{S_{V_1}}(s) = -\left( \left\langle \overrightarrow{S_{V_1}} \left( \overrightarrow{(E_{V_1})_2}(s), \overrightarrow{(E_{V_1})_1}(s) \right) \right\rangle \right)^2 \quad (4.77)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{V_1} \left( \overrightarrow{(E_{V_1})_2}(s) \right) &= D_{(E_{V_1})_2} \overrightarrow{N}_{V_1}(s) \\
&= \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_1})_2}(s) \right\|} D_{(Y_{V_1})_2} \overrightarrow{N}_{V_1}(s) \\
&= \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_1})_2}(s) \right\|} \frac{d\overrightarrow{N}_{V_1}(s)}{d\overline{s}} \frac{d\overline{s}}{ds} \\
&= \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_1})_2}(s) \right\|} \frac{d\overline{s}}{ds} v_3^-(s) \\
&= -\frac{\overline{k}_2(s)}{\overline{k}_1(s) \left( -\langle \overline{v}_1(s), \overline{\beta}(s) \rangle + v \right)} \frac{d\overline{s}}{ds} v_2^-(s)
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade ve (4.74) bağıntısı (4.77) de yerine yazılırsa yüzeyin Gauss eğriliği

$$\overline{K}_{V_1}(s) = 0 \quad (4.78)$$

şeklinde bulunur.

**Teorem 4.3.1:**  $ID$  – Modülde  $(\overrightarrow{T})$  ve  $(\overleftarrow{T})$  dual eğrilerine çizgiler uzayında karşılık gelen  $\overline{\Psi}(s, v)$  ve  $\overleftarrow{\Psi}(s, v)$  dual paralel equidistant regle yüzeylerinin  $\overline{U}_1(s)$  ve  $\overleftarrow{V}_1(s)$  birim dual teğet vektörlerinin birim dual küre üzerinde çizdiği küresel göstergelere Öklid uzayında karşılık gelen regle yüzeylerin Gauss eğrilikleri sırasıyla  $\overline{K}_{U_1}(s)$  ve  $\overleftarrow{K}_{V_1}(s)$  ile gösterilirse, bu eğrilikler arasında aşağıdaki bağıntı vardır:

$$\overline{K}_{V_1}(s) = K_{V_1}(s) = 0.$$

**Sonuç 4.3.1:**  $ID$ - Modülde  $(\overline{T})$  ve  $(\overline{\overline{T}})$  dual eğrilerine çizgiler uzayında karşılık gelen  $\overline{\Psi}(s, v)$  ve  $\overline{\overline{\Psi}}(s, v)$  dual paralel equidistant regle yüzeylerinin  $\overline{U}_1(s)$  ve  $\overline{V}_1(s)$  birim dual teğet vektörlerinin birim dual küre üzerinde çizdiği küresel göstergelere Öklid uzayında karşılık gelen regle yüzeyler açılabilir.

#### 4.3.2. Birim Dual Asli Normaller Göstergelerine Karşılık Gelen Regle Yüzeylerin Gauss Eğrilikleri

$$\overline{\Psi}_{U_2}(s, v) = \overline{u}_2(s) \wedge \overline{u}_2^*(s) + v\overline{u}_2(s), \quad \overline{u}_2^*(s) = \overline{\alpha}(s) \wedge \overline{u}_2(s)$$

yüzeyinin  $v$  ve  $s$  ye göre türevleri alınır

$$\left(\overline{\Psi}_{U_2}\right)_v = \overline{u}_2(s), \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \left(\overline{\Psi}_{U_2}\right)_s &= \overline{u}_2'(s) \wedge \overline{u}_2^*(s) + \overline{u}_2(s) \wedge \overline{u}_2^{*\prime}(s) + v\overline{u}_2'(s) \\ &= \left(-k_1(s)\overline{u}_1(s) + k_2(s)\overline{u}_3(s)\right) \wedge \overline{u}_2^*(s) \\ &\quad + \overline{u}_2(s) \wedge \overline{u}_3(s) + \overline{u}_2(s) \wedge \left(-k_1(s)\overline{u}_1^*(s) + k_2(s)\overline{u}_3^*(s)\right) \\ &\quad + v\left(-k_1(s)\overline{u}_1(s) + k_2(s)\overline{u}_3(s)\right) \\ &= -k_1(s)\overline{u}_1(s) \wedge \overline{u}_2^*(s) + k_2(s)\overline{u}_3(s) \wedge \overline{u}_2^*(s) + \overline{u}_1(s) \\ &\quad - k_1(s)\overline{u}_2(s) \wedge \overline{u}_1^*(s) + k_2(s)\overline{u}_2(s) \wedge \overline{u}_3^*(s) \\ &\quad - vk_1(s)\overline{u}_1(s) + vk_2(s)\overline{u}_3(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -k_1(s)\vec{u}_1(s) \wedge (\vec{\alpha}(s) \wedge \vec{u}_2(s)) + k_2(s)\vec{u}_3(s) \wedge (\vec{\alpha}(s) \wedge \vec{u}_2(s)) \\
&\quad + \vec{u}_1(s) - k_1(s)\vec{u}_2(s) \wedge (\vec{\alpha}(s) \wedge \vec{u}_1(s)) \\
&\quad + k_2(s)\vec{u}_2(s) \wedge (\vec{\alpha}(s) \wedge \vec{u}_3(s)) - vk_1(s)\vec{u}_1(s) + vk_2(s)\vec{u}_3(s), \\
(\overline{\Psi}_{u_2})_s &= k_1(s)\langle \vec{u}_1(s), \vec{\alpha}(s) \rangle \vec{u}_2(s) - k_2(s)\langle \vec{u}_3(s), \vec{\alpha}(s) \rangle \vec{u}_2(s) \\
&\quad + \vec{u}_1(s) + k_1(s)\langle \vec{u}_2(s), \vec{\alpha}(s) \rangle \vec{u}_1(s) \\
&\quad - k_2(s)\langle \vec{u}_2(s), \vec{\alpha}(s) \rangle \vec{u}_3(s) - vk_1(s)\vec{u}_1(s) + vk_2(s)\vec{u}_3(s), \\
(\overline{\Psi}_{u_2})_v &= (1 - vk_1(s) + k_1(s)\langle \vec{u}_2(s), \vec{\alpha}(s) \rangle) \vec{u}_1(s) \\
&\quad + (k_1(s)\langle \vec{u}_1(s), \vec{\alpha}(s) \rangle - k_2(s)\langle \vec{u}_3(s), \vec{\alpha}(s) \rangle) \vec{u}_2(s) \quad (4.80) \\
&\quad + (vk_2(s) - k_2(s)\langle \vec{u}_2(s), \vec{\alpha}(s) \rangle) \vec{u}_3(s)
\end{aligned}$$

olur. (4.79) ve (4.80) bağıntıları iç çarpıldığında

$$\left\langle (\overline{\Psi}_{u_2})_v, (\overline{\Psi}_{u_2})_s \right\rangle = (k_1(s)\langle \vec{u}_1(s), \vec{\alpha}(s) \rangle - k_2(s)\langle \vec{u}_3(s), \vec{\alpha}(s) \rangle) \neq 0$$

olduğundan  $\left\{ (\overline{\Psi}_{u_2})_v, (\overline{\Psi}_{u_2})_s \right\}$  sistemi ortogonal değildir. Bu vektörlere Gram-Schmidt yöntemi uygulanırsa

$$(\overline{\Psi}_{u_2})_v = (\overline{X}_{u_2})_1(s),$$

$$(\overline{\Psi}_{u_2})_s = (\overline{X}_{u_2})_2(s)$$

olmak üzere,

$$\overrightarrow{(Y_{U_2})_1}(s) = \overrightarrow{(X_{U_2})_1}(s) = \overrightarrow{u_2}(s), \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) &= -\frac{\langle \overrightarrow{(Y_{U_2})_1}(s), \overrightarrow{(X_{U_2})_2}(s) \rangle}{\langle \overrightarrow{(Y_{U_2})_1}(s), \overrightarrow{(Y_{U_2})_1}(s) \rangle} \overrightarrow{(Y_{U_2})_1}(s) + \overrightarrow{(X_{U_2})_2}(s) \\ &= -\langle \overrightarrow{u_2}(s), (1 - vk_1(s) + k_1(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle) \overrightarrow{u_1}(s) \rangle \overrightarrow{u_2}(s) \\ &\quad - \langle \overrightarrow{u_2}(s), k_1(s) \langle \overrightarrow{u_1}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \overrightarrow{u_2}(s) \rangle \overrightarrow{u_2}(s) \\ &\quad - \langle \overrightarrow{u_2}(s), -k_2(s) \langle \overrightarrow{u_3}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \overrightarrow{u_2}(s) \rangle \overrightarrow{u_2}(s) \\ &\quad - \langle \overrightarrow{u_2}(s), (vk_2(s) - k_2(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle) \overrightarrow{u_3}(s) \rangle \overrightarrow{u_2}(s) \\ &\quad + (1 - vk_1(s) + k_1(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle) \overrightarrow{u_1}(s) \\ &\quad + (k_1(s) \langle \overrightarrow{u_1}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle - k_2(s) \langle \overrightarrow{u_3}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle) \overrightarrow{u_2}(s) \\ &\quad + (vk_2(s) - k_2(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle) \overrightarrow{u_3}(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) &= -k_1(s) \langle \overrightarrow{u_1}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \overrightarrow{u_2}(s) + k_2(s) \langle \overrightarrow{u_3}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \overrightarrow{u_2}(s) \\ &\quad + (1 - vk_1(s) + k_1(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle) \overrightarrow{u_1}(s) \\ &\quad + (k_1(s) \langle \overrightarrow{u_1}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle - k_2(s) \langle \overrightarrow{u_3}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle) \overrightarrow{u_2}(s) \\ &\quad + (vk_2(s) - k_2(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle) \overrightarrow{u_3}(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) &= \left(1 - vk_1(s) + k_1(s)\langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle\right) \overrightarrow{u_1}(s) \\ &+ \left(vk_2(s) - k_2(s)\langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle\right) \overrightarrow{u_3}(s) \end{aligned} \quad (4.82)$$

bulunur. (4.81) ve (4.82) vektörleri birim hale getirilirse

$$\overrightarrow{(E_{U_2})_1}(s) = \frac{\overrightarrow{(Y_{U_2})_1}(s)}{\|\overrightarrow{(Y_{U_2})_1}(s)\|} = \overrightarrow{u_2}(s), \quad (4.83)$$

$$\overrightarrow{(E_{U_2})_2}(s) = \frac{\overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s)}{\|\overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s)\|},$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(E_{U_2})_2}(s) &= \frac{\left(1 - vk_1(s) + k_1(s)\langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle\right) \overrightarrow{u_1}(s)}{\|\overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s)\|} \\ &+ \frac{\left(vk_2(s) - k_2(s)\langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle\right) \overrightarrow{u_3}(s)}{\|\overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s)\|} \end{aligned} \quad (4.84)$$

elde edilir. Buradan

$$\left\langle \overrightarrow{(E_{U_2})_1}(s), \overrightarrow{(E_{U_2})_2}(s) \right\rangle = 0$$

olduğundan  $\left\{ \overrightarrow{(E_{U_2})_1}(s), \overrightarrow{(E_{U_2})_2}(s) \right\}$  bazına göre  $\overrightarrow{\Psi_{U_2}}(s, \nu)$  yüzeyinin şekil operatörü bulunabilir. Bu yüzeyin normal vektörü  $\overrightarrow{N_{U_2}}(s)$  ile gösterilirse

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N}_{U_2}(s) &= \overrightarrow{(E_{U_2})_1}(s) \wedge \overrightarrow{(E_{U_2})_2}(s) \\
&= \frac{\overrightarrow{u}_2(s) \wedge \left( (1 - vk_1(s) + k_1(s) \langle \overrightarrow{u}_2(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle) \overrightarrow{u}_1(s) \right)}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) \right\|} \\
&\quad + \frac{\overrightarrow{u}_2(s) \wedge \left( vk_2(s) - k_2(s) \langle \overrightarrow{u}_2(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right) \overrightarrow{u}_3(s)}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) \right\|}, \\
\overrightarrow{N}_{U_2}(s) &= \frac{\left( vk_2(s) - k_2(s) \langle \overrightarrow{u}_2(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right) \overrightarrow{u}_1(s)}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) \right\|} \\
&\quad - \frac{\left( 1 - vk_1(s) + k_1(s) \langle \overrightarrow{u}_2(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right) \overrightarrow{u}_3(s)}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) \right\|},
\end{aligned} \tag{4.85}$$

olur.  $\overrightarrow{\Psi}_{U_2}(s, v)$  yüzeyinin şekil operatörü  $\overrightarrow{S}_{U_2}(s)$  ve Gauss eğriliği  $\overrightarrow{K}_{U_2}(s)$  ile gösterilirse (2.26) bağıntısından

$$\overrightarrow{K}_{U_2}(s) = \det \overrightarrow{S}_{U_2}(s) = - \left( \left\langle \overrightarrow{S}_{U_2} \left( \overrightarrow{(E_{U_2})_2}(s) \right), \overrightarrow{(E_{U_2})_1}(s) \right\rangle \right)^2 \tag{4.86}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{S}_{U_2} \left( \overrightarrow{(E_{U_2})_2}(s) \right) &= D_{(E_{U_2})_2} \overrightarrow{N}_{U_2}(s) \\
&= \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) \right\|} D_{(Y_{U_2})_2} \overrightarrow{N}_{U_2}(s) \\
&= \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) \right\|} \frac{d\overrightarrow{N}_{U_2}(s)}{ds}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) \right\|^2} \left( vk_2(s) - k_2(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right)' \overrightarrow{u_1}(s) \\
&+ \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) \right\|^2} \left( vk_2(s) - k_2(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right) k_1(s) \overrightarrow{u_2}(s) \\
&- \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) \right\|^2} \left( 1 - vk_1(s) + k_1(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right)' \overrightarrow{u_3}(s) \\
&+ \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) \right\|^2} \left( 1 - vk_1(s) + k_1(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right) k_2(s) \overrightarrow{u_2}(s) \\
&+ \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) \right\| \left\| \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) \right\|'} \left( vk_2(s) - k_2(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right) \overrightarrow{u_1}(s) \\
&- \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) \right\| \left\| \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) \right\|'} \left( 1 - vk_1(s) + k_1(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right) \overrightarrow{u_3}(s)
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade ve (4.83) bağıntısı (4.86) da yerine yazılırsa yüzeyin Gauss eğriliği

$$\overline{K}_{U_2}(s) = - \left[ \begin{aligned} &\frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) \right\|^2} \left( vk_1(s)k_2(s) - k_1(s)k_2(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right) \\ &+ \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) \right\|^2} \left( k_2(s) - vk_1(s)k_2(s) + k_1(s)k_2(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right) \end{aligned} \right]^2,$$

$$\bar{K}_{U_2}(s) = - \left( \frac{k_2(s)}{\|(\overrightarrow{Y_{U_2}})_2(s)\|^2} \right)^2 \quad (4.87)$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde

$$\overrightarrow{\Psi}_{v_2}(s, v) = \overrightarrow{v}_2(s) \wedge \overrightarrow{v}_2^*(s) + v \overrightarrow{v}_2(s), \quad \overrightarrow{v}_2^*(s) = \overrightarrow{\beta}(s) \wedge \overrightarrow{v}_2(s)$$

yüzeyinin  $v$  ve  $s$  ye göre türevleri alınır

$$\left( \overrightarrow{\Psi}_{v_2} \right)_v = \overrightarrow{v}_2(s), \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} \left( \overrightarrow{\Psi}_{v_2} \right)_s &= \overrightarrow{v}_2'(s) \wedge \overrightarrow{v}_2^*(s) + \overrightarrow{v}_2(s) \wedge \overrightarrow{v}_2^{*'}(s) + v \overrightarrow{v}_2'(s) \\ &= \left( -\bar{k}_1(s) \overrightarrow{v}_1(s) + \bar{k}_2(s) \overrightarrow{v}_3(s) \right) \wedge \overrightarrow{v}_2^*(s) \\ &\quad + \overrightarrow{v}_2(s) \wedge \overrightarrow{v}_3(s) + \overrightarrow{v}_2(s) \wedge \left( -\bar{k}_1(s) \overrightarrow{v}_1^*(s) + \bar{k}_2(s) \overrightarrow{v}_3^*(s) \right) \\ &\quad + v \left( -\bar{k}_1(s) \overrightarrow{v}_1(s) + \bar{k}_2(s) \overrightarrow{v}_3(s) \right) \\ &= -\bar{k}_1(s) \overrightarrow{v}_1(s) \wedge \left( \overrightarrow{\beta}(s) \wedge \overrightarrow{v}_2(s) \right) + \bar{k}_2(s) \overrightarrow{v}_3(s) \wedge \left( \overrightarrow{\beta}(s) \wedge \overrightarrow{v}_2(s) \right) \\ &\quad + \overrightarrow{v}_1(s) - \bar{k}_1(s) \overrightarrow{v}_2(s) \wedge \left( \overrightarrow{\beta}(s) \wedge \overrightarrow{v}_1(s) \right) \\ &\quad + \bar{k}_2(s) \overrightarrow{v}_2(s) \wedge \left( \overrightarrow{\beta}(s) \wedge \overrightarrow{v}_3(s) \right) - v \bar{k}_1(s) \overrightarrow{v}_1(s) + v \bar{k}_2(s) \overrightarrow{v}_3(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \overrightarrow{\Psi}_{v_2} \right)_s &= \left( 1 - v \bar{k}_1(s) + \bar{k}_1(s) \langle \overrightarrow{v}_2(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \right) \overrightarrow{v}_1(s) \\ &\quad + \left( \bar{k}_1(s) \langle \overrightarrow{v}_1(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle - \bar{k}_2(s) \langle \overrightarrow{v}_3(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \right) \overrightarrow{v}_2(s) \\ &\quad + \left( v \bar{k}_2(s) - \bar{k}_2(s) \langle \overrightarrow{v}_2(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \right) \overrightarrow{v}_3(s) \end{aligned} \quad (4.89)$$

olur. (4.88) ve (4.89) bağıntıları iç çarpıldığında

$$\left\langle \left( \overrightarrow{\Psi_{v_2}} \right)_v, \left( \overrightarrow{\Psi_{v_2}} \right)_s \right\rangle = \left( \overline{k_1}(s) \left\langle \overrightarrow{v_1}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \right\rangle - \overline{k_2}(s) \left\langle \overrightarrow{v_3}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \right\rangle \right) \neq 0$$

olduğundan  $\left\{ \left( \overrightarrow{\Psi_{v_2}} \right)_v, \left( \overrightarrow{\Psi_{v_2}} \right)_s \right\}$  sistemi ortogonal değildir. Bu vektörlere Gram-Schmidt yöntemi uygulanırsa

$$\left( \overrightarrow{\Psi_{v_2}} \right)_v = \left( \overrightarrow{X_{v_2}} \right)_1(s),$$

$$\left( \overrightarrow{\Psi_{v_2}} \right)_s = \left( \overrightarrow{X_{v_2}} \right)_2(s)$$

olmak üzere,

$$\left( \overrightarrow{Y_{v_2}} \right)_1(s) = \left( \overrightarrow{X_{v_2}} \right)_1(s) = \overrightarrow{v_2}(s), \quad (4.90)$$

$$\left( \overrightarrow{Y_{v_2}} \right)_2(s) = - \frac{\left\langle \left( \overrightarrow{Y_{v_2}} \right)_1(s), \left( \overrightarrow{X_{v_2}} \right)_2(s) \right\rangle}{\left\langle \left( \overrightarrow{Y_{v_2}} \right)_1(s), \left( \overrightarrow{Y_{v_2}} \right)_1(s) \right\rangle} \left( \overrightarrow{Y_{v_2}} \right)_1(s) + \left( \overrightarrow{X_{v_2}} \right)_2(s)$$

$$= -\overline{k_1}(s) \left\langle \overrightarrow{v_1}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \right\rangle \overrightarrow{v_2}(s) + \overline{k_2}(s) \left\langle \overrightarrow{v_3}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \right\rangle \overrightarrow{v_2}(s)$$

$$+ \left( 1 - \overline{k_1}(s) + \overline{k_1}(s) \left\langle \overrightarrow{v_2}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \right\rangle \right) \overrightarrow{v_1}(s)$$

$$+ \left( \overline{k_1}(s) \left\langle \overrightarrow{v_1}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \right\rangle - \overline{k_2}(s) \left\langle \overrightarrow{v_3}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \right\rangle \right) \overrightarrow{v_2}(s)$$

$$+ \left( \overline{k_2}(s) - \overline{k_2}(s) \left\langle \overrightarrow{v_2}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \right\rangle \right) \overrightarrow{v_3}(s),$$

$$\left( \overrightarrow{Y_{v_2}} \right)_2(s) = \left( 1 - \overline{k_1}(s) + \overline{k_1}(s) \left\langle \overrightarrow{v_2}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \right\rangle \right) \overrightarrow{v_1}(s)$$

(4.91)

$$+ \left( \overline{k_2}(s) - \overline{k_2}(s) \left\langle \overrightarrow{v_2}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \right\rangle \right) \overrightarrow{v_3}(s)$$

bulunur. (4.90) ve (4.91) vektörleri birim hale getirilirse

$$\overrightarrow{(E_{V_2})_1}(s) = \frac{\overrightarrow{(Y_{V_2})_1}(s)}{\|\overrightarrow{(Y_{V_2})_1}(s)\|} = \overrightarrow{v_2}(s), \quad (4.92)$$

$$\overrightarrow{(E_{V_2})_2}(s) = \frac{\overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s)}{\|\overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s)\|},$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(E_{V_2})_2}(s) &= \frac{\left(1 - \nu \overline{k_1}(s) + \overline{k_1}(s) \langle \overrightarrow{v_2}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle\right) \overrightarrow{v_1}(s)}{\|\overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s)\|} \\ &\quad + \frac{\left(\nu \overline{k_2}(s) - \overline{k_2}(s) \langle \overrightarrow{v_2}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle\right) \overrightarrow{v_3}(s)}{\|\overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s)\|} \end{aligned} \quad (4.93)$$

elde edilir. Buradan

$$\langle \overrightarrow{(E_{V_2})_1}(s), \overrightarrow{(E_{V_2})_2}(s) \rangle = 0$$

olduğundan  $\left\{ \overrightarrow{(E_{V_2})_1}(s), \overrightarrow{(E_{V_2})_2}(s) \right\}$  bazına göre  $\overrightarrow{\Psi_{V_2}}(s, \nu)$  yüzeyinin şekil

operatörü bulunabilir. Bu yüzeyin normal vektörü  $\overrightarrow{N_{V_2}}(s)$  ile gösterilirse

$$\begin{aligned} \overrightarrow{N_{V_2}}(s) &= \overrightarrow{(E_{V_2})_1}(s) \wedge \overrightarrow{(E_{V_2})_2}(s) \\ &= \frac{\overrightarrow{v_2}(s) \wedge \left(1 - \nu \overline{k_1}(s) + \overline{k_1}(s) \langle \overrightarrow{v_2}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle\right) \overrightarrow{v_1}(s)}{\|\overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s)\|} \\ &\quad + \frac{\overrightarrow{v_2}(s) \wedge \left(\nu \overline{k_2}(s) - \overline{k_2}(s) \langle \overrightarrow{v_2}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle\right) \overrightarrow{v_3}(s)}{\|\overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s)\|}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{N}_{V_2}(s) = & -\frac{\left(1 - \nu \overline{k}_1(s) + \overline{k}_1(s) \langle \overrightarrow{v}_2(s), \overline{\beta}(s) \rangle\right) \overrightarrow{v}_3(s)}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s) \right\|} \\ & + \frac{\left(\nu \overline{k}_2(s) - \overline{k}_2(s) \langle \overrightarrow{v}_2(s), \overline{\beta}(s) \rangle\right) \overrightarrow{v}_1(s)}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s) \right\|} \end{aligned} \quad (4.94)$$

olur.  $\overrightarrow{\Psi}_{V_2}(s, \nu)$  yüzeyinin şekil operatörü  $\overrightarrow{S}_{V_2}(s)$  ve Gauss eğriliği  $\overline{K}_{V_2}(s)$  ile gösterilirse (2.26) bağıntısından

$$\overline{K}_{V_2}(s) = \det \overrightarrow{S}_{V_2}(s) = -\left( \left\langle \overrightarrow{S}_{V_2} \left( \overrightarrow{(E_{V_2})_2}(s) \right), \overrightarrow{(E_{V_2})_1}(s) \right\rangle \right)^2 \quad (4.95)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned} \overrightarrow{S}_{V_2} \left( \overrightarrow{(E_{V_2})_2}(s) \right) &= D_{(E_{V_2})_2} \overrightarrow{N}_{V_2}(s) \\ &= \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s) \right\|} D_{(Y_{V_2})_2} \overrightarrow{N}_{V_2}(s) \\ &= \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s) \right\|} \frac{d \overrightarrow{N}_{V_2}(s)}{d \bar{s}} \frac{d \bar{s}}{ds} \\ &= -\frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s) \right\|^2} \frac{d \bar{s}}{ds} \left( 1 - \nu \overline{k}_1(s) + \overline{k}_1(s) \langle \overrightarrow{v}_2(s), \overline{\beta}(s) \rangle \right)' \overrightarrow{v}_3(s) \\ &\quad + \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s) \right\|^2} \frac{d \bar{s}}{ds} \left( 1 - \nu \overline{k}_1(s) + \overline{k}_1(s) \langle \overrightarrow{v}_2(s), \overline{\beta}(s) \rangle \right) \overline{k}_2(s) \overrightarrow{v}_2(s) \\ &\quad + \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s) \right\|^2} \frac{d \bar{s}}{ds} \left( \nu \overline{k}_2(s) - \overline{k}_2(s) \langle \overrightarrow{v}_2(s), \overline{\beta}(s) \rangle \right)' \overrightarrow{v}_1(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s) \right\|^2} \frac{d\bar{s}}{ds} \left( v\bar{k}_2(s) - \bar{k}_2(s) \langle \overrightarrow{v_2}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \right) \bar{k}_1(s) \overrightarrow{v_2}(s) \\
& - \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s) \right\| \left\| \overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s) \right\|} \frac{d\bar{s}}{ds} \left( 1 - v\bar{k}_1(s) + \bar{k}_1(s) \langle \overrightarrow{v_2}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \right) \overrightarrow{v_3}(s) \\
& + \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s) \right\| \left\| \overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s) \right\|} \frac{d\bar{s}}{ds} \left( v\bar{k}_2(s) - \bar{k}_2(s) \langle \overrightarrow{v_2}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \right) \overrightarrow{v_1}(s)
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade ve (4.92) bağıntısı (4.95) da yerine yazılırsa yüzeyin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}
\bar{K}_{V_2}(s) &= - \left( \begin{aligned} & \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s) \right\|^2} \frac{d\bar{s}}{ds} \left( \bar{k}_2(s) - v\bar{k}_1(s) \bar{k}_2(s) + \bar{k}_1(s) \bar{k}_2(s) \langle \overrightarrow{v_2}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \right) \\ & + \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s) \right\|^2} \frac{d\bar{s}}{ds} \left( v\bar{k}_1(s) \bar{k}_2(s) - \bar{k}_1(s) \bar{k}_2(s) \langle \overrightarrow{v_2}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \right) \end{aligned} \right)^2, \\
\bar{K}_{V_2}(s) &= - \left( \frac{\bar{k}_2(s)}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s) \right\|^2} \frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 \tag{4.96}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Sonuç 4.1.2 den

$$\bar{K}_{V_2}(s) = - \left( \frac{\bar{k}_2(s)}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s) \right\|^2} \right)^2$$

olur. (4.96) ifadesinin paydası (4.16), (4.18) ve (4.20) bağıntılarından

$$\begin{aligned}
\left\| \overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s) \right\|^2 &= \left( 1 - vk_1(s) + \bar{k}_1(s) \langle \overrightarrow{v_2}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \right)^2 \\
&\quad + \left( vk_2(s) - \bar{k}_2(s) \langle \overrightarrow{v_2}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \right)^2 \\
&= \left( \frac{d\bar{s}}{ds} - vk_1(s) + k_1(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right)^2 \left( \frac{ds}{d\bar{s}} \right)^2 \\
&\quad + \left( vk_2(s) - k_2(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right)^2 \left( \frac{ds}{d\bar{s}} \right)^2
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu ifadenin her iki yanını  $\left( \frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2$  ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\left\| \overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s) \right\|^2 \left( \frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 &= \left( \frac{d\bar{s}}{ds} - vk_1(s) + k_1(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right)^2 \\
&\quad + \left( vk_2(s) - k_2(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right)^2
\end{aligned} \tag{4.97}$$

olur. Ayrıca (4.84) bağıntısından

$$\begin{aligned}
\left\| \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) \right\|^2 &= \left( 1 - vk_1(s) + k_1(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right)^2 \\
&\quad + \left( vk_2(s) - k_2(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right)^2
\end{aligned} \tag{4.98}$$

yazılır. (4.98) ifadesi (4.97) de yerine yazılır ve ifade açılırsa

$$\begin{aligned}
\left\| \overrightarrow{(Y_{V_2})_2}(s) \right\|^2 \left( \frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 &= \left( \frac{d\bar{s}}{ds} - vk_1(s) + k_1(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right)^2 \\
&\quad + \left\| \overrightarrow{(Y_{U_2})_2}(s) \right\|^2 - \left( 1 - vk_1(s) + k_1(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\| \overrightarrow{(Y_{v_2})_2}(s) \right\|^2 \left( \frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 &= \left\| \overrightarrow{(Y_{u_2})_2}(s) \right\|^2 - 1 + 2vk_1(s) - 2k_1(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \\
&+ \left( \frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 - 2vk_1(s) \frac{d\bar{s}}{ds} + 2k_1(s) \frac{d\bar{s}}{ds} \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \\
&= \left\| \overrightarrow{(Y_{u_2})_2}(s) \right\|^2 + \left( \left( \frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 - 1 \right) - 2vk_1(s) \left( \frac{d\bar{s}}{ds} - 1 \right) \\
&+ 2k_1(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \left( \frac{d\bar{s}}{ds} - 1 \right),
\end{aligned}$$

$$\left\| \overrightarrow{(Y_{v_2})_2}(s) \right\|^2 \left( \frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 = \left\| \overrightarrow{(Y_{u_2})_2}(s) \right\|^2 + \left( \frac{d\bar{s}}{ds} - 1 \right) \left( \left( \frac{d\bar{s}}{ds} + 1 \right) + 2k_1(s) \left( -v + \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right) \right)$$

(4.99)

bulunur. (4.20) ve (4.99) bağıntıları (4.96) bağıntısında yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{K}_{v_2}(s) &= - \left( \frac{k_2(s) \frac{ds}{d\bar{s}}}{\left\| \overrightarrow{(Y_{u_2})_2}(s) \right\|^2 + \left( \frac{d\bar{s}}{ds} - 1 \right) \left( \left( \frac{d\bar{s}}{ds} + 1 \right) + 2k_1(s) \left( -v + \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right) \right)} \frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 \\
&= - \left( \frac{k_2(s)}{\left\| \overrightarrow{(Y_{u_2})_2}(s) \right\|^2 + \left( \frac{d\bar{s}}{ds} - 1 \right) \left( \left( \frac{d\bar{s}}{ds} + 1 \right) + 2k_1(s) \left( -v + \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \right) \right)} \right)^2 \left( \frac{d\bar{s}}{ds} \right)^4
\end{aligned}$$

olur. Ve son olarak (4.87) bağıntısından



$$\bar{K}_{v_2}(s) = - \left( \frac{k_2(s)}{-\frac{k_2(s)}{\sqrt{-\bar{K}_{u_2}(s)}} + \left(\frac{d\bar{s}}{ds} - 1\right) \left( \left(\frac{d\bar{s}}{ds} + 1\right) + 2k_1(s) \left( -v + \langle \bar{u}_2(s), \bar{\alpha}(s) \rangle \right) \right)} \right)^2 \left( \frac{d\bar{s}}{ds} \right)^4 \quad (4.100)$$

elde edilir. Sonuç 4.1.2 den

$$\bar{K}_{v_2}(s) = - \left( -\sqrt{-\bar{K}_{u_2}(s)} \right)^2 = \bar{K}_{u_2}(s)$$

olur. Böylece şu teorem verilebilir:

**Teorem 4.3.2:**  $ID$ –Modülde  $(\bar{T})$  ve  $(\bar{\bar{T}})$  dual eğrilerine çizgiler uzayında karşılık gelen  $\bar{\Psi}(s, v)$  ve  $\bar{\bar{\Psi}}(s, v)$  dual paralel equidistant regle yüzeylerinin  $\bar{U}_2(s)$  ve  $\bar{V}_2(s)$  birim dual asli normal vektörlerinin birim dual küre üzerinde çizdiği küresel göstergelere Öklid uzayında karşılık gelen regle yüzeylerin Gauss eğrilikleri sırasıyla  $\bar{K}_{u_2}(s)$  ve  $\bar{K}_{v_2}(s)$  ile gösterilirse, bu eğrilikler arasında aşağıdaki bağıntı vardır:

$$\bar{K}_{v_2}(s) = \bar{K}_{u_2}(s).$$

**Sonuç 4.3.2:**  $ID$ –Modülde  $(\bar{T})$  ve  $(\bar{\bar{T}})$  dual eğrilerine çizgiler uzayında karşılık gelen  $\bar{\Psi}(s, v)$  ve  $\bar{\bar{\Psi}}(s, v)$  dual paralel equidistant regle yüzeylerinin  $\bar{U}_2(s)$  ve  $\bar{V}_2(s)$  birim dual asli normal vektörlerinin birim dual küre üzerinde çizdiği küresel göstergelere Öklid uzayında karşılık gelen regle yüzeyler açılabilirdir  $\Leftrightarrow \bar{k}_2(s) = \bar{\bar{k}}_2(s) = 0$ .

### 4.3.3. Birim Dual Binormaller Göstergelerine Karşılık Gelen Regle Yüzeylerin Gauss Eğrilikleri

$$\overrightarrow{\Psi}_{U_3}(s, v) = \overrightarrow{u}_3(s) \wedge \overrightarrow{u}_3^*(s) + v\overrightarrow{u}_3(s), \quad \overrightarrow{u}_3^*(s) = \overrightarrow{\alpha}(s) \wedge \overrightarrow{u}_3(s)$$

yüzeyinin  $v$  ve  $s$  ye göre türevleri alınırsa

$$\left(\overrightarrow{\Psi}_{U_3}\right)_v = \overrightarrow{u}_3(s), \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{\Psi}_{U_3}\right)_s &= \overrightarrow{u}_3'(s) \wedge \overrightarrow{u}_3^*(s) + \overrightarrow{u}_3(s) \wedge \overrightarrow{u}_3^{*'}(s) + v\overrightarrow{u}_3'(s) \\ &= -k_2(s)\overrightarrow{u}_2(s) \wedge \overrightarrow{u}_3^*(s) + \overrightarrow{u}_3(s) \wedge \left(-\overrightarrow{u}_2(s) - k_2(s)\overrightarrow{u}_2^*(s)\right) \\ &\quad - vk_2(s)\overrightarrow{u}_2(s) \\ &= -k_2(s)\overrightarrow{u}_2(s) \wedge \left(\overrightarrow{\alpha}(s) \wedge \overrightarrow{u}_3(s)\right) \\ &\quad + \overrightarrow{u}_1(s) - k_2(s)\overrightarrow{u}_3(s) \wedge \left(\overrightarrow{\alpha}(s) \wedge \overrightarrow{u}_2(s)\right) - vk_2(s)\overrightarrow{u}_2(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{\Psi}_{U_3}\right)_s &= \overrightarrow{u}_1(s) + \left(\langle \overrightarrow{u}_3(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle k_2(s) - vk_2(s)\right)\overrightarrow{u}_2(s) \\ &\quad + k_2(s)\langle \overrightarrow{u}_2(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \overrightarrow{u}_3(s) \end{aligned} \quad (4.102)$$

olur. (4.101) ve (4.102) bağıntıları iç çarpıldığında

$$\left\langle \left(\overrightarrow{\Psi}_{U_3}\right)_v, \left(\overrightarrow{\Psi}_{U_3}\right)_s \right\rangle = k_2(s)\langle \overrightarrow{u}_2(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \neq 0$$

olduğundan  $\left\{ \left(\overrightarrow{\Psi}_{U_3}\right)_v, \left(\overrightarrow{\Psi}_{U_3}\right)_s \right\}$  sistemi ortogonal değildir. Bu vektörlere Gram-

Schmidt yöntemi uygulanırsa

$$\left(\overrightarrow{\Psi}_{U_3}\right)_v = \left(\overrightarrow{X}_{U_3}\right)_1(s),$$

$$\left(\overrightarrow{\Psi}_{U_3}\right)_s = \left(\overrightarrow{X}_{U_3}\right)_2(s)$$

olmak üzere,

$$\overrightarrow{(Y_{U_3})_1}(s) = \overrightarrow{(X_{U_3})_1}(s) = \overrightarrow{u_3}(s), \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(Y_{U_3})_2}(s) &= -\frac{\langle \overrightarrow{(Y_{U_3})_1}(s), \overrightarrow{(X_{U_3})_2}(s) \rangle}{\langle \overrightarrow{(Y_{U_3})_1}(s), \overrightarrow{(Y_{U_3})_1}(s) \rangle} \overrightarrow{(Y_{U_3})_1}(s) + \overrightarrow{(X_{U_3})_2}(s) \\ &= \langle \overrightarrow{u_1}(s) + k_2(s) (\langle \overrightarrow{u_3}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle - \nu) \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{u_3}(s) \rangle \overrightarrow{u_3}(s) \\ &\quad + \langle k_2(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \overrightarrow{u_3}(s), \overrightarrow{u_3}(s) \rangle \overrightarrow{u_3}(s) \\ &\quad + \overrightarrow{u_1}(s) + k_2(s) (\langle \overrightarrow{u_3}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle - \nu) \overrightarrow{u_2}(s) \\ &\quad + k_2(s) \langle \overrightarrow{u_2}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \overrightarrow{u_3}(s), \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{(Y_{U_3})_2}(s) = \overrightarrow{u_1}(s) + (\langle \overrightarrow{u_3}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle k_2(s) - \nu k_2(s)) \overrightarrow{u_2}(s) \quad (4.104)$$

bulunur. (4.103) ve (4.104) vektörleri birim hale getirilirse

$$\overrightarrow{(E_{U_3})_1}(s) = \frac{\overrightarrow{(Y_{U_3})_1}(s)}{\|\overrightarrow{(Y_{U_3})_1}(s)\|} = \overrightarrow{u_3}(s), \quad (4.105)$$

$$\overrightarrow{(E_{U_3})_2}(s) = \frac{\overrightarrow{(Y_{U_3})_2}(s)}{\|\overrightarrow{(Y_{U_3})_2}(s)\|},$$

$$\overrightarrow{(E_{U_3})_2}(s) = \frac{\overrightarrow{u_1}(s) + k_2(s) (\langle \overrightarrow{u_3}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle - \nu) \overrightarrow{u_2}(s)}{\|\overrightarrow{(Y_{U_3})_2}(s)\|} \quad (4.106)$$

olur. Buradan

$$\left\langle \overrightarrow{(E_{U_3})_1}(s), \overrightarrow{(E_{U_3})_2}(s) \right\rangle = 0$$

olduğundan  $\left\{ \overrightarrow{(E_{U_3})_1}(s), \overrightarrow{(E_{U_3})_2}(s) \right\}$  bazına göre  $\overrightarrow{\Psi_{U_3}}(s, \nu)$  yüzeyinin şekil operatörü bulunabilir. Yüzeyin normal vektörü  $\overrightarrow{N_{U_3}}(s)$  ile gösterilirse

$$\begin{aligned} \overrightarrow{N_{U_3}}(s) &= \overrightarrow{(E_{U_3})_1} \wedge \overrightarrow{(E_{U_3})_2} \\ &= \frac{\overrightarrow{u_3}(s) \wedge \overrightarrow{u_1}(s) + \left( \langle \overrightarrow{u_3}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle k_2(s) - \nu k_2(s) \right) \overrightarrow{u_3}(s) \wedge \overrightarrow{u_2}(s)}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_3})_2}(s) \right\|} \\ \overrightarrow{N_{U_3}}(s) &= \frac{\left( -\langle \overrightarrow{u_3}(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle k_2(s) + \nu k_2(s) \right) \overrightarrow{u_1}(s) + \overrightarrow{u_2}(s)}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_3})_2}(s) \right\|} \end{aligned} \quad (4.107)$$

olur.  $\overrightarrow{\Psi_{U_3}}(s, \nu)$  yüzeyinin şekil operatörü  $\overrightarrow{S_{U_3}}(s)$  ve Gauss eğriliği  $\overrightarrow{K_{U_3}}(s)$  ile gösterilirse (2.26) bağıntısından

$$\overrightarrow{K_{U_3}}(s) = \det \overrightarrow{S_{U_3}}(s) = - \left( \left\langle \overrightarrow{S_{U_3}} \left( \overrightarrow{(E_{U_3})_2}(s) \right), \overrightarrow{(E_{U_3})_1}(s) \right\rangle \right)^2 \quad (4.108)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned} \overrightarrow{S_{U_3}} \left( \overrightarrow{(E_{U_3})_2}(s) \right) &= D_{(E_{U_3})_2} \overrightarrow{N_{U_3}}(s) \\ &= \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_3})_2}(s) \right\|} D_{(Y_{U_3})_2} \overrightarrow{N_{U_3}}(s) \\ &= \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{U_3})_2}(s) \right\|} \frac{d\overrightarrow{N_{U_3}}(s)}{ds} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(-\langle \vec{u}_3(s), \vec{\alpha}(s) \rangle k_2(s) + \nu k_2(s)\right) \vec{u}_1(s) + \vec{u}_2(s)}{\left\| \left(\overrightarrow{Y_{U_3}}\right)_2(s) \right\| \left\| \left(\overrightarrow{Y_{U_3}}\right)_2(s) \right\|'} \\
&+ \frac{\left(-\langle \vec{u}_3(s), \vec{\alpha}(s) \rangle k_2(s) + \nu k_2(s)\right)' \vec{u}_1(s)}{\left\| \left(\overrightarrow{Y_{U_3}}\right)_2(s) \right\|^2} \\
&+ \frac{\left(-\langle \vec{u}_3(s), \vec{\alpha}(s) \rangle k_2(s) + \nu k_2(s)\right) k_1(s) \vec{u}_2(s)}{\left\| \left(\overrightarrow{Y_{U_3}}\right)_2(s) \right\|^2} \\
&+ \frac{-k_1(s) \vec{u}_1(s) + k_2(s) \vec{u}_3(s)}{\left\| \left(\overrightarrow{Y_{U_3}}\right)_2(s) \right\|^2}
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade ve (4.105) bağıntısı (4.108) de yerine yazılırsa yüzeyin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}
\bar{K}_{U_3}(s) &= - \left( \frac{k_2(s)}{\left\| \left(\overrightarrow{Y_{U_3}}\right)_2(s) \right\|^2} \right), \\
\bar{K}_{U_3}(s) &= - \left( \frac{k_2(s)}{1 + k_2^2(s) \left( \langle \vec{u}_3(s), \vec{\alpha}(s) \rangle - \nu \right)^2} \right)^2 \tag{4.109}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde

$$\vec{\Psi}_{V_3}(s, \nu) = \vec{v}_3(s) \wedge \vec{v}_3^*(s) + \nu \vec{v}_3(s), \quad \vec{v}_3^*(s) = \vec{\beta}(s) \wedge \vec{v}_3(s)$$

yüzeyinin  $\nu$  ve  $s$  ye göre türevleri alınırsa

$$\left( \vec{\Psi}_{V_3} \right)_\nu = \vec{v}_3(s), \tag{4.110}$$

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{\Psi}_{V_3})_s &= \overrightarrow{v_3}'(s) \wedge \overrightarrow{v_3}^*(s) + \overrightarrow{v_3}(s) \wedge \overrightarrow{v_3}'(s) + \nu \overrightarrow{v_3}'(s) \\
&= -\overline{k_2}(s) \overrightarrow{v_2}(s) \wedge \overrightarrow{v_3}^*(s) + \overrightarrow{v_3}(s) \wedge \left( -\overrightarrow{v_2}(s) - \overline{k_2}(s) \overrightarrow{v_2}^*(s) \right) \\
&\quad - \nu \overline{k_2}(s) \overrightarrow{v_2}(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{\Psi}_{V_3})_s &= \overrightarrow{v_1}(s) + \left( \langle \overrightarrow{v_3}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \overline{k_2}(s) - \nu \overline{k_2}(s) \right) \overrightarrow{v_2}(s) \\
&\quad + \overline{k_2}(s) \langle \overrightarrow{v_2}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \overrightarrow{v_3}(s)
\end{aligned} \tag{4.111}$$

olur. (4.110) ve (4.111) bağıntıları iç çarpıldığında

$$\left\langle (\overrightarrow{\Psi}_{V_3})_v, (\overrightarrow{\Psi}_{V_3})_s \right\rangle = \overline{k_2}(s) \langle \overrightarrow{v_2}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \neq 0$$

olduğundan  $\left\{ (\overrightarrow{\Psi}_{V_3})_v, (\overrightarrow{\Psi}_{V_3})_s \right\}$  sistemi ortogonal değildir. Bu vektörlere Gram-Schmidt yöntemi uygulanırsa

$$(\overrightarrow{\Psi}_{V_3})_v = (\overrightarrow{X}_{V_3})_1(s),$$

$$(\overrightarrow{\Psi}_{V_3})_s = (\overrightarrow{X}_{V_3})_2(s)$$

olmak üzere,

$$(\overrightarrow{Y}_{V_3})_1(s) = (\overrightarrow{X}_{V_3})_1(s) = \overrightarrow{v_3}(s), \tag{4.112}$$

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{Y}_{V_3})_2(s) &= -\frac{\left\langle (\overrightarrow{Y}_{V_3})_1(s), (\overrightarrow{X}_{V_3})_2(s) \right\rangle}{\left\langle (\overrightarrow{Y}_{V_3})_1(s), (\overrightarrow{Y}_{V_3})_1(s) \right\rangle} (\overrightarrow{Y}_{V_3})_1(s) + (\overrightarrow{X}_{V_3})_2(s) \\
&= \left\langle \overrightarrow{v_1}(s) + \left( \langle \overrightarrow{v_3}(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \overline{k_2}(s) - \nu \overline{k_2}(s) \right) \overrightarrow{v_2}(s), \overrightarrow{v_3}(s) \right\rangle \overrightarrow{v_3}(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \langle \bar{k}_2(s) \langle \bar{v}_2(s), \bar{\beta}(s) \rangle \bar{v}_3(s), \bar{v}_3(s) \rangle \bar{v}_3(s) \\
& + \bar{v}_1(s) + \bar{k}_2(s) \left( \langle \bar{v}_3(s), \bar{\beta}(s) \rangle - v \right) \bar{v}_2(s) \\
& + k_2(s) \langle \bar{u}_2(s), \bar{\alpha}(s) \rangle \bar{u}_3(s),
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{(Y_{V_3})_2}(s) = \bar{v}_1(s) + \left( \langle \bar{v}_3(s), \bar{\beta}(s) \rangle \bar{k}_2(s) - v \bar{k}_2(s) \right) \bar{v}_2(s) \quad (4.113)$$

bulunur. (4.112) ve (4.113) vektörleri birim hale getirilirse

$$\overrightarrow{(E_{V_3})_1}(s) = \frac{\overrightarrow{(Y_{V_3})_1}(s)}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_3})_1}(s) \right\|} = \bar{v}_3(s), \quad (4.114)$$

$$\overrightarrow{(E_{V_3})_2}(s) = \frac{\overrightarrow{(Y_{V_3})_2}(s)}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_3})_2}(s) \right\|},$$

$$\overrightarrow{(E_{V_3})_2}(s) = \frac{\bar{v}_1(s) + \left( \langle \bar{v}_3(s), \bar{\beta}(s) \rangle \bar{k}_2(s) - v \bar{k}_2(s) \right) \bar{v}_2(s)}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_3})_2}(s) \right\|} \quad (4.115)$$

olur.

$$\left\langle \overrightarrow{(E_{V_3})_1}(s), \overrightarrow{(E_{V_3})_2}(s) \right\rangle = 0$$

olduğundan  $\left\{ \overrightarrow{(E_{V_3})_1}(s), \overrightarrow{(E_{V_3})_2}(s) \right\}$  bazına göre  $\overrightarrow{\Psi_{V_3}}(s, v)$  yüzeyinin şekil

operatörü bulunabilir. Yüzeyin normal vektörü  $\overrightarrow{N_{V_3}}(s)$  ile gösterilirse

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N_{V_3}}(s) &= \overrightarrow{(E_{V_3})_1} \wedge \overrightarrow{(E_{V_3})_2} \\
&= \frac{\bar{v}_3(s) \wedge \bar{v}_1(s) + \left( \langle \bar{v}_3(s), \bar{\beta}(s) \rangle \bar{k}_2(s) - v \bar{k}_2(s) \right) \bar{v}_3(s) \wedge \bar{v}_2(s)}{\left\| \overrightarrow{(Y_{V_3})_2}(s) \right\|}
\end{aligned}$$

$$\overline{N}_{V_3}(s) = \frac{\left(-\langle \overline{v}_3(s), \overline{\beta}(s) \rangle \overline{k}_2(s) + v \overline{k}_2(s)\right) \overline{v}_1(s) + \overline{v}_2(s)}{\left\| \overline{(Y_{V_3})}_2(s) \right\|} \quad (4.116)$$

olur.  $\overline{\Psi}_{V_3}(s, \nu)$  yüzeyinin şekil operatörü  $\overline{S}_{V_3}(s)$  ve Gauss eğriliği  $\overline{K}_{V_3}(s)$  ile gösterilirse (2.26) bağıntısından

$$\overline{K}_{V_3}(s) = \det \overline{S}_{V_3}(s) = - \left( \left\langle \overline{S}_{V_3} \left( \overline{(E_{V_3})}_2(s) \right), \overline{(E_{V_3})}_1(s) \right\rangle \right)^2 \quad (4.117)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned} \overline{S}_{V_3} \left( \overline{(E_{V_3})}_2(s) \right) &= D_{(E_{V_3})_2} \overline{N}_{V_3}(s) \\ &= \frac{1}{\left\| \overline{(Y_{V_3})}_2(s) \right\|} D_{(Y_{V_3})_2} \overline{N}_{V_3}(s) \\ &= \frac{1}{\left\| \overline{(Y_{V_3})}_2(s) \right\|} \frac{d \overline{N}_{V_3}(s)}{d \bar{s}} \frac{d \bar{s}}{ds} \\ &= \frac{\left(-\langle \overline{v}_3(s), \overline{\beta}(s) \rangle \overline{k}_2(s) + v \overline{k}_2(s)\right) \overline{v}_1(s) + \overline{v}_2(s)}{\left\| \overline{(Y_{V_3})}_2(s) \right\| \left\| \overline{(Y_{V_3})}_2(s) \right\|'} \frac{d \bar{s}}{ds} \\ &\quad + \frac{\left(-\langle \overline{v}_3(s), \overline{\beta}(s) \rangle \overline{k}_2(s) + v \overline{k}_2(s)\right)' \overline{v}_1(s)}{\left\| \overline{(Y_{V_3})}_2(s) \right\|^2} \frac{d \bar{s}}{ds} \\ &\quad + \frac{\left(-\langle \overline{v}_3(s), \overline{\beta}(s) \rangle \overline{k}_2(s) + v \overline{k}_2(s)\right) \overline{k}_1(s) \overline{v}_2(s)}{\left\| \overline{(Y_{V_3})}_2(s) \right\|^2} \frac{d \bar{s}}{ds} \\ &\quad + \frac{-\overline{k}_1(s) \overline{v}_1(s) + \overline{k}_2(s) \overline{v}_3(s)}{\left\| \overline{(Y_{V_3})}_2(s) \right\|^2} \frac{d \bar{s}}{ds}, \end{aligned}$$



olur. Bu ifade ve (4.114) bağıntısı (4.117) de yerine yazılırsa yüzeyin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}\bar{K}_{V_3}(s) &= - \left( \frac{\bar{k}_2(s)}{\|(\bar{Y}_{V_3})_2(s)\|^2} \frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2, \\ \bar{K}_{V_3}(s) &= - \left( \frac{\bar{k}_2(s)}{1 + \bar{k}_2^2(s) (\langle \bar{v}_3(s), \bar{\beta}(s) \rangle - \nu)^2} \frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2\end{aligned}\quad (4.118)$$

şeklinde bulunur. Sonuç 4.1.2 den

$$\bar{K}_{V_3}(s) = - \left( \frac{\bar{k}_2(s)}{1 + \bar{k}_2^2(s) (\langle \bar{v}_3(s), \bar{\beta}(s) \rangle - \nu)^2} \right)^2$$

olur. (4.118) ifadesinin paydası (4.17) ve (4.20) bağıntılarından

$$\begin{aligned}\|(\bar{Y}_{V_3})_2(s)\|^2 &= 1 + \bar{k}_2^2(s) (\langle \bar{v}_3(s), \bar{\beta}(s) \rangle - \nu)^2 \\ &= 1 + k_2^2(s) (\langle \bar{u}_3(s), \bar{\alpha}(s) \rangle - \nu)^2 \left( \frac{ds}{d\bar{s}} \right)^2,\end{aligned}$$

$$\|(\bar{Y}_{V_3})_2(s)\|^2 = 1 + \left( \|(\bar{Y}_{U_3})_2(s)\|^2 - 1 \right) \left( \frac{ds}{d\bar{s}} \right)^2 \quad (4.119)$$

şeklinde yazılır. (4.20) ve (4.119) bağıntıları (4.118) de yerine yazılırsa

$$\bar{K}_{V_3}(s) = - \left( \frac{k_2(s) \frac{ds}{d\bar{s}}}{1 + \left( \|(\bar{Y}_{U_3})_2(s)\|^2 - 1 \right) \left( \frac{ds}{d\bar{s}} \right)^2} \frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2$$

olur. (4.109) bağıntısı burada yerine yazılırsa, Gauss eğriliği

$$\bar{K}_{V_3}(s) = - \left( \frac{k_2(s)}{1 + \left( \frac{k_2(s)}{\sqrt{-K_{U_3}(s)}} - 1 \right) \left( \frac{ds}{ds} \right)^2} \right)^2 \quad (4.120)$$

şeklinde bulunur. Sonuç 4.1.2 den

$$\bar{K}_{V_3}(s) = - \left( \sqrt{-K_{U_3}(s)} \right)^2 = K_{U_3}(s)$$

olur. Böylece şu teorem verilebilir:

**Teorem 4.3.3:**  $ID$  – Modülde  $(\vec{T})$  ve  $(\vec{\bar{T}})$  dual eğrilerine çizgiler uzayında karşılık gelen  $\vec{\Psi}(s, \nu)$  ve  $\vec{\bar{\Psi}}(s, \nu)$  dual paralel equidistant regle yüzeylerinin  $\vec{U}_3(s)$  ve  $\vec{V}_3(s)$  birim dual binormal vektörlerinin birim dual küre üzerinde çizdiği küresel göstergelere Öklid uzayında karşılık gelen regle yüzeylerin Gauss eğrilikleri sırasıyla  $\bar{K}_{U_3}(s)$  ve  $\bar{K}_{V_3}(s)$  ile gösterilirse, bu eğrilikler arasında

$$\bar{K}_{V_3}(s) = K_{U_3}(s)$$

bağıntısı vardır.

**Sonuç 4.3.3:**  $ID$  – Modülde  $\vec{\Psi}(s, \nu)$  ve  $\vec{\bar{\Psi}}(s, \nu)$  dual paralel equidistant regle yüzeylerinin  $\vec{U}_3(s)$  ve  $\vec{V}_3(s)$  birim dual binormal vektörlerinin birim dual küre üzerinde çizdiği küresel göstergelere Öklid uzayında karşılık gelen regle yüzeyler açılabilir  $\Leftrightarrow \bar{k}_2(s) = k_2(s)$ .

#### 4.3.4. Birim Dual Pol Göstergelerine Karşılık Gelen Regle Yüzeylerin Gauss Eğrilikleri

$$\overrightarrow{\Psi}_C(s, v) = \vec{c}(s) \wedge \vec{c}^*(s) + v\vec{c}(s), \quad \vec{c}^*(s) = \vec{\alpha}(s) \wedge \vec{c}(s)$$

yüzeyinin  $v$  ve  $s$  ye göre türevleri alınır

$$\left(\overrightarrow{\Psi}_C\right)_v = \vec{c}(s), \quad (4.121)$$

$$\left(\overrightarrow{\Psi}_C\right)_s = \vec{c}'(s) \wedge \vec{c}^*(s) + \vec{c}(s) \wedge \vec{c}^{*'}(s) + v\vec{c}'(s)$$

olur. (4.38) bağıntısından türev alınır

$$\begin{aligned} \vec{c}'(s) &= \cos \Theta \vec{u}_1(s) + \sin \Theta k_1(s) \vec{u}_2(s) - \sin \Theta \vec{u}_3(s) - \cos \Theta k_2(s) \vec{u}_2(s) \\ &= \cos \Theta \vec{u}_1(s) - \sin \Theta \vec{u}_3(s) + (\sin \Theta k_1(s) - \cos \Theta k_2(s)) \vec{u}_2(s) \\ &= \cos \Theta \vec{u}_1(s) - \sin \Theta \vec{u}_3(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{c}^{*'}(s) &= \cos \Theta \vec{u}_1^*(s) + \sin \Theta \vec{u}_1^{*'}(s) - \sin \Theta \vec{u}_3^*(s) + \cos \Theta \vec{u}_3^{*'}(s) \\ &= \cos \Theta \vec{u}_1^*(s) + \sin \Theta k_1(s) \vec{u}_2^*(s) - \sin \Theta \vec{u}_3^*(s) \\ &\quad + \cos \Theta (-\vec{u}_2(s) - k_2(s) \vec{u}_2^*(s)) \\ &= \cos \Theta \vec{u}_1^*(s) - \sin \Theta \vec{u}_3^*(s) - \cos \Theta \vec{u}_2(s) \end{aligned}$$

olur. Bu türev vektörleri  $\left(\overrightarrow{\Psi}_C\right)_s$  ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
(\overline{\Psi}_c)_s &= \vec{c}'(s) \wedge \vec{c}^*(s) + \vec{c}(s) \wedge \vec{c}'^*(s) + v \vec{c}'(s) \\
&= (\cos \Theta \vec{u}_1(s) - \sin \Theta \vec{u}_3(s)) \wedge (\sin \Theta \vec{u}_1^*(s) + \cos \Theta \vec{u}_3^*(s)) \\
&\quad + (\sin \Theta \vec{u}_1(s) + \cos \Theta \vec{u}_3(s)) \wedge (\cos \Theta \vec{u}_1^*(s) - \sin \Theta \vec{u}_3^*(s) - \cos \Theta \vec{u}_2(s)) \\
&\quad + v (\cos \Theta \vec{u}_1(s) - \sin \Theta \vec{u}_3(s)) \\
&= \cos \Theta \sin \Theta \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_1^*(s) + \cos^2 \Theta \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_3^*(s) \\
&\quad + \sin^2 \Theta \vec{u}_1^*(s) \wedge \vec{u}_3(s) - \cos \Theta \sin \Theta \vec{u}_3(s) \wedge \vec{u}_3^*(s) \\
&\quad + \cos \Theta \sin \Theta \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_1^*(s) - \sin^2 \Theta \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_3^*(s) \\
&\quad - \cos \Theta \sin \Theta \vec{u}_1(s) \wedge \vec{u}_2(s) - \cos^2 \Theta \vec{u}_1^*(s) \wedge \vec{u}_3(s) \\
&\quad - \cos \Theta \sin \Theta \vec{u}_3(s) \wedge \vec{u}_3^*(s) - \cos^2 \Theta \vec{u}_3(s) \wedge \vec{u}_2(s) \\
&\quad + v (\cos \Theta \vec{u}_1(s) - \sin \Theta \vec{u}_3(s)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\overline{\Psi}_c)_s &= (\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta) \left( -\langle \vec{u}_1(s), \vec{\alpha}(s) \rangle \vec{u}_3(s) - \langle \vec{u}_3(s), \vec{\alpha}(s) \rangle \vec{u}_1(s) \right) \\
&\quad + 2 \cos \Theta \sin \Theta \left( -\langle \vec{u}_1(s), \vec{\alpha}(s) \rangle \vec{u}_1(s) - \langle \vec{u}_3(s), \vec{\alpha}(s) \rangle \vec{u}_3(s) \right) \quad (4.122) \\
&\quad + (\cos^2 \Theta + v \cos \Theta) \vec{u}_1(s) - (\cos \Theta \sin \Theta + v \sin \Theta) \vec{u}_3(s)
\end{aligned}$$

olur. (4.121) ve (4.122) bağıntıları iç çarpıldığında

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\overline{\Psi_c}\right)_v, \left(\overline{\Psi_c}\right)_s \right\rangle &= -(\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta) \left\langle \overline{u_1}(s), \overline{\alpha}(s) \right\rangle \left\langle \overline{u_3}(s), \overline{c}(s) \right\rangle \\
&\quad - (\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta) \left\langle \overline{u_3}(s), \overline{\alpha}(s) \right\rangle \left\langle \overline{u_1}(s), \overline{c}(s) \right\rangle \\
&\quad - 2 \cos \Theta \sin \Theta \left\langle \overline{u_1}(s), \overline{\alpha}(s) \right\rangle \left\langle \overline{u_1}(s), \overline{c}(s) \right\rangle \\
&\quad - 2 \cos \Theta \sin \Theta \left\langle \overline{u_3}(s), \overline{\alpha}(s) \right\rangle \left\langle \overline{u_3}(s), \overline{c}(s) \right\rangle \\
&\quad + (\cos^2 \Theta + \nu \cos \Theta) \left\langle \overline{u_1}(s), \overline{c}(s) \right\rangle \\
&\quad - (\cos \Theta \sin \Theta + \nu \sin \Theta) \left\langle \overline{u_3}(s), \overline{c}(s) \right\rangle \\
&= (-\cos^3 \Theta + \cos \Theta \sin^2 \Theta) \left\langle \overline{u_1}(s), \overline{\alpha}(s) \right\rangle \\
&\quad + (-\cos^2 \Theta \sin \Theta + \sin^3 \Theta) \left\langle \overline{u_3}(s), \overline{\alpha}(s) \right\rangle \\
&\quad - 2 \cos \Theta \sin^2 \Theta \left\langle \overline{u_1}(s), \overline{\alpha}(s) \right\rangle \\
&\quad - 2 \cos^2 \Theta \sin \Theta \left\langle \overline{u_3}(s), \overline{\alpha}(s) \right\rangle,
\end{aligned}$$

$$\left\langle \left(\overline{\Psi_c}\right)_v, \left(\overline{\Psi_c}\right)_s \right\rangle = -\cos \Theta \left\langle \overline{u_1}(s), \overline{\alpha}(s) \right\rangle + (-3 \cos^2 \Theta \sin \Theta + \sin^3 \Theta) \left\langle \overline{u_3}(s), \overline{\alpha}(s) \right\rangle$$

bulunur.  $\left\langle \left(\overline{\Psi_c}\right)_v, \left(\overline{\Psi_c}\right)_s \right\rangle \neq 0$  olduğundan  $\left\{ \left(\overline{\Psi_c}\right)_v, \left(\overline{\Psi_c}\right)_s \right\}$  sistemi ortogonal değildir. Bu vektörlere Gram-Schmidt yöntemi uygulanırsa

$$\left(\overline{\Psi_c}\right)_v = \overline{X_{C_1}}(s),$$

$$\left(\overline{\Psi_c}\right)_s = \overline{X_{C_2}}(s)$$

olmak üzere,

$$\overline{Y_{C_1}}(s) = \overline{X_{C_1}}(s) = \overline{c}(s), \tag{4.123}$$

$$\overline{Y}_{C_2}(s) = -\frac{\langle \overline{Y}_{C_1}(s), \overline{X}_{C_2}(s) \rangle}{\langle \overline{Y}_{C_1}(s), \overline{Y}_{C_1}(s) \rangle} \overline{Y}_{C_1}(s) + \overline{X}_{C_2}(s),$$

$$\begin{aligned} \overline{Y}_{C_2}(s) &= \cos \Theta \sin \Theta \langle \overline{u}_1(s), \overline{\alpha}(s) \rangle \overline{u}_1(s) \\ &\quad - (-3 \cos^2 \Theta \sin^2 \Theta + \sin^4 \Theta) \langle \overline{u}_3(s), \overline{\alpha}(s) \rangle \overline{u}_1(s) \\ &\quad + (\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta) \left( -\langle \overline{u}_1(s), \overline{\alpha}(s) \rangle \overline{u}_3(s) - \langle \overline{u}_3(s), \overline{\alpha}(s) \rangle \overline{u}_1(s) \right) \\ &\quad + 2 \cos \Theta \sin \Theta \left( -\langle \overline{u}_1(s), \overline{\alpha}(s) \rangle \overline{u}_1(s) - \langle \overline{u}_3(s), \overline{\alpha}(s) \rangle \overline{u}_3(s) \right) \\ &\quad + (\cos^2 \Theta + \nu \cos \Theta) \overline{u}_1(s) - (\cos \Theta \sin \Theta + \nu \sin \Theta) \overline{u}_3(s) \\ &\quad + \cos^2 \Theta \langle \overline{u}_1(s), \overline{\alpha}(s) \rangle \overline{u}_3(s) \\ &\quad - (-3 \cos^3 \Theta \sin \Theta + \cos \Theta \sin^3 \Theta) \langle \overline{u}_3(s), \overline{\alpha}(s) \rangle \overline{u}_3(s) \end{aligned}$$

olur. Bu ifadede

$$\begin{aligned} F &= \cos \Theta \sin \Theta \langle \overline{u}_1(s), \overline{\alpha}(s) \rangle - (-3 \cos^2 \Theta \sin^2 \Theta + \sin^4 \Theta) \langle \overline{u}_3(s), \overline{\alpha}(s) \rangle \\ &\quad - (\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta) \langle \overline{u}_3(s), \overline{\alpha}(s) \rangle \\ &\quad - 2 \cos \Theta \sin \Theta \langle \overline{u}_1(s), \overline{\alpha}(s) \rangle + (\cos^2 \Theta + \nu \cos \Theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= -(\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta) \langle \overline{u}_1(s), \overline{\alpha}(s) \rangle - 2 \cos \Theta \sin \Theta \langle \overline{u}_3(s), \overline{\alpha}(s) \rangle \\ &\quad - (\cos \Theta \sin \Theta + \nu \sin \Theta) + \cos^2 \Theta \langle \overline{u}_1(s), \overline{\alpha}(s) \rangle \\ &\quad - (-3 \cos^3 \Theta \sin \Theta + \cos \Theta \sin^3 \Theta) \langle \overline{u}_3(s), \overline{\alpha}(s) \rangle \end{aligned}$$

alınırsa,  $\vec{Y}_{C_2}(s)$  vektörü

$$\vec{Y}_{C_2}(s) = F\vec{u}_1(s) + H\vec{u}_3(s) \quad (4.124)$$

şeklinde yazılır. (4.123) ve (4.124) vektörleri birim hale getirilirse

$$\vec{E}_{C_1}(s) = \frac{\vec{Y}_{C_1}(s)}{\|\vec{Y}_{C_1}(s)\|} = \vec{c}(s) = \sin \Theta \vec{u}_1(s) + \cos \Theta \vec{u}_3(s) , \quad (4.125)$$

$$\vec{E}_{C_2}(s) = \frac{\vec{Y}_{C_2}(s)}{\|\vec{Y}_{C_2}(s)\|} = \frac{F\vec{u}_1(s) + H\vec{u}_3(s)}{\sqrt{F^2 + H^2}} \quad (4.126)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_{C_1}(s), \vec{E}_{C_2}(s) \rangle &= \frac{F \sin \Theta + H \cos \Theta}{\sqrt{F^2 + H^2}} \\ &= \cos \Theta \sin^2 \Theta \langle \vec{u}_1(s), \vec{\alpha}(s) \rangle \\ &\quad - \sin^3 \Theta (-3 \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta) \langle \vec{u}_3(s), \vec{\alpha}(s) \rangle \\ &\quad - (\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta) \sin \Theta \langle \vec{u}_3(s), \vec{\alpha}(s) \rangle \\ &\quad - 2 \cos \Theta \sin^2 \Theta \langle \vec{u}_1(s), \vec{\alpha}(s) \rangle + (\cos \Theta + \nu) \cos \Theta \sin \Theta \\ &\quad - (\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta) \cos \Theta \langle \vec{u}_1(s), \vec{\alpha}(s) \rangle \\ &\quad - 2 \cos^2 \Theta \sin \Theta \langle \vec{u}_3(s), \vec{\alpha}(s) \rangle \\ &\quad - \cos \Theta \sin \Theta (\cos \Theta + \nu) + \cos^3 \Theta \langle \vec{u}_1(s), \vec{\alpha}(s) \rangle \\ &\quad - \cos^2 \Theta \sin \Theta (-3 \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta) \langle \vec{u}_3(s), \vec{\alpha}(s) \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{E}_{C_1}(s), \overrightarrow{E}_{C_2}(s) \rangle &= \cos \Theta \sin^2 \Theta \langle \overrightarrow{u}_1(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \\
&+ 3 \cos^2 \Theta \sin \Theta \langle \overrightarrow{u}_3(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle - \sin^3 \Theta \langle \overrightarrow{u}_3(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \\
&- \cos^2 \Theta \sin \Theta \langle \overrightarrow{u}_3(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle + \sin^3 \Theta \langle \overrightarrow{u}_3(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \\
&- 2 \cos \Theta \sin^2 \Theta \langle \overrightarrow{u}_1(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \\
&- \cos^3 \Theta \langle \overrightarrow{u}_1(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle + \cos \Theta \sin^2 \Theta \langle \overrightarrow{u}_1(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \\
&- 2 \cos^2 \Theta \sin \Theta \langle \overrightarrow{u}_3(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle \\
&+ \cos^3 \Theta \langle \overrightarrow{u}_1(s), \overrightarrow{\alpha}(s) \rangle,
\end{aligned}$$

$$\langle \overrightarrow{E}_{C_1}(s), \overrightarrow{E}_{C_2}(s) \rangle = 0$$

bulunur. O halde  $\overrightarrow{\Psi}_C(s, v)$  yüzeyinin normal vektörü  $\overrightarrow{N}_C(s)$  ile gösterilirse

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N}_C(s) &= \overrightarrow{E}_{C_1}(s) \wedge \overrightarrow{E}_{C_2}(s) \\
&= \vec{c}(s) \wedge \frac{F \overrightarrow{u}_1(s) + H \overrightarrow{u}_3(s)}{\sqrt{F^2 + H^2}} \\
&= \frac{F \cos \Theta \overrightarrow{u}_3(s) \wedge \overrightarrow{u}_1(s) + H \sin \Theta \overrightarrow{u}_1(s) \wedge \overrightarrow{u}_3(s)}{\sqrt{F^2 + H^2}},
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{N}_C(s) = \frac{(F \cos \Theta - H \sin \Theta)}{\sqrt{F^2 + H^2}} \overrightarrow{u}_2(s) \quad (4.127)$$

olur.  $\overrightarrow{\Psi}_C(s, v)$  yüzeyinin şekil operatörü  $\overrightarrow{S}_C(s)$  ve Gauss eğriliği  $\overrightarrow{K}_C(s)$  ile gösterilirse (2.26) bağıntısından



$$\bar{K}_C(s) = \det \bar{S}_C(s) = -\left(\left\langle \bar{S}_C(\bar{E}_{C_2}(s)), \bar{E}_{C_1}(s) \right\rangle\right)^2 \quad (4.128)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned} \bar{S}_C(\bar{E}_{C_2}(s)) &= D_{(E_C)_2} \bar{N}_C(s) \\ &= \frac{1}{\|(\bar{Y}_C)_2(s)\|} D_{(Y_C)_2} \bar{N}_{U_3}(s) \\ &= \frac{1}{\|(\bar{Y}_{C_2}(s))\|} \frac{d\bar{N}_C(s)}{ds} \\ &= \frac{1}{\|(\bar{Y}_{C_2}(s))\|} \left( \frac{(F \cos \Theta - H \sin \Theta)}{\sqrt{F^2 + H^2}} \right)' \bar{u}_2(s) \\ &\quad + \frac{1}{\|(\bar{Y}_{C_2}(s))\|} \frac{(F \cos \Theta - H \sin \Theta)}{\sqrt{F^2 + H^2}} \bar{u}_2'(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_C(\bar{E}_{C_2}(s)) &= -\frac{(F \cos \Theta - H \sin \Theta) k_1(s)}{F^2 + H^2} \bar{u}_1(s) \\ &\quad + \left( \frac{(F \cos \Theta - H \sin \Theta)}{F^2 + H^2} \right)' \bar{u}_2(s) \\ &\quad + \frac{(F \cos \Theta - H \sin \Theta) k_2(s)}{F^2 + H^2} \bar{u}_3(s) \end{aligned}$$

olur. Bu ifade ve (4.125) ifadei (4.129) da yerine yazılırsa yüzeyin Gauss eğriliği

$$\bar{K}_c(s) = - \left( \frac{-(F \cos \Theta - H \sin \Theta) \sin \Theta k_1(s) + (F \cos \Theta - H \sin \Theta) \cos \Theta k_2(s)}{F^2 + H^2} \right)^2 \quad (4.129)$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde

$$\overrightarrow{\Psi}_{\bar{c}}(s, v) = \bar{c}(s) \wedge \bar{c}^*(s) + v \bar{c}(s), \quad \bar{c}^*(s) = \bar{\beta}(s) \wedge \bar{c}(s)$$

yüzeyinin  $v$  ve  $s$  ye göre türevleri alınır

$$\left( \overrightarrow{\Psi}_{\bar{c}} \right)_v = \bar{c}(s), \quad (4.130)$$

$$\left( \overrightarrow{\Psi}_{\bar{c}} \right)_s = \bar{c}'(s) \wedge \bar{c}^*(s) + \bar{c}(s) \wedge \bar{c}'^*(s) + v \bar{c}'(s)$$

olur. (4.39) bağıntısından türev alınır

$$\begin{aligned} \bar{c}'(s) &= \cos \bar{\Theta} \bar{v}_1(s) + \sin \bar{\Theta} k_1(s) \bar{v}_2(s) - \sin \bar{\Theta} \bar{v}_3(s) - \cos \bar{\Theta} k_2(s) \bar{v}_2(s) \\ &= \cos \bar{\Theta} \bar{v}_1(s) - \sin \bar{\Theta} \bar{v}_3(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{c}'^*(s) &= \cos \bar{\Theta} \bar{v}_1^*(s) + \sin \bar{\Theta} \bar{v}_1'^*(s) - \sin \bar{\Theta} \bar{v}_3^*(s) + \cos \bar{\Theta} \bar{v}_3'^*(s) \\ &= \cos \bar{\Theta} \bar{v}_1^*(s) - \sin \bar{\Theta} \bar{v}_3^*(s) - \cos \bar{\Theta} \bar{v}_2(s) \end{aligned}$$

olur. Bu türev vektörleri  $\left( \overrightarrow{\Psi}_{\bar{c}} \right)_s$  ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left( \overrightarrow{\Psi}_{\bar{c}} \right)_s &= \bar{c}'(s) \wedge \bar{c}^*(s) + \bar{c}(s) \wedge \bar{c}'^*(s) + v \bar{c}'(s) \\ &= \cos \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} \bar{v}_1(s) \wedge \bar{v}_1^*(s) + \cos^2 \bar{\Theta} \bar{v}_1(s) \wedge \bar{v}_3^*(s) \\ &\quad + \sin^2 \bar{\Theta} \bar{v}_1^*(s) \wedge \bar{v}_3(s) - \cos \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} \bar{v}_3(s) \wedge \bar{v}_3^*(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} \bar{v}_1(s) \wedge \bar{v}_1^*(s) - \sin^2 \bar{\Theta} \bar{v}_1(s) \wedge \bar{v}_3^*(s) \\
& - \cos \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} \bar{v}_1(s) \wedge \bar{v}_2(s) - \cos^2 \bar{\Theta} \bar{v}_1^*(s) \wedge \bar{v}_3(s) \\
& - \cos \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} \bar{u}_3(s) \wedge \bar{u}_3^*(s) - \cos^2 \bar{\Theta} \bar{u}_3(s) \wedge \bar{u}_2(s) \\
& + v \left( \cos \bar{\Theta} \bar{u}_1(s) - \sin \bar{\Theta} \bar{u}_3(s) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left( \bar{\Psi}_{\bar{c}} \right)_s &= \left( \cos^2 \bar{\Theta} - \sin^2 \bar{\Theta} \right) \left( -\langle \bar{v}_1(s), \bar{\beta}(s) \rangle \bar{v}_3(s) - \langle \bar{v}_3(s), \bar{\beta}(s) \rangle \bar{v}_1(s) \right) \\
& + 2 \cos \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} \left( -\langle \bar{v}_1(s), \bar{\beta}(s) \rangle \bar{v}_1(s) - \langle \bar{v}_3(s), \bar{\beta}(s) \rangle \bar{v}_3(s) \right) \quad (4.131) \\
& + \left( \cos^2 \bar{\Theta} + v \cos \bar{\Theta} \right) \bar{v}_1 - \left( \cos \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} + v \sin \bar{\Theta} \right) \bar{v}_3(s)
\end{aligned}$$

olur. (4.130) ve (4.131) bağıntıları iç çarpıldığında

$$\begin{aligned}
\left\langle \left( \bar{\Psi}_{\bar{c}} \right)_v, \left( \bar{\Psi}_{\bar{c}} \right)_s \right\rangle &= \left( -\cos^3 \bar{\Theta} + \cos \bar{\Theta} \sin^2 \bar{\Theta} \right) \langle \bar{v}_1(s), \bar{\beta}(s) \rangle \\
& + \left( -\cos^2 \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} + \sin^3 \bar{\Theta} \right) \langle \bar{v}_3(s), \bar{\beta}(s) \rangle \\
& - 2 \cos \bar{\Theta} \sin^2 \bar{\Theta} \langle \bar{v}_1(s), \bar{\beta}(s) \rangle \\
& - 2 \cos^2 \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} \langle \bar{v}_3(s), \bar{\beta}(s) \rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \left( \bar{\Psi}_{\bar{c}} \right)_v, \left( \bar{\Psi}_{\bar{c}} \right)_s \right\rangle &= -\cos \bar{\Theta} \langle \bar{v}_1(s), \bar{\beta}(s) \rangle \\
& + \left( -3 \cos^2 \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} + \sin^3 \bar{\Theta} \right) \langle \bar{v}_3(s), \bar{\beta}(s) \rangle
\end{aligned}$$

bulunur.  $\left\langle \left( \bar{\Psi}_{\bar{c}} \right)_v, \left( \bar{\Psi}_{\bar{c}} \right)_s \right\rangle \neq 0$  olduğundan  $\left\{ \left( \bar{\Psi}_{\bar{c}} \right)_v, \left( \bar{\Psi}_{\bar{c}} \right)_s \right\}$  sistemi ortogonal değildir. Bu vektörlere Gram-Schmidt yöntemi uygulanırsa

$$\left(\overline{\Psi}_{\bar{c}}\right)_v = \overline{X}_{\bar{c}_1}(s),$$

$$\left(\overline{\Psi}_{\bar{c}}\right)_s = \overline{X}_{\bar{c}_2}(s)$$

olmak üzere,

$$\overline{Y}_{\bar{c}_1}(s) = \overline{X}_{\bar{c}_1}(s) = \overline{c}(s), \quad (4.132)$$

$$\overline{Y}_{\bar{c}_2}(s) = -\frac{\langle \overline{Y}_{\bar{c}_1}(s), \overline{X}_{\bar{c}_2}(s) \rangle}{\langle \overline{Y}_{\bar{c}_1}(s), \overline{Y}_{\bar{c}_1}(s) \rangle} \overline{Y}_{\bar{c}_1}(s) + \overline{X}_{\bar{c}_2}(s),$$

$$\begin{aligned} \overline{Y}_{\bar{c}_2}(s) &= \cos \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} \langle \overline{v}_1(s), \overline{\beta}(s) \rangle \overline{v}_1(s) \\ &\quad - \left( -3 \cos^2 \bar{\Theta} \sin^2 \bar{\Theta} + \sin^4 \bar{\Theta} \right) \langle \overline{v}_3(s), \overline{\beta}(s) \rangle \overline{v}_1(s) \\ &\quad + \left( \cos^2 \bar{\Theta} - \sin^2 \bar{\Theta} \right) \left( -\langle \overline{v}_1(s), \overline{\beta}(s) \rangle \overline{v}_3(s) - \langle \overline{v}_3(s), \overline{\beta}(s) \rangle \overline{v}_1(s) \right) \\ &\quad + 2 \cos \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} \left( -\langle \overline{v}_1(s), \overline{\beta}(s) \rangle \overline{v}_1(s) - \langle \overline{v}_3(s), \overline{\beta}(s) \rangle \overline{v}_3(s) \right) \\ &\quad + \left( \cos^2 \bar{\Theta} + \nu \cos \bar{\Theta} \right) \overline{v}_1 - \left( \cos \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} + \nu \sin \bar{\Theta} \right) \overline{v}_3(s) \\ &\quad + \cos^2 \bar{\Theta} \langle \overline{v}_1(s), \overline{\beta}(s) \rangle \overline{v}_3(s) \\ &\quad - \left( -3 \cos^3 \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} + \cos \bar{\Theta} \sin^3 \bar{\Theta} \right) \langle \overline{v}_3(s), \overline{\beta}(s) \rangle \overline{v}_3(s) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikte

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \cos \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} \langle \vec{v}_1(s), \vec{\beta}(s) \rangle - (-3 \cos^2 \bar{\Theta} \sin^2 \bar{\Theta} + \sin^4 \bar{\Theta}) \langle \vec{v}_3(s), \vec{\beta}(s) \rangle \\
&\quad - (\cos^2 \bar{\Theta} - \sin^2 \bar{\Theta}) \langle \vec{v}_3(s), \vec{\beta}(s) \rangle \\
&\quad - 2 \cos \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} \langle \vec{v}_1(s), \vec{\beta}(s) \rangle + (\cos^2 \bar{\Theta} + \nu \cos \bar{\Theta}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= -(\cos^2 \bar{\Theta} - \sin^2 \bar{\Theta}) \langle \vec{v}_1(s), \vec{\beta}(s) \rangle - 2 \cos \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} \langle \vec{v}_3(s), \vec{\beta}(s) \rangle \\
&\quad - (\cos \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} + \nu \sin \bar{\Theta}) + \cos^2 \bar{\Theta} \langle \vec{v}_1(s), \vec{\beta}(s) \rangle \\
&\quad - (-3 \cos^3 \bar{\Theta} \sin \bar{\Theta} + \cos \bar{\Theta} \sin^3 \bar{\Theta}) \langle \vec{v}_3(s), \vec{\beta}(s) \rangle
\end{aligned}$$

alınırsa,  $\vec{Y}_{C_2}(s)$  vektörü

$$\vec{Y}_{C_2}(s) = \vec{F} \vec{v}_1(s) + \vec{H} \vec{v}_3(s) \quad (4.133)$$

şeklinde yazılır. (4.132) ve (4.133) vektörleri birim hale getirilirse

$$\vec{E}_{C_1}(s) = \frac{\vec{Y}_{C_1}(s)}{\|\vec{Y}_{C_1}(s)\|} = \vec{c}(s) = \sin \bar{\Theta} \vec{v}_1(s) + \cos \bar{\Theta} \vec{v}_3(s) , \quad (4.134)$$

$$\vec{E}_{C_2}(s) = \frac{\vec{Y}_{C_2}(s)}{\|\vec{Y}_{C_2}(s)\|} = \frac{\vec{F} \vec{v}_1(s) + \vec{H} \vec{v}_3(s)}{\sqrt{\vec{F}^2 + \vec{H}^2}} \quad (4.135)$$

olur. (4.134) ve (4.135) bağıntıları iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{E}_{\overline{C}_1}(s), \overrightarrow{E}_{\overline{C}_2}(s) \rangle &= \frac{\overline{F} \sin \overline{\Theta} + \overline{H} \cos \overline{\Theta}}{\sqrt{\overline{F}^2 + \overline{H}^2}} \\
&= \cos \overline{\Theta} \sin^2 \overline{\Theta} \langle \overrightarrow{v}_1(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \\
&\quad - \sin^3 \overline{\Theta} (-3 \cos^2 \overline{\Theta} + \sin^2 \overline{\Theta}) \langle \overrightarrow{v}_3(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \\
&\quad - (\cos^2 \overline{\Theta} - \sin^2 \overline{\Theta}) \sin \overline{\Theta} \langle \overrightarrow{v}_3(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \\
&\quad - 2 \cos \overline{\Theta} \sin^2 \overline{\Theta} \langle \overrightarrow{v}_1(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle + (\cos \overline{\Theta} + \nu) \cos \overline{\Theta} \sin \overline{\Theta} \\
&\quad - (\cos^2 \overline{\Theta} - \sin^2 \overline{\Theta}) \cos \overline{\Theta} \langle \overrightarrow{v}_1(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \\
&\quad - 2 \cos^2 \overline{\Theta} \sin \overline{\Theta} \langle \overrightarrow{v}_3(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \\
&\quad - \cos \overline{\Theta} \sin \overline{\Theta} (\cos \overline{\Theta} + \nu) + \cos^3 \overline{\Theta} \langle \overrightarrow{v}_1(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle \\
&\quad - \cos^2 \overline{\Theta} \sin \overline{\Theta} (-3 \cos^2 \overline{\Theta} + \sin^2 \overline{\Theta}) \langle \overrightarrow{v}_3(s), \overrightarrow{\beta}(s) \rangle,
\end{aligned}$$

$$\langle \overrightarrow{E}_{\overline{C}_1}(s), \overrightarrow{E}_{\overline{C}_2}(s) \rangle = 0$$

bulunur. O halde  $\overrightarrow{\Psi}_{\overline{C}}(s, \nu)$  yüzeyinin normal vektörü  $\overrightarrow{N}_{\overline{C}}(s)$  ile gösterilirse

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N}_{\overline{C}}(s) &= \overrightarrow{E}_{\overline{C}_1}(s) \wedge \overrightarrow{E}_{\overline{C}_2}(s) \\
&= \overline{c}(s) \wedge \frac{\overline{F} \overrightarrow{v}_1(s) + \overline{H} \overrightarrow{v}_3(s)}{\sqrt{\overline{F}^2 + \overline{H}^2}} \\
&= \frac{\overline{F} \cos \overline{\Theta} \overrightarrow{v}_3(s) \wedge \overrightarrow{v}_1(s) + \overline{H} \sin \overline{\Theta} \overrightarrow{v}_1(s) \wedge \overrightarrow{v}_3(s)}{\sqrt{\overline{F}^2 + \overline{H}^2}},
\end{aligned}$$

$$\vec{N}_{\bar{c}}(s) = \frac{(\bar{F} \cos \bar{\Theta} - \bar{H} \sin \bar{\Theta})}{\sqrt{\bar{F}^2 + \bar{H}^2}} \vec{v}_2(s) \quad (4.136)$$

olur.  $\vec{\Psi}_{\bar{c}}(s, v)$  yüzeyinin şekil operatörü  $\vec{S}_{\bar{c}}(s)$  ve Gauss eğriliği  $\bar{K}_{\bar{c}}(s)$  ile gösterilirse (2.26) bağıntısından

$$\bar{K}_{\bar{c}}(s) = \det \vec{S}_{\bar{c}}(s) = -\left(\left\langle S_{\bar{c}}(\vec{E}_{\bar{c}_2}(s)), \vec{E}_{\bar{c}_1}(s) \right\rangle\right)^2 \quad (4.137)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned} \vec{S}_{\bar{c}}(\vec{E}_{\bar{c}_2}(s)) &= D_{\bar{c}_2} \vec{N}_{\bar{c}}(s) \\ &= \frac{1}{\|\vec{Y}_{\bar{c}_2}(s)\|} D_{\bar{c}_2} \vec{N}_{\bar{c}}(s) \\ &= \frac{1}{\|\vec{Y}_{\bar{c}_2}(s)\|} \frac{d\vec{N}_{\bar{c}}(s)}{ds} \frac{d\bar{s}}{ds} \\ &= \frac{1}{\|\vec{Y}_{\bar{c}_2}(s)\|} \left( \frac{(\bar{F} \cos \bar{\Theta} - \bar{H} \sin \bar{\Theta})}{\sqrt{\bar{F}^2 + \bar{H}^2}} \right)' \vec{v}_2(s) \\ &\quad + \frac{1}{\|\vec{Y}_{\bar{c}_2}(s)\|} \frac{(\bar{F} \cos \bar{\Theta} - \bar{H} \sin \bar{\Theta})}{\sqrt{\bar{F}^2 + \bar{H}^2}} \vec{v}_2'(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{\bar{c}}(\bar{E}_{\bar{c}_2}(s)) &= -\frac{(\bar{F} \cos \bar{\Theta} - \bar{H} \sin \bar{\Theta}) \bar{k}_1(s)}{\bar{F}^2 + \bar{H}^2} \bar{v}_1(s) \\
&\quad + \left( \frac{(\bar{F} \cos \bar{\Theta} - \bar{H} \sin \bar{\Theta})}{\bar{F}^2 + \bar{H}^2} \right)' \bar{v}_2(s) \\
&\quad + \frac{(\bar{F} \cos \bar{\Theta} - \bar{H} \sin \bar{\Theta}) \bar{k}_2(s)}{\bar{F}^2 + \bar{H}^2} \bar{v}_3(s)
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade ve (4.134) ifadesi (4.137) da yerine yazılırsa yüzeyin Gauss eğriliği

$$\bar{K}_{\bar{c}}(s) = - \left( \frac{-(\bar{F} \cos \bar{\Theta} - \bar{H} \sin \bar{\Theta}) \sin \bar{\Theta} \bar{k}_1(s) + (\bar{F} \cos \bar{\Theta} - \bar{H} \sin \bar{\Theta}) \cos \bar{\Theta} \bar{k}_2(s)}{\bar{F}^2 + \bar{H}^2} \right)^2 \quad (4.138)$$

şeklinde bulunur.



## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada,  $ID$ -Modülde birim dual teğet vektörler paralel alınarak dual paralel equidistant regle yüzey tanımı verildi. Bu yüzeylerin Blaschke vektörlerinin birim dual küre üzerinde çizdikleri kapalı dual küresel gösterge eğrilerine Öklid uzayında karşılık gelen kapalı regle yüzeylerin integral invariantları arasındaki bağıntılar bulundu. Bu dual regle yüzeylerin Gauss eğrilikleri hesaplanarak bazı yeni sonuçlara ulaşıldı. Benzer şekilde birim dual asli normaller, binormaller veya ani Pfaff vektörleri paralel alınarak da yeni sonuçlara ulaşılabilir. Bunun yanı sıra yapılan bu çalışma aynı yöntemler kullanılarak dual Lorentz uzayında da yapılabilir.

## 6. KAYNAKLAR

- Biran, L. 1981. Diferensiyel Geometri Dersleri. AR-Yayın Dağıtım, İstanbul, 128.
- Blaschke, W. 1949. Diferensiyel Geometri Dersleri. İstanbul Üniversitesi Yayınları, No:433, İstanbul, 399.
- Güven, A. İ. 2010. Dual Küresel Eğriler ve Regle Yüzeyle. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara.
- Hacısalıoğlu, H. H. 1983. a. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Yayınları, No:7, Malatya, 269.
- Hacısalıhoğlu, H. H. 1983. b. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Ankara, 338.
- Hacısalıoğlu, H. H. 1994. Diferensiyel Geometri. II.Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 340.
- Masal, M. 1994. P-Äquidistante Regle Yüzeylelerin Bazı Yeni Karakteristik Özellikleri. Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Samsun.
- Masal, M., Kuruoğlu, N. 1999. Some Characteristic Properties of The Parallel P- Equidistant Ruled Surfaces In The Euclidean Space. Pure Applied Mathematic Sciences, India, L1: 35-42.
- Masal, M., Kuruoğlu N. 2000. a. Some Characteristic Properties of the Shape Operators of Parallel p-Equidistant Ruled Surfaces. Bulletin of Pure and Applied Sciences, 19E (2): 361-364.
- Masal M., Kuruoğlu N. 2000. b. Some characteristic properties of the Spherical Indicatrix Leading Curves of Parallel p-Equidistant Ruled Surfaces. Bulletin of Pure and Applied Sciences, 19E (2): 405-410.
- Müller H.R. 1963. Kinematik Dersleri. Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara, 292.

- Sabuncuoğlu, A., 2006. Diferensiyel Geometri. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 440.
- Saracoglu, S., Yayli, Y. 2012. Ruled Surfaces and Dual Spherical Curves. Acta Universitatis Apulensis. 30: 337-354.
- Sarioğlugil, A., Senyurt, S., Kuruoglu, N. 2011. On The Integral Invariants of The Closed Ruled Surfaces Generated by A Parallel p-Equidistant Dual Centroit Curve in the Line Space. Hadronic Journal, 34 (3): 34-47.
- Sarioğlugil, A., Tutar, A. 2007. On Ruled Surfaces in Euclidean Space  $E^3$ . International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 2 (1): 1-11.
- Şenatalar M. 1978. Diferansiyel Geometri (Eğriler ve Yüzeyle Teorisi). İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi Yayınları, Sayı 151, İstanbul, 349.
- Şenyurt, S. 2012. Integral Invariants of Parallel P-Equidistant Ruled Surfaces Which are Generated by Instantaneous Pfaff Vector. Ordu Üniversitesi, Bilim Teknik Dergisi, 2 (1): 13-22.
- Şenyurt, S., As, E. 2013. Some Characteristic Properties Of Parallel z-Equidistant Ruled Surfaces, Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering, Article ID 587289, 7 pages.
- Valeontis, I. 1986. Parallel P-Äquidistante Regelflachen Manuscripta. Mathematics 54, 391-404.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Sümeyye GÜR  
**Doğum Yeri** : Trabzon  
**Doğum Tarihi** : 21.06.1987  
**Yabancı Dili** : İngilizce (  $B_1$  ), İtalyanca (  $A_1$  )  
**E-mail** : sumeyyegur17@hotmail.com

### Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/ Program	Üniversite	Yıl
Lisans	Matematik	Ondokuz Mayıs Üniversitesi Ordu Fen Edebiyat Fakültesi ORDU	Eylül 2004 Haziran 2008
Y. Lisans	Matematik/Geometri	Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü ORDU	Eylül 2008 Ocak 2011
Doktora	Matematik/Geometri	Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İZMİR  Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü ORDU  Foggia Üniversitesi Foggia / İTALYA (Erasmus Programı)	Eylül 2011 Eylül 2013  Eylül 2013 Ağustos 2015  Eylül 2014 Haziran 2015

### İş Deneyimi:

Görev	Görev (Kurum) Yeri	Yıl
Matematik Öğretmeni	Uğur Dershaneesi – ORDU	2009-2011
Eğitim Gönüllüsü	TEGV – İZMİR	2012-2013

### Yayımlar:

- 1. S. Gür, S. Şenyurt, Frenet Vectors and Geodesic Curvatures of Spherical Indicators of Salkowski Curves in  $E^3$** , Hadronic Journal, vol.33, no.5, pp. 485-512, 2010.
- 2. S. Gür, S. Şenyurt, On The Dual Spacelike - Spacelike Involute - Evolute Curve Couple On Dual Lorentzian Space**, International Journal of Mathematical Engineering and Science, vol.1, no :5, pp. 14-29, 2012.
- 3. S. Şenyurt, S. Gür, Timelike – Spacelike Involute – Evolute Curve Couple On Dual Lorentzian Space**, J. Math. Comput. Sci. 2 (2012), No. 6, pp. 1808-1823.
- 4. S. Şenyurt, S. Gür, Spacelike – Timelike Involute– Evolute Curve Couple On Dual Lorentzian Space**, J. Math. Comput. Sci. 3 (2013), No.4, pp. 1054-1075.
- 5. S. Gür, E. Özyılmaz and S. Şenyurt, The Frenet Vectors and Geodesic Curvatures of Speherical Indicatrix of The Timelike Salkowski Curve in Minkowski 3-Space**, Advanced Research in Dynamical & Control Systems, Vol. 7, Issue. ?, pp. 1-23, 2015.