T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT UZAYINDA SİMETRİK BİR OPERATÖRÜN SINIR DEĞER ŞARTLARI ALTINDA GENİŞLEMELERİ VE SPEKTRAL YAPISI

AHMET ADNAN KARA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2016

T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT UZAYINDA SİMETRİK BİR OPERATÖRÜN SINIR DEĞER ŞARTLARI ALTINDA GENİŞLEMELERİ VE SPEKTRAL YAPISI

AHMET ADNAN KARA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2016

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Ahmet Adnan KARA tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL danışmanlığında yürütülen "HILBERT UZAYINDA SİMETRİK BİR OPERATÖRÜN SINIR DEĞER ŞARTLARI ALTINDA GENİŞLEMELERİ VE SPEKTRAL YAPISI" adlı bu tez, jürimiz tarafından 18 / 05 / 2016 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman	:	YRD. DOÇ. DR. ERDAL ÜNLÜYOL	
Başkan	:	DOÇ. DR. İMDAT İŞCAN MATEMATİK, GİRESUN ÜNİVERSİTESİ	İmza :
Üye	:	DOÇ. DR. SELAHATTİN MADEN MATEMATİK, ORDU ÜNİVERSİTESİ	İmza :
Üye	:	YRD. DOÇ. DR. ERDAL ÜNLÜYOL MATEMATİK, ORDU ÜNİVERSİTESİ	İmza :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 20/05/2016 tarih ve 2016/269 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

30/05/ 2016

Enstitü Müdürü
Doç. Dr. Kürşat KORKMAZ

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza

Ahmet Adnan KARA

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

HİLBERT UZAYINDA SİMETRİK BİR OPERATÖRÜN SINIR DEĞER ŞARTLARI ALTINDA GENİŞLEMELERİ VE SPEKTRAL YAPISI

Ahmet Adnan KARA

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2016
Yüksek Lisans Tezi, 55s.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

Bu tezde, soyut simetrik operatörlerin genişleme teorisinden bahsedilmiştir. Fakat burada geleneksel durumdan farklı bir yaklaşım yapılmış ve sınır değer problemleri teorisine adapte edilmiştir. Genişlemelerin bazı sınıflarının yani maksimal dissipativ ve öz-eşlenik genişlemeler gibi genişlemelerin tanımlarının yanı sıra bu sınıfların genişlemelerinin spektrum yapısı sınır değerler uzayı olarak adlandırılan ifadeyle verilmiştir. Daha sonra bazı belirli durumlarda alışılmış sınır şartlarına dönüştüğü için yapılan bu çalışma tutarlı ve doğaldır. Burada önemli bir yer bir Hilbert uzayında ikili bağıntıların çeşitli gösterimleri hakkındaki teoremler tarafından yapılmış olmasıdır. Bundan dolayı da burada yapılanlar genişleme teorisinin yapısının bir başlangıç noktasıdır.

Anahtar Kelimeler: Hilbert uzayı, simetrik operatör, genişleme, dissipativ ve öz-eşlenik genişleme, sınır değer uzayı.

ABSTRACT

EXTENSIONS OF A SYMMETRIC OPERATOR IN TERMS OF BOUNDARY CONDITONS AND ITS SPECTRAL STRUCTURE IN HILBERT SPACE

Ahmet Adnan KARA

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Scienceand Technology
Department of Mathematics, 2016
MSc. Thesis, 55p.

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

In this thesis, it is devoted to the theory of extensions of abstract symmetric operators. Its presentation somewhat differs from the traditional one and is adapted to the theory of boundary value problems. The description of various classes of extensions, such a maximal dissipative and self-adjoint, as well as the structure of the spectrum of extensions from these classes, is given in terms of so-called to the boundary value spaces. The latter are convenient and natural because they runing to the usual boundary condition in certain concrete situations. Here, an important place is occupied by theorems about various representations of binary relations in a Hilbert space. These are the starting point in constructing the theory of extensions.

KeyWords: Hilbert space, symmetric operator, extension, dissipative and self-adjoint extension, boundary value space.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan, desteğini esirgemeyen değerli hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL' a ve Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Hem bu zorlu ve uzun süreçte hem de hayatım boyunca yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan başta eşim Sevgi KARA olmak üzere değerli aileme yürekten teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER DİZİNİ

$B(X)$	: X lineer normlu uzayında lineer sınırlı operatörler uzayı
E	: Birim operatör
$AC(I)$	: I aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyolar uzayı
$C^{(n)}(I)$	: I aralığı üzerinde n. mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonlar uzayı
$C_0^{(n)}(I)$	: I aralığı içindeki, kompakt bir küme dışında sıfır olan $C^{(n)}(I)$' daki fonksiyonlar uzayı
$C^{\infty}(I)$	: I aralığı üzerinde her mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonlar uzayı
$C_0^{\infty}(I)$	: I aralığı içindeki, kompakt bir küme dışında sıfır olan $C^{\infty}(I)$' fonksiyonlar uzayı
$\mathfrak{S}_p(H), (1 \leq p \leq \infty)$	: Schatten-von Neumann sınıfı
$L^2(H,(a,b))$	: $[a,b]$' den H Hilbert uzayına tanımlanan vektör fonksiyonların
$L^p(X,\Sigma,\mu)$	: Lebesgue uzayları, $1 \leq p \leq \infty$
$l_p(K=\mathbb{R},\mathbb{C})$	: K cismi üzerinde p. mertebeden yakınsak diziler uzayı, $1 \leq p \leq \infty$
$R_\lambda(A),(R(\lambda;A))$	: A operatörünün rezolvent operatörü
$\rho(A)$	: A operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma(A)$	: A operatörünün spektrumu
$\sigma_p(A)$	: A operatörünün ayrık spektrumu
$\sigma_c(A)$	: A operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_r(A)$	: A operatörünün kalan spektrumu
$W_p^l(I)$	: $l, p \geq 1$ için l. mertebeye kadar türevi $L^p(I)$ uzayında olan fonksiyonların Sobolev uzayı
$\overset{0}{W}{}_p^l(I)$	: $l, p \geq 1$ için I aralığı içindeki, kompakt bir küme dışında sıfır olan $W_p^l(I)$ fonksiyonların uzayı

$W_p^l(H,(a,b))$	: $[a,b]$' den H Hilbert uzayına tanımlanan vektör fonksiyonların Sobolev uzayı
$\overset{0}{W}{}_p^l(H,(a,b))$	: $[a,b]$' den H Hilbert uzayına tanımlanan vektör fonksiyonların kompakt bir küme dışında sıfır olan $W_p^l(H,(a,b))$ fonksiyonların Sobolev uzayı
$D(A)$	: A operatörünün tanım kümesi
$R(A)$	: A operatörünün görüntü kümesi
$\mathrm{Re}(A)$, A^R, A_R	: A operatörünün reel kısmı
$\dot{I}m(A)$, $A^{\dot{I}}$, $A_{\dot{I}}$	: A operatörünün sanal kısmı

1. GİRİŞ

Bir Hilbert uzayında lineer kapalı eşit defekt sayılarına sahip olan bir simetrik operatörün bütün maksimal simetrik ve öz-eşlenik genişlemelerinin tanım kümeleri dilinde ifadesi ve bu tip genişlemelerin spektral özellikleri ilk olarak John von Neumann'ın (1929-1930) çalışmasında ele alınmış ve bu alanda temel sonuçlara ulaşılmıştır. Bu genel teorinin diferensiyel ve fark operatörlerine uyarlanması uzun yıllar sürmüş ve bugüne kadar yapılan çalışmalarda devam etmiştir. Yapılan çalışmaların geniş özeti Rofe-Beketov ve Kholkin'in (2005) kitabında verilmiştir.

Lineer normal operatörlere ait ilk incelemeler Sz.-Nagy (1942), Kilpi (1953, 1957, 1963) ve Davis'in (1955) çalışmaları ile başlamıştır. 1960 yılından sonra Coddington ve Biriuk (1964, 1973) bir Hilbert uzayında lineer kapalı sınırsız formal normal bir operatörün bütün maksimal formal normal genişlemelerini tanım kümeleri dilinde ifade ederek J. von Neumann' ın meşhur çalışmasını formal normal operatörlere genişletebilmişlerdir. Bu teorinin gelişmesinde 1980 yılından itibaren Stochel ve Szafraniec' in (1985, 1989a, 1989b) büyük katkıları olmuştur. Bu teorinin diferensiyel operatörlere uygulamasına ait ilk araştırmalar Schmüdgen (1985), Maksudov ve İsmayilov (1994, 1996a, 1996b, 1999), İsmayilov (1992, 1994a, 1994b, 1998, 2003, 2005), İsmayilov ve Karatash (2000), Otelbayev ve Biyarov (1993), Otarov ve Kokebayev (1985) tarafından yapılmıştır.

XX. yüzyılın ikinci yarısından itibaren operatör katsayılı lineer diferensiyel denklemler teorisi hızla gelişmeye başladı. Bu alanda ilk çalışmalar Gorbachuk (1991), J-L. Lions, E. Hille, R. S. Philips, M. G. Krein, S. G. Krein, Yu. M. Berezansky, B. M. Levitan, A. G. Kostyuchenko, Yu. L. Daletsky, S. Yakubov, Y. Yakubov ve M. Gasımov gibi bilim insanlarının çalışmalarının geniş özetini Yakubov' un (2000) çalışmasında bulabilirsiniz. Ayrıca literatüre bakıldığında Dunford ve Schwartz (1958, 1963), Naimark (1968), Gorbachuk (1973), Eidelman ve ark. (2004), Abramovic ve Aliprantis (2002a, 2002b), Coddington (1973), Kochubei (1979) çalışmalarında da bu alanla ilgili birçok bilgiye sahip olabilirsiniz. Fu' nun (1992) çalışmasında ise;

$$M = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) D^k ,$$

burada $-\infty < a < b < \infty$, $p_k : (a,b) \to \mathbb{C}$, $k = 0,1,\cdots,n$ katsayıları bazı pürüzsüz ve integrallenebilir, diferensiyel ifadesinin (a,b) aralığının içinde sonlu tane singüler nokta durumunda doğurduğu minimal operatörün tüm öz-eşlenik genişlemeleri onun eşlenik operatörünün tanım kümesindeki fonksiyonların sınır değerleri dilinde ifade edilmiştir. Ayrıca minimal operatörün, bakılan aralığın alt aralıkları üzerinde ifade edilemeyen öz-eşlenik genişlemelerinin varlığı gösterilmiştir.

Yukarıda yapılan literatür özetine ve yapılan bunca çalışmalara baktığımızda bir diferensiyel operatörün sınır değerleri dilinde ifadesinin ne kadar önemli olduğunu görüyoruz. Dolayısıyla, V. I. Gorbachuk, M. L. Gorbachuk' un (1991) " Boundary Value Problems For Operator Differential Equations" kitabında açıklanan simetrik operatörlerin genişlemeleri ve sınır değerleri dilinde ifadesini iyi anlamak gerekir. Bu yüzden tezde bu eseri ana kaynak olarak kullandık. Simetrik operatörlerin genişlemeleri ve bu genişlemelerin sınır değerleri cinsinden yazılışını ayrıntılı bir şekilde açıklanıp yapılan güncel makalelerden örnekler verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Operatörler Teorisinin Temel Kavramları

Tanım 2.1.1: X , K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve Y , X ’ in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Y , X vektör uzayındaki cebirsel işlemlere göre kendi başına bir vektör uzayı oluşturuyorsa Y ’ ye, X ’de bir lineer manifold (veya X ’in bir lineer alt uzayı) denir.

Örnek 2.1.1: $A \subset \ell_p,\ p \geq 1$ olmak üzere $A := \{(x_n) \in \ell_p : (x_n) = (0, x_2, x_3, \cdots)\}$ kümesi ℓ_p ’de bir lineer manifoldur.

Çözüm 2.1.1: $(x_n) = (0, x_2, x_3, \cdots),\ (y_n) = (0, y_2, y_3, \cdots) \in A$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alalım.

$$(\alpha x_n + \beta y_n) = (0, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, \cdots) = (0, \alpha x_2, \alpha x_3, \cdots) + (0, \beta y_2, \beta y_3, \cdots)$$

$$= \alpha(0, x_2, x_3, \cdots) + \beta(0, y_2, y_3, \cdots) = \alpha(x_n) + \beta(y_n)$$

dolayısıyla A kümesi lineer manifold olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.2: X bir vektör uzayı ve $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in X$ olarak verilsin. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n \in K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ olmak üzere $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ şeklindeki sonlu toplama $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in X$ elemanlarının bir lineer kombinasyonu denir. $\varnothing \neq M \subset X$ ise, M ’den alınan her sonlu sayıdaki vektörlerin lineer kombinasyonlarının tümünün kümesine M ’ nin gereni (veya lineer örtüsü) denir ve $spanM$ olarak gösterilir. $spanM$, X ’de bir lineer manifolddur ve M ’ nin ürettiği lineer manifold denir.

Tanım 2.1.3: X , K cismi üzerinde bir lineer vektör uzayı olsun.

$$\|\cdot\| : X \to [0, \infty),\ x \to \|x\|$$

dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in K$ için

(N_1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

(N_2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği) özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde bir norm ve bu durumda $(X,\|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı adı verilir. Yukarıda verilen (N_1)– (N_3) özelliklerine norm aksiyomları denir. Bu vektör uzayı üzerinde birden fazla norm tanımlanabilir. K cismine bağlı olarak, reel normlu uzay veya kompleks normlu uzay terimleri de kullanılır.

Örnek 2.1.2: $E=C([a,b],K)$ kümesi, $\|x\|_C=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$ fonksiyonu ile bir normlu vektör uzaydır.

Gerçekten, E 'nin bir lineer vektör uzayı olduğu açıktır. $x,y\in C[a,b]$ ve $\alpha\in K$ için,

(N_1) $\|x\|_C=0$ ise, $\|x\|_C=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|=0 \Leftrightarrow \forall t\in[a,b]$ için $x(t)=0$;

(N_2) $\|\alpha x\|_C=\max\limits_{t\in[a,b]}|(\alpha x)(t)|=\max\limits_{t\in[a,b]}|\alpha||x(t)|=|\alpha|\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|=|\alpha|\|x\|_C$;

(N_3) $\|x+y\|_C=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)+y(t)|\le\max\limits_{t\in[a,b]}(|x(t)|+|y(t)|)$

$$\le\max_{t\in[a,b]}|x(t)|+\max_{t\in[a,b]}|y(t)|=\|x\|_C+\|y\|_C.$$

Tanım 2.1.4: (x_n), $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi ve $x_0\in X$ olsun. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=0$ ise, (x_n) dizisi $\|\cdot\|$ normuna göre x_0 noktasına yakınsıyor denir ve $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{\|\ \|_X}x_0$ ya da $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ notasyonlarının biriyle gösterilir.

Tanım 2.1.5: $(X,\|\cdot\|)$ normlu bir uzay olsun.

$(x_n)\subset X$ dizisi bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow\forall\,\varepsilon>0$ için $\exists\, n_\varepsilon\in\mathbb{N}:\forall\, m,n>n_\varepsilon$ için $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$.

Tanım 2.1.6: Bir $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir elemana yakınsıyorsa, bu $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı ya da B-uzayı adı verilir.

Tanım 2.1.7: $(X,\|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve bunun bir alt kümesi A olsun.

$$d(A)=\sup\{\|x-y\|: x\in A,\ y\in A\}\geq 0$$

$d(A)\in\overline{\mathbb{R}}$ genelleştirilmiş reel sayısına A kümesinin çapı denir. Eğer $A\subset X$ kümesinin çapı sonlu ise A kümesine sınırlı küme denir. X içindeki (x_n) dizisine karşılık gelen noktalar kümesi sınırlı ise (x_n) dizisine sınırlı dizi denir.

Örnek 2.1.3: $X=\mathbb{R}^n$ (veya $X=\mathbb{C}^n$) vektör uzayı için

(a) $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n}|x_i|$;

(b) $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}$, $1\leq p<\infty$;

(c) $\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : i=1,2,\cdots,n\}$

normlarına göre birer Banach uzayıdırlar.

Tanım 2.1.8: $(X,\|\cdot\|)$ bir normlu uzay, Y de X 'in bir lineer alt uzayı ise $(Y,\|\cdot\|)$ de bir normlu uzaydır. Bu uzaya $(X,\|\cdot\|)$ uzayının normlu alt uzayı denir. Eğer Y kapalı ise $(Y,\|\cdot\|)$ alt uzayına $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayının kapalı alt uzayı denir. Bir normlu uzayının her lineer alt uzayı normlu bir alt uzaydır.

Tanım 2.1.9: $K(\mathbb{R},\mathbb{C})$ bir cisim olmak üzere X bir vektör uzayı olsun. $(\cdot,\cdot): X \text{ x } X \to K$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise $(\cdot,\cdot)$ ' ye X üzerinde bir iç çarpım, $(X,(\cdot,\cdot))$ ikilisine ise iç çarpım uzayı (veya ön Hilbert uzayı) denir:

(H_1) $\forall x\in X$ için $(x,x)\geq 0$ ve $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=\theta$;

(H_2) $\forall x,y\in X$ için $(x,y)=\overline{(y,x)}$ (kompleks eşlenik);

(H_3) $\forall x,y\in X$ ve $\alpha\in K$ için $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$;

(H_4) $\forall x,y,z\in X$ için $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$.

Örnek 2.1.4: $f,g\in C([a,b],K)$ fonksiyonları için

$$(f,g) := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

tanımıyla $C([a,b],K)$ bir iç çarpım uzayıdır.

Gerçekten:

(H_1) $\forall f \in C([a,b],K)$ için $(f,f)=\int_a^b f(t)\overline{f(t)}dt=\int_a^b |f(t)|^2 dt \geq 0$, eğer

$$(f,f)=\int_a^b f(t)\overline{f(t)}dt=\int_a^b |f(t)|^2 dt=0 \Leftrightarrow f=\theta \text{ ;}$$

(H_2) $\forall f,g \in C([a,b],K)$ için

$$(f,g)=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt=\overline{\int_a^b \overline{f(t)}g(t)dt}=\overline{\int_a^b g(t)\overline{f(t)}dt}=\overline{(g,f)};$$

(H_3) $\forall f \in C([a,b],K)$ ve $\alpha \in K$ için

$$(\alpha f,g)=\int_a^b \alpha f(t)\overline{g(t)}dt=\alpha\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt=\alpha(f,g);$$

(H_4) $\forall f,g,h \in C([a,b],K)$ için

$$(f+h,g)=\int_a^b (f(t)+h(t))\overline{g(t)}dt=\int_a^b \left(f(t)\overline{g(t)}+h(t)\overline{g(t)}\right)dt$$

$$=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt+\int_a^b h(t)\overline{g(t)}dt=(f,g)+(h,g)\ .$$

Tanım 2.1.10: $(X,(\cdot,\cdot))$ bir iç çarpım uzayı ve $x \in X$ olsun. $\|x\|:=(x,x)^{1/2}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon X üzerinde bir norm olup, bu norma iç çarpımın ürettiği norm denir.

Tanım 2.1.11: Bir $(X,(\cdot,\cdot))$ iç çarpım uzayı, iç çarpımın ürettiği norma göre tam ise, yani $(X,(\cdot,\cdot))$ iç çarpım uzayı içindeki her Cauchy dizisi iç çarpımın ürettiği norma göre yakınsaksa, bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

Örnek 2.1.5: $(\cdot,\cdot): l_2(\mathbb{C}) \text{ x } l_2(\mathbb{C}) \to K,\ (x,y):=\sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ dönüşümü $l_2(\mathbb{C})$ üzerinde bir iç çarpımdır ve bu iç çarpıma göre $l_2(\mathbb{C})$ bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 2.1.12: Bir metrik uzayın sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa bu uzaya ayrılabilir metrik uzay denir.

Tanım 2.1.13: $m \geq 0$ bir tamsayı ve Ω, $\mathbb{R}^n$' de parçalı sürekli diferensiyellenebilir $\partial\Omega$ sınırlı bir tanım kümesi olsun. $\Omega \cup \partial\Omega$ üzerindeki fonksiyonların $C^m\left[\Omega \cup \partial\Omega\right]$ kümesinin tümleyeni, yani m defa sürekli diferensiyellenebilir kümesi,

$$\|\varphi\|_{W_2^m(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

normu ile Sobolev Uzayı adını alır. W_2^m şeklinde gösterilir.

Burada $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{\partial t_1^{\alpha_1} \cdots \partial t_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. $\overset{0}{W}{}_2^m(\Omega)$ ise, Ω içindeki kompakt bir küme dışında sıfır olan $W_2^m(\Omega)$ fonksiyonların uzayı olarak gösterilir.

Eğer Ω sınırlı değil ise, o zaman Sobolev uzayını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

Bir $\varphi(t)$, $t \in \Omega$ fonksiyonunun $W_2^m(\Omega)$' ya ait olması için gerek ve yeter şart, $\varphi(t)$' nin ve onun $D^\alpha \varphi$, $|\alpha| \leq m$ türevlerinin de $L^2(\Omega)$' ya ait olmasıdır. Son olarak, $W_2^m(\Omega)$ uzayı aşağıdaki gibi bir iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır.

$$(\varphi, \psi)_{W_2^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \left(D^\alpha \varphi, D^\alpha \psi\right)_{L^2(\Omega)} .$$

Tanım 2.1.14: X kümesi üzerinde tanımlı, reel değerli, Σ ölçülebilir, $|f|^p$, $1 \leq p < \infty$, fonksiyonunun bir μ ölçümüne göre integralinin sonlu olduğu μ denklik sınıflarının ailesinin tümünü $L^p(X, \Sigma, \mu)$ ile göstereceğiz. Bu $L^p(X, \Sigma, \mu)$ ailesi üzerinde norm,

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty$$

şeklinde tanımlanır.

$L^p(X, \Sigma, \mu)$ ailesi, $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$ normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.15: $x(t): t \to B$, $(t \in I)$, I reel eksen üzerinde bir aralık) şeklinde tanımlanan ve bir B Banach uzayında değer alan $x(t)$ fonksiyonlarına vektör değerli fonksiyonlar denir.

Tanım 2.1.16: X ve Y iki lineer normlu uzay olsun. $A: D(A) \subset X \to Y$ olan her dönüşüme operatör adı verilir.

$D(A) := \{x \in X : Ax \ \textit{tanımlı}\} \subset X$ kümesine A operatörünün tanım kümesi denir.

$R(A) := AD(A) = \{y = Ax : \ x \in D(A)\} \subset Y$ kümesine A operatörünün değer kümesi denir.

$Ker\,A := \{\, x \in X : Ax = 0 \,\} \subset X$ kümesine A operatörünün sıfır kümesi veya çekirdeği denir.

Örnek 2.1.6: $Af(x) := f'(x)$, $f \in C^{(1)}[0,1]$ biçiminde tanımlanan

$$A: C([0,1], K) \to C([0,1], K)$$

operatörünün tanım kümesi $D(A) = C^{(1)}[0,1]$'dir.

Tanım 2.1.17: $A: X \to Y$ ve $B: X \to Y$ operatörleri verilsin. Eğer $D(A) = D(B)$ ve her $x \in D(A) = D(B)$ için $Ax = Bx$ ise A ile B operatörleri eşittir denir ve $A = B$ ile gösterilir. Eğer, $D(A) \subset D(B)$ ve her $x \in D(A)$ için $Ax = Bx$ ise A operatörüne B operatörünün kısıtlaması (veya B operatörüne A operatörünün genişlemesi) denir ve $A = B_{|D(A)}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.18: $A: X \to Y$ bir operatör ve $b \in Y$ bir eleman olsun. Eğer, her $x \in X$ için $Ax = b$ ise A operatörüne sabit operatör denir.

Örnek 2.1.7: $A: D(A) \to C[0,1]$, $D(A) = C^1[0,1]$ olmak üzere $Af(x) = 1$, $Af(x) = 5$ operatörleri birer sabit operatörlerdir.

Tanım 2.1.19: $A: X \to X$ operatörü verilsin. Eğer her $x \in X$ için $Ax = x$ ise A operatörüne birim (özdeşlik) operatör denir. I, E veya I_X ile gösterilir.

Tanım 2.1.20: X ve Y iki normlu uzaylar, $A: X \to Y$ bir operatör ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\forall\ \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\ \delta > 0:\ \|x - x_0\|_X < \delta \text{ olan } \forall\ x \in X \text{ için } \|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$$

ise, A operatörü $x = x_0$ noktasında süreklidir denir. A operatörü her $x \in X$ noktasında sürekli ise, operatöre sürekli operatör denir.

Not 2.1.1: Eğer bir $A: X \to Y$ lineer operatörü bir noktada sürekli ise, her yerde süreklidir.

Tanım 2.1.21: X ve Y iki normlu uzay ve $A: X \to Y$ olsun.

(1) Eğer $\forall\ x \in X$ için $\|Ax\|_Y \le c\|x\|_X$

olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa A operatörüne sınırlı operatör denir.

(2) X 'den Y 'ye sınırlı lineer dönüşümlerin oluşturduğu uzaya sınırlı lineer uzay denir ve $B(X,Y)$ ile gösterilir.

(3) $B(X,Y)$ ' nin normu,

$$\|\cdot\|: B(X,Y) \to \mathbb{R},\ \|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \le 1\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.1.8: $k(t,s)$ fonksiyonu $D = [a,b]$ x $[a,b]$, $(a,b \in \mathbb{R})$ bölgesi üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun.

$$y(t) := \int_a^b k(t,s)x(s)\,ds$$

eşitliği yardımıyla çeşitli $y = Ax$ integral operatörleri tanımlayabiliriz.

$X = Y = (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ olsun.

$$A: C[a,b] \to C[a,b],\ Ax(t) := \int_a^b k(t,s)x(s)\,ds$$

operatörü lineer ve sınırlı bir operatördür.

Tanım 2.1.22: H bir Hilbert uzayı ve $A \in L(H)$ olsun. Eğer H 'da sınırlı her $E \subset H$ alt kümesi için $A(E) \subset H$ kümesi ön kompakt ise, A operatörüne kompakt operatör denir.

Örnek 2.1.9: $H = L_2[a,b],\ A: H \to H,\ Af(t) := \int_a^b k(t,s)\, f(s)\, ds$,

Burada $k \in L_2([a,b] \times [a,b])$ şeklinde tanımlanan operatör bir kompakt operatördür.

Çözüm 2.1.9: $A \in B(L_2[a,b])$ olduğu bilinir. Şimdi A'nın H'da sonlu ranklı operatörlerin H normunda limiti olduğunu gösterelim.

Eğer $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ $L_2([a,b])$ için bir ortonormal baz ise,

$$\phi_{ij}(t,s) = \varphi_i(t) \times \overline{\varphi_j}(s),\ i, j = 1, 2, \cdots$$

$L_2([a,b] \times [a,b])$ için bir ortonormal bazdır. Böylece

$$k = \sum_{i,j=1}^{\infty} (k, \phi_{ij}) \phi_{ij}$$ ' dir.

$k_n(t,s) = \sum_{i,j=1}^{n} (k, \phi_{ij}) \phi_{ij}(t,s)$ şeklinde tanımlanırsa

$\|k - k_n\| \to 0$ için,

$$K_n : D(K_n) \subset L_2[a,b] \to L_2[a,b],\ (K_n f)(t) := \int_a^b k_n(t,s)\, f(s)\, ds$$

lineer integral operatörleri, $R(K_n) \subset span\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}$ olduğu için sonlu ranklıdır, yani her bir integral operatörü sınırlıdır. Böylece,

$$\|K - K_n\| \leq \|k - k_n\| \to 0$$

olup K operatörünün kompaktlığı elde edilir.

Tanım 2.1.23: B bir Banach uzayı ve $K: B \to B$ sınırlı bir lineer operatör olsun. Eğer, $\|K\| \leq 1$ ise, o zaman K ' ya B ' de bir daraltma operatörü denir.

Tanım 2.1.24: X ve Y iki Banach uzayı olmak üzere $Z := X \oplus Y$ olsun. $A: D(A) \subset X \to Y$ lineer operatörü için,

$$Gr := \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset Z = X \oplus Y$$

alt kümesine A operatörünün grafiği denir.

Tanım 2.1.25: $A: D(A) \subset X \to Y$ operatörünün grafiği $Gr(A)$, $Z = X \oplus Y$ 'de kapalı ise A operatörüne kapalı operatör denir.

$A: D(A) \subset X \to Y$ operatörünün grafiğinin kapalı olması

$$(x_n) \subset D(A), \quad \lim_{n\to\infty}(x_n, Ax_n) = (x, y)$$

koşullarından $x \in D(A)$ ve $y = Ax$ eşitliğini sağlaması demektir.

$(x, y) \in X\text{x}Y$ için $\|(x,y)\|^2 = \|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2$ olduğundan $A: X \to Y$ lineer operatörü kapalıdır ancak ve ancak $(x_n) \subset D(A)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$ ise, $x \in D(A)$ ve $y = Ax$ ' tir.

Örnek 2.1.10: $A: D(A) \to L_2[0,1]$, $Af = f'$,

$$D(A) = \{ f \in L_2[0,1] : f \in AC[0,1],\ f' \in L_2[0,1],\ f(0) = 0\}$$

şeklinde tanımlanan operatör kapalıdır.

Gerçekten, $n = 1, 2, \cdots$ için $f_n(t) = t^n$ ise

$$\| f_n\|_{L_2[0,1]}^2 = \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1} \le 1 \text{ ve} \|Af_n\|_{L_2[0,1]}^2 = \int_0^1 n^2 t^{2n-2} dt = \frac{n^2}{2n-1} \to \infty$$

olup A operatörü sınırsızdır. Şimdi A operatörünün kapalı olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için, ilk önce $KerA = \{0\}$ ve $R(A) = L_2[0,1]$ olduğunu not edelim.

$g \in L_2[0,1]$ için $f(t) = \int_0^1 g(s)\,ds$ alalım. Buradan $f \in D(A)$ ve $Af = g$ ' dir.

$g \in L_2[0,1]$ için

$A^{-1}g = f$ şeklinde tanımlanır.

$$\left|\left(A^{-1}g\right)(t)\right| \le \int_0^1 |g(s)|\,ds \le \left(\int_0^1 |g(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} = \|g\|$$

olup A^{-1} sınırlı lineer operatördür. Buradan

$$\|A^{-1}g\|^2 = \int_0^1 \left|\left(A^{-1}g\right)(t)\right|^2 dt \le \int_0^1 \|g\|^2\,dt = \|g\|^2$$

olup $\|A^{-1}\| \le 1$ 'dır.

$f_n \in D(A)$ için $f_n \to f$ ve $Af_n \to h \in L_2[0,1]$

için $f_n = A^{-1}$, $Af_n = A^{-1}h$ olarak alındığında $f = A^{-1}h \in D(A)$ ve $Af = h$' dır. Dolayısıyla A operatörü kapalıdır.

Tanım 2.1.26: $A: D(A) \subset X \to Y$ operatörünün $D(A) \subset D(\overline{A})$ ve her $x \in D(A)$ için $Ax = \overline{A}x$ olacak şekilde bir kapalı $\overline{A}: D(\overline{A}) \subset X \to Y$ operatörü varsa, A'ya kapanabilir operatör ve $\overline{A}$ operatörüne A' nın kapanışı denir.

Örnek 2.1.11: $T: D(T) \to L_2[0,1]$, $\mathrm{T}f := xf(1)$, $D(T) = C[0,1]$ şeklinde tanımlanan operatör kapalı değil ve kapanışı yoktur. Gerçekten, $\overline{C[0,1]} = L_2[0,1]$ olup

$$\left(f_n(x)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{L_2}} u(x), \left(h_n(x)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{L_2}} u(x),\ (f_n),(h_n) \subset C[0,1],$$

ama $f_n(1) = 1,\ h_n(1) = 0,\ n = 1, 2, \cdots$. O halde $Tf_n = x,\ Th_n = 0$ olduğundan durum açıktır.

Tanım 2.1.27: H bir Hilbert uzayı, $A: D(A) \subset H \to H$ lineer bir operatör ve $\overline{D(A)} = H$ olsun.

$D(A^*) := \{y \in H : \forall x \in D(A)$ için bir $z \in H$ vardır, öyleki $(Ax, y) = (x, z)\}$, $A^*y := z$ şeklinde tanımlanan operatöre A operatörünün A^* Hilbert eşleniği denir.

A lineer operatörünün A^* eşleniği lineer ve kapalıdır.

Tanım 2.1.28: A, H Hilbert uzayında bir lineer operatör ve A^*, A operatörünün eşlenik operatörü olsun.

Eğer $D(A) \subset D(A^*)$ ve her $f \in D(A)$ için $Af = A^*f$, yani

$$\forall f, g \in D(A) \text{ için } (Af, g) = (f, Ag)$$

ise, A operatörüne simetrik operatör denir ve $A \subset A^*$ sembolüyle gösterilir.

Eğer $D(A) = D(A^*)$ ve her $f \in D(A)$ için $Af = A^*f$ ise, A operatörüne öz-eşlenik operatör denir.

Tanım 2.1.29: A, H Hilbert uzayında bir lineer operatör ve A^*, A operatörünün eşlenik operatörü olsun.

Eğer her $f \in H$ için $AA^*f = A^*Af = f$ ise, A operatörüne üniter operatör denir.

Tanım 2.1.30: H bir Hilbert uzayı ve $P:H \to H$ bir lineer operatör olsun. Eğer

$$P^2 = P \text{ ve } P^* = P$$

ise P operatörüne ortogonal projeksiyon (iz düşüm) operatörü denir.

Eğer P, H'da bir ortogonal projeksiyon operatör ise,

$$P \in B(H) \text{ ve } \|P\| = 1$$

olduğu açıktır.

Tanım 2.1.31: H bir Hilbert uzayı ve $A \in B(H)$ olsun. Eğer $AA^* = A^*A$ ise, A'ya H'da bir normal operatör denir. Bu durumda $AA^* = A^*A$ koşulu $A_R A_I = A_I A_R$,

$A_R = \dfrac{A + A^*}{2}$, $A_I = \dfrac{A - A^*}{2i}$ koşuluna denktir.

Bir A operatörünün sınırsız olduğu durumlarda onun reel ve sanal kısımlarının komütatifliği araştırmak çok zor hesaplamalarla karşılaştırdığından bu durumlarda sınırsız bir operatörün normallik kavramı başka (daha pratik) şekilde aşağıdaki biçimde tanımlanır.

Tanım 2.1.32: (1) H Hilbert uzayında lineer kapalı bir A operatörü için

$$D(A) \subset D(A^*) \text{ ve } \forall f \in D(A) \text{ için } \|Af\|_H = \|A^* f\|_H$$

ise, A'ya H'da formal normal operatör denir.

(2) Eğer A, H'da formal normal bir operatör ve onun trivial olmayan başka formal normal genişlemesi yoksa A'ya H'da maksimal formal normal operatör denir.

(3) Eğer A, H Hilbert uzayında formal normal ve $D(A) = D(A^*)$ ise, ona H'da normal operatör denir.

Not 2.1.2: Her simetrik operatörün formal normal, her öz-eşlenik ve üniter operatörün ise normal olduğu açıktır.

Örnek 2.1.12: $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $a:[0,1] \to \mathbb{R}$ sınırlı Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon ve $Af(t) := a(t) f(t)$, $f \in L_2[0,1]$ ise, A bir normal operatördür.

Gerçekten, A lineer bir operatör ve her $f \in L_2[0,1]$ için

$$\|Af\|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 |a(t)\, f(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \le M \, \| f \|_{L_2[0,1]}, \; M := \sup_{0 \le t \le 1} |a(t)|$$

olduğundan $A \in B(L_2[0,1])$' dir.

Ayrıca her $f, g \in L_2[0,1]$ için

$$(Af, g)_{L_2[0,1]}) = \int_0^1 a(t)\, f(t)\, \overline{g(t)} dt = \int_0^1 f(t) \left[\overline{a(t)\, g(t)} \right] dt = \left(f, A^* g \right)_{L_2[0,1]}$$

dir. Burada $A^* g(t) = a(t)\, g(t)$ olup her $f \in L_2[0,1]$ için

$$\|Af\|_{L_2[0,1]} = \|a(t)\, f(t)\|_{L_2[0,1]} = \|A^* f\|_{L_2[0,1]}$$

olduğundan A bir normal operatördür.

Tanım 2.1.33: H bir Hilbert uzayı, A ise H üzerinde $\overline{D(A)} = H$ olan kapalı lineer bir operatör olsun. Eğer, her $x \in D(A)$ için $\mathrm{Re}(Ax, x) \ge 0$ oluyorsa, o zaman bu A operatörüne akkıretif operatör denir.

Tanım 2.1.34: H bir Hilbert uzayı, A ise H üzerinde $\overline{D(A)} = H$ olan kapalı lineer bir operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için $\dot{I}m(Ax, x) \ge 0$ oluyorsa, o zaman bu A operatörüne dissipativ operatör denir.

Tanım 2.1.35: Bir H Hilbert uzayında yoğun tanımlı kapalı bir T operatörü, eğer her $x \in D(T)$ için $D(T) \subset D(T^*)$ ve $\|T^* x\|_H \le \|Tx\|_H$ şartlarını sağlıyorsa, o zaman bu T operatörüne hiponormal operatör denir.

Tanım 2.1.36: H_1 ve H_2 sırasıyla $(\cdot,\cdot)_{H_1}, (\cdot,\cdot)_{H_2}$ iç çarpımlarıyla iki Hilbert uzayı olsunlar. $V : H_1 \to H_2$ bir lineer operatörü için, eğer herhangi $f, g \in H_1$ için

$$(Vf, Vg)_{H_2} = (f, g)_{H_1}$$

sağlanıyorsa bu V operatörüne izometrik operatör denir.

Tanım 2.1.37: H Hilbert uzayında kompakt operatörlerin kümesini $C_\infty(H)$ veya kısaca C_∞ ile göstereceğiz. Eğer $A \in C_\infty$ ise o zaman $A^* A$ ve $|A| = \left(A^* A\right)^{1/2}$

operatörleri negatif olmayan ve tamamen sürekli operatörlerdir. Bundan dolayı $|A|$ ‘nın $\lambda_n\left(|A|\right)$ özdeğerleri negatif değildir ve $n \to \infty$ iken monoton olarak $\lambda_n\left(|A|\right) \to 0$ ‘dır. Bu sayılara A operatörünün s-sayıları veya karakteristik sayıları denir ve $s_n(A),\ n \in \mathbb{N}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.38: Operatörlerin aşağıdaki sınıflarını göz önüne alalım.

$$\mathfrak{S}_p = \left\{ A : A \in C_\infty,\ \sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) < \infty,\ p > 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanan sınıfa Schatten von Neuman Sınıfı denir. Bu sınıf için norm,

$$\|A_p\| := \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanır. Bu norm aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) $\|A\|_p = \|A^*\|_p$, $(A \in \mathfrak{S}_p)$ $\quad f, g \in D(A^*)$

ii) $\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|,\ \|BA\|_p \leq \|A\|_p \|B\|,\ (A \in \mathfrak{S}_p,\ B \in H)$

Eğer B operatörü üniter ise, o zaman

$$\|AB\|_p = \|BA\|_p = \|A\|_p .$$

Tanım 2.1.39: A bir simetrik operatör ve λ reel olmayan keyfi bir sayı olsun. $\mathfrak{R}_{\bar{\lambda}} = \left(A - \bar{\lambda}E\right)D(A)$ ve $\mathfrak{R}_{\lambda} = \left(A - \lambda E\right)D(A)$ sırasıyla $\left(A - \bar{\lambda}E\right)$ ve $\left(A - \lambda E\right)$ operatörlerinin değer kümesi olarak göstereceğiz. $\mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}$ ve $\mathfrak{R}_{\lambda}$, H Hilbert uzayının alt uzaylarıdır. Bu alt uzayların kapalı olması gerekmez. $\mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}^{\perp}$ ve $\mathfrak{R}_{\lambda}^{\perp}$ ortogonal tümleyenlerine A operatörünün defekt uzayları denir ve sırasıyla $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ ve $\mathfrak{N}_{\lambda}$ ile gösterilir. Yani $\mathfrak{N}_{\lambda} = \left(H \ominus \mathfrak{R}_{\lambda}\right),\ \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} = \left(H \ominus \mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}\right)$’ dir.

$\mathfrak{N}_{\lambda}$ ve $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ defekt uzayları sırasıyla, A^* operatörünün $\bar{\lambda}$ ve A operatörünün λ öz değerlerine uygun çözüm uzaylarıdır, yani

$$\mathfrak{N}_{\lambda} = \ker\left(A^* - \bar{\lambda}E\right),\ \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} = \ker\left(A - \lambda E\right)\text{’ dir.}$$

Tanım 2.1.40: $m=\dim\mathfrak{N}_i,\ n=\dim\mathfrak{N}_{-i}$ olsun. m ve n sayılarına A operatörünün defekt sayıları (indeksleri) denir ve (m,n) çifti şeklinde gösterilir. Üst yarı düzlemdeki her λ kompleks sayısı için $\dim\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}=\dim\mathfrak{N}_{-i},\ \dim\mathfrak{N}_{\lambda}=\dim\mathfrak{N}_i$. Eğer $\dot{I}m\lambda>0$ ise $m=\dim\mathfrak{N}_i,\ n=\dim\mathfrak{N}_{-i}$ ' dir.

Tanım 2.1.41: H bir Hilbert uzayı ve $A:D(A)\subset H\to H$ defekt sayıları eşit (sonlu veya sonsuz) olan lineer kapalı simetrik bir operatör olsun. $\mathfrak{H}$ bir Hilbert uzayı ve $\Gamma_1,\ \Gamma_2:D(A^*)\subset\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ lineer dönüşümler olmak üzere, eğer:

i) Her $f,g\in D(A^*)$ için, $(A^*f,g)_H-(f,A^*g)_H=(\Gamma_1 f,\Gamma_2 g)_{\mathfrak{H}}-(\Gamma_2 f,\Gamma_1 g)_{\mathfrak{H}}$,

ii) Her $F,G\in\mathfrak{H}$ için $\{\exists f\in D(A^*):\Gamma_1 f=F,\ \Gamma_2 f=G\}$

koşulları sağlanıyorsa, $(\mathfrak{H},\Gamma_1,\Gamma_2)$ üçlüsüne A operatörünün sınır değerler uzayı denir. Ayrıca yukarıdaki bu tanımdan aşağıdaki sonucu görmek zor değildir.

$$f\in D(A)\Leftrightarrow\Gamma_1 f=\Gamma_2 f=0.$$

Örnek 2.1.13: $A:\overset{0}{W}{}_2^2(0,1)\subset L^2(0,1)\to L^2(0,1),(Af)(t):=-\dfrac{d^2}{dt^2}f(t)$ operatörünün defekt sayıları $(2,2)$ olup, onun sınır değerler uzayı,

$$\mathfrak{H}=\mathbb{C}^2,\ \Gamma_1 f=\{-f(0),f(1)\},\ \Gamma_2 f=\{f'(0),f'(1)\}$$

şeklindedir [29].

Tanım 2.1.42: Eğer bir B öz-eşlenik operatörü için $B^2=A$ ise bu B öz-eşlenik operatörüne pozitif A operatörünün kare kökü denir.

Tanım 2.1.43: $T^j,\ -\infty<j<+\infty,$ operatörü yardımıyla bir $H_j(T)$ Hilbert uzayı tanımlayalım. $H=H_0$ kompleks sayılar cismi üzerinde $(\cdot,\cdot)_{H_0}$ iç çarpımı ve $\|f\|_{H_0}=(f,f)_{H_0}^{1/2},\ f\in H_0$ normu ile bir Hilbert uzayı olsun. T , H Hilbert uzayı üzerinde lineer öz-eşlenik bir operatör olsun, öyle ki her $f\in H_0$ için $\|Tf\|_{H_0}\geq\|f\|_{H_0}$.

$D\left(T^{j}\right),\ 0<j<+\infty$ kümesi

$$\left(f,g\right)_{H_{+j}}=\left(T^{j}f,T^{j}g\right)_{H_0},\quad f,g\in D\left(T^{j}\right)$$

iç çarpımı altında bir Hilbert uzayıdır.

$H_{+j}=H_{+j}\left(T\right),\ 0<j<+\infty$ şeklinde tanımlanan uzaya pozitif uzay, benzer şekilde $H_{-j}=H_{-j}\left(T\right),\ 0<j<+\infty,$ uzayı tanımlanabilir ve ona negatif uzay adı verilir.

$H_{+j}\subset H_{+i},\ 0<i<j<+\infty,\ H_{+j}\subset H=H_0\subset H_{-j},\ \left(H_{+j}\right)^{*}=H_{-j},\ 0<j<+\infty$ ve $H_{+j},\ 0<j<+\infty$ uzayı H Hilbert uzayında yoğundur.

Tanım 2.1.44: H ayrılabilir bir Hilbert uzayı ve $L^2=L^2\left(H,\left(a,b\right)\right)$ de H içinde sonlu $\left[a,b\right]$ aralığında vektör fonksiyonların Hilbert uzayı olsun. Burada $U\left(t,s\right),\ t,s\in\left[a,b\right]$ operatörü lineer sürekli sınırlı terslenebilir ve $U^{-1}\left(t,s\right)=U\left(s,t\right)\in L^2$, $U^{*}\left(t,s\right)=U\left(s,t\right)$ olsun. $U\left(t,s\right),\ t,s\in\left[a,b\right],\ H$ Hilbert uzayında

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U\left(t,s\right)}{\partial t}f+iA_{I}U\left(t,s\right)f=0\\ \qquad\qquad U\left(s,s\right)f=f,\ f\in D\left(A\right),\end{cases}$$

homojen diferensiyel denklemi için sınır değer probleminin çözümü olsun. Bu operatörler ailesine evolüsyon operatörler ailesi diyeceğiz.

Tanım 2.1.45: H bir Hilbert uzayı ve $A:D\left(A\right)\subset H\rightarrow H$ bir lineer operatör olsun.

$$\rho\left(A\right):=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left(A-\lambda E\right)^{-1}\in L\left(H\right)\right\}$$

kompleks sayılar kümesine A operatörünün regüler noktalar kümesi (veya rezolvent kümesi) denir.

$\lambda\in\rho\left(A\right)$ olmak üzere $R\left(\lambda;A\right):=\left(A-\lambda E\right)^{-1}$ operatörüne A operatörünün rezolventası (veya çözücü operatörü) adı verilir.

Tanım 2.1.46: X bir Banach uzayı olsun. $A\in B\left(X\right)$ ve $\lambda,\ \mu\in\rho\left(A\right)$ için

$$R_{\mu}-R_{\lambda}=\left(\mu-\lambda\right)R_{\mu}R_{\lambda}$$

eşitliği sağlanıyorsa buna rezolvent operatörler için Hilbert eşitliği denir.

Tanım 2.1.47: H bir Hilbert uzayı olsun. $\mathbb{C}\backslash\rho(A)$ kümesine $A: D(A)\subset H\rightarrow H$ operatörünün spektrumu denir. A operatörünün spektrum kümesi $\sigma(A)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.48: $\sigma_p(A):=\{\lambda\in\mathbb{C}:(A-\lambda E)$ operatörü bire bir değil$\}$ kümesine A operatörünün ayrık veya diskret spektrumu denir. Eğer $\lambda_0\in\sigma_p(A)$ ise,

$$(A-\lambda_0 E)x_0=0$$

denkleminin $x_0\neq 0$ çözümü vardır. Buradaki λ_0 'a A operatörünün öz değeri, x_0 ' a ise λ_0 ' a uygun bir öz vektörü denir.

Tanım 2.1.49:

$\sigma_c(A):=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:(A-\lambda E)\text{ bire bir, }\overline{R(A-\lambda E)}=H,\text{fakat } R(A-\lambda E)\neq H\right\}$

kümesine A operatörünün sürekli spektrumu denir.

Tanım 2.1.50: $\sigma_r(A):=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:(A-\lambda E)\text{ bire bir, }\overline{R(A-\lambda E)}\neq H\right\}$

kümesine A operatörünün artık spektrumu denir.

$\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ ve $\sigma_r(A)$ kümeleri ayrıktır. Ayrıca spektrumun tanımından $\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)\cup\sigma_r(A)$ olduğu kolayca görülür.

Örnek 2.1.14: $L_2(0,1)$ uzayında $A: L_2(0,1)\rightarrow L_2(0,1)$ operatörü için

(1) $A_1u:=u'+au,\ D(A_1)=\overset{0}{W}{}_2^1(0,1)$;

(2) $A_2u:=u'+au,\ D(A_2)=\left\{u\in W_2^1(0,1):u(0)=0\right\}$,

operatörlerinin spektrumlarını bulalım.

Çözüm 2.1.14:

(1) $\lambda\in\mathbb{C}$ için $R(A_1-\lambda E)\perp e^{(a-\bar{\lambda})t}$ olduğunu gösterelim.

Gerçekten, her $u(t)\in\overset{0}{W}{}_2^1(0,1)$ için

$$\left(u'+au-\lambda u,e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L_2(0,1)}=\left(u',e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L_2(0,1)}+\left(u,(a-\bar{\lambda})e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L_2(0,1)}$$

$$=\left(u,e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)'_{L_2(0,1)}-\left(u,\left(a-\bar{\lambda}\right)e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L_2(0,1)}+\left(u,\left(a-\bar{\lambda}\right)e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)$$

$$=\left(u(1),e^{(a-\bar{\lambda})}\right)_{L_2(0,1)}-\left(u(0),1\right)_{L_2(0,1)}=0$$

olduğundan her $\lambda\in\mathbb{C}$ için $R(A_1-\lambda E)\perp e^{(a-\bar{\lambda})t}$ ve buradan $\overline{R(A_1-\lambda E)}\perp e^{(a-\bar{\lambda})t}$ bulunur. Yani, $\overline{R(A_1-\lambda E)}\neq L_2(0,1)$ olacaktır.

Sonuncu ve kalan spektrumunun tanımına göre $\sigma(A_1)=\sigma_r(A_1)=\mathbb{C}$.

(2) $A_2u:=u'+au,\ A:L_2(0,1)\to L_2(0,1),\ D(A_2)=\left\{u\in W_2^1(0,1):u(0)=0\right\}$.

Bu durumda $\lambda\in\mathbb{C}$ için

$$u'+au=\lambda u+f,\ f\in L_2(0,1)$$

denkleminin genel çözümü

$$u(t)=ce^{(\lambda-a)t}+\int_0^t e^{-(\lambda-a)(t-s)}f(s)\,ds$$

şeklinde olup $u(0)=0$ sınır değer koşulundan $c=0$ bulunur. Öyleyse, her $\lambda\in\mathbb{C}$ ve her $f\in L_2(0,1)$ için $(A_2-\lambda)u=f$ denkleminin

$$u(t)=\int_0^t e^{-(a-s)(t-s)}f(s)\,ds\in W_2^1(0,1)$$

şeklinde bir tek çözümü vardır, yani her $\lambda\in\mathbb{C}$ için $(A_2-\lambda E)^{-1}\in B\left(L_2(0,1)\right)$' dir. Başka bir ifadeyle $\sigma(A_2)=\varnothing,\ \rho(A_2)=\mathbb{C}$' dir.

Tanım 2.1.51: H bir Hilbert uzayı ve $T:D(T)\subset H\to H$ lineer kapalı bir operatör olsun. Eğer $\rho(T)\neq\varnothing$ ve $\lambda\in\rho(T)$ için $R_\lambda(T)\in C_\infty(H)$ ise T' ye H' da ayrık spektrumlu operatör denir.

Tanım 2.1.52: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $A:D(A)\subset H\to H$ bir Hilbert uzayında öz-eşlenik bir operatör olmak üzere

$$D\left(f(A)\right):=\left\{x\in H:\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(\lambda)\right|^2 d\left(E_\lambda x,x\right)<+\infty\right\}$$

(burada E_λ, A operatörü için birimin ayrılışıdır) kümesi üzerinde

$$f(A) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, dE_{\lambda} x,\ f(A) : D\big(f(A)\big) \subset H \to H$$

şeklinde tanımlanan operatöre A operatörünün f fonksiyonu denir.

Tanım 2.1.53: H bir Hilbert uzayı, $A : D(A) \subset H \to H$, $B : D(B) \subset H \to H$ iki lineer öz-eşlenik operatör ve $E_{\lambda}(A),\ \lambda \in \mathbb{R},\ E_{\mu}(B),\ \mu \in \mathbb{R}$ sırasıyla A ve B operatörlerinin spektral fonksiyonları olsun. Eğer her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $E_{\lambda}(A)$ ve $E_{\mu}(B)$ sınırlı öz-eşlenik operatörleri komutatif iseler, A ve B operatörlerine H Hilbert uzayında komutatif operatörler denir.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

3.1. SİMETRİK OPERATÖRLERİN GENİŞLEMELERİ

3.1.1. Dissipativ Genişlemeler ve Sınır Değer Problemleri

Biz bu bölümde eşit defekt sayılı, özelikle öz-eşlenik olan simetrik bir operatörün dissipativ genişlemeleri ele alınmıştır. Yani simetrik operatörlerin öz-eşlenik genişlemeler teorisinde kullanılan geleneksel yaklaşımın aksine diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinde kullanılan uygun sınır şartları altında genişlemeleri incelenmiştir. Burada bir dissipativ lineer bağıntı ve sınır değer uzayı kavramları bizim için önemli kavramlardır.

3.1.1.1. Simetrik Operatörler

Tanım 3.1.1.1.1: A yoğun tanımlı bir $\mathfrak{H}$ Hilbert uzayında lineer bir operatör olsun. Bu durumda $A \subset A^*$ ve her $f, g \in \mathfrak{D}(A)$ için;

$$(Af, g) = (f, Ag) \tag{3.1}$$

ise A operatörüne $simetrik\ operatör$ denir. Burada $\mathfrak{D}(A)$, $\mathfrak{H}$ hilbert uzayında yoğun tanımlıdır.

Öz-eşlenik bir operatör daima kapalı olduğundan $A \subset A^*$ bağıntısı simetrik operatörün kapanabilir olduğunu gösterir. Dolayısıyla simetrik operatörleri aşağıdaki şekilde kapanabilir olduğunu göz önünde bulunduracağız.

Örnek 3.1.1.1.1: $\mathfrak{H} = L_2(0,1)$, $Af = -\frac{d^2}{dt^2}$, $\mathfrak{D}(A) = \overset{0}{W}{}_2^2(0,1)$ olsun. $\overset{0}{W}{}_2^2(0,1)$ tanımından ve $\overset{0}{W}{}_2^2(0,1) \subset C^1[0,1]$ olduğundan, A operatörü kapalıdır. İşte burada A' ya

$$(l[f])(t) = -\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$$

diferansiyel ifadesi tarafından $L_2(0,1)$ üzerinde üretilen minimal operatör denir.

Her $f,g \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,1)$ için,

$$\int_0^1 (l[f])(t)\overline{g(t)}\,dt - \int_0^1 f(t)\overline{(l[f])(t)}\,dt$$

$$= \left(f(1)\overline{g'(1)}) - f'(1)\overline{g(1)}\right) - \left(f(0)\overline{g'(0)}) - f'(0)\overline{g(0)}\right) \qquad (3.2)$$

olup, buradan $f,g \in \mathfrak{D}(A)$ için (3.1) sağlanır. Bu yüzden A operatörü simetriktir. Şimdi A^*' ı bulalım. $M{:}\, Mf = -f''$, $\mathfrak{D}(M) = \overset{0}{W}{}_2^2(0,1)$ olsun. (3.2)' ye göre $f \in \mathfrak{D}(A)$, $g \in \mathfrak{D}(M)$ için, $(Af,g)-(f,Mg) = 0$ ' dır. Yani, $M \subset A^*$' dır. Diğer taraftan, eğer $g \in \mathfrak{D}(A^*)$, $h = A^*g$ ve $g_0 \in W_2^2(0,1)$, $l[x] = h$ denkleminin keyfi bir çözümü ise bu durumda her $f \in \mathfrak{D}(A)$ için (3.2)' den $(f,h) = (f,l[g_0]) = (l[f],g_0) = (Af,g_0)$ olduğu görülür.

Ayrıca eşlenik operatörün tanımından $(f,h) = (f,A^*g) = (Af,g)$'dir. Böylece her $f \in \mathfrak{D}(0,1)$ için $(Af, g-g_0) = 0$' dır. Burada $g-g_0$, $\frac{d^2}{dt^2}(g-g_0) = 0$ denkleminin genelleştirilmiş bir çözümüdür. Böylece her $t \in [0,1]$ için $g(t) = g_0(t) + \alpha + \beta t$ 'dir.

Sonuç olarak $g \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,1) = \mathfrak{D}(M)$ olup $A^*g = h = l[g_0] = l[g]$' dır.

Bu yüzden, $A^* = M$'dir. $\mathfrak{D}(A)$ kümesi, $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$ sınır şartlarıyla $\mathfrak{D}(A^*)$' dan farklıdır. Sınır durumlarını belirli bir şekilde uygulayarak, A operatörünün düzgün genişlemelerini belirlemek mümkündür. Yani $\tilde{A}$, $A \subset \tilde{A} \subset A^*$' dır. Daha sonra $f(0) = f(1) = 0$ koşulunu inceleyeceğiz. Örneğin A' nın bir öz-eşlenik genişlemesini vereceğiz. Diğer taraftan, A 'nın genişlemelerinin, geniş sınıflarının sınır koşulları açısından tanımlanabileceğini göreceğiz. Ayrıca, uygun bir şekilde genelleştirilen sınır koşulu kavramı, genel simetrik operatörler tanımlanması için evrensel bir araç olarak ortaya çıkacaktır.

Şimdi genel duruma dönelim. A, $\mathfrak{H}$ ‘ da keyfi simetrik bir operatör ve λ kompleks bir sayı olsun. $\mathfrak{M}_\lambda = \mathfrak{R}(A-\lambda E)$ eşitliğini göz önüne alalım. Buradan, $\mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_\lambda$ kümesi $\bar{\lambda}$ öz değerine uygun A^* operatörünün öz uzayıyla çakışır.

Gerçekten eğer $g \in \mathfrak{N}_\lambda$ ise, o zaman herhangi bir $f \in \mathfrak{D}(A)$ için,

$$(Af-\lambda f, g) = 0 \tag{3.3}$$

yani;

$$\big(Af, g\big) = \big(f, \bar{\lambda} g\big)\text{' dır.} \tag{3.4}$$

Bu ise, A^* operatörünün tanımına göre, $g \in \mathfrak{D}(A^*)\; ve\; A^*g = \bar{\lambda}g$ anlamına gelmektedir. Diğer taraftan, $A^*g = \bar{\lambda}g$ ise, her bir $f \in \mathfrak{D}(A)$ için (1.4) eşitliği sağlanır. Böylece, $g \in \mathfrak{N}_\lambda{}'$ dır.

Tanım 3.1.1.1.2: $k = 1, \dots, n,\;\; f_k \in \mathfrak{M}_k$ için $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = 0$ denklemi sadece $f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0$ için sağlanıyorsa bu $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_n$ kümelerine lineer bağımsızdır denir.

Teorem 3.1.1.1.1: $\mathfrak{D}(A)$, $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$, $\mathfrak{N}_\lambda$ lineer kümeleri lineer bağımsızdır ve onların direkt toplamı $\mathfrak{D}(A^*)$ ile çakışır. Yani

$$\mathfrak{D}(A^*) = \mathfrak{D}(A) \dotplus \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} \dotplus \mathfrak{N}_\lambda \tag{3.5}$$

İspat: Önce lineer bağımsızlık bölümünü ispat edelim.

$$f + g + h = 0, \quad f \in \mathfrak{D}(A),\; g \in \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}},\; h \in \mathfrak{N}_\lambda \tag{3.6}$$

olsun. $A^* - \bar{\lambda}E$ operatörünün (1.6) eşitliğinin her iki tarafına da uygularsak

$$(A-\lambda E)f + \big(\lambda - \bar{\lambda}\big)g = 0 \tag{3.7}$$

eşitliğini elde ederiz. Ancak, $\big(A-\bar{\lambda}E\big)f \in \mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}, (\lambda - \bar{\lambda})g \in \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ ‘ dır. Bu alt uzaylar ortgonal olduğu için (3.7) eşitliği ancak

$$\big(A-\bar{\lambda}E\big)f = 0, \quad \lambda - \bar{\lambda})g = 0 \tag{3.8}$$

olması durumunda mümkündür. Bu eşitliklerden ilki $\bar{\lambda}(f,f) = (Af,f)$ olduğunu göstermektedir. A’nın simetrikliğinden dolayı (Af,f) reeldir. Bu yüzden $f = 0$ olur. (3.8)’de ikinci eşitlikten $g = 0$ olduğu açıktır. (3.6) eşitliği göz önünde bulundurulacak olursa, $h = 0$ sonucuna varılır.

Şimdi, (3.5) formülünü ispat edelim. $\mathfrak{D}(A^*) \supset \mathfrak{D}(A) \dotplus \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} \dotplus \mathfrak{N}_{\lambda}$ açıktır. Geriye sadece her bir $u \in \mathfrak{D}(A^*)$ vektörü için

$$u = f + g + h, \quad f \in \mathfrak{D}(A),\ g \in \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}},\ h \in \mathfrak{N}_{\lambda} \tag{3.9}$$

olduğunu göstermek kalır.

İlk olarak, $\mathcal{M}_{\bar{\lambda}}$ kümesinin kapalı olduğunu biliyoruz. Herhangi bir $\varphi \in \mathfrak{D}(A)$ için,

$$\begin{aligned}\left\|(A - \bar{\lambda}E)\varphi\right\|^2 &= \big((A - Re\lambda.E)\varphi + iIm\lambda.\varphi, (A - Re\lambda.E)\varphi + iIm\lambda.\varphi\big)\\ &= \|(A - Re\lambda.E)\varphi\|^2 + iIm\lambda(\varphi, (A - Re\lambda.E)\varphi\\ &\quad -iIm\lambda\big((A - Re\lambda.E)\varphi, \varphi\big) + (Im\lambda)^2\|\varphi\|^2\\ &= \|(A - Re\lambda E)\varphi\|^2 + (Im\lambda)^2\|\varphi\|^2,\end{aligned}$$

durumu ortaya çıkar ve bu nedenle de

$$\left\|(A - \bar{\lambda}E)\varphi\right\|^2 \geq (Im\lambda)^2\|\varphi\|^2 \quad \varphi \in \mathfrak{D}(A) \tag{3.10}$$

elde edilir.

Eğer $\varphi_n \in \mathfrak{H}$ kümesi, $n \to \infty$ iken $\big(A - \bar{\lambda}E\big)\varphi_n \to \psi \in \mathfrak{H}$ şartını sağlayan bir dizi ise bu durumda, o halde (3.10)' dan ve $\mathfrak{H}$ uzayının tamlığından dolayı, $\varphi_n \to \varphi_0$ elde ederiz, burada φ_0 , $\mathfrak{H}$' da belirli bir vektördür. A operatörü kapalı olduğu için, $\varphi_0 \in \mathfrak{D}(A)$, $\psi = \big(A - \bar{\lambda}E\big)\varphi_0$ durumlarını elde ederiz. Bu da $\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}$' nin kapalı olduğu anlamına gelmektedir. $\mathfrak{N}_{\lambda}$' nın tanımından ve $\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}$' nın kapalı olmasından dolayı, $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_{\bar{\lambda}} \oplus \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ ortogonal ayrılışı sağlanır. Özel olarak $\big(A^* - \bar{\lambda}E\big)u = v' + v''$, $v' \in \mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}, v'' \in \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$. $v' = \big(A - \bar{\lambda}E\big)f$, $f \in \mathfrak{D}(A)$ ve v'' ; $v'' = \big(\lambda - \bar{\lambda}\big)g$, $g \in \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ şeklinde yazılabileceği için,

$$\big(A^* - \bar{\lambda}E\big)u = \big(A - \bar{\lambda}E\big)f + \big(\lambda - \bar{\lambda}\big)g = \big(A^* - \bar{\lambda}E\big)(f + g)$$

eşitliğini elde ederiz. Çünkü $A^*f = Af$, $A^*g = \lambda g$'dir. Bu

$$\big(A^* - \bar{\lambda}E\big)(u - f - g) = 0$$

olduğunu göstermektedir. Bundan dolayı, $h = u - f - g \in \mathfrak{N}_{\lambda}$'dir. Böylece, $f \in \mathfrak{D}(A)$, $g \in \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$, $h \in \mathfrak{N}_{\lambda}$ olacak şekilde $h = f + g + h$ durumu ortaya çıkar ve (3.9) gösterimi ispat edilmiş olur.

$A^{*}u = Af + \lambda g + \bar{\lambda}h$ olduğu için Teorem 3.1.1.1.1 , A^{*} operatörünün tam bir tanımını vermektedir.

$n_{+} = dim\mathfrak{N}_{\lambda},\ n_{-} = dim\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ sayıları $\lambda,\ Im\lambda > 0$ yarı düzlemi boyunca ilerlediği zaman değişmez. (n_{+}, n_{-}) defekt çiftine A operatörünün defekt endeksleri adı verilir. Buradaki n_{+} , n_{-} sayılarına ise onun defekt sayıları denir.

Aşağıdaki sonuç direkt olarak Teorem 3.1.1.1.1' den elde edilir.

Sonuç 3.1.1.1.1: Kapalı bir simetrik öperatörün öz-eşlenik olabilmesi için gerek ve yeter koşul onun defekt indeksinin $(0,0)$' a eşit olmasıdır.

3.1.1.2. Dissipativ Operatörler

Tanım 3.1.1.2.1: A, $\mathfrak{H}$ hilbert uzayında $\mathfrak{D}(A)$ yoğun tanımlı bir lineer operatör olsun. Eğer her $f \in \mathfrak{D}(A)$ için

$$Im(Af, f) \geq 0 \tag{3.11}$$

ise A' ya dissipativ operatör denir.

Eğer her $f \in \mathfrak{D}(A)$ için

$$Im(Af, f) \leq 0 \tag{3.12}$$

ise A' ya akümülatif operatör denir.

Bir lineer $A\ operat$örünün akümülatif olabilmesi için $-A$'nın disipativ olması gerektiği için dissipativ operatörle ilgili tüm sonuçlar kolaylıkla akümülatif operatörler için de değiştirilerek yapılabilir.

Bir dissipativ veya akümülatif operatör, eğer trivial olmayan yani A'nın kendisinden farklı hiçbir dissipativ veya akümülatif genişlemesi yoksa buna maksimal dissipativ (maksimal akümülatif) denir.

Bir dissipativ bir operatör her zaman kapanabilirdir. Gerçekten, $f_n \in \mathfrak{D}(A)$ için $f_n \to 0$ ve $Af_n \to g$ $(n \to \infty)$olsun. Her hangi bir $f \in \mathfrak{D}(A)$ ve keyfi α kompleks sayısı için

$$Im(A(f + \alpha f_n), f + \alpha f_n) \geq 0$$

olur. Buradan da limit durumuna geçersek

$$Im(Af, f) + Im\alpha(g, f) \geq 0$$

elde edilir.

Bu eşitsizliğin keyfi bir α kompleks sayısı için sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul $(g,f)=0$ olmasıdır. $\mathfrak{D}(A)$, $\mathfrak{H}$' da yoğun olduğundan dolayı $g=0$' dır. Dissipativ operatörün kapanışı da dissipativ olduğu açıktır. Bir maksimal dissipativ operatör daima kapalıdır.

Teorem 3.1.1.2.1: Her dissipativ operatörün maksimal bir dissipativ genişlemesi vardır. Bir dissipativ A operatörünün maksimal dissipativ olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $Im\lambda < 0$ şartını sağlayan keyfi λ için $\Re(A-\lambda E)$ 'nin tüm uzayla çakışmasıdır.

İspat: A, kapalı bir dissipativ operatör ve $Im\lambda < 0$ olsun. O zaman $\Re(A-\lambda E)$ kapalıdır. Gerçekten, (1.11) eşitliği $Im\big((A-\lambda E)f,f\big) \geq -Im\lambda(f,f)$ durumunu göstermektedir, fakat $Im((A-\lambda E)f,f) \leq \|(A-\lambda E)f\|.\|f\|$' dır. Yani $-Im\lambda\|f\| \leq \|(A-\lambda E)f\|$' dır. Buradan $\Re(A-\lambda E)$ kapalıdır. Şimdi iki ihtimal bulunmaktadır. Eğer bazı λ $(Im\lambda < 0)$ için, $\Re(A-\lambda E)=\mathfrak{H}$ ise, bu durumda A operatörü maksimal dissipativdir.

Eğer $\Re(A-\lambda E) \neq \mathfrak{H}$ ise o zaman A operatörü trivial olmayan dissipativ bir genişlemeye sahiptir. $\tilde{A}$ operatörü dissipativdir:

$$\begin{aligned}\big(\tilde{A}(f+u),f+u\big) &= (Af,f)+\bar{\lambda}(u,u)+(Af,u)+\bar{\lambda}(u,f)\\ &= (Af,f)+\bar{\lambda}(u,u)+(f,A^{*}u)+\bar{\lambda}(u,f)\\ &= (Af,f)+\bar{\lambda}(u,u)+\lambda(f,u)+\bar{\lambda}(u,f),\end{aligned}$$

böylece,

$$Im\big(\tilde{A}(f+u),f+u\big) = Im(Af,f)+Im\bar{\lambda}(u,u) \geq 0$$

olur.

Son olarak, $\Re\big(\tilde{A}-\lambda E\big)=\mathfrak{H}$ olduğunu doğrulamak zor değildir. Yukarıda gösterildiği üzere, $\tilde{A}$ operatörü maksimal dissipativtir.

Simetrik bir operatörün aynı anda hem dissipativ hem de akümülatif olduğunu gösterelim. Teorem 3.1.1.2.1 ve Sonuç 3.1.1.1.1 'den görülüyor ki, bir operatörün hem maksimal dissipativ ve hem de maksimal akümülatif olabilmesi için gerek ve yeter koşul onun öz-eşlenik olmasıdır. Maksimal dissipativ veya maksimal akümülatif olan simetrik bir operatöre maksimal simetrik denir. Teorem 3.1.1.2.1' e göre, simetrik bir A operatörünün maksimal simetrik olabilmesi için gerek ve yeter koşul onun defekt sayılarından birinin sıfıra eşit olmasıdır (Nainmark, 1968). Başka bir ifadeyle A operatörünün maksimal simetrik olabilmesi için gerek ve yeter koşul o operatörün trivial olmayan simetrik genişlemelere sahip olmasıdır.

Teorem 3.1.1.2.2: $\tilde{A}$, simetrik bir A operatörünün dissipativ (akümülatif) bir genişlemesi olsun, bu durumda $\tilde{A} \subset A^*$ olur.

İspat. $\tilde{A} \supset A$'nın dissipativ bir uzantı olduğunu varsayalım. Teorem 3.1.1.2.1' e göre, $\tilde{A}$ operatörü maksimal dissipativdir. Şimdi aşağıdaki operatörleri göz önüne alalım.

$$B = (A - iE)(A - iE)^{-1}\,, \quad \tilde{B} = \left(\tilde{A} - iE\right)\left(\tilde{A} - iE\right)^{-1} \tag{3.12}$$

operatörlerini düşünelim. $-i$ sayısının dissipativ (aynı zamanda simetrik) bir operatörün öz değeri olamayacağını görmek hiç de zor değildir. Bu yüzden, (3.12) formülü anlamlıdır. B operatörü simetrik olarak $\mathfrak{M}_{-i}$' den $\mathfrak{M}_i$ üzerine izometrik bir dönüşümdür. Eğer $f \in \mathfrak{M}_{-i}$ ise, yani $g \in \mathfrak{D}(A)$ için $f = (A + iE)g$ ise, bu takdirde

$$\begin{aligned}
\|Bf\|^2 &= \|(A - iE)g\|^2 = \big((A - iE)g, (A - iE)g\big) \\
&= (Ag, Ag) - i(g, Ag) + i(Ag, g) + (g, g); \\
\|f\|^2 &= \|(A + iE)g\|^2 = \big((A + iE)g, (A + iE)g\big) \\
&= (Ag, Ag) + i(g, Ag) - i(Ag, g) + (g, g);
\end{aligned}$$

olur.

$(Ag, g) = (g, Ag)$ eşitliği $\|Bf\| = \|f\|$ durumunu göstermektedir. Benzer şekilde Teorem 3.1.1.2.1' e göre $\mathfrak{H}$ 'nin tamamında tanımlı $\tilde{B}$ operatörü bir daralmadır. $\left\|\tilde{B}f\right\| \leq \|f\|$ ' dir. Böylece (3.12)' den

$$A = -i(B + E)(B - E)^{-1}, \qquad \tilde{A} = -i\left(\tilde{B} + E\right)\left(\tilde{B} - E\right)^{-1}$$

olur. $\tilde{B}$ 'nın B operatörünün bir genişlemesi olduğu açıktır. $u \in \mathfrak{N}_{-i}$ olsun. Bu durumda $u \perp \mathfrak{D}(B)'$ dir. Her hangi bir $u \in \mathfrak{D}(B)$ vektörü ve keyfi ξ karmaşık sayısı için

$$\|\xi v + u\|^2 - \left\|\tilde{B}(\xi v + u)\right\|^2 \geq 0 \tag{3.13}$$

durumu gerçekleşir.

$\left\|\tilde{B}v\right\| = \|Bv\| = \|v\|$ olduğu düşünülerek, (3.13)'ten

$$\|u\|^2 - \left\|\tilde{B}u\right\|^2 - 2Re\left(\xi\left(\tilde{B}v, \tilde{B}u\right)\right) \geq 0.$$

elde edilir.

ξ, keyfi bir sayı olduğu için, $\left(\tilde{B}v, \tilde{B}u\right) = 0$ olur. Böylece, her $v \in \mathfrak{D}(B)$ için $\tilde{B}v \perp \tilde{B}u = Bv$ olur. Yani $\widetilde{B}u \perp \mathfrak{M}_i$ veya $\tilde{B}u \in \mathfrak{N}_i{}'$ dir. Bu ise $\tilde{B} = B \oplus C$ anlamına gelir. Burada C daralma dönüşümüdür. g, $\mathfrak{D}(\tilde{A})$' dan alınan keyfi bir eleman olsun. $f = \left(\tilde{A} + iE\right)g$ ise, o zaman $\tilde{B}f = \left(\tilde{A} - iE\right)g$ 'dir. Son iki eşitlikten şu sonuçları elde ederiz:

$$A^*g = \frac{1}{2i}\left(f - \tilde{B}f\right) = \frac{1}{2i}(f_1 + f_2 - Bf_1 - Cf_2)$$
$$= \frac{1}{2i}(f_1 - Bf_1) + \frac{1}{2i}(f_2 - Cf_2),$$

burada, $f_1 \in \mathfrak{M}_{-i}$,$f_2 \in \mathfrak{N}_{-i}$' dir. B operatörünün tanımına göre, $f_1 - Bf_1 \in \mathfrak{D}(A)$' dır. $f_2 - Cf_2 \in \mathfrak{N}_{-i} + \mathfrak{N}_i$ olur. Bu yüzden $g \in \mathfrak{D}(A^*)$ olup

$$A^*\text{g}=\frac{1}{2i}\ A(f_1 - Bf_1)\ +\frac{1}{2}(f_2 - Cf_2)\ =\ \frac{1}{2}(f_1 - Bf_1)\ +\frac{1}{2}(f_2 - Cf_2)$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\widetilde{A}\ \text{g}=\frac{1}{2}\ (f\ \ + \tilde{B}f\ \ )\ +\frac{1}{2}(f_2 - Cf_2)\ =\ \frac{1}{2}(f_1 - Bf_1)\ +\frac{1}{2}(f_2 - Cf_2)$$

olur. Böylece $\widetilde{A}$ g $=A^*$g' dir.

3.1.1.3. Lineer Bağıntılar

Bir $\mathfrak{H}$ Hilbert uzayında bir lineer bağıntı deyince keyfi bir $\theta \in \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ lineer alt kümesini anlayacağız. Eğer θ_1 , θ_2 lineer bağıntılar ve $\theta_1 \subset \theta_2$ ise bu durumda θ_2'ye θ_1' in bir genişlemesi diyeceğiz.

Tanım 3.1.1.3.1: Bir θ lineer bağıntısına, eğer keyfi $\{x, x'\} \in \theta$ için $Im(x', x) \geq 0$ (eğer $Im(x', x) \leq 0$ veya Im(x', x)= 0) ise, dissipativ (akümülatif, simetrik) denir. Bir dissipativ (akümülatif, simetrik) bağıntının eğer trivial olmayan dissipativ genişlemesi yoksa maksimal dissipativ (maksimal akümülatif, maksimal simetrik) adı verilir. Simetrik bir bağıntı, aynı anda hem maksimal dissipativ hem de maksimal akümülatif ise Hermitian (veya öz-eşlenik) adını alır.

Eğer, $\{x, x'\} \in \theta$, $\{y, y'\} \in \theta$ ve $x' + ix = y' + iy$ ise, bu durumda

$$\{x - y, x' - y'\} \in \theta, x' - y' = -i(x - y).$$

Diğer taraftan

$$0 \leq \operatorname{Im}(x' - y', x - y) = \operatorname{Im}(-i(x - y), x - y) = -\|x - y\|^2$$

olur ve bu sebeple $x = y, x' = y'$ elde edilir. θ bağıntısının Cayley dönüşümü adı verilen U_0 operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mathfrak{D}(U_0) = (x' + ix : \{x, x'\} \in \theta), \quad U_0(x' + ix) = x' - ix$$

Bu tanıma göre

$$\|U_0 (x' + ix)\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 - 2Im(x', x),$$

$$\|x' + ix\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 + 2\, Im(x', x),$$

ve θ dissipativ olduğu için;

$$\|U_0 (x' + ix)\| \leq \|x' + ix\|, \qquad \{x, x'\} \in \theta \tag{3.14}$$

olur.

Eğer θ bağıntısı simetrik ise, o zaman (3.14)' teki eşitlik geçerli olmuş olur. Aşağıdaki teorem, yukarıda belirlenen sınıflara ait olan lineer bağıntıların yapısını tanımlamaktadır.

Teorem 3.1.1.3.1:

$$(K - E)x' + i(K + E)x = 0 \tag{3.15}$$

$$(K - E)x' - i(K + E)x = 0 \tag{3.16}$$

denklemleri tarafından belirlenen lineer bağıntılar sırasıyla maksimal dissipativ ve maksimal akümülatiftir.

Burada K, $\mathfrak{H}$ üzerinde bir daralmadır. Tersine olarak sırasıyla keyfi maksimal dissipativ ve maksimal akümülatif bağıntılar (3.15) ve (3.16) formunda gösterime sahiptirler. Buradaki K daralması bir bağıntı tarafından tek şekilde belirlidir. Sırasıyla maksimal dissipativ ve maksimal akümülatif bağıntılarının simetrik olabilmesi için gerek ve yeter koşul (3.15) ve (3.16) daki K operatörünün izometrik olmasıdır. Hermitian bağıntılarının genel şekli (3.15) ve (3.16) formülü tarafından verilmiştir. Burada K, $\mathfrak{H}$ üzerinde bir üniter operatördür. (Gorbachuk, 1991)

Sonuç 3.1.1.3.1: Maksimal simetrik bir θ bağıntısının maksimal dissipativ mi yoksa maksimal akümülatif mi olduğunu göstermek zor değildir.

Gerçekten, θ maksimal akümülatif bağıntısının U_θ Cayley dönüşümünü ve U_{θ_1}'deki θ_1 bağıntısını $\left(\theta_{\tilde{1}} = \left\{\{-x, x'\}: \{x, x'\} \in \theta\,\right\}\right)$ göz önüne alalım. Bunlar izometrik operatörlerdir. $\mathfrak{D}(U_\theta)$=$\mathfrak{R}\left(U_{\theta_1}\right)$ ve $\mathfrak{R}(U_\theta)$=$\mathfrak{D}\left(U_{\theta_1}\right)$ olduğu için, U_θ, U_{θ_1} operatörlerinden en az biri $\mathfrak{H}$'nin tamamında tanımlanır. Aksi takdirde tüm $\mathfrak{H}$ uzayında birinin izometrik bir genişlemesini oluşturmalıyız. Bu yüzden uygun bir lineer bağıntının simetrik bir genişlemesi maksimal simetrik olmasıyla çelişmektedir. Bu nedenle, θ (3.15) veya (3.16) denklemlerinden biriyle belirlenir.

Sonuç 3.1.1.3.2: (3.15) denkleminde üniter bir K operatörü için

$$(cos\, C)x - (sin\, C)x' = 0$$

yazılabilir burada, C, $K = e^{-2iC}$ eşitliğiyle K operatörü ile bağlantılı $\mathfrak{H}$ ' da öz-eşlenik bir operatördür.

Sonuç 3.1.1.3.3: Teorem 3.1.1.3.1'in ispatına benzer genelliği bozmadan keyfi dissipativ ve akümülatif bağıntılar sırasıyla aşağıdaki şekildedir:

$$K(x' + ix) = x' - ix, \qquad x' + ix \in \mathfrak{D}(K)$$

$$K(x' - ix) = x' + ix, \qquad x' - ix \in \mathfrak{D}(K)$$

Burada K; Her $f \in \mathfrak{D}(K)$ için, $\|Kf\| \leq \|f\|$ özelliğine sahip lineer bir operatördür. $\mathfrak{H}$'da dissipativ ve akümülatif bağıntıların simetrik olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul K operatörünün izometrik olmasıdır.

3.1.1.4. Sınır Değer Uzayları ve Dissipativ Genişlemelerin İfadesi

$A, \mathfrak{H}$ hilbert uzayında eşit, sonlu veya sonsuz defekt sayılı, kapalı simetrik bir operatör olsun.

Tanım 3.1.1.4.1:

i) Her $f, g \in \mathfrak{D}(A^*)$ için $(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}$;

ii) Her $F_1, F_2 \in \mathcal{H}$ için $\Gamma_1 f = F_1, \Gamma_2 f = F_2$ olacak şekilde $f \in \mathfrak{D}(A^*)$ vardır,

şeklinde tanımlanan $\Gamma_1, \Gamma_2 : \mathfrak{D}(A^*) \to \mathcal{H}$ ya bir lineer dönüşüm, $\mathcal{H}$ ‘da bir Hilbert uzayı olmak üzere $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ üçlüsüne A operatörünün bir sınır değer uzayı denir. Bu tanıma göre $f \in \mathfrak{D}(A)$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\Gamma_1 f = \Gamma_2 f = 0$$

olmasıdır. Gerçekten Tanım 3.1.1.4.1' deki ii' ye göre $f \in \mathfrak{D}(A)$ için $\Gamma_1 f = -\Gamma_2 f$ ve $\Gamma_2 g = \Gamma_1 f$ olacak şekilde bir $g \in \mathfrak{D}(A^*)$ vardır. Buradan

$$0 = (A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}} = \|\Gamma_1 f\|^2{}_{\mathcal{H}} + \|\Gamma_2 f\|^2{}_{\mathcal{H}}$$

olup $\Gamma_1 f = \Gamma_2 f = 0$' dır.

Tersine olarak eğer $\Gamma_1 f = \Gamma_2 f = 0$ ise bu durumda her $g \in \mathfrak{D}(A^*)$ için $(A^*f, g) = (f, A^*g)$ olur. Bu ise $f \in \mathfrak{D}(A^{**}) = \mathfrak{D}(A)$ olduğunu gösterir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.1.4.1: (n, n) $(n \leq \infty)$ defekt endeksine sahip herhangi bir simetrik operatör için, $dim\mathcal{H} = n$ olan $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ bir sınır değerleri uzayı vardır. (Gorbachuk, 1991)

Şimdi, $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, A' nın keyfi bir sınır değer uzayı olsun.

Teorem 3.1.1.4.2: Eğer, K , $\mathfrak{H}$ ‘da bir daralma ise, o zaman $f \in \mathfrak{D}(A^*)$ elemanlarının kümesi için aşağıdaki şartları sağlayan A^* operatörününün kısıtlanışı sırasıyla A'nın bir maksimal dissipativ ve maksimal akümülatif genişlemesidir.

$$(K - E)\Gamma_1 f + i(K + E)\Gamma_2 f = 0 \tag{3.17}$$

$$(K-E)\Gamma_1 f - i(K+E)\Gamma_2 f = 0 \qquad (3.18)$$

Tersine olarak sırasıyla A operatörününün keyfi maksimal dissipativ ve maksimal akümülatif genişlemesi $f \in \mathfrak{D}(A^*)$ elemanlarının kümesi için A^* ‘ın kısıtlanışı (3.17) ve (3.18) eşitliklerini sağlar. Burada bir K daralması bir genişleme tarafından tek türlü belirlidir.

$\mathfrak{H}$ üzeride bir A operatörününün maksimal simetrik genişlemeleri (3.17) ve (3.18) durumlarında tanımlanır. Burada K izometrik bir operatördür.

Eğer K üniter ise bu şartlar bir öz-eşlenik genişlemeyi tanımlar. (3.17) ve (3.18) eşitlikleri $(cosC)\Gamma_2 f - (sinC)\Gamma_1 f = 0$’ a denktir.

Burada C, $\mathfrak{H}$ üzerinde öz-eşlenik bir operatördür. Sırasıyla A operatörünün dissipativ ve akümülatif genişlemelerinin genel hali:

$$K(\Gamma_1 f + i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f, \qquad \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f \in \mathfrak{D}(K) \qquad (3.19)$$

ve

$$K(\Gamma_1 f - i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f, \quad \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f \in \mathfrak{D}(K) \qquad (3.20)$$

ile verilmektedir. Burada $K, f \in \mathfrak{D}(K)$ $\|Kf\| \leq \|f\|$ şartını sağlayan bir lineer operatördür. (1.19) ve (1.20) formülleri tarafından simetrik genişlemelerde tanımlanır. Burada K izometrik bir operatördür (Gorbachuk, 1991).

3.2. POZİTİF TANIMLI SİMETRİK OPERATÖRLER VE BUNLARIN ÇÖZÜLEBİLİR GENİŞLEMELERİ

Bu bölümde, soyut sınır şartları dilinde, A^* ’ ın kısıtlamaları olan pozitif tanımlı simetrik A operatörünün tüm çözülebilir genişlemeleri tanımlanmıştır ki bunlar A^* ‘ın kısıtlanışlarıdır.

3.2.1. Çözülebilir Genişlemeler

Tanım 3.2.1.1: A, bir pozitif tanımlı simetrik operatör olsun. Eğer bir $\widetilde{A}$ operatörü $A \subset \widetilde{A} \subset A^*$ koşulunu sağlamak üzere $\widetilde{A}^{-1}$ mevcut ve $\mathfrak{H}$ tanım kümesinde sınırlı bir operatör ise buna A operatörünün bir özel çözülebilir genişlemesi denir.

Literatürden biliyoruz ki pozitif tanımlı simetrik bir operatörün daima düzgün çözülebilir genişlemeleri vardır. Soyut sınır şartları dilinde bu genişlemelerin tam bir tanımını vereceğiz.

Teorem 3.1.1.4.2 pozitif belirli simetrik bir operatörün her zaman düzgün çözülebilir uzantıları olduğunu göstermektedir. Bunların biz A'nın pozitif tanımlı $\widetilde{A}$ genişlemesini ele alalım. Bu genellikle Friedrichs genişlemesidir (Gorbachuk, 1991).

$$\mathfrak{D}(A^*) = \mathfrak{D}(\widetilde{A}) \dotplus KerA^* \tag{3.21}$$

ayrışımı sağlanır. Gerçekten kabul edelim ki,

$f \in \mathfrak{D}(A^*)$ ve $g = \widetilde{A}^{-1}A^*f,\ h = f - g$ olsun. Bu durumda $g \in \mathfrak{D}(\widetilde{A})$,

$A^*h = A^*f - \widetilde{A}\, g = A^*f - A^*f = 0$ olur yani, $h \in Ker\, A^*$ ve $f = g + h$ 'dır.

$\widetilde{P}$ ve P_0 ile $\mathfrak{D}(A^*)$' dan $\mathfrak{D}(\widetilde{A})$ üzerine projektörler ve sırasıyla (3.21) ayrışımının gösterimidir.

Tanım 3.2.1.2: $\mathcal{H}$ bir Hilbert uzayı, Γ_1 ve Γ_2 de $\mathfrak{D}(A^*) \to \mathcal{H}$ lineer dönüşümlerdir. Eğer

1) Herhangi bir $f, g \in \mathfrak{D}(A^*)$ için $(A^*f, g) = (\widetilde{A}\,\widetilde{P} f, \widetilde{P}\, g) + (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_{\mathcal{H}}$ 'dir.
2) Herhangi bir $F_1, F_2 \in \mathcal{H}$ için, $\Gamma_1 f = F_1,\ \Gamma_2 f = F_2$ olacak şekilde $f \in \mathfrak{D}(A^*)$ elemanı vardır,

koşulları sağlanıyorsa bu $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ üçlüsüne (3.21) gösteriminin A operatörüne uygun bir pozitif sınır değer uzayı adı verilir.

Kolaylıkla görülebilir ki bir pozitif sınır değer uzayı (3.4) kısımındaki tanım anlamında da bir sınır değer uzayıdır.

$P : \mathfrak{H} \rightarrow Ker\ A^*$ bir ortoprojektör olsun. Buna göre

Lemma 3.2.1.1: A operatörünün pozitif bir sınır değer uzayı aşağıdaki şekilde oluşturulabilir.

$$\mathcal{H}^0 = Ker\ A^*, \quad \Gamma_1^0 = P\widetilde{A}\,\widetilde{P}\,, \quad \Gamma_2^0 = P_0 \tag{3.22}$$

İspat: Eğer, $f, g \in \mathfrak{D}(A^*)$ ise, bu durumda

$$(A^* f, g) = \left(A^*\left(\widetilde{P}\,f + P_0\right), \widetilde{P}\,g + P_0 f\right), \widetilde{P}\,g + P_0 g)$$

$$= \left(\widetilde{A}\,\widetilde{P}\,f, \widetilde{P}\,g\right) + \left(\widetilde{A}\,\widetilde{P}\,f, P_0 g\right) = \left(\widetilde{A}\,\widetilde{P}\,f, \widetilde{P}\,g\right) + (\Gamma_1^0 f, \Gamma_2^0 g)$$

olur. $F_1,\ F_2 \in \mathcal{H}^0$ için $f = \tilde{A}^{-1}F_1 + F_2$ olarak seçilirse,

$$\Gamma_1^0 f = P\widetilde{A}\,\widetilde{A}^{\,-1}F_1 = \widetilde{P}\,F_1 = F_1, \qquad \Gamma_2^0 f = P_0 F_2 = F_2$$

elde ederiz. Aşağıdaki Lemma özel olarak keyfi bir pozitif sınır değer uzayı ile (3.22) sınır değer uzayı arasındaki bağlantıyı gösteren konu üzerinde önemli bir rol oynamaktadır.

Lemma 3.2.1.2: Kabul edelim ki $(\mathcal{H}^1, \Gamma_1^1, \Gamma_2^1)$ ve $(\mathcal{H}^2, \Gamma_1^2, \Gamma_2^2)$, (3.21) gösteriminde A operatörünün uygun pozitif sınır değerler uzayı olsun. Bu durumda

$$\Gamma_1^1 = UX_1\Gamma_1^2\,, \qquad \Gamma_2^1 = UX_2\Gamma_2^2$$

'dır. Burada U, $\mathcal{H}^2$' den $\mathcal{H}^1$ 'e izometrik bir dönüşümdür. $X_i (i = 1,2)$, $\mathcal{H}^2$ de sınırlı bir operatör ve sınırlı bir terse sahiptir ayrıca $X_2^* X_1 = E$ 'dir (Gorbachuk, 1991).

Şimdi, $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ keyfi bir pozitif sınır değer uzayı olsun.

Teorem 3.2.1.1: B, $\mathfrak{H}$ üzerinde keyfi sınırlı lineer operatörü için, $f \in \mathfrak{D}(A^*)$ elemanlar kümesi A^* operatörünün kısıtlanışı için

$$\Gamma_2 f = B\Gamma_1 f \tag{3.23}$$

sağlanıyorsa buna A' nın bir düzgün çözülebilir genişlemesi denir. Diğer taraftan, bir A operatörünün keyfi bir düzgün çözülebilir genişlemesi $f \in \mathfrak{D}(A^*)$ kümesi için A^* 'ın kısıtlanışı (3.23) 'ü sağlar.

İspat: A_B , A^* ın tüm $f \in \mathfrak{D}(A^*)$ elemanlarının kümesi için (3.23) şartını sağlayan bir kısıtlanışı olsun. $A \subset A_B \subset A^*$olduğu açıktır.

Şimdi A_B operatörünün sınırlı bir terse sahip olduğunu ispat edelim. İlk önce aşağıdaki eşitliği yazalım

$$A_B^* = A_{B^*} \tag{3.24}$$

burada A_{B^*} , $\Gamma_2 f = B^* \Gamma_1 f$ şartına uygun bir genişlemesidir. Eğer $f \in \mathfrak{D}(A_B)$, $g \in \mathfrak{D}(A^*)$ ise bu durumda

$$(A_B\, f, g) - (f, A^*\, g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}$$

$$= (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_{\mathcal{H}} - (B\Gamma_1 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1 f, (\Gamma_2 - B^*\Gamma_1) g)_{\mathcal{H}}\text{'}$$

dır. Buradan $g \in \mathfrak{D}(A_B^*)$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul $g \in \mathfrak{D}(A_{B^*})$ olmasıdır.

$A_B^* \subset A^*$, $A_{B^*} \subset A^*$ olduğunu gösterir. Yani (2.4) eşitliği doğrudur. Bu ise $A_B = (A_{B^*})^*$ olduğunu gösterir, yani A_B kapalıdır.

Eğer $A_B f = 0$ ise bu takdirde $f = g + h$, $g \in \mathfrak{D}(\widetilde{A})$, h $\in KerA^*$ olduğunu varsayarak, $A_B f = A^* f = \widetilde{A}\, g = 0$ buluruz. Böylelikle $g = 0$ ve $f \in Ker\, A^*$ ' dır.

Lemma 3.2.1.2' ye göre

$$\Gamma_1 = UX_1\Gamma_1^0, \qquad \Gamma_2 = UX_2\Gamma_2^0 \tag{3.25}$$

dir, burada U, $\mathfrak{H}$ üzerinde KerA^* 'ın bir izometrisi ve X_1, X_2 de Ker A^* da sınırlı operatörlerdir. Özel olarak, $\Gamma_1 f = UX_1\, P\widetilde{A}\,\widetilde{P}\, f = 0$ ise bu takdirde $\Gamma_2 f = B\Gamma_1 f = 0$ 'dır. Yani $f \in \mathfrak{D}(A)$ için $Af = A_B f = 0$ olur. A pozitif tanımlı olduğu için $f = 0$' dır. Böylelikle $Ker\, A_B = \{0\}$ olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi, $\mathfrak{R}(A_B) = \mathfrak{H}$ olduğunu ispat edelim.

Keyfi bir $h \in \mathfrak{H}$ için, $f = \widetilde{A}^{-1}h + X_2^{-1}U^{-1}BUX_1Ph$ eşitliğini oluşturalım.

$f \in \mathfrak{D}(A^*)$ ve $A^*f = h$ olduğu açıktır. Diğer taraftan (3.25)' e göre;

$$\Gamma_1 f = UX_1\, P\widetilde{A}\,\widetilde{P}\, f = UX_1Ph$$

$$\Gamma_2 f = UX_2P_0 f = BUX_1Ph$$

'dır. Sonuç olarak, $\Gamma_2 f = B\Gamma_1 f$ 'dir.Yani, $f \in \mathfrak{D}(A_B)$ ve $A_B f = A^*f = h$' dır.

Böylece, A_B^{-1} operatörü vardır. Bu tüm $\mathfrak{H}$ uzayında tanımlı ve kapalıdır. Banach Teoremine göre ise A_B^{-1} sınırlıdır ve A_B genişlemesi bu yüzden çözülebilirdir.

Tersine olarak $\widetilde{A}_1$, A operatörünün bir düzgün çözülebilir genişlemesi olsun. $f \in \mathfrak{D}(\widetilde{A}_1)$ için (3.25)' i uygulayalım.

$$\Gamma_1 f = UX_1\, P\widetilde{A}\,\widetilde{P}\, f,$$

$$\Gamma_2 f = UX_2P_0\, f = UX_2P_0\widetilde{A}_1^{-1}A^*(\widetilde{P}\, f + P_0 f) = UX_2P_0\widetilde{A}_1^{-1}\widetilde{A}\,\widetilde{P}\, f.$$

E – P, $\mathfrak{R}(A)$, üzerinde ortoprojektör olduğu için, $\widetilde{(\widetilde{A}_1^{-1} - \widetilde{A}^{-1})}(E - P) = 0$

olur. Buradan

$$\Gamma_2 f = UX_2P_0\left((\widetilde{A}_1^{-1} - \widetilde{A}^{-1}) + \widetilde{A}^{-1}\right)\widetilde{A}\,\widetilde{P}\, f = UX_2(\widetilde{A}_1^{-1} - \widetilde{A}^{-1})\widetilde{A}\,\widetilde{P}\, f$$

$$= UX_2(\widetilde{A}_1^{-1} - \widetilde{A}^{-1})\widetilde{P}\,\widetilde{A}\,\widetilde{P}\, f = UX_2(\widetilde{A}_1^{-1} - \widetilde{A}^{-1})X_1^{-1}U^{-1}\Gamma_1 f$$

yazılabilir. Bu nedenle $\Gamma_2 f = B\Gamma_1 f$ elde edilir. Burada

B= $UX_2(\widetilde{A}_1^{-1} - \widetilde{A}^{-1})X_1^{-1}U^{-1}$ 'dir.

Böylece, $\widetilde{A_1} \subset A_B$ olduğu ispat edilmiş olur. $\widetilde{A_1}$ ve A_B operatörleri sınırlı terslenebilir ve onların tersleri tüm $\mathfrak{H}$ üzerinde tanımlı olduğundan $\widetilde{A_1} = A_B$ elde ederiz.

Sonuç 3.2.1.1: B= $UX_2(A_B^{-1} - \widetilde{A}^{-1})X_1^{-1}U^{-1}$ formülü doğrudur. Burada U, $\mathcal{H}$ üzerinde Ker A^*'ın bir izometrisidir, X_1 ve X_2, Ker A^* üzerinde $X_2^*.X_1 = E$ şartını sağlayan sınırlı terslenebilir operatörlerdir.

3.3. GENİŞLEMELERİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, (3.17) ve (3.18) sınır şartı ile ilgili simetrik bir A operatörünün maksimal dissipativ (maksimal akümülatif) A_k genişlemesinin spektral özellikleri ile K operatörünün özellikleri arasındaki bağlantıyı ortaya koyacağız. Buradaki teoremler kıyaslamalı bir nitelik taşımaktadır. A_{K_2} operatörü , bir A_{K_1} operatörü ile kıyaslanacaktır. Yani spektrumun ayrıklığı rezolvent operatörün $\mathfrak{S}_p$ Schatten-von Neumann sınıfına aitliği ve öz değerlerin asimtotik davranışı incelenecektir. Başka bir ifadeyle bu kıyaslama eğer K_1 ve K_2 operatörleri belirli bir anlamda kapalı ise bu takdirde A_{K_2} , A_{K_1} gibi aynı özelliklere sahiptir.

3.3.1. Sınır Dönüşümleri

Bir simetrik A operatörünün sınır değer uzayı tanımında(alt bölüm 3.1.4), $\Gamma_1, \Gamma_2 : \mathfrak{D}(A^*) \to \mathcal{H}$ sınır dönüşümü keyfi sürekli özelliklerine sahip olması gerekmez. Yine de onlar otomatik olarak gözükmektedir. $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, A operatörünün keyfi sınır değer uzayı olsun. $\gamma f = \{ \Gamma_2 f, 1f\}$ ile verilen $\gamma: \mathfrak{D}(A^*) \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ dönüşümü şeklinde tanımlansın. Şimdi $\mathfrak{D}(A^*)$ üzerinde aşağıdaki şekilde yeni bir skaler çarpım tanımlayalım.

$$\langle f, g\rangle = (f, g) + (A^* f, A^* g) \tag{3.25}$$

$\mathfrak{D}(A^*)$, $\langle ., . \rangle$ fonksiyonuna bağlı olarak bir Hilbert uzayıdır ve hemen (2.1) direkt gösterimi (3.25)' deki skaler çarpıma göre ortogonaldir. Yani $\mathfrak{D}(A^*) = \mathfrak{D}(A) \oplus \mathfrak{N}_{-i} \oplus \mathfrak{N}_i$ ‘dır. Ayrıca keyfi $f \in \mathfrak{N}_{\pm i}$ için

$$\langle f, f\rangle = 2(f, f) = \pm i((\Gamma_1 f , \Gamma_2 f)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 f)_{\mathcal{H}}) \tag{3.26}$$

doğrudur.

Lemma 3.3.1.1: γ , $\mathfrak{N}_{-i} \oplus \mathfrak{N}_i$’ nin $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ üzerine bir sürekli bire bir dönüşümdür (Gorbachuk, 1991).

$$P_1, P_2 : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \text{ ve } P_1\{F^1, F^2\} = F^1,\ P_2\{F^1, F^2\} = F^2$$

şartını sağlayan operatörleri gösterelim.

Lemma 3.3.1.2: $P_1(M_{\pm i}) = P_2(M_{\pm i}) = \mathcal{H}$ doğrudur. Burada $M_{\pm i} = \gamma(\mathfrak{N}_{\pm i})$' dir (Gorbachuk, 1991).

3.3.2. Rezolvent Açısından Kıyaslanabilirlik

A_K, A operatörünün aşağıdaki soyut sınır şartları tarafından sırasıyla maksimal dissipativ ve maksimal akümülatif genişlemesi olsun.

$$(K - E)\,\Gamma_1 f + i(K + E)\,\Gamma_2 f = 0$$

$$(K - E)\Gamma_1 f - i(K + E)\,\Gamma_2 f = 0$$

Burada K, $\mathcal{H}$ üzerinde bir daralma dönüşümüdür.

Teorem 3.3.2.1: K_1 ve K_2, $\mathcal{H}$ üzerinde daralma dönüşümü ve $\mu \in p(A_{K_1}) \cap \rho(A_{K_2})$ olsun. $R_\mu(A_{K_1}) - R_\mu(A_{K_2}) \in \mathfrak{S}_p$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$K_1 - K_2 \in \mathfrak{S}_p \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

Olmasıdır (Gorbachuk, 1991).

Sonuç 3.3.2.1: Eğer K_1 ve K_2 üniter ve $K_1 - K_2 \in \mathfrak{S}_\infty$ ise bu durumda A_{K_1} ve A_{K_2} operatörlerinin esas spektrumları çakışır.

Not 3.3.2.1: Teorem 3.3.2.1 ve Sonuç 3.3.2.1 bize K operatöründeki “küçük” bir değişikliğin A_K genişlemesinin spektral özelliklerinin nispeten küçük değişiklikleriyle sonuçlandığını göstermektedir.

3.3.3. Genişlemelerin s-Sayılarının Asimptotik Davranışı

Soyut sınır şartında gerçekleşen K operatörünün özellikleriyle A_K genişlemesinin rezolventinin özellikleri arasında yukarıda bulunan bağlantı, eğer K operatörünün s-sayılarının asimptotik davranışlarını biliyorsak, A_K operatörünün asimptotiği öz-eşlenik durumdaki öz değer asimptotikleri hakkında bilgi edinmemize imkan verir.

Teorem 3.3.3.1: $\mu_1 \in \rho(A_{K_1})$ için A operatörünün A_{K_1} belirli bir maksimal dissipativ veya maksimal akümülatif genişlemesinin $R_{\mu_1}(A_{K_1})$ rezolventi, tamamen sürekli bir operatör ve

$$\lim_{n\to\infty} n^{\propto} s_n\left(R_{\mu_1}(A_{K1})\right) = a \qquad (\propto > 0) \tag{3.27}$$

olsun. Bu durumda A_{K_2}, A'nın diğer maksimal dissipativ veya maksimal akümülatif genişlemesi ise ve $\mu_2 \in \rho\left(A_{K_2}\right)$ise bu takdirde

$$\lim_{n\to\infty} n^{\propto} s_n\left(R_{\mu_2}\left(A_{K_2}\right)\right) = a \tag{3.28}$$

eşitliğinin geçerli olabilmesi için, K_1 ve K_2'nin tamamen sürekli operatör ve

$$\lim_{n\to\infty} n^{\propto} s_n(K_1 - K_2) = 0 \tag{3.29}$$

olması yeterlidir (Gorbachuk, 1991).

Teorem 3.3.3.2: $\mu_1 \in \rho\left(A_{K_1}\right)$ için A operatörünün A_{K_1} belirli bir maksimal dissipativ veya maksimal akümülatif genişlemesinin $R_{\mu_1}\left(A_{K_1}\right)$ rezolventi tamamen sürekli bir operatör ve

$$\lim_{n\to\infty} n^{\beta} s_n\left(R_{\mu_1}\left(A_{K_1}\right)\right) = 0 \qquad (\beta > 0) \tag{3.30}$$

olsun. Eğer A_{K_2}, A genişlemesinin başka bir maksimal dissipativ veya maksimal akümülatif genişlemesi $\mu_2 \in \rho(A_{K_2})$ ise ve $K_1 - K_2$ operatörü tamamen sürekli ise, bu durumda

$$b_1 \leq n^{\delta} s_n\left(R_{\mu 2}\left(A_{K_2}\right)\right) \leq b_2 \;\; (0 < b_1 < \mathrm{b}_2 < \infty\,) \tag{3.31}$$

'dir. (3.7)' nin her $n \in \mathbb{N}$ ve $0 < \delta \leq \beta$ sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$c_1 \leq n^{\delta} s_n \quad (K_1 - K_2) \leq c_2 \;\; (0 < c_1, c_2 < \infty) \tag{3.32}$$

olmasıdır (Gorbachuk, 1991).

Eğer, $\mu_1 \neq i$ veya $\mu_2 \neq i$ ise, o zaman belirtilen durum, Teorem 3.3.3.1' in ispatının son kısmının tekrarı yoluyla elde edilir.

3.3.4. Tamamen Çözülebilir Genişlemeler

3.3.2, 3.3.3 alt bölümlerinin teoremleri; soyut sınır şartı içinde olan operatör ile buna karşılık gelen genişlemenin rezolventiyle bağlayan formüllere dayanmaktadır. Benzer formül çeşitleri, sınır şartı $\Gamma_2 f = B\Gamma_1 f$ ile bağıntılı olan pozitif tanımlı A operatörünün A_B düzgün çözülebilir genişlemesi için de vardır.

Lemma 3.3.4.1:

$$A_B^{-1} = \tilde{A}^{-1} + U'X_2'B(X_1')^{-1}(U')^{-1}P \tag{3.33}$$

formülü doğrudur. Burada U', $Ker\ A^*$ üzerinde $\mathcal{H}$'nın izometrisi, X_1' ve X_2' ' $\mathcal{H}$ üzerinde sınırlı operatörler sınırlı terslere sahip ve $(X_2')^* X_1' = E$ şartını sağlar ve $P: \mathfrak{H} \to Ker\ A^*$ bir ortoprojektördür.

İspat: Lemma 3.2.1.1 ve Lemma 3.2.1.1'e göre, $(X_2')^* X_1' = E$ olacak şekilde $\mathcal{H}$ üzerinde X_1', X_2' sınırlı operatörleri vardır. Öyleki

$$P\tilde{A}\tilde{P} = U'X_1'\Gamma_1, \qquad P_0 = U'X_2'\Gamma_2 \tag{3.34}$$

dir. Burada $\tilde{P}$ ve P_0 operatörleri (3.22)' deki gibi tanımlanır. $A_B y = h$ olsun. Bu durumda

$$h = A^* y = A^*(\tilde{P}y + P_0 y) = A^*\tilde{P}y = \tilde{A}\tilde{P}y$$

olur. Böylece, $\tilde{P}y = \tilde{A}^{-1}h$ ' dır. (3.34)' e göre

$$P_0 y = U'X_2'\Gamma_2 y = U'X_2'B\Gamma_1 y = U'X_2'B(X_1')^{-1}(U')^{-1}P\tilde{A}\tilde{P}y$$

$$= U'X_2'B(X_1')^{-1}(U')^{-1}Ph. \tag{3.35}$$

$y = \tilde{P}y + P_0 y = \tilde{A}^{-1}h + P_0 y$ olduğu için, $P_0 y = A_B^{-1}h - \tilde{A}^{-1}h$' yi elde ederiz. Bu eşitliği (3.35) ile kıyaslarsak (3.33) elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 3.3.4.1: Eğer $A_B^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$ ise A_B genişlemesine tamamen çözülebilirdir denir.

Teorem 3.3.4.1: $\tilde{A}^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ $1 \le p \le \infty$ olsun. $A_B^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ olması için gerek ve yeter koşul $B \in \mathfrak{S}_p$ olmasıdır.

3.3.5. Pozitif Tanımlı Genişlemeler

A, $\mathfrak{H}$ üzerinde pozitif tanımlı simetrik bir operatör olsun. Teorem 3.2.1.1' e göre, A operatörünün pozitif tanımlı öz-eşlenik genişlemesi vardır.Şimdi soyut sınır şartları açısından bu tarz genişlemeler tanımlayım.

Kabul edelim ki $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ 'da $\widetilde{A} \supset A$ pozitif tanımlı öz-eşlenik bir genişlemesi A operatörünün bir sınır değer uzayı olsun (Örneğin, Friedrichs Genişlemesi).

Teorem 3.3.5.1: $f \in \mathfrak{D}(A^*)$ kümesi için

$$\Gamma_2 f = B\Gamma_1 f \tag{3.36}$$

aşağıdaki şartı sağlayan vektörlerin kümesi için A^* operatörünün A_B kısıtlanışı, A' nın pozitif tanımlı öz-eşlenik bir genişlemesidir. Burada B , $\mathfrak{H}$ üzerinde negatif olmayan sınırlı bir operatördür.

İspat: B, $\mathcal{H}$ üzerinde negatif olmayan sınırlı bir operatör olsun. (3.24)' e göre A_B operatörü öz-eşleniktir. $f \in \mathfrak{D}(A^*)$ için pozitif sınır değer uzayı tanımından

$$(A_B f, g) = \left(\widetilde{A}\widetilde{P}f, \widetilde{P}f\right) + (\Gamma_1 f, \Gamma_2 f)_{\mathcal{H}} = \left(\widetilde{A}\widetilde{P}f, \widetilde{P}f\right)(\Gamma_1 f, B\Gamma_2 f)_{\mathcal{H}} \geq 0$$

olur. Diğer taraftan Teorem 3.2.1.1'e göre A_B operatörü sınırlı bir terse sahiptir. Bu ise A_B' nin pozitif tanımlı olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, genişleme teorisinin başlangıç noktası olarak kabul edilen "Simetrik Operatörlerin Genişlemeleri ve Spektral Yapısı" konusu ayrıntılı bir şekilde incelendiği için temel kaynak olarak, V. I. Gorbachuk ve M. L. Gorbachuk tarafından yazılan "Boundary Value Problems for Operator Differential Equations" kitabından faydalanılmıştır (Gorbachuk, 1991). Buradaki inceleme, genişlemelerin alışılmış anlamda olan tanım kümeleri yerine farklı bir bakış açısı içerir. Yani bir diferansiyel operatörün gerek dissipativ gerekse öz-eşlenik genişlemelerini sınır değerler dilinde ifadesi ele alınmıştır. Bu ifadenin nasıl bulunulacağına dair bilgiler teorik olarak verilmiş ve uygulamalar yapılarak daha iyi anlaşılması sağlanmıştır. Literatüre bakıldığında, yabancı dillerde yazılan birçok kaynak olmasına rağmen, yapılan bu çalışma ile diferansiyel operatörlerin genişleme teorisini sınır değerler uzayı anlamında çalışmak isteyen genç araştırmacılara kendi dillerinde bir kaynak olacaktır.

KAYNAKLAR

Abramovich, Y. A., C. D. Aliprantis, 2002a. An Invitation to Operator Theory, Graduate Studies in Math., Amer. Math., Soc. Providence, Rhode Island, 50.

Abramovich, Y. A., C. D. Aliprantis, 2002b. Problems in Operator Theory, Graduate Studies in Math., Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 51.

Biriuk, G., Coddington, E. A., 1964. Normal extensions of unbounded formally normal operators, J. Math. and Mech. , (13): 617-638.

Biyarov, H., Otelbayev M., 1993. Description of normal extensions, Math. Notes, 53 (5-6): 474-478.

Coddington, E. A., 1973 Extension theory of formally normal and symmetric subspaces, Mem. Amer. Math. Soc., 134: 1-80.

Davis, R. H., 1955. Singular normal differential operators, Tech. Rep., Dep. Math., California Univ., 10.

Dunford, N., J. T. Schwartz, 1958. Linear Operators I, Second ed., Interscience, New York,.

Dunford, N., J. T. Schwartz, 1963. Linear Operators II, Second ed., Interscience, New York.

Eidelman, Y., V. Milman, A. Tsolomitis, 2004. Functional Analysis, an introduction, Graduate Studies in Math., Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 66.

Gorbachuk, V. I., M. L. Gorbachuk, 1973. Boundary Value Problemsfor a First Order Differential Operator with Operator Coefcientsand Expansion in the Eigen functions of that Equation, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 208: 1268-1271.

Gorbachuk, V. I., Gorbachuk, M.L., 1991. Boundary Value Problems for Operator Differential Equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Ismailov, Z.I., 1992 Formally-normal extensions of an operator, Diff. Equations, Minsk, 28(5): 905-907.

Ismailov, Z. I., 1994a. A three-point normal boundary value problem for an operator-differential equation, Siberian Math. J., 35(5): 941-944.

Ismailov, Z.I., 1994b. Normal boundary value problems for a second-or derequation with bounded operator potential, Diff. Equations, 30(11): 1861-1862.

Ismailov, Z. I., 1998 Discreteness of the spectrum of first-order normal differential operators, Dokl. Math., 57(1): 32-33.

Ismailov, Z. I., Karatash, H., 2000. Some necessary conditions for the normality of differential operators, Dokl. Math., 62(2): 277-279.

Ismailov, Z.I., 2006. Compact inverses of first-order normal differential operators, J. Math. Anal. Appl., 320(1): 266-278.

Ismailov, Z.I., 2003 On thenormality of first-order differential operators, Bull. Polish Acad.Sci. Math. , 51(2): 139-145.

Ismailov, Z.I., 2005. On the discreteness of spectrum of normal second-order differential operators, Dokl. Math, 49(3): 5-7.

Karatash, H., Ismailov, Z.I., 2000. On a class of firstorder normal differential operators, Trans.Acad.Sci.Azerb. Ser.Phys.-Tech. Math. Sci., 20(4): 115-122.

Kilpi, Y., 1953. Über lineare normale Transformationen in Hilbertschen Raumes, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Ser. AI, 154.

Kilpi, Y., 1957. Über das komplexe Momenten Problem, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Ser. AI , 236.

Kilpi, Y., 1963. Über die Anzahl der hypermaximalen normalen fort setzungen normalen Transformationen, Ann. Univ. Turkuensis. Ser. AI , 65.

Kochubei, A. N., 1979. Symmetric Operators and Nonclassical Spectral Problems, Mat. Zametki, 25(3): 425-434.

Kokebayev, B., Otarov, H., 1985. On some properties of correct compressions of the operator of differentiation, Izrestiya AN Kaz.SSR, 5: 38-42.

Maksudov, F. G., Ismailov, Z. I., 1994. Normal extensions of second or derdifferential operators, Diff.Equations, 30(10):1687-1689.

Maksudov, F. G., Ismailov, Z. I., 1996a. Normal boundary value problems for a first-order differential equation, Dokl. Math.,5(2): 659-661.

Maksudov, F. G., Ismailov, Z.I., 1996b. Normal boundary value problems for differential equations of higher order, Turkish J. Math., 20(2): 141-151.

Maksudov, F. G., Ismailov, Z.I., 1999. A necessary condition for the normality of differentia operators, Dokl. Math., 59(3):422-424.

Naimark, M. A., 1968. Linear Differential Operators, Ungar, New York.

Neumann, J. Von., 1930. Allgemenie Eigenwert theorie Heritescher Funktional operatoren, Math. Ann., 102: 49-131.

Rofe-Beketov, F. S., Kholkin A. M., 2005. Spectral Analysis of Differential Operators, World Scientific Monograph Series in Mathematics, Singapore, 7.

Schmüdgen, K., 1985. A formally normal operator havingno normal extension, Proc. Amer. Math. Soc., 95(3): 503-504.

Shou-Zhong, Fu, 1992. On the self-adjoint extensions of symmetric ordinary differential operators in direct sumspaces, J. Differential Equations, 100(2): 269-291.

Stochel, J., Szafraniec, F. H., 1985. On normal extensions of unbounded operators, I, Oper. Theory, 14: 31-55.

Stochel, J., Szafraniec, F. H., 1989a. On normal extensions of unbounded operators, II, ActaSci. Math. (Szeged), 53: 153-177.

Stochel, J., Szafraniec, F. H., 1989b. The normal part of an unbounded operator, Nederl. Acad. Wetensch. Proc., Ser. A, 92: 495-503.

Sz-Nagy, B., 1942. Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbert schen Raumes, Ergeb. Math. Grenzgeb., 5(5), 4-80.

Yakubov, S., Yakubov, Y., 2000. Differential-Operator Equations: ordinary and partial differential equations, Chapman&Hall/CRC monographs and surveys in pure and applied mathematics, 103, Florida.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ahmet Adnan KARA

Doğum Yeri : ERDEMLİ/ MERSİN

Yabancı Dili : İNGİLİZCE

E-mail : aadnankara33@gmail.com

İletişim Bilgileri: Mut Özdemirler Çok Programlı Anadolu Lisesi , Mut/Mersin

Öğrenim Durumu:

DERECE	BÖLÜM/ PROGRAM	OKUL/ ÜNİVERSİTE	YIL
Ortaöğretim	Mersin 75. Yıl Anadolu Öğretmen Lisesi		2002
Lisans ve Lisansla birleştirilmiş Tezsiz Yüksek Lisans	Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği	Atatürk Üniversitesi	2007

İş Deneyimi:

Görev	Görev Yeri	Yıl
Matematik Öğretmeni	Yukarıgöklü Lisesi, Halfeti/ ŞANLIURFA	2008
Matematik Öğretmeni	Dereli Anadolu İmam Hatip Lisesi, GİRESUN	2009
Matematik Öğretmeni	Islahiye Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, GAZİANTEP	2010
Matematik Öğretmeni	Giresun Anadolu İmam Hatip Lisesi, GİRESUN	2011
Matematik Öğretmeni	Özdemirler Çok Programlı And. Lisesi, Mut/MERSİN	2014

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza

Ahmet Adnan KARA

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.