T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT UZAYINDA OPERATÖR (α, m)-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE SYNCHRONOUS, ASYNCHRONOUS FONKSİYONLAR İÇİN UYGULAMALAR

Yeter ERDAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2016

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Yeter ERDAŞ tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL danışmanlığında yürütülen "HİLBERT UZAYINDA OPERATÖR (α, m) - KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE SYNCHRONOUS, ASYNCHRONOUS FONKSİYONLAR İÇİN UYGULAMALAR" adlı bu tez, jürimiz tarafından 27/06/2016 tarihinde oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

Başkan:	Doç. Dr. İmdat İŞCAN Giresun Üniv. Matematik Böl.	İmza:
Üye:	Doç. Dr. Selahattin MADEN Ordu Üniv. Matematik Böl.	İmza:
Üye:	Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL Ordu Üniv. Matematik Böl.	İmza:

Bu tez kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 30./06/2016 tarih ve 2016/34 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

20/07/2016

Doç. Dr. Kürşat KORKMAZ

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Y. Erdaş

Yeter ERDAŞ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirimlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

HİLBERT UZAYINDA OPERATÖR (α, m)-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE SYNCHRONOUS, ASYNCHRONOUS FONKSİYONLAR İÇİN UYGULAMALAR

Yeter ERDAŞ
Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2016
Yüksek Lisans Tezi, 48 sayfa

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

Bu tez çalışması 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş ve literatür çalışması, ikinci bölümde temel kavramlar ve üçüncü bölümde ise yapılan çalışmalar anlatılmaktadır. Üçüncü bölüm tezin özgün kısmı olup, bu bölümde yapılan çalışmaların tamamı ilk defa burada ifade edilip, matematik literatürüne kazandırılmıştır. Yani, Hilbert uzayında Hermite-Hadamard Tipli Eşitizlikler yardımıyla operatör m-konveks fonksiyonlar, operatör (α, m)-konveks fonksiyonlar kavramları verilip, bu fonksiyon sınıflarının temel teorem ve sonuçları elde edilmiştir. Ayrıca Synchronous ve Asynchronous fonksiyonlar için uygulamalar yapılmıştır. Dördüncü bölümde ise sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Hilbert Uzayı, operatör m-konveks ve (α, m)-konveks fonksiyonlar, Synchronous ve Asynchronous fonksiyonlar.

ABSTRACT

THE HERMITE-HADAMARD TYPE INEQUALITIES FOR OPERATOR $(\alpha - m)$-CONVEX FUNCTIONS IN HILBERT SPACE AND FOR SYNCHRONOUS, ASYNCHRONOUS APLICATIONS

Yeter ERDAŞ
Ordu University
Institute of Sciences
Department of Mathematics, 2016
MSc. Thesis, 48 pages

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

This thesis is consist of four chapters. In the firs chapter, it is mentioned about the object of the thesis and previous studies in this area. In the second chapter, basic definitions and theorems that were used in thesis are given. In the third chapter, it is explained committed studies. This chapter is the original section of this thesis. All committed studies are firstly given in here and brought in the mathematical literature. That is new definitions theorems and basic results of operator m-convex functions, operator (α, m)-convex functions in Hilbert Spaces via Hermite-Hadamard type inequalities are firstly given in this thesis. Moreover, it is applied to synchronous and asynchronous functions for these operator convex function class. In the fourth, it is given some results and propositions.

Keywords: The Hermite-Hadamard inequality, Hilbert Spaces, operator m-convex and (α, m)-convex functions, Synchronous and Asynchronous functions

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL'a en içten duygularım ile teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, tez yazımım sırasında teknik desteğini esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Serkan Karataş'a teşekkürü borç bilirim .

Eğitim hayatım boyunca desteklerini esirgemeyen Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine saygı ve sevgilerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$B(H)$	:	H'dan H' ya sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$B(H)^+$	:	H'dan H' ya sınırlı pozitif lineer operatörlerin kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$C\big(Sp(A)\big)$	:	A operatörün spekturumu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesi
H	:	Hilbert uzayı
$L(H)$	:	H'dan H' ya lineer operatörlerin kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$Sp(A), \sigma(A)$	:	A operatörün spekturumu
$\rho(A)$	:	A operatörün rezolvent kümesi
$< \cdot, \cdot >$	:	İç çarpım fonksiyonu

1. GİRİŞ

Eşitsizlik Teorisi'nin temellerini $XVIII.$ ve $XIX.$ yüzyıllarda K. F. Gauss $(1775-1855)$, A. L. Cauchy $(1785-1857)$ ve P. L. Chebyshev $(1821-1894)$ gibi matematikçiler atmışlardır. Fakat modern anlamda "Eşitsizlik Teorisi" alanında yapılan ilk çalışma 1934 yılında G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Polya tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır. Bu çalışmayı 1961 yılında E. F. Beckenbach ve R. Bellman'ın yine aynı ismi taşıyan "Inequalities" kitabı takip eder. Daha sonra 1965 yılında J. Szarski'nin "Differantial Inequalities", 1991 yılında Mitrinović ve ark."Inequalities Involving Functions and Their Derivatives", 1963 yılında yine Mitrinović ve ark.'ın "Classical and New Inequalities in Analysis" isimli kitapları izler. Bunların dışında S. S. Dragomir, R. P. Agarwal, G. V. Milovanovic, C. P. Niculescu, C. E. M. Pearce, J. E. Pećarić, A. M. Fink, M. E. Özdemir, M. Z. Sarıkaya, E. Set, İ. İşcan, A. O. Akdemir, M. Tunç gibi bilim insanlarının da bir çok çalışması literatürde mevcut.

Konvekslik kavramının ortaya çıkışı Arşimet'in, çemberin içine ve etrafına çizdiği düzgün çokgenler yardımıyla yaptığı 'π' sayısı hesabına kadar dayanır. Bu çalışmaları sırasında Arşimet, herhangi bir konveks şeklin çevresinin, etrafına çizilen bütün diğer konveks şekillerin çevresinden daha küçük olduğunu fark etmiştir. Böylece konvekslik kavramı konveks şekiller etrafında gelişmiştir. Euler ve Descartes konveks çokgenler ile ilgili formüller üzerinde çalışmıştır. Daha sonra 1841'de Cauchy, konvekslik hakkında bazı özellikler vermiştir. Konveksliğin modern tanımı eşitsizlik tanımı içerdiğinden konveksliğin eşitsizliklerle birlikte çalışılması da doğal bir sonuç olmuştur.

Konveks fonksiyonların tarihi çok eskiye dayanmakla birlikte $XIX.$ yüzyılın sonları olarak gösterilebilir. 1893'de Hadamard'ın çalışmasında açıkça belirtilmese de bu türden fonksiyonların temellerinden bahsedilmektedir. Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları ima eden sonuçlara rastlanılmasına rağmen, konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J. L. W. V. Jensen tarafından çalışılmıştır. Jensen'in bu, çalışmalarından itibaren Konveks Fonksiyonlar Teorisi hızlı bir gelişme göstermiştir. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak 1987 yılında Pečarič tarafından yazılan "Convex Functions: Inequalities" isimli kitaptır. Ayrıca 1973 yılında A. W. Roberts ve B. E. Vorberg "Convex Functions", 1992 yılında Pečarič ve ark. "Convex Functions, Partial Ordering and Statistical Applications", 2006 yılında C. Niculescu ve L. E. Persson "Convex Functions and Their Applications, A Contempoarary Approach" gibi eserler konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizlikle ilgili yapılan çalışmalardır. Bu çalışmaların bir kısmını integral eşitsizlikleri oluşturmaktadır.

Niculescu ve Persson'a göre konveksliğin teorik ve uygulamalı matematik alanlarında geniş yer bulmasının iki önemli sebebi vardır:

1. Sınır değerlerinin birinde bir maksimum değeri vardır,
2. Her yerel minimum aynı zamanda global minimumdur. Ayrıca kesin konveks bir fonksiyonunun en fazla bir minumumu vardır.

1978 yılında R. Bellman, Almanya' da düzenlenen "Second International Conference on General Inequalities" isimli konferansta: "Neden Matematiksel Eşitsizlikler?" diye sorulan soruya şu cevabı vermiştir: Eşitsizlik çalışmak için üç neden vardır. Bunlar:

1. Pratik Nedenler,
2. Teorik Nedenler,
3. Estetik Nedenlerdir.

Pratik nedenler açısından bakıldığında, bir çok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak karşımıza çıkmaktadır. Klasik Eşitsizlikler de bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik nedenler açısından bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturabilir. Örneğin, negatif olmayan bir niceliğin ne zaman bir diğerini kapsadığı sorulabilir ve bu basit soru ile Pozitif Operatörler Teorisi ve Diferansiyel Eşitsizlikler Teorisi kurulur. Son olarak estetik nedenler açısından bakıldığından genelde resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir.

Biz bu çalışmada Eşitsizlik Teorisi'nin önemli bir kolu olan Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizliklerin, Hilbert uzayında sınırlı, öz-eşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için elde edilen bazı özel eşitsizliklerini inceleyeceğiz. Bu incelemeler sayesinde Lineer Operatörler Teorisi ile Matematiksel Eşitsizliklerin çeşitli alanlarında çalışma yapmak ve kendi alanlarında uygulamak isteyen araştırmacılara yardımcı olacaktır. Bu alanda yapılan önemli çalışmalardan bir tanesi 2011 yılında S. S. Dragomir tarafından yapılmıştır. Ayrıca H. H. Bauschke ve P. L. Combetles tarafından 2011 yılında "Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces", 2012 yılında S. S. Dragomir tarafından "Operator Inequalities of Ostrowski and Trapezoidal Type" ve yine 2012 yılında " Operator Inequalities of the Jensen, Čebyšev and Grüss Type" adlı kitaplar mevcuttur. Literatürde S. S. Dragomir, A. G. Ghazanfari, E. Unluyol, S. Salaş , Y. Erdaş ve daha bir çok yazar bu alanda çalışmaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.0.1 (**Lineer Uzay**) L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun.

$$+ : L \times L \to L$$

ve

$$. : F \times L \to L$$

işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A) L, "+" işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.
G2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$dir.
G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.
G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.
G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ omak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha x \in L$ dir.
L2. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.
L3. $(\alpha + \beta)x = \alpha.x + \beta.x$ dir.
L4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta.x)$ dir.
L5. $1.x = x$ dir. (Burada 1, F nin birim elemanıdır).

$F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye karmaşık lineer uzay adı verilir.

Tanım 2.0.2 Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

Tanım 2.0.3 F bir cisim ve V ve W, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T : V \to W$ dönüşümü,
a $T(u+v) = T(u) + T(v)$
b $T(cu) = cT(u)$ şartlarını sağlıyorsa T ye V üzerinde lineer dönüşüm denir .

Tanım 2.0.4 (**Konveks Küme**): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1-\alpha)y, \ \ 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki x ve y nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1-\alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir.

Tanım 2.0.5 (**Konveks Fonksiyon**): I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \ \ \leq \ \ \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

şartını sağlayan, f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer bu eşitsizlik $x \neq y$ ve $\alpha \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir.

Teorem 2.0.1 [1] f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise
a. $f, (a,b)$ aralığında süreklidir ve
b. $f, [a,b]$ aralığında sınırlıdır.

Teorem 2.0.2 (**Hermite-Hadamard Eşitsizliği**): I, $\mathbb{R}$ de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu taktirde,

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \ \ \leq \ \ \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

olur.

Tanım 2.0.6 (**h-Konveks Fonksiyon**): $h \neq 0$ ve $h : J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$, $\alpha \in (0,1)$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y)$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna h-konveks fonksiyon denir. Burada I ve J, $\mathbb{R}$ de iki aralık, $(0,1) \subseteq J$ dir.

Tanım 2.0.7 (**İç-çarpım uzayı**): $F(\mathbb{R}\,\text{veya}\,\mathbb{C})$ olmak üzere, X bir vektör uzayı olsun. $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to F$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise " $\langle \cdot, \cdot \rangle$" dönüşümüne X üzerinde bir iç-çarpım, $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine de "iç-çarpım" uzayı denir:

1. $\forall x \in X$ için $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$;
2. $\forall x, y \in X$ için $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
3. $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;
4. $\forall x, y, z \in X$ için $\langle x + y, z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle y, z \rangle$.

Not 2.0.1 $F = \mathbb{R}$ olması halinde 2. özellik $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ olur. İç-çarpım tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu kolayca görebiliriz.

1. $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle y, z \rangle$,
2. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$;
3. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle y, z \rangle$.

Tanım 2.0.8 (**Norm**): $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bir iç çarpım uzayı olsun. Bir $x \in X$ vektör normu

$$\| x \| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanan reel sayıya denir.

Tanım 2.0.9 (**Hilbert Uzayı**): $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer bu iç-çarpım uzayı yukarıda tanımlanan norma göre tam ise, yani $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç-çarpım uzayı içindeki her Cauchy Dizisi bu norma göre yakınsak ise bu iç çarpıma bir "Hilbert Uzayı" denir.

Tanım 2.0.10 (**Birim Operatör**): $A : X \to X$ operatörü verilsin. Eğer her $x \in X$ için $Ax = x$ ise A operatörüne birim(özdeşlik) operatör denir. I, E ve I_X sembollerinden biriyle gösterilir.

Tanım 2.0.11 (**Sınırlı Operatör**): X ve Y iki normlu uzay olsun. A ise tanım kümesi $D(A) \subset X$ ve görüntü kümesi $R(A) \subset Y$ olan bir operatör olsun. Eğer A operatörü $D(A)$ 'nın X' de sınırlı her kümesine $R(A)$'nın Y de sınırlı bir kümesini karşılık getiriyorsa A' ya "sınırlı bir operatör" denir. Başka bir deyişle

$$\| Ax \|_Y \leq c \| x \|_X, \text{ her } x \in D(A)$$

olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa, A'ya "sınırlı bir operatör"denir.

Tanım 2.0.12 (**Lineer Operatör**): X ve Y aynı F cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A : X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer $D(A)$, X' in bir alt uzayı ve

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \ \forall x, y \in D(A) \ ve \ \forall \alpha, \beta \in F$$

ise A'ya "lineer operatör"denir.

Tanım 2.0.13 (**Eşlenik ve Öz-eşlenik Operatör**): A, H Hilbert uzayında sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer her $f, g \in D(A) \subset H$ için

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, A^* g \rangle$$

sağlanıyorsa A^* a A'nın "eşlenik operatörü"denir.

Eğer $D(A) = D(A^*)$ ve $A = A^*$ ise bu A' ya özeşlenik operatör denir.

Tanım 2.0.14 (**Rezolventa**): H bir Hilbert uzayı ve $A : D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör olsun.

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E)^{-1} \in L(H)\}$$

kümesine A operatörünün "regüler değerler kümesi" veya "rezolvent kümesi" denir.

$\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda; A) = (A - \lambda E)^{-1}$ operatorüne A operatorünün "rezolventası" veya "çözücü operatörü" adı verilir.

Tanım 2.0.15 (**Spektrum**): H bir Hilbert uzayı olsun.

$$Sp(A) = \sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

kümesine A operatörünün "spektrumu " denir. A operatörünün spektrum kümesi "$\sigma(A)$" veya "$Sp(A)$" ile göstereceğiz.

Tanım 2.0.16 A, $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı üzerinde keyfi bir özeşlenik lineer operatör olsun. $C\big(Sp(A)\big)$, A operatörünün spektrumu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesini göstersin. Gelfand dönüşümü yardımıyla aşağıdaki özellikleri yazılan Φ ile $C\big(Sp(A)\big)$ kümesi arasında bir $*$-izometrik izomorfizim vardır. Ayrıca H üzerinde 1_H birim operatörü ve A operatörü tarafından üretilen bir $C^*(A)$ cebiri vardır[2]. Keyfi $f, g \in C\big(Sp(A)\big)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

1. $\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g)$;

2. $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ ve $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$;

3. $\|\Phi(f)\| := \|f\| := \sup_{t \in Sp(A)} |f(t)|$;

4. $\Phi(f_0) = 1_H$ ve $\Phi(f_1) = A$ burada $f_0(t) = 1$ ve $f_1(t) = t$ için $t \in Sp(A)$.

Şimdi bir operatörün, bir fonksiyon altındaki görüntüsünün ne anlama geldiğini ifade edelim.

Tanım 2.0.17 A, $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı üzerinde keyfi bir özeşlenik lineer operatör olsun. $C\big(Sp(A)\big)$, A operatörünün spektrumu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesini ve Φ de Tanım (2.0.16) deki fonksiyon olsun. Bu durumda her $f \in C\big(Sp(A)\big)$ için

$$f(A) := \Phi(f)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye keyfi bir A özeşlenik operatörünün sürekli fonksiyonel hesabı denir.

Tanım 2.0.18 (**Operatörlerde Sıralama**): A ve B, H Hilbert uzayı üzerinde iki özeşlenik operatör olsun.

1. $A \leq B \Leftrightarrow \langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle \ \forall x \in H$;

2. $A \geq 0$ ise A operatörüne pozitiftir denir.

Not 2.0.2 Eğer A özeşlenik bir operatör ve f de $Sp(A)$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon ise, bu durumda $t \in Sp(A)$ için $f(t) \geq 0$ dır. Buradan $f(A) \geq 0$, yani $f(A)$ H Hilbert uzayı üzerinde pozitif bir operatördür. İlaveten eğer f ve g, $Sp(A)$ üzerinde iki fonksiyon ise aşağıdaki önemli özellik sağlanır. Her $t \in Sp(A)$ için

$$f(t) \geq g(t) \text{ dir. Buradan } f(A) \geq g(A)$$

Teorem 2.0.3 [4] A, H Hilbert uzayı üzerinde sınırlı özeşlenik bir operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

$$m := \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle = \max\{\alpha \in \mathbb{R} | \alpha E \leq A\};$$

$$M := \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle = \min\{\alpha \in \mathbb{R} | A \leq \alpha E\};$$

ve

$$\|A\| = \max\{\|m\|, \|M\|\}.$$

Ayrıca $m, M \in Sp(A)$ ve $Sp(A) \subset [m, M]$ dir.

Tanım 2.0.19 (**Operatör Konveks**): A ve B, spektrumları $I \subset \mathbb{R}$ da olan keyfi özeşlenik operatörler ve $\lambda \in [0, 1]$ olsun. Bu durumda,

$$f((1-\lambda)A + \lambda B) \leq (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B)$$

eşitsizliğini sağlayan, I aralığı üzerinde tanımlı, reel değerli sürekli fonksiyona operatör konveks denir.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Tezin bu bölümünde yapılan tüm çalışmalar uluslararası bir makalede [16], uluslararası sempozyumlarda [23] ve ulusal bir sempozyumda [20] sunulmuş olup, tamamı özgün bir çalışmadır.

3.1 Hilbert Uzayında Operatör m-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

3.1.1 Hilbert Uzayında Operatör m-Konveks Fonksiyonlar

Tanım 3.1.1 I, $\mathbb{R}$ de bir aralık ve K da $B(H)^+$'nın konveks bir alt kümesi olsun. Her $m, t \in [0,1]$ ve spekturumu I da olan her pozitif A, B operatörü için $f : I \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(tA + m(1-t)B) \leq tf(A) + m(1-t)f(B)$$

şartı sağlanıyorsa bu fonksiyona operatör m-konveks fonksiyon denir.

Lemma 3.1.1 Eğer f azalmayan bir fonksiyon ve K da bulunan bir A operatörü için $[0,\infty)$ aralığı üzerinde operatör m-konveks ve $m \in (0,1]$ ise bu durumda $f(A)$ her $A \in K$ ve $\frac{1}{m}\langle Ax, x\rangle, \frac{1}{m}\langle Bx, x\rangle \subset I$ için pozitiftir.

İspat. : $A \in K$ ve f operatör m-konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
f(A) &= f\Big(\frac{tA + m(1-t)B + m\Big((1-t)\frac{A}{m} + tA\Big)}{m+1})\Big) \\
&\leq f(tA + m(1-t)A + m\Big((1-t)\frac{A}{m} + tA)\Big) \\
&\leq tf(A) + m(1-t)f(A) + (1-t)f(A) + mtf(A) \\
&\leq tf(A) + m(1-t)f(A) + (1-t)f(A) + mtf(A) \\
f(A) &\leq f(A)(m+1) \\
0 &\leq mf(A)
\end{aligned}$$

olup bu ise $f(A) \geq 0$ dır. Yani, $f(A)$'nın pozitif olduğu gösterilir. Moslehian ve Najafi pozitif operatörler için aşağıdaki teoremi ispat etmişlerdir.

Teorem 3.1.1 $A, B \in B(H)^+$ olsun. Bu durumda $AB + BA$'nın pozitif olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$f(A+B) \leq f(A) + f(B)$$

olmasıdır. Burada f, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde tüm negatif olmayan operatör fonksiyondur.

Dragomir çalışmasında aşağıdaki şekilde operatör konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri ispat etmiştir.

Teorem 3.1.2 $f : I \to \mathbb{R}$ bir operatör konveks fonksiyon olsun. Spekturumu I da olan tüm özeşlenik A ve B operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\begin{aligned}
&\left(f\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq \right)\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3A+B}{4}\right) + f\left(\frac{A+3B}{4}\right)\right] \\
&\leq \int_0^1 f\left((1-t)A + tB\right)dt \\
&\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{A+B}{2}\right) + \frac{f(A)+f(B)}{2}\right] \\
&\left(\leq \frac{f(A)+f(B)}{2}\right)\Bigg]
\end{aligned}$$

X bir vektör uzayı, $x \neq y$ için $x, y \in X$ olsun.

$$[x,y] := (1-t)x + ty; t \in [0,1]$$

şeklinde bir parça tanımlayalım. $f : [x,y] :\to \mathbb{R}$ fonksiyonunu ve $g(x,y) : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$g(x,y)(t) := f((1-t)x + ty), t \in [0,1]$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlarını göz önüne alalım. Genel teoriden biz biliyoruz ki f fonksiyonunun $[x,y]$ de konveks olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $g(x,y)$'nin $[0,1]$ üzerinde konveks olmasıdır. $[x,y]$ parçası üzerinde tanımlı keyfi konveks bir fonksiyon için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \int_0^1 f((1-t)x + ty)dt \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlik konveks $g(x,y) : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliğinden türetilmiştir.

Lemma 3.1.2 $f : I \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$, I aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Spekturumu I da olan her $A, B \in K \subseteq B(H)^+$ operatörleri için f fonksiyonunu

$$[A,B] := \{(1-t)A + mtB : t \in [0,1]\}$$

parçası üzerinde operatör m-konveks olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $\varphi_{x,A,B} : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi_{x,A,B}(t) = \langle f((1-t)A + mtB)x, x\rangle$$

fonksiyonunun $[0,1]$ üzerinde m-konveks olmasıdır. Burada her $x \in H$ ve $\|x\| = 1$ dir.

İspat. : f, $[A,B]$ parçasında operatör m-konveks fonksiyon olsun. Bu durumda keyfi $t_1, t_2 \in [0,1]$ ve $\lambda, \gamma \geq 0$, $\lambda + \gamma = 1$ için

$$\begin{aligned}
&\varphi_{x,A,B}(\lambda t_1 + m\gamma t_2) = \langle f((1 - (\lambda t_1 + \gamma t_2)A) + m(\lambda t_1 + m\gamma t_2)B)x, x\rangle \\
= \; & \langle f(\lambda A + \gamma A - \lambda A t_1 - m\gamma A t_2 + m\lambda t_1 B + m^2\gamma t_2 B)x, x\rangle \\
= \; & \langle f(\lambda[(1-t_1)A + mt_1 B] + m\gamma[(1-t_2)A + mt_2 B])x, x\rangle \\
\leq \; & \lambda\varphi_{x,A,B} + (t_1) + m\gamma\varphi_{x,A,B}(t_2)
\end{aligned}$$

olup bu ise bize $\varphi_{x,A,B}$'nin $[0,1]$ üzerinde m-konveks olduğunu gösterir. Şimdi $\varphi_{x,A,B}$, $[0,1]$ üzerinde m-konveks olsun. Göstermemiz gereken $[A,B]$ parçasında operatör konveks olduğunu göstereceğiz. Her $C := (1-t_1)A + mt_1 B$ ve $D := (1-t_2)A + mt_2 B$ için

$$\begin{aligned}
\langle f((1-\lambda)C + m\lambda D)x, x\rangle &= \langle f((1-\lambda)[(1-t_1)A + mt_1 B] \\
&\quad + m\lambda[(1-t_2)A + mt_2 B])x, x\rangle \\
&= \langle f(A - t_1 A + mt_1 B - \lambda A + \lambda t_1 A - m\lambda t_1 B \\
&\quad + m\lambda A - m\lambda t_2 A + m^2\lambda t_2 B)x, x\rangle \\
&= \langle f(A(1-t_1) - \lambda A(1-t_1) + m\lambda A(1-t_2) \\
&\quad + mt_1 B + m^2\lambda t_2 B - m\lambda t_1 B)x, x\rangle \\
&= \langle f(-\lambda((1-t_1)A + mt_1 B) + A(1-t_1) \\
&\quad + mt_1 B + m\lambda(A(1-t_2) + mt_2 B))x, x\rangle \\
&= \langle f((1-\lambda)((1-t_1)A + mt_1 B)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+m\lambda((1-t_2)A+mt_2B))x,x\rangle \\
\leq\ & (1-\lambda)\langle f(C)x,x\rangle + m\lambda\langle f(D)x,x\rangle
\end{aligned}
$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu ise bize f fonksiyonunun $[A,B]$ üzerinde operatör m-konveks olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.3 $f: I \to \mathbb{R}$ operatör m-konveks ve azalmayan bir fonksiyon olsun. Spekturumu I da olan her pozitif $A,B \in K \subseteq B(H)^+$, $\frac{1}{m}\langle Ax,x\rangle$, $\frac{1}{m}\langle Bx,x\rangle \subset I$ ve $m \in (0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$
\begin{aligned}
\Big\langle f(\frac{A+mB}{2})x,x\Big\rangle &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \Big\langle [f(tA+m(1-t)B)+mf((1-t)\frac{A}{m}+tB)x,x\Big\rangle]dt \\
&\leq \frac{1}{2}\Big[\frac{\langle f(A)x,x\rangle + \langle f(B)x,x\rangle}{2} \\
&\quad +m\Big(f\langle(\frac{A}{m})x,x\rangle + m\langle f(\frac{B}{m})x,x\rangle\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

İspat. : Her $x \in H$, $\|x\| = 1$ ve $t \in [0,1]$ için

$$
\langle [tA+m(1-t)B]x,x\rangle = t\langle Ax,x\rangle + m(1-t)\langle Bx,x\rangle \in I
$$

eşitliğinde $\langle Ax,x\rangle \in Sp(A) \subseteq I$ ve $\frac{1}{m}\langle Bx,x\rangle \in Sp(B) \subseteq I$ olduğundan $\int_0^1 f(tA+(1-t)B)dt$ operatör değerli integrali mevcuttur. İddiaya göre f fonksiyonu operatör m-konveks olduğundan her $t \in [0,1]$ ve $A,B \in K \subseteq B(H)^+$ için

$$
\begin{aligned}
\langle f(\frac{A+mB}{2})x,x\rangle &= \Big\langle f\Big(\frac{tA+m(1-t)B+m[(1-t)A+tB]}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\
&\leq \frac{1}{2}\Big[\langle f(tA+m(1-t)B)+mf\Big[(1-t)\frac{A}{m}+tB\Big]x,x\rangle\Big]
\end{aligned}
$$

Bu eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinde her iki tarafın integralini alırsak,

$$
\langle f(\frac{A+mB}{2})x,x\rangle \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \Big\langle\Big[f(tA+m(1-t)B)+mf\Big[(1-t)\frac{A}{m}+tB\Big]x,x\Big\rangle\Big]dt
$$

bulunur. Öte yandan,

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_0^1 \Big\langle\Big[f(tA+m(1-t)B)+mf\Big[(1-t)\frac{A}{m}+tB\Big]x,x\Big\rangle\Big]dt \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[tf\langle(A)x,x\rangle + m(1-t)\langle f(B)x,x\rangle \\
& +m\Big((1-t)\langle f(\frac{A}{m})x,x\rangle + mt\langle f(\frac{B}{m})x,x\rangle\Big)\Big]dt \\
=\ & \frac{1}{2}\Big(\frac{\langle f(A)x,x\rangle}{2} + m\frac{\langle f(B)x,x\rangle}{2} + m\Big(\frac{\langle f(\frac{A}{m})x,x\rangle}{2} + \frac{m\langle f(\frac{B}{m})x,x\rangle}{2}\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

buluruz. Bu ise ispatı tamamlar.

$$\int_0^1 f(tA+m(1-t)B)dt = \int_0^1 f((1-t)A+mtB)dt$$

3.1.2 Çarpım İki Operatör m-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

$f,g : I \to \mathbb{R}^+$ iki operatör m-konveks fonksiyonlar olsun. Spekturumu I da olan H Hilbert uzayında tüm A,B pozitif operatörleri için aşağıdaki şekilde reel değerli fonksiyonları tanımlayalım. $K(A)(x)$, $L(A,B)(x)$, $R(A,B)(x)$, $S(B)(x)$, $M(A,B)(x)$, $N(A,B)(x)$

$$\begin{aligned}
K = K(A)(x) &= \langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle \\
L = L(A,B)(x) &= \langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle \\
R = R(A,B)(x) &= \langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle \\
S = S(B)(x) &= \langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle \\
M = M(A,B)(x) &= \langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle + \langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle \\
N = N(A,B)(x) &= \langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle + \langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle.
\end{aligned}$$

Teorem 3.1.4 $f : I \to \mathbb{R}$ operatör m_1-konveks ve $g : I \to \mathbb{R}$ operatör m_2-konveks fonksiyon olsun. Spekturumu I da olan tüm pozitif $A,B \in K \subseteq B(H)^+$ operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big[\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle\Big]dt \\
&\qquad\qquad \leq \Big(\frac{K+(m_1m_2)S}{3}\Big) + \Big(\frac{m_2L+m_1R}{6}\Big)
\end{aligned}$$

İspat. : $x \in H$, $\|x\| = 1$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\langle [tA+m(1-t)B]x,x\rangle = t\langle Ax,x\rangle + m(1-t)\langle Bx,x\rangle \in I$$

eşitliğinde $\langle Ax,x\rangle \in Sp(A) \subseteq I$ ve $\langle Bx,x\rangle \in Sp(B) \subseteq I$ olduğundan $\int_0^1 f(tA+m_1(1-t)B)dt$, $\int_0^1 g(tA+m_2(1-t)B)dt$ ve $\int_0^1 (fg)(tA+m(1-t)B)dt$ operatör değerli integraller vardır. f, g sırasıyla operatör m_1-konveks ve operatör m_2-konveks olduğundan her $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}\langle f(tA + m_1(1-t)B)x, x\rangle &\leq t\langle f(A)x, x\rangle + m_1(1-t)\langle f(B)x, x\rangle \\ \langle g(tA + m_2(1-t)B)x, x\rangle &\leq t\langle g(A)x, x\rangle + m_2(1-t)\langle g(B)x, x\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Big(\langle f(tA + m_1(1-t)B)x, x\rangle\Big)\Big(\langle g(tA + m_2(1-t)B)x, x\rangle\Big) \\ &\leq t^2\langle f(A)x, x\rangle\langle g(A)x, x\rangle + tm_2(1-t)\langle f(A)x, x\rangle\langle g(B)x, x\rangle \\ &+tm_1(1-t)\langle f(B)x, x\rangle\langle g(A)x, x\rangle \\ &+m_1m_2(1-t)^2\langle f(B)x, x\rangle\langle g(B)x, x\rangle\end{aligned}$$

sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $[0,1]$ üzerinde integrali alınırsa

$$\int_0^1 \Big[\langle f(tA + m_1(1-t)B)x, x\rangle\langle g(tA + m_2(1-t)B)x, x\rangle\Big]dt \leq \Big(\frac{K}{3}\Big) + \Big(\frac{m_2L}{6}\Big) + \Big(\frac{m_1R}{6}\Big) + \Big(\frac{m_1m_2S}{3}\Big)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.5 $f : I \to \mathbb{R}^+$ operatör m_1-konveks ve $g : I \to \mathbb{R}^+$ operatör m_2-konveks fonksiyon olsun. Spekturumu I da olan tüm pozitif $A, B \in K \subseteq B(H)^+$ operatörleri ve $\frac{1}{m}\langle Ax, x\rangle, \frac{1}{m}\langle Bx, x\rangle \subset I$, $m_1, m_2 \in (0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\begin{aligned}&\Big\langle f\Big(\frac{A + m_1B}{2}\Big)x, x\Big\rangle\Big\langle g\Big(\frac{A + m_2B}{2}\Big)x, x\Big\rangle \\ \leq\ & \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[\langle f(tA + m_1(1-t)B)x, x\rangle\langle g(tA + m_1(1-t)B)x, x\rangle\Big]dt \\ \leq\ & \frac{K}{12} + \frac{m_2L}{6} + \frac{m_1R}{6} + \frac{m_1m_2S}{12}\end{aligned}$$

İspat. : $t \in I$ ve her $x \in H$ ile $\|x\| = 1$ için gözlemleriz ki,

$$\begin{aligned}
&\Big\langle f\Big(\frac{A+m_1B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle g\Big(\frac{A+m_2B}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\
&= \Big\langle f\Big(\frac{tA+m_1(1-t)B+m_1\Big((1-t)\frac{A}{m_1}+tB\Big)}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\
&\times\Big\langle g\Big(\frac{tA+m_2(1-t)B+m_2\Big((1-t)\frac{A}{m_2}+tB\Big)}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\
\leq\ & \frac{1}{2}\Big[f\Big(tA+m_1(1-t)B+m_1\Big((1-t)\frac{A}{m_1}+tB\Big)\Big)\Big] \\
&\times\frac{1}{2}\Big[g\Big(tA+m_2(1-t)B+m_1\Big((1-t)\frac{A}{m_2}+tB\Big)\Big)\Big] \\
\leq\ & \frac{1}{4}\Big[\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle+\langle f(m_1((1-t)\frac{A}{m_1}+tB))x,x\rangle\Big] \\
&\times\frac{1}{4}\Big[\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle+\langle g(m_2((1-t)\frac{A}{m_2}+tB))x,x\rangle\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle\Big] \\
&+\frac{1}{4}\Big[\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle\langle g(m_2((1-t)\frac{A}{m_1}+tB))x,x\rangle\Big] \\
&+\frac{1}{4}\Big[\langle f(m_1((1-t)\frac{A}{m_1}+tB))x,x\rangle\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle\Big] \\
&+\frac{1}{4}\Big[\langle f(m_1((1-t)\frac{A}{m_1}+tB))x,x\rangle\langle g(m_2((1-t)\frac{A}{m_2}+tB))x,x\rangle\Big] \\
\leq\ & \frac{1}{4}\Big[\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle\Big] \\
&+\frac{1}{4}\Big[\langle f(m_1((1-t)\frac{A}{m_1}+tB))x,x\rangle\langle g(m_2((1-t)\frac{A}{m_2}+tB))x,x\rangle\Big] \\
&+\frac{1}{4}\Big[(t\langle f(A)x,x\rangle+m_1(1-t)\langle f(B)x,x\rangle)((1-t)\langle g(A)x,x\rangle+m_2\langle g(B)x,x\rangle)\Big]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığı üzerinde intagralini alırsak ispat tamamlanır.

3.2 Hilbert Uzayında Operatör (α, m)-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli eşitsizlikler

İlk önce $B(H)$ içerisinde bulunan operatördelerdeki sıralamanın ne anlama geldiğini açıklayalım. Her $A, B \in B(H)$ Hilbert uzayında sınırlı öz-eşlenik operatörü ve her $x \in H$ için

$$A \leq B \Longleftrightarrow \text{eğer}\, \langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle$$

ya da

$$(B \geq A) \Longleftrightarrow \text{eğer}\, (\langle Bx, x\rangle \geq \langle Ax, x\rangle).$$

Eğer A sınırlı öz eşlenik bir operatör ve f de $Sp(A)$ üzerinde reel değerli sürekli bir fonksiyon ise bu durumda her $t \in Sp(A)$ için $f(t) \geq 0$ dır. Yani $f(A)$, H Hilbert Uzayında pozitif lineer operatordur. Ayrıca eğer f, g, her $t \in Sp(A)$ için $f(t) \leq g(t)$ şartını sağlayan reel değerli sürekli fonksiyon ise bu durumda $f(A) \leq f(B)$ dır.

Tanım 3.2.1 (**Operatör Konveks, Operatör Konkav**): $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\lambda \in [0, 1]$ ve her sınırlı-özeşlenik $A, B \in\subseteq B(H)$ operatörleri için

$$f((1-\lambda)A + \lambda B) \leq (\geq)(1-\lambda)f(A) + \lambda f(B)$$

sağlanıyorsa f fonksiyonuna operatör konveks (operatör konkav) fonksiyon denir.

Tanım 3.2.2 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer spekturumu I'da olan her $A, B \in\subseteq B(H)^+$, $t \in [0, 1]$ ve $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$ için

$$f(tA + m(1-t)B) \leq t^\alpha f(A) + m(1-t^\alpha)f(B)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu fonksiyona operatör (α, m)-konveks fonksiyon denir.

Lemma 3.2.1 Eğer f, $[0, \infty)$ aralığı üzerinde bir operatör (α, m)-konveks ve azalmayan fonksiyon ise bu durumda her $A \in K \subseteq B(H)^+$, $\frac{1}{m}\langle Ax, x\rangle, \frac{1}{m}\langle Bx, x\rangle \subset I$ ve $m, \alpha \in (0, 1]$ için $f(A)$ pozitiftir.

İspat. : $A \in K$ ve f de operatör (α, m)-konveks olduğundan

$$
\begin{aligned}
f(A) &= f\Bigg(\frac{tA + m(1-t)B + m\Big((1-t)\frac{A}{m} + tA\Big)}{m+1}\Bigg) \\
&\leq f(tA + m(1-t)A + m\Big((1-t)\frac{A}{m} + tA)\Big) \\
&\leq t^{\alpha} f(A) + m(1-t^{\alpha}) f(A) + (1-t^{\alpha}) f(A) + m t^{\alpha} f(A) \\
f(A) &\leq f(A)(m+1) \\
0 &\leq m f(A)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise her $A \in K$ için $f(A) \geq 0$ olduğunu gösterir.

Lemma 3.2.2 f, I aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu $[A, B]$ de operatör (α, m)-konveks olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$\varphi_{x,A,B} : [0,1] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu her $x \in H$, $||x|| = 1$ için $[0,1]$ üzerinde operatör (α, m)-konveks olmasıdır. Burada

$$[A, B] := \{(1-t)A + mtB : t \in [0,1]\}$$

, $t \in [0,1]$ ve $A, B \in K \subseteq B(H)^{+}$.
Ayrıca,

$$\varphi_{x,A,B}(t) =< f((1-t)A + mtB)x, x >$$

dir.

İspat. : f, $[A, B]$ de operatör (α, m)-konveks olsun. Bu durumda her $t_1, t_2 \in [0,1]$, $\lambda, \gamma \geq 0$ ve $\lambda + \gamma = 1$ için

$$
\begin{aligned}
& \varphi_{x,A,B}(\lambda t_1 + m\gamma t_2) \\
&= \langle f((1 - (\lambda t_1 + m\gamma t_2)A) + m(\lambda t_1 + m\gamma t_2)B)x, x\rangle \\
&= \langle f(\lambda A + \gamma A - \lambda A t_1 - m\gamma A t_2 + m\lambda t_1 B + m^2 \gamma t_2 B)x, x\rangle \\
&= \langle f(\lambda[(1-t_1)A + m t_1 B] + m(1-\lambda)[(1-t_2)A + m t_2 B])x, x\rangle \\
&\leq \lambda^{\alpha} \varphi_{x,A,B}(t_1) + m(1-\lambda^{\alpha}) \varphi_{x,A,B}(t_2)
\end{aligned}
$$

sağlanır. $\varphi_{x,A,B}$, $[0,1]$ aralığı üzerinde bir operatör (α,m)-konveks fonksiyon olsun. Her $C := (1-t_1)A + mt_1B$ ve $D := (1-t_2)A + mt_2B$ için,

$$\begin{aligned}
& \langle f((1-\lambda)C + m\lambda D)x, x\rangle \\
= & \langle f((1-\lambda)[(1-t_1)A + mt_1B] + m\lambda[(1-t_2)A + mt_2B])x, x\rangle \\
= & \langle f(A - t_1A + mt_1B - \lambda A + \lambda t_1 A \\
- & \lambda mt_1B + m\lambda A - m\lambda t_2A + m^2\lambda t_2B)x, x\rangle\langle f(A(1-t_1) \\
- & \lambda A(1-t_1) + m\lambda A(1-t_2) + mt_1B - \lambda mt_1B + m^2\lambda t_2B)x, x\rangle \\
= & \langle f(-\lambda((1-t_1)A + mt_1B) + A(1-t_1) + mt_1B \\
+ & m\lambda(A(1-t_2) + mt_2B))x, x\rangle \\
= & \langle f((1-\lambda)((1-t_1)A + mt_1B) + m\lambda((1-t_1)A + mt_2B))x, x\rangle \\
\leq & (1-\lambda^\alpha)\langle f(C)x, x\rangle + m\lambda^\alpha\langle f(D)x, x\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece f'nin $[A,B]$ üzerinde operatör (α,m)-konveks olduğu ispatlanmış olur.

Teorem 3.2.1 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ operatör (α,m)-konveks ve azalmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda spekturumu I da olan her $A, B \in K \subseteq B(H)^+$ operatörleri, $\frac{1}{m}\langle Ax, x\rangle, \frac{1}{m}\langle Bx, x\rangle \subset I$ ve $m, \alpha \in (0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\begin{aligned}
\left\langle f(\frac{A+mB}{2})x, x\right\rangle \leq\ & \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left\langle f(tA + m(1-t)B) + mf((1-t)\frac{A}{m} + tB)x, x\right\rangle\right]dt \\
\leq\ & \frac{1}{2}\Big[\frac{\langle f(A)x, x\rangle + m\langle f(B)x, x\rangle}{\alpha+1} \\
& + \frac{m\Big(\langle f(\frac{A}{m}x, x\rangle) + \langle f(\frac{B}{m}x, x\rangle)\Big)}{\alpha+1}\Big]
\end{aligned}$$

İspat. : $x \in H$, $||x|| = 1$ ve $t \in [0,1]$ için $< [tA + m(1-t)B]x, x >= t < Ax, x >$ $+m(1-t) < Bx, x >$ elde ederiz. $\langle Ax, x\rangle \in Sp(A)$ ve $\langle Bx, x\rangle \in Sp(B)$ ve f fonksiyonunun sürekliliğinden $\int_0^1 f(tA + (1-t)B)dt$ integrali vardır. f operatör (α,m)-konveks olduğundan $t \in [0,1]$ ve $A, B \in K$ için

$$f(tA + m(1-t)B) \leq t^\alpha f(A) + m(1-t^\alpha)f(B)$$

eşitsizliği vardır.

$$\begin{aligned}\left\langle f(\frac{A+mB}{2})x,x\right\rangle &= \left\langle f(\frac{tA+m(1-t)B+m((1-t)\frac{A}{m}+tB)}{2})x,x\right\rangle\\ \leq\ & \frac{1}{2}\Big[\langle f(tA+m(1-t)B)x,x\rangle + m\langle f((1-t)\frac{A}{m}+tB)x,x\rangle\Big]\end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Big[\langle f(tA+m(1-t)B)x,x\rangle + m\langle f((1-t)\frac{A}{m}+tB)x,x\rangle\Big]\\ \leq\ & \frac{1}{2}\Big[t^{\alpha}\langle f(A)x,x\rangle + m(1-t^{\alpha})\langle f(B)x,x\rangle\\ &+m(1-t^{\alpha})\langle f(\frac{A}{m})x,x\rangle + mt^{\alpha}\langle f(\frac{B}{m})x,x\rangle\Big]\end{aligned}$$

[0,1] aralığında integral alınırsa ispat tamamlanır.

3.2.1 Çarpım İki Operatör $(\alpha, m]$-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

$f, g : I \to \mathbb{R}+$ iki operatör (α, m)-konveks fonksiyonlar olsun. Spekturumu I da olan H Hilbert uzayında tüm A, B pozitif operatörleri için aşağıdaki şekilde reel değerli fonksiyonları tanımlayalım. $K(A)(x)$, $L(A,B)(x)$, $R(A,B)(x)$, $S(B)(x)$, $M(A,B)(x)$, $N(A,B)(x)$

$$\begin{aligned}K = K(A)(x) &= \langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\\ L = L(A,B)(x) &= \langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\\ R = R(A,B)(x) &= \langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\\ S = S(B)(x) &= \langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\\ M = M(A,B)(x) &= \langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle + \langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\\ N = N(A,B)(x) &= \langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle + \langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle.\end{aligned}$$

Teorem 3.2.2 $f : I \to \mathbb{R}^+$ operatör $(\alpha_1 m_1)$-konveks ve $g : I \to \mathbb{R}^+$ operatör (α_2, m_2)-konveks ve azalmayan fonksiyonlar olsun. Spekturumu I da olan tüm pozitif $A, B \in K \subseteq B(H)^+$ operatörleri ve $m_1, m_2, \alpha_1, \alpha_2 \in (0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big[\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle\Big]dt \\
\leq\ & \Big(\frac{K}{\alpha_1+\alpha_2+1}\Big)+\Big(\frac{m_2\alpha_2 L}{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2+1)}\Big) \\
+\ & \Big(\frac{m_1\alpha_1 R}{(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)}\Big) \\
+\ & \Big(S(1-\frac{1}{\alpha_1+1}-\frac{1}{\alpha_2+1}+\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+1})\Big)
\end{aligned}$$

İspat. : $x \in H$, $\|x\| = 1$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\langle [tA+m(1-t)B]x,x\rangle = t\langle Ax,x\rangle + m(1-t)\langle Bx,x\rangle \in I$$

eşitliğinde $\langle Ax,x\rangle \in Sp(A) \subseteq I$ ve $\langle Bx,x\rangle \in Sp(B) \subseteq I$ olduğundan $\int_0^1 f(tA+m_1(1-t)B)dt$, $\int_0^1 g(tA+m_2(1-t)B)dt$ ve $\int_0^1 (fg)(tA+m(1-t)B)dt$ operatör değerli integraller vardır. f, g sırasıyla operatör (α_1, m_1)-konveks ve operatör (α_2, m_2)-konveks olduğundan her $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle &\leq t^{\alpha_1}\langle f(A)x,x\rangle + m_1(1-t^{\alpha_1})\langle f(B)x,x\rangle \\
\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle &\leq t^{\alpha_2}\langle g(A)x,x\rangle + m_2(1-t^{\alpha_2})\langle g(B)x,x\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Big(\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle\Big)\Big(\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle\Big) \\
&\leq t^{\alpha_1+\alpha_2}\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle + t^{\alpha_1}m_2(1-t^{\alpha_2})\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle \\
&+t^{\alpha_2}m_1(1-t^{\alpha_1})\langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle \\
&+m_1m_2(1-t^{\alpha_1})(1-t^{\alpha_2})\langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle
\end{aligned}$$

sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $[0,1]$ üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big[\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle\Big]dt \\
\leq\ & \Big(\frac{K}{\alpha_1+\alpha_2+1}\Big)+\Big(\frac{m_2\alpha_2 L}{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2+1)}\Big) \\
+\ & \Big(\frac{m_1\alpha_1 R}{(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)}\Big) \\
+\ & \Big(S(1-\frac{1}{\alpha_1+1}-\frac{1}{\alpha_2+1}+\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+1})\Big)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.3 $f : I \to \mathbb{R}^+$ operatör (α_1, m_1)-konveks fonksiyon ve $g : I \to \mathbb{R}^+$ operatör (α_2, m_2)-konveks fonksiyon olsun. Spekturumları I da olan her $A, B \in K \subseteq B(H)^+$ operatörleri, $\frac{1}{m}\langle Ax, x\rangle, \frac{1}{m}\langle Bx, x\rangle \subset I$ ve $m_1, m_2, \alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1]$ için aşağıdaki

$$
\begin{aligned}
& \Big\langle f(\frac{A+m_1B}{2})x, x\Big\rangle \Big\langle g(\frac{A+m_2B}{2})x, x\Big\rangle \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[\langle f(tA + m_1(1-t)B)x, x\rangle \langle g(tA + m_2(1-t)B)x, x\rangle\Big] \\
& +\frac{1}{4}\Bigg[\frac{K(\alpha_1 + (\alpha_2)^2 + \alpha_2 + (\alpha_2)^2)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)} \\
& +\frac{(m_1m_2S)(\alpha_1 + (\alpha_2)^2 + \alpha_2 + (\alpha_2)^2)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)} \\
& +m_2L\Big((1 - \frac{\alpha_1+\alpha_2+1}{(\alpha_1+1)(\alpha_2)} + \frac{2}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)})\Big) \\
& +m_1R\Big((1 - \frac{\alpha_1+\alpha_2+1}{(\alpha_1+1)(\alpha_2)} + \frac{2}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)})\Big)\Bigg]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. f, operatör (α_1, m_1)-konveks fonksiyon ve g, operatör (α_2, m_2)-konveks fonksiyon olduğundan her $t \in I$ her $x \in H$ ve $||x|| = 1$ için

$$
\begin{aligned}
& \Big\langle f\Big(\frac{A+m_1B}{2}\Big)x, x\Big\rangle \\
& = \Big\langle f\Big(\frac{tA + m_1(1-t)B + m_1\Big((1-t)\frac{A}{m_1} + tB\Big)}{2}\Big)x, x\Big\rangle \\
\leq\ & \frac{1}{2}\Big[\Big\langle f(tA + m_1(1-t)B)x, x\Big\rangle + \Big\langle f\Big(m_1((1-t)\frac{A}{m_1} + tB)\Big)x, x\Big\rangle\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \Big\langle g\Big(\frac{A+m_2B}{2}\Big)x, x\Big\rangle \\
& = \Big\langle g\Big(\frac{tA + m_2(1-t)B + m_2\Big((1-t)\frac{A}{m_2} + tB\Big)}{2}\Big)x, x\Big\rangle \\
\leq\ & \frac{1}{2}\Big[\Big\langle g(tA + m_2(1-t)B)x, x\Big\rangle + \Big\langle g\Big(m_2((1-t)\frac{A}{m_2} + tB)\Big)x, x\Big\rangle\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big\langle f\Big(\frac{A+m_1B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle g\Big(\frac{A+m_2B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\\
\leq\ &\frac{1}{4}\Bigg[\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle\\
&+m_2\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle\langle g((1-t)\frac{A}{m_2}+tB)x,x\rangle\\
&+m_1\langle f((1-t)\frac{A}{m_1}+tB)x,x\rangle\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle\\
&+m_1m_2\langle f((1-t)\frac{A}{m_1}+tB)x,x\rangle\langle g((1-t)\frac{A}{m_2}+tB)x,x\rangle\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big\langle f\Big(\frac{A+m_1B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle g\Big(\frac{A+m_2B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\\
\leq\ &\frac{1}{4}\Big[\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle\\
&+\langle f((1-t)A+m_1tB)x,x\rangle\langle g((1-t)A+m_2tB)x,x\rangle\Big]\\
&+\frac{1}{4}\Big[(t^{\alpha_1}\langle f(A)x,x\rangle+m_1(1-t^{\alpha_1})\langle f(B)x,x\rangle)\\
&\times(1-t^{\alpha_2}\langle g(A)x,x\rangle+m_2t^{\alpha_2}\langle g(B)x,x\rangle)\\
&+(1-t^{\alpha_1}\langle f(A)x,x\rangle+m_1t^{\alpha_1}\langle f(B)x,x\rangle)\\
&\times(t^{\alpha_2}\langle g(A)x,x\rangle+m_2(1-t^{\alpha_2})\langle g(B)x,x\rangle)\Big]
\end{aligned}
$$

sağlanır. Bu eşitsizliğin $[0,1]$ aralığı üzerinde integrali alınırsa ispat tamamlanır.

3.3 Hilbert Uzayında iki operatör (α,m)-Konveks fonksiyonlar için bazı yeni Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

3.3.1 Bazı Yeni Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Tanım 3.3.1 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer spekturumu I'da olan her $A, B \in\subseteq B(H)^+$, $t \in [0,1]$ ve $(\alpha,m) \in (0,1]^2$ için

$$f(tA+m(1-t)B) \leq t^\alpha f(A)+m(1-t^\alpha)f(B)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu fonksiyona operatör (α,m)-konveks fonksiyon denir.

$f, g : I \to \mathbb{R}$, I aralığı üzerinde operatör konveks fonksiyonlar olsun. O zaman Hilbert uzayında her self-adjoint A ve B operatörleri için I üzerinde, aşağıdaki reel fonksiyonları tanımlayalım. H üzerinde $M(A,B)$, $N(A,B)$, $P(A,B)$, $K(A,B)$, $S(A,B)$, $L(A,B)$ ve $R(A,B)$

$$\begin{aligned}
M = M(A,B)(x) &= \langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle + \langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle \;\; x \in H \\
N = N(A,B)(x) &= \langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle + \langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle \;\; x \in H \\
P = P(A,B)(x) &= \langle [f(A)g(A) + f(B)g(B)]x,x\rangle \;\; x \in H \\
K = K(A)(x) &= \langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle \;\; x \in H \\
L = L(A,B)(x) &= \langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle \;\; x \in H \\
R = R(A,B)(x) &= \langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle \;\; x \in H \\
S = S(B)(x) &= \langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle \;\; x \in H.
\end{aligned}$$

Lemma 3.3.1 $f : I \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$, I aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Spekturumu I da olan her $A, B \in K \subseteq B(H)^+$ operatörleri için f fonksiyonu

$$[A,B] := \{(1-t)A + tB : t \in [0,1]\}$$

parçası üzerinde operatör (α, m)-konveks olabilmesi için gerek ve yeter şart $\varphi_{x,A,B} : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi_{x,A,B}(t) = \langle f((1-t)A + tB)x, x\rangle$$

fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde (α, m)-konveks olmasıdır. Burada $x \in H$ ve $\|x\| = 1$.

İspat. : f, $[A,B]$ de operatör (α, m)-konveks olsun. Bu durumda her $t_1, t_2 \in [0,1]$, $\lambda, \gamma \geq 0$ ve $\lambda + \gamma = 1$ için

$$\begin{aligned}
&\varphi_{x,A,B}(\lambda t_1 + m\gamma t_2) \\
&= \langle f((1 - (\lambda t_1 + m\gamma t_2)A) + m(\lambda t_1 + m\gamma t_2)B)x, x\rangle \\
&= \langle f(\lambda A + \gamma A - \lambda A t_1 - m\gamma A t_2 + m\lambda t_1 B + m^2\gamma t_2 B)x, x\rangle \\
&= \langle f(\lambda[(1-t_1)A + mt_1B] + m(1-\lambda)[(1-t_2)A + mt_2B])x, x\rangle \\
&\leq \lambda^\alpha \varphi_{x,A,B}(t_1) + m(1-\lambda^\alpha)\varphi_{x,A,B}(t_2)
\end{aligned}$$

sağlanır. $\varphi_{x,A,B}$, $[0,1]$ aralığı üzerinde bir operatör (α,m)-konveks fonksiyon olsun. Her $C := (1-t_1)A + mt_1B$ ve $D := (1-t_2)A + mt_2B$ için,

$$\begin{aligned}
& \langle f((1-\lambda)C + m\lambda D)x, x\rangle \\
= \; & \langle f((1-\lambda)[(1-t_1)A + mt_1B] + m\lambda[(1-t_2)A + mt_2B])x, x\rangle \\
= \; & \langle f(A - t_1A + mt_1B - \lambda A + \lambda t_1 A \\
- \; & \lambda mt_1B + m\lambda A - m\lambda t_2 A + m^2\lambda t_2 B)x, x\rangle\langle f(A(1-t_1) \\
- \; & \lambda A(1-t_1) + m\lambda A(1-t_2) + mt_1B - \lambda mt_1B + m^2\lambda t_2B)x, x\rangle \\
= \; & \langle f(-\lambda((1-t_1)A + mt_1B) + A(1-t_1) + mt_1B \\
+ \; & m\lambda(A(1-t_2) + mt_2B))x, x\rangle \\
= \; & \langle f((1-\lambda)((1-t_1)A + mt_1B) + m\lambda((1-t_1)A + mt_2B))x, x\rangle \\
\leq \; & (1-\lambda^\alpha)\langle f(C)x, x\rangle + m\lambda^\alpha\langle f(D)x, x\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece f'nin $[A,B]$ üzerinde operatör (α,m)-konveks olduğu ispatlanmış olur.

Teorem 3.3.1 $f : I \to \mathbb{R}$, bir operatör (α_1, m_1)-konveks fonksiyon ve $g : I \to \mathbb{R}$ de operatör (α_2, m_2)-konveks fonksiyon olsun. $m_1, m_2, \alpha_1, \alpha_2 \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \langle f(tA + m_1(1-t)B)x, x\rangle\langle g(tA + m_2(1-t)B)x, x\rangle dt \\
\leq \; & \Big(\frac{K}{\alpha_1 + \alpha_2 + 1}\Big) + \Big(\frac{m_2\alpha_2 L}{(\alpha_1+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)}\Big) \\
+ \; & \Big(\frac{m_1\alpha_1 R}{(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)}\Big) \\
+ \; & \left((1 - \frac{1}{\alpha_1+1} - \frac{1}{\alpha_2+1} + \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+1})m_1m_2S\right)
\end{aligned}$$

sağlanır. Burada $x \in H$ ve $\|x\| = 1$ dir.

İspat. : $x \in H$, $\|x\| = 1$, $t \in [0,1]$, $\langle Ax, x\rangle \in Sp(A) \subseteq I$ ve $\langle Bx, x\rangle \in Sp(B) \subseteq I$ için aşağıdaki eşitliğe sahibiz;

$$\langle (tA + (1-t)B)x, x\rangle = t\langle Ax, x\rangle(1-t)\langle Bx, x\rangle \in I$$

f, g nin sürekli olmasından ve operatör (α_1, m_1), (α_2, m_2)-konveks olmalarından;

$$\int_0^1 f(tA + (1-t)B)dt$$

$$\int_0^1 g(tA + (1-t)B)dt$$

ve

$$\int_0^1 (fg)(tA + (1-t)B)dt$$

integralleri vardır. Yine f, g nin sırasıyla operatör (α_1, m_1), (α_2, m_2)-konveks, $w \in [0, 1]$ ve $x \in H$ için

$$\langle f(tA + (1-t)B)x, x\rangle \leq \langle (t^{\alpha_1} f(A) + m(1 - t^{\alpha_1})f(B))x, x\rangle$$

$$\langle g(tA + (1-t)B)x, x\rangle \leq \langle (t^{\alpha_2} g(A) + m(1 - t^{\alpha_2})g(B))x, x\rangle$$

$$\begin{aligned}
& \langle f(tA + (1-t)B))x, x\rangle \langle g(tA + (1-t)B))x, x\rangle \\
\leq \ & t^{\alpha_1+\alpha_2} \langle f(A)x, x\rangle \langle g(A)x, x\rangle \\
+ \ & m_2(t^{\alpha_1} - t^{\alpha_1+\alpha_2}) \langle f(A)x, x\rangle \langle g(B)x, x\rangle \\
+ \ & m_1(t^{\alpha_2} - t^{\alpha_1+\alpha_2}) \langle f(B)x, x\rangle \langle g(A)x, x\rangle \\
+ \ & m_1 m_2(1 - t^{\alpha_1} - t^{\alpha_2} + t^{\alpha_1+\alpha_2}) \langle f(B)x, x\rangle \langle g(B)x, x\rangle
\end{aligned}$$

Bu eşitsizliğin [0,1] aralığı üzerinde integrali alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.2 $f, g : I \to \mathbb{R}^+$, sırasıyla operatör (α_1, m_1)-konveks, (α_2, m_2)-konveks ve azalmayan fonksiyonlar olsun. Bu durumda bir H Hilbert uzayında spekturumları I da olan keyfi özeşlenik A ve B operatörleri, $\frac{1}{m}\langle Ax, x\rangle, \frac{1}{m}\langle Bx, x\rangle \subset$

I ve $m_1, m_2, \alpha_1, \alpha_2 \in (0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
& \Big\langle f(\frac{A+m_1B}{2})x,x\Big\rangle\Big\langle g(\frac{A+m_2B}{2})x,x\Big\rangle \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle\Big] \\
& +\frac{1}{4}\Bigg[\frac{K(\alpha_1+(\alpha_2)^2+\alpha_2+(\alpha_2)^2)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)} \\
& +\frac{(m_1m_2S)(\alpha_1+(\alpha_2)^2+\alpha_2+(\alpha_2)^2)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)} \\
& +m_2L\Big((1-\frac{\alpha_1+\alpha_2+1}{(\alpha_1+1)(\alpha_2)}+\frac{2}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)})\Big) \\
& +m_1R\Big((1-\frac{\alpha_1+\alpha_2+1}{(\alpha_1+1)(\alpha_2)}+\frac{2}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)})\Big)\Bigg]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. f, operatör (α_1, m_1)-konveks fonksiyon ve g, operatör (α_2, m_2)-konveks fonksiyon olduğundan her $t \in I$ her $x \in H$ ve $||x|| = 1$ için

$$
\begin{aligned}
& \Big\langle f\Big(\frac{A+m_1B}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\
& = \Big\langle f\Big(\frac{tA+m_1(1-t)B+m_1\Big((1-t)\frac{A}{m_1}+tB\Big)}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\
\leq\ & \frac{1}{2}\Big[\Big\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\Big\rangle+\Big\langle f\Big(m_1((1-t)\frac{A}{m_1}+tB)\Big)x,x\Big\rangle\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \Big\langle g\Big(\frac{A+m_2B}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\
& = \Big\langle g\Big(\frac{tA+m_2(1-t)B+m_2\Big((1-t)\frac{A}{m_2}+tB\Big)}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\
\leq\ & \frac{1}{2}\Big[\Big\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\Big\rangle+\Big\langle g\Big(m_2((1-t)\frac{A}{m_2}+tB)\Big)x,x\Big\rangle\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big\langle f\Big(\frac{A+m_1B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle g\Big(\frac{A+m_2B}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\
\le\ & \frac{1}{4}\Bigg[\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle \\
&+m_2\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle\langle g((1-t)\frac{A}{m_2}+tB)x,x\rangle \\
&+m_1\langle f((1-t)\frac{A}{m_1}+tB)x,x\rangle\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle \\
&+m_1m_2\langle f((1-t)\frac{A}{m_1}+tB)x,x\rangle\langle g((1-t)\frac{A}{m_2}+tB)x,x\rangle\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big\langle f\Big(\frac{A+m_1B}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle g\Big(\frac{A+m_2B}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\
\le\ & \frac{1}{4}\Big[\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle \\
&+\langle f((1-t)A+m_1tB)x,x\rangle\langle g((1-t)A+m_2tB)x,x\rangle\Big] \\
&+\frac{1}{4}\Big[(t^{\alpha_1}\langle f(A)x,x\rangle+m_1(1-t^{\alpha_1})\langle f(B)x,x\rangle) \\
&\times(1-t^{\alpha_2}\langle g(A)x,x\rangle+m_2t^{\alpha_2}\langle g(B)x,x\rangle) \\
&+(1-t^{\alpha_1}\langle f(A)x,x\rangle+m_1t^{\alpha_1}\langle f(B)x,x\rangle) \\
&\times(t^{\alpha_2}\langle g(A)x,x\rangle+m_2(1-t^{\alpha_2})\langle g(B)x,x\rangle)\Big]
\end{aligned}
$$

sağlanır. Buradan her iki tarafın $[0,1]$ aralığı üzerinde integrali alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.3 $f,g : I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ sırasıyla operatör (α_1,m_2), (α_2,m_2)-konveks ve azalmayan fonksiyonlar olsun. Bu durumda H Hilbert uzayında spekturumu Ida olan keyfi A,B özeşlenik operatörleri, $\frac{1}{m}\langle Ax,x\rangle,\frac{1}{m}\langle Bx,x\rangle\subset I$ ve

$m_1, m_2, \alpha_1, \alpha_2 \in (0,1]$ için;

$$\begin{aligned}
& \Big\langle f\Big(\frac{A+m_1B}{2}\Big)x,x\Big\rangle \int_0^1 \langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle dt \\
& +\Big\langle g\Big(\frac{A+m_2B}{2}\Big)x,x\Big\rangle \int_0^1 \langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle dt \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle\Big] \\
& +\frac{1}{4}\Bigg[\frac{K(\alpha_1+(\alpha_2)^2+\alpha_2+(\alpha_2)^2)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)} \\
& +\frac{(m_1m_2S)(\alpha_1+(\alpha_2)^2+\alpha_2+(\alpha_2)^2)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)} \\
& +m_2L\Big((1-\frac{\alpha_1+\alpha_2+1}{(\alpha_1+1)(\alpha_2)}+\frac{2}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)})\Big) \\
& +m_1R\Big((1-\frac{\alpha_1+\alpha_2+1}{(\alpha_1+1)(\alpha_2)}+\frac{2}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)})\Big)\Bigg] \\
& +\langle f\Big(\frac{A+m_1B}{2}\Big)x,x\rangle\langle g\Big(\frac{A+m_2B}{2}\Big)x,x\rangle
\end{aligned}$$

sağlanır.

İspat. : f, operatör (α_1, m_1)-konveks fonksiyon ve g, operatör (α_2, m_2)-konveks fonksiyon olsun, $m, t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
& \Big\langle f\Big(\frac{A+m_1B}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\
& \times\Big\langle f\Big(\frac{tA+m_1(1-t)B+m_1\Big((1-t)\frac{A}{m_1}+tB\Big)}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\
\leq\ & \frac{1}{2}\Big[\Big\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\Big\rangle+\Big\langle f\Big(m_1((1-t)\frac{A}{m_1}+tB)\Big)x,x\Big\rangle\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Big\langle g\Big(\frac{A+m_2B}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\
& \times\Big\langle g\Big(\frac{tA+m_2(1-t)B+m_2\Big((1-t)\frac{A}{m_2}+tB\Big)}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\
\leq\ & \frac{1}{2}\Big[\Big\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\Big\rangle+\Big\langle g\Big(m_2((1-t)\frac{A}{m_2}+tB)\Big)x,x\Big\rangle\Big]
\end{aligned}$$

Not: Eğer $a \leq b$ ve $c \leq d$ $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ise o zaman

$$ad+bc \leq ac+bd$$

eşitsizliği vardır.

$$
\begin{aligned}
& \left\langle f\Big(\frac{A+m_1B}{2}\Big)x,x\right\rangle \\
& \times\Big\langle g(tA+m_2(1-t)B+m_2((1-t)\frac{A}{m_2}tB))\rangle \\
& +\left\langle g\Big(\frac{A+m_2B}{2}\Big)x,x\right\rangle \\
& \times\Big\langle f(tA+m_1(1-t)B+m_1((1-t)\frac{A}{m_1}tB))\rangle \\
\leq\ & \left\langle f\Big(\frac{A+m_1B}{2}\Big)x,x\right\rangle\left\langle g\Big(\frac{A+m_2B}{2}\Big)x,x\right\rangle \\
& +\Big\langle f(tA+m_1(1-t)B+m_1((1-t)\frac{A}{m_1}tB))\Big\rangle \\
& \times\Big\langle g(tA+m_2(1-t)B+m_2((1-t)\frac{A}{m_2}tB))\Big\rangle \\
\leq\ & \frac{1}{4}\Big[\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle \\
& +\langle f((1-t)A+m_1tB)x,x\rangle\langle g((1-t)A+m_2tB)x,x\rangle\Big] \\
& +\frac{1}{4}\Big[(t^{\alpha_1}\langle f(A)x,x\rangle+m_1(1-t^{\alpha_1})\langle f(B)x,x\rangle) \\
& \times(1-t^{\alpha_2}\langle g(A)x,x\rangle+m_2t^{\alpha_2}\langle g(B)x,x\rangle) \\
& +(1-t^{\alpha_1}\langle f(A)x,x\rangle+m_1t^{\alpha_1}\langle f(B)x,x\rangle) \\
& \times(t^{\alpha_2}\langle g(A)x,x\rangle+m_2(1-t^{\alpha_2})\langle g(B)x,x\rangle)\Big] \\
& +\left\langle f\Big(\frac{A+m_1B}{2}\Big)x,x\right\rangle\left\langle g\Big(\frac{A+m_2B}{2}\Big)x,x\right\rangle
\end{aligned}
$$

Eşitsizliğin [0,1] aralığında integrali alınırsa ispat tamamlanır.

3.4 Synchronous ve Asynchronous Fonksiyonlar için Uygulamalar

Tanım 3.4.1 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Eğer her $t,s\in[a,b]$ için

$$(f(t)-f(s))(g(t)-g(s))\geq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu f,g fonksiyonlarına $[a,b]$ üzerinde synchronous denir.

Tanım 3.4.2 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Eğer her $t,s\in[a,b]$ için

$$(f(t)-f(s))(g(t)-g(s))\leq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu f, g fonksiyonlarına $[a, b]$ üzerinde asynchronous denir.

Teorem 3.4.1 $f, g : [m, M] \to \mathbb{R}^+$ operatör (α, m)-konveks ve A, B, $Sp(A) \bigcup Sp(B) \subset [m, M]$, $\frac{1}{m}\langle Ax, x\rangle, \frac{1}{m}\langle Bx, x\rangle \subset I$ ve $m_1, m_2, \alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1]$ olacak şekilde özeşlenik iki operatör olsun. Bu durumda,

1. Eğer f, g synchronous ve $f, g \geq 0$ ise aşağıdaki

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big[\langle f(tA + m_1(1-t)B)x, x\rangle\langle g(tA + m_2(1-t)B)x, x\rangle\Big]dt \\
\leq\ & \Big(\frac{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}{2(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)}) \\
+\ & \frac{(m_1m_2)((\alpha_1)^2\alpha_2) + \alpha_1(\alpha_2)^2 + 2\alpha_1\alpha_2}{2(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)} \\
+\ & \frac{m_2((\alpha_2)^2+\alpha_2) + m_1((\alpha_1)^2+\alpha_1)}{2(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)}\Big)P
\end{aligned}$$

2. Eğer f, g synchronous ve $f, g \geq 0$ ise aşağıdaki eşitsizliği doğrudur.

$$\begin{aligned}
&\Big\langle f(\frac{A+m_1B}{2})x, x\rangle\langle g(\frac{A+m_2B}{2})x, x\Big\rangle \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[\langle f(tA + m_1(1-t)B)x, x\rangle\langle g(tA + m_2(1-t)B)x, x\rangle\Big] \\
&+\frac{1}{4}\Bigg[\frac{(1+m_1m_2)(\alpha_1+(\alpha_1)^2+\alpha_2+(\alpha_2)^2)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)} \\
&+\frac{(m_1+m_2)((\alpha_1)^2\alpha_1+\alpha_1(\alpha_1)^2+3\alpha_1\alpha_2+\alpha_1+\alpha_2+1)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)}\Bigg]P
\end{aligned}$$

3. Eğer f, g synchronous ve $f, g \geq 0$ ise aşağıdaki eşitsizliği doğrudur.

$$\begin{aligned}
&\Big\langle f\Big(\frac{A+m_1B}{2}\Big)x, x\Big\rangle \int_0^1 \langle g(tA + m_2(1-t)B)x, x\rangle dt \\
&+\Big\langle g\Big(\frac{A+m_2B}{2}\Big)x, x\Big\rangle \int_0^1 \langle f(tA + m_1(1-t)B)x, x\rangle dt \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[\langle f(tA + m_1(1-t)B)x, x\rangle\langle g(tA + m_2(1-t)B)x, x\rangle\Big] \\
&+\frac{1}{4}\Bigg[\frac{(1+m_1m_2)(\alpha_1+(\alpha_1)^2+\alpha_2+(\alpha_2)^2)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)} \\
&+\frac{(m_1+m_2)((\alpha_1)^2\alpha_1+\alpha_1(\alpha_1)^2+3\alpha_1\alpha_2+\alpha_1+\alpha_2+1)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)}\Bigg]P \\
&+\langle f\Big(\frac{A+m_1B}{2}\Big)x, x\rangle\langle g\Big(\frac{A+m_2B}{2}\Big)x, x\rangle
\end{aligned}$$

Burada,

$$P(A,B)(x) = \langle [f(A)g(A) + f(B)g(B)]x, x\rangle \ \ , x \in H$$

ve

$$N(A,B)(x) = \langle f(A)x, x\rangle \langle g(B)x, x\rangle + \langle f(B)x, x\rangle \langle g(A)x, x\rangle \ \ , x \in H$$

dır.

Teorem 3.4.2 *1.* Eğer f, g asynchronous ve $f, g \geq 0$ ise aşağıdaki

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \Big[\langle f(tA + m_1(1-t)B)x, x\rangle \langle g(tA + m_2(1-t)B)x, x\rangle\Big] dt \\
\leq \ & \Big(\frac{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}{2(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)}) \\
+ \ & \frac{(m_1 m_2)((\alpha_1)^2\alpha_2) + \alpha_1(\alpha_2)^2 + 2\alpha_1\alpha_2}{2(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)} \\
+ \ & \frac{m_2((\alpha_2)^2 + \alpha_2) + m_1((\alpha_1)^2 + \alpha_1)}{2(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)}\Big) N
\end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur.

2. Eğer f, g asynchronous ve $f, g \geq 0$ ise aşağıdaki eşitsizliği doğrudur.

$$\begin{aligned}
& \Big\langle f(\frac{A + m_1 B}{2})x, x\Big\rangle \Big\langle g(\frac{A + m_2 B}{2})x, x\Big\rangle \\
\leq \ & \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[\langle f(tA + m_1(1-t)B)x, x\rangle \langle g(tA + m_2(1-t)B)x, x\rangle\Big] \\
& + \frac{1}{4}\Bigg[\frac{(1 + m_1 m_2)(\alpha_1 + (\alpha_1)^2 + \alpha_2 + (\alpha_2)^2)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)} \\
& + \frac{(m_1 + m_2)((\alpha_1)^2\alpha_1 + \alpha_1(\alpha_1)^2 + 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + 1)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)}\Bigg] N
\end{aligned}$$

3. Eğer f,g synchronous ve $f,g \geq 0$ ise aşağıdaki eşitsizliği doğrudur.

$$
\begin{aligned}
& \Big\langle f\Big(\frac{A+m_1B}{2}\Big)x,x\Big\rangle \int_0^1 \langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle dt \\
& +\Big\langle g\Big(\frac{A+m_2B}{2}\Big)x,x\Big\rangle \int_0^1 \langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle dt \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[\langle f(tA+m_1(1-t)B)x,x\rangle\langle g(tA+m_2(1-t)B)x,x\rangle\Big] \\
& +\frac{1}{4}\Bigg[\frac{(1+m_1m_2)(\alpha_1+(\alpha_1)^2+\alpha_2+(\alpha_2)^2)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)} \\
& +\frac{(m_1+m_2)((\alpha_1)^2\alpha_1+\alpha_1(\alpha_1)^2+3\alpha_1\alpha_2+\alpha_1+\alpha_2+1)}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+1)}\Bigg]N \\
& +\langle f\Big(\frac{A+m_1B}{2}\Big)x,x\rangle\langle g\Big(\frac{A+m_2B}{2}\Big)x,x\rangle
\end{aligned}
$$

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yüksek lisans tezi olarak yapılan bu çalışma, tamamı özgün olan üçüncü bölüm ile matematik literatürüne yeni kavramlar, teoremler, sonuçlar ve uygulamalar getirmiştir. Elde edilen bu yenilikler uluslararası hakemli dergilerde [14] basılmış uluslararası [15] ve ulusal [21] sempozyumlarda sunulmuştur. İlaveten halihazırda uluslararası hakemli iki dergide inceleme aşamasında olan iki çalışmamız bulunmaktadır. İlk önce bu tezden elde edilen sonuçları ifade edip, daha sonra önerilerimizi verelim.

Yapılan bu tez çalışması ile:

1. Eşitsizlik Teorisi ve Sınırlı Operatörler Teorisi birleştirilmiştir.
2. Reel anlamda bilinen konves, m-konveks, (α, m)-konveks foksiyonlar sınıfı, Hilbert uzayında Hermite-Hadamard Eşitsizliği aracılığıyla operatör konveks, m-konveks, (α, m)-konveks fonksiyon sınıfı elde edilmiştir.
3. Elde edilen bu yeni sınıflar ile ilgili , teorem ve sonuçları verilmiştir.
4. Özel olarak, çarpımları bu sınıftan olan operatör konveks sınıflarının durumları incelenmiştir.
5. Son olarak ise, Synchronous ve Asynchrounous fonksiyonlara uygulanarak uygulaması yapılmıştır.

Şimdi bu yüksek lisans tezinden çıkan sonuçlara göre bazı öneriler verelim:

1. Bu tez çalışması, Eşitsizlik Teorisi ve Sınırlı Lineer Operatörler Teorisi'nin bir araya getirdiği için, literatürde reel anlamda bilinen fakat sınırlı lineer operatörler teorisine uygun olmak koşuluyla diğer konvekslik çeşitlerinin (m-konveks, (α, m)-konveks, logaritmik konveks, v.s.) operatör kısmı yapılabilir.
2. Burada biz Hilbert uzayında Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlik yardımıyla, sınırlı lineer operatörlere taşıdık. Literatürde daha bir çok eşitsizlik vardır.

Bunların bazılarını söylemek gerekirse Jensen, Čebyšev Fonksiyoneli için eşitsizlik, Grüss, Quasi-Grüss, Ostrowski, Trapezoidal, Taylor, v.b. tipli eşitsizlikler vardır. Dolayısıyla her biri için yeni eşitsizlikler operatör konveklik kavramı verilebilir.

3. Elde edilecek bu yeni sınıfların sadece Synchronous ve Asynchrounous fonksiyonlar için değil diğer fonksiyonlara da uygulanarak, yeni uygulama alanları bulunabilir.

KAYNAKLAR

[1] Azpeitia A. G., Convex Functions and Hadamard Inequality, Rev. Colombiana Mat., 28 (1994) 7-12.

[2] Furuta T., Hot J. M., Pečarić J., Seo Y. , Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities for Bounded Selfadjoint Operators on a Hilbert Space, Element, Zagreb, (2005).

[3] Dragomir S. S., Pečarić J. , Persson L. E., Some inequality of Hadamard Type, Soochow J. Math., 21 (1995) 335-341.

[4] Dragomir S. S., Inequalities for Functions of Selfadjoint Operators on Hilbert Spaces(2011), http://ajmaa.org/RGMIA/monographs/InFuncOp.pdf.

[5] Pearce C. E. M., Rubinov A. M., P-Funcutions, Quasi-Convex Functions and Hadamard-Type Inequalities, J. Math. Anal. Appl., 240 (1999) 92-104.

[6] Tseng K. L., Yang G. S., Dragomir S. S., On Quasi-Convex Functions and Hadamard-Type Inequality, RGMIA Res. Rep. Coll., Article 1., 6 (3) (2003).

[7] Moslehian M. S., Najafi H., Around Operator Monotone Functions, Integr. Equ. Oper. Theory.,doi: 10.1007/s00020-011-1921-0, 71 (2011), 575–582.

[8] Dragomir S. S., The Hermite-Hadamard Type Inequalities for Operator Convex Functions, Appl. Math. Comput., 218, 3(2011), 766-772.

[9] Varošanec S., On h-Convexity, J. Math. Anal. Appl., 326 (2007), 303-311.

[10] Bombardelli M., Varošanec S., Properties Of h-Convex Functions Related to the Hermite-Hadamard-Fejer Inequalities, Computers and Matematics with Applications, 58 (2009), 1869–1877.

[11] Sarıkaya M. Z., Set E., Özdemir M. E., On Some New Inequalities of Hadamard Type Involving h-Convex Functions, Acta Math. Univ. Comenianae, Vol. LXXIX, 2 (2010), pp. 265-272.

[12] Sarıkaya M. Z., Sağlam A.,Yıldırım H., On Some New Inequalities Hadamard Type Inequalities for h-Convex Functions, Journal of Matematical Inequalities, Vol. 2, 3(2008), pp. 335-341.

[13] Burai P., Hazy A., On Approximately h-Convex Functions, Journal of Convex Analysis, 18, 2(2001).

[14] Salaş S., Unluyol E., Erdaş Y., The Hermite-Hadamard Type Inequalities for Operator p-Convex Functions in Hilbert Space, Journal of New Theory, 4(2015), 74-79.

[15] Unluyol E. , Salaş S., Erdaş Y., The Hermite-Hadamard Type Inequalities for Operator h-Convex Functions in Hilbert Space, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling,ICAAMM, June 2015, Yildiz Tecnical University Istanbul, 8-12.

[16] Erdaş Y., Unluyol E., Salaş S., The Hermite-Hadamard Type Inequalities for Operator m-Convex Functions in Hilbert Space, Journal of New Theory, 5(2015), 80-91.

[17] Pachpatte B. G., On Some Inequalities for Convex Functions, RGMIA Res. Rep. Coll., 6(E), (2003).

[18] Tunc M., On Some New Inequalities for Convex Functions, Turk. J. Math., 35, (2011), 1-7.

[19] Dragomir S. S., Ćebyśev Type İnequalities for Functions of Selfadjoint Operators in Hilbert Spaces, Linear and Multilinear Algebra, 58(2010) no. 7-8, 805-814.

[20] Erdaş Y., Unluyol E., Salaş S., Operator (α, m)-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı , Mini Matematik İstatistik Sempozyumu, 17 Aralık, Ordu Üniversitesi, Ordu, Türkiye, 8(2015)

[21] Salaş S., Unluyol E., Erdaş Y. , Yeni bir operatör konveks sınıfı ES_hO, Mini Matematik İstatistik Sempozyumu, 17 Aralık, Ordu Üniversitesi, Ordu, Türkiye, 9(2015).

[22] Unluyol E., Salaş S., Erdaş Y., Some New Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications for Two Operator ES_hO-Convex Functions in Hilbert Space, International Conference on Advancement in Mathematical Sciences, November (2015), Porto Bello Hotel Resort, Spa, Antalya, 190.

[23] Unluyol E., ErdaşY., Salaş S. Some new Hermite-Hadamard Type Inequalities for Two Operator (α, m)-Convex Functions in Hilbert Spaces, International Conference on Advancement in Mathematical Sciences, 05-07 November (2015), Porto Bello Hotel Resort, Spa, Antalya, 104.

[24] Unluyol E. , S. Salaş, Y. Erdaş, Some New Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications for Godunova-Levin Operator Convex Functions in Hilbert Space, International Conference on Advancement in Mathematical Sciences, 05-07 November (2015), Porto Bello Hotel Resort, Spa, Antalya, 224.

[25] Mitrinović D.S. , Lacković I. B. , Hermite and Cconvexity, Aequationes Math. 28(1985) 229-232.

[26] Pećarić J. E., Proschan F., Tong Y. L., Functions Convex, Partial Orderings, and Statistical Applications, Academic Press. Inc., San Diego, 1992.

[27] Beckenbach E. F. , Convex Functions, Bull. Amer. Math. Soc. 54(1948) 439-460.

[28] Godunova E. K., Levin V. I., Neravenstra dlja funccii širokogo Klassa Soderžaščego Vypuklye, Monotonnye Inekotorye Drugie Vidy Funkaii, Vyčislitel Mat. i Mt. Fiz., Meževuzov Sb. Nauč. Trudov. MGPI, Moscow, (1985), 138-142.

[29] Mitrinovič D. S., Pečarić J. E., Note on a class of functions of Godunova and Levin, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 12 (1990), 33-36.

[30] Mitrinović D. S., Pečarić J. E., Fink A. M., Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Acad. Publ., (1993).

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	Yeter ERDAŞ
Doğum Yeri	:	Ordu/Gölköy
Doğum Tarihi	:	01.08.1992
Medeni Hali	:	Bekar
Bildiği Yabancı Dil	:	İngilizce
İletişim Bilgileri	:	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, `yeterrerdass@gmailcom`
Lise	:	Mehmetçik Lisesi, 2010
Lisans	:	Ordu Üniversitesi Fen-Ed. Fak. Matematik Böl.-2014