T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA AYIRMA AKSİYOMLARI

Osman ÇAKIR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2016

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Osman ÇAKIR tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŞ danışmanlığında yürütülen "ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA AYIRMA AKSİYOMLARI" adlı bu tez, jürimiz tarafından 02/06/2016 tarihinde oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŞ

Başkan:	Yrd. Doç. Dr. Faruk KARAASLAN Çankırı Karatekin Üniv. Matematik Böl.	İmza:
Üye:	Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL Ordu Üniv. Matematik Böl.	İmza:
Üye:	Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŞ Ordu Üniv. Matematik Böl.	İmza:

Bu tez kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 02/06/2016 tarih ve 2016/25 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

28/06/2016

Doç. Dr. Kürşat KORKMAZ

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Osman ÇAKIR

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirimlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

ESNEK TOPOLOJİK UZAYLARDA AYIRMA AKSİYOMLARI

Osman ÇAKIR
Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2016
Yüksek Lisans Tezi, 70 sayfa

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŞ

Bu tez çalışmasında Molodtsov [20] tarafından ortaya atılan esnek küme tanımı veri- lerek, ardından Shabir ve Naz [28]'ın makaleleri dikkate alınarak esnek kümelerde temel kavramlar ve ayırma aksiyomları verildi. Ayırma aksiyomlarında verilen ispatlarda ve kullanılan notasyonlarda Çağman [5]'ın çalışmasından faydalanıldı. Bazı teoremlerin ispatları ve kullanılan notasyonlar düzeltilerek yeniden yazıldı. Çalışmanın son bölümünde ise, Komplimental Esnek Topolojik Uzaylar başlığı altında esnek ayırma aksiyomlarına yeni bir bakışla teoremler ve ispatları verildi. Bu kısımda yazılmış olan teoremler örnekler verilerek desteklendi. Ayrıca yazılan teoremlerin doğal bir sonucu olarak, $ET_0 \Leftrightarrow ET_1 \Leftrightarrow ET_2 \Leftrightarrow ET_3 \Leftrightarrow ET_4$ bağıntısı verildi.

Anahtar Kelimeler: Esnek küme, esnek nokta, esnek fonksiyon, esnek topoloji, esnek topolojik uzay, esnek T_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ uzayları, esnek komplimental küme, komplimental T_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ uzayları, esnek ayırma aksiyomları.

ABSTRACT

SEPARATION AXIOMS IN SOFT TOPOLOGICAL SPACES

Osman ÇAKIR
Ordu University
Institute of Science and Technology
Department of Mathematics, 2016
MSc. Thesis, 70 pages

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Serkan KARATAŞ

In this thesis, the definition of a soft set which was introduced by Molodtsov [20] is given and then the main concepts of the soft sets and soft separation axioms are studied by taking Shabir and Naz [28]'s works into account. While soft separation axioms and their proofs are unfolded, it is more heeded to make use of Çağman [5]'s work. Some of the proofs related to theorems of separation axioms are rewritten because of needed correction of notations. The last section of the work is given under the title of Complemental Soft Topological Spaces. In this section some new theorems and their proofs are discussed. Further the following relation, $ST_0 \Leftrightarrow ST_1 \Leftrightarrow ST_2 \Leftrightarrow ST_3 \Leftrightarrow ST_4$ is written as a natural result of the given theorems.

Keywords: Soft set, soft point, soft function, soft topology, soft topological space soft T_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ spaces, soft complemental sets, soft separation axioms, complemental T_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ spaces

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasına başlamamda beni teşvik ederek, başarabileceğime inandıran ve çalışmalarım boyunca engin bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen, Prof. Timur Karaçay'ın deyimiyle, "akademik hayat şaraba benzer, yıllar geçtikçe mayalanır; bilim adamının değeri artar." sözünü kendilerinde gördüğüm hocam Sayın Doç. Dr. Selahattin MADEN'e en derin saygılarımla teşekkür ederim.

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan, çalışmalarım sırasında yapmış olduğum hatalar sebebiyle beni kırmadan nazik bir şekilde uyaran, büyük bir sabır göstererek tezin yazımı aşamasında kıymetli bilgileriyle eksiklerimi tamamlayan, çalışkanlığı ve matematik bilimine verdiği değerden sebep kendine değer katabilmiş ve bu tutumunu kendime örnek aldığım değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŞ'a en samimi dileklerimle teşekkür ederim.

Bilimsel çalışmalarda bir kelimenin,özel olarak matematikte çoğu kez bir işaretin bile, önemi gözardı edilemez. Bu bakımdan matematikte "farklı" kelimesi yerine " değişik" sözcüğünün kullanılamayacağını nükteli bir şekilde ifade ederek öğreten kıymetli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL'a en güzel dileklerimle teşekkür ederim.

Ayrıca, çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Cemil YAPAR ve tüm Matematik Bölümü öğretim üyelerine, özellikle de Sayın Doç. Dr. Erhan SET'e teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmam boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, büyük bir sabırla hep yanımda olan eşim Ayşe ve oğlum Berat'a, manevi destekçilerim anne ve babama en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

(F,E)	:	Molodstov anlamında (F,E) esnek kümesi
F	:	Çağman anlamında F esnek küme
E	:	Parametre kümesi
X	:	Nesne Kümesi
$A \sqcap B$	:	A ve B esnek kümelerinin esnek kesişimi
$A \sqcup B$	:	A ve B esnek kümelerinin esnek birleşimi
$S_E(X)$	:	X evrensel kümesi üzerindeki E parametre kümesi ile tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi
$\mathcal{P}(X)$	:	X'in kuvvet kümesi
Φ	:	Boş esnek küme
$\tilde{X}$	:	Evrensel esnek küme
$e_F = e_G$	:	e_F esnek noktası e_G esnek noktasına eşittir
$e_F \neq e_G$	:	e_F esnek noktası e_G esnek noktasına eşit değildir
$e_F \sim e_G$	:	e_F esnek noktası e_G esnek noktasıyla ilişkilidir
$\bigsqcup_{i\in I} F_i$	:	F_i esnek kümelerinin esnek birleşimi
$\bigsqcap_{i\in I} F_i$	:	F_i esnek kümelerinin esnek kesişimi
(X,τ,E)	:	esnek topolojik uzay
(A,τ_A,E)	:	esnek topolojik alt uzay
(X,τ_{e_i})	:	e_i parametresine bağlı topolojik uzay
$F \sqsubseteq G$	:	G esnek kapsar F
$F^{\tilde{c}}$	:	F esnek kümesinin parametrik esnek tümleyeni
φ_ψ	:	esnek fonksiyon
$\varphi_\psi(F)$	:	F'nin esnek fonksiyon altındaki görüntüsü
$\varphi_\psi^{-1}(F)$	:	F'nin esnek fonksiyon altındaki ters görüntüsü
e_F	:	esnek nokta
$\tilde{\in}$	:	esnek aitlik
$\tilde{\notin}$	:	esnek ait değil
I	:	indis kümesi
τ	:	esnek topoloji

τ_A	:	$A \subseteq X$ kümesine indirgenmiş esnek topoloji
F°	:	F'nin esnek içi
$\overline{F}$	:	F'nin esnek kapanışı

1. GİRİŞ

Bu çalışmada esnek topolojik uzaylarda ayırma aksiyomlarından bahsedilecektir. Ayırma aksiyomlarına girmeden önce esnek kümelere ait temel kavramlardan ve ondan da önce esnek kümelerin ortaya çıkmasıyla ilgili olarak yapılan çalışmalardan kısaca söz edilecektir. Esnek kümeler teorisi, Molodtsov [20] tarafından belirsizlikle başa çıkabilmek için bir matematiksel araç olarak ortaya atıldı. Molodtsov [20], sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, oyun teorisi, Riemann integrasyonu, Perron integrasyonu, olasılık, ölçüm teorisi gibi alanlarda esnek küme teorisini kullanarak başarılı çalışmalar yaptı.

Belirsizlik içeren problemlerin çözümü için, aralık matematiği, olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi, yaklaşımlı kümeler teorisi, esnek kümeler teorisi gibi farklı teoriler geliştirildi. Her bir teorinin güçlü olduğu uygulamalar olmakla birlikte, bu teoriler arasında en fazla göze çarpan Zadeh [35]'in bulanık kümeler teorisidir. Bulanık küme kavramını, bulanık mantık kavramıyla birlikte düşünmek gerekir. Bulanık küme kavramını açıklamak için de öncelikle klasik küme kavramından ayrılan yönleri dikkate alınmalıdır. Çünkü bulanık küme, klasik küme anlayışının temel aksiyomlarının kısmen dışında bir anlayış üzerine kurulmuştur. Aynı durum, bulanık mantık ve klasik mantık arasında da mevcuttur. Çünkü her iki mantık arasında gerek aksiyomları gerekse formel yapıları açısından köklü farklar vardır. Bulanık küme ve dolayısıyla bulanık mantığı karakterize eden diğer bir özellik, duyumların ve dilin yorumudur. Duyumlarımızın ve dilin bulanık yapıda olduğunu kabul etmek, aynı zamanda farklı felsefi yorumlara da zemin hazırlamaktır. Bulanık mantığın hem felsefe hem de mantık açısından ortaya koyduğu yeni yorumlar dışında, teknolojideki uygulamaları, temel bilimlerde, sosyal bilimlerde ve beşeri bilimlerde yeni ufuklar açmış olması, onun günümüzde gittikçe artan önemini ortaya koymaktadır. Bulanık mantığın kurucusu Zadeh [35], "Information and Control" isimli dergide yayınladığı ve teknik bir problemin çözümüne yönelik olan "fuzzy sets" isimli bir makale ile devrim sayılabilecek görüşler ileri sürmüştür. Bu teori hızla gelişmesine rağmen bazı yapısal zorluklara sahiptir. Bir bulanık küme onun üyelik fonksiyonu yoluyla tanımlanır. Molodtsov [20]'a göre üyelik fonksiyonunun doğasının fazlasıyla bireysel olmasından dolayı, her bir durum için bir üyelik fonksiyonu inşa etmek zordur. Bu yüzden üyelik fonksiyonu inşa etmekten bağımsız şekilde bir kümeler teorisine ihtiyaç vardır. Esnek kümeler teorisi, Molodtsov [20] tarafından belirsizlikle başa çıkabilmek için bir matematiksel araç olarak ortaya atıldıktan sonra, bu teoriyle ilgili pek çok çalışma yapılmıştır.

Maji ve diğer. [17], Pawlak [24]'ın yaklaşımlı küme teorisi yardımıyla bir karar verme probleminde esnek kümelerin bir uygulamasını sundu ve esnek kümelerde bazı işlemleri tanımladı. Xiao ve diğer. [31] esnek küme temelli rekabet kapasitesi için yapay bir hesaplama metodu üzerinde çalıştı. Yang ve diğer. [33] esnek kümeler ve yaklaşımlı kümelere dayalı klinik teşhisin karar analizi ve indüksiyon üzerinde çalıştı. Chen ve diğer. [7] ile Kong ve diğer. [16] esnek kümelerde parametre indirgemesi üzerinde çalıştı. Xiao ve diğer. [32] ile Pei ve Miao [25] esnek tabanlı bilgi sistemleri üzerinde çalıştı. Mushrif ve diğer. [22] esnek küme temelli sınıflandırmalar üzerinde çalıştı. Zou ve Xiao [37] eksik bilgi altında esnek kümelerin veri analizi yaklaşımını ortaya koydu. Bu yaklaşımlar esnek kümelerde eksik verilerin mevcut durumlarını yansıtmak için tercih edilebilir. Maji ve diğer. [17] bulanık esnek kümeleri tanımladı. Daha sonra pek çok araştırmacı bulanık esnek kümeler üzerinde çalışmalar yaptı. Aktaş ve Çağman [1] esnek kümeleri, bulanık kümeleri ve yaklaşımlı kümeleri ilgili kavramlarıyla karşılaştırdı. Yang ve diğer. [34] bulanık esnek kümelerde indirgemeyi tanımlayarak, bulanık esnek kümeler yoluyla bir karar verme problemini analiz etti. Majumdar ve Samanta [18] bulanık esnek kümelerde benzerlik ölçümünü ortaya attı. Kong ve diğer. [16] ile Xiao ve diğer. [31] bulanık esnek küme üzerine dayalı bazı yaklaşımları konu alan bir çalışma yaptı. Molodtsov ve diğer. [20] esnek küme teorisi üzerine dayalı bir analiz geliştirerek; esnek sayı, esnek türev, esnek integral gibi kavramlar formüle etti. Tanay ve diğer. [29] esnek küme ve esnek halkaları çalıştı. Shabir ve diğer. [28] esnek kümelerde bazı işlemler ile ilgili bir çalışma yaptı. Çağman ve diğer. [3] esnek kümelerde karar verme süreçleri ilgili çalıştı. Zhao ve diğer. [37] esnek kümelerde esnek yarı halkaları çalıştı. Hussain ve diğer. [8] esnek topolojik uzayların bazı özelliklerini çalıştı. Yine Majumdar ve diğer. [18], Min [19], Chen ve diğer. [7], Roy ve diğer. [26], Varol ve diğer. [30], Zorlutuna ve diğer. [36] esnek topolojik uzaylar üzerine çalışmalar yaptılar.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Esnek Kümeler

Bu bölümde önce Molodtsov[20] tarafından ortaya atılmış olan esnek küme tanımı ve- rilecektir. Daha sonra Çağman[4] tarafından gözden geçirilmiş tanım verilecek ve tezin kalan bölümünde Çağman[5]'ın tanımı kullanılacaktır.

Tanım 2.1.1 [20] X evrensel küme ve E parametreler kümesi olsun. Bu durumda E parametreler kümesinden $\mathcal{P}(X)$ kuvvet kümesine tanımlı F fonksiyonuna, X kümesi üzerinde bir esnek küme denir ve (F, E) ikilisi ile gösterilir.

Tanım 2.1.2 [4] X evrensel küme ve E parametreler kümesi olsun. $F : E \to \mathcal{P}(X)$ fonksiyonuna X üzerinde bir esnek küme denir. Yani, bir esnek küme

$$F = \big\{(e, F(e)) : e \in E\big\}$$

şeklinde sıralı ikililerin bir kümesi olarak görülebilir. Eğer $e \in E$ için $F(e) = \emptyset$ ise, $(e, \emptyset)$ ikilisi esnek kümede gösterilmez. X üzerindeki E parametre kümesiyle tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi $S_E(X)$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.1 F esnek kümesi, Ordu iline yeni tayin olmuş bir memur çiftin, çocuklarını göndereceği okulların parametrelendirilmiş şekli olarak tanımlansın.

$$\begin{aligned} X &: \text{ Göz önüne alınan tüm okulların kümesi} \\ E &: \text{ Parametre kümesi} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} e_1 &= \text{ pahalı} \\ e_2 &= \text{ ucuz} \\ e_3 &= \text{ spor kompleksi mevcut} \\ e_4 &= \text{ üniversiteye giriş sınavında yerleştirme başarısı} \\ e_5 &= \text{ ingilizce eğitimi var} \\ e_6 &= \text{ eve yakın} \\ e_7 &= \text{ hafta sonu kursları mevcut} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanıyor. Bu durumda esnek kümeyi tanımlamak; pahalı okulları, ucuz okulları, ingilizce eğitimi iyi veren okulları ve diğerlerini göstermek anlamına gelir. Burada ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) için, e_i ifadesi i-nci parametre olmak üzere, $F(e_i)$ kümeleri keyfi olabilir.

Tanım 2.1.3 [5] Esnek kümeler üzerinde bazı temel küme işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

i. F ve $G \in S_E(X)$ olsun. Her $e \in E$ için $F(e) \subseteq G(e)$ oluyorsa, bu durumda G, F'yi esnek kapsar denir ve $F \sqsubseteq G$ biçiminde gösterilir.

ii. $F \in S_E(X)$ olsun. Her $e \in E$ için $F(e) = \emptyset$ oluyorsa F' ye esnek boş küme denir ve Φ ile gösterilir.

iii. $F \in S_E(X)$ olsun. Her $e \in E$ için $F(e) = X$ oluyorsa, F'ye esnek evrensel küme denir ve $\tilde{X}$ ile gösterilir.

iv. $F, G \in S_E(X)$ olsun. F ile G esnek kümelerinin esnek birleşimi her $e \in E$ için

$$(F \sqcup G)(e) = F(e) \cup G(e)$$

şeklinde tanımlanır.

v. $F, G \in S_E(X)$ olsun. F ile G esnek kümelerinin esnek kesişimi her $e \in E$ için

$$(F \sqcap G)(e) = F(e) \cap G(e)$$

şeklinde tanımlanır.

vi. $F \in S_E(X)$ olsun. F esnek kümesinin esnek tümleyeni $F^{\tilde{c}}$ ile gösterilir ve her $e \in E$ için

$$F^{\tilde{c}}(e) = X \setminus F(e)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1.1 [5] $F, G, H \in S_E(X)$ verilsin. Bu taktirde aşağıdaki iddialar doğrudur.

i. $F \sqcap F = F$

ii. $F \sqcup F = F$

iii. $F^{\tilde{c}} \sqcap F = \Phi$

iv. $F^{\tilde{c}} \sqcup F = \tilde{X}$

v. $\Phi^{\tilde{c}} = \tilde{X}$ ve $\tilde{X}^{\tilde{c}} = \Phi$

vi. $F \sqcap G = G \sqcap F$

vii. $F \sqcup G = G \sqcup F$

viii. $F \sqcap (G \sqcup H) = (F \sqcap G) \sqcup (F \sqcap H)$

ix. $F \sqcup (G \sqcap H) = (F \sqcup G) \sqcap (F \sqcup H)$

x. $(F \sqcap G)^{\tilde{c}} = F^{\tilde{c}} \sqcup G^{\tilde{c}}$

xi. $(F \sqcup G)^{\tilde{c}} = F^{\tilde{c}} \sqcap G^{\tilde{c}}$

xii. $F \sqcap \Phi = \Phi$ ve $F \sqcup \Phi = F$

xiii. $F \sqcup \tilde{X} = \tilde{X}$ ve $F \sqcap \tilde{X} = F$

Örnek 2.1.2 $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ olmak üzere, $F, G, H \in S_E(X)$ esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

$$\begin{aligned} F &= \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, X)\} \\ G &= \{(e_2, \{x_2\}), (e_3, \{x_1, x_3\})\} \\ H &= \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1, x_2\})\} \end{aligned}$$

Bu taktirde

i. $e_1 \in E$ için,

$$H(e_1) = \{x_2\} \text{ ve } F(e_1) = \{x_1, x_2\}$$

olduğundan $H(e_1) \subseteq F(e_1)$ elde edilir. Ayrıca $e_2 \in E$ için,

$$H(e_2) = \{x_1, x_2\} \text{ ve } F(e_2) = \{x_1, x_2, x_3\}$$

olduğundan $H(e_2) \subseteq F(e_2)$ bulunur. Dolayısıyla, $H \sqsubseteq F$ olur.

ii. $e_1, e_2, e_3 \in E$ için,

$$\begin{aligned}(F \sqcap G)(e_1) &= F(e_1) \cap G(e_1)\\ &= \{x_1, x_2\} \cap \emptyset\\ &= \emptyset\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(F \sqcap G)(e_2) &= F(e_2) \cap G(e_2)\\ &= X \cap \{x_2\}\\ &= \{x_2\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(F \sqcap G)(e_3) &= F(e_3) \cap G(e_3)\\ &= \emptyset \cap \{x_1, x_3\}\\ &= \emptyset\end{aligned}$$

olduğundan

$$F \sqcap G = \{(e_2, \{x_2\})\}$$

elde edilir.

iii. $e_1, e_2, e_3 \in E$ için,

$$\begin{aligned}(H \sqcup F)(e_1) &= H(e_1) \cup F(e_1)\\ &= \{x_2\} \cup \{x_1, x_2\}\\ &= \{x_1, x_2\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(H \sqcup F)(e_2) &= H(e_2) \cup F(e_2)\\ &= \{x_1, x_2\} \cup \{x_1, x_2, x_3\}\\ &= \{x_1, x_2, x_3\}\end{aligned}$$

$$(H \sqcup F)(e_3) = \emptyset$$

olduğundan

$$H \sqcup F = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1, x_2\})\}$$

elde edilir.

iv. $F = \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, X)\}$ esnek kümesinin esnek tümleyeni

$$\begin{aligned} F^{\tilde{c}}(e_1) &= \{x_3\} \\ F^{\tilde{c}}(e_2) &= \emptyset \\ F^{\tilde{c}}(e_3) &= X \end{aligned}$$

olduğundan

$$F^{\tilde{c}} = \{(e_1, \{x_3\}), (e_3, X)\}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.1.4 [28] $F \in S_E(X)$ olsun. Eğer bir $e \in E$ için, $F(e) \neq \emptyset$ ve her $e' \in E \setminus \{e\}$ için $F(e') = \emptyset$ oluyorsa F'ye bir esnek nokta denir ve e_F ile gösterilir.

Örnek 2.1.3 $E = \{a, b, c\}$ ve $X = \{x, y, z\}$ olsun. F esnek kümesi

$$F = \{(a, \{x, y\}), (b, \{y, z\}), (c, X)\}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} a_P &= (a, \{x\}) \\ b_G &= (b, \{z\}) \\ c_H &= (c, \{x, y\}) \\ c_K &= (c, X) \end{aligned}$$

$S_E(X)$ ' de esnek noktalardır.

Tanım 2.1.5 [28] $G \in S_E(X)$ ve e_F bir esnek nokta olsun. Eğer $F(e) \subseteq G(e)$ oluyorsa, e_F esnek noktası G esnek kümesine esnek aittir denir ve $e_F \tilde{\in} G$ ile gösterilir.

Not 2.1.1 Bir esnek nokta özel olarak $(e, F(e))$ biçiminde gösterilir.

Örnek 2.1.4 $E = \{a, b\}$ ve $X = \{x, y, z\}$ olmak üzere,

$$G = \{(a, \{x, y, z\}), (b, \{y, z\})\}$$

esnek kümesi için,

$$\begin{aligned} a_{F_1} &= (a, \{x\}) \,\tilde{\in}\, G, \\ a_{F_2} &= (a, \{y, z\}) \,\tilde{\in}\, G, \\ a_{F_3} &= (a, \{x, y, z\}) \,\tilde{\in}\, G \\ b_{F_4} &= (b, \{y\}) \,\tilde{\in}\, G \\ b_{F_5} &= (b, \{x, y, z\}) \,\tilde{\notin}\, G \end{aligned}$$

olur.

Tanım 2.1.6 [5] e_F ve e'_G iki esnek nokta olsun. Eğer $F(e) \cap G(e') = \emptyset$ ise, e_F ve e'_G esnek noktalarına farklı esnek noktalar denir ve $e_F \neq e'_G$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.2 [5] Bir esnek küme, tüm esnek noktalarının esnek birleşimi olarak yazılır.

Teorem 2.1.3 [28] $G \in S_E(X)$ ve, bir $e_F \tilde{\in} S_E(X)$ esnek noktası verilsin. Bu durumda, $e_F \tilde{\in} G$ ya da $e_F \tilde{\in} G^{\tilde{c}}$ ' dir.

İspat. $G \in S_E(X)$ ve $e_F \tilde{\in} S_E(X)$ olsun. Bu taktirde Teorem 2.1.1' in, $iii.$ ve $iv.$ maddeleri dikkate alındığında, $e_F \tilde{\in} G$ ya da $e_F \tilde{\in} G^{\tilde{c}}$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

2.2 Esnek Fonksiyon

Tanım 2.2.1 [10] $S_E(X)$ ve $S_K(Y)$ sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde tanımlanmış E ve K parametre kümelerine sahip tüm esnek kümelerin kümeleri olsun. $\varphi : X \to Y$ ve $\psi : E \to K$ iki fonksiyon olmak üzere, $\varphi_\psi : S_E(X) \to S_K(Y)$ fonksiyonuna esnek fonksiyon denir.

i. $F \in S_E(X)$' in görüntüsü, her $k \in K$ için

$$\varphi_\psi(F)(k) = \begin{cases} \bigcup_{e \in \psi^{-1}(k)} \varphi(f(e)), & \psi^{-1}(k) \neq \emptyset \\ \emptyset, & \psi^{-1}(k) = \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

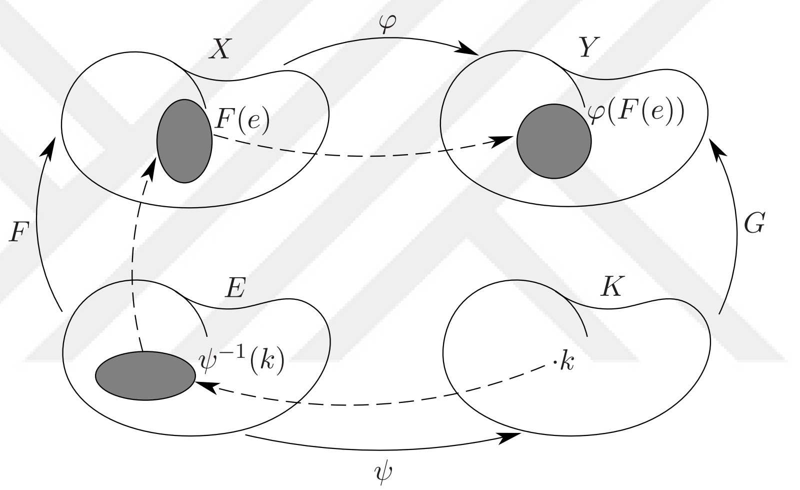
ii. $G \in S_K(Y)$' nin ters görüntüsü her $e \in E$ için

$$\varphi_\psi^{-1}(G)(e) = \varphi^{-1}(G(\psi(e)))$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 2.2.1 $\varphi_\psi : S_E(X) \to S_K(Y)$ esnek fonksiyonunu oluşturan φ ve ψ fonksiyonları için aşağıdaki diyagram sağlanmaktadır.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "F"'] & K \arrow[d, "G"] \\ X \arrow[r, "\varphi"'] & Y \end{tikzcd}$$



Şekil 2.1: Esnek fonksiyon için temsili bir gösterim

Örnek 2.2.1 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $K = \{k_1, k_2, k_3\}$ olmak üzere, $\varphi : X \to Y$ ve $\psi : E \to K$ fonksiyonları

$$\varphi(x_1) = y_1$$
$$\varphi(x_2) = y_4$$
$$\varphi(x_3) = y_1$$
$$\varphi(x_4) = y_2$$

ve

$$\psi(e_1) = k_1$$
$$\psi(e_2) = k_2$$
$$\psi(e_3) = k_2$$

şeklinde tanımlanmış olsun.

$$F = \{(e_1, \{x_2\}), (e_3, \{x_1, x_4\})\} \in S_E(X)$$

ve

$$G = \{(k_1, \{y_1, y_4\}), (k_2, \{y_3\})\} \in S_K(Y)$$

olmak üzere, F ' nin φ_ψ esnek fonksiyon altındaki görüntüsü;

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(k_1) &= \{e_1\} \\ \psi^{-1}(k_2) &= \{e_2, e_3\} \\ \psi^{-1}(k_3) &= \emptyset \end{aligned}$$

olarak bulunur ve

$$\begin{aligned} \varphi_\psi(F)(k_1) &= \varphi(F(e_1)) \\ &= \{y_4\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_\psi(F)(k_2) &= \varphi(F(e_2)) \cup \varphi(F(e_3)) \\ &= \emptyset \cup \{y_1, y_2\} \\ &= \{y_1, y_2\} \end{aligned}$$

$$\varphi_\psi(F)(k_3) = \emptyset$$

ve sonuç olarak,

$$\varphi_\psi(F) = \{(k_1, \{y_4\}), (k_2, \{y_1, y_2\})\}$$

olur. G' nin φ_ψ esnek fonksiyonu altındaki ters görüntüsü ise,

$$\begin{aligned} \varphi_\psi^{-1}(G)(e_1) &= \varphi^{-1}(G(\psi(e_1))) \\ &= \varphi^{-1}(G(k_1)) \\ &= \varphi^{-1}(\{y_1, y_4\}) \\ &= \{x_1, x_2, x_3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_\psi^{-1}(G)(e_2) &= \varphi^{-1}(G(\psi(e_2))) \\ &= \varphi^{-1}(G(k_2)) \\ &= \varphi^{-1}(\{y_3\}) = \emptyset \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_\psi^{-1}(G)(e_3) &= \varphi^{-1}(G(\psi(e_3))) \\
&= \varphi^{-1}(G(k_2)) \\
&= \varphi^{-1}(\{y_3\}) = \emptyset
\end{aligned}
$$

olduğundan,

$$\varphi_\psi^{-1}(G) = \{(e_1, \{x_1, x_2, x_3\})\}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.2.2 [10, 36] $\varphi_\psi : S_E(X) \to S_K(Y)$ bir esnek fonksiyon olsun.

i. Eğer $\varphi : X \to Y$ ve $\psi : E \to K$ bire bir fonksiyonlar ise, φ_ψ esnek fonksiyonuna esnek bire bir fonksiyon denir.

ii. Eğer $\varphi : X \to Y$ ve $\psi : E \to K$ örten fonksiyonlar ise, φ_ψ esnek fonksiyonuna esnek örten fonksiyon denir.

Teorem 2.2.1 [10, 36] $\varphi_\psi : S_E(X) \to S_K(Y)$ bir esnek fonksiyon ve $F_1, F_2 \in S_E(X)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki iddialar doğrudur.

i. $\varphi_\psi(\Phi) = \Phi$

ii. $\varphi_\psi(\tilde{X}) \sqsubseteq \tilde{Y}$

iii. $\varphi_\psi(F_1 \sqcup F_2) = \varphi_\psi(F_1) \sqcup \varphi_\psi(F_2)$

iv. $\varphi_\psi(F_1 \sqcap F_2) \sqsubseteq \varphi_\psi(F_1) \sqcap \varphi_\psi(F_2)$ (Eğer φ_ψ esnek bire bir ise eşitlik sağlanır.)

v. $F_1 \sqsubseteq F_2$ ise, $\varphi_\psi(F_1) \sqsubseteq \varphi_\psi(F_2)$' dir.

Teorem 2.2.2 [10, 36] $\varphi_\psi : S_E(X) \to S_K(Y)$ bir esnek fonksiyon ve $G_1, G_2 \in S_E(X)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki iddialar doğrudur.

i. $\varphi_\psi^{-1}(\Phi) = \Phi$

ii. $\varphi_\psi^{-1}(\tilde{Y}) = \tilde{X}$

iii. $\varphi_\psi^{-1}(G_1 \sqcup G_2) = \varphi_\psi^{-1}(G_1) \sqcup \varphi_\psi^{-1}(G_2)$

iv. $\varphi_\psi^{-1}(G_1 \sqcap G_2) = \varphi_\psi^{-1}(G_1) \sqcap \varphi_\psi^{-1}(G_2)$

v. $G_1 \sqsubseteq G_2$ ise, $\varphi_\psi^{-1}(G_1) \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(G_2)$' dir.

Teorem 2.2.3 [10, 36] $\varphi_\psi : S_E(X) \to S_K(Y)$ bir esnek fonksiyon olmak üzere, $F \in S_E(X)$ ve $G \in S_K(Y)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki iddialar doğrudur.

i. $F \sqsubseteq \varphi_\psi^{-1}(\varphi_\psi(F))$'dir. (Eğer φ_ψ esnek bire bir ise eşitlik sağlanır.)

ii. $\varphi_\psi(\varphi_\psi^{-1}(G)) \sqsubseteq G$'dir. (Eğer φ_ψ esnek örten ise eşitlik sağlanır.)

iii. $\varphi_\psi^{-1}(G^{\tilde{c}}) = (\varphi_\psi^{-1}(G))^{\tilde{c}}$'dir.

iv. φ_ψ esnek bire bir ve esnek örten ise, $\varphi_\psi(F^{\tilde{c}}) = (\varphi_\psi(F))^{\tilde{c}}$'dir.

2.3 Esnek Topolojik Uzay

Tanım 2.3.1 [5] Aşağıdaki şartları sağlayan $\tau \subseteq S_E(X)$ esnek küme ailesine esnek topoloji denir.

ET1. $\tilde{X}, \Phi \in \tau$

ET2. Herhangi $F, G \in \tau$ için, $F \sqcap G \in \tau$

ET3. Herhangi bir $\{F_i : i \in I\} \subseteq \tau$ esnek küme ailesi için, $\bigsqcup_{i \in I} F_i \in \tau$' dur.

Eğer τ bir esnek topoloji ise (X, τ, E) üçlüsüne bir esnek topolojik uzay denir. (X, τ, E) esnek topolojik uzayında τ' nun elemanlarına esnek açık küme adı verilir.

Örnek 2.3.1 $\tau_1 = \{\Phi, \tilde{X}\}$ ve $\tau_2 = S_E(X)$ esnek küme aileleri birer esnek topolojidir.

Tanım 2.3.2 [28] (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve $F \in S_E(X)$ olsun. Eğer $F^{\tilde{c}} \in \tau$ ise bu durumda F' ye (τ esnek topolojisine göre) esnek kapalı küme denir.

Teorem 2.3.1 [28] (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda, her $e \in E$ için $\tau_e = \{F_i(e) : i \in I\}$ küme ailesi X üzerinde bir topolojidir.

İspat.

T1. $\Phi, \tilde{X} \in \tau$ için, $\emptyset, X \in \tau_e$' dir.

T2. $F(e), G(e) \in \tau_e$ için, $F \sqcap G \in \tau$ olduğundan, $F(e) \cap G(e) \in \tau_e$' dir.

T3. Herhangi bir $e \in E$ için, $\{F_j(e) : j \in J \subseteq I\} \subseteq \tau_e$ küme ailesi verilsin. Her $j \in J$ için, $F_j \in \tau$ olduğundan

$$\bigsqcup_{j \in J} F_j \in \tau$$

olur. Dolayısıyla

$$\left(\bigsqcup_{j \in J} F_j\right)(e) = \bigcup_{j \in J} F_j(e) \in \tau_e$$

elde edilir. Şu halde her $e \in E$ için, (X, τ_e) bir topolojik uzaydır.

Uyarı 2.3.1 Teorem 2.3.1' in tersi doğru değildir. Yani parametrelerinin her biri için X kümesi üzerinde bir topoloji olan, ancak kendisi esnek topoloji olmayan esnek küme aileleri mevcuttur. Örneğin, $X = \{x, y, z\}$ evrensel kümesi üzerinde $E = \{a, b\}$ parametre kümesiyle tanımlanmış olan

$$\begin{aligned} F_1 &= \big\{(a, \{y\}), (b, \{x\})\big\} \\ F_2 &= \big\{(a, \{y, z\}), (b, \{x, y\})\big\} \\ F_3 &= \big\{(a, \{x, y\}), (b, \{x, y\})\big\} \\ F_4 &= \big\{(a, \{y\}), (b, \{x, z\})\big\} \end{aligned}$$

esnek kümeleri verilsin. Ayrıca

$$\tau = \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_2, F_3, F_4\}$$

olsun. Parametrelerin her birine göre yazılan

$$\tau_a = \big\{\emptyset, X, \{y\}, \{x, y\}, \{y, z\}\big\}$$

ve

$$\tau_b = \big\{\emptyset, X, \{x\}, \{x, y\}, \{x, z\}\big\}$$

esnek küme aileleri birer topoloji iken, τ' nun kendisi bir esnek topoloji değildir.

Teorem 2.3.2 [28] $\{(X, \tau_i, E) : i \in I\}$ esnek topolojik uzayların bir ailesi olsun. Bu taktirde $\left(X, \bigcap_{i\in I} \tau_i, E\right)$ üçlüsü bir esnek topolojik uzaydır.

Uyarı 2.3.2 $\{(X, \tau_i, E) : i \in I\}$ esnek topolojik uzayların bir ailesi olsun. Bu taktirde $\bigsqcup_{i\in I} \tau_i$ küme ailesi her zaman bir esnek topoloji değildir. Örneğin, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel kümesi üzerinde $E = \{e_1, e_2\}$ parametre kümesine bağlı olarak yazılan esnek kümeler

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1\})\}, \\ F_2 &= \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_2\})\}, \\ F_3 &= \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, X)\}, \\ F_4 &= \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1, x_3\})\}, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1\})\}, \\ G_2 &= \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_2\})\}, \\ G_3 &= \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1, x_2\})\}, \\ G_4 &= \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1, x_3\})\}, \end{aligned}$$

olmak üzere, τ_1 ve τ_2 esnek topolojileri

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_2, F_3, F_4\} \\ \tau_2 &= \{\Phi, \tilde{X}, G_1, G_2, G_3, G_4\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanmış olsun. Bu taktirde,

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_2, F_3, F_4, G_3, G_4\}$$

esnek küme ailesinin bir esnek topoloji olmadığı görülür.
Gerçekten,

$$F_2 \sqcup G_3 = \{(e_1, X), (e_2, \{x_1, x_2\})\} \notin \tau$$

olmaktadır. Bu yüzden τ , X üzerinde bir esnek topoloji değildir.

Teorem 2.3.3 [28] (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve $A \subseteq X$ boştan farklı bir alt küme olsun. Bu durumda

$$\tilde{A} = \{(e, A) : e \in E\}$$

olmak üzere,

$$\tau_A = \left\{ F \sqcap \tilde{A} : \ \ F \in \tau \right\}$$

şeklinde tanımlı esnek küme ailesi bir esnek topolojidir.

İspat.

ET1. $\tilde{X}, \Phi \in \tau$ olduğu biliniyor. Buradan her $e \in E$ için

$$\tilde{X}(e) \cap \tilde{A}(e) = X \cap A = A$$

olacağından $\tilde{A} \in \tau_A$ olur. Benzer şekilde her $e \in E$ için

$$\Phi(e) \cap \tilde{A}(e) = \emptyset \cap A = \emptyset$$

olacağından $\Phi \in \tau_A$ bulunur.

ET2. Herhangi $G_1, G_2 \in \tau_A$ verilsin. Buradan her $e \in E$ için

$$G_1(e) = F_1(e) \cap A \ \text{ ve } \ G_2(e) = F_2(e) \cap A$$

olacak şekilde $F_1, F_2 \in \tau$ vardır. Dolayısıyla her $e \in E$ için

$$\begin{aligned} (G_1 \sqcap G_2)(e) &= G_1(e) \cap G_2(e) \\ &= (F_1(e) \cap A) \cap (F_2(e) \cap A) \\ &= (F_1(e) \cap F_2(e)) \cap A \\ &= (F_1 \sqcap F_2)(e) \cap A \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $G_1 \sqcap G_2 \in \tau_A$ olur.

ET3. Herhangi bir $\{G_i : i \in I\} \subseteq \tau_A$ ailesi verilsin. Buradan, her $e \in E$ için

$$G_i(e) = F_i(e) \cap A$$

olacak şekilde $F_i \in \tau$ vardır. Böylece her $e \in E$ için

$$\begin{aligned} \left(\bigsqcup_{i \in I} G_i \right)(e) &= \bigcup_{i \in I} G_i(e) \\ &= \bigcup_{i \in I} \big(F_i(e) \cap A \big) \\ &= \left(\bigcup_{i \in I} F_i(e) \right) \cap A \\ &= \left(\left(\bigsqcup_{i \in I} F_i \right)(e) \right) \cap A \end{aligned}$$

olacağından $\bigsqcup_{i \in I} G_i \in \tau_A$ elde edilir.

Tanım 2.3.3 (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay olmak üzere, Teorem 2.3.3' deki gibi tanımlanmış τ_A esnek topolojisine τ esnek topolojisinin bir esnek alt topolojisi denir ve (A, τ_A, E) üçlüsüne de, (X, τ, E)' nin bir esnek alt uzayı adı verilir.

Tanım 2.3.4 Bir esnek topolojik uzayda sağlanan özellik, bu uzayın herhangi bir esnek alt uzayında da sağlanıyorsa bu özelliğe esnek kalıtsal özellik denir.

Tanım 2.3.5 [28] (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve $F \in S_E(X)$ olsun. Bu taktirde F' nin esnek içi, F° ile gösterilir ve

$$F^\circ = \bigsqcup_{\substack{G \in \tau \\ G \sqsubseteq F}} G$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.6 [28] (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve $F \in S_E(X)$ olsun. Bu taktirde F' nin esnek kapanışı $\overline{F}$ ile gösterilir ve

$$\overline{F} = \bigsqcap_{\substack{H^{\tilde{c}} \in \tau \\ F \sqsubseteq H}} H$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.3.2 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel kümesi üzerinde $E = \{e_1, e_2\}$ parametre kümesine bağlı olarak yazılan esnek kümeler

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1\})\}, \\ F_2 &= \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_2\})\}, \\ F_3 &= \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, X)\}, \\ F_4 &= \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1, x_3\})\} \end{aligned}$$

olmak üzere, X üzerinde tanımlı bir esnek topoloji

$$\tau = \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_2, F_3, F_4\}$$

olsun. Ayrıca bir $F \in S_E(X)$ esnek kümesi

$$F = \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, X)\}$$

şeklinde verilsin. F ' nin esnek içi, bu kümenin kapsadığı ve verilen esnek topolojiye ait olan en geniş esnek açık küme olacağından $F^{\circ} = F_2$' dir. Benzer şekilde yukarıda verilen tanıma göre, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evrensel kümesi üzerinde $E = \{e_1, e_2\}$ parametre kümesine bağlı olarak yazılan esnek kümeler

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1\})\}, \\ G_2 &= \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_2\})\}, \\ G_3 &= \{(e_1, \{x_1, x_2\}), (e_2, \{x_1, x_2\})\}, \\ G_4 &= \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1, x_3\})\} \end{aligned}$$

olmak üzere, X üzerinde tanımlı bir esnek topoloji,

$$\tau = \{\Phi, \tilde{X}, G_1, G_2, G_3, G_4\}$$

olsun. τ ' nun elemanlarının esnek tümleyenleri esnek kapalı olacağından, bu esnek
uzaydaki tüm esnek kapalı kümeler

$$\begin{aligned} H_1 &= G_1^{\tilde{c}} = \{(e_1, \{x_1, x_3\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\} \\ H_2 &= G_2^{\tilde{c}} = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_3\})\} \\ H_3 &= G_3^{\tilde{c}} = \{(e_1, \{x_3\}), (e_2, \{x_3\})\} \\ H_4 &= G_4^{\tilde{c}} = \{(e_1, \{x_1, x_3\}), (e_2, \{x_2\})\} \end{aligned}$$

olur. $G \in S_E(X)$ esnek kümesi ise,

$$G = \{(e_1, \{x_3\}), (e_2, \{x_2\})\}$$

şeklinde tanımlansın. G ' nin esnek kapanışı, bu kümeyi kapsayan en küçük kapalı esnek küme olacağından $\overline{G} = H_4$ olur.

Teorem 2.3.4 [36] (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay, $F \in S_E(X)$ ve $\{F_i : i \in I\} \subseteq S_E(X)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki iddialar doğrudur.

i. F esnek açıktır ancak ve ancak $F^{\circ} = F$ 'dir.

ii. F esnek kapalıdır ancak ve ancak $\overline{F} = F$ 'dir.

iii. $F_1 \subseteq F_2$ ise, $F_1^{\circ} \subseteq F_2^{\circ}$ ve $\overline{F_1} \subseteq \overline{F_2}$ 'dir.

iv. $\overline{\bigsqcup_{i\in I} F_i} = \bigsqcup_{i\in I} \overline{F_i}$

v. $\overline{\bigsqcap_{i\in I} F_i} \sqsubseteq \bigsqcap_{i\in I} \overline{F_i}$

Tanım 2.3.7 [36] (X, τ, E) ve (Y, σ, K) iki esnek topolojik uzay olsun. $\varphi_\psi : S_E(X) \to S_K(Y)$ bir esnek fonksiyon olmak üzere her $G \in \sigma$ için, $\varphi_\psi^{-1}(G) \in \tau$ ise, φ_ψ esnek fonksi- yonuna esnek sürekli fonksiyon denir.

Örnek 2.3.3 $\tau = S_E(X)$ ve $\sigma = \{\Phi, \tilde{Y}\}$ olmak üzere, her $\varphi_\psi : (X, \tau, E) \to (Y, \sigma, K)$ esnek fonksiyonu, bir esnek sürekli fonksiyondur.

Uyarı 2.3.3 O halde esnek topolojik uzaylarda esnek süreklilik, sadece esnek topolojinin yapısına bağlıdır.

Tanım 2.3.8 $\varphi_\psi : (X, \tau, E) \to (Y, \sigma, K)$ esnek fonksiyonu esnek sürekli, esnek bire bir, esnek örten ve φ_ψ^{-1} esnek fonksiyonu da esnek sürekli ise, φ_ψ esnek fonksiyonuna bir esnek homeomorfizm denir.

Tanım 2.3.9 Esnek homeomorfizm altında korunan özelliklere esnek topolojik özellik denir.

Teorem 2.3.5 $\varphi_\psi : (X, \tau, E) \to (Y, \sigma, K)$ bir esnek homeomorfizm ise, her $F \in \tau$ için $\varphi_\psi(F) \in \sigma$ olur.

İspat. Herhangi bir $F \in \tau$ alalım. φ_ψ esnek homeomorfizm olduğundan $\varphi_\psi^{-1} : (Y, \sigma, K) \to (X, \tau, E)$ fonksiyonu da esnek süreklidir. Dolayısıyla

$$(\varphi_\psi^{-1})^{-1}(F) = \varphi_\psi(F) \in \sigma$$

elde edilir.

3. ESNEK AYIRMA AKSİYOMLARI

Bu bölümde şimdiye kadar tanımları ve bazı özellikleri verilen esnek topolojik uzaylarda ayırma aksiyomlarından bahsedilecektir. Esnek topolojide ayırma aksiyomları üzerine yapılan çalışmaların pek çoğu kaynakça kısmında referans olarak verilmiştir. Ancak bunlardan yeni olanı Hussain ve Ahmad [15]' in çalışması ile daha önce pek çok çalışmaya referans olan Shabir ve Naz [28]' ın makaleleri dikkat çekici olanlardır. Burada adı geçen birinci makale tıpkı Çağman [4]' ın yapmış olduğu çalışma gibi, notasyonlarda ve esnek kümeleri sembolize etme bakımından daha faydalı bir eser olarak görülmektedir. Sözü edilen ikinci makale ise zaten tanımlarda temel referanslardan birini oluşturmaktadır.

3.1 Esnek T_0 Uzayı

Tanım 3.1.1 [28] (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay olsun. $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan $a_F, b_G \tilde{\in} S_E(X)$ için, $a_F \tilde{\in} H_1$ ve $b_G \tilde{\notin} H_1$ veya $a_F \tilde{\notin} H_2$ ve $b_G \tilde{\in} H_2$ olacak şekilde $H_1 \in \tau$ veya $H_2 \in \tau$ varsa (X, τ, E) esnek topolojik uzayına bir esnek T_0 uzayı denir ve ET_0 ile gösterilir.

Örnek 3.1.1 $E = \{a, b\}$ ve $X = \{x, y, z\}$ olmak üzere $F_1, F_2, F_3 \in S_E(X)$ esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(a, \{x, y\}), (b, X)\} \\ F_2 &= \{(a, \{x\}), (b, \{z\})\} \\ F_3 &= \{(a, X), (b, \{x, z\})\} \end{aligned}$$

olmak üzere, $S_E(X)$' e ait bütün esnek noktaların

$$\begin{aligned} e_{F_1} &= (a, \{x\}) \\ e_{F_2} &= (a, \{y\}) \\ e_{F_3} &= (a, \{z\}) \\ e_{F_4} &= (a, \{x, y\}) \\ e_{F_5} &= (a, \{x, z\}) \\ e_{F_6} &= (a, \{y, z\}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e_{F_7} &= (a, \{x, y, z\}) \\
e_{F_8} &= (b, \{x\}) \\
e_{F_9} &= (b, \{y\}) \\
e_{F_{10}} &= (b, \{z\}) \\
e_{F_{11}} &= (b, \{x, y\}) \\
e_{F_{12}} &= (b, \{x, z\}) \\
e_{F_{13}} &= (b, \{y, z\}) \\
e_{F_{14}} &= (b, \{x, y, z\})
\end{aligned}
$$

olduğu açıktır. X üzerinde tanımlanmış olan esnek topoloji de

$$\tau = \{\emptyset, \tilde{X}, F_1, F_2, F_3\}$$

olsun. Açıkça görüldüğü gibi, F_1 esnek kümesine esnek ait olan bir nokta aynı zamanda F_2 veya F_3 esnek kümesine esnek ait değildir. Benzer durum F_2 ve F_3 esnek kümeleri için de söz konusudur. Bu durum, aşağıdaki bilgiler yardımıyla açıkça görülmektedir.

$$
\begin{aligned}
e_{F_4} &= (a, \{x, y\}) \tilde{\in} F_1 \\
e_{F_4} &= (a, \{x, y\}) \tilde{\notin} F_2 \\
e_{F_4} &= (a, \{x, y\}) \tilde{\notin} F_3 \\
e_{F_1} &= (a, \{x\}) \tilde{\in} F_2 \\
e_{F_1} &= (a, \{x\}) \tilde{\notin} F_1 \\
e_{F_1} &= (a, \{x\}) \tilde{\notin} F_3 \\
e_{F_7} &= (a, \{x, y, z\}) \tilde{\in} F_3 \\
e_{F_7} &= (a, \{x, y, z\}) \tilde{\notin} F_1 \\
e_{F_7} &= (a, \{x, y, z\}) \tilde{\notin} F_2 \\
e_{F_{14}} &= (b, \{x, y, z\}) \tilde{\in} F_1 \\
e_{F_{14}} &= (b, \{x, y, z\}) \tilde{\notin} F_2 \\
e_{F_{14}} &= (b, \{x, y, z\}) \tilde{\notin} F_3 \\
e_{F_{10}} &= (b, \{z\}) \tilde{\in} F_2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} e_{F_{10}} &= (b,\{z\})\tilde{\notin}F_1 \\ e_{F_{10}} &= (b,\{z\})\tilde{\notin}F_3 \\ e_{F_{12}} &= (b,\{x,z\})\tilde{\in}F_3 \\ e_{F_{12}} &= (b,\{x,z\})\tilde{\notin}F_1 \\ e_{F_{12}} &= (b,\{x,z\})\tilde{\notin}F_2 \end{aligned}$$

Bu yüzden verilen topoloji tanım gereği, ET_0 olur.

Teorem 3.1.1 [28] ET_0 uzayı olma özelliği esnek kalıtsal bir özelliktir. (Yani bir esnek T_0 uzayın her esnek alt uzayı da esnek T_0' dır.)

İspat. (X,τ,E) bir ET_0 uzayı olsun. Boştan farklı bir $A \subseteq X$ ve $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan $a_F\,, b_G\tilde{\in}\tilde{A}$ verilsin. (X,τ,E) bir ET_0 olduğundan $a_F\tilde{\in}H_1$ ve $b_G\tilde{\notin}H_1$ veya benzer biçimde $b_G\tilde{\in}H_2$ ve $a_F\tilde{\notin}H_2$ olacak şekilde $H_1, H_2 \in \tau$ bulunabilir. $\tilde{A}\sqcap H_1, \tilde{A}\sqcap H_2 \in \tau_A$ olduğundan, $a_F\tilde{\in}\tilde{A}\sqcap H_1$ ve $b_G\tilde{\notin}\tilde{A}\sqcap H_1$ veya benzer biçimde $b_G\tilde{\in}\tilde{A}\sqcap H_2$ ve $a_F\tilde{\notin}\tilde{A}\sqcap H_2$ 'dir. Dolayısıyla (A,τ_A,E) esnek alt uzayı da bir ET_0 uzayıdır.

Örnek 3.1.2 $E = \{a,b,c\}$ ve $X = \{x,y,z\}$ olmak üzere, $F, G \in S_E(X)$ esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

$$\begin{aligned} F &= \{(a,\{x,y\}),(b,X)\} \\ G &= \{(a,X),(b,\{x,z\})\} \end{aligned}$$

X üzerinde tanımlanmış olan esnek topoloji ise,

$$\tau = \{\Phi, \tilde{X}, F, G\}$$

olsun. Açıkça görüldüğü gibi, F ve G esnek kümeleri için, F esnek kümesine esnek ait olan bir esnek nokta aynı zamanda G esnek kümesinde yoktur. Esnek noktaları teker teker kontrol edersek,

$$\begin{aligned} a_{F_1} &= (a,\{x,y\})\tilde{\in}F \\ a_{F_2} &= (a,\{x,y\})\tilde{\notin}G \\ b_{F_3} &= (b,X)\tilde{\in}F \\ a_{F_4} &= (a,X)\tilde{\notin}G \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_{F_5} &= (a, X)\tilde{\in} G \\
b_{F_6} &= (a, X)\tilde{\notin} F \\
b_{F_7} &= (b, \{x, z\})\tilde{\in} G \\
b_{F_8} &= (b, \{x, z\})\tilde{\notin} F
\end{aligned}
$$

olur. Bu yüzden, topoloji tanım gereği, esnek T_0 olur. Burada aynı örnek üzerinden devam edilerek alt uzayın durumu da incelenebilir. Kabul edelim ki $A \subseteq X$ evrensel kümesinin elemanları, $A = \{x, y\}$ olsun. Bu durumda E parametre kümesi aynı kalmak üzere, esnek kümeler aşağıdaki gibi olsun.

$$
\begin{aligned}
M &= \{(a, \{x\}), (b, A)\} \\
N &= \{(a, A), (b, \{y\})\}
\end{aligned}
$$

A üzerinde tanımlanmış olan esnek topoloji ise,

$$
\tau_A = \{\Phi, \tilde{A}, M, N\}
$$

olsun. M ve N esnek kümeleri için, M esnek kümesine esnek ait olan bir esnek nokta aynı zamanda N esnek kümesinde yoktur. Esnek noktaları sırayla incelersek,

$$
\begin{aligned}
a_P &= (a, \{x\})\tilde{\in} M \\
a_P &= (a, \{x\})\tilde{\notin} N \\
b_R &= (b, A)\tilde{\in} M \\
b_R &= (b, A)\tilde{\notin} N \\
a_S &= (a, A)\tilde{\in} N \\
a_S &= (a, A)\tilde{\notin} M \\
b_T &= (b, \{y\})\tilde{\in} N \\
b_T &= (b, \{y\})\tilde{\notin} M
\end{aligned}
$$

Bu yüzden verilen topoloji, tanım gereği ET_0 olur.

Herhangi bir (X, τ, E) esnek topolojik uzayı eğer ET_0 ise, her $e \in E$ için, (X, τ_e) topolojik uzayı bir T_0 uzayı olmayabilir. Bunun için uzaydaki her $e \in E$ için verilen esnek noktaların parametreye göre birbirinin esnek tümleyeni olması gerekir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 3.1.2 [28] (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay olsun. $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan $a_F, b_G \tilde{\in} S_E(X)$ verilsin. Eğer H_1, H_2 esnek açık kümeleri için $a_F \tilde{\in} H_1$ iken $b_G \tilde{\in} H_1^{\tilde{c}}$ veya benzer şekilde $b_G \tilde{\in} H_2$ iken $a_F \tilde{\in} H_2^{\tilde{c}}$ oluyorsa bu durumda (X, τ, E) bir ET_0 ve (X, τ_a) ve (X, τ_b) de birer T_0 ' dır.

İspat. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay olsun. $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan $a_F, b_G \tilde{\in} S_E(X)$ olmak üzere, $H_1, H_2 \in S_E(X)$ esnek açık kümeleri için $a_F \tilde{\in} H_1$ ve $b_G \tilde{\in} H_1^{\tilde{c}}$ veya benzer şekilde $b_G \tilde{\in} H_2$ ve $a_F \tilde{\in} H_2^{\tilde{c}}$ verilsin. Böylece $F(a) \subseteq H_1(a)$ ve $G(b) \subseteq H_1(b)^c$, $G(b) \subseteq H_2(b)$ ve $F(a) \subseteq H_2^c(a)$ olur. Şu halde (X, τ_a) ve (X, τ_b) birer T_0 uzayıdır.

Örnek 3.1.3 $E = \{a, b\}$ ve $X = \{x, y, z\}$ olmak üzere, $F_1, F_2, F_3, F_4 \in S_E(X)$ esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(a, \{x, y\}), (b, \{x, y\})\} \\ F_2 &= \{(a, \{z\}), (b, \{z\})\} \\ F_3 &= \{(a, X)\} \\ F_4 &= \{(b, X)\} \end{aligned}$$

X üzerinde tanımlanmış olan esnek topoloji,

$$\tau = \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_2, F_3, F_4\}$$

olmak üzere, parametrelere bağlı olan topolojiler ise,

$$\tau_a = \{\emptyset, X, \{x, y\}, \{z\}\}$$

ve

$$\tau_b = \{\emptyset, X, \{x, y\}, \{z\}\}$$

olsun. a ve b parametrelerine göre kurulmuş olan bu topolojilerin T_0 olduğu açıktır. Çünkü

$$\begin{aligned} a_{F_1} &= (a, \{x, y\}) \tilde{\in} F_1 \\ a_{F_1} &= (a, \{x, y\}) \tilde{\notin} F_2 \\ a_{F_1} &= (a, \{x, y\}) \tilde{\notin} F_4 \\ a_{F_2} &= (a, \{z\}) \tilde{\in} F_2 \\ a_{F_2} &= (a, \{z\}) \tilde{\notin} F_1 \end{aligned}$$

$$a_{F_2} = (a, \{z\})\tilde{\notin} F_4$$
$$a_{F_3} = (a, X)\tilde{\in} F_3$$
$$a_{F_3} = (a, X)\tilde{\notin} F_1$$
$$a_{F_3} = (a, X)\tilde{\notin} F_2$$
$$a_{F_3} = (a, X)\tilde{\notin} F_4$$

olur. Bu yüzden τ_a bir T_0 uzayıdır. Benzer biçimde

$$b_{F_1} = (b, \{x, y\})\tilde{\in} F_1$$
$$b_{F_1} = (b, \{x, y\})\tilde{\notin} F_2$$
$$b_{F_1} = (b, \{x, y\})\tilde{\notin} F_3$$
$$b_{F_2} = (b, \{z\})\tilde{\in} F_2$$
$$b_{F_2} = (b, \{z\})\tilde{\notin} F_1$$
$$b_{F_2} = (b, \{z\})\tilde{\notin} F_3$$
$$b_{F_4} = (b, X)\tilde{\in} F_4$$
$$b_{F_4} = (b, X)\tilde{\notin} F_1$$
$$b_{F_4} = (b, X)\tilde{\notin} F_2$$
$$b_{F_4} = (b, X)\tilde{\notin} F_3$$

olur. Bu yüzden τ_b de bir T_0 uzayıdır.

Teorem 3.1.3 [28] Esnek topolojik uzaylarda ET_0 olma özelliği, bir esnek topolojik özelliktir.

İspat. (X, τ, E) ve (Y, σ, K) iki ET_0 uzayı, $\varphi_\psi : S_E(X) \to S_K(Y)$ bir esnek homeomorfizm olsun. $k_{G_1} \neq k'_{G_2}$ koşulunu sağlayan her $k_{G_1}, k'_{G_2}\tilde{\in} S_K(Y)$ için, φ_ψ esnek örten olduğundan $k_{G_1} = \varphi_\psi(e_{F_1})$ ve $k'_{G_2} = \varphi_\psi(e'_{F_2})$ olacak şekilde $e_{F_1}, e'_{F_2}\tilde{\in} S_E(X)$ vardır. φ_ψ esnek bire bir olduğundan $e_{F_1} \neq e'_{F_2}$ ' dir. (X, τ, E) bir esnek ET_0 uzayı olduğundan

$$e_{F_1}\tilde{\in} H_1 \ , \ e'_{F_2}\tilde{\notin} H_1$$

veya

$$e'_{F_2}\tilde{\in} H_2 \ , \ e_{F_1}\tilde{\notin} H_2$$

olacak şekilde $H_1, H_2 \in \tau$ vardır. Teorem 2.3.5' ten φ_ψ esnek homeomorfizmi esnek açık kümeleri esnek açık kümelere dönüştürür. Dolayısıyla $\varphi_\psi(H_1)$, $\varphi_\psi(H_2)$ $\in \sigma$ olur.

$$\varphi_\psi(e_{F_1}) = k_{G_1} \tilde{\in} \varphi_\psi(H_1) \ , \ \varphi_\psi(e'_{F_2}) = k'_{G_2} \tilde{\notin} \varphi_\psi(H_1)$$

veya

$$\varphi_\psi(e'_{F_2}) = k'_{G_2} \tilde{\in} \varphi_\psi(H_2) \ , \ \varphi_\psi(e_{F_1}) = k_{G_1} \tilde{\notin} \varphi_\psi(H_2)$$

olduğundan (Y, σ, K) bir ET_0 uzayıdır. Bir ET_0 uzayı ile topolojik eşyapılı olan her uzay da bir ET_0 uzayıdır. Yani esnek topolojik uzaylarda ET_0 uzayı olma özelliği esnek topolojik bir özelliktir.

3.2 Esnek T_1 Uzayı

Tanım 3.2.1 [28] (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay olsun. $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan $a_F, b_G \tilde{\in} S_E(X)$ için, $a_F \tilde{\in} H_1$ iken $b_G \tilde{\notin} H_1$ ve $a_F \tilde{\notin} H_2$ iken $b_G \tilde{\in} H_2$ olacak şekilde $H_1, H_2 \in \tau$ esnek açık kümeleri varsa (X, τ, E) uzayına bir esnek T_1 uzayı denir ve ET_1 ile gösterilir.

Örnek 3.2.1 $E = \{a, b\}$ ve $X = \{x, y, z\}$ olmak üzere, $F_1, F_2, F_3, F_4 \in S_E(X)$ esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(a, \{x, y\}), (b, \{x, y\})\} \\ F_2 &= \{(a, \{x\}), (b, \{y\})\} \\ F_3 &= \{(a, \{x, z\}), (b, \{x, z\})\} \\ F_4 &= \{(a, \{z\}), (b, \{x\})\} \end{aligned}$$

X üzerinde tanımlanmış olan esnek topoloji ise,

$$\tau = \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_2, F_3, F_4\}$$

olsun. Açıkça görüldüğü gibi,

$$\begin{aligned} a_{F_1} &= (a, \{x, y\}) \neq a_{F_2} = (a, \{x\}) \\ b_{F_1} &= (b, \{x, y\}) \neq b_{F_2} = (b, \{y\}) \\ a_{F_3} &= (a, \{x, z\}) \neq a_{F_4} = (a, \{z\}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_{F_3} &= (b,\{x,z\}) \neq b_{F_4} = (b,\{x\}) \\
a_{F_2} &= (a,\{x\}) \neq a_{F_4} = (a,\{z\}) \\
b_{F_2} &= (b,\{y\}) \neq b_{F_4} = (b,\{x\}) \\
a_{F_1} &= (a,\{x,y\}) \neq a_{F_4} = (a,\{z\}) \\
b_{F_1} &= (b,\{x,y\}) \neq b_{F_4} = (b,\{x\}) \\
a_{F_1} &= (a,\{x,y\}) \tilde{\in} F_1 \\
a_{F_1} &= (a,\{x,y\}) \tilde{\notin} F_2 \\
a_{F_2} &= (a,\{x\}) \tilde{\in} F_2 \\
a_{F_1} &= (a,\{x,y\}) \tilde{\notin} F_2 \\
b_{F_1} &= (b,\{x,y\}) \tilde{\in} F_1 \\
b_{F_1} &= (b,\{x,y\}) \tilde{\notin} F_2 \\
b_{F_2} &= (b,\{y\}) \tilde{\in} F_2 \\
b_{F_1} &= (b,\{x,y\}) \tilde{\notin} F_2 \\
a_{F_3} &= (a,\{x,z\}) \tilde{\in} F_3 \\
a_{F_3} &= (a,\{x,z\}) \tilde{\notin} F_4 \\
a_{F_4} &= (a,\{z\}) \tilde{\in} F_4 \\
a_{F_3} &= (a,\{x,z\}) \tilde{\notin} F_4 \\
b_{F_3} &= (b,\{x,z\}) \tilde{\in} F_3 \\
b_{F_3} &= (b,\{x,z\}) \tilde{\notin} F_4 \\
b_{F_4} &= (b,\{x\}) \tilde{\in} F_4 \\
b_{F_3} &= (b,\{x,z\}) \tilde{\notin} F_4 \\
a_{F_2} &= (a,\{x\}) \tilde{\in} F_2 \\
a_{F_4} &= (a,\{z\}) \tilde{\notin} F_4 \\
a_{F_4} &= (a,\{z\}) \tilde{\in} F_4 \\
a_{F_2} &= (a,\{x\}) \tilde{\notin} F_4 \\
b_{F_2} &= (b,\{y\}) \tilde{\in} F_2 \\
b_{F_4} &= (b,\{x\}) \tilde{\notin} F_4 \\
b_{F_4} &= (b,\{x\}) \tilde{\in} F_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{F_2} &= (b,\{y\})\tilde{\notin}F_4 \\
a_{F_1} &= (a,\{x,y\})\tilde{\in}F_1 \\
a_{F_4} &= (a,\{z\})\tilde{\notin}F_1 \\
a_{F_4} &= (a,\{z\})\tilde{\in}F_4 \\
a_{F_1} &= (a,\{x,y\})\tilde{\notin}F_4 \\
b_{F_1} &= (b,\{x,y\})\tilde{\in}F_1 \\
b_{F_4} &= (b,\{x\})\tilde{\notin}F_1 \\
b_{F_4} &= (b,\{x\})\tilde{\in}F_4 \\
b_{F_1} &= (b,\{x,y\})\tilde{\notin}F_4
\end{aligned}
$$

olur. Bu yüzden verilen topoloji, tanım gereği ET_1 uzayı olur.

Teorem 3.2.1 [28] ET_1 uzayı olma özelliği esnek kalıtsal bir özelliktir.

İspat. (X,τ,E) bir ET_1 uzayı olsun. Boştan farklı bir $A \subseteq X$ ve $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan $a_F, b_G\tilde{\in}A$ verilsin. (X,τ,E) bir ET_1 olduğundan $a_F\tilde{\in}H_1$ ve $b_G\tilde{\notin}H_1$ ve benzer biçimde $b_G\tilde{\in}H_2$ ve $a_F\tilde{\notin}H_2$ olacak şekilde $H_1, H_2 \in \tau$ bulunabilir. $\tilde{A}\sqcap H_1, \tilde{A}\sqcap H_2 \in \tau_A$ olduğundan, $a_F\tilde{\in}\tilde{A}\sqcap H_1$ ve $b_G\tilde{\notin}\tilde{A}\sqcap H_1$ ve benzer biçimde $b_G\tilde{\in}\tilde{A}\sqcap H_2$ ve $a_F\tilde{\notin}\tilde{A}\sqcap H_2$ ' dir. Dolayısıyla (A,τ_A,E) esnek alt uzayı da bir ET_1 uzayıdır.

Teorem 3.2.2 Her ET_1 uzayı bir ET_0 uzayıdır.

İspat. ET_1 ve ET_0 uzayı olma tanımlarından açıkça görülmektedir.

Örnek 3.2.2 $E = \{a,b\}$ ve $X = \{x,y,z\}$ olmak üzere, $F_1, F_2, F_3, F_4 \in S_E(X)$ esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \{(a,\{x,y\}),(b,\{x,y\})\} \\
F_2 &= \{(a,\{z\}),(b,\{z\})\} \\
F_3 &= \{(a,X)\} \\
F_4 &= \{(b,X)\}
\end{aligned}
$$

X üzerinde tanımlanmış olan esnek topoloji,

$$\tau = \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_2, F_3, F_4\}$$

olmak üzere,τ bir esnek T_1'dir. Esnek T_0 uzayının tanımı dikkate alındığında τ'nun aynı zamanda bir ET_0 olduğu açıktır.

Teorem 3.2.3 [28] (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay olsun. $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan $a_F, b_G \tilde{\in} S_E(X)$ verilsin. Eğer H_1, H_2 esnek açık kümeleri için $a_F \tilde{\in} H_1$ iken $b_G \tilde{\in} H_1^{\tilde{c}}$ veya benzer şekilde $b_G \tilde{\in} H_2$ iken $a_F \tilde{\in} H_2^{\tilde{c}}$ oluyorsa bu durumda (X, τ, E) bir ET_1 ve (X, τ_a) ve (X, τ_b) de birer T_1 ' dir.

İspat. (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay olsun. $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan $a_F, b_G \tilde{\in} S_E(X)$ olmak üzere, $H_1, H_2 \in S_E(X)$ esnek açık kümeleri için $a_F \tilde{\in} H_1$ ve $b_G \tilde{\in} H_1^{\tilde{c}}$ veya benzer şekilde $b_G \tilde{\in} H_2$ ve $a_F \tilde{\in} H_2^{\tilde{c}}$ verilsin. Böylece $F(a) \subseteq H_1(a)$ ve $G(b) \subseteq H_1(b)^c$, $G(b) \subseteq H_2(b)$ ve $F(a) \subseteq H_2^c(a)$ olur. Şu halde (X, τ_a) ve (X, τ_b) birer T_1 uzayıdır.

Örnek 3.2.3 $E = \{a, b\}$ ve $X = \{x, y, z\}$ olmak üzere, $F_1, F_2, F_3, F_4 \in S_E(X)$ esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(a, \{x, y\}), (b, \{x, y\})\} \\ F_2 &= \{(a, \{z\}), (b, \{z\})\} \\ F_3 &= \{(a, X)\} \\ F_4 &= \{(b, X)\} \end{aligned}$$

X üzerinde tanımlanmış olan esnek topoloji,

$$\tau = \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_2, F_3, F_4\}$$

olmak üzere, parametrelere bağlı olan topolojiler ise,

$$\tau_a = \{\emptyset, X, \{x, y\}, \{z\}\}$$

ve

$$\tau_b = \{\emptyset, X, \{x, y\}, \{z\}\}$$

olsun. a ve b parametrelerine göre kurulmuş olan bu topolojilerin T_1 olduğu açıktır. Çünkü

$$
\begin{aligned}
p_{F_1} &= (a,\{x,y\})\tilde{\in} F_1 && \text{olduğundan}\ ,\ p_{F_1}(a) \in F_1(a) \\
p_{F_1} &= (a,\{x,y\})\tilde{\notin} F_2 && \text{olduğundan}\ ,\ p_{F_1}(a) \notin F_2(a) \\
p_{F_1} &= (a,\{x,y\})\tilde{\notin} F_4 && \text{olduğundan}\ ,\ p_{F_1}(a) \notin F_4(a) \\
r_{F_2} &= (a,\{z\})\tilde{\in} F_2 && \text{olduğundan}\ ,\ r_{F_2}(a) \in F_2(a) \\
r_{F_2} &= (a,\{z\})\tilde{\notin} F_1 && \text{olduğundan}\ ,\ r_{F_2}(a) \notin F_1(a) \\
r_{F_2} &= (a,\{z\})\tilde{\notin} F_4 && \text{olduğundan}\ ,\ r_{F_2}(a) \notin F_4(a) \\
s_{F_3} &= (a,X)\tilde{\in} F_3 && \text{olduğundan}\ ,\ s_{F_3}(a) \in F_3(a) \\
s_{F_3} &= (a,X)\tilde{\notin} F_1 && \text{olduğundan}\ ,\ s_{F_3}(a) \notin F_1(a) \\
s_{F_3} &= (a,X)\tilde{\notin} F_2 && \text{olduğundan}\ ,\ s_{F_3}(a) \notin F_2(a) \\
s_{F_3} &= (a,X)\tilde{\notin} F_4 && \text{olduğundan}\ ,\ s_{F_3}(a) \notin F_4(a)
\end{aligned}
$$

Bu yüzden τ_a bir T_1 uzayıdır. Benzer biçimde

$$
\begin{aligned}
k_{F_1} &= (b,\{x,y\})\tilde{\in} F_1 && \text{olduğundan}\ ,\ k_{F_1}(b) \in F_1(b) \\
k_{F_1} &= (b,\{x,y\})\tilde{\notin} F_2 && \text{olduğundan}\ ,\ k_{F_1}(b) \notin F_2(b) \\
k_{F_1} &= (b,\{x,y\})\tilde{\notin} F_3 && \text{olduğundan}\ ,\ k_{F_1}(b) \notin F_3(b) \\
m_{F_2} &= (b,\{z\})\tilde{\in} F_2 && \text{olduğundan}\ ,\ m_{F_2}(b) \in F_2(b) \\
m_{F_2} &= (b,\{z\})\tilde{\notin} F_1 && \text{olduğundan}\ ,\ m_{F_2}(b) \notin F_1(b) \\
m_{F_2} &= (b,\{z\})\tilde{\notin} F_3 && \text{olduğundan}\ ,\ m_{F_2}(b) \notin F_3(b) \\
n_{F_4} &= (b,X)\tilde{\in} F_4 && \text{olduğundan}\ ,\ n_{F_4}(b) \in F_4(b) \\
n_{F_4} &= (b,X)\tilde{\notin} F_1 && \text{olduğundan}\ ,\ n_{F_1}(b) \notin F_1(b) \\
n_{F_4} &= (b,X)\tilde{\notin} F_2 && \text{olduğundan}\ ,\ n_{F_2}(b) \notin F_2(b) \\
n_{F_4} &= (b,X)\tilde{\notin} F_3 && \text{olduğundan}\ ,\ n_{F_3}(b) \notin F_3(b)
\end{aligned}
$$

Bu yüzden τ_b de bir T_1 uzayıdır.

Teorem 3.2.4 [28] Bir (X,τ,E) esnek topolojik uzayında τ ' nun her elemanı esnek kapalı ise, bu uzay bir ET_1 ' dir.

İspat. (X,τ,E) bir esnek topolojik uzay ve her $H \in \tau$ için, $H^{\tilde{c}} \in \tau$ olsun. $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan her $a_F, b_G \,\tilde{\in}\, S_E(X)$ için, $a_F \tilde{\in} H$ iken, $b_G \tilde{\notin} H^{\tilde{c}}$

olacağından veya benzer biçimde, $b_G \tilde{\in} H^{\tilde{c}}$ iken, $a_F \tilde{\notin} H^{\tilde{c}}$ bulunacağından (X, τ, E) bir ET_1 uzayıdır.

Uyarı 3.2.1 [21] Teorem 3.2.4 için verilen ispatın tek yönlü olmasına dikkat edilmelidir. Çünkü verilen önermenin tersi her zaman doğru olmaz. Yani ET_1 olan uzayın bütün elemanları esnek kapalı kümeler olmak zorunda değildir.

Örnek 3.2.4 $E = \{a, b\}$ ve $X = \{x, y\}$ olmak üzere, $F, H \in S_E(X)$ esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

$$\begin{aligned} F &= \{(a, \{x\}), (b, \{y\})\} \\ H &= \{(a, \{y\}), (b, \{x\})\} \end{aligned}$$

Buradan

$$\tau = \{\Phi, \tilde{X}, F, H\}$$

esnek küme ailesi bir esnek topolojidir. τ' ya ait olan her esnek küme esnek kapalı olduğundan (X, τ, E) bir ET_1 uzayıdır.

Teorem 3.2.5 [28] ET_1 uzayı olma özelliği, esnek topolojik bir özelliktir.

İspat. (X, τ, E) ve (Y, σ, K) iki ET_1 uzayı, $\varphi_\psi : S_E(X) \to S_K(Y)$ bir esnek homeomorfizm olsun. $k_{G_1} \neq k'_{G_2}$ koşulunu sağlayan her $k_{G_1}, k'_{G_2} \tilde{\in} S_K(Y)$ için, φ_ψ esnek örten olduğundan $k_{G_1} = \varphi_\psi(e_{F_1})$ ve $k'_{G_2} = \varphi_\psi(e'_{F_2})$ olacak şekilde $e_{F_1}, e'_{F_2} \tilde{\in} S_E(X)$ vardır. φ_ψ esnek bire bir olduğundan $e_{F_1} \neq e'_{F_2}$ ' dir. (X, τ, E) bir esnek ET_1 uzayı olduğundan

$$e_{F_1} \tilde{\in} H_1 \ , \ e'_{F_2} \tilde{\notin} H_1$$

ve

$$e'_{F_2} \tilde{\in} H_2 \ , \ e_{F_1} \tilde{\notin} H_2$$

olacak şekilde $H_1, H_2 \in \tau$ vardır. Teorem 2.3.5' ten φ_ψ esnek homeomorfizmi esnek açık kümeleri esnek açık kümelere dönüştürür. Dolayısıyla $\varphi_\psi(H_1)$, $\varphi_\psi(H_2)$ $\in \sigma$ olur.

$$\varphi_\psi(e_{F_1}) = k_{G_1} \tilde{\in} \varphi_\psi(H_1) \ , \ \varphi_\psi(e'_{F_2}) = k'_{G_2} \tilde{\notin} \varphi_\psi(H_1)$$

ve

$$\varphi_\psi(e'_{F_2}) = k'_{G_2} \tilde{\in} \varphi_\psi(H_2) \ , \ \varphi_\psi(e_{F_1}) = k_{G_1} \tilde{\notin} \varphi_\psi(H_2)$$

olduğundan (Y, σ, K) bir ET_1 uzayıdır. Şu halde bir ET_1 uzayı ile topolojik eşyapılı olan her uzay da bir ET_1 uzayıdır. Yani esnek topolojik uzaylarda ET_1 uzayı olma özelliği esnek topolojik bir özelliktir.

3.3 Esnek T_2 Uzayları

Tanım 3.3.1 [28] (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay olsun. $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan a_F, $b_G \tilde{\in} S_E(X)$ için, $a_F \tilde{\in} H_1$, $b_G \tilde{\in} H_2$ ve $H_1 \sqcap H_2 = \Phi$ olacak şekilde $H_1, H_2 \in \tau$ varsa (X, τ, E) üçlüsüne bir esnek T_2 uzayı (ya da esnek Hausdorff) denir ve ET_2 ile gösterilir.

Örnek 3.3.1 $E = \{a, b\}$ ve $X = \{x, y\}$ olmak üzere, $F, H \in S_E(X)$ esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

$$\begin{aligned} F &= \{(a, \{x\}), (b, \{y\})\} \\ H &= \{(a, \{y\}), (b, \{x\})\} \end{aligned}$$

X üzerinde tanımlanmış olan esnek topoloji ise,

$$\tau = \{\Phi, \tilde{X}, F, H\}$$

olsun. $a_F = (a, \{x\})$, $a_H = (a, \{y\})$ esnek noktaları için, $a_F \neq a_H$ ve $F \sqcap H = \Phi$, benzer biçimde diğer esnek noktaları da kontrol edersek, $b_F = (b, \{y\})$, $b_H = (b, \{x\})$ esnek noktaları için de aynı şekilde $b_F \neq b_H$ ve $F \sqcap H = \Phi$ vardır. O halde tanım gereği verilen esnek küme ailesi bir ET_2 uzayıdır.

Teorem 3.3.1 [28] Bir esnek Hausdorff uzayı aynı zamanda bir ET_1 uzayıdır.

İspat. ET_2 uzayı olma tanımı ve ET_1 uzayı olma tanımı dikkate alındığında bu durum açıkça görülmektedir.

Uyarı 3.3.1 Bir ET_1 uzayı, ET_2 uzayı olmak zorunda değildir.

Örnek 3.3.2 $E = \{a, b\}$ ve $X = \{x, y, z\}$ olmak üzere, $G_1, G_2, G_3, G_4 \in S_E(X)$ esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(a, \{x, y\}), (b, \{x, y\})\} \\ G_2 &= \{(a, \{x, y\}), (b, \{x, z\})\} \\ G_3 &= \{(a, \{x, z\}), (b, \{x, z\})\} \\ G_4 &= \{(a, \{x\}), (b, \{x\})\} \end{aligned}$$

X üzerinde tanımlanmış olan esnek topoloji ise,

$$\tau = \{\Phi, \tilde{X}, G_1, G_2, G_3, G_4\}$$

olmak üzere, τ bir ET_1 uzayıdır. Ancak açıkça görüldüğü üzere, $G_1 \sqcap G_2 \neq \Phi$ veya $G_1 \sqcap G_3 \neq \Phi$ veya $G_1 \sqcap G_4 \neq \Phi$ ' dir. Şu halde bir ET_1 uzayı, ET_2 uzayı olmak zorunda değildir.

Teorem 3.3.2 [28] ET_2 uzayı olma özelliği esnek kalıtsal bir özelliktir.

İspat. (X, τ, E) bir ET_2 uzayı olsun. Boştan farklı bir $A \subseteq X$ ve $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan $a_F, b_G \tilde{\in} \tilde{A}$ verilsin. (X, τ, E) bir ET_2 olduğundan $a_F \tilde{\in} H_1$ ve $b_G \tilde{\notin} H_1$ iken $H_1 \sqcap H_2 = \Phi$ olan esnek kümeler vardır. Benzer biçimde $a_F \tilde{\notin} H_2$ ve $b_G \tilde{\in} H_2$ olacak şekilde, $H_1 \sqcap H_2 = \Phi$ şartını sağlayan $H_1, H_2 \in \tau$ bulunabilir. $\tilde{A} \sqcap H_1, \tilde{A} \sqcap H_2 \in \tau_A$ olduğundan, $a_F \tilde{\in} \tilde{A} \sqcap H_1$ ve $b_G \tilde{\notin} \tilde{A} \sqcap H_1$ için de $(\tilde{A} \sqcap H_1) \sqcap (\tilde{A} \sqcap H_2) = \Phi$ olacaktır. Benzer şekilde $b_G \tilde{\in} \tilde{A} \sqcap H_2$ ve $a_F \tilde{\notin} \tilde{A} \sqcap H_2$ iken, $(\tilde{A} \sqcap H_1) \sqcap (\tilde{A} \sqcap H_2) = \Phi$ şartı da sağlanır ve dolayısıyla (A, τ_A, E) esnek alt uzayı da bir ET_2 uzayıdır.

Örnek 3.3.3 $E = \{a, b, c\}$ ve $X = \{x, y, z\}$ olmak üzere, $F_1, F_2 \in S_E(X)$ esnek kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(a, \{x\}), (b, \{y\}), (c, \{z\})\} \\ F_2 &= \{(a, \{y, z\}), (b, \{x, z\}), (c, \{x, y\})\} \end{aligned}$$

X üzerinde tanımlanmış olan esnek topoloji,

$$\tau_1 = \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_2\}$$

ve $E = \{a,b\}$ ve $Y = \{x,y\}$ olmak üzere, $G_1, G_2 \in S_E(Y)$ esnek kümeleri ise aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(a,\{x\}),(b,\{y\})\} \\ G_2 &= \{(a,\{y\}),(b,\{x\})\} \\ \tau_2 &= \{\Phi, \tilde{Y}, G_1, G_2\} \end{aligned}$$

olsun. Açıkça görüldüğü gibi τ_1' e göre, $(a,\{x\}) \neq (a,\{y,z\})$,yani $a_{F_1} \neq a_{F_2}$ için $F_1 \sqcap F_2 = \Phi$ ' dir. $(b,\{y\}) \neq (b,\{x,z\})$, yani $b_{F_1} \neq b_{F_2}$ için $F_1 \sqcap F_2 = \Phi$ ' dir. $(c,\{z\}) \neq (c,\{x,y\})$, yani $c_{F_1} \neq c_{F_2}$ için $F_1 \sqcap F_2 = \Phi$ ' dir.
Benzer şekilde τ_2' ye göre, $(a,\{x\}) \neq (a,\{y\})$, yani $a_{G_1} \neq a_{G_2}$ için $G_1 \sqcap G_2 = \Phi$' dir. $(b,\{y\}) \neq (b,\{x\})$, yani $b_{G_1} \neq b_{G_2}$ için $G_1 \sqcap G_2 = \Phi$' dir. Bu yüzden τ_1 ve τ_2 tanım gereği birer esnek Hausdorff uzayı ve yine tanımdan dolayı $\tau_2 \subseteq \tau_1$' dir.

Teorem 3.3.3 [28] (X,τ,E) bir ET_2 uzayı olsun. Bu taktirde her $e \in E$ için, (X,τ_e) topolojik uzayı bir T_2' dir.

İspat. (X,τ,E) bir ET_2 uzayı olsun. $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan her $a_F, b_G \tilde{\in} S_E(X)$ için $a_F \tilde{\in} H_1$ ve $b_G \tilde{\notin} H_1$ ve benzer biçimde, $a_F, b_G \tilde{\in} S_E(X)$ için $a_F \tilde{\notin} H_2$ ve $b_G \tilde{\in} H_2$ olacak şekilde $H_1 \sqcap H_2 = \Phi$ şartına uygun $H_1, H_2 \in \tau$ vardır. Buradan, $a \neq b$ olması nedeniyle $x \neq y$ koşulunu sağlayan her $x, y \in X$ için de $x \in H_1(a)$, $y \notin H_1(a)$ ve benzer şekilde, her $x, y \in X$ için de $x \notin H_2(b)$, $y \in H_2(b)$ iken $H_1 \sqcap H_2 = \Phi$ olacak şekilde $H_1(a) \in \tau_a$ ve $H_2(b) \in \tau_b$ vardır. Şu halde her $e \in E$ için, (X,τ_e) bir T_2 uzayıdır.

Teorem 3.3.4 [28] Esnek Hausdorff uzay olma özelliği, esnek topolojik bir özelliktir.

İspat. (X,τ,E) ve (Y,σ,K) iki ET_2 uzayı, $\varphi_\psi : S_E(X) \to S_K(Y)$ bir esnek homeomorfizm olsun. $k_{G_1} \neq m_{G_2}$ koşulunu sağlayan her $k_{G_1}, m_{G_2} \tilde{\in} S_K(Y)$ için, φ_ψ esnek örten olduğundan $k_{G_1} = \varphi_\psi(a_{F_1})$ ve $m_{G_2} = \varphi_\psi(b_{F_2})$ olacak şekilde $a_{F_1}, b_{F_2} \tilde{\in} S_E(X)$ vardır. φ_ψ esnek bire bir olduğundan $a_{F_1} \neq b_{F_2}$ ' dir. (X,τ,E) bir esnek ET_2 uzayı olduğundan

$$a_{F_1} \tilde{\in} H_1 \ , \ b_{F_2} \tilde{\notin} H_1$$

ve

$$b_{F_2}\tilde{\in} H_2 \ , \ a_{F_1}\tilde{\notin} H_2$$

olacak şekilde $H_1 \sqcap H_2 \in \tau = \Phi$ şartına uygun $H_1, H_2 \in \tau$ vardır. Teorem 2.3.5' ten φ_ψ esnek homeomorfizmi esnek açık kümeleri esnek açık kümelere dönüştürür. Dolayısıyla $\varphi_\psi(H_1)$, $\varphi_\psi(H_2) \in \sigma$ olur.

$$\varphi_\psi(a_{F_1}) = k_{G_1}\tilde{\in}\varphi_\psi(H_1) \quad \varphi_\psi(b_{F_2}) = m_{G_2}\tilde{\notin}\varphi_\psi(H_1)$$

ve

$$\varphi_\psi(b_{F_2}) = m_{G_2}\tilde{\in}\varphi_\psi(H_2) \quad \varphi_\psi(a_{F_1}) = k_{G_1}\tilde{\notin}\varphi_\psi(H_2)$$

olduğunda $\varphi_\psi(H_1) \sqcap \varphi_\psi(H_2) = \Phi$ ' dir. Dolayısıyla (Y, σ, K) bir ET_2 uzayıdır. Bir ET_2 uzayı ile topolojik eşyapılı olan her uzay da bir ET_2 uzayıdır. Şu halde esnek topolojik uzaylarda ET_2 uzayı olma özelliği esnek topolojik bir özelliktir.

3.4 Esnek T_3 Uzayları

Tanım 3.4.1 [28] (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay ve $G \in S_E(X)$ bir esnek kapalı küme olsun. $a_F\tilde{\notin}G$ koşulunu sağlayan $a_F\tilde{\in}S_E(X)$ için $G \sqsubseteq H_1$, $a_F\tilde{\in}H_2$ ve $H_1 \sqcap H_2 = \Phi$ olacak şekilde $H_1, H_2 \in \tau$ varsa, (X, τ, E) üçlüsüne bir esnek regüler uzay denir.

Tanım 3.4.2 [28] Esnek regüler ve ET_1 olan bir esnek topolojik uzaya esnek T_3 uzayı denir ve ET_3 ile gösterilir.

Uyarı 3.4.1 [28] Bir ET_3 uzayı aynı zamanda bir ET_2 olmayabilir.

Örnek 3.4.1 [28] $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olmak üzere $F_1, F_2, \ldots, F_{30} \in S_E(X)$ esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun.

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(e_1, X)\} \\ F_2 &= \{(e_1, \{x_1\})\} \\ F_3 &= \{(e_1, \{x_2\})\} \\ F_4 &= \{(e_1, \{x_3\})\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_5 &= \{(e_1,\{x_1,x_2\})\}\\
F_6 &= \{(e_1,\{x_1\})\}\\
F_7 &= \{(e_1,\{x_2\})\}\\
F_8 &= \{(e_1,X),(e_2,\{x_1\})\}\\
F_9 &= \{(e_1,\{x_1\}),(e_2,\{x_1\})\}\\
F_{10} &= \{(e_1,\{x_2\}),(e_2,\{x_1\})\}\\
F_{11} &= \{(e_1,\{x_3\}),(e_2,\{x_1\})\}\\
F_{12} &= \{(e_1,\{x_1,x_2\}),(e_2,\{x_1\})\}\\
F_{13} &= \{(e_1,\{x_1,x_3\}),(e_2,\{x_1\})\}\\
F_{14} &= \{(e_1,\{x_2,x_3\}),(e_2,\{x_1\})\}\\
F_{15} &= \{(e_2,\{x_1\})\}\\
F_{16} &= \{(e_1,X),(e_2,\{x_2,x_3\})\}\\
F_{17} &= \{(e_1,\{x_1\}),(e_2,\{x_2,x_3\})\}\\
F_{18} &= \{(e_1,\{x_2\}),(e_2,\{x_2,x_3\})\}\\
F_{19} &= \{(e_1,\{x_3\}),(e_2,\{x_2,x_3\})\}\\
F_{20} &= \{(e_1,\{x_1,x_2\}),(e_2,\{x_2,x_3\})\}\\
F_{21} &= \{(e_1,\{x_1,x_3\}),(e_2,\{x_2,x_3\})\}\\
F_{22} &= \{(e_1,\{x_2,x_3\}),(e_2,\{x_2,x_3\})\}\\
F_{23} &= \{(e_2,\{x_2,x_3\})\}\\
F_{24} &= \{(e_1,\{x_1\}),(e_2,X)\}\\
F_{25} &= \{(e_1,\{x_2\}),(e_2,X)\}\\
F_{26} &= \{(e_1,\{x_3\}),(e_2,X)\}\\
F_{27} &= \{(e_1,\{x_2\}),(e_2,X)\}\\
F_{28} &= \{(e_1,\{x_1,x_3\}),(e_2,X)\}\\
F_{29} &= \{(e_1,\{x_2,x_3\}),(e_2,X)\}\\
F_{30} &= \{(e_2,X)\}
\end{aligned}
$$

olmak üzere X üzerinde tanımlanmış olan esnek topoloji

$$\tau = \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_2, \ldots, F_{30}\}$$

olsun. Bu örnek ET_3 uzayı olma tanımı göz önüne alındığı zaman, bir ET_3 uzayı olmaktadır. Ancak aynı esnek kümeler ailesinin bir ET_2 olmadığı görülmektedir. Çünkü örneğin $(e_1, \{x_2\}) \neq (e_1, \{x_3\})$ esnek noktaları için,

$$(e_1, \{x_2\}) \tilde{\in} F \text{ ve } (e_1, \{x_3\}) \tilde{\in} G$$

olacak şekilde $F \sqcap G = \Phi$ şartını sağlayan F, G esnek açık kümeleri bu uzayda bulunmamaktadır.

Teorem 3.4.1 [28] ET_3 uzayı olma özelliği esnek kalıtsal bir özelliktir.

İspat. (A, τ_A, E) esnek uzayı (X, τ, E) esnek regüler uzayının bir alt uzayı ve esnek kapalı H kümesi (A, τ_A, E) uzayına ait olsun. $e_F \tilde{\in} S_E(A)$ esnek noktası ise $e_F \tilde{\notin} H$ şartını sağlasın. Bu taktirde $G \sqcap \tilde{A} = H$ şartına uygun $G \in S_E(X)$ esnek kümesi için $e_F \tilde{\notin} G$ olur.(X, τ, E) esnek regüler olduğundan $F_1 \sqcap F_2 = \Phi$ olan esnek açık $F_1, F_2 \in S_E(X)$ kümeleri de $e_F \tilde{\in} F_1$ ve $G \sqsubseteq F_2$ koşuluna uygun olarak bulunacaktır. Açık olarak

$$e_F \tilde{\in} F_1 \sqcap \tilde{A} = G_1$$

ve

$$H \sqsubseteq F_2 \sqcap \tilde{A} = G_2$$

iken $G_1 \sqcap G_2 = \Phi$ olacaktır. Bu yüzden (A, τ, E) esnek uzayı (X, τ, E) esnek regüler uzayının bir alt uzayıdır. Şimdi (A, τ_A, E)' nin aynı zamanda bir ET_1 uzayı olduğunu gösterelim. Boştan farklı bir $A \subseteq X$ ve $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan $a_F, b_G \tilde{\in} A$ verilsin. (X, τ, E) bir ET_1 olduğundan $a_F \tilde{\in} H_1$ ve $b_G \tilde{\notin} H_1$ ve benzer biçimde $b_G \tilde{\in} H_2$ ve $a_F \tilde{\notin} H_2$ olacak şekilde $H_1, H_2 \in \tau$ bulunabilir. $A \sqcap H_1, A \sqcap H_2 \in \tau_A$ olduğundan, $a_F \tilde{\in} A \sqcap H_1$ ve $b_G \tilde{\notin} A \sqcap H_1$ ve benzer biçimde $b_G \tilde{\in} A \sqcap H_2$ ve $a_F \tilde{\notin} A \sqcap H_2$ ' dir. Dolayısıyla (A, τ_A, E) esnek alt uzayı bir ET_1 uzayıdır. Bu da ispatı tamamlar.

3.5 Esnek T_4 Uzayı

Tanım 3.5.1 [28] (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay olsun. $H_1, H_2 \in S_E(X)$ esnek kapalı kümeleri $H_1 \sqcap H_2 = \Phi$ şartını sağlamak üzere, $H_1 \sqsubseteq G_1$, $H_2 \sqsubseteq G_2$

ve $G_1 \sqcap G_2 = \Phi$ koşulunu sağlayan $G_1, G_2 \in \tau$ varsa (X, τ, E) üçlüsüne bir esnek normal uzay denir.

Tanım 3.5.2 [28] ET_1 uzayı olan bir esnek normal topolojik uzaya esnek T_4 uzayı denir ve ET_4 ile gösterilir.

Uyarı 3.5.1 [28] Bir ET_4 uzayı aynı zamanda bir ET_3 uzayı olmayabilir.

Örnek 3.5.1 [28] $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $E = \{e_1, e_2\}$ olmak üzere $F_1, F_2, \ldots, F_8 \in S_E(X)$ esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun.

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{(e_1, \{x_1, x_2, x_4\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\} \\
F_2 &= \{(e_1, \{x_1, x_3, x_4\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\} \\
F_3 &= \{(e_1, \{x_1, x_4\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\} \\
F_4 &= \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\} \\
F_5 &= \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\} \\
F_6 &= \{(e_1, \{x_3\}), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\} \\
F_7 &= \{(e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\} \\
F_8 &= \{(e_1, X), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}
\end{aligned}$$

X üzerindeki esnek topoloji

$$\tau = \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_2, \ldots, F_8\}$$

için, ET_4 ve ET_3 uzayı olma tanımları birlikte dikkate alındığında verilen esnek kümeler ailesinin bir ET_4 uzayı iken aynı zamanda bir ET_3 uzayı olmadığı görülmektedir. Çünkü örneğin $e_H = \{(e_1, \{x_2, x_3\})\}$ esnek noktası için, bu noktanın esnek kapalı şekilde esnek ait olduğu esnek açık küme bu uzayda olmakla birlikte $e_H \tilde{\in} F$ için $F_3^{\tilde{c}} \sqsubseteq G$ ve $F \sqcap G = \Phi$ şartının sağlandığı F, G esnek açık kümeleri bu uzayda bulunmamaktadır. Dolayısıyla uzay ET_3 değildir.

Teorem 3.5.1 [15] Bir esnek (X, τ, E) uzayı esnek normaldir ancak ve ancak $F \sqsubseteq G$ şartını sağlayan esnek kapalı F ve esnek açık G kümeleri için, F' yi içeren en az bir H esnek açık kümesi vardır öyle ki $F \sqsubseteq H \sqsubseteq \overline{H} \sqsubseteq G$' dir.

İspat. (X, τ, E) bir esnek normal uzay, $F \in S_E(X)$ bir esnek kapalı, $G \in S_E(X)$ bir esnek açık küme ve $F \sqsubseteq G$ olsun. Bu taktirde $G^{\tilde{c}}$ esnek kapalı ve $F \sqcap G^{\tilde{c}} = \Phi$ olur. Kabulden dolayı $F \sqsubseteq H$ ve $G^{\tilde{c}} \sqsubseteq K$ iken $H \sqcap K = \Phi$ olacaktır. $H \sqcap K = \Phi$ olduğundan, $H \sqsubseteq K^{\tilde{c}}$' dir. Fakat $K^{\tilde{c}}$ esnek kapalı olduğundan,

$$F \sqsubseteq H \sqsubseteq \overline{H} \sqsubseteq K^{\tilde{c}} \sqsubseteq G$$

olup, $F \sqsubseteq H \sqsubseteq \overline{H}$ elde edilir. Diğer taraftan her esnek kapalı F ve esnek açık bir G kümesi için $F \sqsubseteq G$ ve esnek açık bir H kümesi için

$$F \sqsubseteq H \sqsubseteq \overline{H} \sqsubseteq G$$

olsun. F_1, F_2 esnek kapalı kümeleri ise ayrık olsun. Bu taktirde $F_1 \sqsubseteq F_2^{\tilde{c}}$ iken $F_2^{\tilde{c}}$ esnek açıktır. Bu yüzden

$$F_1 \sqsubseteq H \sqsubseteq \overline{H} \sqsubseteq F_2^{\tilde{c}}$$

olacak şekilde bir H esnek açık kümesi olacaktır. Ancak

$$F_2 \sqsubseteq (\overline{H})^{\tilde{c}} \text{ ve } H \sqcap (\overline{H})^{\tilde{c}} = \Phi$$

olur. Dolayısıyla $F_1 \sqsubseteq H$ ve $F_2 \sqsubseteq (\overline{H})^{\tilde{c}}$ için $H \sqcap (\overline{H})^{\tilde{c}} = \Phi$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

3.6 Komplimental Esnek Topolojik Uzaylar

Bu kısımda esnek ayırma aksiyomları ile ilgili bazı sonuçlardan bahsedilecektir. Esnek ayırma aksiyomları üzerine Shabir ve Naz[28]' ın kaleme aldığı makale dikkate alınarak hazırlanmış olan Göçür ve Kopuzlu[12, 13] ile Peyghan, Samadi ve Tayebi ile Hussain ve Ahmad[15]' in çalışmaları mevcuttur. Daha önce de ifade edildiği gibi Shabir ve Naz[28] ile Çağman ve diğer.[5] esnek topoloji üzerinde yaptığı çalışmalarla esnek topolojinin anlaşılmasına değerli katkılar yapmıştır. Burada son makalelerinden birinde Hussain ve Ahmad[15] notasyonlar ve esnek noktayı ifade etme açısından [5]' de olduğu gibi daha kapsamlı bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmada şimdiye kadar yararlanılan referans makale- lerden yararlanılarak yeni bir esnek topoloji tanımlanmaktadır. Burada sözü edilen esnek topoloji, komplimental esnek küme ikililerinden meydana gelmekte ve enterasan bir şekilde genel topolojiden bilinen pek çok önermenin esnek kümeler üzerinde de var olduğunu göstermektedir. Ayrıca esnek topolojik uzaylarda ayırma aksiyomları üzerine, şimdiye kadar yapılan çalışmalar incelendiğinde, esnek $T_i, (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ uzayları arasındaki geçiş bağıntısında biri diğerini her zaman kapsamadığı ifade edilmiş, örneğin her ET_0 uzayının bir ET_1 uzayı olması gerekmez veya her ET_1 uzayının bir ET_2 uzayı olması gerekmez gibi, her $e \in E$ için $ET_i, (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ uzayına karşılık bir $T_i, (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ uzayının olmadığı, ancak bunun [28]' de ifade edildiği gibi bazı şartlar altında olabildiği belirtilmiştir. Bu çalışmada komplimental esnek kümeler vasıtasıyla yukarıda sözü edilen esnek uzaylar arası geçiş kolaylıkla sağlanmış ve ayrıca her $e \in E$ için $ET_i, (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ uzayına karşılık bir $T_i, (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ uzayının varlığı da gösterilmiştir.

Tanım 3.6.1 (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay olsun. Her $G \in \tau$ için $G^{\tilde{c}} \in \tau$ ise G kümesine komplimental esnek küme denir. (X, τ, E) topolojik uzayına da komplimental esnek topolojik uzay adı verilir.

Örnek 3.6.1 $E = \{a, b\}$ ve $X = \{x, y\}$ olmak üzere, $F_1, F_2, \ldots, F_{14} \in S_E(X)$ esnek kümeleri

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{(a, \{x\}), (b, \{y\})\} \\
F_2 &= \{(a, \{y\}), (b, \{x\})\} \\
F_3 &= \{(a, \{x\}), (b, \{x\})\} \\
F_4 &= \{(a, \{y\}), (b, \{y\})\} \\
F_5 &= \{(a, \{x\}), (b, X)\} \\
F_6 &= \{(a, X), (b, \{x\})\} \\
F_7 &= \{(a, \{y\}), (b, X)\} \\
F_8 &= \{(a, X), (b, \{y\})\} \\
F_9 &= \{(a, \{x\})\} \\
F_{10} &= \{(b, \{x\})\} \\
F_{11} &= \{(a, \{y\})\} \\
F_{12} &= \{(b, \{y\})\}
\end{aligned}$$

$$F_{13} = \{(a, X)\}$$
$$F_{14} = \{(b, X)\}$$

şeklinde tanımlansın.

$$\tau = \{\Phi, \tilde{X}, F_1, F_2, \ldots, F_{14}\}$$

esnek küme ailesi bir esnek topolojidir. τ ' yu meydana getiren esnek kümeler her
$i = 1, 2, \ldots, 14$ için, $F_i^{\tilde{c}} \in \tau$ olduğundan (X, τ, E) bir komplimental esnek topolojik uzaydır.

Teorem 3.6.1 (X, τ, E) bir komplimental esnek topolojik uzay olsun. Bu taktirde her $e_F \tilde{\in} S_E(X)$ için, $e_F \tilde{\in} H$ olacak biçimde bir $H \in \tau$ vardır.

İspat. (X, τ, E) bir komplimental esnek topolojik uzay ve herhangi $a_F \tilde{\in} S_E(X)$ verilsin. Bu taktirde a_F esnek noktasının esnek ait olduğu esnek açık bir H bu uzayda bulunacaktır. Komplimental esnek küme çiftlerinden meydana gelen uzayda her esnek açık $H \in S_E(X)$ için, esnek kapalı $H^{\tilde{c}} \in S_E(X)$ bulunacaktır. Dolayısıyla her $a_F \tilde{\in} H$ için, $H \in \tau$ olacaktır. Bu da ispatı tamamlar.

Uyarı 3.6.1 Teorem 3.6.1' de olduğu gibi bir (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzay verilsin. Bu taktirde her komplimental esnek $H \in \tau$ için, komplimental esnek $H^{\tilde{c}} \in \tau$' dur.

Teorem 3.6.2 Her komplimental esnek topolojik uzay bir ET_0 uzayıdır.

İspat. (X, τ, E) bir komplimental esnek topolojik uzay olsun. $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan herhangi iki $a_F, b_G \tilde{\in} S_E(X)$ verilsin. Teorem 3.6.1' den $a_F \tilde{\in} H$ olacak şekilde bir $H \in \tau$ vardır. $a_F \neq b_G$ olduğundan $b_G \tilde{\notin} H$' dir. Bu durum ise, (X, τ, E)' nin bir ET_0 olduğunu gösterir.

Örnek 3.6.2 Örnek 3.6.1' de tanımlanmış olan (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzayı bir ET_0 uzayıdır.

Teorem 3.6.3 (X, τ, E) bir komplimental esnek ET_0 uzayı olsun. Bu taktirde her $e \in E$ için, (X, τ_e) topolojik uzayı bir T_0 uzayıdır.

İspat. (X, τ, E) bir komplimental esnek ET_0 uzayı ve bu uzaya ait esnek açık F ve G kümeleri verilsin. $a_F \neq b_G$ esnek noktaları ise, sırasıyla F ve G açık esnek kümelerine esnek ait olsun. Bu taktirde eğer $a_F \tilde{\in} F$ ise, her $e \in E$ için $a_F \tilde{\notin} F(e)^{\tilde{c}}$'dir. Buradan her $e \in E$ için, $b_G \tilde{\notin} F$ olup, $b_G \tilde{\notin} F$ elde edilir. Benzer biçimde $b_G \tilde{\in} G$ ise, her $e \in E$ için $b_G \tilde{\notin} G(e)^{\tilde{c}}$ ' dir. Buradan her $e \in E$ için, $a_F \tilde{\notin} G(e)$ olup, $a_F \tilde{\notin} G$ olur. Bu yüzden (X, τ, E) bir ET_0 uzayıdır. Herhangi bir $e \in E$ için, (X, τ_e) bir topolojik uzay ve $a_F \in F$ ve $b_G \in F^{\tilde{c}}$ veya $b_G \in G$ ve $a_F \in G^{\tilde{c}}$ olup, $a_F \in F(e)$ ve $b_G \notin F(e)$ veya $b_G \in G(e)$ ve $a_F \notin G(e)$ elde edilir. O halde her $e \in E$ için, (X, τ_e) bir T_0 ' dır.

Örnek 3.6.3 $E = \{a, b\}$ ve $X = \{x, y\}$ olmak üzere, $F_1, F_2, \ldots, F_{14} \in S_E(X)$ esnek kümeleri örnek 3.6.1 ' deki şekilde tanımlansın. Bu taktirde her $e \in E$ için

$$\tau_a = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}\}$$

ve

$$\tau_b = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}\}$$

olmak üzere, τ_a ve τ_b topolojileri birer T_0 uzayıdır. Çünkü τ_a için, $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ ' dir. Benzer şekilde τ_b için de $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ ' dir. Bu durum uzayın T_0 olması için yeterlidir.

Teorem 3.6.4 Her komplimental esnek topolojik uzay bir ET_1 uzayıdır.

İspat. (X, τ, E) bir komplimental esnek topolojik uzay olsun. $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan herhangi iki $a_F, b_G \tilde{\in} S_E(X)$ verilsin. Teorem 3.6.1' den $a_F \tilde{\in} H_1$ iken $b_G \tilde{\notin} H_1$ veya benzer şekilde $a_F \tilde{\in} H_2$ iken $b_G \tilde{\notin} H_2$ olacak şekilde $H_1, H_2 \in \tau$ vardır. Dolayısıyla (X, τ, E) bir ET_1 uzayıdır.

Örnek 3.6.4 Örnek 3.6.1' de tanımlanmış olan (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzayı bir ET_1 uzayıdır.

Teorem 3.6.5 Bir ET_0 uzayının, bir ET_1 uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul uzayın komplimental olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: (X, τ, E) esnek topolojik uzayı komplimental esnek kümelerden meydana gelsin. $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan herhangi iki $a_F, b_G \tilde{\in} S_E(X)$ verilsin. Teorem 3.6.1' den $a_F \tilde{\in} H$ olacak şekilde bir $H \in \tau$ vardır. $a_F \neq b_G$ olduğundan $b_G \tilde{\notin} H$' dir. Bu durum ise, (X, τ, E)' nin bir ET_0 olduğunu gösterir.

$(\Leftarrow)$: ET_0 olan bir (X, τ, E) esnek topolojik uzayında her $a_F \tilde{\in} S_E(X)$ için $a_F \tilde{\in} H$ şartına uygun $H \in \tau$ esnek açık kümesi bulunsun. Bu taktirde Teorem 3.6.1 ve Uyarı 3.6.1' den dolayı her esnek açık $H \in S_E(X)$ kümesi için, esnek kapalı $H^{\tilde{c}} \in S_E(X)$ kümesi bu uzayda bulunacaktır. Dolayısıyla uzay komplimental esnek olur.

Teorem 3.6.6 (X, τ, E) bir komplimental ET_1 uzayı olsun. Bu taktirde her $e \in E$ için, (X, τ_e) topolojik uzayı bir T_1 uzayıdır.

İspat. (X, τ, E) bir komplimental ET_1 uzayı ve bu uzaya ait esnek açık F ve G kümeleri verilsin. $a_F \neq b_G$ esnek noktaları ise, sırasıyla F ve G komplimental esnek açık kümelerine esnek ait olsun. Bu taktirde eğer $a_F \tilde{\in} F$ ise, her $e \in E$ için $a_F \tilde{\notin} F(e)^{\tilde{c}}$ 'dir. Buradan her $e \in E$ için, $b_G \tilde{\notin} F(e)$ olup, $b_G \tilde{\notin} F$ elde edilir. Benzer biçimde $b_G \tilde{\in} G$ ise, her $e \in E$ için $b_G \tilde{\notin} G(e)^{\tilde{c}}$ 'dir. Buradan her $e \in E$ için, $a_F \tilde{\notin} G(e)$ olup, $a_F \tilde{\notin} G$ olur. Bu yüzden (X, τ, E) bir ET_1 uzayıdır. Herhangi bir $e \in E$ için, (X, τ_e) bir topolojik uzay ve $a_F \in F$ ve $b_G \in F^{\tilde{c}}$ iken, $b_G \in G$ ve $a_F \in G^{\tilde{c}}$ olup, $a_F \in F(e)$, $b_G \notin F(e)$ için $b_G \in G(e)$, $a_F \notin G(e)$ elde edilir.

Örnek 3.6.5 $E = \{a, b\}$ ve $X = \{x, y\}$ olmak üzere, $F_1, F_2, \ldots, F_{14} \in S_E(X)$ esnek kümeleri Örnek 3.6.1 ' deki şekilde tanımlansın. Bu taktirde her $e \in E$ için

$$\tau_a = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}\}$$

ve

$$\tau_b = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}\}$$

olmak üzere, τ_a ve τ_b topolojileri birer T_1 uzayıdır. Çünkü τ_a için, $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ ' dir. Benzer şekilde τ_b için de $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ ' dir. Bu durum uzayın T_1 olması için yeterlidir.

Teorem 3.6.7 Her komplimental esnek topolojik uzay bir ET_2 uzayıdır.

İspat. (X, τ, E) bir komplimental esnek topolojik uzay olsun. $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan herhangi iki $a_F, b_G \tilde{\in} S_E(X)$ verilsin. Teorem 3.6.1 ve uyarı 3.6.1' den $a_F \tilde{\in} H_1$ ve $b_G \tilde{\notin} H_1$ iken $H_1 \sqcap H_2 = \Phi$ veya benzer şekilde $a_F \tilde{\in} H_2$ ve $b_G \tilde{\notin} H_2$ iken $H_1 \sqcap H_2 = \Phi$ olacak şekilde $H_1, H_2 \in \tau$ vardır. Dolayısıyla (X, τ, E) bir ET_2 uzayıdır.

Örnek 3.6.6 Örnek 3.6.1' de tanımlanmış olan (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzayı bir ET_2 uzayıdır.

Teorem 3.6.8 Bir ET_1 uzayının, bir ET_2 uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul uzayın komplimental olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: (X, τ, E) esnek topolojik uzayı komplimental esnek kümelerden meydana gelsin. $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan herhangi iki $a_F, b_G \tilde{\in} S_E(X)$ verilsin. Teorem 3.6.1' den $a_F \tilde{\in} H_1$ iken $b_G \tilde{\notin} H_1$ veya benzer şekilde $a_F \tilde{\in} H_2$ iken $b_G \tilde{\notin} H_2$ olacak şekilde $H_1, H_2 \in \tau$ vardır. Dolayısıyla (X, τ, E) bir ET_1 uzayıdır.

$(\Leftarrow)$: ET_1 olan bir (X, τ, E) esnek topolojik uzayında her $a_F \tilde{\in} S_E(X)$ için $a_F \tilde{\in} H$ şartına uygun $H \in \tau$ esnek açık kümesi bulunsun. Bu taktirde Teorem 3.6.1 ve Uyarı 3.6.1' den dolayı her esnek açık $H \in S_E(X)$ kümesi için, esnek kapalı $H^{\tilde{c}} \in S_E(X)$ kümesi bu uzayda bulunacaktır. Dolayısıyla uzay komplimental esnek olur.

Teorem 3.6.9 (X, τ, E) bir komplimental ET_2 uzayı olsun. Bu taktirde her $e \in E$ için, (X, τ_e) topolojik uzayı bir T_2 uzayıdır.

İspat. (X, τ, E) bir komplimental ET_2 uzayı ve bu uzaya ait esnek açık F ve G kümeleri verilsin. $a_F \neq b_G$ esnek noktaları ise, sırasıyla F ve G komplimental esnek açık kümelerine esnek ait olsun. Bu taktirde eğer $a_F \tilde{\in} F$ ise, her $e \in E$ için $a_F \tilde{\notin} F(e)^{\tilde{c}}$' dir. Buradan her $e \in E$ için, $b_G \tilde{\notin} F(e)$ olup, $b_G \tilde{\notin} F$ elde edilir. Benzer biçimde $b_G \tilde{\in} G$ ise, her $e \in E$ için $b_G \tilde{\notin} G(e)^{\tilde{c}}$ ' dir. Burada F, G ' nin birer komplimental esnek küme olmasından dolayı $F \sqcap G = \Phi$ olacaktır. Buradan her $e \in E$ için, $a_F \tilde{\notin} G(e)$ olup, $a_F \tilde{\notin} G$ olur. Bu yüzden (X, τ, E) bir ET_2 uzayıdır. Herhangi bir $e \in E$ için, (X, τ_e) bir topolojik uzay ve $a_F \in F$ ve $b_G \in F^{\tilde{c}}$ iken,

$b_G \in G$ ve $a_F \in G^{\tilde{c}}$ olup, $F \cap G = \emptyset$ ' dir. $a_F \in F(e)$, $b_G \notin F(e)$ için $b_G \in G(e)$ ve $a_F \notin G(e)$ elde edilir. Yani (X, τ_e) bir T_2 ' dir.

Örnek 3.6.7 $E = \{a, b\}$ ve $X = \{x, y\}$ olmak üzere, $F_1, F_2, \ldots, F_{14} \in S_E(X)$ esnek kümeleri Örnek 3.6.1 ' deki şekilde tanımlansın. Bu taktirde her $e \in E$ için

$$\tau_a = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}\}$$

ve

$$\tau_b = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}\}$$

olmak üzere, τ_a ve τ_b topolojileri birer T_2 uzayıdır. Çünkü τ_a için, $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ ' dir. Benzer şekilde τ_b için de $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$' dir.

Teorem 3.6.10 Her komplimental esnek topolojik uzay bir esnek regüler uzaydır.

İspat. (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzay olsun. Bu uzaya ait bir $a_H \tilde{\in} H$ olan bir esnek açık H kümesi ve $F \sqsubseteq G$ olacak şekilde bir esnek açık G kümesi verilsin. Teorem 3.6.1' den dolayı $a_H \tilde{\notin} F$' dir. Yine aynı teoremden dolayı $G \sqcap H = \Phi$ olacak biçimde esnek açık kümeler bu uzayda bulunacaktır. Uyarı 3.6.1' den dolayı F bir komplimental esnek küme olduğundan esnek kapalıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.6.8 Örnek 3.6.1' de tanımlanmış olan (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzayı bir esnek regülerdir.

Teorem 3.6.11 (X, τ, E) esnek topolojik uzayında her esnek açık küme esnek kapalı ise bu uzay esnek regülerdir.

İspat. (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzay olsun. Esnek kapalı bir $F \sqsubseteq S_E(X)$ alt kümesi ile bir $a_H \tilde{\in} F^{\tilde{c}}$ esnek noktası verilsin. Bu taktirde, Teorem 3.6.1 ve Uyarı 3.6.1' den dolayı $F \sqsubseteq F$ olup, $F^{\tilde{c}} \sqsubseteq F^{\tilde{c}}$' dir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.6.12 (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzay olsun. Bu taktirde, her $e \in E$ için (X, τ_e) topolojik uzayı regülerdir.

İspat. (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzay olsun. Tanım 3.6.1' den her esnek küme hem açık hem de kapalıdır. Dolayısıyla her $a \in E$ parametresine göre kapalı bir $F \in S_E(X)$ alt kümesi ile bir $a_G \tilde{\in} F^{\tilde{c}}$ noktası bulunacaktır. Bu taktirde, $F \sqsubseteq F$ ve $a_G \tilde{\in} F^{\tilde{c}}$ olur ki, bu da istenendir.

Örnek 3.6.9 $E = \{a, b\}$ ve $X = \{x, y\}$ olmak üzere, $F_1, F_2, \ldots, F_{14} \in S_E(X)$ esnek kümeleri Örnek 3.6.1 ' deki şekilde tanımlansın. Bu taktirde her $e \in E$ için

$$\tau_a = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}\}$$

ve

$$\tau_b = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}\}$$

olmak üzere, τ_a ve τ_b topolojileri birer regüler uzaydır. Çünkü regüler uzay olma tanımı dikkate alındığı zaman τ_a için $F = \{x\}$ kapalı, $y \notin F$, $H = \{y\}$ açık, $G = \{x\}$ açık kümeleri için, $H \cap G = \emptyset$ şartına uygun kümeler uzayda mevcut olup, $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ ' dir. Benzer şekilde τ_a için de $F = \{x\}$ kapalı, $y \notin F$, $H = \{y\}$ açık, $G = \{x\}$ açık kümeleri için, $H \cap G = \emptyset$ koşulunu sağlayan kümeler uzayda varken, $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ ' dir.

Teorem 3.6.13 Her (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzay bir ET_3 uzayıdır.

İspat. (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzay olsun. Bu uzaya ait bir $a_H \tilde{\in} H$ olan bir esnek açık H kümesi ve $F \sqsubseteq G$ olacak şekilde bir esnek açık G kümesi verilsin. Teorem 3.6.1' den dolayı $a_H \tilde{\notin} F$' dir. Yine aynı teoremden dolayı $G \sqcap H = \Phi$ olacak biçimde esnek açık kümeler bu uzayda bulunacaktır. Uyarı 3.6.1' den dolayı F bir komplimental esnek küme olduğundan esnek kapalıdır. Ayrıca $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan herhangi iki $a_F, b_G \tilde{\in} S_E(X)$ verilsin. Teorem 3.6.1' den $a_F \tilde{\in} H_1$ iken $b_G \tilde{\notin} H_1$ veya benzer şekilde $a_F \tilde{\in} H_2$ iken $b_G \tilde{\notin} H_2$ olacak şekilde $H_1, H_2 \in \tau$ vardır. Dolayısıyla (X, τ, E) bir ET_1 uzayıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.6.10 Örnek 3.6.1' de tanımlanmış olan (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzayı bir ET_3' tür.

Teorem 3.6.14 (X, τ, E) komplimental ET_3 uzayı olsun. Bu taktirde, her $e \in E$ için (X, τ_e) topolojik uzayı bir T_3 ' tür.

İspat. (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzay olsun. Tanım 3.6.1' den her esnek küme hem açık hem de kapalıdır. Dolayısıyla her $a \in E$ parametresine göre kapalı bir $H \in S_E(X)$ alt kümesi ile bir $a_G \tilde{\in} F^{\tilde{c}}$ noktası bulunacaktır. Bu taktirde, $H \sqsubseteq H$ ve $a_F \tilde{\in} H$ 'dir. Ayrıca $a_F \neq b_G$ esnek noktaları ise, sırasıyla H_1 ve H_2 komplimental esnek açık kümelerine esnek ait olsun. Bu taktirde eğer $a_F \tilde{\in} H_1$ ise, her $e \in E$ için $G(b) \subseteq H_1(e)^c$ ' dir. Buradan her $e \in E$ için, $G(b) \nsubseteq H_1(e)$ olup, $b_G \tilde{\notin} H_1$ elde edilir. Benzer biçimde $b_G \tilde{\in} H_2$ ise, her $e \in E$ için $F(a) \subseteq H_2(e)^c$' dir. Buradan her $e \in E$ için, $F(a) \nsubseteq H_2(e)$ olup, $a_F \tilde{\notin} H_2$ olur. Bu yüzden (X, τ, E) bir ET_1 uzayıdır. Herhangi bir $e \in E$ için, (X, τ_e) bir topolojik uzay ve $a_F \tilde{\in} H_1$ ve $b_G \in H_1^{\tilde{c}}$ iken, $b_G \in H_2$ ve $a_F \in H_2^{\tilde{c}}$ olup, $F(a) \subseteq H_1(e)$, $G(b) \nsubseteq H_1(e)$ için $G(b) \subseteq H_2(e)$, $F(a) \nsubseteq H_2(e)$ elde edilir. O halde her $e \in E$ için (X, τ_e) bir T_1 ' dir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.6.11 $E = \{a, b\}$ ve $X = \{x, y\}$ olmak üzere, $F_1, F_2, \ldots, F_{14} \in S_E(X)$ esnek kümeleri Örnek 3.6.1 ' deki şekilde tanımlansın. Bu taktirde her $e \in E$ için

$$\tau_a = \big\{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}\big\}$$

ve

$$\tau_b = \big\{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}\big\}$$

olmak üzere, τ_a ve τ_b topolojileri birer T_3 uzayıdır. Çünkü regüler uzay olma tanımı dikkate alındığı zaman τ_a için $F = \{x\}$ kapalı, $y \notin F$, $H = \{y\}$ açık, $G = \{x\}$ açık kümeleri için, $H \cap G = \emptyset$ şartına uygun kümeler uzayda mevcut olup, $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$' dir. Benzer şekilde τ_b için de $F = \{x\}$ kapalı, $y \notin F$, $H = \{y\}$ açık, $G = \{x\}$ açık kümeleri için, $H \cap G = \emptyset$ koşulunu sağlayan kümeler uzayda varken, $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$' dir. Ayrıca τ_a ve τ_b topolojileri birer T_1 uzayıdır. Çünkü τ_a için, $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$' dir. Benzer şekilde τ_b için de $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ ' dir. Bu durum uzayların T_1 olması için yeterlidir. O halde her $e \in E$ için τ_a ve τ_b topolojileri birer T_3 ' tür.

Teorem 3.6.15 Bir ET_2 uzayının, bir ET_3 uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul uzayın komplimental olmasıdır.

İspat. ($\Rightarrow$): (X, τ, E) bir komplimental esnek topolojik uzay olsun. $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan herhangi iki $a_F, b_G \tilde{\in} S_E(X)$ verilsin. Teorem 3.6.1' den $a_F \tilde{\in} H_1$

ve $b_G \tilde{\notin} H_1$ iken $H_1 \sqcap H_2 = \Phi$ veya benzer şekilde $a_F \tilde{\in} H_2$ ve $b_G \tilde{\notin} H_2$ iken $H_1 \sqcap H_2 = \Phi$ olacak şekilde $H_1, H_2 \in \tau$ vardır. Dolayısıyla (X, τ, E) bir ET_2 uzayıdır.

($\Leftarrow$): ET_2 olan bir (X, τ, E) esnek topolojik uzayında her $a_F \tilde{\in} S_E(X)$ için $a_F \tilde{\in} H$ şartına uygun $H \in \tau$ esnek açık kümesi bulunsun. Bu taktirde Teorem 3.6.1 ve Uyarı 3.6.1' den dolayı her esnek açık $H \in S_E(X)$ kümesi için, esnek kapalı $H^{\tilde{c}} \in S_E(X)$ kümesi bu uzayda bulunacaktır. Dolayısıyla uzay komplimental esnek olur.

Teorem 3.6.16 Her (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzay bir esnek normal uzaydır.

İspat. (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzay olsun. Bu uzaya ait $F_1 \sqcap F_2 = \Phi$ olacak şekilde esnek kapalı $F_1, F_2 \in S_E(X)$ kümeleri verilsin. Teorem 3.6.1 ve Uyarı 3.6.1' den dolayı $F_1 \sqsubseteq G_1$ ve $F_2 \sqsubseteq G_2$ olacak biçimde $G_1 \sqcap G_2 = \Phi$ koşuluna uygun esnek açık G_1, G_2 kümeleri bu uzayda bulunacaktır.

Örnek 3.6.12 Örnek 3.6.1' de tanımlanmış olan (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzayı bir esnek normal uzaydır.

Teorem 3.6.17 (X, τ, E) bir esnek topolojik uzay olmak üzere, $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n \in S_E(X)$ esnek kümeleri hem açık hem de kapalı esnek kümeler olsun. Bu durumda, (X, τ, E) bir esnek normal uzaydır.

İspat. Teorem 3.6.11' den açıkça görülmektedir.

Teorem 3.6.18 (X, τ, E) bir komplimental esnek topolojik uzay olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

i. (X, τ, E) esnek topolojik uzayı esnek normaldir.

ii. F esnek kapalı ve $F \sqsubseteq H$ esnek açık bir küme ise, $F \sqsubseteq G \sqsubseteq \overline{G} \sqsubseteq H$ olacak biçimde bir G esnek açık kümesi vardır.

İspat. $i \Rightarrow ii$: (X, τ, E) esnek topolojik uzayı esnek normal, F esnek kapalı ve H esnek açık olmak üzere $F \sqsubseteq H$ verilsin. Buradan $H^{\tilde{c}}$ esnek kapalı ve $F \sqcap H^{\tilde{c}} = \Phi$

olup, esnek normallikten $F \sqsubseteq G$ ve $H^{\tilde{c}} \sqsubseteq H_1$ olacak şekilde ayrık G, H_1 açık esnek kümeleri vardır. Burada $G \sqsubseteq H_1^{\tilde{c}} \sqsubseteq H$ olup, $H_1^{\tilde{c}}$ esnek kapalı olduğundan, $\overline{G} \sqsubseteq H_1^{\tilde{c}}$ dir. O halde $F \sqsubseteq G \sqsubseteq \overline{G} \sqsubseteq H$ elde edilir.

$ii \Rightarrow i$: F_1 ve F_2 esnek kapalı kümeleri ayrık ise, $F_1 \sqsubseteq F_2^{\tilde{c}}$ olup $F_2^{\tilde{c}}$ esnek açık olduğu için, varsayımdan dolayı, $F_1 \sqsubseteq G \sqsubseteq \overline{G} \sqsubseteq F_2^{\tilde{c}}$ olacak biçimde bir esnek açık G kümesi vardır. Buradan da $F_1 \sqsubseteq G$ ve $F_2 \sqsubseteq (\overline{G})^{\tilde{c}}$ şartını sağlayan ayrık G ve $(\overline{G})^{\tilde{c}}$ esnek kümeleri elde edilir. Şu halde (X, τ, E) esnek normal bir uzaydır.

Teorem 3.6.19 Bir komplimental esnek (X, τ, E) uzayı esnek normaldir ancak ve ancak $F \sqsubseteq G$ şartını sağlayan esnek kapalı F ve esnek açık G kümeleri için, F'yi içeren en az bir H esnek açık kümesi vardır öyle ki

$$F \sqsubseteq H \sqsubseteq \overline{H} \sqsubseteq G$$

dir.

İspat. (X, τ, E) bir komplimental esnek uzay, $F \in S_E(X)$ bir esnek kapalı, $G \in S_E(X)$ bir esnek açık küme ve $F \sqsubseteq G$ olsun. Bu taktirde $G^{\tilde{c}}$ esnek kapalı ve $F \sqcap G^{\tilde{c}} = \Phi$ olur. Kabulden dolayı $F \sqsubseteq H$ ve $G^{\tilde{c}} \sqsubseteq K$ iken $H \sqcap K = \Phi$ olacaktır. $H \sqcap K = \Phi$ olduğundan,$H \sqsubseteq K^{\tilde{c}}$' dir. Fakat $K^{\tilde{c}}$ esnek kapalı olduğundan,

$$F \sqsubseteq H \sqsubseteq \overline{H} \sqsubseteq K^{\tilde{c}} \sqsubseteq G$$

olup, $F \sqsubseteq H \sqsubseteq \overline{H}$ elde edilir.

Diğer taraftan her esnek kapalı F ve esnek açık bir G kümesi için $F \sqsubseteq G$ ve esnek açık bir H kümesi için

$$F \sqsubseteq H \sqsubseteq \overline{H} \sqsubseteq G$$

olsun. F_1, F_2 esnek kapalı kümeleri ise ayrık olsun. Bu taktirde $F_1 \sqsubseteq F_2^{\tilde{c}}$ iken $F_2^{\tilde{c}}$ esnek açıktır. Bu yüzden

$$F_1 \sqsubseteq H \sqsubseteq \overline{H} \sqsubseteq F_2^{\tilde{c}}$$

olacak şekilde bir H esnek açık kümesi olacaktır. Ancak

$$F_2 \sqsubseteq (\overline{H})^{\tilde{c}} \text{ ve } H \sqcap (\overline{H})^{\tilde{c}} = \Phi$$

olur. Dolayısıyla $F_1 \sqsubseteq H$ ve $F_2 \sqsubseteq (\overline{H})^{\tilde{c}}$ için $H \sqcap (\overline{H})^{\tilde{c}} = \Phi$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.6.20 Her (X, τ, E) komplimental esnek normal olsun. Bu taktirde her $e \in E$ için (X, τ_e) uzayı normaldir.

İspat. (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzay olsun. Bu uzaya ait $F_1 \sqcap F_2 = \Phi$ olacak şekilde esnek kapalı $F_1, F_2 \in S_E(X)$ kümeleri verilsin. Teorem 3.6.1 ve Uyarı 3.6.1' den dolayı $F_1 \sqsubseteq G_1$ ve $F_2 \sqsubseteq G_2$ olacak biçimde $G_1 \sqcap G_2 = \Phi$ koşuluna uygun esnek açık G_1, G_2 kümeleri bu uzayda bulunacaktır. Burada F_1, F_2 esnek kapalı kümeleri ve G_1, G_2 esnek açık kümeleri komplimental olduğundan $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ve $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ şartına uygun olan F_i kapalı kümeleri ile G_i açık kümeleri her $e \in E$ için τ_{e_i}' de var olacaktır. Yani her $e \in E$ için (X, τ_e) uzayı normaldir.

Örnek 3.6.13 $E = \{a, b\}$ ve $X = \{x, y\}$ olmak üzere, $F_1, F_2, \ldots, F_{14} \in S_E(X)$ esnek kümeleri Örnek 3.6.1 ' deki şekilde tanımlansın. Bu taktirde her $e \in E$ için

$$\tau_a = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}\}$$

ve

$$\tau_b = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}\}$$

olmak üzere, τ_a ve τ_b topolojileri birer normal uzaydır. Çünkü normal uzay olma tanımı dikkate alındığı zaman τ_a için $F_1 = \{x\}$, $F_2 = \{y\}$ birer kapalı küme olmak üzere $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ve $G_1 = \{x\}$, $G_2 = \{y\}$ birer açık küme olmak üzere $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ iken $F_1 \subseteq G_1$ ve $F_2 \subseteq G_2$ koşulları sağlanmaktadır. Aynı şekilde τ_b için de $F_1 = \{x\}$, $F_2 = \{y\}$ birer kapalı küme olmak üzere $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ve $G_1 = \{x\}$, $G_2 = \{y\}$ birer açık küme olmak üzere $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ iken $F_1 \subseteq G_1$ ve $F_2 \subseteq G_2$ koşullarının sağlandığı görülmektedir.

Teorem 3.6.21 Her (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzay bir ET_4 uzayıdır.

İspat. (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzay olsun. Bu uzaya ait $F_1 \sqcap F_2 = \Phi$ olacak şekilde esnek kapalı $F_1, F_2 \in S_E(X)$ kümeleri verilsin. Teorem 3.6.1 ve Uyarı 3.6.1' den dolayı $F_1 \sqsubseteq G_1$ ve $F_2 \sqsubseteq G_2$ olacak biçimde $G_1 \sqcap G_2 = \Phi$ koşuluna uygun esnek açık G_1, G_2 kümeleri bu uzayda bulunacaktır. Ayrıca $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan herhangi iki $a_F, b_G \tilde{\in} S_E(X)$ verilsin. Teorem 3.6.1' den $a_F \tilde{\in} H_1$ iken $b_G \tilde{\notin} H_1$ veya benzer şekilde $a_F \tilde{\in} H_2$ iken $b_G \tilde{\notin} H_2$ olacak şekilde $H_1, H_2 \in \tau$ vardır. Dolayısıyla (X, τ, E) bir ET_4 uzayıdır.

Örnek 3.6.14 Örnek 3.6.1' de tanımlanmış olan (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzayı bir ET_4 uzayıdır.

Teorem 3.6.22 Bir ET_3 uzayının, bir ET_4 uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul uzayın komplimental olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzay olsun. Bu uzaya ait bir $a_H \tilde{\in} H$ olan bir esnek açık H kümesi ve $F \sqsubseteq G$ olacak şekilde bir esnek açık G kümesi verilsin. Teorem 3.6.1' den dolayı $a_H \tilde{\notin} F$' dir. Yine aynı teoremden dolayı $G \sqcap H = \Phi$ olacak biçimde esnek açık kümeler bu uzayda bulunacaktır. Uyarı 3.6.1' den dolayı F bir komplimental esnek küme olduğundan esnek kapalıdır. Ayrıca $a_F \neq b_G$ koşulunu sağlayan herhangi iki $a_F, b_G \tilde{\in} S_E(X)$ verilsin. Teorem 3.6.1' den $a_F \tilde{\in} H_1$ iken $b_G \tilde{\notin} H_1$ veya benzer şekilde $a_F \tilde{\in} H_2$ iken $b_G \tilde{\notin} H_2$ olacak şekilde $H_1, H_2 \in \tau$ vardır. Dolayısıyla (X, τ, E) bir ET_1 uzayıdır. Buradan (X, τ, E)'nin bir ET_3 olduğu çıkar.

$(\Leftarrow)$:ET_3 olan bir (X, τ, E) esnek topolojik uzayında, Teorem 3.6.11' den dolayı her esnek açık küme esnek kapalı olacağından Teorem 3.6.1' in sonucu olarak (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzaydır.

Teorem 3.6.23 (X, τ, E) komplimental ET_4 uzayı olsun. Bu taktirde, her $e \in E$ için (X, τ_e) topolojik uzayı bir T_4 ' tür.

İspat. (X, τ, E) komplimental esnek topolojik uzay olsun. Bu uzaya ait $F_1 \sqcap F_2 = \Phi$ olacak şekilde esnek kapalı $F_1, F_2 \in S_E(X)$ kümeleri verilsin. Teorem 3.6.1 ve Uyarı 3.6.1' den dolayı $F_1 \sqsubseteq G_1$ ve $F_2 \sqsubseteq G_2$ olacak biçimde $G_1 \sqcap G_2 = \Phi$ koşuluna uygun esnek açık G_1, G_2 kümeleri bu uzayda bulunacaktır. Burada F_1, F_2 esnek kapalı kümeleri ve G_1, G_2 esnek açık kümeleri komplimental olduğundan $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ve $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ şartına uygun olan F_i kapalı kümeleri ile G_i açık kümeleri her

$e \in E$ için τ_{e_i}' de var olacaktır. Yani her $e \in E$ için (X, τ_e) uzayı normaldir. Ayrıca $a_F \neq b_G$ esnek noktaları ise, sırasıyla F ve G komplimental esnek açık kümelerine esnek ait olsun. Bu taktirde eğer $a_F \tilde{\in} F$ ise, her $e \in E$ için $a_F \tilde{\notin} F(e)^{\tilde{c}}$ ' dir. Buradan her $e \in E$ için, $b_G \tilde{\notin} F(e)$ olup, $b_G \tilde{\notin} F$ elde edilir. Benzer biçimde $b_G \tilde{\in} G$ ise, her $e \in E$ için $b_G \tilde{\notin} G(e)^{\tilde{c}}$' dir. Buradan her $e \in E$ için, $a_F \tilde{\notin} G(e)$ olup, $a_F \tilde{\notin} G$ olur. Bu yüzden (X, τ, E) bir ET_1 uzayıdır. Herhangi bir $e \in E$ için, (X, τ_e) bir topolojik uzay ve $a_F \in F$ ve $b_G \in F^{\tilde{c}}$ iken, $b_G \in G$ ve $a_F \in G^{\tilde{c}}$ olup, $a_F \in F(e)$, $b_G \notin F(e)$ için $b_G \in G(e)$, $a_F \notin G(e)$ elde edilir. O halde her $e \in E$ için (X, τ_e) bir T_1 ' dir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.6.15 $E = \{a, b\}$ ve $X = \{x, y\}$ olmak üzere, $F_1, F_2, \ldots, F_{14} \in S_E(X)$ esnek kümeleri Örnek 3.6.1 ' deki şekilde tanımlansın. Bu taktirde her $e \in E$ için

$$\tau_a = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}\}$$

ve

$$\tau_b = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}\}$$

olmak üzere, τ_a ve τ_b topolojileri birer T_4 uzayıdır. Çünkü normal uzay olma tanımı dikkate alındığı zaman τ_a için $F_1 = \{x\}$, $F_2 = \{y\}$ birer kapalı küme olmak üzere $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ve $G_1 = \{x\}$, $G_2 = \{y\}$ birer açık küme olmak üzere $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ iken $F_1 \subseteq G_1$ ve $F_2 \subseteq G_2$ koşulları sağlanmaktadır. Aynı şekilde τ_b için de $F_1 = \{x\}$, $F_2 = \{y\}$ birer kapalı küme olmak üzere $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ve $G_1 = \{x\}$, $G_2 = \{y\}$ birer açık küme olmak üzere $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ iken $F_1 \subseteq G_1$ ve $F_2 \subseteq G_2$ koşullarının sağlandığı görülmektedir. Ayrıca τ_a ve τ_b topolojileri birer T_1 uzayıdır. Çünkü τ_a için, $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$' dir. Benzer şekilde τ_b için de $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ ' dir. Bu durum uzayların T_1 olması için yeterlidir. O halde her $e \in E$ için τ_a ve τ_b topolojileri birer T_4 ' tür.

Sonuç 3.6.1 Teorem 3.6.5, Teorem 3.6.8, Teorem 3.6.15 ve Teorem 3.6.22' nin doğal bir sonucu olarak, bir komplimental esnek topolojik uzay için aşağıdaki bağıntı doğrudur.

$$ET_0 \Longleftrightarrow ET_1 \Longleftrightarrow ET_2 \Longleftrightarrow ET_3 \Longleftrightarrow ET_4$$

Sonuç 3.6.2 Teorem 3.6.3 , Teorem 3.6.6 , Teorem 3.6.9 , Teorem 3.6.14 ve Teorem 3.6.23 ' ün bir sonucu olarak, bir komplimental esnek topolojik uzay için aşağıdaki ifade doğrudur.

(X, τ, E) komplimental ET_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ uzayı olsun. Bu taktirde, her $e \in E$ için (X, τ_e) topolojik uzayı bir $T_i, (i = 0, 1, 2, 3, 4)$' dir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışması dört bölümden meydana gelmektedir. Birinci bölümde esnek küme kavramının tarihçesi ve bu alanda yapılmış bilimsel çalışmalardan bahsedildi. İkinci bölümde Çağman[4, 5] ile Shabir ve Naz[28]' ın çalışmaları dikkate alınarak, esnek kümelere ilişkin temel kavramlar verildi. Üçüncü bölümde ise, yine aynı makaleler ve kaynakçada gösterilen çalışmalardan da faydalanmak suretiyle esnek topolojik uzaylarda esnek ayırma aksiyomlarından söz edildi. Ayrıca bu bölümde [28]' de verilen bazı teoremlerin notas- yonları, [4] dikkate alınarak yeniden yazıldı ve yine bu bölümde "ET_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ uzayı olma özelliği esnek kalıtsal bir özelliktir. Yani bir esnek T_i uzayının alt uzayı da esnek T_i'dir". "Esnek topolojik uzaylarda ET_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ uzayı olma özelliği bir esnek topolojik özelliktir", şeklinde ifade edilen teoremlerin ispatları gözden geçirildi ve Çağman [4, 5]' ın makaleleri de göz önünde bulundurulmak suretiyle düzeltilerek yeniden yapıldı. Bu bölümün son kısmında ise, Komplimental Esnek Topolojik Uzaylar başlığı altında, esnek kümelere ait yeni bir kavram ortaya kondu. Komplimental Esnek Kümelere ait teoremler verilerek, bu teoremlerin ispatları yapıldı ve örneklerle teoremler desteklendi. Yine bu kısımda esnek topolojik uzaylarda, komplimental esnek kümeler vasıtasıyla yeni bir sonuca varılarak iki yeni yardımcı teorem yazıldı. Molodtsov[20] ile başlayan süreçten şimdiye kadar esnek kümeler üzerine yazılan makalelerin sayısı yüzleri geçmiştir. Ancak bilimsel çalışmaların adım adım ilerlemesi prensibi göz önüne alındığı zaman bu tez çalışmasının da yapılmış olan önceki çalışmalara bir destek ve gelecekte yapılması planlanan önermeler ve teoriler için bir basamak olmasını dile- yerek, bu çalışmanın özellikle üçüncü bölümünde sözü edilen komplimental esnek topolojik uzaylar fikrinin, esnek topolojik uzaylar üzerine bilimsel çalışmalar yapanlara yardımcı olmasını temenni ederim.

KAYNAKLAR

[1] Aktaş, H., Çağman, N., *Soft Sets and Soft Groups*, Information Sciences, 177 (2007) 2726–2735.

[2] Aygünoğlu, A., Aygün, H., *Some notes on soft topological spaces* Neural Comput & Applic. 21(1) (2012), 113–119.

[3] Çağman, N., Çıtak, F., Enginoğlu, S., *Fuzzy parameterized fuzzy soft set theory and its applications*, Turkish Journal of Fuzzy Systems, 1(1) (2010), 21–35.

[4] Çağman, N., *Contributions to the theory of soft sets*, Journal of New Results in Science, 4 (2014), 33–41.

[5] Çağman, N., Karataş, S., Enginoğlu, S., *Soft Topology*, Computers and Mathematics with Applications, 62 (2011) 351–358.

[6] Çetkin, V., Aygün, H., *Uniformity structure in the context of soft set*, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 6(1) (2013), 69–76.

[7] Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S., Wang, X., *The parameterization reduction of soft sets and its applications*, Computers and Mathematics with Applications, 49(1) (2005), 757–763.

[8] Hussain, S., Ahmad, B., *Some properties of soft topological spaces*, Computers and Mathematics with Applications, 62 (2011), 4058–4067.

[9] Ahmad, B., Hussain, S., *On some structures of soft topology*, Mathematical Sciences, doi:10.1186/2251-7456-6-64.

[10] Kharal, A., Ahmad, B., *Mappings on soft classes*, New Math. and Nat. Computation 7(3) (2011), 471–481.

[11] Georgiou, D. N., Megaritis, A. C., Petropoulos, V. I., *On soft topological spaces*, Appl. Math. Inf. Sci. 7(5) (2013), 1889–1901.

[12] Göçür, O., Kopuzlu, A., *Some new properties on soft separation axioms*, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics 9(3) (2015), 421–429.

[13] Göçür, O., Kopuzlu, A., *On soft separation axioms*, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics 9(5) (2015), 817–822.

[14] Hazra, H., Majumdar, P., Samanta, S. K., *Soft topology*, Fuzzy Information and Engineering, 4(1) (2012), 105–115.

[15] Hussain, S., Ahmad, B., *Soft separation axioms in soft topological spaces*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 44(3) (2015), 565–574.

[16] Kong, Z., Gao, L., Wang, L., Li, S., *The normal parameter reduction of soft sets and its algoritm*, Computers and Mathematics with Applications, 56(1) (2008), 3029–3037.

[17] Maji, P. K., Roy, A. R., Biswas, R., *An application of soft sets in a decision making problem*, Computers and Mathematics with Applications, 44 (2002), 1077–1083.

[18] Majumdar, P., Samanta, S. K., *Similarity measure of soft sets*, New Mathematics and Natural Computation, 4(1) (2008), 1–12.

[19] Min, W. K., *A note on soft topological spaces*, Computers and Mathematics with Applications, 62 (2011) 3524–3528.

[20] Molodtsov, D., *Soft set theory first results*, Computers and Mathematics with Applications, 37 (1999), 19–31.

[21] Kelley, J. L., *General topology*, Ishi Press 2008.

[22] Mushrif, M. M., Sengupta, S., Ray, A. K., *Texture classification using a novel, soft-set theory based classification*, Lecture Notes In Computer Science, 3851 (2006), 246–254.

[23] Nazmul, S., Samanta, S. K., *Neighbourhood properties of soft topological spaces*, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics 6(1) (2013), 1–15.

[24] Pawlak, Z., *Rough Sets*, International Journal of Computer and Information Sciences, 11(5) (1982), 341–356.

[25] Pei, D., Miao, D., *From soft sets to information systems, in proceedings of granular computing*, IEEE, 2 (2005), 617–621.

[26] Roy, A. R., Maji, P. K., *A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 203(1) (2007), 412–418.

[27] Ravindran, M., Remya, P. B., *Urysohn's lemma in soft topological spaces*, International Journal of Research in Mathematics, 2(1) (2014), 1–4.

[28] Shabir, M., Naz, M., *On soft topological spaces*, Comput Math. Appl., 61 (2011), 1786–1799.

[29] Tanay, B., Kandemir, M. B., *Topological structure of fuzzy soft sets*, Computers and Mathematics with Applications, 61 (2011), 2952–2957.

[30] Varol, B. P., Aygün, H., *On soft Hausdorff spaces*, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 5(1) (2013), 15–24.

[31] Xiao, Z., Gong, K., Zou, Y., *A combined forecasting approach based on fuzzy soft sets*, Computers and Mathematics with Applications, 228 (2009), 326–333.

[32] Xiao, Z., Gong, K., Xia, S., Zou, Y., *Exclusive disjunctive soft sets*, Computers and Mathematics with Applications, 59 (2010), 2128–2137.

[33] Yang, H., Qu Li, C., *The induction and decision analysis of clinical diagnosis based on rough sets and soft sets*, Fangzhi Gaoxiao Jichukexue Xuebao Ed., 17(3) (2004), 208–212.

[34] Yang, X., Yu, D., Yang, J., Wu, C., *Generalization of soft set theory from crisp to fuzzy case in fuzzy information and engineering: Proceedings of ICFIE*, Advances in Soft Computing, 40 (2007), 345–355.

[35] Zadeh, L. A., *Fuzzy sets*, Information and Control, 8 (1965) 338–353.

[36] Zorlutuna, İ., Akdağ, M., Min, W. K., Atmaca, S., *Remarks on soft topological spaces*, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 3(2) (2012), 171–185.

[37] Zou, Y., Xiao, Z., *Data analysis approaches of soft sets under incomplete information*, Knowledge-Based Systems, 21(1) (2008), 941–945.

DİZİN

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	**:**	Osman Çakır
Doğum Yeri	**:**	Gölköy
Doğum Tarihi	**:**	01.03.1975
Medeni Hali	**:**	Evli
Bildiği Yabancı Dil	**:**	İngilizce
İletişim Bilgileri	**:**	Ordu Üniversitesi Fen-Ed. Fak. Matematik Bölümü, `osmancakir75@hotmail.com`
Lise	**:**	Ordu Lisesi(1991)
Lisans	**:**	Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Böl.(1996)