T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA BAĞLANTILILIK

Merve TELLİOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2016

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Merve TELLİOĞLU tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŞ danışmanlığında yürütülen "BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA BAĞLANTILILIK" adlı bu tez, jürimiz tarafından 31/05/2016 tarihinde oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŞ

Başkan:	Yrd. Doç. Dr. Kerim BEKAR Giresun Üniv. Matematik Böl.	İmza:
Üye:	Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL Ordu Üniv. Matematik Böl.	İmza:
Üye:	Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŞ Ordu Üniv. Matematik Böl.	İmza: S.Karataş

Bu tez kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 02/06/2016 tarih ve 2016/274 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

28./06/2016

Doç. Dr. Kürşat KORKMAZ

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Merve TELLİOĞLU

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirimlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA BAĞLANTILILIK

Merve TELLİOĞLU
Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2016
Yüksek Lisans Tezi, 59 sayfa

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŞ

Bu çalışmada, ilk olarak bulanık küme, esnek küme ve bulanık esnek küme ile ilgili tanım ve bulanık esnek küme için temel özellikler ve teoremler verildi. Daha sonra bir bulanık esnek küme üzerinde topoloji tanımlandı. Bulanık esnek açık küme, bulanık esnek kapalı küme, bulanık esnek clopen küme, bulanık esnek proper küme, bulanık esnek kümenin içi, bulanık esnek kümenin kapanışı, bulanık esnek sürekli fonksiyon, bulanık esnek bağlantılı küme, bulanık esnek bağlantılı topolojik uzaylar ve FSC_i bağlantılık tanımlandı. Son olarak FSC_i bağlantılı uzaylar arasındaki ilişkiler incelendi.

Anahtar Kelimeler: Esnek küme, bulanık esnek küme, bulanık esnek topolojik uzay, bulanık esnek bağlantılılık.

ABSTRACT

CONNECTEDNESS IN FUZZY SOFT TOPOLOGICAL SPACES
Merve TELLİOĞLU
Ordu University
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2016
MSc. Thesis, 59 pages

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŞ

In this study, it was firstly fuzzy set, soft set and fuzzy soft set related definition and for fuzzy soft set fundamental features and theorems. Later over one fuzzy soft set defined topology. It was defined fuzzy soft open set, fuzzy soft closed set, fuzzy soft clopen set, fuzzy soft proper set, the inside of fuzzy soft set, the closing of fuzzy soft set, fuzzy soft continuous function, fuzzy soft connected set, fuzzy soft connected topological spaces and (FSC_i) connected. Finally, examined the relationship between (FSC_i) connected spaces.

Keywords: Soft set, fuzzy soft set, fuzzy soft topological space, fuzz soft connectedness.

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans tez çalışmasını hazırlamamda bana destek olan, bilgisini, tecrübesini ve anlayışını esirgemeyen tez danışmanım, çok kıymetli hocam Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŞ'a, tez çalışmama değerli katkılar sağlayan Yrd. Doç. Dr. Kerim BEKAR'a ve Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL'a, tez yazımında yardımcı olan Burak KILIÇ'a ve yüksek lisans eğitimim boyunca emeği geçen tüm bölüm hocalarıma teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu yoğun süreçte hep anlayışlı olan, maddi ve manevi destekleriyle yanımda olan canım eşim Uğur'a, kızlarım Ceylin ve Nisa'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

μ	:	Bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu
I^X	:	X kümesi üzerindeki tüm bulanık kümeler ailesi
$\bigvee$	:	Supremum
$\bigwedge$	:	İnfimum
A^c	:	A bulanık kümesinin tümleyeni
$A \cap B$	:	A ve B bulanık kümelerinin kesişimi
$A \cup B$	:	A ve B bulanık kümelerinin birleşimi
$\mathbb{S}$	:	X evrensel kümesi üzerindeki E parametre kümesi ile tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi
(F, E)	:	Molodstov anlamında (F, E) esnek kümesi
F	:	Çağman anlamında F esnek kümesi
E	:	Parametre kümesi
U	:	Nesne Kümesi
$\mathcal{P}(X)$	:	X'in kuvvet kümesi
Φ	:	Boş esnek küme
$\tilde{X}$	:	Evrensel esnek küme
$\tilde{\Phi}$	:	Bulanık esnek boş küme
$F\tilde{\subseteq}G$	:	G esnek kapsar F
$F\tilde{\cup}G$	:	F ile G'nin esnek birleşimi
$F\tilde{\cap}G$	:	F ile G'nin esnek kesişimi
$F^{\tilde{c}}$	:	F'nin esnek tümleyeni
f	:	f sezgisel bulanık esnek kümesi
$f \sqsubseteq g$	:	g *be*-kapsar f
$f \not\sqsubseteq g$	:	g, f'yi *be*-kapsamaz
$f \sqcup g$	:	*be*-kümelerde birleşim
$f \sqcap g$	:	*be*-kümelerde kesişim
$f^{\tilde{c}}$	:	f sbe-kümesinin tümleyeni
$\tilde{0}_E$	:	*be*-boş küme
$\tilde{1}_E$	:	*be*-evrensel küme

$\mathbb{FS}_E^X$	:	E parametreleriyle X üzerinde tanımlanan *be*-kümelerin kümesi
φ_ψ	:	Bulanık esnek küme
e_f	:	*be*-nokta
$\tilde{\in}$	:	*be*-aitlik

1. GİRİŞ

Belirsizlik içeren problemleri matematiksel olarak modellemek klasik Aristo mantığıyla yani doğruluk değeri 1 veya 0 olan önermeler şeklinde modellemek her zaman mümkün değildir. Özellikle doğruluk değeri göreceli olan kavramlar bu durumu oldukça güçleştirir. Bu kavramlar çok karmaşık kavramlar olabileceği gibi günlük hayatta kullanılan güzel kitap, soğuk hava, küçük ev vb. basit ifadeler de olabilir. Günümüzde sosyal bilimler ve birçok alanda karşılaşılan belirsizliklerle başa çıkmak için çok farklı matematiksel mo- dellememeler kullanılmaktadır. Olasılık teorisi, aralık aritmetiği, bulanık küme teorisi [35], sezgisel bulanık küme teorisi ve esnek küme teorisi [28] en sık kullanılan ve iyi bilinen matematiksel yöntemlerdir.

Belirsizliği modellemek için geliştirilen teorilerin en çok kullanılanı bulanık küme teorisidir. Bulanık küme teorisi 1965 yılında Zadeh tarafından ortaya atılmıştır. Bulanık küme teorisi belirsizliği modellerken üyelik değerinden faydalanır ve bunu bir üyelik fonksiyonu tanımlayarak yapar. Bulanık küme teorisi özellikle mühendislik bilimlerinde çok geniş uygulama alanına sahiptir. Bulanık kümelerdeki üyelik fonksiyonun yapısından kaynaklanan problemlerden kurtulmak için 1999'da Molodtsov tarafından esnek küme teorisi ortaya atılmıştır. Böylece esnek küme teorisinde bulanık küme teorisinin aksine reel değerli fonksiyon yerine bir seçim fonksiyonu alarak belirsizlik ortadan kaldırılmıştır.

Bir küme için bağlantılık kavramı kabaca kümenin tek parça olması anlamına gelir. Bulanık kümeler için de bağlantılılık kavramı benzer şekildedir. 1968 yılında Zhao bağlantılı bulanık topolojik uzaylar teorisini ortaya atmıştır. Ajmal ve Kohli [2] bağlantılı topolojik uzaylar hakkında çalışmalar yapmıştır. Son zamanlarda matematiğin birçok alanında bulanık esnek küme teorisi üzerine çalışmalar yapılmıştır. Molodtsov [28]'un esnek küme teorisini ortaya atmasından sonra Maji ve ark. [27] tarafından esnek kümeler üzerine çeşitli küme işlemleri tanımlandı ve özellikleri incelendi. Aktaş ve Çağman [4] esnek küme ve esnek grupları inceledi. Kong ve ark. [23] esnek küme algoritmasını normal parametreyle indirgediler. Ali ve ark. [3] bulanık esnek küme teorisi üzerinde bazı yeni işlemler tanımladılar.

Kharal ve ark. [22] bulanık esnek fonksiyon tanımını ortaya attılar. Ahmat ve ark. [1] bulanık esnek kümeler üzlerine çalışmalarını yayımladılar. Daha sonra Çağman ve Enginoğlu [8] tümleyen ve fark işleminde ortaya çıkan sorunlar nedeniyle esnek küme işlemlerini yeniden tanımladılar. Shabir ve ark. [31] esnek topolojik uzaylar konulu bir makale yayımladılar. Hussain ve Ahmad [16] esnek topolojik uzayın bazı özelliklerini tanımladılar. Çağman, Karataş ve Enginoğlu [9] esnek topoloji üzerine çalışmalarını yayımladılar. Aygünoğlu ve Aygün [6] esnek topoloji üzerine bir makale yayımladılar. Gong ve ark. [13] tarafından birebir örten esnek küme, Roy ve ark. [30] bulanık esnek topolojik uzaylar üzerine bir makale yayımladılar. Tanay ve Kandemir [33] tarafından bulanık esnek topolojik yapılar incelendi. Varol ve Aygün [34] bulanık esnek topoloji üzerine çalışmalarını yayımladılar. Daha sonra Gain ve ark. bulanık esnek topoljik uzaylarda bazı yapısal özellikleri incelediler. Guan ve ark. [14] bulanık esnek kümede yeni bir düzen ilişkisi ve uygulamalar üzerine bir çalışma yaptılar. Peyghan ve ark. [29] esnek topolojik uzaylar hakkında bir makale yayımladılar. Gündüz ve ark. [15] bulanık esnek topolojik uzaylar üzerine çalışmalar yaptılar. Şimşekler ve ark. [32] bulanık esnek topolojik uzaylar üzerine bir makale yayımladılar. Daha sonra Çağman [10] tarafından esnek küme teorisi üzerine yeni bir yaklaşım geliştirildi. Hussain [17] tarafından esnek bağlantılılık üzerine bir makale yayımlandı.

Bu tez çalışmasının beşinci bölümü Journal of Linear and Topological Algebra adlı dergide [21] yayımlanmıştır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Sezgisel Bulanık Kümeler

Tanım 2.1.1 [35] $X \neq \emptyset$ olsun.

$$\mu : X \to [0,1]$$

fonksiyonuna bulanık küme denir.

$$\mu = \Big\{ \big(x, \mu(x)\big) : x \in X, \ \ \mu(x) \in [0,1] \Big\}$$

şeklinde tanımlanır. X kümesi üzerinde tanımlı bütün bulanık kümelerin kümesi I^X $\big(I = [0,1]\big)$ veya $F(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2 [5] $X \neq \emptyset$ ve $A, B \in I^X$

$$\begin{aligned} A &= \big\{(x, A(x)) : x \in X\big\} \\ B &= \big\{(x, B(x)) : x \in X\big\} \end{aligned}$$

olarak verilsin. Temel bulanık küme işlemleri

i. $A \subseteq B$ ancak ve ancak her $x \in X$ için $B(x) \geq A(x)$ ve $A(x) \geq B(x)$ (Kapsama)

ii. $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ (Eşitlik)

iii. $A \cup B = \Big\{ \big(x, A(x) \vee B(x)\big) : x \in X \Big\}$ (Birleşim)

iv. $A \cap B = \Big\{ \big(x, A(x) \wedge B(x)\big) : x \in X \Big\}$ (Kesişim)

v. $A^c = \Big\{ \big(x, 1 - A(x)\big) : x \in X \Big\}$ (Tümleyen)

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.3 [11] $\{A_i : i \in I\} \subseteq I^X$ olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} A_i &= \Big\{ \big(x, \bigwedge A_i(x)\big) : x \in X \Big\} \\ \bigcup_{i \in I} A_i &= \Big\{ \big(x, \bigvee A_i(x)\big) : x \in X \Big\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.4 [5] $\overline{0} = \{(x,0) : x \in X\}$ ve $\overline{1} = \{(x,1) : x \in X\}$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1.1 [5] $A, B, C \in I^X$ olsun. Bu durumda;

i. $A \subseteq B$ ve $C \subseteq D$ ise $(A \cup B) \subseteq (C \cup D)$ ve $(A \cap B) \subseteq (C \cap D)$ 'dir.

ii. $(A \subseteq B)$ ve $(A \subseteq C)$ ise $A \subseteq B \cap C$ 'dir.

iii. $(A \subseteq C)$ ve $(B \subseteq C)$ ise $A \cup B \subseteq C$ 'dir.

iv. $(A \subseteq B)$ ve $(B \subseteq C)$ ise $(A \subseteq C)$ 'dir.

v. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ ve $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ 'dir.

vi. $A \subseteq B$ ise $B^c \subseteq A^c$ 'dir.

vii. $(A^c)^c = A$ 'dır.

viii. $(\overline{1})^c = \overline{0}$ ve $(\overline{0})^c = \overline{1}$ 'dir.

Örnek 2.1.1 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel kümesi üzerinde A ve B bulanık kümeleri

$$\begin{aligned} A &= \big\{(x_1, 0.8), (x_2, 0.7), (x_3, 0.4)\big\} \\ B &= \big\{(x_1, 0.2), (x_2, 0.8), (x_3, 0.5)\big\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan

i. $A \cap B = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.7), (x_3, 0.4)\}$

ii. $A \cup B = \{(x_1, 0.8), (x_2, 0.8), (x_3, 0.5)\}$

iii. $A^c = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.1), (x_3, 0.6)\}$

olarak elde edilir.

2.2 Esnek Kümeler

Bu bölümde ilk önce Molodtsov [28] tarafından ortaya atılmış olan esnek küme tanımı verilcektir. Daha sonra Çağman [10] tarafından gözden geçirilmiş tanım verilecek ve tezin geri kalan kısmında bu tanım kullanılacaktır.

Tanım 2.2.1 [28] X evrensel küme ve E parametreler kümesi olsun. Bu durumda; E parametreler kümesini tüm alt kümelerin kümesi olan X kümesine götüren F dönüşümü ile birlikte (F, E) ikilisine X kümesi üzerinde bir esnek küme denir.

Tanım 2.2.2 [10] X evrensel küme ve E parametre kümesi olsun. $F : E \to \mathcal{P}(X)$ fonksiyonuna U üzerinde esnek küme denir. Yani, bir esnek küme

$$F = \Big\{ \big(e, F(e)\big) : e \in E \Big\}$$

şeklinde sıralı ikililerin bir kümesi olarak görülebilir. Eğer $e \in E$ için $F(e) = \emptyset$ ise, $(e, \emptyset)$ ikilisi esnek kümede gösterilmez. X üzerindeki E parametre kümesi ile tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi $\mathbb{S}$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.1 F esnek kümesi, Ordu iline yeni tayin olmuş bir memur çiftin çocuklarını göndereceği okulların parametrelendirilmiş şekli olarak tanımlansın.

U : Göz önüne alınan tüm okulların kümesi

E : Parametre kümesi (Her bir parametre kelime veya cümle olabilir.)

olmak üzere $E = \{$pahalı, ucuz, spor kompleksi mevcut, üniversite sınavı yerleştirme başarısı var, ingilizce eğitimi var, eve yakın, hafta sonu kursları mevcut$\}$ şeklinde tanımla- nıyor. Bu durumda esnek kümeyi tanımlamak pahalı okulları, ucuz okulları ve diğerlerini göstermek anlamına gelir. $(i = \overline{1, 7})$ e_i ifadesi $i-$nci parametre olmak üzere $F(e_i)$ kümeleri keyfi olabilir.

Tanım 2.2.3 [10] $F, G \in \mathbb{S}$ olsun. Her $e \in E$ için $F(e) \subseteq G(e)$ oluyorsa G, F'yi esnek kapsar denir ve $F \tilde{\subseteq} G$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.4 [10] $F \in \mathbb{S}$ olsun. Her $e \in E$ için $F(e) = \emptyset$ oluyorsa F'ye esnek boş küme denir ve Φ ile gösterilir.

Tanım 2.2.5 [10] $F \in \mathbb{S}$ olsun. Her $e \in E$ için $F(e) = X$ oluyorsa F'ye esnek evrensel küme denir ve X ile gösterilir.

Tanım 2.2.6 [10] $F, G \in \mathbb{S}$ olsun. F ile G esnek kümelerinin esnek birleşimi her $e \in E$ için $(F \tilde{\cup} G)(e) = F(e) \cup G(e)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.7 [10] $F, G \in \mathbb{S}$ olsun. F ile G esnek kümelerinin esnek kesişimi her $e \in E$ için $(F \tilde{\cap} G)(e) = F(e) \cap G(e)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.8 [10] $F \in \mathbb{S}$ olsun. F esnek kümesinin esnek tümelyeni $F^{\tilde{c}}$ ile gösterilir ve her $e \in E$ için $F^{\tilde{c}}(e) = X \setminus F(e)$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2.1 [8, 10] $F, G, H \in \mathbb{S}$ verilsin. Bu takdirde

i. $F \tilde{\cap} F = F$

ii. $F \tilde{\cup} F = F$

iii. $(F^{\tilde{c}}) \tilde{\cap} (F) = \Phi$

iv. $(F^{\tilde{c}}) \tilde{\cup} (F) = X$

v. $(\Phi^{\tilde{c}}) = X$ ve $(X^{\tilde{c}}) = \Phi$

vi. $F \tilde{\cap} G = G \tilde{\cap} F$

vii. $F \tilde{\cup} G = G \tilde{\cup} F$

viii. $F \tilde{\cap} (G \tilde{\cup} H) = (F \tilde{\cap} G) \tilde{\cup} (F \tilde{\cap} H)$

ix. $F \tilde{\cup} (G \tilde{\cap} H) = (F \tilde{\cup} G) \tilde{\cap} (F \tilde{\cup} H)$

x. $(F \tilde{\cap} G)^{\tilde{c}} = F^{\tilde{c}} \tilde{\cup} G^{\tilde{c}}$

xi. $(F \tilde{\cup} G)^{\tilde{c}} = F^{\tilde{c}} \tilde{\cap} G^{\tilde{c}}$

xii. $F \tilde{\cap} \Phi = \Phi$ ve $F \tilde{\cup} \Phi = \Phi$

xiii. $F \tilde{\cup} X = \tilde{U}$ ve $F \tilde{\cap} X = F$

Örnek 2.2.2 $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, $X = \{u_1, u_2, u_3\}$ olsun. $F, G, H \in \mathbb{S}$ esnek kümeleri

$$\begin{aligned} F &= \big\{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, U)\big\}, \\ G &= \big\{(e_2, \{u_2\}), (e_3, \{u_1, u_3\})\big\}, \\ H &= \big\{(e_1, \{u_2\}), (e_2, \{u_1, u_2\})\big\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde:

i. $e_1 \in E$ için

$$H(e_1) = \{u_2\} \text{ ve } F(e_1) = \{u_1, u_2\}$$

olduğundan $H(e_1) \subseteq F(e_1)$ elde edilir. Ayrıca $e_2 \in E$ için

$$H(e_2) = \{u_1, u_2\} \text{ ve } F(e_2) = \{u_1, u_2, u_3\}$$

olduğundan $H(e_2) \subseteq F(e_2)$ bulunur. Dolayısıyla $H \tilde{\subseteq} F$ elde edilir.

ii. $e_1, e_2, e_3 \in E$ için

$$\begin{aligned} (F \cap G)(e_1) &= F(e_1) \cap G(e_1) = \{u_1, u_2\} \cap \Phi = \Phi \\ (F \cap G)(e_2) &= F(e_2) \cap G(e_2) = U \cup \{u_2\} = \{u_2\} \\ (F \cap G)(e_3) &= F(e_3) \cap G(e_3) = \Phi \cap \{u_1, u_3\} = \Phi \end{aligned}$$

olduğundan

$$F \tilde{\cap} G = \big\{(e_2, \{u_2\})\big\}$$

elde edilir.

iii. $e_1, e_2, e_3 \in E$ için

$$\begin{aligned} (H \cup F)(e_1) &= H(e_1) \cup F(e_1) = \{u_1\} \cup \{u_1, u_2\} = \{u_1, u_2\} \\ (H \cup F)(e_2) &= H(e_2) \cup F(e_2) = \{u_1, u_2\} \cup \{u_1, u_2, u_3\} = \{u_1, u_2, u_3\} \\ (H \cup F)(e_3) &= \emptyset \end{aligned}$$

olduğundan

$$H \tilde{\cap} F = \big\{(e_1, \{u_2\}), (e_2, \{u_1, u_2\})\big\} = \tilde{H}$$

elde edilir

iv. $F = \big\{(e_1, \{u_1, u_2\}), (e_2, X)\big\}$ esnek kümesinin esnek tümleyenini bulalım.

$$F^{\tilde{c}}(e_1) = \{u_3\}, \;\; F^{\tilde{c}}(e_2) = \Phi \;\text{ ve }\; F^{\tilde{c}}(e_3) = X$$

olduğundan

$$F^{\tilde{c}} = \{(e_1, \{u_3\}), (e_3, X)\}$$

elde edilir.

3. BULANIK ESNEK KÜMELER

Bu bölümde bulanık esnek kümelerin tanımı verilip temel özellikleri incelenecektir. Ahmat ve Kharal [1] tarafından yapılan bulanık küme tanımı, Çağman [10]'ın esnek küme tanımı ile yeniden yorumlanmıştır.

3.1 Bulanık Esnek Küme

Tanım 3.1.1 [1] X bir evrensel küme, E parametreler kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. $F : A \to I^X$ olmak üzere, (F, A) ikilisine X üzerinde bir bulanık esnek küme denir.

Tanım 3.1.2 [1] (F, A) ve (G, B), X üzerinde tanımlı iki bulanık esnek küme olmak üzere; (F, A), (G, B)'nin bulanık esnek alt kümesidir ancak ve ancak

i. $A \subset B$

ii. Her $e \in A$ için $F(e) \subseteq G(e)$'dir.

şartlarını sağlaması gerekir. Bu durum $(F, A)\tilde{\subseteq}(G, B)$ şeklinde gösterilir. Eğer (G, B), (F, A)'nın sezgisel bulanık esnek alt kümesi ise, bu durumda (F, A)'ya (G, B)'nin bulanık esnek süper kümesi denir ve $(F, A)\tilde{\supseteq}(G, B)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.3 [1] (F, A) ve (G, B), X evrensel kümesi üzerinde iki bulanık esnek küme olsun. Bu durumda; (G, B) kümesi (F, A) 'nın bulanık esnek alt kümesi ve (F, A) kümesi (G, B) kümesinin bulanık esnek alt kümesi ise (G, B) ve (F, A) kümelerine bulanık esnek eşit kümeler denir.

Tanım 3.1.4 [25] (F, A) bulanık esnek kümesinin tümleyeni $(F, A)^c$ ile gösterilir. Burada $(F, A)^c = (F^c, \neg A)$ eşitliği mevcuttur ve F^c fonksiyonu $F^c : \neg A \to \mathcal{P}(X)$ şeklinde tanımlı bir fonksiyondur. $F^c(e)$ ifadesi her $e \in \neg A$ için $F(\neg e)$ ifadesinin sezgisel bulanık esnek tümleyenini göstermektedir. $((F, A)^c)^c = (F, A)$ olduğu açık bir şekilde görülmektedir.

Tanım 3.1.5 [1] (F, A), X kümesi üzerinde tanımlı bir esnek küme olsun. Her $e \in A$ için $F(e) = \overline{0}$ ise bu durumda (F, A) kümesine bulanık esnek boş küme denir ve $\tilde{\Phi}$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.6 [1] (F, A), X kümesi üzerinde tanımlı bir esnek küme olsun. Her $e \in A$ için $F(e) = \overline{0}$ ise bu durumda (F, A) kümesine bulanık esnek evrensel küme denir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir. Bulanık esnek boş küme ve esnek evrensel küme tanımları göz önüne alındığında $A^c = \Phi$ ve $\Phi^c = A$ eşitliği kolayca görülür.

Tanım 3.1.7 [1] X üzerinde tanımlı olan (F, A) ve (G, B) bulanık esnek kümelerinin birleşimi de X üzerinde bulanık esnek küme olan (H, C) kümesidir ve $C = A \cup B$'dir. Ayrıca H fonksiyonu

$$H(e) = \begin{cases} f(e), & e \in A \setminus B \\ g(e), & e \in B \setminus A \\ f(e) \cup g(e), & e \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda $(F, A)\tilde{\cup}(G, B) = (H, C)$ ile gösterilir ve bulanık esnek kümelerin birleşimi olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.8 [25] X üzerinde tanımlı olan (F, A) ve (G, B) bulanık esnek kümelerinin kesişimi de X üzerinde bulanık esnek küme olan (H, C) kümesidir. Burada $C = A \cap B$'dir. Her $e \in C$ için $H(e) = F(e) \cap G(e)$ şeklinde tanımlanır. (H, C) kümesine (F, A) ve (G, B) bulanık esnek kümelerinin kesişimi denir ve $(F, A)\tilde{\cap}(G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.9 [25] Eğer (F, A) *ve* (G, B) iki bulanık esnek küme ise bu durumda "(F, A) *VE* (G, B)" ifadesi de bulanık esnek kümedir ve $(F, A) \wedge (G, B)$ ile gösterilir. Her $e \in A$ ve $e' \in B$ için $H(e, e') = F(e)\tilde{\cap}G(e')$ olmak üzere $(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.10 [25] Eğer (F, A) ve (G, B) iki bulanık esnek küme ise bu durumda "(F, A) *VEYA* (G, B)" ifadesi de bulanık esnek kümedir. Bu küme; $(F, A) \vee (G, B)$ ile gösterilir ve $O(e, e') = F(e)\tilde{\cup}G(e')$ olmak üzere $(F, A) \vee (G, B) = (O, A \times B)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.4, her zaman mevcut değildir. Bu durumda dilbilimsel parametrelerde sürekli değişkenlik arzetmektedir. Dolayısıyla çalışmanın bundan sonraki kısmında Çağman [10]'ın makalesi baz alınarak sezgisel bulanık esnek küme işlemleri tekrar inşa edilecektir.

Tanım 3.1.11 X evrensel küme ve E parametre kümesi olsun. $f : E \to I^X$ fonksi- yonuna X üzerinde bir bulanık esnek küme (*be*–küme) denir. Dolayısıyla bir f *be*–kümesi

$$f = \Big\{\big(e, \{(x, \mu_{f(e)}(x)) : x \in X\}\big) : e \in E\Big\}$$

şeklinde gösterilebilir. X üzerinde E parametre kümesi ile tanımlı bütün bulanık esnek kümelerin kümesi $\mathbb{FS}_E^X$ ile gösterelim.

Tanım 3.1.12 $f, g \in \mathbb{FS}_E^X$ olsun. Her $e \in E$ için $f(e) \subseteq g(e)$ oluyorsa g, f'yi bulanık esnek kapsar denir ve $f \sqsubseteq g$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.13 $f \in \mathbb{FS}_E^X$ olsun. Her $e \in E$ için $f(e) = \overline{0}$ oluyorsa f'ye bulanık esnek boş küme denir ve $\tilde{0}_E$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.14 $f \in \mathbb{FS}_E^X$ olsun. Her $e \in E$ için $f(e) = \overline{1}$ oluyorsa f'ye bulanık esnek evrensel küme denir ve $\tilde{1}_E$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.15 $f, g \in \mathbb{FS}_E^X$ olsun. f ile g'nin sezgisel bulanık esnek birleşimi her $e \in E$ için $(f \sqcup g)(e) = f(e) \cup g(e)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.16 $f, g \in \mathbb{FS}_E^X$ olsun. f ile g bulanık esnek kesişimi $f \sqcap g$ ile gösterilir ve her $e \in E$ için $(f \sqcap g)(e) = f(e) \cap g(e)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.17 $f \in \mathbb{FS}_E^X$ olsun. f'nin bulanık esnek tümelyeni $f^{\tilde{c}}$ ile gösterilir ve her $e \in E$ için $f^{\tilde{c}}(e) = (f(e))^c$ şeklinde tanımlanır. Burada $(f(e))^c$ ifadesi $f(e)$ sezgisel bulanık kümesinin tümleyenini göstermektedir.

Teorem 3.1.1 $f, g, h \in \mathbb{FS}_E^X$ verilsin. Bu takdirde aşağıdaki iddialar doğrudur.

i. $f \sqcap f = f$

ii. $f \sqcup f = f$

iii. $f^{\tilde{c}} \sqcap f = \tilde{0}_E$

iv. $f^{\tilde{c}} \sqcup f = \tilde{1}_E$

v. $\tilde{0}_E^{\tilde{c}} = \tilde{1}_E$ ve $\tilde{1}_E^{\tilde{c}} = \widetilde{0}_E$

vi. $f \sqcap g = g \sqcap f$

vii. $f \sqcup g = g \sqcup f$

viii. $f \sqcap (g \sqcup h) = (f \sqcap g) \sqcup (f \sqcap h)$

ix. $f \sqcup (g \sqcap h) = (f \sqcup g) \sqcap (f \sqcup h)$

x. $(f \sqcap g)^{\tilde{c}} = f^{\tilde{c}} \sqcup g^{\tilde{c}}$

xi. $(f \sqcup g)^{\tilde{c}} = f^{\tilde{c}} \sqcap g^{\tilde{c}}$

xii. $f \sqcap \tilde{0}_E = \tilde{0}_E$ ve $f \sqcup \tilde{0}_E = f$

xiii. $f \sqcup \tilde{1}_E = \tilde{1}_E$ ve $f \sqcap \tilde{1}_E = f$

İspat.

i. Her $e \in E$ için,

$$(f \sqcap f)(e) = f(e) \cap f(e) = f(e)$$

olup, be kümelerin be kesişimleri tanımından

$$f \sqcap f = f$$

elde edilir.

ii. Her $e \in E$ için,

$$(f \sqcup f)(e) = f(e) \cup f(e) = f(e)$$

olup, be kümelerin be kesişimleri tanımından

$$f \sqcup f = f$$

elde edilir

iii. Her $e \in E$ için be tümleyen işlemi tanımı dikkate alınırsa;

$$(f^{\tilde{c}} \sqcap f)(e) = f^{\tilde{c}}(e) \cap f(e) = (f(e))^c \cap f(e) = \overline{0}$$

olduğundan

$$f^{\tilde{c}} \sqcap f = \tilde{0}_E$$

elde edilir.

iv. Her $e \in E$ için be tümleyen işlemi tanımı dikkate alınırsa,

$$(f^{\tilde{c}} \sqcup f)(e) = f^{\tilde{c}}(e) \cup f(e) = (f(e))^c \cup f(e) = \overline{1}$$

olduğundan

$$f^{\tilde{c}} \sqcup f = \tilde{1}_E$$

elde edilir.

v. be boş küme ve be evrensel küme tanımları dikkate alındığında, her $e \in E$ için

$$f(e) = \overline{0}$$

olduğundan

$$\tilde{0}_E^{\tilde{c}} = \tilde{1}_E$$

bulunur. Benzer şekilde, Her $e \in E$ için $f(e) = \overline{1}$ olduğundan;

$$\tilde{1}_E^{\tilde{c}} = \tilde{0}_E$$

elde edilir.

vi. Her $e \in E$ için

$$(f \sqcap g)(e) = f(e) \cap g(e) = g(e) \cap f(e) = (g \sqcap f)(e)$$

olup,

$$f \sqcap g = g \sqcap f$$

elde edilir.

vii. Her $e \in E$ için

$$(f \sqcup g)(e) = f(e) \cup g(e) = g(e) \cup f(e) = (g \sqcup f)(e)$$

olup,

$$f \sqcup g = g \sqcup f$$

elde edilir.

viii. Her $e \in E$ için

$$(f \cap (g \cap h))(e) = (f \cap g)(e) \cup (f \cap h)(e)) = (f(e) \cap g(e)) \cup (f(e) \cap h(e)$$

olup,

$$f \sqcap (g \sqcup h) = (f \sqcap g) \sqcup (f \sqcap h)$$

elde edilir.

ix. Her $e \in E$ için

$$(f \cup (g \cap h))(e) = (f \cup g)(e) \cap (f \cup h)(e)) = (f(e) \cup g(e)) \cap (f(e) \cup h(e)$$

olup,

$$f \sqcup (g \sqcap h) = (f \sqcup g) \sqcap (f \sqcup h)$$

elde edilir.

x. Her $e \in E$ için

$$(f \cap g)^c(e) = f^c(e) \cup g^c(e)$$

olduğundan,

$$(f \sqcap g)^{\tilde{c}} = f^{\tilde{c}} \sqcup g^{\tilde{c}}$$

elde edilir.

xi. Her $e \in E$ için

$$(f \cup g)^c(e) = f^c(e) \cap g^c(e)$$

olduğundan;

$$(f \sqcup g)^{\tilde{c}} = f^{\tilde{c}} \sqcap g^{\tilde{c}}$$

elde edilir.

xii. Her $e \in E$ için

$$f(e) \cap \overline{0} = \overline{0}$$

ve

$$f(e) \cup \overline{0} = f(e)$$

olduğundan sırasıyla;

$$f \sqcap \tilde{0}_E = \tilde{0}_E$$

ve

$$f \sqcup \tilde{0}_E = f$$

elde edilir.

xiii. Her $e \in E$ için

$$f(e) \cup \overline{1} = \overline{1}$$

ve

$$f(e) \cap \overline{1} = f(e)$$

olduğundan sırasıyla

$$f \sqcup \tilde{1}_E = \tilde{1}_E$$

ve

$$f \sqcap \tilde{1}_E = f$$

elde edilir.

Örnek 3.1.1 $E = \{e_1, e_2\}$, $X = \{x_1, x_2\}$ ve

$$f = \Big\{\big(e_1, \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.7)\}\big)\big(e_2, \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.6)\}\big)\Big\}$$
$$g = \Big\{\big(e_1, \{(x_1, 0.1), (x_2, 0.6)\}\big)\big(e_2, \{(x_1, 0.8), (x_2, 0.6)\}\big)\Big\}$$
$$h = \Big\{\big(e_1, \{(x_1, 0.6), (x_2, 0.8)\}\big)\big(e_2, \{(x_1, 0.7), (x_2, 0.8)\}\big)\Big\}$$

olsun. Buradan

i. $f \sqsubseteq h$'dir: Her

$$e_1 \in E \quad \text{için} \quad \mu_{f(e_1)}(x) \leq \mu_{h(e_1)}(x)$$
$$e_2 \in E \quad \text{için} \quad \mu_{f(e_2)}(x) \leq \mu_{h(e_2)}(x)$$

olup, her $e_1, e_1 \in E$ için $f(e_1) \subseteq h(e_1)$ ve $f(e_2) \subseteq h(e_2)$ olup bulanık esnek kapsama tanımından $f \sqsubseteq h$ elde edilir.

ii. $f \sqcap g$ *be*–kümesini bulalım:

$$(f \sqcap g)(e_1) = f(e_1) \cap g(e_1) \text{ ve } (f \sqcap g)(e_2) = f(e_2) \cap g(e_2)$$

olduğundan

$$f \sqcap g = \Big\{\big(e_1, \{(x_1, 0.1), (x_2, 0.6)\}\big)\big(e_2, \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.6)\}\big)\Big\}$$

olarak bulunur.

iii. $f \sqcup g$ *be*–kümesini bulalım:

$$(f \sqcup g)(e_1) = f(e_1) \cup g(e_1) \text{ ve } (f \sqcup g)(e_2) = f(e_2) \cup g(e_2)$$

olduğundan

$$f \sqcup g = \Big\{\big(e_1\{(x_1, 0.2), (x_2, 0.7)\}\big)\big(e_2\{(x_1, 0.8), (x_2, 0.6)\}\big)\Big\}$$

olarak bulunur.

iv. $f^{\tilde{c}}$ *be*–kümesini bulalım:

$$f^{\tilde{c}}(e) = (f(e))^{\tilde{c}}$$

olduğundan

$$f^{\tilde{c}} = \Big\{\big(e_1\{(x_1, 0.8), (x_2, 0.3)\}\big)\big(e_2\{(x_1, 0.6), (x_2, 0.4)\}\big)\Big\}$$

elde edilir.

3.2 Bulanık Esnek Fonksiyonlar

Tanım 3.2.1 $\mathbb{FS}_E^X$ ve $\mathbb{FS}_K^Y$ sırasıyla X ve Y üzerinde tüm *be*–kümelerin kümesi olsun. $\varphi : X \to Y$ ve $\psi : E \to K$ fonksiyonları verilsin. $\varphi_\psi : \mathbb{FS}_E^X \to \mathbb{IFS}_K^Y$ ifadesine bulanık esnek fonksiyon (*be*–fonksiyon) denir.

i. $f \in \mathbb{FS}_E^X$'nin φ_ψ altındaki görüntüsü $\varphi_\psi(f)$ ile gösterilir ve

$$\mu_{\varphi(F)(k)}(y) = \begin{cases} \bigvee_{e\in\psi^{-1}(k),\, x\in\varphi^{-1}(x)} \mu_{f(e)}(x), & \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

ii. $g \in \mathbb{FS}_K^Y$ nın φ_ψ^{-1} altındaki ters görüntüsü $\varphi_\psi^{-1}(g)$ ile gösterilir ve

$$\mu_{\varphi^{-1}(G)}(u) = \mu_{G(\psi(e))}(\varphi(u))$$

şeklinde tanımlanır. Dolayısıyla aşağıdaki diyagram anlamlıdır.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"'] & I^X \arrow[d, "\varphi"] \\ K \arrow[r, "g"'] & I^Y \end{tikzcd}$$

φ ve ψ fonksiyonları birebir ise φ_ψ fonksiyonuna *be*–birebir fonksiyon denir. φ ve ψ fonksiyonları örten ise φ_ψ fonksiyonuna *be*–örten fonksiyon denir.

Örnek 3.2.1 $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $K = \{k_1, k_2, k_3\}$ ve $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ olsun. $\varphi : X \to Y$ ve $\psi : E \to K$ fonksiyonları

$$\begin{aligned} \psi(e_1) &= k_1, & \varphi(x_1) &= y_1 \\ \psi(e_2) &= k_1, & \varphi(x_2) &= y_1 \\ \psi(e_3) &= k_2, & \varphi(x_3) &= y_2 \\ \psi(e_4) &= k_3, & \varphi(x_4) &= y_3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $f \in \mathbb{FS}_E^X$ ve $g \in \mathbb{FS}_K^Y$ kümeleri

$$\begin{aligned} f \;=\; & \Big\{ \big(e_1, \{(x_1, 0.8), (x_2, 0.2), (x_3, 0.6), (x_4, 0.8)\}\big), \\ & \big(e_2, \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.5), (x_3, 0.1), (x_4, 0.8)\}\big), \\ & \big(e_3, \{(x_1, 0.4), (x_2, 0.3), (x_3, 0.9), (x_4, 0.6)\}\big), \\ & \big(e_4, \{(x_1, 0.8), (x_2, 0.7), (x_3, 0.2), (x_4, 0.4)\}\big) \Big\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g \;=\; & \Big\{\big(k_1,\{(y_1,0.5),(y_2,0.3),(y_3,0.4)\}\big),\\
& \big(k_2,\{(y_1,0.2),(y_2,0.1),(y_3,0.4)\}\big),\\
& \big(k_3,\{(y_1,0.3),(y_2,0.5),(y_3,0.4)\}\big)\Big\}
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlansın. Buradan,

$$
\begin{aligned}
\varphi_\psi(f) \;=\; & \Big\{\big(k_1,\{(y_1,0.8),(y_2,0.6),(y_3,0.8)\}\big),\\
& \big(k_2,\{(y_1,0.4),(y_2,0.9),(y_3,0.6)\}\big),\\
& \big(k_3,\{(y_1,0.8),(y_2,0.2),(y_3,0.4)\}\big)\Big\}\\
\varphi_\psi^{-1}(g) \;=\; & \Big\{\big(e_1,\{(x_1,0.8),(x_2,0.8),(x_3,0.6),(x_4,0.8)\}\big),\\
& \big(e_2,\{(x_1,0.8),(x_2,0.8),(x_3,0.6),(x_4,0.8)\}\big),\\
& \big(e_3,\{(x_1,0.4),(x_2,0.4),(x_3,0.9),(x_4,0.6)\}\big),\\
& \big(e_4,\{(x_1,0.8),(x_2,0.8),(x_3,0.2),(x_4,0.4)\}\big)\Big\}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 3.2.1 $f, f_1, f_2 \in \mathbb{FS}_E^X$ ve $\varphi_\psi : \mathbb{FS}_E^X \to \mathbb{FS}_K^Y$ bir *be*–fonksiyon olsun. Bu takdirde

i. $f \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f))$ dır. Buradaki eşitlik ancak ve ancak φ_ψ fonksiyonu *sbe*–birebir olduğunda sağlanır.

ii. $\varphi_\psi(f_1 \sqcup f_2) = \varphi_\psi(f_1) \sqcup \varphi_\psi(f_2)$

iii. $\varphi_\psi(f_1 \sqcap f_2) = \varphi_\psi(f_1) \sqcap \varphi_\psi(f_2)$

İspat.

i. $f_1 \sqsubseteq f_2$ olsun. Buradan, her $e \in E$ için $f_1(x) \subseteq f_2(x)$'dir. Yani, her $e \in E$ ve her $x \in X$ inin $\mu_{f_1(e)}(x) \leq \mu_{f_2(e)}(x)$ olur. Dolayısıyla $k \in K$ ve $y \in Y$ için;

$$
\bigvee_{\substack{e\in\psi^{-1}(k)\\ x\in\psi^{-1}(y)}} \mu_{f_1(e)}(x) \;\leq\; \bigvee_{\substack{e\in\psi^{-1}(k)\\ x\in\psi^{-1}(y)}} \mu_{f_2(e)}(x)
$$

yazabiliriz. Bu ise bize,

$$\varphi_\psi(f_1) \sqsubseteq \varphi_\psi(f_2)$$

olduğunu gösterir.

ii. $f \sqsubseteq \varphi_{\psi^{-1}}\big(\varphi_\psi(f)\big)$ kapsamasını göstermek ile her $e \in E$ için

$$f(e) \subseteq \Big(\varphi_{\psi^{-1}}\big(\varphi_\psi(f)\big)(e)\Big)$$

kapsamasını göstermek eşdeğerdir. Dolayısıyla her $e \in E$ ve her $x \in X$ için

$$\mu_{f(e)}(x) \leq \mu_{\varphi^{-1}(\varphi(f))(e)}(x)$$

olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}
\mu_{\varphi^{-1}(\varphi(f)(e))}(x) &= \mu_{\varphi(f))(e))}(x) \\
&= \begin{cases} \bigvee_{\substack{e\in\psi^{-1}(\psi(e)) \\ x\in\varphi^{-1}(\varphi(x))}} \mu_{f(e)}(x), & \varphi^{-1}(\varphi(x)) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \emptyset \end{cases}
\end{aligned}$$

eşitliğinden istenen elde edilmiş olur. Dolyısıyla

$$f \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f))$$

bulunur. φ ve ψ fonksiyonları ve birebir ise yani; φ_ψ *be* fonksiyonunun *be* birer ise aşitlik sağlanmaktadır.

iii. $k \in K$ ve $y \in Y$ için

$$\begin{aligned}
\mu_{(\varphi(f_1\sqcup f_2))(k)}(y) &= \begin{cases} \bigvee_{\substack{e\in\psi^{-1}(\psi(e)) \\ x\in\varphi^{-1}(\varphi(x))}} \mu_{(f_1\sqcup f_2)(e)}(x), & \varphi^{-1}(\varphi(x)) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \emptyset \end{cases} \\
&= \begin{cases} \bigvee_{\substack{e\in\psi^{-1}(\psi(e)) \\ x\in\varphi^{-1}(\varphi(x))}} \{\mu_{(f_1(e)} \vee \mu_{(f_2(e)}\}(x), & \varphi^{-1}(\varphi(x)) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \emptyset \end{cases}
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \bigvee_{\substack{e\in\psi^{-1}(\psi(e))\\ x\in\varphi^{-1}(\varphi(x))}} \mu_{(f_1(e)}(x), & \varphi^{-1}(\varphi(x)) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \emptyset \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} \bigvee_{\substack{e\in\psi^{-1}(\psi(e))\\ x\in\varphi^{-1}(\varphi(x))}} \mu_{(f_2(e)}(x), & \varphi^{-1}(\varphi(x)) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \emptyset \end{cases}$$

elde edilir.

iv. $(f_1 \sqcap f_2) \sqsubseteq f_1$ ve $(f_1 \sqcap f_2) \sqsubseteq f_2$ kapsamalarından ve *i.* ile

$$\varphi_\psi(f_1 \sqcap f_2) \sqsubseteq f_1 \text{ ve } \varphi_\psi(f_1 \sqcap f_2) \sqsubseteq f_2$$

bulunur. Buradan da

$$\varphi_\psi(f_1 \sqcap f_2) \sqsubseteq \varphi_\psi(f_1) \sqcap \varphi_\psi(f_2)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2 $g, g_1, g_2 \in \mathbb{FS}_K^Y$ ve $\varphi_\psi : \mathbb{FS}_E^X \to \mathbb{FS}_K^Y$ bir *be*–fonksiyon olsun.

i. $\varphi_\psi(\varphi^{-1}(g)) \sqsubseteq g$ (Eşitlik ancak ve ancak fonksiyon *be*–sürekli olduğunda sağlanır.)

ii. $\varphi_\psi^{-1}(g_1 \sqcup g_2) = \varphi_{\psi^{-1}}(g_1) \sqcup \varphi_{\psi^{-1}}(g_2)$

iii. $\varphi_\psi^{-1}(g_1 \sqcap g_2) = \varphi_{\psi^{-1}}(g_1) \sqcap \varphi_{\psi^{-1}}(g_2)$

iv. $\varphi_\psi^{-1}(g^{\tilde{c}}) = \left(\varphi_\psi^{-1}(g)\right)^{\tilde{c}}$

İspat.

i. $\varphi_\psi(\varphi_\psi^{-1}(g)) \sqsubseteq g$ kapsamasının sağlanması her $k \in K$ için $\varphi_\psi(\varphi_\psi^{-1}(g))(k) \sqsubseteq g(k)$ kapsamasına eş değerdir.

$$\begin{aligned} \mu_{(\varphi(\varphi^{-1})(g))(k)}(y) &= \begin{cases} \bigvee_{\substack{e\in\psi^{-1}(\psi(e))\\ x\in\varphi^{-1}(\varphi(x))}} \{\mu_{(f_1(e)} \vee \mu_{(f_2(e)}\}(x), & \varphi^{-1}(\varphi(x)) \neq \emptyset \\ 0, & \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \emptyset \end{cases} \\ &\leq \mu_{g(k)}(y) \end{aligned}$$

ii. $\varphi^{-1}(g_1 \sqcup g_2) = \varphi^{-1}(g_1) \sqcup \varphi^{-1}(g_2)$ olması için, $e \in E$ olmak üzere

$$\varphi^{-1}(g_1 \sqcup g_2)(e) = (\varphi^{-1}(g_1) \sqcup \varphi^{-1}(g_2))(e)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Buradan her $e \in E$ ve her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} \mu_{\varphi^{-1}(g_1 \sqcup g_2)(e)}(x) &= \mu_{(g_1 \sqcup g_2)(\psi(e))}(\varphi(x)) \\ &= \mu_{g_1(\psi(e))}(\varphi(x)) \vee \mu_{g_2(\psi(e))}(\varphi(x)) \\ &= \mu_{\varphi^{-1}(g_1)(e)}(x) \vee \mu_{\varphi^{-1}(g_2)(e)}(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

iii. $\varphi^{-1}(g_1 \sqcup g_2) = \varphi^{-1}(g_1) \sqcup \varphi^{-1}(g_2)$ olması için, $e \in E$ olmak üzere

$$\varphi^{-1}(g_1 \sqcap g_2)(e) = (\varphi^{-1}(g_1) \sqcap \varphi^{-1}(g_2))(e)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Buradan her $e \in E$ $x \in X$ için

$$\begin{aligned} \mu_{\varphi^{-1}(g_1 \sqcap g_2)(e)}(x) &= \mu_{(g_1 \sqcap g_2)(\psi(e))}(\varphi(x)) \\ &= \mu_{g_1(\psi(e))}(\varphi(x)) \wedge \mu_{g_2(\psi(e))}(\varphi(x)) \\ &= \mu_{\varphi^{-1}(g_1)(e)}(x) \wedge \mu_{\varphi^{-1}(g_2)(e)}(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

iv. Herhangi bir $e \in E$ için $(\varphi_{\psi}^{-1}(g^{\tilde{c}}))(e) = (\varphi_{\psi}^{-1}(g))^{\tilde{c}}(e)$ olduğu gösterilmelidir. Buradan her $e \in E$ ve her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} \mu_{\varphi^{-1}(g^{\tilde{c}})(e)}(x) &= \mu_{g^{\tilde{c}}(\psi(e))}(\varphi(x)) \\ &= \mu_{\varphi^{-1}(g)^{\tilde{c}}(e)}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 3.2.2 $f \in \mathbb{FS}_E^X$ verilsin. Bir $e \in E$ için $f(e) \neq \overline{0}$ ve her $e' \in E \setminus \{e\}$ için $f(e') = \overline{0}$ ise f *be*–kümesine bulanık esnek nokta (*be*–nokta) denir ve e_f ile gösterilir.

Tanım 3.2.3 e_f bir *se*–nokta ve $g \in \mathbb{FS}_E^X$ olsun. Eğer $f(e) \subseteq g(e)$ ise e_f *be*–noktasına g *be*–kümesine aittir denir ve $e_f \tilde{\in} g$ ile gösterilir.

Örnek 3.2.2 $E = \{a, b, c, d\}$ ve $X = \{x, y, z\}$ olsun.

$$\begin{aligned} f(a) &= \Big\{\big(a, \{(x, 0.8), (y, 0.5), (z, 0.6)\}\big)\Big\} \\ f(b) &= \Big\{\big(c, \{(x, 0.7), (y, 0.4), (z, 0.3)\}\big)\Big\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanıyor.

$$a_g = \Big\{\big(a, (x, 0.5), (y, 0.4), (z, 0.5)\big)\Big\}$$

bir *be*–noktadır ve $a_g \tilde{\in} f$ dir.

Teorem 3.2.3 Her *be*–küme, tüm *be*–noktalarının bir birleşimi olarak yazılır.

İspat. $f \in \mathbb{FS}_E^X$ ve $\{e_{g_k} : k \in \Lambda\}$ ailesi, f'nin tüm *be*–noktalarının kümesi olsun. Bu durumda, her $e_i \in E$ için

$$f(e_i) = \bigcup_{k \in \Lambda} G_k(e_i)$$

olur. Buradan,

$$f = \big\{(e_i, f(e_i)) : e_i \in E\big\}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.4 [19] $f, g \in \mathbb{FS}_E^X$ olsun. $f \sqsubseteq g$ ancak ve ancak her $e_h \tilde{\in} f$ için $e_h \tilde{\in} g$ olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: $f \sqsubseteq g$ olsun. Bu durumda here$\in E$ için $f(e) \sqsubseteq g(e)$ olur. Eğer; $e_h \tilde{\in} f$ ise $f \sqsubseteq g$ 'dir. Çünkü

$$h(e) \sqsubseteq g(e) \sqsubseteq g(e)$$

buradan, $h(e) \sqsubseteq g(e)$ olup; böylece $e_h \tilde{\in} g$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$: Eğer, her $e_h \tilde{\in} f$ olması durumunda $e_h \tilde{\in} g$ oluyorsa, her bulanık esnek küme bulanık esnek noktaların bir birleşimi olarak yazılabileceğinden

$$\bigsqcup_{e_h \tilde{\in} f} e_h = f$$

buradan

$$\bigsqcup_{e_h \tilde{\in} f} e_h \sqsubseteq g$$

olur. Böylece $f \sqsubseteq g$ elde edilir.

4. BULANIK ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

4.1 Bulanık Esnek Topoloji

Tanım 4.1.1 $\tau \subseteq \mathbb{FS}_E^X$ küme ailesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu aileye X üzerinde bir bulanık esnek topoloji (be–topoloji) denir.

i. $\tilde{0}_E, \tilde{1}_E \in \tau$

ii. Herhangi $f, g \in \tau$ için $f \sqcap g \in \tau$

iii. Herhangi bir $\{f_i : i \in I\} \subseteq \tau$ için $\bigsqcup_{i \in I} f_i \in \tau$

Eğer τ, X üzerinde bir be–topoloji ise (X, τ, E) üçlüsüne X üzerinde sezgisel bulanık esnek topolojik uzay (be topolojik uzay) denir. τ 'nun her bir elemanına be–açık küme denir. Eğer, $f^c \in \tau$ ise bu durumda f kümesine X üzerinde be–kapalı küme denir. (X, τ, E) be–topolojik uzayındaki tüm be–kapalı kümeleri $\kappa_\tau = \{f : f^c \in \tau\}$ ile gösterilir.

Örnek 4.1.1 $\tau^1 = \mathbb{FS}_E^X$ ve $\tau^0 = \{\tilde{0}_E, \tilde{1}_E\}$ olmak üzere (X, τ^1, E) ve (X, τ^0, E) sbe–topolojik uzaydır. Bu iki be–topolojik uzay üzerindeki tüm be–açık kümeler aynı zamanda be–kapalı kümelerdir.

Tanım 4.1.2 (X, τ, E) be–topolojik uzay ve $f \in \mathbb{FS}_E^X$ olsun. Bu durumda f 'nin be–içi f° ile gösterilir ve

$$f^\circ = \bigsqcup_{\substack{g \in \tau \\ g \sqsubseteq f}} g$$

şekilde tanımlanır.

Tanım 4.1.3 (X, τ, E) be–topolojik uzay ve $f \in \mathbb{FS}_E^X$ olsun. Bu durumda f 'nin be–kapanışı $\overline{f}$ ile gösterilir ve

$$\overline{f} = \bigsqcap_{\substack{h^{\tilde{c}} \in \tau \\ f \sqsubseteq h}} h$$

şekilde tanımlanır.

Teorem 4.1.1 (X,τ,E), X üzerinde *be*–topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i. $\tilde{1}_E$ ve $\tilde{0}_E$, X üzerinde *be*–kapalı kümedir.

ii. Herhangi sayıdaki *be*–kapalı kümenin kesişimi, X üzerinde yine *be*–kapalı kümedir.

iii. Herhangi iki *be*–kapalı kümenin kesişimi, X üzerinde yine *be*–kapalı kümedir.

Teorem 4.1.2 (X,τ,E), X üzerinde *be*–topolojik uzay ve $f \in \mathbb{FS}_E^X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $f^\circ \sqsubseteq f$

ii. $f \sqsubseteq g$ ise $f^\circ \sqsubseteq g^\circ$

iii. $f^\circ \in \tau$

iv. f *be*–açık kümedir ancak ve ancak $f^\circ = f$

v. $(f^\circ)^\circ = f^\circ$

vi. $(\tilde{0}_E)^\circ = \tilde{0}_E$ ve $(\tilde{1}_E)^\circ = \tilde{1}_E$'dır.

İspat.

i. $f \in \mathbb{FS}_E^X$ için, f 'nin *be*–içi

$$f^\circ = \bigsqcup_{\substack{g\in\tau \\ g\sqsubseteq f}} g$$

olduğundan; $f^\circ \sqsubseteq f$ elde edilir.

ii. $f \sqsubseteq g$ ve $f^\circ \sqsubseteq f$ olduğundan $f^\circ \sqsubseteq g$ dir. *i.*'den $g^\circ \sqsubseteq g$ ve g'nin kapsadığı en geniş açık küme g'nin *be*–içi olduğundan

$$f^\circ \sqsubseteq g^\circ \sqsubseteq g$$

elde edilir.

iii. f *be*–kümesinin *be*–içi tanımı gereğince

$$f^{\circ} = \bigsqcup_{\substack{g \in \tau \\ g \sqsubseteq f}} g$$

olup $f^{\circ} \in \tau$ elde edilir.

iv. f *be*–açık olsun. *i.* 'den $f^{\circ} \sqsubseteq f$ dir. Diğer taraftan f *be*–açık olduğundan $f \sqsubseteq f$ ve f *be*–açık kümesinin kapsadığı en geniş açık küme f° olup

$$f \sqsubseteq f^{\circ} \sqsubseteq f$$

dir. Buradan

$$f^{\circ} \sqsubseteq f \text{ ve } f \sqsubseteq f^{\circ}$$

olduğundan $f = f^{\circ}$ elde edilir.
Tersine olarak $f = f^{\circ}$ olsun. f° açık olduğundan f açıktır.

v. $g = f^{\circ}$ olsun. *iii.* ve *iv.* 'den $g = g^{\circ}$ olur. Böylece,

$$g = g^{\circ} = (f^{\circ})^{\circ} = f^{\circ} = g$$

elde edilmiş olur.

vi. $\tilde{0}_E$ ve $\tilde{1}_E$ *be*–açık kümeler olduğundan *iv.* 'den dolayı,

$$(\tilde{0}_E)^{\circ} = \tilde{0}_E \;\; ve \;\; (\tilde{1}_E)^{\circ} = \tilde{1}_E$$

elde edilir.

Teorem 4.1.3 (X, τ, E), X üzerinde *be*–topolojik uzay ve $f, g \in \mathbb{FS}_E^X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $f \sqsubseteq \overline{f}$

ii. $f \sqsubseteq g$ ise $\overline{f} \sqsubseteq \overline{g}$

iii. $(\overline{f})^c \in \tau$

iv. f *be*–kapalı kümedir ancak ve ancak $\overline{f} = f$

v. $\overline{\overline{f}} = \overline{f}$

vi. $\overline{\tilde{0}}_E = \tilde{0}_E$ ve $\overline{\tilde{1}}_E = \tilde{1}_E$'dır.

İspat.

i. *be*–topolojik uzaylarda kapanış işlemi dikkate alındığında;

$$f \sqsubseteq \overline{f}$$

olduğu açıktır.

ii. $f, g \in \mathbb{FS}_E^X$ ve $f \sqsubseteq g$ olsun. *i.*'den

$$g \sqsubseteq \overline{g}$$

elde edilir. O halde; $f \sqsubseteq \overline{g}$ olur. Ayrıca, *be*–kapanış tanımından f'yi kapsayan en küçük *be*–kapalı küme $\overline{f}$ olduğundan;

$$f \sqsubseteq \overline{f} \sqsubseteq g$$

ve buradan

$$\overline{f} \sqsubseteq \overline{g}$$

elde edilir.

iii. Teorem 4.1.3 *iii.* gereğince $(f^c)^\circ \in \tau$ olur. Buradan, *be*–kapanış, *be*–iç tanımları dikkate alınırsa

$$(\overline{f})^c = (\bigsqcap_{\substack{h^{\tilde{c}} \in \tau \\ f \sqsubseteq h}} h)^c = \bigsqcup_{\substack{g \in \tau \\ g \sqsubseteq f}} h^c = \overline{f^c}$$

olup, $(\overline{f^c}) \in \tau$ elde edilir.

iv. f kapalı olsun. *i.*'den dolayı $f \sqsubseteq \overline{f}$ 'dir. $f \in \tau^c$ ve $f \sqsubseteq f$ olmasından;

$$\overline{f} = \bigsqcap_{\substack{h^{\tilde{c}} \in \tau \\ f \sqsubseteq h}} h \sqsubseteq f$$

olup, $\overline{f} \sqsubseteq f$ elde edilir. Bu ise, $f = \overline{f}$ demektir. Diğer taraftan, $\overline{f} = f$ olsun. Bu durumda *iii.* 'den dolayı f *be*–kapalı kümedir.

v. $g = \overline{f}$ alalım. $\overline{f}$ *be*–kapalı olduğundan g *be*–kapalı ve *iv.*'den dolayı,

$$\overline{g} = g = \overline{\overline{f}} = \overline{f}$$

olduğundan $\overline{f} = \overline{\overline{f}}$ elde edilir.

vi. $\tilde{0}_E$ ve $\tilde{1}_E$ *be*–kapalı kümeler olduğundan *iv.*'den dolayı,

$$\overline{\tilde{0}}_E = \tilde{0}_E \;\; ve \;\; \overline{\tilde{1}}_E = \tilde{1}_E$$

elde edilir.

Teorem 4.1.4 (X, τ, E), X üzerinde *be*–topolojik uzay ve $f, g \in \mathbb{FS}_E^X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $f^\circ \sqcap g^\circ = (f \sqcap g)^\circ$

ii. $f^\circ \sqcup g^\circ \sqsubseteq (f \sqcup g)^\circ$

iii. $\overline{f} \sqcap \overline{g} = \overline{f \sqcap g}$

iv. $\overline{f} \sqcup \overline{g} = \overline{f \sqcup g}$

v. $(f^\circ)^{\tilde{c}} = (\overline{f})^{\tilde{c}}$

vi. $(\overline{f})^{\tilde{c}} = (f^\circ)^{\tilde{c}}$

İspat.

i. $f \sqcap g \sqsubseteq f$ ve "$f \sqsubseteq g$ ise $f^\circ \sqsubseteq g^\circ$" olduğundan,

$$(f \sqcap g)^\circ \sqsubseteq f \;\; ve \;\; (f \sqcap g)^\circ \sqsubseteq g \;\text{ olur.}$$

$f^\circ \sqsubseteq f$ olduğundan

$$f^\circ \sqsubseteq f \;\; ve \;\; g^\circ \sqsubseteq g \;\text{ olur.}$$

Buradan haraketle,

$$f^\circ \sqcap g^\circ \sqsubseteq (f \sqcap g) \;\text{ için }\; f^\circ \sqcap g^\circ \sqsubseteq (f \sqcap g)^\circ$$

elde edilmiş olur. Sonuç olarak,

$$f^\circ \sqcap g^\circ \sqsubseteq (f \sqcap g)^\circ \;\text{ ve }\; (f \sqcap g)^\circ \sqsubseteq f^\circ \sqcap g^\circ$$

olduğundan, $f^\circ \sqcap g^\circ = (f \sqcap g)^\circ$ elde edilir.

ii. $f \sqsubseteq f \sqcup g$ ve $g \sqsubseteq f \sqcup g$ olup "$f \sqsubseteq g$ ise $f^\circ \sqsubseteq g^\circ$" gereğince, $f^\circ \sqsubseteq f \sqcup g$ ve $g^\circ \sqsubseteq f \sqcup g$ olur. Buradan,

$$f^\circ \sqcup g^\circ \sqsubseteq f \sqcup g$$

elde edilir. $(f \sqcup g)^\circ$ *be*–kümesi $f \sqcup g$ *be*–kümesinin kapsadığı en geniş *sbe*–küme olduğundan,

$$f^\circ \sqcup g^\circ \sqsubseteq (f \sqcup g)^\circ \sqsubseteq f \sqcup g$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

iii. $f \sqcap g \sqsubseteq f$ ve $f \sqcap g \sqsubseteq g$ den Teorem 4.1.3 *ii.* ile

$$\overline{f \sqcap g} \sqsubseteq \overline{f} \text{ ve } \overline{f \sqcap g} \sqsubseteq \overline{g}$$

olur. Buradan

$$\overline{f \sqcap g} \sqsubseteq \overline{f} \sqcap \overline{g}$$

elde edilir.

iv. $\overline{f} \sqsubseteq \overline{g \sqcup f}$ ve $\overline{g} \sqsubseteq \overline{g \sqcup f}$ den Teorem 4.1.3 *ii.* ile

$$\overline{f} \sqsubseteq \overline{f \sqcup g} \text{ ve } \overline{g} \sqsubseteq \overline{f \sqcup g}$$

bulunur. Buradan

$$\overline{f \sqcup g} \sqsubseteq \overline{f} \sqcup \overline{g}$$

elde edilir. $f \sqsubseteq \overline{f}$ ve $g \sqsubseteq \overline{g}$ den

$$\overline{f \sqcup g} \sqsubseteq \overline{f} \sqcup \overline{g}$$

bulunur. $\overline{f \sqcup g} = \overline{f} \sqcup \overline{g}$ elde edilir.

v. $f \in \mathbb{FS}_E^X$'in içi

$$f^\circ = \bigsqcup_{i \in I} g_i$$

olsun. Burada her $i \in I$ için $g_i \in \tau$ ve $g_i \sqsubseteq f$'dir. Her iki tarafın *be*-tümleyeni alınırsa

$$(f^\circ)^{\tilde{c}} = \left(\bigsqcup_{i \in I} g_i \right)^{\tilde{c}} = \left(\bigsqcap_{i \in I} g_i^{\tilde{c}} \right)$$

olur.

$$f^{\tilde{c}} \sqsubseteq g_i^{\tilde{c}} \text{ ve } g_i^c \in \kappa_\tau$$

olduğundan

$$\left(\prod_{i \in I} g_i^{\tilde{c}}\right) = \overline{(f^{\tilde{c}})}$$

elde edilir.

vi. v'de f yerine $f^{\tilde{c}}$ alınırsa

$$\left[(f^{\tilde{c}})^\circ\right]^{\tilde{c}} = \overline{(f^{\tilde{c}})^{\tilde{c}}} = \overline{f}$$

bulunur. Böylece

$$(f^{\tilde{c}})^\circ = (\overline{f})^{\tilde{c}}$$

elde edilir.

Örnek 4.1.2 [19] $\tau = \mathbb{FS}_E^X$ olmak üzere (X, τ, E) *be*–topolojik uzayını ele alalım. Açıkca görülür ki her f *be*–kümesi aynı zamanda hem *be*–açık küme hem de *be*–kapalı kümedir. Dolayısıyla, $f^\circ = \overline{f} = f$ dır.

Teorem 4.1.5 (X, τ, E) bir *be*–topolojik uzay olsun. $f \in \mathbb{FS}_E^X$ bir *be*–açık kümedir ancak ve ancak f nin tüm *be*–noktalarının, be-komşuluğu olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: İspatı açıktır.

$(\Leftarrow)$: f *be*–küme ve $\{e_{h_i} : i \in I\}$ ailesi f nın tüm be-alt kümelerinin ailesi olsun. Bu durumda her $i \in I$ için öyle bir g_i *be*–açık kümesi vardır ki;

$$e_{h_i} \tilde{\in} g_i \sqsubseteq f$$

böylece Teorem 3.2.4'den

$$e_{h_i} \sqsubseteq g_i \sqsubseteq f$$

olur. Dolayısıyla

$$\bigsqcup_{i \in I} h_i = f \sqsubseteq \bigsqcup_{i \in I} g_i \sqsubseteq f$$

bulunur. Buradan da

$$\bigsqcup_{i \in I} g_i = f$$

elde edilir.

4.2 Bulanık Esnek Sürekli Fonksiyonlar

Tanım 4.2.1 (X, τ, E) ve (Y, σ, K) sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde tanımlı be–topolojik uzaylar olsun. Ayrıca; $\varphi_\psi : \mathbb{FS}_E^X \to \mathbb{FS}_K^Y$ bir be–fonksiyon olsun. Her $g \in \sigma$ için $\varphi_\psi^{-1}(g) \in \tau$ ise φ_ψ be–fonksiyonuna bulanık esnek sürekli fonksiyon (be–sürekli fonksiyon) denir.

Örnek 4.2.1 $\tau = \mathbb{FS}_E^X$ alırsak, her $\varphi_\psi : (X, \tau, E) \to (Y, \sigma, K)$ be–fonksiyonunun be–sürekli fonksiyon olduğu görülür.

Teorem 4.2.1 $f : (X, \tau, E) \to (Y, \sigma, K)$ be–süreklidir ancak ve ancak her g $\mathbb{FS}_K^Y$ için $\varphi_{\psi^{-1}}(g) \sqsubseteq (\varphi_\psi^{-1}(g))^\circ$ olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: φ_ψ be–sürekli olsun. Teorem 4.1.2 *i.* den

$$g^\circ \sqsubseteq g \quad \text{ve} \quad \varphi_\psi^{-1}(g^\circ) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(g)$$

bulunur. φ_ψ be–sürekli olduğundan $\varphi_\psi(g^\circ) \in \tau$'dur. Buradan Teorem 4.1.2 *v.* den

$$\varphi_\psi(g^\circ)^\circ = \varphi_\psi^{-1}(g^\circ) \sqsubseteq (\varphi_\psi^{-1}(g))^\circ$$

olur. Bu da istenendir.

$(\Leftarrow)$: Her $g \in \mathbb{FS}_K^Y$ için $\varphi_\psi^{-1}(g^\circ) \sqsubseteq (\varphi_\psi^{-1}(g))^\circ$ olsun. Herhangi bir $h \in \sigma$ verilsin. Yeter şart ifadesinden ve Teorem 4.1.2 *iv.* den

$$\varphi_\psi^{-1}(h^\circ) = (\varphi_\psi^{-1}(h)) \sqsubseteq (\varphi_\psi^{-1}(h))^\circ$$

elde edilir. Bu da $\varphi_\psi^{-1}(h) \in \tau$ anlamına gelir. O halde φ_ψ fonksiyonu be–süreklidir.

5. BULANIK ESNEK BAĞLANTILI TOPOLOJİK UZAYLAR

5.1 Bulanık Esnek Bağlantılı Kümeler

Tanım 5.1.1 (X, τ, E) *be*–topolojik uzay ve $f \in \mathbb{FS}$ olsun. $f \sqsubseteq g \sqcup h$ ve $g \sqcap h = \tilde{0}_E$ olacak şekilde boştan farklı $g, h \in \tau$ varsa f'ye *be*–bağlantısız küme denir. Bu tanımda f yerine $\tilde{1}_E$ alınırsa, (X, τ, E) *be*–topolojik uzayına *be*–bağlantısız topolojik uzay denir. Bu koşulu sağlayan $g, h \in \tau$ yoksa, (X, τ, E)'ye *be*-bağlantılı uzay denir.

Örnek 5.1.1 $\tau = \{\tilde{1}_E, \tilde{0}_E\}$ ve $\sigma = \mathbb{FS}_E^X$ olmak üzere (X, τ, E) *be*–bağlantılıdır. Buna karşın, (X, τ, E) *be*–bağlantısızdır.

Teorem 5.1.1 (X, τ, E) bir *be*–topolojik uzay olsun. (X, τ, E) *be*–bağlantılıdır ancak ve ancak bu uzayda hem *be*–açık hem de *be*–kapalı bir küme yoktur.

İspat. $(\Rightarrow)$: (X, τ, E) *be*–bağlantılı olsun. Bu uzayda hem açık hem de kapalı bir f sbe-kümesinin var olduğunu kabul edelim. Bu takdirde,

$$f \sqcup f^{\tilde{c}} = \tilde{1}_E \text{ ve } f \sqcap f^{\tilde{c}} = \tilde{0}_E$$

olur. f *sbe*–-kapalı olduğundan $f^{\tilde{c}} \in \tau$ 'dur. Bu durum, (X, τ, E) 'nin *be*–bağlantılı olmasıyla çelişir.
$(\Leftarrow)$: (X, τ, E) topolojik uzayında hem açık hem de kapalı küme var olmasın. Buna karşın, (X, τ, E) *be*–bağlantısız olsun. Bu durumda,

$$f \sqcup g = \tilde{1}_E \text{ ve } f \sqcap g = \tilde{0}_E$$

olacak şekilde $f, g \in \tau$ vardır. Bu iki eşitlikten, $f^{\tilde{c}} = g$ alınırsa, hipotezle çelişen bir durum ortaya çıkar. Dolayısıyla (X, τ, E) *be*–bağlantılıdır.

Teorem 5.1.2 (X, τ, E) bir *be*–bağlantılı topolojik uzay ve $\sigma \subseteq \tau$ olsun. Bu takdirde, (X, τ, E) de bir *be*–bağlantılı topolojik uzaydır.

İspat. (X,τ,E) *be*–bağlantılı uzay olduğundan $f \sqcup g = \tilde{1}_E$ ve $f \sqcap g = \tilde{0}_E$ olacak şekilde $f, g \in \tau$ bulunamaz. $\sigma \subseteq \tau$ olduğundan bu iki koşulu sağlayan *sbe*–-açık kümeler σ ailesinde de yoktur. Dolayısıyla (X,τ,E) de bir *be*–bağlantılı topolojik uzaydır.

Teorem 5.1.3 (X,τ,E) ve (Y,σ,K) iki *be*–topolojik uzay olsun. $f \in \mathbb{FS}_E^X$ ve $\varphi_\psi : (X,\tau,E) \to (Y,\sigma,K)$ bir *be*–sürekli fonksiyon olmak üzere, f *be*–bağlantılı ise $\varphi_\psi(f) \in \mathbb{FS}_K^Y$ de *be*–bağlantılıdır.

İspat. $f \in \mathbb{FS}_E^X$ *be*–bağlantılı olsun. $\varphi_\psi(f)$'nin *be*–bağlantısız olduğunu varsayalım. Bu takdirde,

$$\varphi_\psi(f) \sqsubseteq g \sqcup h \text{ ve } g \sqcap h = \tilde{0}_K$$

olacak şekilde $g, h \in \tau$ vardır. Buradan Teorem 3.2.1 *i.* ve Teorem 3.2.2 *ii.-iii.*'den

$$f \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f)) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(g \cup h) = \varphi_\psi^{-1}(g) \sqcup \varphi_\psi^{-1}(h)$$

ve

$$\varphi_\psi^{-1}(g \sqcap h) = \varphi_\psi^{-1}(g) \sqcap \varphi_\psi^{-1}(h) = \tilde{0}_E$$

elde edilir. φ_ψ *be*–sürekli olduğundan $\varphi_\psi^{-1}(g), \varphi_\psi^{-1}(h) \in \tau$'dur. Dolayısıyla bu durum f'nin *be*–bağlantılı olmasıyla çelişir.

Sonuç 5.1.1 Teorem 5.1.3 f yerine $\tilde{1}_E$ alırsak, φ_f'yi *be*–örten alırsak (X,τ,E) *be*– bağlantılı ise (Y,σ,K)'da *be*–bağlantılıdır.

Uyarı 5.1.1 *be*–bağlantılı bir *be*–kümenin bir *be*–fonksiyon altındaki ters görüntüsünün *be*–bağlantılı olması gerekmez. Aşağıdaki örnek bu durumu resmetmektedir.

Örnek 5.1.2 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $K = \{k_1, k_2, k_3\}$ olsun.

$$\varphi : X \to Y \text{ ve } \psi : E \to K$$

fonksiyonları

$$\varphi(x_1) = y \quad \psi(e_1) = k_1$$

$$\varphi(x_2) = y \quad \psi(e_2) = k_2$$

$$\varphi(x_3) = y \quad \psi(e_3) = k_3$$

şeklinde tanımlansın. $\sigma = \{\tilde{1}_E, \tilde{0}_E\}$ ve $\tau = \mathbb{FS}_E^X$ olmak üzere $\varphi_\psi = (X, \tau, E) \to (Y, \sigma, E)$ *be*–süreklidir. Buna karşın, (Y, σ, E), *be*–bağlantılıdır ama (X, τ, E) *be*–bağlantılı değildir.

Tanım 5.1.2 (X, τ, E) bir *be*–topolojik uzay ve $f, g \in \mathbb{FS}_E^X$ olsun.

$$\overline{f} \sqcap g = \tilde{0}_E \text{ ve } f \sqcap \overline{g} = \tilde{0}_E$$

ise, f ve g *be*–kümelerine *be*–ayrılmış kümeler denir ve $f \mid g$ şeklinde gösterilir.

Örnek 5.1.3 (X, τ^1, E) bir *be*–topolojik uzayında her $f \in \mathbb{FS}_E^X$ için $f \mid f^{\tilde{c}}$ 'dir.

Teorem 5.1.4 (X, τ, E) bir *be*–topolojik uzay ve $f, g \in \tau$ olsun. $f \sqcap g = \tilde{0}_E$ ise $f \mid g$ 'dir.

İspat. $f, g \in \tau$ için $f \sqcap g = \tilde{0}_E$ olduğunu kabul edelim. Eşitliğin her iki yanına *be*–tümleyen işlemi uygulanırsa Teorem 3.1.1 *v.* ve *x.*'dan

$$f^{\tilde{c}} \sqcup g^{\tilde{c}} = \tilde{1}_E$$

elde edilir. $f \sqsubseteq g^{\tilde{c}}$ ve $g \sqsubseteq f^{\tilde{c}}$ kapsamaları, $g^{\tilde{c}}, f^{\tilde{c}} \in \kappa(\tau)$ ile dikkate alınırsa,

$$\overline{f} \sqsubseteq \overline{g^{\tilde{c}}} = g^{\tilde{c}} \text{ ve } \overline{g} \sqsubseteq \overline{f^{\tilde{c}}} = f^{\tilde{c}}$$

bulunur. Dolayısıyla $\overline{f} \sqcap g = \tilde{0}$ ve $f \sqcap \overline{g} = \tilde{0}_E$ elde edilir.

Teorem 5.1.5 (X, τ, E) bir *be*–topolojik uzay ve $f, g \in \kappa(\tau)$ olsun. $f \sqcap g = \tilde{0}$ ise $f \mid g$ 'dir.

İspat. $f, g \in \kappa(\tau)$ olsun. Teorem 4.1.3'den $\overline{f} = f$ ve $\overline{g} = g$ 'dir. Buradan,

$$f \sqcap g = \overline{f} \sqcap g = \tilde{0}_E \text{ ve } f \sqcap g = f \sqcap \overline{g} = \tilde{0}_E$$

elde edilir. Bu ise $f \mid g$ demektir.

Teorem 5.1.6 (X, τ, E) bir *be*–topolojik uzay ve $f \in \mathbb{FS}_E^X$ olsun. f *be*–bağlantılıdır ancak ve ancak f ayrılmış iki kümenin birleşimi şeklinde yazılamaz.

İspat. $(\Rightarrow)$: $f = \tilde{0}_E$ ise durum aşikardır. O halde $f \neq \tilde{0}_E$ olsun. f *be*–bağlantılı ve $g \,|\, h$ kümeleri $f \sqsubseteq g \sqcup h$ koşulunu sağlasın.

$$g \sqcap h \sqsubseteq g \sqcap \overline{h} = \tilde{0}_E \;\text{ ve }\; g \sqcap h \sqsubseteq \overline{g} \sqcap h = \tilde{0}_E$$

kapsamalarından f'nin bağlantısız olduğu sonucu elde edilir. Bu durum hipotezle çelişece- ğinden f, iki ayrık *be*–kümenin birleşimi olarak yazılamaz.

$(\Leftarrow)$: f ayrılmış iki kümenin birleşimi şeklinde yazılamasın ama bağlantısız olsun. Bu takdirde,

$$f \sqsubseteq g \sqcup h, \;\text{ ve }\; g \sqcap h = \tilde{0}_E$$

olacak şekilde $g, h \in \tau$ vardır. Bir *be*–kapalı kümenin kapanışı kendisi olduğundan

$$g \sqcap \overline{h} = \overline{g} \sqcap h = \tilde{0}_E$$

elde edilir. Bu durum kabulümüzle çelişir.

Teorem 5.1.7 (X, τ, E) bir *be*–topolojik uzay olsun. (X, τ, E) *be*–bağlantılıdır ancak ve ancak $\tilde{1}_E$, iki *be*–ayrılmış kümenin birleşimi olarak yazılamaz.

İspat. $(\Rightarrow)$: $\tilde{1}_E = f \sqcup g$ ve $f \,|\, g$ olsun. Buradan

$$\overline{f} \sqcap g = \tilde{0}_E \;\text{ ve }\; f \sqcap \overline{g} = \tilde{0}_E$$

'dir. Dolayısıyla

$$f \sqcap g = \overline{0}_E, f = g^{\tilde{c}} \;\text{ ve }\; g = f^{\tilde{c}}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\overline{f} &= \overline{f} \sqcap \tilde{1}_E \\
&= \overline{f} \sqcap (f \sqcup g) \\
&= (\overline{f} \sqcap f) \sqcup (\overline{f} \sqcap g) \\
&= f
\end{aligned}$$

elde edilir. Şu halde $f \in \kappa(\tau)$ dur. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}
\overline{g} &= \overline{g} \sqcap \tilde{1}_E \\
&= \overline{g} \sqcap (f \sqcup g) \\
&= (\overline{g} \sqcap f) \sqcup (\overline{g} \sqcap g) \\
&= g
\end{aligned}$$

ve $g \in \kappa(\tau)$ elde edilir. $f = g^{\tilde{c}}$ ve $g = f^{\tilde{c}}$ eşitliklerinden $f, g \in \tau$ elde edilir. Bu ise (X, τ, E) 'nin *be*–bağlantılı olmasıyla çelişir.

$(\Leftarrow)$: $\tilde{1}_E$ iki *be*–ayrılmış kümenin birleşimi olarak yazılamasın. (X, τ, E)'nin *be*–bağlantı- sız olduğunu varsayalım. Teorem 5.1.1'den bu uzayda hem *be*–açık hem de *be*–kapalı bir *be*–küme vardır. Bu ise hipotezle çelişir. O halde (X, τ, E) *be*–bağlantılıdır.

5.2 FSC_i-Bağlantılılık

Tanım 5.2.1 (X, τ, E) bir *be*–topolojik uzay ve $f \in \mathbb{FS}_E^X$ olsun.

i. $f \sqsubseteq g \sqcup h$, $g \sqcap h \sqsubseteq f^{\tilde{c}}$, $f \sqcap g \neq \tilde{0}_E$ ve $f \sqcap h \neq \tilde{0}_E$ olacak şekilde *be*–boştan farklı $g, h \in \tau$ varsa, f'ye (X, τ, E) uzayında FSC_1-bağlantılıdır denir.

ii. $f \sqsubseteq g \sqcup h$, $f \sqcap g \sqcap h = \tilde{0}_E$, $f \sqcap g \neq \tilde{0}_E$ ve $f \sqcap h \neq \tilde{0}_E$ olacak şekilde *be*–boştan farklı $g, h \in \tau$ varsa, f'ye (X, τ, E) uzayında FSC_2-bağlantılıdır denir.

iii. $f \sqsubseteq g \sqcup h$, $g \sqcap h \sqsubseteq f^{\tilde{c}}$, $g \not\sqsubseteq f^{\tilde{c}}$, $h \not\sqsubseteq f^{\tilde{c}}$ olacak şekilde *be*–boştan farklı $g, h \in \tau$ varsa f'ye (X, τ, E) uzayında FSC_3-bağlantılıdır denir.

iv. $f \sqsubseteq g \sqcup h$, $f \sqcap g \sqcap h = \tilde{0}_E$, $g \not\sqsubseteq f^{\tilde{c}}$ ve $h \not\sqsubseteq f^{\tilde{c}}$ olacak şekilde *be*–boştan farklı $g, h \in \tau$ varsa f'ye (X, τ, E) uzayında FSC_4-bağlantılıdır denir.

Yukarıdaki tanım dikkate alındığında FSC_i-bağlantılılık $(i = \overline{1, 4})$ kavramları arasındaki ilişki aşağıdaki diyagramda gösterildiği gibidir.

$$\begin{tikzcd}
FSC_1 \arrow[r] \arrow[d] & FSC_2 \arrow[d] \\
FSC_3 \arrow[r] & FSC_4
\end{tikzcd}$$

Aşağıdaki örnekler tüm aksi durumları göstermektedir.

Örnek 5.2.1 $X = [0,1]$ ve $E = \{a, b\}$ olsun. $f, g, h \in \mathbb{FS}_E^X$ kümeleri

$$\begin{aligned} f &= \big\{(a, \{x, \mu_{f(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{f(b)}(x) : x \in X\})\big\} \\ g &= \big\{(a, \{x, \mu_{g(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{g(b)}(x), : x \in X\})\big\} \\ h &= \big\{(a, \{x, \mu_{h(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{h(b)}(x) : x \in X\})\big\} \end{aligned}$$

burada her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} \mu_{f(a)}(x) &= \mu_{f(b)}(x) = \frac{3}{4} \\ \mu_{g(a)}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} < x < 1 \\ 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases} \\ \mu_{g(b)}(x) &= \begin{cases} 1 & \frac{1}{3} < x < 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases} \\ \mu_{h(a)}(x) &= \begin{cases} 1 & \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases} \\ \mu_{h(b)}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır. $\tau = \{\tilde{1}_E, \tilde{0}_E, g, h, g \sqcap h\}$ olmak üzere (X, τ, E) bir *be*−topolojik uzaydır. Bu takdirde, f FSC_4-bağlantılıdır fakat FSC_2-bağlantılı değildir.

Örnek 5.2.2 $X = [0,1]$ ve $E = \{a, b\}$ olsun. $f, g, h \in \mathbb{FS}_E^X$ kümeleri

$$\begin{aligned} g &= \big\{(a, \{x, \mu_{g(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{g(b)}(x) : x \in X\})\big\} \\ h &= \big\{(a, \{x, \mu_{h(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{h(b)}(x) : x \in X\})\big\} \\ f &= g \sqcup h \end{aligned}$$

burada her $x \in X$ için

$$\mu_{g(a)}(x) = \begin{cases} 0 & \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\mu_{g(b)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\mu_{h(a)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\mu_{h(b)}(x) = \begin{cases} 0 & \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\tau = \{\tilde{0}_E, \tilde{1}_E, g, h, g \sqcup h\}$ olmak üzere (X, τ, E) bir be–topolojik uzaydır. Bu takdirde, f FSC_4-bağlantılıdır ama FSC_3-bağlantılı değildir.

Örnek 5.2.3 $X = [0,1]$ ve $E = \{a, b\}$ olsun. $f, g, h \in \mathbb{FS}_E^X$ kümeleri

$$g = \big\{(a, \{x, \mu_{g(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{g(b)}(x) : x \in X\})\big\}$$

$$h = \big\{(a, \{x, \mu_{h(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{h(b)}(x) : x \in X\})\big\}$$

$$f = \big\{(a, \{x, \mu_{f(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{f(b)}(x) : x \in X\})\big\}$$

şeklinde tanımlanıyor. Burada her $x \in X$ için

$$\mu_{g(a)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ \frac{2}{3} & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\mu_{g(b)}(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\mu_{h(a)}(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\mu_{h(b)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ \frac{2}{3} & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\mu_{f(a)}(x) = 1 - \mu_{f(b)}(x) = \frac{1}{3}$$

olarak tanımlanıyor. $\tau = \{\tilde{0}_E, \tilde{1}_E, g, h, g \sqcap h, g \sqcup h\}$ olmak üzere (X, τ, E) bir *be*–topolojik uzaydır. Bu takdirde, f bu *be*–topolojik uzaya göre FSC_2-bağlantılıdır ama FSC_1-bağlantılı değildir.

Örnek 5.2.4 $X = [0,1]$ ve $E = \{a, b\}$ olsun. $f, g, h \in \mathbb{IFS}_E^X$ kümeleri

$$f = \big\{(a, \{x, \mu_{f(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{f(b)}(x) : x \in X\})\big\}$$

$$g = \big\{(a, \{x, \mu_{g(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{g(b)}(x) : x \in X\})\big\}$$

$$h = \big\{(a, \{x, \mu_{h(a)}(x) : x \in X\}), (b, \{x, \mu_{h(b)}(x) : x \in X\})\big\}$$

burada her $x \in X$ için

$$\mu_{f(a)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} < x < 1 \\ \frac{2}{3} & 0 \le x \le \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\mu_{f(b)}(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} < x \le 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \le x \le \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\mu_{g(a)}(x) = \begin{cases} 0 & \frac{2}{3} < x \le 1 \\ \frac{2}{3} & 0 \le x \le \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\mu_{g(b)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} < x \le 1 \\ 0 & 0 \le x \le \frac{2}{3} \end{cases}$$

olarak tanımlanıyor. $\tau = \{\tilde{0}_E, \tilde{1}_E, g, h, g \sqcup h\}$ olmak üzere (X, τ, E) bir *be*–topolojik uzaydır. f, bu uzayda FSC_3-bağlantıldır fakat FSC_2-bağlantılı ve FSC_1-bağlantılı değildir.

Örnek 5.2.5 Örnek 5.2.4'de her $x \in X$ için

$$\mu_{f(a)}(x) = \mu_{f(b)}(x) = \frac{2}{3}$$

alırsak, f bu uzayda FSC_2-bağlantılıdır ama FSC_3-bağlantılı değildir

Teorem 5.2.1 (X,τ,E) ve (Y,σ,K) iki *be*–topolojik uzay,

$$\varphi_\psi : (X,\tau,E) \to (Y,\sigma,K)$$

bir *be*–sürekli ve *be*–örten fonksiyon ve $f \in \mathbb{FS}_E^X$ olsun. f, FSC_1-bağlantılı ise $\varphi_\psi(f)$ de FSC_1-bağlantılıdır.

İspat. f, (X,τ,E) uzayında FSC_1-bağlantılı olsun.$\varphi_\psi(f)$'nin (Y,σ,K) uzayında FSC_1-bağ- lantılı olmadığını varsayalım. Buradan;

$$\begin{aligned}\varphi_\psi(f) &\sqsubseteq g \sqcup h \\ g \sqcap h &\sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}} \\ \varphi_\psi(f) \sqcap g &\neq \tilde{0}_K \\ \varphi_\psi(f) \sqcap h &\neq \tilde{0}_K\end{aligned}$$

olacak şekilde $g,h \in \tau$ vardır. Teorem 3.2.2'den

$$f \sqsubseteq (\varphi_\psi)^{-1}(\varphi_\psi(f)) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(g \sqcup h) = \varphi_\psi^{-1}(g) \sqcup \varphi_\psi^{-1}(h)$$

$$\varphi_\psi^{-1}(g \sqcap h) = \varphi_\psi^{-1}(g) \sqcap \varphi_\psi^{-1}(h) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}\big((\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}}\big) = \big(\varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f))\big)^{\tilde{c}} \sqsubseteq f^{\tilde{c}}$$

$$\tilde{0}_E \neq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f) \sqcap g) = \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f)) \sqcap \varphi_\psi^{-1}(g) \sqsupseteq f \sqcap \varphi_\psi^{-1}(g)$$

ve

$$\tilde{0}_E \neq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f) \sqcap h) = \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f)) \sqcap \varphi_\psi^{-1}(h) \sqsupseteq f \sqcap \varphi_\psi^{-1}(h)$$

olur. Bu ise f 'nin FSC_1-bağlantılı olmasıyla çelişir.

Teorem 5.2.2 (X,τ,E) ve (Y,σ,K) iki *be*–topolojik uzay,

$$\varphi_\psi : (X,\tau,E) \to (Y,\sigma,K)$$

bir *be*–sürekli ve *be*–örten fonksiyon ve $f \in \mathbb{FS}_E^X$ olsun. f, FSC_2-bağlantılı ise $\varphi_\psi(f)$ de FSC_2-bağlantılıdır.

İspat. f, (X,τ,E) uzayında FSC_2-bağlantılı olsun. Ama $\varphi_\psi(f)$, FSC_2-bağlantılı olmasın.Buradan,

$$\begin{aligned}\varphi_\psi(f) &\sqsubseteq g \sqcup h \\ \varphi_\psi(f) \sqcap g \sqcap h &= \tilde{0}_K \\ \varphi_\psi(f) \sqcap g &\neq \tilde{0}_K \\ \varphi_\psi(f) \sqcap h &\neq \tilde{0}_K\end{aligned}$$

olacak şekilde $\tilde{0}_K$'dan farklı $g, h \in \tau$ vardır. Böylece

$$f \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f)) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(g \sqcup h) = \varphi_\psi(g) \sqcup \varphi_\psi(h)$$

$$f \sqcap \varphi_\psi^{-1}(g) \sqcap \varphi_\psi^{-1}(h) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}\Big(\varphi_\psi(g) \sqcap g \sqcap h\Big) = \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f)) \sqcap \varphi_\psi(g) \sqcap \varphi_\psi^{-1}(h) = \tilde{0}_E$$

$$f \sqcap \varphi_\psi^{-1}(g) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f) \sqcap g) = \varphi_\psi^{-1}\big(\varphi_\psi(f)\big) \sqcap \varphi_\psi^{-1}(g) \neq \tilde{0}_E$$

$$f \sqcap \varphi_\psi^{-1}(h) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f) \sqcap h) = \varphi_\psi^{-1}\big(\varphi_\psi(f)\big) \sqcap \varphi_\psi^{-1}(h) \neq \tilde{0}_E$$

elde edilir. $\varphi_\psi^{-1}(g), \varphi_\psi^{-1}(h) \in \tau$ olduğundan, bu durum f'nin FSC_2-bağlantılı olmasıyla çelişir.

Teorem 5.2.3 (X, τ, E) ve (Y, σ, K) iki *be*–topolojik uzay, $\varphi_\psi : (X, \tau, E) \to (Y, \sigma, K)$ sbe-örten ve sürekli fonksiyon ve $f \in \mathbb{FS}_E^X$ olsun. Eğer f, FSC_3-bağlantılı ise $\varphi_\psi(f)$ de FSC_3-bağlantılıdır.

İspat. f, FSC_3-bağlantılı olsun.$\varphi_\psi(f)$ 'in FSC_3-bağlantılı olmadığını varsayalım. Buradan

$$\varphi_\psi(f) \sqsubseteq g \sqcup h$$
$$g \sqcap h \sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}}$$
$$g \not\sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}}$$
$$h \not\sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}}$$

olacak şekilde $g, h \in \sigma$ vardır. Buradan,

$$f \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f)) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(g \sqcup h) = \varphi_\psi^{-1}(g) \sqcup \varphi_\psi^{-1}(h)$$

ve

$$(\varphi_\psi)^{-1}(g \sqcap h) = (\varphi_\psi)^{-1}(g) \sqcap (\varphi_\psi)^{-1}(h) \sqcap (\varphi_\psi)^{-1}((\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}}) \sqsubseteq f^{\tilde{c}}$$

elde edilir. φ_ψ *sbe*–sürekli olduğundan $\varphi_\psi^{-1}(g)$, $\varphi_\psi^{-1}(h) \in \tau$'dur. Ayrıca

$$g \not\sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}} \text{ ve } h \not\sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}}$$

kapsamalarından öyle $y_1, y_2 \in Y$ vardır ki; f, FSC_3-bağlantılı olsun.$\varphi_\psi(f)$ 'in FSC_3-bağlantılı olmadığını varsayalım. Buradan

$$\begin{aligned} \varphi_\psi(f) &\sqsubseteq g \sqcup h \\ g \sqcap h &\sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}} \\ g &\not\sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}} \\ h &\not\sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}} \end{aligned}$$

olacak şekilde $g, h \in \sigma$ vardır.

$$f \sqsubseteq (\varphi_\psi)^{-1}((\varphi_\psi(f))) \sqsubseteq (\varphi_\psi)^{-1}(g \sqcup h) = (\varphi_\psi)^{-1}(g) \sqcup (\varphi_\psi)^{-1}(h)$$

ve

$$(\varphi_\psi)^{-1}(g \sqcap h) = (\varphi_\psi)^{-1}(g) \sqcap (\varphi_\psi)^{-1}(h) \sqcap (\varphi_\psi)^{-1}((\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}}) \sqsubseteq f^{\tilde{c}}$$

olur. φ_{psi} *be*–sürekli olduğundan $(\varphi_\psi)^{-1}(g)$, $(\varphi_\psi)^{-1}(h) \in \tau$ 'dur. Ayrıca

$$g \not\sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}} \text{ ve } h \not\sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}}$$

den öyle $y_1, y_2 \in Y$ vardır ki;

$$\mu_{g(e)}(y_1) \geq 1 - \varphi_\psi(f)(k)(y_1) \tag{5.2.1}$$

$$\mu_{h(e)}(y_2) \geq 1 - \varphi_\psi(f)(k)(y_2) \tag{5.2.2}$$

ve

$$\nu g(e)(y_1) \leq 1 - \varphi_\psi(f)(k)(y_1) \tag{5.2.3}$$

$$\nu_{h(e)}(y_2) \leq 1 - \varphi_\psi(f)(k)(y_2) \tag{5.2.4}$$

dır. $\varphi_\psi(g) \sqsubseteq f^{\tilde{c}}$ olduğunu varsayalım. Bu durum, (5.1.1) ile çelişir. $\varphi_\psi(h) \sqsubseteq f^{\tilde{c}}$ olduğunu varsayarsak bu da (5.2.2) ile çelişir. O halde $\varphi_\psi(f)$ de FSC_3-bağlantılıdır.

Teorem 5.2.4 (X, τ, E) ve (Y, σ, K) iki *be*–topolojik uzay, $\varphi_\psi : (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \sigma, K)$ *be*–örten ve sürekli fonksiyon ve $f \in \mathbb{FS}_E^X$ olsun. Eğer f, SC_4-bağlantılı ise $\varphi_\psi(f)$ de FSC_4-bağlantılıdır.

İspat. f, FSC_4-bağlantılı olsun. $\varphi_\psi(f)$'nin FSC_4-bağlantılı olmadığını varsayalım. Buradan,

$$\varphi_\psi(f) \sqsubseteq g \sqcup h$$
$$\varphi_\psi(f) \sqcap g \sqcap h = \tilde{0}_K$$
$$g \not\sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}}$$
$$g \not\sqsubseteq (\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}}$$

olacak şekilde $g, h \in \sigma$ vardır.Buradan,

$$f \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f)) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(g \sqcup g) = \varphi_\psi^{-1}(g) \sqcup \varphi_\psi^{-1}(h)$$

ve

$$\varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(f) \sqcap g \sqcap h) = f \sqcap \varphi_\psi^{-1}(g) \sqcap \varphi_\psi^{-1}(h) = \tilde{0}_E$$

elde edilir.

$$g \not\sqsubseteq ((\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}}) \quad \text{ve} \quad h \sqsubseteq ((\varphi_\psi(f))^{\tilde{c}})$$

kapsamalarından, öyle $y_1, y_2 \in Y$ vardır ki,

$$\begin{aligned} \mu_{g(e)}(y_1) &\geq 1 - \varphi_\psi(f)(k)(y_1) \\ \mu_{h(e)}(y_2) &\geq 1 - \varphi_\psi(f)(k)(y_2) \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

ve

$$\begin{aligned} \nu_{g(e)}(y_1) &\leq 1 - \varphi_\psi(f)(k)(y_1) \\ \nu_{h(e)}(y_2) &\leq 1 - \varphi_\psi(f)(k)(y_2) \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

elde edilir. $\varphi_\psi(g) \sqsubseteq f^{\tilde{c}}$ olduğunu varsayalım. Bu durum, (5.2.5) ile çelişir. $\varphi_\psi(h) \sqsubseteq f^{\tilde{c}}$ olduğunu varsayarsak bu da (5.2.6) ile çelişir. O halde $\varphi_\psi(f)$ de FSC_3-bağlantılıdır.

Teorem 5.2.5 (X, τ, E) bir *be*–topolojik uzay ve $f_1, f_2 \in \mathbb{FS}_E^X$ kümeleri FSC_1-bağlantılı ve $f_1 \sqcap f_2 = \tilde{0}_E$ olsun. Bu taktirde $f1 \sqcup f_2$ de FSC_1-bağlantılıdır.

İspat. Aksini kabul edelim. $f_1 \sqcup f_2$, FSC_1-bağlantılı olmasın. Buradan,

$$f_1 \sqcup f_2 \sqsubseteq g \sqcup h$$
$$g \sqcap h \sqsubseteq (f_1 \sqcup f_2)^{\tilde{c}}$$
$$(f_1 \sqcup f_2) \sqcap g \neq \tilde{0}_E$$
$$(f_1 \sqcup f_2) \sqcap h \neq \tilde{0}_E$$

olacak şekilde $\tilde{0}_E$'den farklı $g, h \in \tau$ vardır. Buradan, $f_1 \sqcap f_2 = \tilde{0}_E$ eşitliğiyle

$$f_1 \sqsubseteq g \sqcup h, \quad f_2 \sqsubseteq g \sqcup h$$
$$g \sqcap h \sqsubseteq f_1^{\tilde{c}}, \quad g \sqcap h \sqsubseteq f_2^{\tilde{c}}$$
$$f_1 \sqcap g \neq \tilde{0}_E, \quad f_2 \sqcap g \neq \tilde{0}_E$$
$$f_1 \sqcap h \neq \tilde{0}_E, \quad f_2 \sqcap h \neq \tilde{0}_E$$

elde edlir. Bu durum f_1 ve f_2'nin FSC_1-bağlantılı olmasıyla çelişir.

Teorem 5.2.6 (X, τ, E) bir *be*–topolojik uzay ve $f_1, f_2 \in \mathbb{FS}_E^X$ kümeleri FSC_2-bağlantılı ve $f_1 \sqcap f_2 = \tilde{0}_E$ olsun. Bu taktirde $f1 \sqcup f_2$ de FSC_2-bağlantılıdır.

İspat. $f_1 \sqcup f_2$'nin FSC_2-bağlantılı olmadığını varsayalım. Buradan

$$f_1 \sqcup f_2 \sqsubseteq g \sqcup h$$
$$(f_1 \sqcup f_2) \sqcap g \sqcap h = \tilde{0}_E$$
$$(f_1 \sqcup f_2) \sqcap g \neq \tilde{0}_E$$
$$(f_1 \sqcup f_2) \sqcap h \neq \tilde{0}_E$$

olacak şekilde $g, h \in \tau$ vardır. $f_1 \sqcap f_2 = \tilde{0}_E$ eşitliği de kullanılırsa,

$$f_1 \sqsubseteq g \sqcup h, \quad f_2 \sqsubseteq g \sqcup h$$
$$f_1 \sqcap g \sqcap h = \tilde{0}_E, \quad f_2 \sqcap g \sqcap h = \tilde{0}_E$$
$$f_1 \sqcap g \neq \tilde{0}_E, \quad f_2 \sqcap g \neq \tilde{0}_E$$
$$f_1 \sqcap h \neq \tilde{0}_E, \quad f_2 \sqcap g \neq \tilde{0}_E$$

elde edilir. Bu durumda f_1 ve f_2'nin FSC_2-bağlantılı olmasıyla çelişir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada bulanık topolojik uzay ve bulanık topolojik uzaylardaki bağlantılılık kavramlarından yola çıkılarak bulanık esnek bağlantılılık ve bulanık esnek FSC_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ bağlantılık kavramı ve temel özellikleri ele alınarak incelenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Ahmat, B., Kharal, A., *On fuzzy soft sets*, Hindawi Publishing Corporation, Advances in Fuzzy Systems, Article ID 586507, 2009.

[2] Ajmal, N., Kohli, J. K., *Connectedness in fuzzy topological spaces*, Fuzzy Sets and Systems, 31 (1989), 369–388.

[3] Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., Shabir, M., *On some new operations in soft set theory*, Computers and Mathematics with Applications, 57 (2009), 1547–1553.

[4] Aktaş, H., Çağman, N., *Soft sets and soft groups*, Information Sciences, 177 (2007), 2726–2735.

[5] Atanassov, K. T., *Intuitionistic fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems, 20 (1986), 87–96.

[6] Aygünoğlu, A., Aygün, H., *Some notes on soft topological spaces*, Neural Comput and Applic, (2011), 1–7.

[7] Chang, C. L., *Fuzzy topological spaces*, J. Math. Appl., 24 (1968), 182–193.

[8] Çağman, N., Enginoğlu, S., *Soft set theory and uni-int decision making*, European Journal of Operational, 207 (2010), 848–855

[9] Çağman, N., Karataş, S., Enginoğlu, S., *Soft topology*, Computers and Mathematics with Applications, 62 (2011), 351–358.

[10] Çağman, N., *Contributions to theory of soft sets*, Journal of New Results in Science, 4 (2014), 33–41.

[11] Çoker, D., *An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces*, Fuzzy Sets and Systems, 88 (1997), 81–89.

[12] Gain, P. K., Mukherjee, P., Chakraborty, R. P., Pal, M., *On some structural properties of fuzzy soft topological spaces*, Intern. J. Fuzzy Mathematical Archive, 1 (2013), 1–15.

[13] Gong, K., Wang, P., Xiao, Z., *Bijective soft set decision system based parameters reduction under fuzzy environments*, Applied Mathematical Modelling, 37 (2013), 4474-–4485.

[14] Guan, X., Li, Y., Feng, F., *A new order relation on fuzzy soft sets and its application*, Soft Comput., 17(1) (2013), 63–70.

[15] Gündüz, Ç., Bayramov, S., *Some results on fuzzy soft topological spaces*, Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering Volume 2013, Article ID 835308.

[16] Hussain, S., Ahmad, B., *Some properties of soft topological spaces*, Computers and Mathematics with Applications, 62 (2011), 4058–4067.

[17] Hussain, S., *A note on soft connectedness*, Journal of Egyptian Mathematical Society 23(1) (2015), 6–11.

[18] Karataş, S., İşleyen, M. A., *Sezgisel bulanık esnek topolojik uzaylarda bağlantılılık*, Ordu üniversitesi fen bilimleri enstitüsü yüksek lisans tezi (2014).

[19] Karataş, S., Akdağ, M., *On intuitionistic fuzzy soft continuous mappings*, Journal of New Results in Science, 4 (2014), 55–70.

[20] Karataş, S., İşleyen, M. A., *Connectedness on intuitionistic fuzzy soft topological spsaces*, Journal of New Theory, 1 (2015), 2–16.

[21] Karataş, S., Kılıç, B., Tellioğlu, M., *On fuzzy soft connected topological spaces*, Journal of Linear and Topological Algebra, 4(3) (2015), 229–240.

[22] Kharal, A., Ahmad, B., *Mappings on fuzzy soft classes*, Hindawi Publishing Corporation, Advances in Fuzzy Systems, Article ID 407890, 2009.

[23] Kong, Z., Gao, L., Wang, L., Li, S., *The normal parameter reduction of soft sets and its algorithm*, Computers and Mathematics with Applications, 56 (2008), 3029–3037.

[24] Li, Z., Cui, R., *On the topological structure of intuitionistic fuzzy soft set*, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 5(1) (2013), 229–239.

[25] Maji, P. K., Biswas R., Roy, A. R., *Intuitionistic fuzzy soft sets*, The Journal of Fuzzy Mathematics, 9(3) (2001), 677–692.

[26] Maji, P. K., Roy, A. R., Biswas, R., *An application of soft sets in a decision making problem*, Computers and Mathematics with Applications, 44 (2002), 1077–1083.

[27] Maji, P. K., Bismas, R., Roy, A. R., *Soft set theory*, Computers and Mathematics with Applications, 45 (2003), 555–562.

[28] Molodtsov, D. A., *Soft set theory-first results*, Computers and Mathematics with Applications, 37 (1999), 19–31.

[29] Peyghan, E. Samadi B. and Tayebi A. , *About soft topological spaces* Journal of New Results in Science, 2 (2013), 60–75.

[30] Roy, S., Samanta, T. K., *A note on fuzzy soft topological spaces*, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 3(2) (2012), 305–311.

[31] Shabir M., Naz, M. *On soft topological spaces*, Computers and Mathematics with Applications, 61 (2011), 1786–1799.

[32] Şimşekler, T., Yüksel, Ş., *Fuzzy soft topological spaces*, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 5(1) (2013), 87–96.

[33] Tanay, B., Kandemir, M. B., *Topological structure of fuzzy soft sets*, Computers and Mathematics with Applications, 61 (2011), 2952–2957.

[34] Varol, B. P., Aygün, H. *Fuzzy soft topology*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 41 (3) (2012), 407–419.

[35] Zadeh, L., *Fuzzy sets*, Inform. and Control, 8 (1965), 338–353.

[36] Zhao, X. D., *Connectedness on fuzzy topological spaces*, Fuzzy Sets and Systems, 20 (1986), 223–240.

[37] Zorlutuna, İ., Akdağ, M., Min, W. K., Atmaca, S., *Remarks on soft topological spaces*, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 3(2) (2012), 171–185.

DİZİN

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	Merve TELLİOĞLU
Doğum Yeri	:	Nevşehir
Doğum Tarihi	:	1991
Medeni Hali	:	Evli
Bildiği Yabancı Dil	:	İngilizce
İletişim Bilgileri	:	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, m.uykun.tellioglu@outlook.com
Lise	:	Nevşehir Lisesi-2009
Lisans	:	Giresun Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü-2013