

**T.C.  
ORDU ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HİLBERT UZAYINDA ÖZEŞLENİK OPERATÖRLERİN  
KONVEKS VE OPERATÖR KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN  
JENSEN TIPLI EŞİTSİZLİKLER**

**TURGAY EKİCİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ORDU 2016**

**T.C.  
ORDU ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HİLBERT UZAYINDA ÖZEŞLENİK OPERATÖRLERİN  
KONVEKS VE OPERATÖR KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN  
JENSEN TIPLI EŞİTSİZLİKLER**

**TURGAY EKİCİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ORDU 2016**

## TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Turgay EKİCİ tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL danışmanlığında yürütülen “HİLBERT UZAYINDA ÖZEŞLENİK OPERATÖRLERİN KONVEKS VE OPERATÖR KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN JENSEN TIPLİ EŞİTSİZLİKLER” adlı bu tez, jürimiz tarafından 17/06/2016 tarihinde oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : YRD. DOÇ. DR. ERDAL ÜNLÜYOL

Başkan : DOÇ. DR. İMDAT İŞCAN  
MATEMATİK, GİRESUN  
ÜNİVERSİTESİ

İmza :

Üye : DOÇ. DR. SELAHATTİN MADEN  
MATEMATİK, ORDU  
ÜNİVERSİTESİ

İmza :

Üye : YRD. DOÇ. DR. ERDAL ÜNLÜYOL  
MATEMATİK, ORDU  
ÜNİVERSİTESİ

İmza :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 23/06/2016 tarih ve 2016/ 309 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

30/06/2016

Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Kürşat KORKMAZ



## TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

*T. Ekiçi*

Turgay EKİCİ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## ÖZET

# HİLBERT UZAYINDA ÖZEŞLENİK OPERATÖRLERİN KONVEKS VE OPERATÖR KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN JENSEN TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

**Turgay EKİCİ**

Ordu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı, 2016  
Yüksek Lisans Tezi, 53s.

Danışman:Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

Bu tez çalışması, 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, giriş ve literatür taraması, ikinci bölümde temel kavramlar anlatılmaktadır. Üçüncü bölümde literatürde var olan, Hilbert uzayında özeşlenik operatörlerin konveks ve operatör konveks fonksiyonlar için Jensen tipli eşitsizlikler konusu ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Dördüncü bölümde sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:**Hilbert uzayı,özeşlenikoperatör, konveks ve operatör konveks fonksiyonlar, Jensen tipli eşitsizlikler.

## ABSTRACT

### JENSEN'S TYPE INEQUALITIES FOR CONVEX AND OPERATOR CONVEX FUNCTIONS OF SELFADJOINT OPERATORS IN HILBERT SPACES

**Turgay EKİCİ**

University of Ordu  
Institute of Sciences  
Department of Mathematics, 2016  
MSc. Thesis, 53p.

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, it is mentioned about the object of the thesis and previous studies in this area. In the second chapter, basic definitions and theorems that were used in the thesis are given. In the third chapter, it is comprehensively explained of Jensen's type inequalities for convex and operator convex functions of selfadjoint operators in Hilbert spaces. In the fourth chapter, it is given some results and propositions.

**Keywords:** Hilbert space, selfadjoint operator, convex and operator convex functions, Jensen's type inequalities.

## TEŞEKKÜR

Tüm çalıőmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu aan, desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL' a ve Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Tezin düzeltilmesi ve kontrolünü yapan sayın Yeter ERDAŞ ve Uęur DEMİRCAN' a da engin sabırlarından dolayı teşekkür ederim.

Her zaman benim yanımda olup, benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

<b>TEZ BİLDİRİMİ</b> .....	<b>I</b>
<b>ÖZET</b> .....	<b>II</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>III</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	<b>IV</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>V</b>
<b>SEMBOLLER DİZİNİ</b> .....	<b>VI</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. TEMEL KAVRAMLAR</b> .....	<b>5</b>
<b>3. YAPILAN ÇALIŞMALAR</b> .....	<b>9</b>
3.1. HİLBERT UZAYINDA ÖZEŞLENİK OPERATÖR FONKSİYONLAR.....	9
3.1.1. Sınırlı Özeşlenik Operatörler.....	9
3.1.1.1. Operatörlerde Sıralama.....	9
3.1.2. Özeşlenik Operatörlerin Sürekli Fonksiyonları.....	12
3.1.2.1. Sınırlı Bir Operatörde Polinomlar.....	12
3.1.2.2. Özeşlenik Operatörlerin Sürekli Fonksiyonu.....	13
3.1.3. Özeşlenik Operatörlerin Basamak Fonksiyonu.....	17
3.1.4. Özeşlenik Operatörlerin Spektral Ayrılışı.....	19
3.1.4.1. Operatör Monoton ve Operatör Konveks Fonksiyonlar.....	23
3.2. JENSEN TIPLI EŞİTSİZLİKLER.....	26
3.2.1. Jensen Eşitsizliğinin Tersleri.....	26
3.2.1.1. Dragomir-Ionescu Eşitsizliğinin Bir Operatör Versiyonu.....	26
3.2.1.2. Diğer Tersler.....	27
3.2.2. Bazı Slater Tipli Eşitsizlikler.....	32
3.2.2.1. Reel Değişkenli Fonksiyonlar için Slater Tipli Eşitsizlikler.....	32
3.2.2.2. Operatörler için Bazı Slater Tipli Eşitsizlikler.....	33
3.2.2.3. Diğer Tersler.....	34
3.2.3. Konveks Fonksiyonlar için Bazı Eşitsizlikler.....	37
3.2.3.1. İki Operatör için Bazı Eşitsizlikler.....	37
3.2.4. İki Kere Diferensiyellenebilir Fonksiyonlar için Bazı Jensen Tipli Eşitsizlikler..	40
<b>4. SONUÇ VE ÖNERİLER</b> .....	<b>42</b>
<b>5. KAYNAKLAR</b> .....	<b>43</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	<b>46</b>



## SEMBOLLER DİZİNİ

$B(H)$	:	$H$ 'dan $H$ 'ya sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$B(H)^+$	:	$H$ 'dan $H$ 'ya sınırlı pozitif lineer operatörlerin kümesi
$C$	:	Kompleks sayılar kümesi
$C(\text{Sp}(A))$	:	$A$ operatörün spektrumunu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesi
$H$	:	Hilbert uzayı
$L(H)$	:	$H$ 'dan $H$ 'ya lineer operatörlerin kümesi
$R$	:	Reel sayılar kümesi
$\text{Sp}(A), \sigma(A)$	:	$A$ operatörün spektrumunu
$\rho(A)$	:	$A$ operatörün rezolvent kümesi
$\langle, \rangle$	:	İç çarpım fonksiyonu

## 1. GİRİŞ

Eşitsizlik Teorisi'nin temellerini XVIII. ve XIX. yüzyıllarda K. F. Gauss (1775-1855), A. L. Cauchy (1785-1857) ve P. L. Chebyshev (1821-1894) gibi matematikçiler atmışlardır. Fakat modern anlamda "Eşitsizlik Teorisi" alanında yapılan ilk çalışma 1934 yılında G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Polya tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır. Bu çalışmayı 1961 yılında E. F. Beckenbach ve R. Bellman'ın yine aynı ismi taşıyan "Inequalities" kitabı takip eder. Daha sonra 1965 yılında J. Szarski'nin "Differential Inequalities", 1991 yılında Mitrinovic ve ark."Inequalities Involving Functions and Their Derivatives", 1963 yılında yine Mitrinovic ve ark.'ın "Classical and New Inequalities in Analysis" isimli kitapları izler. Bunların dışında S. S. Dragomir, R. P. Agarwal, G. V. Milovanovic, C. P. Niculescu, C. E. M. Pearce, J. E. Pecaric, A. M. Fink, M. E. Özdemir, M. Z. Sarikaya, E. Set, İ. İşcan, A. O. Akdemir, M. Tunç gibi bilim insanlarının da bir çok çalışması literatürde mevcut.

Konvekslik kavramının ortaya çıkışı Arşimet'in, çemberin içine ve etrafına çizdiği düzgün çokgenler yardımıyla yaptığı 'pi' sayısı hesabına kadar dayanır. Bu çalışmaları sırasında Arşimet, herhangi bir konveks şeklin çevresinin, etrafına çizilen bütün diğer konveks şekillerin çevresinden daha küçük olduğunu fark etmiştir. Böylece konvekslik kavramı konveks şekiller etrafında gelişmiştir. Euler ve Descartes konveks çokgenler ile ilgili formüller üzerinde çalışmıştır. Daha sonra 1841'de Cauchy, konvekslik hakkında bazı özellikler vermiştir. Konveksliğin modern tanımı eşitsizlik tanımı içerdiğinden konveksliğin eşitsizliklerle birlikte çalışılması da doğal bir sonuç olmuştur.

Konveks fonksiyonların tarihi çok eskiye dayanmakla birlikte XIX. yüzyılın sonları olarak gösterilebilir. 1893'de Hadamard'ın çalışmasında açıkça belirtilmese de bu türden fonksiyonların temellerinden bahsedilmektedir. Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları ima eden sonuçlara rastlanılmasına rağmen, konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J. L. W. V. Jensen tarafından çalışılmıştır. Jensen'in bu, çalışmalarından itibaren Konveks Fonksiyonlar Teorisi hızlı bir gelişme göstermiştir. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak 1987 yılında Pecaric tarafından yazılan "Convex Functions:

Inequalities" isimli kitaptır. Ayrıca 1973 yılında A. W. Roberts ve B. E. Vorberg "Convex Functions", 1992 yılında Pecaric ve ark. "Convex Functions, Partial Ordering and Statistical Applications", 2006 yılında C. Niculescu ve L. E. Persson "Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach" gibi eserler konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizlikle ilgili yapılan çalışmalardır. Bu çalışmaların bir kısmını integral eşitsizlikleri oluşturmaktadır.

Niculescu ve Persson'a göre konveksliğin teorik ve uygulamalı matematik alanlarında geniş yer bulmasının iki önemli sebebi vardır:

- 1) Sınır değerlerinin birinde bir maksimum değeri vardır,
- 2) Her yerel minimum aynı zamanda global minimumdur. Ayrıca kesin konveks bir fonksiyonunun en fazla bir minimumu vardır.

1978 yılında R. Bellman, Almanya'da düzenlenen "Second International Conference on General Inequalities" isimli konferansta: "Neden Matematiksel Eşitsizlikler?" diye sorulan soruya şu cevabı vermiştir:

Eşitsizlik çalışmak için üç neden vardır. Bunlar:

- 1) Pratik Nedenler,
- 2) Teorik Nedenler,
- 3) Estetik Nedenlerdir.

Pratik nedenler açısından bakıldığında, bir çok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak karşımıza çıkmaktadır. Klasik Eşitsizlikler de bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik nedenler açısından bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturabilir. Örneğin, negatif olmayan bir niceliğin ne zaman bir diğerini kapsadığı sorulabilir ve bu basit soru ile Pozitif Operatörler Teorisi ve Diferansiyel Eşitsizlikler Teorisi kurulur. Son olarak estetik nedenler açısından bakıldığında genelde resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir.

Biz bu çalışmada Eşitsizlik Teorisi'nin önemli bir kolu olan Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizliklerin, Hilbert uzayında sınırlı, öz-eşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için elde edilen bazı özel eşitsizliklerini inceleyeceğiz. Bu incelemeler sayesinde

Lineer Operatörler Teorisi ile Matematiksel Eşitsizliklerin çeşitli alanlarında çalışma yapmak ve kendi alanlarında uygulamak isteyen araştırmacılara yardımcı olacaktır.

Bu alanda yapılan önemli çalışmalardan bir tanesi 2011 yılında S. S. Dragomir tarafından yapılmıştır. Ayrıca Bauschke ve Combettes tarafından (2011) yılında "Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces", (2012) yılında Dragomir tarafından "Operator Inequalities of Ostrowski and Trapezoidal Type" ve yine (2012) yılında " Operator Inequalities of the Jensen, Cebysev and Grüss Type" adlı kitaplar mevcuttur.

Literatürde Dragomir, Ghazanfari, Unluyol, Salaş , Erdaş ve daha bir çok yazar bu alanda çalışmaktadır.

Hilbert uzayında Lineer Operatör Teorisi'nin matematiğin Kısmi Diferansiyel Denklemler, Yaklaşım Teorisi, Optimizasyon Teorisi, Numerik Analiz, Olasılık Teorisi, İstatistik Teorisi ve daha birçok alanda çok önemli rol oynamaktadır. Bu çalışmada Eşitsizlik Teorisi'nin önemli bir kolu olan Jensen Tipli Eşitsizliklerin, Hilbert uzayında sınırlı öz-eşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için elde edilen eşitsizlikler incelenecektir. Bu incelemeler sayesinde Lineer Operatör Teorisi ve Matematiksel Eşitsizliklerin çeşitli alanlarda çalışma yapmak ve kendi alanlarına uygulamak isteyen araştırmacılara yardımcı olacaktır.

Bu çalışmada, birinci bölümde kompleks Hilbert uzayında sınırlı öz-eşlenik operatörlerin temel özellikleri verildi. Pozitif öz-eşlenik operatörlerin temel özellikleri verildi. Pozitif öz-eşlenik operatörler için Genelleştirilmiş Schwarz eşitsizliğinin yanı sıra bu tip operatörlerin spektumu için bazı sonuçlar sunulmuştur. Daha sonra bir lineer operatör, öz-eşlenik operatörün sürekli fonksiyonlarında polinomlar için temel sonuçlarla birlikte öz-eşlenik operatörlerin basamak fonksiyonları için de bu özellikler tanıtılmıştır. Elde edilen bu sonuçları kullanarak, bu tezin ana kısmının çıkış noktası olan ve "Spektral Ayrılış Teoremi" olarak bilinen öz-eşlenik operatörlerin spektral ayrılışı incelenmiştir. Bu incelemeden sonra öz-eşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için yeni eşitsizliklerin elde edilmesine katkı sağlayacaktır. Bununla birlikte sadece öz-eşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için değil aynı zamanda sınırlı varyasyonlu Lipschitzion, monoton

veya mutlak sürekli fonksiyonlar için de yukarıdakiler geçerlidir. İkinci bölümde ise tezde yapılan çalışmalar bulunmaktadır.



## 2. TEMEL KAVRAMLAR

**2.1 Tanım (Lineer Uzay):**  $L$  boş olmayan bir küme ve  $F$  bir cisim olsun.  $+:L \times L \rightarrow L$  ve  $.:F \times L \rightarrow L$  işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa  $L$  ye  $F$  cismi üzerinde bir lineer uzay(vektör uzayı) denir.

**A)**  $L$ , ''+''' işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1. Her  $x, y \in L$  için  $x+y \in L$  dir.

G2. Her  $x, y, z \in L$  için  $x(y+z) = (x+y)+z$  dir.

G3. Her  $x \in L$  için  $x+\theta = \theta + x = 0$  olacak şekilde  $\theta \in L$  vardır.

G4. Her  $x \in L$  için  $x+y=y+x$  dir.

**B)**  $x, y \in L$  ve  $\alpha, \beta \in F$  olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1.  $\alpha x \in L$  dir.

L2.  $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$  dir.

L3.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$  dir.

L4.  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$  dir.

L5.  $1x = x$  dir. (Burada  $1, F$  nin birim elemanıdır.)

$F = \mathbb{R}$  ise  $L$  ye lineer uzay,  $F = \mathbb{C}$  ise  $L$  ye karmaşık lineer uzay adı verilir.

**2.2 Tanım:** Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

**2.3 Tanım:**  $F$  bir cisim ve  $V$  ve  $W$ ,  $F$  cismi üzerinde iki lineer uzay olsun.  $u, v \in V$  ve  $c \in F$  olmak üzere  $T:V \rightarrow W$  dönüşümü,

$$a) T(u+v) = T(u) + T(v)$$

$$b) T(cu) = cT(u) \text{ şartlarını sağlıyorsa } T \text{ ye } V \text{ üzerinde lineer dönüşüm denir.}$$

**2.4 Tanım:**  $L$  bir lineer uzay  $A \subset L$  ve  $x, y \in A$  keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset A$$

ise  $A$  kümesine konveks küme denir. Eğer  $z \in B$  ise  $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$  eşitliğindeki  $x$  ve  $y$  nin katsayıları için  $\alpha + (1 - \alpha) = 1$  bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki  $\alpha, 1 - \alpha$  yerine  $\alpha + \beta = 1$  şartını

sağlayan ve negatif olmayan  $\alpha, \beta$  reel sayılarını alabiliriz.  $G$  eometrik olarak  $B$  kümesi uç noktaları  $x$  ve  $y$  olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir.

**2.5 Tanım (Konveks fonksiyon):**  $I, \mathbb{R}$  de bir aralık ve  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon olmak üzere her  $x, y \in I$  ve  $\alpha \in [0,1]$  için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f + (1 - \alpha)f(y) \quad (1.1)$$

şartını sağlayan,  $f$  fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

**2.6 Teorem:**  $f$  fonksiyonu  $[a,b]$  aralığında konveks ise

a)  $f, (a, b)$  aralığında süreklidir ve

b)  $f, [a, b]$  aralığında sınırlıdır.

**2.7 Tanım (İç-çarpım uzayı):**  $F(\mathbb{R}$  veya  $\mathbb{C})$  olmak üzere,  $X$  bir vektör uzayı olsun.  $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow F$  dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise " $\langle \cdot, \cdot \rangle$ " dönüşümüne  $X$  üzerinde bir iç-çarpım,  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ikilisine de iç-çarpım uzayı denir:

$$1. \forall x \in X \text{ için } \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ ve } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_x;$$

$$2. \forall x, y \in X \text{ için } \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle;$$

$$3. \forall x, y \in X \text{ ve } \alpha \in F \text{ için } \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$4. \forall x, y, z \in X \text{ için } \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

**2.8 Not:**  $F = \mathbb{R}$  olması halinde 2. Özellik  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  olur. İç-çarpım tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu kolayca görebiliriz.

$$1. \forall x, y, z \in X \text{ ve } \forall \alpha, \beta \in F \text{ için } \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle,$$

$$2. \forall x, y \in X \text{ ve } \alpha \in F \text{ için } \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle,$$

$$3. \forall x, y \in X \text{ ve } \forall \alpha, \beta \in F \text{ için } \langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle.$$

**2.9 Tanım (Norm):**  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  bir iç çarpım uzayı olsun. Bir  $x \in X$  vektör normu

$$\| x \| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanan reel sayıya denir.

**2.10 Tanım (Hilbert uzayı):**  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer bu iç-çarpım uzayı yukarıdaki norma göre tam ise, yani  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  bir iç çarpım uzayı içindeki her Cauchy dizisi bu norma göre yakınsak ise bu iç çarpıma bir ‘‘Hilbert Uzayı’’ denir.

**2.11 Tanım (Birim Operatör:)**  $A: X \rightarrow X$  operatörü verilsin. Eğer her  $x \in X$  için  $Ax = x$  ise  $A$  operatörüne birim (özdeşlik) operatör denir.  $I, E$  ve  $I_x$  sembollerinden biriyle gösterilir.

**2.12 Tanım (Sınırlı Operatör:)**  $X$  ve  $Y$  iki normlu uzay olsun.  $A$  ise tanım kümesi  $D(A) \subset X$  ve görüntü kümesi  $R(A) \subset Y$  olan bir operatör olsun. Eğer  $A$  operatörü  $D(A)$ nın  $X$ 'de sınırlı her kümesine  $R(A)$ nın  $Y$  de sınırlı bir kümesini karşılık getiriyorsa  $A$ 'ya ‘‘sınırlı operatör’’ denir. Başka bir deyişle

$\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$ , her  $x \in D(A)$  olacak şekilde bir sabit  $c > 0$  sayısı varsa  $A$ 'ya ‘‘sınırlı operatör’’ denir.

**2.13 Tanım (Lineer Uzay:)**  $X$  ve  $Y$  aynı  $F$  cismi üzerinde iki lineer uzay ve  $A: X \rightarrow Y$  operatörü verilsin. Eğer  $D(A)$ ,  $X$ 'in bir alt uzayı ve

$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ ,  $\forall x, y \in D(A)$  ve  $\forall \alpha, \beta \in F$  ise  $A$ 'ya ‘‘Lineer operatör’’ denir.

**2.14 Tanım (Eşlenik ve Özeşlenik Operatör:)**  $A, H$  Hilbert uzayında sınırlı bir operatör olsun. Eğer her  $f, g \in D(A) \subset H$  için;

$\langle Af, g \rangle = \langle f, A^*g \rangle$  sağlanıyorsa  $A^*$   $A$ 'nın ‘‘eşlenik operatörü’’ denir.

Eğer  $D(A) = D(A^*)$  ve  $A = A^*$  ise bu  $A$ 'ya özeşlenik operatör denir.

**2.15 Tanım (Rezolventa:)**  $H$  bir Hilbert uzayı ve  $A: D(A) \subset H \rightarrow H$  bir lineer operatör olsun.

$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E)^{-1} \in L(H)\}$  kümesine  $A$  operatörünün ‘‘regüler değerler kümesi’’ veya ‘‘rezolvent kümesi’’ denir.

$\lambda \in \rho(A)$  olmak üzere  $R(\lambda; A) = (A - \lambda E)^{-1}$  operatörüne  $A$  operatörünün ‘‘rezolventası’’ veya ‘‘çözücü operatörü’’ adı verilir.

**2.16 Tanım (Spektrum:)**  $H$  bir Hilbert uzayı olsun.



$Sp(A) = \sigma(A) := C \setminus \rho(A)$  kümesine  $A$  operatörünün “spektrumu” denir.  $A$  operatörünün spektrum kümesi " $\sigma(A)$ " ve " $Sp(A)$ " ile göstereceğiz.

**2.17 Tanım (Operatörlerde Sıralama:)**  $A$  ve  $B$ ,  $H$  Hilbert uzayı üzerinde iki özdeşlik operatör olsun.

$$1. A \leq B \Leftrightarrow \langle Ax, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle \quad \forall x \in H;$$

2.  $A \geq 0$  ise  $A$  operatörüne pozitifdir denir.

**2.18 Not:** Eğer  $A$  özdeşlik operatör ve  $f$  de  $Sp(A)$  üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon ise, bu durumda  $t \in Sp(A)$  için  $f(t) \geq 0$  dir. Buradan  $f(A) \geq 0$ , yani  $f(A)$   $H$  Hilbert uzayı üzerinde pozitif bir operatördür. İlaveten eğer  $f$  ve  $g$ ,  $Sp(A)$  üzerinde iki fonksiyon ise aşağıdaki önemli özelliği sağlanır. Her  $t \in Sp(A)$  için

$$f(t) \geq g(t) \text{ dir. Buradan } f(A) \geq g(A) \text{ sağlanır.}$$

**2.19 Teorem:**  $A$ ,  $H$  Hilbert uzayı üzerinde sınırlı özdeşlik bir operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

$$m := \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle = \max\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha E \leq A\};$$

$$M := \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle = \min\{\alpha \in \mathbb{R} : A \leq \alpha E\};$$

ve

$$\|A\| = \max\{\|m\|, \|M\|\}.$$

Ayrıca  $m, M \in Sp(A)$  ve  $Sp(A) \subset [m, M]$ .

**2.20 Tanım: (Operatör Konveks)**  $A$  ve  $B$ , spektrumları  $I \subset \mathbb{R}$  da olan

keyfi özdeşlik operatörler ve  $\lambda \in [0, 1]$  olsun. Bu durumda,

$$f((1 - \lambda)A + \lambda B) \leq (1 - \lambda)f(A) + \lambda f(B)$$

Eşitsizliğini sağlayan,  $I$  aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyona operatör konveks denir.

### 3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu tez çalışması, Dragomir' in (2011) yılında yayımladığı “Operator Inequality of the Jensen, Cebysev and Grüss Type” adlı eseri temel kaynak olarak kullanılmış olup, buradaki teoremler, lemmalar ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

### 3.1 HİLBERT UZAYINDA ÖZEŞLENİK OPERATÖR FONKSİYONLAR

#### 3.1.1 Sınırlı-Özeşlenik Operatörler

##### 3.1.1.1 Operatörlerin Sıralanması

$(H, (\cdot, \cdot))$   $\mathbb{C}$  kompleks sayılar cismi üzerinde bir Hilbert uzayı olsun.

$H$  hilbert uzayında tanımlı bir  $A$  sınırlı lineer operatörüne eğer  $A = A^*$  ise özeşlenik denir. Yani

$$A = A^* \Leftrightarrow \forall x \in H \text{ için } (Ax, x) \in \mathbb{R}.$$

Eğer  $A$  özeşlenik ise, bu takdirde

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \{ | \langle Ax, x \rangle | \} = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} | \langle Ax, y \rangle | \quad (1.2)$$

Aksi söylenmedikçe buradaki tüm operatörleri  $H$  hilbert uzayının tamamında sınırlı olarak kabul edeceğiz.  $B(H)$  ile de,  $H$  Hilbert uzayı üzerinde tanımlı bütün sınırlı lineer operatörlerin Banach cebri olarak göstereceğiz.

**3.1.1.1 Tanım:**  $A$  ve  $B \in B(H)$  Hilbert uzayında iki öz-eşlenik operatör olsun. Bu durumda

$$A \leq B \text{ veya } B \geq A \Leftrightarrow \forall x \in H \text{ için } \langle Ax, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle$$

Yani, “ $A$  operatörü  $B$  operatöründen küçüktür veya eşittir.” Veya “ $B$  operatörü  $A$  operatöründen büyüktür veya eşittir” denir. Özel olarak her  $x \in H$  için  $(Ax, x) \geq 0$ , Yani  $A \geq 0$  ise bu operatöre “pozitif operatör” denir. Operatör teorisinden biz biliyoruzki; keyfi  $A \in B(H)$  operatörü için  $A^*A$  ve  $AA^*$  operatörleri  $H$  hilbert uzayında pozitif özeşlenik operatörlerdir. Ancak genelde  $A^*A$  ve  $AA^*$  operatörleri birbirleri ile kıyaslanmamalıdır.

**3.1.1.2 Teorem:**  $A, B, C \in B(H)$  özeşlenik operatörler ve  $(\varphi + \Psi)(s) := (\varphi)(s) + (\Psi)(s)$   $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

1.  $A \leq A$ ;
2. Eğer  $A \leq B$  ve  $B \leq C$  ise  $A \leq C$ ;
3. Eğer  $A \leq B$  ve  $B \leq A$  ise  $A = B$ ;
4. Eğer  $A \leq B$  ve  $\alpha \geq 0$  ise

$$A + C \leq B + C$$

$$\alpha A \leq \alpha B$$

$$-A \geq -B$$

5. Eğer  $\alpha \leq \beta$  ise  $\alpha A \leq \beta B$ .

Eğer  $x, y \in H$  ve  $A$  pozitif özeşlenik operatörleri için aşağıdaki Schwarz eşitsizliği sağlanır.

$$|\langle Ax, y \rangle|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \langle Ay, y \rangle \quad (1.3)$$

**3.1.1.3 Tanım:**  $A, H$  hilbert uzayında bir pozitif özeşlenik operatörü olsun. Bu durumda her  $x \in H$  için

$$\|Ax\|^2 \leq \|A\| \langle Ax, x \rangle \quad (1.4)$$

**3.1.1.4 Teorem:**  $n \in \mathbb{N}$  için  $A_n, B \in B(H)$ ,  $A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_n \leq \dots \leq B$  şartlarını sağlayan özeşlenik operatörler olsunlar. Bu durumda,

$A_n \leq A \leq B$  olacak şekilde,  $H$  hilbert uzayında tanımlı bir  $A$  sınırlı özeşlenik operatörü vardır ve her  $x \in H$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = Ax$ .

Yukarıdaki teoremin benzeri  $(A_n)_{n \geq 1}$  azalan ve alttan sınırlı bir dizi için de geçerlidir.

**3.1.1.5 Teorem:** Her  $x \in H$  için

(s)  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = Ax$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = Ax$  ifadesinde  $(A_n)_{n \geq 1} \subset B(H)$  dizisi  $A \in B(H)$  operatörüne “güçlü yakınsaktır” ve  $(A_n)_{n \geq 1} \subset B(H)$  dizisinin “güçlü limiti” denir.

Norm anlamında yakınsamaya, yani  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$  akınsamaya güçlü yakınsamanın zıttı olarak “düzgün yakınsama” adını vereceğiz ve normda yakınsama için  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$  şeklinde göstereceğiz. Her  $x \in H$  için

$$\|A_m x - A_n x\| \leq \|A_m - A_n\| \|x\|$$

eşitsizliğinden  $(A_n)_{n \geq 1}$  dizisinin  $A$ 'ya düzgün yakınsaması,  $(A_n)_{n \geq 1}$  dizisinin  $A$ 'ya güçlü yakınsadığını gösterir. Fakat bu iddianın tersi genelde doğru değildir.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi güçlü yakınsamadan bahsedilmişse normal olarak zayıf yakınsamadan da söz edilmesi gerek. Buradan

$$(w) \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = A x \Leftrightarrow \text{Her } x, y \in H \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_n x, y \rangle = \langle A x, y \rangle$$

şeklinde tanımlanan yakınsamaya  $B(H)$ 'da “zayıf yakınsama” denir.

**3.1.1.6 Teorem:**  $A, H$  hilbert uzayında bir sınırlı özeşlenik operatör olsun. Bu durumda

$$\alpha_1 := \inf_{\|x\|=1} \langle A x, x \rangle = \max\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha I \leq A\};$$

$$\alpha_2 := \sup_{\|x\|=1} \langle A x, x \rangle = \min\{\alpha \in \mathbb{R} : A \leq \alpha I\}; \text{ ve}$$

$$\|A\| = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\} \text{ dir.}$$

Ayrıca, eğer  $Sp(A)$  ile  $A$  operatörünün spektrumunu gösterecek olursak, bu durumda  $\alpha_1, \alpha_2 \in Sp(A)$  ve  $Sp(A) \subset [\alpha_1, \alpha_2]$ .

**3.1.1.7 Uyarı:** Eğer  $A, \alpha_1, \alpha_2$  yukarıdaki şekilde aşağıdakilerin doğruluğunu görmek hiç de zor değildir.

$$\alpha_1 := \min\{\lambda : \lambda \in Sp(A)\} =: \min Sp(A);$$

$$\alpha_2 := \max\{\lambda : \lambda \in Sp(A)\} =: \max Sp(A);$$

$$\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in Sp(A)\}.$$

Üstelik,

$$1. \text{ A pozitifdir. } \Leftrightarrow \alpha_1 \geq 0;$$

2. Apozitif ve tersinirdir.  $\Leftrightarrow \alpha_1 > 0$ ;
3. Eğer  $\alpha_1 > 0$  ise,  $A - 1$  bir pozitif özeşlenik operatördür ve

$$\min Sp(A - 1) = \alpha_2^{-1},$$

$$\max Sp(A - 1) = \alpha_1^{-1}$$

### 3.1.2. Özeşlenik Operatörlerinin Sürekli Fonksiyonları

#### 3.1.2.1. Sınırlı Bir Operatörde Polinomlar

$$(\varphi + \Psi)(s) := (\varphi)(s) + (\Psi)(s) \quad (\text{iki fonksiyonun toplamı})$$

$$(\lambda\varphi)(s) := \lambda\varphi(s) \quad (\text{fonksiyonun sabitle çarpımı})$$

$$(\varphi\Psi)(s) := (\varphi)(s) \cdot (\Psi)(s) \quad (\text{iki fonksiyonun çarpımı})$$

şeklinde  $\varphi, \psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  iki fonksiyon tanımlayalım.  $\overline{\varphi}(s)$  ile de  $(\varphi)(s)$  fonksiyonunun kompleks eşleniğini gösterelim.

$$P = \{ \varphi(s) := \sum_{k=0}^n a_k s^k : n \geq 0, a_k \in \mathbb{C}, 0 \leq k \leq n \}$$

**3.1.2.1.1 Teorem:**  $A \in B(H)$  ve  $\sum_{k=0}^n \alpha_k s^k \in P$  için

$$\varphi(A) = \sum_{k=0}^n \alpha_k A^k \in B(H), \quad A^0 = I \text{ ve}$$

$$\overline{\varphi}(A) = \sum_{k=0}^n \overline{\alpha_k} (A^*)^k \in B(H)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Buna göre  $\varphi(s) \rightarrow \varphi(A)$  dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- a)  $(\varphi + \Psi)(A) = (\varphi)(A) + (\Psi)(A)$
- b)  $(\lambda\varphi)(A) = \lambda\varphi(A)$
- c)  $(\varphi\Psi)(A) = (\varphi)(A) \cdot (\Psi)(A)$
- d)  $[\varphi(A)]^* = \overline{\varphi}(A)$

c) şıkkını  $(\varphi\Psi)(A) = (\varphi)(A) \cdot (\Psi)(A)$  ve  $(\varphi)(s) = \alpha_0$  polinomunun da operatör içine dönüşüm olduğunu da unutmamalıyız.

Bir  $U$  cebirinde  $U'$  cebirine tanımlanan  $a \rightarrow a'$  dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa buna bir homomorfizm denir.

a)  $(a+b)' = a' + b'$  ;

b)  $(\lambda a)' = \lambda a'$  ;

c)  $(ab)' = a' b'$

Literatürde Teorem 3.1.2.1.1.'i keyfi  $\varphi(S)$  polinomundan  $\varphi(A)$  operatörüne götüren dönüşüm  $P$  'den  $B(H)$ 'a bir homomorfizmdir. Bu da ilaveten d) özelliğini sağlar.

Aşağıdaki sonuç  $A$ 'nın spektrumu ile  $\varphi(A)$ 'nın spektrumu arasında bir bağıntı kurar.

**3.1.2.1.2 Teorem:** Eğer  $A \in B(H)$  ve  $\varphi \in P$  ise bu takdirde  $Sp(\varphi(A)) = \varphi(S_p(A))$

**3.1.2.1.3 Sonuç:** Eğer  $A \in B(H)$  özeşlenik ve  $\varphi(S) \in P$  polinomu reel katsayılı ise  $\varphi(A)$  da özeşleniktir ve

$$\|\varphi(A)\| = \max\{|\varphi(\lambda)| : \lambda \in Sp(A)\} \quad (1.5)$$

**3.1.2.1.4 Teorem:** Eğer  $A \in B(H)$  ve  $\varphi \in P$  ise bu takdirde aşağıdakilerin doğruluğunu görmek kolaydır.

1.  $\varphi(A)$  terslenebilirdir.  $\Leftrightarrow$  Her  $\lambda \in Sp(A)$  için  $\varphi(\lambda) \neq 0$  ;
2. Eğer  $\varphi(A)$  terslenebilir ise, bu durumda;

$$S_p(\varphi(A)^{-1}) = \{\varphi(\lambda)^{-1}, \lambda \in Sp(A)\}.$$

### 3.1.2.2. Özeşlenik Operatörlerin Sürekli Fonksiyonları

Kabul edelim ki  $A$ ,  $H$  Hilbert uzayında bir sınırlı özeşlenik operatör olsun. Eğer  $\varphi$ ,  $\mathbb{R}$  üzerinde tanımlı keyfi bir fonksiyon ise,

$$\|\varphi\|_A = \sup\{|\varphi(\lambda)| : \lambda \in \text{Sp}(A)\} \text{ şeklinde tanımlayabiliriz.}$$

Eğer  $\varphi$  sürekli özel bir polinom ise, bu takdirde kompakt olan  $\text{sp}(A)$ 'nin noktasındadır. Buradan, supremumu maksimum olarak

$$\|\varphi(A)\| = \|\varphi\|_A$$

şeklinde yazabiliriz.

Bundan sonra  $C(R)$  ile  $R$  üzerinde tanımlı bütün sürekli, kompleks değerli fonksiyonların cebirini göstereceğiz.

**3.1.2.2.1 Teorem:** Eğer  $A$ ,  $H$  Hilbert uzayında bir sınırlı özeşlenik operatör ve  $\varphi \in C(R)$  ise bu takdirde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi - \varphi_n\|_A = 0, \quad (\varphi_n)_{n \geq 1} \subset P$$

olacak şekilde bir  $\varphi(A) \in B(H)$  vardır ve bu durumda;

$$\varphi(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(A).$$

$\varphi \rightarrow \varphi(A)$  dönüşümü  $C(R)$  den  $B(H)$ 'ya  $[\varphi(A)]^* \varphi(A) = \varphi(A)[\varphi(A)]^*$  olup normal operatördür. Ayrıca, eğer  $\varphi$  reel değerli ise, bu durumda  $\varphi(A)$  özeşleniktir.

**3.1.2.2.2 Örnek:** Eğer  $A \in B(H)$  özeşlenik ve  $\varphi(s) = e^{is}$ ,  $s \in R$  ise

$$e^{iA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (iA)^k$$

Ayrıca,  $e^{iA}$  bir üniter operatördür ve onun tersi;

$$(e^{iA})^* = e^{-iA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-iA)^k$$

şeklinde operatördür.

Şimdi, eğer  $\lambda \in C \setminus R, A \in B(H)$  özeşlenik ve  $\varphi(s) = \frac{1}{s - \lambda} \in C(R)$  ise, bu durumda

$$\varphi(A) = (A - \lambda I)^{-1}$$

Sağlanır ve eğer  $A, B \in H$  bir özeşlenik operatörü ve  $\varphi, \psi \in C(R)$  verilmiş iki fonksiyon ise bu durumda  $\varphi(A)\psi(A) = \psi(A)\varphi(A)$  değişme özelliği vardır. Bu özellik, aşağıda verildiği gibi bir diğer operatöre genişletilebilir.

**3.1.2.2.3 Teorem:** Kabul edelim ki  $A, B \in H$  ve  $\varphi \in C(R)$  fonksiyonu verilsin. Eğer  $B \in B(H), AB = BA$  özelliğini sağlayan bir operatör ise, bu durumda  $\varphi(A)B = B\varphi(A)$  dır.

**3.1.2.2.4 Teorem:** Eğer  $A, H$  Hilbert uzayında sınırlı bir özeşlenik operatör ve  $\varphi$  de sürekli bir fonksiyon ise,

$$Sp(\varphi(A)) = \varphi(Sp(A)) \text{ dır.}$$

**3.1.2.2.5 Sonuç:** Teorem 2.14'ün iddialarına göre aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

- a)  $\varphi(A)$  operatörü özeşleniktir.  $\Leftrightarrow$  Her  $\lambda \in Sp(A)$  için  $\varphi(\lambda) \in R$ ;
- b)  $\varphi(A)$  operatörü üniterdir.  $\Leftrightarrow$  Her  $\lambda \in Sp(A)$  için  $|\varphi(\lambda)| = 1$ ;
- c)  $\varphi(A)$  operatörü tersinirdir.  $\Leftrightarrow$  Her  $\lambda \in Sp(A)$  için  $\varphi(\lambda) \neq 0$ ;
- d) Eğer  $\varphi(A)$  özeşlenik ise, bu durumda  $\|\varphi(A)\| = \|\varphi\|_A$ .

Şimdi özeşlenik operatör fonksiyonları için, eşitsizliklerin genişletilebilmesi için, aşağıdaki teoreme ihtiyaç vardır.

**3.1.2.2.6 Teorem:**  $A, H$  Hilbert uzayında bir sınırlı özeşlenik operatörü olsun.  $C(R)$  den  $B(H)$ 'ya olan  $\varphi \rightarrow \varphi(A)$  homomorfizması sıralamayı korur, yani; eğer



$\varphi, \psi \in C(\mathbb{R})$   $S_p(A)$  üzerinde reel değerli iki fonksiyon ve her  $\lambda \in S_p(A)$  için  $\psi(\lambda) \leq \varphi(\lambda)$  ise bu durumda;  $\psi(A) \leq \varphi(A)$  dir.

**3.1.2.2.7 Teorem:** Eğer  $A \in B(H)$  operatörü pozitif ve özeşlenik ise, bu durumda  $B^2 = A$  olacak şekilde  $B := \sqrt{A} \in B(H)$  olan bir tek pozitif özeşlenik operatörü vardır. Ayrıca, eğer  $A$  tersinir ise,  $B$  de tersinirdir.

Eğer  $A, B \in H$  ise  $A^*A$  operatörü de özeşleniktir ve pozitiftir. Dolayısıyla  $A$  operatörünün mutlak değeri de tanımlanır. Yani,  $|A| := \sqrt{A^*A}$  şekilde ifade edilir.

Kompleks analizden biliyoruz ki  $z \in \mathbb{C}$  için  $z = |z|.e^{i \arg(z)}$  şekilde yazılabiliriz. İşte bu şekilde yazabildiğimiz kompleks sayı  $\mathbb{C}$ 'den  $B(H)$ 'ya homomorfizm olan bir dönüşümle  $H$  Hilbert uzayında sınırlı normal bir operatör olup, bu karakterizasyondan da anlaşılacağı üzere, bir operatörün mutlak değeri ile bir üniter operatörün çarpımı şeklinde de bakabiliriz.

**3.1.2.2.8 Teorem:**  $H$  Hilbert uzayında her sınırlı  $A$  lineer operatörü için  $B = |A| \in B(H)$  olan bir pozitif özeşlenik operatörü ile  $A = CB$  tanım kümesi  $D_C = \overline{B(H)}$  ve değer kümesi  $R_C = C(D_C) = \overline{A(H)}$  olacak şekilde bir  $C$  izometrik operatörü vardır.

Özel olarak da aşağıdaki sonucu verebiliriz.

**3.1.2.2.9 Sonuç:** Eğer  $A, B \in H$  operatörü normal ise, bu durumda  $B = |A| \in B(H)$  olacak şekilde bir pozitif özeşlenik operatörü ve  $A = BC = CB$  olan bir  $C$  üniter operatörü vardır. Üstelik, eğer  $A$  tersinir ise bu durumda  $B$  ve  $C$  bu şartlar altında tek türlü belirlidir.

**3.1.2.2.10 Not:** Şimdi kabul edelim ki  $B \in B(H)$  pozitif özeşlenik operatörü ve  $C$  de bir izometrik operatörü için  $A = CB$  olsun. Bu durumda

- a)  $B = \sqrt{A^*A}$  ; sonuç olarak  $B$ , yukarıda ki şartlar altında tek türlü belirlidir;
- b)  $C$ 'nin yukarıdaki şartlar altında tek türlü belirlenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul  $A$  operatörünün birebir (1:1) olmasıdır.

### 3.1.3. Özeşlenik Operatörlerin Basamak Fonksiyonları

$A$ ,  $H$  Hilbert uzayında bir sınırlı özeşlenik operatör olsun. Buradaki amacımız  $C(\mathbb{R})$ den  $B(H)$ 'ya tanımlanan  $\varphi \rightarrow \varphi(A)$  homomorfizmasının sıralamayı koruduğunu göstermektir. Bunun içinde;

$$\varphi_\lambda(s) = \begin{cases} 1, & -\infty < s \leq \lambda \\ 0, & \lambda < s < +\infty \end{cases}$$

şeklidinde tanımlanan bir fonksiyon cebirini gözönünde bulunduracağız.

$\varphi_\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  basamak fonksiyonlarını içeren fonksiyonların cebirini gözönünde bulunduracağız. Yukarıdaki şekilde tanımlanan fonksiyonun  $\lambda \in \mathbb{R}$  için

$$\overline{\varphi_\lambda}(s) = \varphi_\lambda(s)$$

$$\varphi_\lambda^2(s) = \varphi_\lambda(s)$$

$$[\varphi_\lambda(A)]^* = \varphi_\lambda(s)$$

$$[\varphi_\lambda(A)]^2 = \varphi_\lambda(A)$$

özelliklerini sağladığını görmek zor değildir. Dolayısıyla  $\varphi_\lambda(A)$  aynı zamanda bir projeksiyon operatördür.

Ancak,  $\varphi_\lambda$  fonksiyonuna,  $\lambda$ 'yı içeren keyfi aralık üzerinde sürekli fonksiyonlar tarafından düzgün olarak yaklaşılamayacağından dolayı, genelde bir  $\varphi_\lambda(A)$  operatörünü  $\varphi_{\lambda,n} \in C(\mathbb{R})$  için  $\varphi_{\lambda,n}(A)$  operatörlerinin düzgün bir limiti olarak tanımlamanın hiçbir yolu yoktur.

Operatörlerin düzgün limiti kavramını açıklamak için, yani  $\varphi_\lambda(A)$  operatörünü tanımlamak için operatörlerin güçlü limit kavramını kullanacağız. Bunu yapmak için de

$$\varphi_{\lambda}(s) := \begin{cases} 1, & -\infty < s \leq \lambda \\ 1 - n(s - \lambda), & \lambda \leq s \leq \lambda + \frac{1}{n} \\ 0, & \lambda < s < +\infty \end{cases}$$

Şeklinde tanımlanan  $\varphi_{\lambda,s}$  reel değerli sürekli fonksiyonların azalan bir dizinin noktasal bir limiti olarak  $\varphi_{\lambda}$  fonksiyonlarının limitini göz önünde bulunduracağız.

**3.1.3.1 Tanım:**  $\varphi_{\lambda,n}(A)$  özeşlenik operatörlerine uygun olan diziler, azalmayan ve  $B(H)$ 'daki sıralamaya göre sıfırla alttan sınırlıdır. Aynı zamanda,  $H$  Hilbert uzayında bazı sınırlı özeşlenik  $\varphi_{\lambda}(A)$  operatörüne güçlü yakınsaktır.

**3.1.3.2 Tanım:** Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı reel değerli bir  $\varphi$  fonksiyonuna, eğer reel sayılar kümesi üzerinde sürekli reel değerli artmayan bir dizinin bir noktasal limiti ise, bu fonksiyona üstten yarı süreklidir denir.

Başka bir ifadeyle:  $\mathbb{R}$  üzerinde, reel değerli bir  $\varphi$  fonksiyonunun üstten yarı sürekli olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul her  $s_0 \in \mathbb{R}$  ve her  $\varepsilon > 0$  için,  $s \in (s_0 - J, s_0 + J)$  olmak üzere  $\varphi(s) < \varphi(s_0) + \varepsilon$  şartını sağlayan bir  $J > 0$  sayısının var olmasıdır.

**3.1.3.3 Teorem:**  $A$ ,  $H$  Hilbert uzayında sınırlı özeşlenik operatör ve  $\varphi$  de reel sayılar kümesi üzerinde negatif olmayan üstten yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda;  $S_p(A)$ 'dan  $\varphi$ 'ye, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $C(\mathbb{R})$  üzerinde negatif olmayan fonksiyonların artmayan bir  $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$  dizisi noktasal yakınsayacak şekilde bir tek pozitif özeşlenik bir  $\varphi(A)$  operatörü vardır. Buradan da

$$\varphi(A) = (s) \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(A).$$

**3.1.3.4 Teorem:**  $A \in B(H)$  özeşlenik operatör,  $\varphi$  ve  $\psi$  de negatif olmayan  $\mathbb{R}$ 'de üstten yarı sürekli iki fonksiyon olsun. Bu durumda  $\alpha > 0$  için

$$(\varphi + \psi)(A) := (\varphi)(A) + (\psi)(A)$$

$$(\alpha\varphi)(A) := \alpha\varphi(A)$$

$$(\varphi\Psi)(A) := (\varphi)(A).(\Psi)(A)$$

şeklinde tanımlanan  $(\varphi + \Psi)$ ,  $(\alpha\varphi)$  ve  $(\varphi\Psi)$  fonksiyonları da negatif olmayan üstten yarı süreklidir. Üstelik, eğer her  $s \in S_p(A)$  için  $\varphi(s) \leq \psi(s)$  ise bu durumda  $\varphi(A) \leq \psi(A)$ .

Şimdi yeni bir fonksiyon kümesi tanımlayalım.

$R(R) := \{ \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 : \varphi_1, \varphi_2 R \text{ de tanımlı negatif olmayan üstten yarı sürekli fonksiyonlar} \}$

Yukarıdaki kümeyi tanımlamamızın amacı, negatif olmayan üstten yarı sürekli fonksiyonlar şartını genişleterek  $R(R)$  şeklinde tanımlanan bu fonksiyonların noktasal toplam, skalerle çarpım ve çarpım işlemleri altında bir cebir olduğunu görmek hiçte zor değildir.

**3.1.3.5 Teorem:**  $A \in B(H)$  bir özeşlenik operatör ve  $\varphi \in R(R)$  olsun.

Bu durumda  $\varphi(A) \in B(H)$ ,  $\varphi \in R(R)$  olan bir özeşlenik operatör vardır ve bu operatör

$$\varphi(A) = \varphi_1(A) - \varphi_2(A).$$

$R(R)$ 'den  $B(H)$ 'a tanımlanan  $\varphi \rightarrow \varphi(A)$  dönüşümü bir homomorfizmdir ve bu homomorfizm aşağıdaki şekilde sıralamayı korur, yani eğer  $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$  ve  $s \in S_p(A)$  için  $\varphi(s) \leq \psi(s)$  şartını sağlayan iki fonksiyon ise, bu durumda  $\varphi(A) \leq \psi(A)$ . Ayrıca eğer  $B \in B(H)$  operatörü  $AB = BA$  değişme özelliğini sağlıyorsa bu durumda  $\varphi(A)B = B\varphi(A)$  olur.

### 3.1.4. Özeşlenik Operatörlerin Spektral Ayrılışı

$A \in B(H)$  özeşlenik operatörü ve her  $\lambda \in \mathbb{R}$  için  $\varphi_\lambda$  ise

$$\varphi_\lambda(s) = \begin{cases} 1, & -\infty < s \leq \lambda \\ 0, & \lambda < s < +\infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun.

Her  $\lambda \in \mathbb{R}$  için  $E_\lambda := \varphi_\lambda(A)$  operatörü bir projeksiyon operatörüdür.

### 3.1.4.1 Teorem: (Spektral Gösterim Teoremi)

$A, H$  Hilbert uzayında bir sınırlı özdeşlik operatör ve

$$m = \min \{ \lambda : \lambda \in S_p(A) \} = \min(S_p(A))$$

$$M = \max \{ \lambda : \lambda \in S_p(A) \} = \max(S_p(A)) \text{ olsun.}$$

Bu durumda aşağıdaki özellikleri sağlayan ve  $A$  operatörünün “spektral ailesi” olarak adlandırılan  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  projeksiyonların bir ailesi vardır.

a)  $\lambda \leq \lambda'$  için  $E_\lambda \leq E_{\lambda'}$ .

b)  $E_{m-0} = 0$ ,  $E_m = I$  ve her  $\lambda \in \mathbb{R}$  için  $E_{\lambda+0} = E_\lambda$

c)  $A = \int_{m-0}^M \lambda dE_\lambda$

şekliden gösterime sahiptir.

Genel olarak,  $\mathbb{R}$ 'de tanımlı her sürekli kompleks değerli  $\varphi$  fonksiyonu ve her  $\varepsilon > 0$  için ,

$$\|\varphi(A) - \sum_{k=1}^n \varphi(\lambda'_k) [E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}]\| \leq \varepsilon \quad (1.6)$$

şartını sağlayan

$$\begin{aligned} \lambda_0 < \lambda_1 = m < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = M \\ \lambda_k - \lambda_{k-1} &\leq \delta, \quad 1 \leq k \leq n \quad (2.7) \\ \lambda'_k &\in [\lambda_{k-1}, \lambda_k], \quad 1 \leq k \leq n \end{aligned}$$

$\delta > 0$  sayısı mevcuttur. Buradan da

$$\varphi(A) = \int_{m-0}^M \varphi(\lambda) dE_\lambda$$

Şeklinde Riemann-Stieltjes tipi integrale dönüşür.

**3.1.4.2 Sonuç:**  $A, E_\lambda$  ve  $\varphi$  Teorem 2.25.?'deki iddiaları sağlasın. Bu durumda; her

$x, y \in H$  için

$$\varphi(A)_x = \int_{m-0}^M \varphi(\lambda) dE_\lambda x. (2.8)$$

gösterimi ve

$$(\varphi(A)_{x,y}) = \int_{m-0}^M \varphi(\lambda) d(E_\lambda x, y) (2.9)$$

Özel olarak  $y = x$  olarak alınırsa her  $x \in H$  için

$$\langle \varphi(A)_{x,x} \rangle = \int_{m-0}^M \varphi(\lambda) d\langle E_\lambda x, x \rangle. (1.7)$$

Üstelik, her  $x \in H$  için

$$\| \varphi(A)_x \|^2 = \int_{m-0}^M |\varphi(\lambda)|^2 d\|E_\lambda x\|^2. (1.8)$$

**3.1.4.3 Teorem:**  $A, H$  Hilbert uzayında sınırlı özeşlenik bir operatör ve

$$m := \min(S_p(A))$$

$$M := \max(S_p(A)) \text{ olsun.}$$

Eğer  $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ , her  $\lambda \in \mathbb{R}$  ve  $E_\lambda$ 'da (1.5) deki gibi tanımlanırsa  $F_\lambda = E_\lambda$ .

Yukarıdaki iki teoremden de anlaşılacağı gibi projeksiyon operatörlerin spektral ailesi sınırlı özeşlenik bir  $A$  operatörü tarafından tek şekilde belirlenir ve tek şekilde gösterime sahiptir. Bu spektral aile aynı zamanda,  $A$  operatörünün özelliklerini direkt yansıtır.

**3.1.4.4 Teorem:**  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  sınırlı özeşlenik  $A$  operatörünün spektral ailesi olsun. Eğer  $B, H$  Hilbert uzayında sınırlı lineer bir operatör ise  $AB=BA$  olabilmesi için gerek ve yeterli koşul her  $\lambda \in \mathbb{R}$  için  $E_\lambda B = B E_\lambda$  olmasıdır. Ayrıca özel olarak  $\lambda \in \mathbb{R}$  için  $E_\lambda A = A E_\lambda$ .

**3.1.4.5 Teorem:**  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  sınırlı özeşlenik  $A$  operatörünün spektral ailesi ve  $\mu \in \mathbb{R}$  olsun. Bu durumda;

- a)  $\mu$ , A operatörünün regüler değeridir, yani A-I'nın tersinir olması için gerek ve yeter koşul  $E_{\mu-\theta} = E_{\mu+\theta}$  olan bir  $\theta > 0$  invarolmasıdır.
- b)  $\mu \in S_p(A) \Leftrightarrow$  her  $\theta > 0$  için  $E_{\mu-\theta} < E_{\mu+\theta}$
- c)  $\mu$ , A operatörünün bir özdeğeridir  $\Leftrightarrow \mu \in \mathbb{R}$  için  $E_{\mu-0} < E_{\mu}$

Aşağıdaki sonuç, Hilbert uzayında sınırlı özeşlenik operatörler için bir çok sonuçla ilişkili eşitsizliklerin elde edilmesinde önemli bir role sahiptir.

**3.1.4.6 Teorem:** (Total Varyasyonlu Schwarz Eşitsizliği)

$\{E_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  sınırlı özeşlenik bir A operatörünün spektral ailesi,  $m = \min S_p(A)$  ve  $M = \max S_p(A)$  olsun. Bu durumda her  $x, y \in H$  için  $\lambda \rightarrow \langle E_{\lambda}x, y \rangle$  fonksiyonu sınırlı varyasyonludur ve

$$\bigvee_{m-0}^M \langle E_{(\cdot)}x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

**İspat:** Eğer P, her  $x \in H$  için  $\langle Px, x \rangle \geq 0$ , yani H Hilbert uzayında negatif olmayan bir özeşlenik operatör ise, bu durumda her  $x, y \in H$  için

$$|\langle Px, x \rangle|^2 \leq \langle Px, x \rangle \langle Py, y \rangle$$

Eşitsizliği H Hilbert uzayında Schwarz eşitsizliğinin bir genelleştirilmesidir. Şimdi, eğer

$$d : m-s = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = M,$$

$S > 0$  için  $[m-s, M]$  aralığının keyfi bir parçalanışı ise, bu durumda negatif olmayan operatörler için Schwarz eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \bigvee_{m-0}^M \langle E_{(\cdot)}x, y \rangle &= \text{Sup}_d \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \langle (E_{t_{i+1}} - E_{t_i})x, y \rangle \right\} \\ &\leq \text{Sup}_d \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} [\langle (E_{t_{i+1}} - E_{t_i})x, x \rangle^{1/2} \langle (E_{t_{i+1}} - E_{t_i})y, y \rangle^{1/2}] \right\} := I \dots\dots\dots(1.15) \end{aligned}$$

Reel sayılar için Cauchy-Bunyokowski-Schwarz eşitsizliğinden her  $x, y \in H$  için

$$I \leq \sup_d \left\{ \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \langle (E_{t_{i+1}} - E_{t_i})x, x \rangle \right]^{1/2} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \langle (E_{t_{i+1}} - E_{t_i})y, y \rangle \right]^{1/2} \right. \\ \left. \leq \left[ \bigvee_{m=0}^M \langle E_{(\cdot)}x, x \rangle \right]^{1/2} \left[ \bigvee_{m=0}^M \langle E_{(\cdot)}y, y \rangle \right]^{1/2} \right. \quad (1.9)$$

$s \rightarrow 0$  için teorem ispatlanmış olur.

### 3.1.4.1. Operatör Monoton ve Operatör Konveks Fonksiyonlar

$f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  bir aralık, sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer bu  $f$  fonksiyonu operatör sıralamasına göre monoton ise bu sürekli  $f$  fonksiyonuna monoton operatör denir. Yani, eğer  $A$  ve  $B$   $H$  Hilbert uzayında,  $A \leq B$  ve  $S_p(A), S_p(B) \subset I$  olacak şekilde iki sınırlı özeşlenik operatör ise bu durumda  $f(A) \leq f(B)$  oluyorsa bu reel değerli sürekli fonksiyona monoton operatör denir. Şimdi konveks operatör kavramını verelim. Eğer,  $A$  ve  $B$   $H$  Hilbert uzayında  $S_p(A), S_p(B) \subset I$  olacak şekilde keyfi iki tane sınırlı özeşlenik operatör ise,  $\lambda \in [0,1]$  için

$$f((1-\lambda)A + \lambda B) \leq (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B) \quad (1.10)$$

oluyorsa bu  $f$  fonksiyonuna konveks operatör denir. Bu tanımında " $\leq$ " yerinde " $\geq$ " alınırsa bu tanıma benzer şekilde "konkav operatör" tanımında verilebilir.

#### 3.1.4.1.1 Teorem: (Löwner-Heinz Eşitsizliği)

$A$  ve  $B$   $H$  Hilbert uzayında iki pozitif operatör olsun. Bu durumda eğer  $A \geq B \geq 0$  ise, buradan her  $r \in [0,1]$  için  $A^r \geq B^r$ .

#### 3.1.4.1.2 Teorem: (Jensen Operatör Eşitsizliği)

$H$  ve  $K$  iki Hilbert uzayı ve  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca,  $A$  ve  $A_j$ ,  $j=1,2,\dots,k$  için  $j$  içinde spektral olan  $H$  Hilbert uzayında özeşlenik operatörler ise, bu durumda aşağıdaki şartlar birbirine denktir.

- i)  $f$ ,  $j$  üzerinde konveks operatör;
- ii) Her  $A: H \rightarrow H$  özeşlenik ve  $C: K \rightarrow H$  izometri, yani  $C^*C = 1_K$  operatör ise,  $f(C^*AC) \leq C^*f(A)C$ ;



iii) Her  $A:H \rightarrow H$  özeşlenik ve  $C:H \rightarrow H$  izometri için  
 $f(C^*AC) \leq C^*f(A)C$ ;

iv) Her  $A_j:H \rightarrow H$  özeşlenik ve  $C_j:K \rightarrow H$ ,  $\sum_{j=1}^k C_j^*C_j = 1_K$  sınırlı lineer operatörleri için

$$f\left(\sum_{j=1}^k C_j^*A_jC_j\right) \leq \sum_{j=1}^k C_j^*f(A_j)C_j;$$

v) Her  $A_j:H \rightarrow H$  özeşlenik ve  $C_j:H \rightarrow H$ ,  $\sum_{j=1}^k C_j^*C_j = 1_H$  sınırlı lineer operatörleri için

$$f\left(\sum_{j=1}^k C_j^*A_jC_j\right) \leq \sum_{j=1}^k C_j^*f(A_j)C_j;$$

vi) Her özeşlenik  $A_j:H \rightarrow H$  operatörü ve  $P_j:H \rightarrow H$ ,  $\sum_{j=1}^k P_j = 1_H$  projeksiyon operatör ise, bu durumda

$$f\left(\sum_{j=1}^k P_jA_jP_j\right) \leq \sum_{j=1}^k P_jf(A_j)P_j$$

### 3.1.4.1.3 Teorem: (Hansen-Pedersen-Jensen Eşitsizliği)

$J$ , sıfırı içeren bir aralık ve  $f:J \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyon olsun.  $A$  ve  $A_j$ ,

$j=1,2,\dots,k$  spektrumları  $J$  de olan,  $H$  Hilbert uzayında özeşlenik operatörler olsunlar. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

i)  $f$ ,  $J$  üzerinde konveks operatör ve  $f(0) \leq 0$ ;

ii) Her  $A:H \rightarrow H$  özeşlenik operatör ve  $C:H \rightarrow H$   $C^*C \leq 1_H$  olan bir daralma dönüşümü ise  $f^*(C^*AC) \leq C^*f(A)C$ ;

iii) Her  $A_j:H \rightarrow H$  özeşlenik operatör ve  $C_j:H \rightarrow H$ ,  $\sum_{j=1}^k C_j^*C_j \leq 1_H$  sınırlı lineer

operatörler ise  $f\left(\sum_{j=1}^k C_j^*A_jC_j\right) \leq \sum_{j=1}^k C_j^*f(A_j)C_j$ ;

- iv) Her  $A:H \rightarrow H$  özeşlenik bir operatör ve  $P$  de bir projeksiyon ise, bu durumda  $f(PAP) \leq Pf(A)P$

**3.1.4.1.4 Teorem:** [T.Furuta, sayfa 13]  $f, [0, \infty)$  üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her  $t \in [0, \infty)$  için  $f(t) \leq 0$  ise, bu durumda Teorem 2.33'ün (i)-(vi) şartlarının her biri aşağıdaki şarta denktir.

- vii)  $-f$  monoton operatör fonksiyondur.

**3.1.4.1 Sonuç:**  $f:[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $f$  nin monoton operatör olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul  $f$  nin konkav operatör olmasıdır.

**3.1.4.1.6 Teorem:**  $f, r \leq \infty$  için  $[0, r)$  aralığı üzerinde sürekli olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir.

- i)  $f$  konveks operatördür ve  $f(0) \leq 0$  ;  
ii)  $t \rightarrow \frac{f(t)}{t}$  fonksiyonu  $(0, r)$  üzerinde monoton operatördür.

**3.1.4.1.7 Sonuç:**  $f, [0, \infty)$  aralığı üzerinde sürekli olan ve pozitif değer alan bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $f$  nin monoton operatör olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul  $t \rightarrow \frac{f(t)}{t}$  fonksiyonunun monoton operatör olmasıdır.

**3.1.4.1.7 Teorem:**  $f:J = [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  alttan sınırlı, sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

- i)  $f, J$  üzerinde konkav operatördür;  
ii)  $f, J$  üzerinde monoton operatördür.

Özel olarak,  $f(t) = t^r$  fonksiyonunun  $[0, \infty)$  aralığında monoton operatör olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul  $r \in [0, 1]$  olmasıdır.  $f(t) = t^r$  fonksiyonunun  $(0, \infty)$ 'da konveks operatör olması için  $r \in [1, 2]$  yada  $r \in [-1, 0]$  olmasıdır. Ayrıca  $f(t) = t^r$  fonksiyonu  $r \in [0, 1]$  ise  $(0, \infty)$  aralığında operatör konkavidir.

## 3.2. JENSEN TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

### 3.2.1. JENSEN EŞİTSİZLİĞİNİN TERSLERİ

#### 3.2.1.1. Drsgomir-Lonescu Eşitsizliklerinin Operatör Versiyonu

**3.2.1.1.1 Teorem:**  $I$  bir aralık olsun ve  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  aralığı üzerinde konveks ve diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer  $A \in Sp(A) \subset [m, M]$  ile  $H$  Hilbert uzayında sınırlandırılmış bir operatör ise;

$$(0 \leq) \langle f(A)x, x \rangle - f(\langle Ax, x \rangle) \leq \langle f'(A)Ax, x \rangle - \langle Ax, x \rangle \cdot \langle f'(A)x, x \rangle \quad (1.11)$$

her  $x \in H$  için,  $\|x\| = 1$

**İspat:**  $f$ , konveks ve diferansiyellenebilir olduğu için,

$$f(t) - f(s) \leq f'(t) \cdot (t - s) \quad \text{her } t, s \in [m, M].$$

Şimdi, biz bir eşitsizlik seçelim  $s = \langle Ax, x \rangle \in [m, M]$  her  $x \in H$   $\|x\| = 1$

$Sp(A) \subset [m, M]$ , o zaman

$$f(t) - f(\langle Ax, x \rangle) \leq f'(t) \cdot (t - \langle Ax, x \rangle) \quad (1.12)$$

her  $t \in [m, M]$  her  $x \in H$   $\|x\| = 1$

Biz  $x \in H$   $\|x\| = 1$  i (1.11) denkleminde sabitlesek ve düzgünce uygularsak ;

$$\langle [f(A) - f(\langle Ax, x \rangle) 1_H]x, x \rangle \leq \langle f'(A) \cdot (A - \langle Ax, x \rangle 1_H)x, x \rangle \quad \text{her } x \in H \quad \|x\| = 1.$$

**3.2.1.1.2 Sonuç:**  $f$ , Teorem 3.2.1.1.1. deki olarak farz edelim. Eğer  $A_j \in Sp(A_j) \subset$

$[m, M] \subset I$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$  ve  $x_j \in H$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$   $\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 = 1$  ile

sınırlandırılınsın, o zaman

$$(0 \leq) \sum_{j=1}^n \langle f(A_j)x_j, x_j \rangle - f(\sum_{j=1}^n \langle A_j x_j, x_j \rangle) \leq \sum_{j=1}^n \langle f'(A_j)A_j x_j, x_j \rangle - \sum_{j=1}^n \langle A_j x_j, x_j \rangle \cdot \sum_{j=1}^n \langle f'(A_j)x_j, x_j \rangle. \quad (1.13)$$

**3.2.1.1.3 Sonuç:**  $f$  fonksiyonunu Teorem 3.2.1.1.1. deki olarak alalım. Eğer

$A_j \in Sp(A_j) \subset [m, M] \subset I$ ,

$j \in \{1, \dots, n\}$  ve  $p_j \geq 0$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$   $\sum_{j=1}^n p_j = 1$  ile sınırlandırılmış operatör ise, o zaman

$$(0 \leq) \sum_{j=1}^n p_j f(x_j) - f(\sum_{j=1}^n p_j x_j) \\ \leq \sum_{j=1}^n p_j f'(x_j) x_j - \sum_{j=1}^n p_j x_j \cdot \sum_{j=1}^n p_j f'(x_j),$$

$x_j \in \{1, \dots, n\}$  Dragomir ve Ionescu tarafından 1994 de ilk halini kapsar.

### 3.2.1.2. Diğer Tersler

Uygulamalarda daha kullanışlı olabilecek eşitsizlikler

$$\langle f(A)x, x \rangle - f(\langle Ax, x \rangle), \quad x \in H, \|x\| = 1.$$

Bunlar spektrum margins terimleridir  $m, M$  ve  $f$  fonksiyonunun. Bunun devamında şu sonuca varabiliriz.

**3.2.1.2.1 Teorem:**  $I$ , bir aralık olsun ve  $f: I \rightarrow R$ ,  $I$  aralığı üzerinde konveks ve diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer  $A \operatorname{Sp}(A) \subset [m, M] \subset I$  ile  $H$  hilbert uzayında sınırlandırılmış bir operatör ise; o zaman

$$(0 \leq) \langle f(A)x, x \rangle - f(\langle Ax, x \rangle) \\ \leq \frac{1}{2} (M-m) [\|f'(A)x\|^2 - \langle f'(A)x, x \rangle]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} (f'(M) - f'(m)) [\|Ax\|^2 - \langle Ax, x \rangle]^{\frac{1}{2}} \\ \leq \frac{1}{4} (M-m) (f'(M) - f'(m))$$

$$x \in H \quad \|x\| = 1.$$

$$(0 \leq) \langle f(A)x, x \rangle - f(\langle Ax, x \rangle) \leq \frac{1}{4} (M-m) (f'(M) - f'(m))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle Mx - Ax, Ax - mx \rangle \langle f'(M)x - f'(A)x, f'(A)x - f'(m)x \rangle \\ \langle Ax, x \rangle - \frac{M+m}{2} \parallel \langle f'(A)x, x \rangle - \frac{f'(M) + f'(m)}{2} \end{array} \right.$$

$$\leq \frac{1}{4} (M-m) (f'(M) - f'(m)) \quad (1.15)$$

Herhangi bir  $x \in H$  ve  $\|x\| = 1$ .

Dahası, eğer  $m > 0$  ve  $f'(m) > 0$  ise, o zaman

$$(0 \leq) \langle f(A)x, x \rangle - f(\langle Ax, x \rangle) \leq \frac{1}{4} \frac{(M-m)(f'(M) - f'(m))}{\sqrt{Mm f'(M) f'(m)}} \langle Ax, x \rangle \langle f'(A)x, x \rangle,$$

$$(\sqrt{M}-\sqrt{m})(\sqrt{f'(M)}-\sqrt{f'(m)})[\langle Ax, x \rangle \langle f'(A)x, x \rangle]^{\frac{1}{2}} \quad (1.16)$$

Herhangi bir  $x \in H$   $\|x\| = 1$ .

**İspat:**  $A, (H; \langle \cdot, \cdot \rangle)$  Hilbert uzayında sınırlı bir operatör olsun ve farz edelim ki  $Sp(A) \subset [m, M]$  skalerler için  $m < M$  olsun. Eğer  $h$  ve  $g$   $[m, M]$  de sürekli ve

$\gamma := \min_{t \in [m, M]} h(t)$  ve  $\Gamma := \max_{t \in [m, M]} h(t)$  o zaman

$$| \langle h(A)g(A)x, x \rangle - \langle h(A)x, x \rangle \cdot \langle g(A)x, x \rangle | \leq \frac{1}{2} \cdot (\Gamma - \gamma) [\|g(A)x\|^2 - \langle g(A)x, x \rangle^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left( \leq \frac{1}{4} (\Gamma - \gamma) (\Delta - \delta) \right) \quad (1.17)$$

Herhangi bir  $x \in H$   $\|x\| = 1$ ,  $\delta := \min_{t \in [m, M]} |g(t)|$  ve  $\Delta := \max_{t \in [m, M]} |g(t)|$ .

Dahası

$$\langle Af'(A)x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle \cdot \langle f'(A)x, x \rangle \leq \frac{1}{2} (M - m) [\|f'(A)x\|^2 - \langle f'(A)x, x \rangle^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{4} (M - m) (f'(M) - f'(m)) \quad (1.18)$$

ve

$$\langle Af'(A)x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle \cdot \langle f'(A)x, x \rangle \leq \frac{1}{2} (f'(M) - f'(m)) [\|f'(A)x\|^2 - \langle f'(A)x, x \rangle^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{4} (M - m) (f'(M) - f'(m)) \quad (1.19)$$

Her bir  $x \in H$   $\|x\| = 1$ . Birlikte istenen sonucu sağlar.

$$| \langle h(A)g(A)x, x \rangle - \langle h(A)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle | \leq \frac{1}{4} (\Gamma - \gamma) (\Delta - \delta)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [ \langle \Gamma x - h(A)x, f(A)x - \gamma x \rangle \langle \Delta x - g(A)x, g(A)x - \delta x \rangle ]^{\frac{1}{2}} \\ \left| \langle h(A)x, x \rangle - \frac{\Gamma + \gamma}{2} \right| \left| \langle g(A)x, x \rangle - \frac{\Delta + \delta}{2} \right| \end{array} \right. \quad (1.20)$$

Her bir  $x \in H$   $\|x\| = 1$ .

$$\langle Af'(A)x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle \cdot \langle f'(A)x, x \rangle \leq \frac{1}{4} (M - m) (f'(M) - f'(m))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [ \langle Mx - Ax, Ax - mx \rangle \langle f'(M)x - f'(A)x, f'(A)x - f'(m)x \rangle ]^{\frac{1}{2}} \\ \left| \langle Ax, x \rangle - \frac{M + m}{2} \right| \left| \langle f'(A)x, x \rangle - \frac{f'(M) + f'(m)}{2} \right| \end{array} \right.$$

Her bir  $x \in H$   $\|x\| = 1$ . Eğer  $y$  ve  $\delta$  pozitifse o zaman,

$$| \langle h(A)g(A)x, x \rangle - \langle h(A)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle |$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \frac{(\Gamma - y)(\Delta - \delta)}{\sqrt{\Gamma y \Delta \delta}} \\ (\sqrt{\Gamma} - \sqrt{y})(\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta}) [\langle h(A)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle]^{\frac{1}{2}} \end{array} \right. < h(A)x, x \rangle < g(A)x, x \rangle$$

Her bir  $x \in H$   $\|x\| = 1$ .

Şimdi, biz belirtebiliriz ki,

$$\langle Af'(A)x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle \langle f'(A)x, x \rangle$$

$$\leq \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \frac{(M-m)(f'(M)-f'(m))}{\sqrt{Mmf'(M)f'(m)}} \langle Ax, x \rangle \langle f'(A)x, x \rangle, \\ (\sqrt{M} - \sqrt{m})(\sqrt{f'(M)} - \sqrt{f'(m)}) [\langle Ax, x \rangle \langle f'(A)x, x \rangle]^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

Her bir  $x \in H$   $\|x\| = 1$ .

**3.2.1.2.2 Sonuç:**  $f$ , teorem 3.2.1.2.1. deki gibi olsun. Eğer

$$A_j Sp(A_j) \subset [m, M] \subset I,$$

$j \in \{1, \dots, n\}$  ve  $p_j \geq 0, j \in \{1, \dots, n\}$   $\sum_{j=1}^n p_j = 1$  ile sınırlandırılmış operatör ise, o zaman

$$(0 \leq) \sum_{j=1}^n \langle f(A_j)x_j, x_j \rangle - f(\sum_{j=1}^n (A_j x_j, x_j))$$

$$\leq \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} (M - m) [\sum_{j=1}^n \|f'(A_j)x_j\|^2 - (\sum_{j=1}^n \langle f'(A_j)x_j, x_j \rangle)^2]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} (f'(M) - f'(m)) [\sum_{j=1}^n \|A_j x_j\|^2 - (\sum_{j=1}^n \langle A_j x_j, x_j \rangle)^2]^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

$$\leq \frac{1}{4} (M-m)(f'(M)-f'(m)) \quad (1.21)$$

Her bir  $x_j \in H, j \in \{1, \dots, n\}$   $\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 = 1$ .

Ayrıca

$$(0 \leq) \sum_{j=1}^n \langle f(A_j)x_j, x_j \rangle - f(\sum_{j=1}^n A_j x_j, x_j) \leq \frac{1}{4} (M-m)(f'(M)-f'(m))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \sum_{j=1}^n \langle Mx_j - A_jx, A_jx_j - mx_j \rangle \right]^{\frac{1}{2}} \\ x \left[ \sum_{j=1}^n \langle f'(M)x_j - f'(A_j)x_j, f'(A_j)x_j - f'(m)x_j \rangle \right]^{\frac{1}{2}} \\ \left| \sum_{j=1}^n \langle A_jx_j, x_j \rangle - \frac{M+m}{2} \right| \left\| \sum_{j=1}^n \langle f'(A_j)x_j, x_j \rangle - \frac{f'(M) + f'(m)}{2} \right\| \end{array} \right.$$

$$\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'(M)-f'(m)) \quad (1.22)$$

Her bir  $x_j \in H, j \in \{1, \dots, n\}$   $\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 = 1$ .

Dahası, eğer  $m > 0$  ve  $f'(m) > 0$  ise o zaman

$$(0 \leq) \sum_{j=1}^n \langle f(A_j)x_j, x_j \rangle - f\left(\sum_{j=1}^n \langle A_jx_j, x_j \rangle\right)$$

$$\leq \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \frac{(M-m)(f'(M)-f'(m))}{\sqrt{Mmf'(M)f'(m)}} \sum_{j=1}^n \langle A_jx_j, x_j \rangle - \sum_{j=1}^n \langle f'(A_j)x_j, x_j \rangle, \\ (\sqrt{M} - \sqrt{m})(\sqrt{f'(M)} - \sqrt{f'(m)}) \\ x \left[ \sum_{j=1}^n \langle A_jx_j, x_j \rangle - \sum_{j=1}^n \langle f'(A_j)x_j, x_j \rangle \right]^{\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (1.23)$$

Her bir  $x_j \in H, j \in \{1, \dots, n\}$  ile  $\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 = 1$ .

**3.2.1.2.3 Sonuç:** Varsayalım ki  $f, 3.2.1.2.1$ . Teoremi gibidir. Eğer

$A_j, Sp(A_j) \subset [m, M] \subset I,$

$j \in \{1, \dots, n\}$  ve  $p_j \geq 0, j \in \{1, \dots, n\}$   $\sum_{j=1}^n p_j = 1$  ile sınırlandırılmış operatör ise, o zaman

$$(0 \leq) \left\langle \sum_{j=1}^n p_j f(A_j)x, x \right\rangle - f\left(\left\langle \sum_{j=1}^n p_j A_jx, x \right\rangle\right)$$

$$\leq \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(M-m) \left[ \sum_{j=1}^n p_j \|f'(A_j)x\|^2 - \left\langle \sum_{j=1}^n p_j f'(A_j)x, x \right\rangle^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}(f'(M) - f'(m)) \left[ \sum_{j=1}^n p_j \|A_jx\|^2 - \left\langle \sum_{j=1}^n p_j A_jx, x \right\rangle^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

$$\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'(M)-f'(m)) \quad (1.24)$$

Herhangi  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ .

Ayrıca belirtebiliriz ki

$$\begin{aligned} (0 \leq) & \left\langle \sum_{j=1}^n p_j f(A_j)x, x \right\rangle - f\left(\left\langle \sum_{j=1}^n p_j A_j x, x \right\rangle\right) \\ & \leq \frac{1}{4}(M-m)(f'(M) - f'(m)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \left\{ \begin{aligned} & \left[ \sum_{j=1}^n p_j \langle Mx - A_j x, A_j x - mx \rangle \right]^{\frac{1}{2}} \\ & x \left[ \sum_{j=1}^n p_j \langle f'(M)x - f'(A_j)x, f'(A_j)x - f'(m)x \rangle \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \left| \left\langle \sum_{j=1}^n p_j A_j x, x \right\rangle - \frac{M+m}{2} \right| \left| \left\langle \sum_{j=1}^n p_j f'(A_j)x, x \right\rangle - \frac{f'(M) + f'(m)}{2} \right| \end{aligned} \right. \\ & \leq \frac{1}{4}(M-m)(f'(M) - f'(m)) \quad (1.25) \end{aligned}$$

Herhangi bir  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ .

Dahası, eğer  $m > 0$  ve  $f'(m) > 0$ , ise o zaman

$$\begin{aligned} (0 \leq) & \left\langle \sum_{j=1}^n p_j f(A_j)x, x \right\rangle - f\left(\left\langle \sum_{j=1}^n p_j A_j x, x \right\rangle\right) \\ & \leq \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{(M-m)(f'(M)-f'(m))}{\sqrt{Mmf'(M)f'(m)}} \left\langle \sum_{j=1}^n p_j A_j x, x \right\rangle \left\langle \sum_{j=1}^n p_j f'(A_j)x, x \right\rangle, \\ & (\sqrt{M} - \sqrt{m})(\sqrt{f'(M)} - \sqrt{f'(m)}) \\ & x \left[ \left\langle \sum_{j=1}^n p_j A_j x, x \right\rangle \left\langle \sum_{j=1}^n p_j f'(A_j)x, x \right\rangle \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Her bir  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ . (1.26)

**3.2.1.2.4 Dikkat:** Eşitsizlik 1.26 sonuçların bazıları dışbükey fonksiyon  $f$  negatif olmayan ve azalmayan tekdüze olduğu durumda pozitif operatörlerin toplamı için ters eşitsizlik üretmek için kullanılabilir.



$$(0 \leq) \left\| \sum_{j=1}^n P_j f(A_j) \right\| - f \left( \left\| \sum_{j=1}^n P_j A_j \right\| \right) \leq \frac{1}{4} (M - m)(f'(M) - f'(m))$$

Dahası, eğer biz (1.26) eşitsizliğini kullanırsak, o zaman elde ederiz:

$$(0 \leq) \left\| \sum_{j=1}^n P_j f(A_j) \right\| - f \left( \left\| \sum_{j=1}^n P_j A_j \right\| \right) \leq \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{(M-m)(f'(M)-f'(m))}{\sqrt{Mm f'(M) f'(m)}} \left\| \sum_{j=1}^n p_j A_j \right\| \left\| \sum_{j=1}^n p_j f'(A_j) \right\| \\ (\sqrt{M} - \sqrt{m})(\sqrt{f'(M)} - \sqrt{f'(m)}) \left[ \left\| \sum_{j=1}^n p_j A_j \right\| \left\| \sum_{j=1}^n p_j f'(A_j) \right\| \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (1.27)$$

### 3.2.2. Bazı Slater Tipi Eşitsizlikler

#### 3.2.2.1. Reel Değişkenli Fonksiyonlar İçin Slater Tipi Eşitsizlikler

$I$ 'nin gerçekte sayılar aralığında olduğunu varsayalım ve  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  bir dışbükey fonksiyondur. O halde  $f$ ,  $I$  üzerinde süreklidir ve  $I$ 'nin her noktada sonlu sol ve sağ türevleri vardır. Üstelik, eğer  $x, y \in I$  ve  $x < y$ , sonra  $f'_-(x) \leq f'(x) \leq f'_y(y) \leq f'(y)$  ve  $f'$  ifadelerinin azalmayan fonksiyon olduğunu gösterir. Ayrıca, dışbükey bir fonksiyonu en sayılabilir sayıda noktalar hariç türevlenebilir olması gerektiği bilinmektedir.

Dışbükey fonksiyon  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f'$  alt diferansiyeli  $af$  ile gösterilen tüm fonksiyonların kümesi

$$I \rightarrow [-\infty, \infty] \text{ öyle ki } \varphi(I) \subset \mathbb{R} \text{ ve}$$

$$f(x) \leq f(a) + (x - a) \varphi(a) \text{ herhangi } x \in I.$$

Ayrıca, iyi bilinen  $f$  dışbükey olması durumunda  $I$ , sonra  $\delta f$  boş olmayan bir,

$$f_-, f + \epsilon \delta f \text{ ve eğer } \varphi \in \delta f, \text{ o zaman}$$

$$f'_-(x) \leq \varphi(x) \leq f'(x) \text{ herbiri } x \in I.$$

Özellikle,  $\varphi$  azalmayan fonksiyondur.

Eğer  $f$ ,  $I$  üzerinde konveks ve diferansiyellenebilir fonksiyon ise,  $\delta f = \{f'\}$ . Bu sonucun devamında iyi bilinen Slater eşitsizliği:

**3.2.2.1.1 Teorem:** eğer  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ye artmayan konveks fonksiyon  $x_i \in I$ ,  $p_i \geq 0$

$P_n = \sum_{j=1}^n p_i > 0$  ve  $\sum_{j=1}^n p_i \varphi(x_i) \neq 0$ ,  $\varphi \in \delta f$  ise, o zaman

$$\frac{1}{P_n} \sum_{j=1}^n p_i f(x_i) \leq f \left( \frac{\sum_{j=1}^n p_i \varphi(x_i)}{\sum_{j=1}^n p_i} \right) \quad (1.28)$$

### 3.2.2.2. Operatörler İçin Bazı Slater Tipi Eşitsizlikler

**3.2.2.2.1 Teorem:**  $I$  bir aralık olsun ve  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  aralığı üzerinde konveks ve diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer  $A \in sp(A) \subset [m, M]$  ile  $H$  hilbert uzayında sınırlandırılmış bir operatör ve  $f'(A)$   $H$  da pozitif tanımlı operatör ise o zaman;

$$0 \leq f \left( \frac{\langle Af'(A)x, x \rangle}{\langle f'(A)x, x \rangle} \right) - \langle f(A)x, x \rangle \leq f' \left( \frac{\langle Af'(A)x, x \rangle}{\langle f'(A)x, x \rangle} \right) \left[ \frac{\langle Af'(A)x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle \langle f'(A)x, x \rangle}{\langle f'(A)x, x \rangle} \right] \quad (1.29)$$

Her bir  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ .

Şimdi,  $t \in [m, M]$  ve  $A$  operatörü için düzenleme yaparsak, o zaman her bir  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ .

$$\langle f'(A). (t. 1H - A)x, x \rangle \leq \langle [f(t) 1H - f(A)]x, x \rangle \leq \langle f'(t). (t. 1H - A)x, x \rangle \quad (1.30)$$

$t \in [m, M]$  için ve her bir  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ .

$$t \langle f(A)x, x \rangle - \langle f'(A)Ax, x \rangle \leq f(t) - \langle f(A)x, x \rangle \leq f'(t)t - f'(t) \langle Ax, x \rangle$$

$t \in [m, M]$  için ve Her bir  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ .

Şimdi  $A, mI \leq A \leq MI$  ile sınırlı operatör ve  $f'(A)$  pozitif tanımlı, o zaman

$$mf'(A) \leq Af'(A) \leq Mf'(A),$$

$m \langle f'(A)x, x \rangle \leq \langle Af'(A)x, x \rangle \leq M \langle f'(A)x, x \rangle$  Her bir  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ ,

$t_0 := \left( \frac{\langle Af'(A)x, x \rangle}{\langle f'(A)x, x \rangle} \right) \in [m, M]$  Her bir  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ .

**3.2.2.2.2 Açıklama:**  $f'(A), H$  üzerinde pozitif tanımlı operatör için önemlidir ki;

$$\langle Af'(A)x, x \rangle / \langle f'(A)x, x \rangle \in I$$

Her bir  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$  (1.31)

**3.2.2.2.3 Açıklama:** Şimdi, eğer fonksiyonlar  $I$  üzerinde konkav ve (1.31) koşullar sağlanıyorsa, o zaman her  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$  için

$$0 \leq \langle f(A)x, x \rangle - f\left(\frac{\langle Af'(A)x, x \rangle}{\langle f'(A)x, x \rangle}\right) \leq$$

$$f'\left(\frac{\langle Af'(A)x, x \rangle}{\langle f'(A)x, x \rangle}\right) \left[ \frac{\langle Af'(A)x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle \langle f'(A)x, x \rangle}{\langle f'(A)x, x \rangle} \right] \quad (1.32)$$

eşitsizliği doğrudur.

### 3.2.2.3. Diğer Tersler

Negatif olmayan üst sınırlar dahada kullanışlı şu sonucu verebiliriz;

$$f\left(\frac{\langle Af'(A)x, x \rangle}{\langle f'(A)x, x \rangle}\right) - \langle f(A)x, x \rangle$$

Her  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ .

**3.2.2.3.1 Teorem:**  $I$  bir aralık olsun ve  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  aralığı üzerinde konveks ve diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer  $A \in sp(A) \subset [m, M]$  ile  $H$  Hilbert uzayında sınırlandırılmış bir operatör ve  $f'(A), H$  da pozitif tanımlı operatör. Eğer biz tanımlarsak

$$B(f', A; x) := \frac{1}{\langle f'(A)x, x \rangle} \cdot f'\left(\frac{\langle Af'(A)x, x \rangle}{\langle f'(A)x, x \rangle}\right),$$

O zaman

$$(0 \leq) f\left(\frac{\langle Af'(A)x, x \rangle}{\langle f'(A)x, x \rangle}\right) -$$

$$\langle f(A)x, x \rangle \leq (f', A; x) x \begin{cases} \frac{1}{2}(M - m) [\|f'(A)\|^2 - \langle f'(A)x, x \rangle^2]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}(f'(M) - f'(m)) [\|Ax\|^2 - \langle Ax, x \rangle^2]^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\leq \frac{1}{4}(M - m)(f'(M) - f'(m)) B(f', A; x) \quad (1.33)$$

ve

$$(0 \leq) f\left(\frac{\langle Af'(A)x, x \rangle}{\langle f'(A)x, x \rangle}\right) - \langle f(A)x, x \rangle \leq B(f', A; x) \left[ \frac{1}{4}(M - m)(f'(M) - f'(m)) \right. \\ \left. - \left\{ \begin{array}{l} [\langle Mx - Ax, Ax - mx \rangle \langle f'(M)x - f'(A)x - f'(m)x \rangle]^{\frac{1}{2}} \\ \left| \langle Ax, x \rangle - \frac{M + m}{2} \right| \langle f'(A)x, x \rangle - \frac{f'(M) + f'(m)}{2} \right| \end{array} \right] \\ \leq \frac{1}{4}(M - m)(f'(M) - f'(m)) B(f', A; x) \quad (1.34)$$

Her  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ .

Dahası, eğer  $A$  pozitif tanımlı operatör ise o zaman

$$(0 \leq) f\left(\frac{\langle Af'(A)x, x \rangle}{\langle f'(A)x, x \rangle}\right) - \langle f(A)x, x \rangle \leq B(f', A; x) \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \frac{(M - m)(f'(M) - f'(m))}{\sqrt{Mm f'(M) f'(m)}} \langle Ax, x \rangle \langle f'(A)x, x \rangle \\ (\sqrt{M} - \sqrt{m})(\sqrt{f'(M)} - \sqrt{f'(m)}) [\langle Ax, x \rangle \langle f'(A)x, x \rangle]^{\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (1.35)$$

Her  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ .

$A \in \mathcal{H}$ ;  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  hilbert uzayında sınırlı operatör olsun ve  $Sp(A) \subset [m, M]$   $m < M$ . Eğer  $h$  ve  $g$ ,  $[m, M]$  de sürekli olsun ve  $y := \min_{t \in [m, M]} h(t)$  ve  $\Gamma := \max_{t \in [m, M]} h(t)$ ,

o zaman

$$\left| \langle h(A)g(A)x, x \rangle - \langle h(A)x, x \rangle \cdot \langle g(A)x, x \rangle \right| \\ \leq \frac{1}{2} \cdot (\Gamma - y) [\|g(A)x\|^2 - \langle g(A)x, x \rangle^2]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{4} (\Gamma - y) (\Delta - \delta) \\ (1.36)$$

Burada  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ ,  $\delta := \min_{t \in [m, M]} g(t)$  ve  $\Delta := \max_{t \in [m, M]} g(t)$ .

Dahası

$$\langle Af'(A)x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle \cdot \langle f'(A)x, x \rangle \\ \leq \frac{1}{2} (M - m) [\|f'(A)x\|^2 - \langle f'(A)x, x \rangle^2]^{\frac{1}{2}} \\ \leq \frac{1}{4} (M - m) (f'(M) - f'(m))$$

ve

$$\begin{aligned}
& \langle Af'(A)x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle \cdot \langle f'(A)x, x \rangle \\
& \leq \frac{1}{2}(f'(M) - f'(m))[\|Ax\|^2 - \langle Ax, x \rangle^2] \\
& \leq \frac{1}{4}(M - m)(f'(M) - f'(m))
\end{aligned}$$

Buradax  $\in H$  ile  $\|x\| = 1$ .

Eşitsizliği daha kullanışlı yaparsak;

$$\begin{aligned}
& | \langle h(A)g(A)x, x \rangle - \langle h(A)x, x \rangle \cdot \langle g(A)x, x \rangle | \leq \frac{1}{4}(\Gamma - y)(\Delta - \delta) \\
& \left\{ \begin{aligned} & [ \langle \Gamma x - h(A)x, f(A)x - yx \rangle \langle \Delta x - g(A)x, g(A)x - \delta(x) \rangle ]^{\frac{1}{2}} \\ & | \langle h(A)x, x \rangle - \frac{\Gamma+y}{2} | | \langle g(A)x, x \rangle - \frac{\Delta+\delta}{2} | \end{aligned} \right. \quad (1.37)
\end{aligned}$$

Her  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ .

$$\begin{aligned}
& \langle Af'(A)x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle \cdot \langle f'(A)x, x \rangle \leq \frac{1}{4}(M - m)(f'(M) - f'(m)) \\
& - \left\{ \begin{aligned} & [ \langle Mx - Ax, Ax - mx \rangle \langle f'(M)x - f'(A)x, f'(A)x - f'(m)x \rangle ]^{\frac{1}{2}} \\ & | \langle Ax, x \rangle - \frac{M+m}{2} | | \langle f'(A)x, x \rangle - \frac{f'(M) + f'(m)}{2} | \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Dahası, 3. Eşitsizlik üretmek için, biz Grüss tipinin sonucunda denklem elde edebiliriz. Eğery ve  $\delta$  pozitif ise o zaman;

$$\begin{aligned}
& | \langle h(A)g(A)x, x \rangle - \langle h(A)x, x \rangle \cdot \langle g(A)x, x \rangle | \\
& \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{(\Gamma-y)(\Delta-\delta)}{\sqrt{\Gamma y \Delta \delta}} \langle h(A)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle \\ & (\sqrt{\Gamma} - \sqrt{y})(\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta}) [ \langle h(A)x, x \rangle \langle g(A)x, x \rangle ]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right. \quad (1.38)
\end{aligned}$$

Şimdi, (1.38) yi kullanarak biz belirtebiliriz ki;

$$\begin{aligned}
& \langle Af'(A)x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle \cdot \langle f'(A)x, x \rangle \\
& \leq \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{(M-m)(f'(M)-f'(m))}{\sqrt{Mmf'(M)f'(m)}} \langle Ax, x \rangle \langle f'(A)x, x \rangle \\ & (\sqrt{M} - \sqrt{m})(\sqrt{f'(M)} - \sqrt{f'(m)}) [ \langle Ax, x \rangle \langle f'(A)x, x \rangle \end{aligned} \right. \quad (1.39)
\end{aligned}$$

**3.2.2.3.2 Görüş:** (1.39) eşitsizliğinden gözlemleyebiliriz ki ;

$$(1 \leq) \frac{\langle Af'(A)x, x \rangle}{\langle Ax, x \rangle \cdot \langle f'(A)x, x \rangle} \leq \frac{1}{4} \frac{(M-m)(f'(M) - f'(m))}{\sqrt{Mmf'(M)f'(m)}} + 1$$

$$f' \left( \frac{\langle Af'(A)x, x \rangle}{\langle f'(A)x, x \rangle} \right) \leq f' \left( \left[ \frac{1}{4} \frac{(M-m)(f'(M) - f'(m))}{\sqrt{Mmf'(M)f'(m)}} + 1 \right] \langle Ax, x \rangle \right)$$

Burada  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ .  $f'$  monoton azalmayan ve  $A$  pozitif tanımlı operatör için. Şimdi, yukarıdaki 1. eşitsizlikten belirtilebilir ki ;

$$(0 \leq) f \left( \frac{\langle Af'(A)x, x \rangle}{\langle f'(A)x, x \rangle} \right) - \langle f(A)x, x \rangle \leq \frac{1}{4} \frac{(M-m)(f'(M) - f'(m))}{\sqrt{Mmf'(M)f'(m)}}$$

$$Xf' \left( \left[ \frac{1}{4} \frac{(M-m)(f'(M) - f'(m))}{\sqrt{Mmf'(M)f'(m)}} + 1 \right] \langle Ax, x \rangle \right) \langle Ax, x \rangle$$

ve 2. eşitsizlikten

$$(0 \leq) f \left( \frac{\langle Af'(A)x, x \rangle}{\langle f'(A)x, x \rangle} \right) - \langle f(A)x, x \rangle \leq \sqrt{M} - \sqrt{m} (\sqrt{f'(M)} - \sqrt{f'(m)})$$

$$Xf' \left( \left[ \frac{1}{4} \frac{(M-m)(f'(M) - f'(m))}{\sqrt{Mmf'(M)f'(m)}} + 1 \right] \langle Ax, x \rangle \right) \left[ \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle f'(A)x, x \rangle} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.40)$$

### 3.2.3. Konveks Fonksiyonlar İçin Bazı Eşitsizlikler

#### 3.2.3.1. İki Operatör İçin Bazı Eşitsizlikleri

**3.2.3.1.1 Teorem:**  $I$  bir aralık olsun ve  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  üzerinde dışbükey

ve türevlenebilen fonksiyon olsun ( $I$ 'nin aralığı)  $f$  in türevi  $f'$  süreklidir. Eğer  $A$  ve  $B$  Hilbert uzayında özdeşlik iki operatör ve  $Sp(A), Sp(B) \subset [m, M] \subset I$  için

$$\langle f'(A)x, x \rangle \langle By, y \rangle - \langle f'(A)Ax, x \rangle$$

$$\leq \langle f(B)y, y \rangle - \langle f(A)x, x \rangle$$

$$\leq \langle f'(B)By, y \rangle - \langle Ax, x \rangle \langle f'(B)y, y \rangle \quad (1.41)$$

Burada biri  $x, y \in H$  ile  $\|x\| = \|y\| = 1$ .

$$\langle f'(A)x, x \rangle \langle Ay, y \rangle - \langle f'(A)Ax, x \rangle$$

$$\leq \langle f(A)y, y \rangle - \langle f(A)x, x \rangle$$

$$\leq \langle f'(A)Ay, y \rangle - \langle Ax, x \rangle \langle f'(A)y, y \rangle (1.42)$$

$$\langle f'(A)x, x \rangle \langle Bx, x \rangle - \langle f'(A)Ax, x \rangle$$

$$\leq \langle f(B)x \rangle - \langle f(A)x, x \rangle$$

$$\leq \langle f'(B)Bx, x \rangle - \langle Ax, x \rangle \langle f'(B)x, x \rangle (1.43)$$

**İspat:**  $f, I$  üzerinde koveks ve diferansiyellenebildiğinden beri, sonra şunu elde ederiz

$$f'(s).(t - s) \leq f(t) - f(s) \leq f'(t).(t - s) (1.44)$$

Şimdi her  $x \in H, \|x\| = 1$  için

$$\langle f'(t).(t.1_H - A)x, x \rangle \leq \langle [f(t).1_H - f(A)]x, x \rangle \leq$$

$$\langle f'(t).(t.1_H - A)x, x \rangle (1.45)$$

$$t \langle f'(A)x, x \rangle - \langle f'(A)Ax, x \rangle \leq f(t) - \langle f(A)x, x \rangle$$

$$\leq f'(t)t - f'(t) \langle Ax, x \rangle (1.46)$$

Her bir  $t \in [m, M]$  ve herhangi  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ .

$$\langle [(f'(A)x, x)B - \langle f'(A)Ax, x \rangle 1h]y, y \rangle \leq \langle [f(B) - \langle f(A)x, x \rangle 1h]y, y \rangle$$

$$\leq \langle [f'(B)B - \langle Ax, x \rangle f'(B)]y, y \rangle$$

Olup ispat tamamlanır.

**3.2.3.1.2 Uyarı:** Eğer biz  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$  ve  $B = \langle Ax, x \rangle.1_H$ ' yi seçersek, o zaman Mond-Pecaric eşitsizliğinin tersini elde ederiz. İkinci eşitsizlik dışbükey fonksiyonlar için Mond-Pecaric eşitsizliğini sağlayacaktır.

Aşağıdaki doğal sonuçlardan biridir:

**3.2.3.1.3 Sonuç:**  $I$  bir aralık olsun ve  $f: I \rightarrow \mathbb{R}, I$  dışbükey ve türevlenebilir fonksiyon olsun. Ayrıca,  $A$ 'nın Hilbert boşluğunda  $H$  ile  $Sp(A) \subseteq [m, M] \subset I$  kendine eş operatör olduğunu varsayalım. Eğer  $g$  artmayan ve  $[m, M]$  üzerinde süreklidir ve

$$f'[g(A) - A] \geq 0 (1.47)$$

$$(f \circ g)(A) \geq f(A)$$

**3.2.3.1.4 Teorem:**  $I$  bir aralık olsun ve  $f: I \rightarrow \mathbb{R}, I$  dışbükey ve türevlene-

bilir fonksiyon olsun. Eğer  $A$  ve  $B$  Hİlbert boşluğunda  $H$  ile  $Sp(A), Sp(B) \subseteq [m, M] \subset I$  özeşlenik operatörleridir,

$$\begin{aligned} & f'(\langle Ax, x \rangle)(\langle By, y \rangle - \langle Ax, x \rangle) \\ & \leq \langle f(B)y, y \rangle - f(\langle Ax, x \rangle) \\ & \leq \langle f'(B)By, y \rangle - \langle Ax, x \rangle \langle f'(A)y, y \rangle \quad (1.48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f'(\langle Ax, x \rangle)(\langle Ay, y \rangle - \langle Ax, x \rangle) \leq \langle f(A)y, y \rangle - f(\langle Ax, x \rangle) \\ & \leq \langle f'(A)Ay, y \rangle - \langle Ax, x \rangle \langle f'(A)y, y \rangle \quad (1.49) \end{aligned}$$

Her biri  $x, y \in H$  ile  $\|x\| = \|y\| = 1$  ve

$$\begin{aligned} & f'(\langle Ax, x \rangle)(\langle Bx, x \rangle - \langle Ax, x \rangle) \leq \langle f(B)x, x \rangle - f(\langle Ax, x \rangle) \quad (1.50) \\ & \leq \langle f'(B)Bx, x \rangle - \langle Ax, x \rangle \langle f'(B)x, x \rangle \end{aligned}$$

**İspat.**  $f, I$  üzerinde konveks ve türevlenebildiğinden, her  $t, s \in [m, M]$  için aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$f'(s) \cdot (t - s) \leq f(t) - f(s) \leq f'(t) \cdot (t - s) \quad (1.51)$$

Eğer biz  $s = \langle Ax, x \rangle \in [m, M]$  seçersek, bir düzeltme ile  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ , sonra elde ederiz

$$f'(\langle Ax, x \rangle) \cdot (t - \langle Ax, x \rangle) \leq f(t) - f(\langle Ax, x \rangle) \leq f'(t) \cdot (t - \langle Ax, x \rangle) \quad (1.52)$$

Her  $x, y \in H, \|x\| = \|y\| = 1$  için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\begin{aligned} & \langle f'(\langle Ax, x \rangle) \cdot (B - \langle Ax, x \rangle \cdot 1_H)y, y \rangle \leq \langle [f(B) - f(\langle Ax, x \rangle) \cdot 1_H]y, y \rangle \\ & \leq \langle f'(B) \cdot (B - \langle Ax, x \rangle \cdot 1_H)y, y \rangle \quad (1.53) \end{aligned}$$

**3.2.3.1.5 Dikkat:** Eğer (1.53)'deki  $B = A$  veya  $y = x$  seçersek gözlemleriz ve o zaman Mond-Pecaric eşitsizliğini yeniden elde ederiz..

**3.2.3.1.6 Sonuç:**  $f, A$  ve  $B$ 'yi (3.2.3.1.4.) teoremi gibi varsayalım. Eğer  $f, [m, M]$  aralığında artan and  $B(H)$  operatöründe  $B \geq A$  veya  $f$  azalan ve  $B \leq A$  ise, o zaman biz Jensen tipi eşitsizliği elde ederiz.

$$\langle f(B)x, x \rangle \geq f(\langle Ax, x \rangle) \quad (1.54)$$

Burada  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ .



**İspat:**(1.54)'deki ilk eşitsizlik tarafından açıktır ve detaylar hariç bırakılır.

### 3.2.4. İkikez Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar İçin Jensen Operatörü

**3.2.4.1 Teorem:**  $A, H$  Hilbert uzayında pozitif tanımlı olsun ve kabul edelim ki  $Sp(A) \subset [m, M]$  bazı skalerler için  $m, M$  ile  $0 < m < M$ . Eğer  $f(m, M)$  üzerinde 2. Kez diferansiyellenebilir fonksiyon ve  $p \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$  için biz sahibizdir  $\gamma < \Gamma$  için;

$$\gamma < \frac{1}{p(p-1)} t^{2-p} f''(t) \leq \Gamma \text{ her bir } t \in (m, M) \quad (1.55)$$

O zaman

$$\gamma (\langle A^p x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle^p) \leq \langle f(A)x, x \rangle - f(\langle Ax, x \rangle) \leq \Gamma (\langle A^p x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle^p) \quad (1.56)$$

Her biri için  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ .

Eğer ,

$$\delta < \frac{1}{p(p-1)} t^{2-p} f''(t) \leq \Delta \text{ her bir } t \in (m, M) \text{ ve bazı } \delta < \Delta, p \in (0, 1), \text{ o zaman}$$

$$\delta (\langle Ax, x \rangle^p - \langle A^p x, x \rangle) \leq \langle f(A)x, x \rangle - f(\langle Ax, x \rangle) \leq \Delta (\langle Ax, x \rangle^p - \langle A^p x, x \rangle)$$

Her biri için  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ .

**3.2.4.2 Dikkat:** Biz görürüz ki eğer  $f, (m, M)$  üzerinde 2. Kez diferansiyellenebilir fonksiyon ve  $\varphi := \inf_{t \in (m, M)} f''(t)$ ,  $\Phi := \sup_{t \in (m, M)} f''(t)$ , o zaman biz eşitsizlik elde ederiz.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varphi [\langle A^2 x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle^2] &\leq \langle f(A)x, x \rangle - f(\langle Ax, x \rangle) \\ &\leq \frac{1}{2} \Phi [\langle A^2 x, x \rangle - \langle Ax, x \rangle^2] \end{aligned}$$

**3.2.4.3 Sonuç:**  $A_j$  pozitif tanımlı operatör olsun,  $Sp(A_j) \subset [m, M] \subset (0, \infty) j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Eğer  $f, (m, M)$  üzerinde 2kez diferansiyellenebilir fonksiyon ve  $p \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$  ise o zaman;

$$\gamma[\sum_{j=1}^n \langle A_j^p, x_j, x_j \rangle - (\sum_{j=1}^n \langle A_j, x_j, x_j \rangle)^p]$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \langle f(A_j) x_j, x_j \rangle - f(\sum_{j=1}^n \langle A_j, x_j, x_j \rangle)$$

$$\Gamma[\sum_{j=1}^n \langle A_j^p, x_j, x_j \rangle - (\sum_{j=1}^n \langle A_j, x_j, x_j \rangle)^p] \text{ her bir } x_j \in H, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 = 1.$$

**3.2.4.4 Teorem:**  $A, H$  hilbert uzayında pozitif tanımlı olsun ve kabul edelim ki  $Sp(A) \subset [m, M]$  bazı skalerler için  $m, M$  ile  $0 < m < M$ . Eğer  $f(m, M)$  üzerinde 2 kez diferansiyellenebilir fonksiyon ve  $\forall t \in [m, M] f''(t) \leq \Gamma$  özellikleri varsa, herhangi bir  $t \in (m, M)$  için;

$$\forall (\ln \langle Ax, x \rangle - \langle \ln Ax, x \rangle) \leq \langle f(A)x, x \rangle - f(\langle Ax, x \rangle) \delta < \Delta, \text{ o zaman}$$

$$\begin{aligned} \delta (\langle \ln Ax, x \rangle - \langle Ax, x \rangle \ln(\langle Ax, x \rangle)) &\leq \langle f(A)x, x \rangle - f(\langle Ax, x \rangle) \\ &\leq \Delta (\langle \ln Ax, x \rangle - \langle Ax, x \rangle \ln(\langle Ax, x \rangle)) \end{aligned}$$

Her bir  $x \in H$  ile  $\|x\| = 1$ .

#### 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Eşitsizlik Teorisi ile Sınırlı Lineer Operatörler Teorisi birleştirilmiş. Literatürde iyi şekilde bilinen reel anlamdaki Jensen Eşitsizliğinin, sınırlı, lineer operatörlere taşınması ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.. Bunu yaparken, Dragomir' in 2012 yılında yayımladığı “Operator Inequality of the Jensen, Cebysev and Grüss Type” adlı eseri temel kaynak olarak kullanılmıştır. Bu kitaptaki tanım ve teoremler ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Eşitsizlik ve Operatör Teorisi alanında çalışmak isteyen genç bilim insanlarına Türkçe bir kaynak olacaktır.

## KAYNAKLAR

- Azpeitia A. G., 1994. Convex Functions and Hadamard Inequality, *Rev. Colombiana Mat.*, 28, 7-12.
- Bombardelli M., Varosanec S., 2009. Properties Of  $h$ -Convex Functions Related to the Hermite-Hadamard-Fejer Inequalities, *Computers and Mathematics with Applications*, 58, 1869--1877.
- Burai P., Hazy A., 2001. On Approximately  $h$ -Convex Functions, *Journal of Convex Analysis*, 18, 2.
- Beckenbach E. F. , 1948. Convex Functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* 54, 439-460.
- Dragomir S. S., Pecaric J. , 1995. Persson L. E., Some inequality of Hadamard Type, *Soochow J. Math.*, 21, 335-341.
- Dragomir S. S., 2011. Inequalities for Functions of Selfadjoint Operators on Hilbert Spaces, <http://ajmaa.org/RGMIA/monographs/InFuncOp.pdf>. (Erişim Tarihi: 01.04.2016)
- Dragomir S. S., 2011. The Hermite-Hadamard Type Inequalities for Operator Convex Functions, *Appl. Math. Comput.*, 218, 3, 766-772.
- Dragomir S. S., 2010. Chebyshev Type Inequalities for Functions of Selfadjoint Operators in Hilbert Spaces, *Linear and Multilinear Algebra*, 58, no. 7-8, 805-814.
- Erdaş Y., Unluyol E., Salaş S., 2015. The Hermite-Hadamard Type Inequalities for Operator  $m$ -Convex Functions in Hilbert Space, *Journal of New Theory*, 5, 80-91.
- Furuta T., Hot J. M., Pecaric J., Seo Y. , Mond-Pecaric 20015. Method in Operator Inequalities for Bounded Selfadjoint Operators on a Hilbert Space, *Element*, Zagreb.
- Godunova E. K., Levin V. I., 1985. Neravenstradljafunccii sirokogo Klasa Soderzascego Vypuklye, *Monotonnye Inekotorye Drugie Vidy Funkcii, Vycislitel Mat. i Mt. Fiz., Mezvuzov Sb. Nauc. Trudov. MGPI, Moscow*, 138-142.
- Moslehian M. S., Najafi H., 2011. Around Operator Monotone Functions, *Integr. Equ. Oper. Theory*, doi: 10.1007/s00020-011-1921-0, 71, 575--582.
- Mitrinovic D.S. , Lackovic I. B. 1985. Hermite and  $C$ convexity, *Aequationes Math.* 28, 229-232.
- Mitrinovic D. S., Pecaric J. E., 1990. Note on a class of functions of Godunova and Levin, *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, 12, 33-36.

- Mitrinovic D. S., Pecaric J. E., Fink A. M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Acad. Publ. Pearce C. E. M., Rubinov A. M., 1999. P-Functions, Quasi-Convex Functions and Hadamard-Type Inequalities, J. Math. Anal. Appl., 240, 92-104.
- Pachpatte B. G., 2003. On Some Inequalities for Convex Functions, RGMI Res. Rep. Coll., 6(E).
- Pecaric J. E., Proschan F., Tong Y. L., 1992. Functions Convex, Partial Orderings, and Statistical Applications, Academic Press. Inc., San Diego.
- Sarikaya M. Z., Set E., Özdemir M. E., 2010. On Some New Inequalities of Hadamard Type Involving  $h$ -Convex Functions, Acta Math. Univ. Comenianae, Vol. LXXIX, 2, pp. 265-272.
- Sarikaya M. Z., Sağlam A., Yıldırım H., 2008. On Some New Inequalities Hadamard Type Inequalities for  $h$ -Convex Functions, Journal of Mathematical Inequalities, Vol. 2, 3, pp. 335-341.
- Salaş S., Unluyol E., Erdaş Y., 2015. The Hermite-Hadamard Type Inequalities for Operator  $p$ -Convex Functions in Hilbert Space, Journal of New Theory, 4, 74-79.
- Salaş S., Unluyol E., Erdaş Y., 2015. Yeni bir operatör konveks sınıfi  $ES_{\{h\}}O$ , Mini Matematik İstatistik Sempozyumu, 17 Aralık, Ordu Üniversitesi, Ordu, Türkiye, 9.
- Tseng K. L., Yang G. S., Dragomir S. S., 2003. On Quasi-Convex Functions and Hadamard-Type Inequality, RGMI Res. Rep. Coll., Article 1., 6 (3) .
- Tunc M., 2011. On Some New Inequalities for Convex Functions, Turk. J. Math., 35, 1-7.
- Unluyol E., Salaş S., Erdaş Y., 2015. The Hermite-Hadamard Type Inequalities for Operator  $h$ -Convex Functions in Hilbert Space, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling, ICAAMM, June, Yıldız Technical University Istanbul, 8-12.
- Unluyol E., Salaş S., Erdaş Y., 2015. Some New Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications for Two Operator  $ES_{\{h\}}O$ -Convex Functions in Hilbert Space, International Conference on Advancement in Mathematical Sciences, November, Porto Bello Hotel Resort, Spa, Antalya, 190.
- Unluyol E., Erdaş Y., Salaş S., 2015. Some new Hermite-Hadamard Type Inequalities for Two Operator  $(\alpha, m)$ -Convex Functions in Hilbert Spaces, International Conference on Advancement in Mathematical Sciences, 05-07 November, Porto Bello Hotel Resort, Spa, Antalya, 104.

Unluyol E., S. Salaş, Y. Erdaş, 2015. Some New Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications for Godunova-Levin Operator Convex Functions in Hilbert Space, International Conference on Advancement in Mathematical Sciences, 05-07 November, Porto Bello Hotel Resort, Spa, Antalya, 224.

Varosanec S., 2007. On  $h$ -Convexity, *J. Math. Anal. Appl.*, 326, 303-311.



## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : TURGAY EKİCİ

**Doğum Yeri** : ÇARŞAMBA/SAMSUN

**Yabancı Dili** : İNGİLİZCE

**E-mail** : 55turgayfb55@gmail.com

**İletişim Bilgileri:** Sultangaziçok programlı Anadolu lisesi;  
SULTANGAZİ/İSTANBUL

### Öğrenim Durumu:

DERECE	BÖLÜM/ PROGRAM	OKUL/ ÜNİVERSİTE	YIL
Ortaöğretim	Sultangazi ATATÜRK LİSESİ		2009
Lisans ve Lisansla birleştirilmiş Tezsiz Yüksek Lisans	ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ/MATEMATİK	ORDU Üniversitesi	2013