T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2X2 BLOK MATRİSLERDE MOORE-PENROSE İNVERSLER İÇİN BAZI YENİ GÖSTERİMLER

TUĞÇE TOPAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2016

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Tuğçe TOPAL tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Selahattin MADEN danışmanlığında yürütülen "2x2 Blok Matrislerde Moore-Penrose İnversler İçin Bazı Yeni Gösterimler" adlı bu tez, jürimiz tarafından 08 / 09 / 2016 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Selahattin MADEN

Başkan : Doç. Dr. Selahattin MADEN İmza :
Matematik, Ordu Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Selim NUMAN İmza :
Matematik, Giresun Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL İmza :
Matematik, Ordu Üniversitesi

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 22.09.2016 tarih ve 2016/531 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

07/11/2016

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Kürşat KORKMAZ

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

T. Topal

İmza

Tuğçe TOPAL

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

2X2 BLOK MATRİSLERDE MOORE-PENROSE İNVERSLER İÇİN BAZI YENİ GÖSTERİMLER

Tuğçe TOPAL

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2016
Yüksek Lisans Tezi, 98s.

Danışman: Doç. Dr. Selahattin MADEN

Bu tez dört bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde çalışmanın amacından bahsedilerek bir giriş verilmiştir. Genel Bilgiler başlıklı ikinci bölümde çalışmamızda gerekli olacak bazı temel kavramlar tanımlamış ve ileriki bölümlerde faydalanacağımız önemli bazı teoremler ifade edilmiştir. Bu bölümde ayrıca Moore-Penrose tipi genelleştirilmiş invers tanımı verilerek bunun çeşitli özellikleri ortaya konulmuştur. Üçüncü bölümde $2x2$ tipinde blok parçalanmış matrislerin Moore-Penrose tipi genelleştirilmiş inversleri ile ilgili bazı yeni ifadeler elde edilerek bu inverslerin hesaplanmasında kullanılan çeşitli formüller geliştirilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Matris, Kare Matris, Nonsingüler Matris, Rank, Determinant, Blok Matris, Bir Matrisin İnversi, Genelleştirilmiş İnvers, Moore-Penrose İnvers.

ABSTRACT

SOME NEW REPRESENTATIONS OF THE MOORE-PENROSE INVERSE OF 2X2 BLOCK MATRICES

Tuğçe TOPAL

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2016
MSc. Thesis, 98p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Selahattin MADEN

This thesis consist of four chapters. In the first chapter, it is given an introduction and the aim of the thesis. In the second chapter which is called General Informations, basic definitions and theorems in this thesis stated and proved. Also it is given the definition and some properties of the Moore-Penrose inverse of a matrix. In the third chapter, it is obtained some new expressions of the Moore-Penrose inverse of $2x2$ block partitioned matrices and it is given the methods of calculation the Moore-Penrose inverse of $2x2$ block partitioned matrices.

Key Words: Matrix, Square Matrix, Singular Matrix, Nonsingular Matrix, Rank, Determinant, Block Matrix, Inverse of a Matrix, Generalized Inverse, Moore-Penrose Inverse.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca hiçbir yardımını esirgemeyen ve biz genç araştırmacılara büyük destek sağlayarak bizleri cesaretlendiren danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Selahattin MADEN başta olmak üzere Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca Lisans ve Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden yararlandığım Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Hem bu zorlu ve uzun süreçte hem de hayatım boyunca yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan değerli aileme yürekten teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR VE SİMGELER

A^{T}	: A matrisinin transpoz matrisi
$\overline{A}$	: A matrisinin eşlenik matrisi (eş matrisi)
A^{*}	: A matrisinin eşlenik transpoz matrisi (Hermitian matrisi)
$\lvert A \rvert$	: A matrisinin determinantı
A_{ij}	: A matrisinin bir a_{ij} elemanının kofaktörü
A^{-1}	: A matrisinin inversi
A^{-} veya $A^{(1)}$	: A matrisinin genelleştirilmiş inversi (iç inversi)
$A^{(2)}$	: A matrisinin dış inversi
A_0 veya $A^{(1,2)}$	: A matrisinin yansımalı genelleştirilmiş inversi
A^{+}	: A matrisinin Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi
Bkz.	: Bakınız
Ek(A)	: A matrisinin ek matrisi
$r(A)$	: A matrisinin rankı
$\mathcal{N}(A)$	: A matrisinin null (sıfır) uzayı
$\Re(A)$	: A matrisinin ranj (sütun) uzayı
$P_{(\Re(A))}$	: A matrisinin $\Re(A)$ sütun (ranj) uzayının yansıtıcısı (izdüşümü)
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{K}$	: $\mathbb{K}$ kesir cismi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{K}_n^m$	: $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\mathbb{C}_n^m$	: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
I_n	: $n \times n$ tipindeki birim matris

1. GİRİŞ

Bir singüler matrisin inversi fikri ilk defa 1920 yılında Moore, (1920,1935) tarafından ortaya atılmıştır. Bu fikrin genel operatörlere genişletilmesi ise Tseng, (1949a, 1949b) tarafından yapılmıştır. Ancak, daha sonra 1955 yılına kadar bu konuda herhangi bir sistematik çalışmaya rastlanamamaktadır. 1955 yılında, önceki çalışmalardan habersiz olarak, Penrose, (1955) biraz farklı bir yoldan Moore tarafından verilen invers kavramını tekrar tanımlamıştır. Penrose ile aynı zamanlarda yaşayan bilim adamlarından birisi olan Rao, (1955) bir singüler matrisin Pseudo İnversi olarak adlandırdığı, en küçük kareler teorisinde singüler matrisli normal denklemlerin çözümünde ve tahmin edicilerin varyanslarının hesaplanmasında kullanılan yeni bir invers kavramı geliştirmiştir. Rao tarafından geliştirilen Pseudo İnvers, Moore ve Penrose tarafından ortaya konulan kısıtlamaların tümünü sağlamamaktadır. Bu nedenle de bu invers, Moore–Penrose inversten farklıdır, fakat gözlem denklemlerinin rankları üzerinde herhangi bir kısıtlama konulmaması durumunda en küçük kareler yönteminin genel teorisinin ortaya konulmasında oldukça yararlıdır. Rao, (1962), daha sonraki bir çalışmasında, lineer denklemlerle ilgili problemlerinin çözümünde yeterli olabilecek ve Moore ve Penrose' un vermiş olduğu tanımdan çok daha zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Böyle bir invers, bir genelleştirilmiş invers (g–invers) olarak adlandırılmış ve bunun uygulamaları Rao, (1962, 1965, 1966, 1967,1971)' nun birçok çalışmasında yer almıştır.

Genelleştirilmiş inversler üzerinde 1955'lerden itibaren çalışan başlıca bilim adamları arasında Greville, (1959), Ben-Israel ve Charnes, (1963), Chipman, (1964, 1968), Chipman ve Rao, (1964) sayılabilir. "Varyans Analizi" adlı ders notlarında g–inversi kullanılmıştır. Bir kare matrisin kısıtlamalı inversi tanımlanmıştır ki bu invers bilinen g–inversten farklıdır ve bazı uygulamalarda kullanılır. Singüler nonnegatif tanımlı bir matrisin g–inversini göz önüne alınmıştır ki bu invers, bir g–invers olmamasına rağmen bazı tahmin problemlerinin incelenmesinde yararlıdır. Rao, (1962) tarafından verilen daha zayıf tanımı sağlayan g–invers tek olmamakla birlikte matris cebirinde ilginç bir çalışma olarak kabul edilir. 1967 yılında bir yayınında Rao, (1967), değişik amaçlarla kullanılmak üzere g–inverslerin bir sınıflandırmasını vermiştir. Bu çalışmalar daha sonra genelleştirilmiş inverslerin yeni bir sınıflandırmasını ortaya atan Mitra, (1968a, 1968b), Mitra ve Bhimasankaram, (1969) tarafından geliştirilmiştir. Genelleştirilmiş inverslerin diğer çeşitli uygulamaları Mitra ve Rao, (1968a, 1968b, 1971) tarafından yapılan bir dizi çalışmada ele alınmıştır.

Genelleştirilmiş inverslerin hesaplanmasındaki sistematik gelişmeler ve onların çeşitli uygulamaları *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* (Wiley, 1971) adlı kitapta verilmiştir.

Bu tezde kare olmayan ya da kare olduğu halde bilinen anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve lineer denklem sistemlerinin genel durumda çözümünde kullanılan ve bilinen anlamdaki invers özelliklerini de sağlayan genelleştirilmiş invers adı verilen bir kavram ele alınmıştır. Bu amaçla ilk olarak bir matrisin genelleştirilmiş inversi, yansımalı genelleştirilmiş inversi ve Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi tanımları verilerek bu inverslerin çeşitli özellikleri ortaya konulmuştur. Daha sonra herhangi bir matrisi $2x2$ tipinde blok matrise parçalayarak çeşitli durumlarda bu matrislerin Moore-Penrose tipi genelleştirilmiş inversleri için bazi gösterimler verilmiş ve bu tipten genelleştirilmiş inversleri hesaplamada kullanılan bazı yöntemler ortaya konulmuştur. Ayrıca, $2x2$ tipinde blok matrislerin Moore–Penrose inversleri için genel ifadeler verilmiş ve Schur Complement içeren blok matrislerin Moore–Penrose inversleri için bazı ifadeler elde edilmiştir. Son olarak parçalı nonnegatif definit bir matrisin Moore–Penrose inversini bulma yöntemleri tartışılmış ve $2x2$ tipindeki blok matrislerin Moore–Penrose inversi için yeni gösterimler geliştirilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1. a. $\mathbb{K}$ bir cisim olsun. $m,n\in\mathbb{N}$ ve $1\leq i \leq m,\ 1\leq j \leq n$ olmak üzere bütün (i,j) sıralı ikililerinin kümesi $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olsun.

f: $A \longrightarrow \mathbb{K}$ fonksiyonu

$(i,j) \longrightarrow f(i,j) = a_{ij}$

olarak tanımlansın. $a_{ij} \in \mathbb{K}$ olacak şekilde seçilen $m.n$ tane elemanın oluşturduğu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

sayı tablosuna $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipinde bir matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

matrisi kısaca $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ şeklinde gösterilir. Her $(i,j),\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ ikilisine karşılık gelen a_{ij} elemanına A matrisinin (i,j)–yinci bileşeni denir.

b. $m \times n$ tipinde olan ve bileşenleri bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinden seçilen bütün $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ matrislerinin kümesi $\mathbb{K}_n^m$ ile gösterilir.

c. $A = \left[a_{ij}\right]$ ve $B = \left[b_{ij}\right]$ $m \times n$ tipinde her hangi iki matris olmak üzere, her (i,j) için

$a_{ij} = b_{ij},\ 1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ ise bu iki matrise eşit matrisler denir.

d. $A = \left[a_{ij}\right]$ $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, her bir a_{ij} elemanı sıfıra eşitse A matrisine sıfır matris denir.

e. $A = \left[a_{ij}\right]$ ve $B = \left[b_{ij}\right]$ $m \times n$ tipinde iki matris olmak üzere, A ve B matrislerinin toplamı, (i,j)–yinci bileşeni $a_{ij} + b_{ij}$ olan bir matris olup

$$+ :\ \mathbb{K}_n^m \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$(A,B) \longrightarrow A+B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}++b_{12} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

f. $c \in \mathbb{K}$ bir skaler olmak üzere $cA \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi (i,j)–yinci bileşeni ca_{ij} olan bir matristir. Yani

$$.: \ \mathbb{K} \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(c,A) \longrightarrow cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

olur. O halde her $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için $0 \in \mathbb{K}$ olmak üzere, $0A = 0 \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi, $m \times n$ tipinde sıfır matristir.

g. $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}_p^m$ ve $B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}_n^p$ olmak üzere, A ve B matrislerinin çarpımı $C = [c_{ij}] \in \mathbb{K}_n^m$ şeklinde bir matristir ve

$$.: \ \mathbb{K}_p^m \times \mathbb{K}_n^p \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(A,B) \longrightarrow A.B = C$$

$$[a_{ij}].[b_{ij}] = [c_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right], \ 1 \leq i \leq m, \ \ 1 \leq j \leq n$$

şeklindedir, yani

$$A.B = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1p}b_{p1}) & \dots & (a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1p}b_{pn}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mp}b_{p1}) & \dots & (a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{mp}b_{pn}) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. O halde matris çarpımının tanımlı olabilmesi için birinci çarpanın sütun sayısı, ikinci çarpanın satır sayısına eşit olmalıdır. Herhangi A ve B matrislerinin çarpımı $A.B$ veya AB ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1977).

Tanım 2.2. a. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, reel sayılar kümesi olarak alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki A matrisine bir reel matris denir.

b. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, kompleks sayılar kümesi olarak alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki bir A matrisine bir kompleks matris denir (Branson, 1999).

Tanım 2.3. a. Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ matrisinde $m = n$ ise, A matrisine kare matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

kare matrisinde $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$elemanlarına köşegen (esas köşegen) elemanları denir.

b. Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ kare matrisinin $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ köşegen elemanları dışındaki tüm elemanları sıfır ise yani, $a_{ij} = 0 \ (i \neq j)$ ise bu matrise köşegen matris denir ve $A =$ Köş$\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ ile gösterilir.

c. Bir köşegen matriste $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} =$ k, k $\in \mathbb{K}$ ise bu matrise skaler matris denir.

d. Köşegen üzerindeki elemanları 1 ve köşegen dışındaki elemanları 0 olan $n \times n$ tipindeki bir matrise birim matris denir ve

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Herhangi bir $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için, $I_m A = A I_n = A$ olur.

e. Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ matrisinden aynı numaralı satırlar ve sütunlar kendi aralarında yer değiştirilerek elde edilen $A^T = \left[a_{ij}\right]_{n \times m}$ matrisine A matrisinin transpozu (transpoze matrisi) denir. Buna göre A ve B uygun matrisler olmak üzere

$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad \text{ve} \quad (AB)^T = B^T A^T$$

eşitlikleri sağlanır.

f. A bir reel kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise, A matrisine simetrik matris denir.

g. A ve B kare matrisleri arasında $AB = BA$ bağıntısı varsa, bu matrislere değişmeli (komutatif) matrisler denir (Hacısalihoğlu,1977).

Tanım 2.4. a. $\{1,2,\ldots n\}$ kümesinin kendisi üzerine bir birebir ve örten bağıntısı veya eş değer olarak $1,2,\ldots n$ sayılarının yeniden bir sıralanmasına $\{1,2,\ldots n\}$ kümesinin bir σ permütasyonu denir. Böyle bir permütasyon,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$$

veya

$$\sigma = j_1, j_2, \ldots, j_n \quad , \; j_i = \sigma(i)$$

ile gösterilir. Bu permütasyonların tümünün kümesi S_n ile gösterilir. S_n de gelişigüzel bir σ permütasyonu, örneğin $\sigma = j_1, j_2, \ldots, j_n$ düşünüldüğünde σ da çift veya tek sayıda permütasyonlar olmasına göre σ ya çift veya tek permütasyon denir. O halde bir σ nın işareti

$$sgn\sigma = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \sigma \text{ çift ise} \\ -1, & \text{eğer } \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $sgn\sigma$ ile gösterilir.

b. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı kare matris olsun.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisinin her satırından ve her sütunundan yalnız ve yalnız bir eleman alınmak üzere n elemanın bir çarpımı düşünülsün. Böyle bir çarpım $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}$ şeklinde yazılır. Burada çarpanlar ardışık satırlardan gelir ve bu yüzden alt indisler $1, 2, \ldots, n$ doğal sayı sırasındadır. Çarpanlar farklı sütunlardan geldiğinden, ikinci alt indislerin dizisi S_n de bir $\sigma = j_1, j_2, \ldots, j_n$ permütasyonunu oluşturur. Tersine, S_n deki her permütasyon yukarıdaki şekilde bir çarpım tanımlar. Böylece A matrisi böyle $n!$ çarpım kapsar.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin determinantı det(A) veya $|A|$ şeklinde gösterilir ve yukarıdaki her çarpanı $sgn\sigma$ ile çarpılan veya $n!$ tane çarpımların toplamıdır. Yani,

$$|A| = \sum_{\sigma} (sgn\sigma) a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}$$

veya

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (sgn\sigma) a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots , a_{n\sigma(n)}$$

şeklinde n mertebedendir.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı aşağıdaki şekilde de tanımlanmaktadır.

c. 1×1 tipinde bir A matrisinin determinantı kendisidir. $A = [a]$ ise, $\det(A) = |a| = a$ olur.

d. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının $|M_{ij}|$ şeklinde tanımlanan minörü, A matrisinden i–yinci satırın ve j–yinci sütunun atılması ile oluşan$(n-1) \times (n-1)$ tipindeki kare matrisin determinantıdır.

e. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının minörü $|M_{ij}|$ olsun. A matrisinin bir a_{ij} elemanının A_{ij} şeklinde gösterilen kofaktörü (işaretli minörü veya eş çarpanı),

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.|M_{ij}|$$

şeklinde tanımlanır.

f. 2×2 tipinde bir A matrisinin determinantı aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

olur.

$n > 2$ için bir kare matrisin determinantı, aşağıda gösterildiği gibi bir indirgeme işlemi ve minörleri ile işaretli minörleri kullanılan bir açılımla hesaplanır.

g. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı herhangi bir satır (sütun) elemanlarının kendi kofaktörleriyle çarpılıp bu çarpanların toplanmasıyla bulunur. Yani herhangi i ve j $(i, j = 1,2,3, \dots , n)$ için

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}|M_{ik}| \tag{2.4}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj}|M_{ik}| \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır.

Her bir i için, (2.4) ile verilen toplama, A matrisinin determinantının i–yinci satır elemanlarına göre açılımı, her bir j için, (2.5) ile verilen toplama ise A matrisinin determinantının j–yinci sütun elemanlarına göre açılımı denir.

h. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi için $|A| = 0$ ise, A matrisine singüler (tekil) matris, $|A| \neq 0$ ise, A matrisine nonsingüler (tekil olmayan veya regüler) matris denir (Branson, 1999).

Tanım 2.5. a. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinde bir a_{ij} elemanının kofaktörü A_{ij} olsun.

$$\mathrm{Ek}(A) = [A_{ij}]^T = [A_{ji}]$$

şeklinde tanımlanan matrise A matrisinin ek matrisi denir. Buna göre,

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

olur.

b. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için $A.B = B.A = I_n$ olacak şekilde bir $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ matrisi varsa, B matrisine A matrisinin inversi denir ve $A^{-1} = B$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu,1977).

Teorem 2.1. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi ile bu matrisin ek matrisinin çarpımı bir skaler matris olup,

$$A.\mathrm{Ek}(A) = \mathrm{Ek}(A).A = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A| I_n \tag{2.6}$$

ile verilir (Hacısalihoğlu,1977).

İspat: $$A.\mathrm{Ek}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$$

olur ki bu matris bir skaler matristir. Benzer şekilde,

$$\mathrm{Ek}(A).A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. O halde,

$$A.\mathrm{Ek}(A) = \mathrm{Ek}(A).A = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A| I_n$$

bulunur.

Teorem 2.2. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matrisinin inversi,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\mathrm{Ek}(A) \tag{2.7}$$

dır (Hacısalihoğlu,1977).

İspat: (2.6) bağıntısından dolayı $A.\mathrm{Ek}(A) = |A|I$ olur. Bu ifadenin her iki yanı A^{-1} ile çarpıldığında,

$$(A^{-1}A).\mathrm{Ek}(A) = A^{-1}|A|I \implies \mathrm{Ek}(A) = |A|A^{-1}I \implies \mathrm{Ek}(A) = |A|A^{-1}$$

olur. Öte yandan A matrisi nonsingüler olduğundan $|A| \neq 0$ olup,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\mathrm{Ek}(A)$$

elde edilir.

Teorem 2.3. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler bir matris, B ve C çarpıma uygun matrisler olmak üzere $AB = AC$ ise $B = C$ olur (Hacısalihoğlu, 1977).

İspat: $AB = AC$ eşitliğinin her iki tarafı soldan A^{-1} ile çarpılmasıyla $A^{-1}AB = A^{-1}AC$ yani $B = C$ elde edilir.

Teorem 2.4. a. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matris olsun. A^{-1} matrisi tektir.

b. A nonsingüler matris ise A^{-1} matrisi de nonsingüler olup $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

c. A ve B çarpmaya uygun nonsingüler matrisler ise AB matrisi de nonsingüler olup $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

d. A nonsingüler bir matris ise A^T matrisi de nonsingüler olup $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir (Branson, 1999).

İspat: a. B ve C matrislerinin A matrisinin herhangi iki inversi olduğu varsayılsın. O zaman $AB = BA = I$ ve $AC = CA = I$ olur. Buradan $C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$ elde edilir.

b. $(A^{-1})^{-1}$ matrisi A^{-1} matrisinin inversidir. Aynı zamanda A matrisi de A^{-1} matrisinin inversidir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

c. $(AB)^{-1}$ matrisi AB matrisinin inversidir. Ayrıca

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

ve

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

yazılabilir. Böylece $B^{-1}A^{-1}$ matrisi de AB matrisinin inversi olur. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

d. $(A^T)^{-1}$ matrisi A^T matrisinin inversidir. Ayrıca $I^T = I$ olduğundan $I = I^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T(A)^T$ olur. Bu durum, $(A^{-1})^T$ matrisinin A^T matrisinin bir inversi olduğunu gösterir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ elde edilir.

Tanım 2.6. a. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$matrisi için $A^2 = A$ ise, A matrisine idempotent matris denir.

b. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı A matrisinin elemanlarının yerlerine eşlenikleri yazılarak elde edilen matrise A matrisinin eşleniği (eş matrisi) denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

c. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı A matrisi için $\left(\overline{A}\right)^T = A$ ise A matrisine hermitian matris denir ve $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ ile gösterilir.

d. Bir A matrisi için $AA^* = A^*A$ ise A matrisine normal matris denir.

e. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^*$ (veya $AA^* = A^*A = I$) ise A matrisine birimsel (unitary) matris denir.

f. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^T$ ise A matrisine ortogonal (dik) matris denir.

g. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ reel simetrik bir matris olmak üzere, sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{R}_1^n$ vektörü için $x^TAx > 0$ ise A matrisine nonnegatif definit (pozitif tanımlı) matris, $x^TAx \geq 0$ ise A matrisine nonnegatif semi definit (pozitif yarı tanımlı) matris denir.

h. A, $n \times n$ tipinde bir kare matris olsun. $(A - \lambda I)x = 0$ eşitliğini sağlayan λ skalerine A matrisinin bir özdeğeri, sıfır olmayan x vektörüne de A matrisinin bir özvektörü denir (Hacısalihoğlu,1977).

Teorem 2.5. A ve B uygun matrisler olmak üzere,

a. $\left(\overline{A}\right)^T = \overline{(A^T)}$.

b. $(A^*)^* = A$.

c. $(A + B)^* = A^* + B^*$.

d. $(AB)^* = B^*A^*$.

eşitlikleri sağlanır (Branson, 1999).

İspat: **a.** $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu takdirde $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]$ ve $\left(\overline{A}\right)^T = [\overline{a_{ji}}]$olur. Diğer taraftan $A^T = [a_{ji}]$ ve $\overline{(A^T)} = [\overline{a_{ji}}]$ olduğundan $\overline{(A^T)} = \left(\overline{A}\right)^T$ olduğu görülür.

b. $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ olduğundan, $(A^*)^* = \left(\overline{\left(\overline{A}\right)^T}\right)^T = (A^T)^T = A$ elde edilir.

c. Hermitian matris tanımına göre,

$$(A + B)^* = \left(\overline{A + B}\right)^T = \left(\overline{A} + \overline{B}\right)^T = \left(\overline{A}\right)^T + \left(\overline{B}\right)^T = A^* + B^*$$

elde edilir.

d. Hermitian matris tanımına göre,

$$(AB)^* = \left(\overline{AB}\right)^T = \left(\overline{A}\,\overline{B}\right)^T = \left(\overline{B}\right)^T\left(\overline{A}\right)^T = B^*A^*$$

yazılabilir.

Teorem 2.6. Reel simetrik bir A matrisinin pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olması için gerek ve yeter şart, tüm özdeğerlerinin (sıfırdan farklı özdeğerlerinin) pozitif olmasıdır (Hacısalihoğlu,1977).

İspat: A matrisi pozitif tanımlı olmak üzere, λ özdeğerine ve ilgili x özvektörüne sahip olsun. Bu takdirde bu x vektörü için $Ax = \lambda x$ ve $\langle Ax, x\rangle > 0$ bağıntıları vardır. O halde $0 < \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$ olur. x bir özvektör olduğundan, sıfırdan farklıdır ve dolayısıyla $\langle x, x\rangle$ pozitiftir. Bu durumda $\lambda > 0$ olmalıdır.

A matrisi pozitif yarı tanımlı olmak üzere, λ özdeğerine ve ilgili x özvektörüne sahip olsun. Bu takdirde bu x vektörü için $Ax = \lambda x$ ve $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ bağıntıları vardır. O halde,

$$0 \leq \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$$

olur. x bir özvektör olduğundan, sıfırdan farklıdır ve dolayısıyla $\langle x, x\rangle$ pozitiftir. Bu durumda $\lambda \geq 0$ olmalıdır.

Tüm (sıfırdan farklı) özdeğerleri pozitif olması halinde A matrisinin pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olacağı benzer şekilde gösterilebilir (Lanchester, 1969).

Tanım 2.7. a. $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörler kümesi verilmiş olsun. $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği ancak $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinin tümü birden sıfır olduğunda sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine lineer bağımsızdır denir. Aksi halde yani, $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine lineer bağımlıdır denir.

b. A matrisi $m \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. A matrisinin sütun vektörlerini $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$ ile ve satır vektörlerini $A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}$ ile gösterelim. A_{i*} , $i = 1, 2, \dots, m$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına A matrisinin satır rankı, A_{*j} , $j = 1, 2, \dots, n$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına ise A matrisinin sütun rankı denir (Hacısalihoğlu,1977).

Teorem 2.7. Bir matrisin iki satırının kendi aralarında yer değiştirmesi matrisin satır rankını değiştirmez (Branson, 1999).

İspat: A matrisinin herhangi iki satırı yer değiştirdiğinde satır vektörlerinin kümesi değişmeyeceğinden, bu durum matrisin satırları arasındaki lineer bağımsızlığı değiştirmez. Yani satır rankını değiştirmez.

Teorem 2.8. $AX = 0$ ve $BX = 0$ denklemlerinin çözüm kümeleri aynı ise, o zaman A ve B $n \times n$ tipindeki matrislerin sütun rankları aynıdır (Branson, 1999).

İspat: $AX = 0$ sistemi,

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = 0 \tag{2.8}$$

olarak yazılabilir. Burada A_i, A matrisinin i-yinci sütunudur ve $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ olur. Benzer şekilde, $Bx = 0$ sistemi,

$$x_1 B_1 + x_2 B_2 + \cdots + x_n B_n = 0 \tag{2.9}$$

olarak yazılabilir.

A matrisinin sütun rankı a, B matrisinin sütun rankı b ile gösterilsin. A matrisinin sütun rankı, B matrisinin sütun rankından büyük kabul edilsin. Böylece $a > b$ olur. Bu durumda A matrisinin a tane lineer bağımsız sütunu olmalıdır. Genellik kaybedilmeden, bunların A matrisinin ilk a sütunu olduğu varsayılabilir. (Eğer değilse, A matrisinin sütunları bu şekilde yeniden düzenlenebilir. Bu durum ise Teorem 2.7' ye benzer şekilde A matrisinin sütun rankını değiştirmez.) Ancak $a > b$ kabul edildiğinden B matrisinin ilk a sütunu lineer bağımlıdır. Böylece, hepsi sıfır olmayan öyle $d_1, d_2, \dots, d_n$ vardır ki,

$$d_1 B_1 + d_2 B_2 + \cdots + d_a B_a = 0$$

olur. Buradan,

$$d_1 B_1 + d_2 B_2 + \cdots + d_a B_a + 0B_{a+1} + \cdots + 0B_n = 0$$

ve (2.9) sisteminin çözümü olarak,

$$x_1 = d_1 \quad x_2 = d_2 \quad \dots \quad x_a = d_a \quad x_{a+1} = x_{a+2} = \cdots = x_n = 0$$

bulunur. Bu aynı değerler (2.8) sisteminin de çözümü olarak verildiğinden,

$$d_1 A_1 + d_2 A_2 + \cdots + d_a A_a = 0$$

dır. Burada, belirtildiği gibi, $d_1, d_2, \dots, d_a$ sabitlerinin tümü sıfır değildir. Ancak bu $A_1, A_2, \dots, A_a$ matrislerinin lineer bağımlı olduğunu gösterir ki, bu da bir çelişkidir.

A ve B matrislerinin rollerini değiştirerek yapılan benzer bir çalışma, B matrisinin sütun rankının da A matrisinin sütun rankından daha büyük olamayacağını gösterir. Böylece bu iki matrisin sütun rankları eşit olmalıdır.

Teorem 2.9. Elemanter satır işlemleri herhangi bir matrisin sütun rankını değiştirmez (Branson, 1999).

İspat: A matrisine elementer satır işlemleri uygulanarak elde edilen matris B olsun. Bu durumda $Ax = 0$ ve $Bx = 0$ homojen denklem sistemlerinin çözüm kümeleri aynıdır. Teorem 2.8 yardımıyla A ve B matrislerinin sütun rankları aynıdır.

Teorem 2.10. Herhangi bir A matrisi için satır rankı sütun rankına eşittir (Branson, 1999).

İspat: $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin satır rankının r ve sütun rankının ise c olduğu kabul edilsin. $r = c$ olduğu gösterilecektir. A matrisinin satırları ilk r satırı lineer bağımsız ve kalan $m - r$ satırı ilk r satırın lineer birleşimi olacak şekilde yeniden düzenlenirse, Teorem 2.7 ve Teorem 2.8 yardımıyla bu işlemin A matrisinin satır ve sütun ranklarını değiştirmediği görülür. A matrisinin satırları sırasıyla $A_1, A_2, \dots, A_m$ ile gösterilsin ve C ve D matrisleri,

$$C = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_r \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad D = \begin{bmatrix} A_{r+1} \\ A_{r+2} \\ \cdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın. O zaman A matrisi $\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$ bloklanmış matrisidir. Ayrıca D matrisinin her bir satırı C matrisinin satırlarının bir lineer birleşimi olduğundan, öyle bir T matrisi vardır ki, $D = TC$ olur. Özel durumda eğer,

$$A_{r+1} = d_1 A_1 + d_2 A_2 + \cdots + d_r A_r$$

ise, o zaman $[d_1, d_2, \dots, d_r]$ vektörü T matrisinin ilk satırıdır. Buradan, her hangi bir n boyutlu x vektörü için,

$$Ax = \begin{bmatrix} Cx \\ Dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx \\ TCx \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Bu durumda, ancak ve ancak $Cx = 0$ ise, $Ax = 0$ olur ve Teorem 2.8 den dolayı A ve B matrislerinin sütun rankı c dir. Ancak B matrisinin sütunları r boyutlu vektörlerdir. Böylece B matrisinin sütun rankı r den büyük olamaz. Yani,

$$c \leq r \tag{2.10}$$

olur.

Yukarıdaki durum A^T matrisi için tekrarlanırsa, A^T matrisinin sütun rankının A^T matrisinin satır rankından büyük olamayacağı görülür. Ancak, A^T matrisinin sütunları A matrisinin satırları olduğundan bu durum A matrisinin satır rankının A matrisinin sütun rankından büyük olamayacağı anlamına gelir. Yani,

$$r \leq c \tag{2.11}$$

olur. (2.10) ve (2.11) bağıntılarından $r = c$ olduğu görülür.

Tanım 2.8. Herhangi bir A matrisinin rankı, satır ve sütun rankı olarak tanımlanır ve $\text{rank}(A)$ veya $r(A)$ şeklinde gösterilir (Branson, 1999).

Teorem 2.11. A bir matris olmak üzere $r(A) = r(A^T)$ dir (Hacısalihoğlu,1977).

İspat: A matrisinin satırları A^T matrisinin sütunları ve A matrisinin sütunları A^T matrisinin satırları olduğundan, Teorem 2.10 dan istenilen sonuç elde edilir.

Tanım 2.9. $n \times n$ tipindeki bir A kare matrisi için eğer $r(A) = n$ ise A matrisine Nonsingüler (Tekil Olmayan) Matris denir. Aksi durumda yani, $r(A) < n$ ise A matrisine Singüler (Tekil) Matris denir (Hacısalihoğlu,1977).

Tanım 2.10. a. $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. $\mathcal{N}(A) = \{x: Ax = 0\}$ şeklinde tanımlanan kümeye A marisinin null (sıfır) uzayı denir.

b. $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. $\mathcal{R}(A) = \{y: Ax = y\}$ şeklinde tanımlanan kümeye A matrisinin ranj (sütun) uzayı denir (Hacısalihoğlu, 1977).

Teorem 2.12. Eğer A, r ranklı $m \times n$ tipinde bir matris ise, bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan nonsingüler P ve Q matrisleri vardır. I, $r \times r$ boyutlu birim matris olmak üzere,

a. $m = n = r \Rightarrow PAQ = I.$

b. $m = r < n \Rightarrow PAQ = [I\ ,0].$

c. $m > r,\ n > r \Rightarrow PAQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (2.12)

İspat: (Lancaster, 1969).

Teorem 2.13. Çarpmaya uygun A ve B matrislerinin çarpımının rankı A ve B matrislerinin rankını geçemez. Yani,

$$r(AB) \leq \min\{r(A)\,,\ r(B)\} \tag{2.13}$$

dir (Lancaster, 1969).

İspat: AB matrisinin her bir sütunu A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonu olduğundan AB matrisinin sütun uzayı A matrisinin sütun uzayının alt kümesi olur. Böylece $r(AB) \leq r(A)$ eşitsizliği bulunur. Benzer şekilde $r(AB) \leq r(B)$ eşitsizliği de sağlanır. Böylece $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ elde edilir.

2.2. Genelleştirilmiş İnversler

Herhangi bir A matrisi bir inverse sahip olabilmesi için A matrisinin nonsingüler ve kare matris olması gerekir. Bu durumda A matrisi yardımıyla

$$AX = B \tag{2.14}$$

lineer denklem sisteminin var olan tek çözümü $X = A^{-1}$B şeklindedir. Ayrıca,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

şartını sağlayan ve A matrisinin inversi olarak adlandırılan A^{-1} matrisi vardır. Bununla birlikte A matrisinin kare matris olmadığı durumlarda ya da A matrisinin kare matris fakat singüler olduğu durumlarda inversi yoktur. Bu durumlarda A^{-1} matrisinin özelliklerini de içeren ve genelleştirilmiş invers (g–invers) matris adını alan yeni bir kavram sayesinde (2.14) sisteminin bir çözümü olabilir.

$\mathbb{C}_n^m$, kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesini göstersin. Bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisi için aşağıdaki dört şartı (Moore–Penrose şartları) sağlayan bir G matrisine A matrisinin Moore–Penrose inversi denir ve A^+ veya $A^\dagger$ ile gösterilir.

(i) $AGA = A$,

(ii) $GAG = G$,

(iii) $(AG)^* = AG,$

(iv) $(GA)^* = GA.$ (2.15)

Eğer G matrisi sadece (i) şartını sağlıyorsa, bu G matrisine, A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi (iç inversi) denir ve A^- veya $A^{(1)}$ ile gösterilir. Sadece (ii) şartını sağlayan G matrisine, A matrisinin bir dış inversi denir ve $A^{(2)}$ ile gösterilir. Hem (i) hem de (ii) şartını sağlayan G matrisine ise, A matrisinin bir yansımalı genelleştirilmiş inversi denir ve $A^{(1,2)}$ veya A_0 ile gösterilir.

Moore-Penrose şartlarından sadece (i) şartını sağlayan yani,

$$AGA = A \tag{2.16}$$

olacak şekildeki G matrisine, A matrisinin bir g–inversi (genelleştirilmiş inversi) denir.

Bir matrisin g–inversini bulmak için aşağıdaki algoritma kullanılır.

Algoritma 2.1. $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ r ranklı herhangi bir matris olsun.

1. Adım: r ranklı A matrisinde, $r \times r$ tipinde nonsingüler herhangi bir B alt matrisi seçilir.

2. Adım: Seçilen B alt matrisinin inversi bulunup bu inversin transpozu alınır.

3. Adım: A matrisinde B alt matrisinin her bir elemanına karşılık gelen yere $(B^{-1})^T$ matrisinin elemanları yerleştirilir.

4. Adım: A matrisinin diğer tüm elemanlarının yerine sıfır yazılır.

5. Adım: Elde edilen matrisin transpozu alınır. Bu matrise G denirse, G matrisi A matrisinin bir g–inversidir.

Örnek 2.1. Algoritma 2.1 3×3 tipindeki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisine uygulansın. A matrisi rankı 2 olan singüler bir matristir.

1. Adım: A matrisinin 2×2 tipinde bir nonsingüler $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ alt matrisi seçilsin.

2. Adım: $|B| = 10 - (-3) = 13 \neq 0$ olduğundan B^{-1} mevcut olup

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}.\text{Ek}(B) = 1/13.\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/13 & -3/13 \\ 1/13 & 2/13 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu matrisin transpozu alınırsa

$$(B^{-1})^T = \begin{bmatrix} 5/13 & 1/13 \\ -3/13 & 2/13 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Bulunan $(B^{-1})^T$ matrisi A matrisinde elemanları B alt matrisinin elemanlarının yerlerine karşılık gelecek şekilde yerleştirilir. Diğer tüm elemanları sıfır alınır. Böylece

$$\begin{bmatrix} 5/13 & 1/13 & 0 \\ -3/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

5. Adım: Bir önceki adımda bulunan matrisin transpozu alınarak

$$G = \begin{bmatrix} 5/13 & -3/13 & 0 \\ 1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi oluşturulur. Bu şekilde oluşturulan G matrisi A matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten

$$AG = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 5/13 & -3/13 & 0 \\ 1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup,

$$AGA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} = A$$

olduğu görülür.

Verilen A matrisinin başka bir B alt matrisini seçerek, seçilen bu yeni B alt matrisine Algoritma 2.1 uygulansın.

1. Adım: A matrisinin rankı 2 olduğundan B matrisi $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ şeklinde seçilsin.

2. Adım: $|B| = 10 - 0 = 10 \neq 0$ olduğundan,

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}.\text{Ek}(B) = 1/15.\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ -3/5 & 1/3 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece,

$$(B^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

3. ve 4. Adımlar: Bu durumda,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

olur.

5. Adım: Bu şekilde bulunan matrisin transpozu alındığında

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -3/5 & 1/3 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bulunan bu G matrisi A matrisinin bir g–inversi olur. Gerçekten

$$AG = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -3/5 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$AGA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} = A$$

olduğu görülür.

Sonuç 2.1. Yukarıdaki iki seçim, bir matrisin g–inversinin tek olmadığını gösterir. Bu nedenle bir matrisin tanımlı birden çok g–inversi bulunabilir.

Örnek 2.2. 2×3 tipindeki $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ dikdörtgen matrisi alınsın. E matrisinin rankının 2 olacağı açıktır. Algoritma 2.1 E matrisine uygulansın.

1. Adım: Bu durumda M matrisi $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ olarak seçilebilir.

2. Adım: $|M| = -1 - 1 = -2 \neq 0$ olup

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}.\text{Ek}(M) = \frac{-1}{2}.\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla,

$$(M^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen

$$G = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi E matrisinin bir g–inversi olduğu gösterilebilir. Gerçekten,

$$EG = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$EGE = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = E$$

olduğu görülür.

Örnek 2.3. 5×2 tipindeki

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

dikdörtgen matrisi alınsın. E matrisinin rankının 2 olacağı açıktır. Algoritma 2.1 E matrisine uygulansın.

1. Adım: Bu durumda M matrisi, $M = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ olarak seçilebilir.

2. Adım: $|M| = -4 - 0 = \; -4 \neq 0$ olup,

$$M^{-1}=\frac{1}{|M|}.\mathrm{Ek}(M)=-1/4\,.\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2 & 1/4\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla

$$(M^{-1})^T=\begin{bmatrix}-1/2 & 0\\ 1/4 & 1/2\end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ -1/2 & 0\\ -1/4 & 1/2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

bulunur.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen $G=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1/2 & 1/4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0\end{bmatrix}$ matrisi, E matrisinin bir g–inversi olduğu gösterilebilir. Gerçekten,

$$EG=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\\ -2 & 1\\ 0 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0 & 0 & -1/2 & 1/4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1/2 & 3/4 & 0\\ 0 & 0 & -3/2 & 3/4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 3/4 & 0\end{bmatrix}$$

ve

$$EGE=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1/2 & 3/4 & 0\\ 0 & 0 & -3/2 & 3/4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 3/4 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\\ -2 & 1\\ 0 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\\ -2 & 1\\ 0 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}=E$$

olduğu görülür.

Algoritma 2.1, rankı 1 olan matrislerin g–inversini bulmak için aşağıdaki şekilde uyarlanabilir.

Algoritma 2.2.

1. Adım: A matrisinin sıfırdan farklı herhangi bir elemanı B olarak seçilir.

2. Adım: Seçilen bu elemanın inversi bulunur.

3. Adım: Bulunan bu invers A matrisinde karşılık gelen yere yazılır.

4. Adım: A matrisinin diğer tüm elemanlarının yerine sıfır yazılır.

Örnek 2.4. 3×4 tipindeki $L = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & 8 \\ 3 & -6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ matrisi alınsın. L dikdörtgen matrisinin rankı 1 dir. Algoritma 2.2 L matrisine uygulansın.

1. Adım: $M = [8]$ seçilsin.

2. Adım: $M^{-1} = [1/8]$ olur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ elde edilir.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi L matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten,

$$LG = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & 8 \\ 3 & -6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$LGL = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & 8 \\ 3 & -6 & 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & 8 \\ 3 & -6 & 9 & 12 \end{bmatrix} = L$$

olur. L matrisi 3×4 tipinde olduğu için $3.4 = 12$ tane g–inversi bulunabilir.

Sonuç 2.2. Genel olarak 1 ranklı ve $m \times n$ tipindeki matrislerin $m.n$ tane g–inversi bulunabilir. Matrisin sıfırdan farklı herhangi bir elemanının inversini alıp, diğer tüm elemanlarını sıfır aldıktan sonra elde edilen matrisin transpozu alınarak g–inversi bulunur. Eğer A matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde 1 ranklı bir matris ise, A matrisinin, 1–ncisi; $\begin{bmatrix} (a_{11})^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

2–ncisi; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (a_{12})^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

$\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots$

(m.n)–ncisi; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (a_{mn})^{-1} \end{bmatrix}$

şeklinde $m.n$ tane g–inversi bulunabilir.

2.3. Moore–Penrose İnverslerin Varlığı

A nonsingüler matrisinin inversi olan A^{-1} matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayacağı açıktır. Yani $A^{-1} = A^{+}$ olur. Bununla birlikte, eğer A bir singüler matris veya kare olmayan bir matris ise, bu durumda Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir A^{+} matrisinin mevcut olup olmadığı ile ilgili bir soru ortaya çıkar. Bu kısımda her A matrisi için bir A^{+} matrisinin var ve tek olduğu gösterilecektir. Ayrıca bu şekilde tanımlanan Moore–Penrose inversin bir takım özellikleri ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 2.14. Eğer A matrisi $m \times n$ tipinde sıfır matris ise, A^{+} matrisi $n \times m$ tipinde sıfır matristir.

İspat: Açık olarak $A^{+} = 0$ alındığında Moore–Penrose şartlarının sağlandığı görülür.

Teorem 2.15. Her A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir A^{+} matrisi vardır.

İspat: Eğer $A = 0$ ise $A^{+} = 0$ olduğu açıktır. $A \neq 0$ olsun. A matrisinin r ranklı olduğu kabul edilsin. Bu durumda A matrisi,

$$A = BC \tag{2.17}$$

şeklinde parçalanabilir. Burada B matrisi $m \times r$ tipinde $r > 0$ ranklı ve C matrisi $r \times n$ tipinde $r > 0$ ranklı matrisler olup, $B^{*}B$ ve CC^{*} çarpımlarının her ikisi de nonsingülerdir. Bu durumda eğer A^{+} matrisi,

$$A^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*} \tag{2.18}$$

olarak alınırsa, A^{+} matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $AA^{+}A = (BC)C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}(BC)$

$= B(CC^{*})(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}(B^{*}B)C$

$= BC = A,$

(ii) $A^{+}AA^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}(BC)C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}$

$= C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}(B^{*}B)(CC^{*})(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}$

$= C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*} = A^{+},$

(iii) $(AA^{+})^{*} = [(BC)C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}]^{*} = B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}(CC^{*})B^{*}$

$= B(B^{*}B)^{-1}B^{*} = B(CC^{*})(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}$

$= (BC)C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*} = AA^{+},$

(iv) $(A^{+}A)^{*} = [C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}(BC)]^{*}$

$= C^{*}(B^{*}B)(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}C$

$= C^{*}(CC^{*})^{-1}C$

$= C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}(B^{*}B)C$

$= C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}(BC) = A^{+}A$

olduğu görülür.

Teorem 2.16. Herhangi bir A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir tek A^{+} matrisi vardır. Yani, her A matrisinin bir tek Moore–Penrose inversi vardır.

İspat: A matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayan herhangi iki Moore–Penrose inversi A_1^{+} ve A_2^{+} olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} A_1^{+} &= A_1^{+}AA_1^{+} = A_1^{+}(AA_1^{+})^{*} = A_1^{+}(A_1^{+})^{*}A^{*} = A_1^{+}(A_1^{+})^{*}(AA_2^{+}A)^{*} \\ &= A_1^{+}(A_1^{+})^{*}A^{*}(A_2^{+})^{*}A^{*} = A_1^{+}(AA_1^{+})^{*}(AA_2^{+})^{*} = A_1^{+}AA_1^{+}AA_2^{+} = A_1^{+}AA_2^{+} \\ &= A_1^{+}A(A_2^{+}AA_2^{+}) = (A_1^{+}A)^{*}(A_2^{+}A)^{*}A_2^{+} = A^{*}(A_1^{+})^{*}A^{*}(A_2^{+})^{*}A_2^{+} \\ &= (AA_1^{+}A)^{*}(A_2^{+})^{*}A_2^{+} = A^{*}(A_2^{+})^{*}A_2^{+} = (A_2^{+}A)^{*}A_2^{+} = A_2^{+}AA_2^{+} = A_2^{+} \end{aligned}$$

olduğundan $A_1^+ = A_2^+$ olur. Yani, A^+ matrisi tektir.

Teorem 2.17. $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin bir Moore–Penrose inversi varsa $n \times m$ tipindedir.

İspat: AA^+ matrisinin simetrik ve dolayısıyla kare olması gerçeğinden ispat görülür.

Teorem 2.18. a. $m \times n$ tipindeki bir $A = [a_{ij}]$ matrisinin tüm elemanları 1 ise bu takdirde, $A^+ = \frac{1}{m.n} A^*$ dir.

b. $a,\ n \times 1$ tipinde ve $a \neq 0$ olan bir sütun vektörü ise, bu durumda a^+, $a^+ = (a^* a)^{-1} a^*$ şeklindedir.

c. $a,\ 1 \times n$ tipinde ve $a \neq 0$ olan bir satır vektörü ise, bu durumda a^+, $a^+ = a^*(aa^*)^{-1}$ şeklindedir.

İspat: a. İspat için teoremde verilen A^+ matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Bu durumda,

(i) $AA^+A = A\left(\frac{1}{m.n} A^* \right)A = A\frac{1}{m.n}(A^*A) = A.\frac{1}{m.n}.m.n = A,$

(ii) $A^+AA^+ = \left(\frac{1}{m.n} A^* \right)A\left(\frac{1}{m.n} A^* \right) = \frac{1}{m.n}(A^*A)\left(\frac{1}{m.n} A^* \right) = \frac{1}{m.n}.m.n.\left(\frac{1}{m.n} A^* \right)$

$= \left(\frac{1}{m.n} A^* \right) = A^+,$

(iii) $(AA^+)^* = \left(A\frac{1}{m.n}A^*\right)^* = A\frac{1}{m.n}A^* = AA^+,$

(iv) $(A^+A)^* = \left(\frac{1}{m.n}A^*A\right)^* = \frac{1}{m.n}A^*A = A^+A$

olduğu görülür.

b. a^+ matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $aa^+a = a(a^*a)^{-1}a^*a = a(a^*a)^{-1}(a^*a) = a,$

(ii) $a^+aa^+ = (a^*a)^{-1}a^*a(a^*a)^{-1}a^* = (a^*a)^{-1}(a^*a)(a^*a)^{-1}a^*$

$= (a^*a)^{-1}a^* = a^+,$

(iii) $(aa^+)^* = [a(a^*a)^{-1}a^*]^* = a(a^*a)^{-1}a^* = aa^+,$

(iv) $(a^+a)^* = [(a^*a)^{-1}a^*a]^* = (a^*a)^{-1}a^*a = a^+a$

olduğu görülür.

c. a^+ matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $aa^+a = aa^*(aa^*)^{-1}a = (aa^*)(aa^*)^{-1}a = a$,

(ii) $a^+aa^+ = a^*(aa^*)^{-1}aa^*(aa^*)^{-1} = a^*(aa^*)^{-1}(aa^*)(aa^*)^{-1}$

$= a^*(aa^*)^{-1} = a^+$,

(iii) $(aa^+)^* = [aa^*(aa^*)^{-1}]^* = aa^*(aa^*)^{-1} = aa^+$,

(iv) $(a^+a)^* = [a^*(aa^*)^{-1}a]^* = a^*(aa^*)^{-1}a = a^+a$

olduğu görülür.

Teorem 2.19. A herhangi bir matris olmak üzere,

$$(A^*)^+ = (A^+)^* \tag{2.19}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: (2.17) bağıntısındaki gibi $A = BC$ olsun. $A^* = C^*B^*$ olduğundan,

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

alınırsa,

$$(A^+)^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \tag{2.20}$$

olur ki, bu da A^* matrisinin Moore–Penrose inversidir. Gerçekten,

(i) $A^*(A^*)^+A^* = C^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^* = C^*B^* = A^*$,

(ii) $(A^*)^+A^*(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$

$= B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = (A^*)^+$,

(iii) $[A^*(A^*)^+]^* = [(C^*B^*)B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C]^* = [C^*(CC^*)^{-1}C]^*$

$= C^*(CC^*)^{-1}C = C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = A^*(A^*)^+$,

(iv) $[(A^*)^+A^*]^* = [B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C(C^*B^*)]^* = [B(B^*B)^{-1}B^*]^*$

$= B(B^*B)^{-1}B^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^* = (A^*)^+A^*$

olur. Böylece,

$$(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \tag{2.21}$$

elde edilir. (2.20) ve (2.21) bağıntılarından ve bir matrisin Moore–Penrose inversi varsa tek olacağından dolayı, $(A^*)^+ = (A^+)^*$ olduğu görülür.

Teorem 2.20. Bir matrisin Moore–Penrose inversinin Moore–Penrose inversi matrisin kendisine eşittir. Yani, herhangi bir A matrisi için, $(A^+)^+ = A$ olur.

İspat: Moore–Penrose invers tanımından,

(i) $A^+(A^+)^+A^+ = A^+AA^+ = A^+$,

(ii) $(A^+)^+A^+(A^+)^+ = AA^+A = A = (A^+)^+$,

(iii) $[A^+(A^+)^+]^* = [A^+A]^* = A^+A = A^+(A^+)^+$,

(iv) $[(A^+)^+A^+]^* = [AA^+]^* = AA^+ = (A^+)^+A^+$

olduğu görülür.

Teorem 2.21. A matrisinin Moore–Penrose inversinin rankı A matrisinin rankına eşittir. Yani,

$$r(A) = r(A^+) \tag{2.22}$$

dır.

İspat: Teorem 2.13 $AA^+A = A$ Moore–Penrose şartına uygulandığında,

$$r(A) = r(AA^+A) \leq \min\{r(A),\ r(A^+)\} \leq r(A^+) \tag{2.23}$$

elde edilir. Benzer şekilde, Teorem 2.13 $A^+AA^+ = A^+$ Moore–Penrose şartına uygulanırsa

$$r(A^+) = r(A^+AA^+) \leq \min\{r(A),\ r(A^+)\} \leq r(A) \tag{2.24}$$

elde edilir. (2.23) ve (2.24) bağıntılarından dolayı (2.22) bağıntısı sağlanır.

Sonuç 2.3. A matrisinin rankı r ise, $A^+, AA^+, A^+A, AA^+A, A^+AA^+$ matrislerinin her birinin rankı da r dir.

Teorem 2.22. A simetrik ve idempotent matris ise, $A^+ = A$ olur.

İspat: Moore–Penrose invers tanımından,

(i) $AA^+A = AAA = A^2A = AA = A^2 = A$,

(ii) $A^+AA^+ = AAA = A^2A = AA = A^2 = A = A^+$,

(iii) $[AA^{+}]^{*} = [AA]^{*} = [A^{2}]^{*} = A^{*} = A = A^{2} = AA = AA^{+}$,

(iv) $[A^{+}A]^{*} = [AA]^{*} = [A^{2}]^{*} = A^{*} = A = A^{2} = AA = A^{+}A$

olduğu görülür.

Teorem 2.23. $B =$ Köş $\{\mathrm{b}_{11}, \mathrm{b}_{22}, \dots, \mathrm{b}_{nn}\}$ ise, B matrisinin Moore–Penrose inversi B^{+}, i–yinci satırı ve i–yinci sütununda yer alan köşegen elemanı $\mathrm{b}_{ii} \neq 0$ ise b_{ii}^{-1} ve $\mathrm{b}_{ii} = 0$ ise "0" olan bir köşegen matristir.

İspat: B^{+} matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığı açıkça görülür.

Örnek 2.10. $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ şeklinde verilen D matrisinin Moore-Penrose inversi

$$D^{+} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

matrisidir. Gerçekten,

$$DD^{+} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$DD^{+}D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D$$

olduğu görülür.

Teorem 2.24. a. A, $m \times n$ tipinde tam satır ranklı bir matris ise, bu durumda $A^{+} = A^{*}(AA^{*})^{-1}$ ve $AA^{+} = I_{m}$ olur.

b. A, $m \times n$ tipinde tam sütun ranklı bir matris ise, bu durumda $A^{+} = (A^{*}A)^{-1}A^{*}$ ve $A^{+}A = I_{n}$ olur.

İspat: Teoremde verilen A^+ matrislerinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Buna göre,

a. (i) $AA^+A = AA^*(AA^*)^{-1}A = (AA^*)(AA^*)^{-1}A = A$,

(ii) $A^+AA^+ = A^*(AA^*)^{-1}AA^*(AA^*)^{-1} = A^*(AA^*)^{-1}(AA^*)(AA^*)^{-1}$

$= A^*(AA^*)^{-1} = A^{+\dagger}$,

(iii) $(AA^+)^* = (AA^*(AA^*)^{-1})^* = ((AA^*)(AA^*)^{-1})^* = I^* = I$

$= (AA^*)(AA^*)^{-1} = AA^*(AA^*)^{-1} = AA^+$,

(iv) $(A^+A)^* = (A^*(AA^*)^{-1}A)^* = A^*(AA^*)^{-1}A = A^+A$

olduğu görülür. Benzer şekilde,

b. (i) $AA^+A = A(A^*A)^{-1}A^*A = A(A^*A)^{-1}(A^*A) = A$,

(ii) $A^+AA^+ = (A^*A)^{-1}A^*A(A^*A)^{-1}A^* = (A^*A)^{-1}(A^*A)(A^*A)^{-1}A^*$

$= (A^*A)^{-1}A^* = A^+$,

(iii) $(AA^+)^* = (A(A^*A)^{-1}A^*)^* = A(A^*A)^{-1}A^* = AA^+$,

(iv) $(A^+A)^* = ((A^*A)^{-1}A^*A)^* = ((A^*A)^{-1}(A^*A))^* = I^* = I$

$= (A^*A)^{-1}(A^*A) = (A^*A)^{-1}A^*A = A^+A$

olduğu görülür.

Teorem 2.25. $B \neq 0$ ve $C \neq 0$ matrisleri sırasıyla $m \times r$ ve $r \times n$ tipinde matrisler, r ranklı olsun. Bu durumda,

$$(BC)^+ = C^+B^+ \tag{2.25}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: Teorem 2.24 e göre $C^+ = C^*(CC^*)^{-1}$ ve $B^+ = (BB^*)^{-1}B^*$ olur ve buradan, $C^+B^+ = C^*(CC^*)^{-1}(BB^*)^{-1}B^*$ elde edilir. Bu değer zaten $(BC)^+$ matrisidir. O halde, $C^+B^+ = (BC)^+$ olduğu görülür.

3. $2x2$ TİPİNDE BLOK MATRİSLERİN MOORE-PENROSE İNVERSLERİ

3.1. $2x2$ Tipinde Blok Matrislerin Moore-Penrose İnversleri İçin Genel İfadeler

Bu kısımda 2×2 tipinde $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ şeklinde blok parçalanmış bir matrisin Moore-Penrose inversi konusu tartışılacaktır. Bununla ilgili olarak M blok matrisinin Moore-Penrose inversi için, herhangi bir kısıtlama olmaksızın A, B, C ve D bireysel bloklarının durumuna göre genel ifadeler türetilecektir. Ayrıca bazı varsayımlar altında, Moore-Penrose inversler daha da basitleştirilecektir.

2×2 tipinde parçalanmış $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ blok matrisinin genelleştirilmiş inversleriyle ilgili olarak A, B, C ve D bireysel bloklarının özel durumlarına göre genel ifadelerin türetilmesi uzun zamandır bilim insanlarının uğraş alanı olmuş ve bununla ilgili birçok çalışma yapılmıştır. $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ parçalı matrisinin 1-inversleri veya (1,2)- inversleri için herhangi bir kısıtlama olmaksızın bazı genel ifadeler Burns ve ark, (1974), Meyer, (1973) ve Rohde, (1965) de detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Ancak M^{+} için ifade oldukça karmaşık olduğundan M^{+} ile ilgili daha basit formüller verebilmek için bazı özel kısıtlamalar konulmuştur bknz. Hung ve Markham, (1975). Bu kısıtlamalar Burns ve ark, (1974), Meyer, (1973) ve Rohde, (1965) deki sonuçları da kapsamaktadır. Bu sonuçların birçoğu Hartwig, (1976) de bulunabilir. C ve B^{*} matrislerinin aynı olması özel durumunda M bir sınırlı matris olacaktır. Hartwig, (1976) ve Meyer, (1972) da, sınırlı bir matrisin Moore-Penrose tipi inverslerini elde etmede kullanılan beş altı basit farklı durum göz önüne alınmıştır. Hartwig, (1976) ve Meyer, (1972) daki sonuçlar daha karmaşık olduğundan, M^{+} için vereceğimiz genel ifadeler de daha karmaşık olacaktır. Bununla beraber, M matrisinin blokları üzerine bazı şartlar konulduğunda, M matrisinin Moore-Penrose invers biraz daha basitleştirilebilir.

$A \epsilon \mathbb{C}_n^m$ olmak üzere M ve N matrisleri sırasıyla m ve n-yinci mertebeden pozitif definit matrisler olsun. Bu takdirde

$$AXA = A\,, \qquad XAX = X\,, \qquad (MAX)^{*} = MAX\,, \quad (NXA)^{*} = NXA \tag{3.1}$$

şartlarını sağlayan bir X matrisine A matrisinin ağırlıklı Moore-Penrose inversi adı verilir ve $X = A^{+}_{MN}$ ile gösterilir. $M = I_m$ ve $N = I_n$ olması özel durumunda X matrisine A matrisinin Moore-Penrose inversi adı verilir ve $X = A^{+}$ ile gösterilir. Gerçekten, $P = P^{*} = M^{\frac{1}{2}}$ ve $Q = Q^{*} = N^{\frac{1}{2}}$ olmak üzere $A^{+}_{MN} = Q^{-1}(P^{*}AQ^{-1})^{+}P^{*}$ olacaktır. Ben-Israel ve Greville (1974).

Lemma 3.1. $A\epsilon\mathbb{C}^{m}_{n}$ olmak üzere M ve N matrisleri sırasıyla m ve n-yinci mertebeden pozitif definit matrisler olsun. Bu durumda

(a) $(A^{+}_{MN})^{*} = (A^{*})^{+}_{N^{-1},M^{-1}}$

(b) $A^{+}_{MN}=N^{-1}A^{*}(AN^{-1}A^{*})^{+}_{M,M^{-1}} = (A^{*}MA)^{+}_{N^{-1},N}A^{*}M.$

(c) $E\epsilon\ \mathbb{C}^{m}_{n}$, $F\epsilon\mathbb{C}^{r}_{n}$ ve M, N ve R matrisleri sırasıyla m, n ve r-yinci mertebeden pozitif definit matrisler olsun. Eğer $EF^{+}_{RN} = 0$ ise $FE^{+}_{MN} = 0$ dir.

(d) P bir idempotent matris ise bu takdirde $(I-P)A = 0 \Leftrightarrow \Re(A)\subseteq\Re(P)$ ve $A(I-P) = 0 \Leftrightarrow \Re(P)\subseteq\Re(A)$ dir.

Lemma 3.2. Cline (1964) $\mathrm{K} = A^{+}\mathrm{C}$ ve $P = (I - AA^{+})C$ olsun. Bu takdirde

$$(A, C)^{+} = \begin{pmatrix} A^{+} - KU \\ U \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

dir, burada

$$U = P^{+} + (I - P^{+}P)S^{-}K^{*}A^{+}(I - CP^{+}) \tag{3.3a}$$

ve

$$S = I(I - P^{+}P)K^{*}K(I - P^{+}P) \tag{3.3b}$$

olacaktır.

Lemma 3.3. $A_1 = (A, C) \in \mathbb{C}^{m}_{n}$ olmak üzere $A \in \mathbb{C}^{m}_{n}$, M ve N matrisleri sırasıyla m ve n-yinci mertebeden pozitif definit matrisler ve N matrisi

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & L \\ L^{*} & N_2 \end{pmatrix}, \quad N_1\epsilon\mathbb{C}^{n_1}_{n_1} \tag{3.4}$$

olarak parçalanmış olsun. Ayrıca $K = A^{+}_{MN_1}C,\ \ P = \left(I - AA^{+}_{MN_1}\right)C$ olsun. Bu durumda

$$(A_1)^+_{MN} = \begin{pmatrix} A^+_{MN_1} - KV - (I - A^+_{MN_1}A)N_1^{-1}LV \\ V \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

dir, burada

$$V = P^+_{MT} + (I - P^+_{MT}P)T^{-1}(K^*N_1^{-1} - L^*)\, A^+_{MN_1}, \tag{3.6a}$$

$$T = N_2 + K^*N_1K - (K^*L + L^*K) - L^*\big(I - AA^+_{MN_1}\big)N_1^{-1}L \tag{3.6b}$$

şeklindedir.

Bu kısım boyunca 2×2 tipindeki M blok matrisini

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

şeklinde alacağız ve

$$K = A^+C\ , \quad H = BA^+, \quad Z = D - BA^+C\ , \tag{3.8a}$$

$$P = (I - AA^+)C, \quad Q = B(I - A^+A) \tag{3.8b}$$

gösterimlerini kullanacağız. Öncelikle $P = 0$ ve $Q = 0$ özel durumları için bir formül elde edip daha sonra da $M^+ = M^*(MM^*)^{(1,3)}$ yi kullanarak M^+ için genel ifadelerin elde edilmesinde bunu $(MM^*)^{(1,3)}$ matrisine uygulayacağız.

İlk olarak Z Schur complementine göre iki özel durumu dikkate alalım:

Durum 1. $P = 0$, $Q = 0$, ve Z nonsingüler olsun. Bu takdirde bknz. Hartwig (1976).

$$M^+ = \begin{pmatrix} A^+ + KZ^{-1}H & -KZ^{-1} \\ -Z^{-1}H & Z^{-1} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

olacaktır.

Durum 2. $P = 0$, $Q = 0$ ve $Z = 0$ olsun. Bu takdirde bknz. Hartwig (1976).

$$M^+ = \begin{pmatrix} \big(I - K\widetilde{K}^{-1}K^*\big)A^+\big(I - H^*\widetilde{H}^{-1}H\big) & \big(I - K\widetilde{K}^{-1}K^*\big)A^+H^*\widetilde{H}^{-1} \\ \widetilde{K}^{-1}K^*A^+\big(I - H^*\widetilde{H}^{-1}H\big) & \widetilde{K}^{-1}K^*A^+A^*\widetilde{H}^{-1} \end{pmatrix}$$

(3.10)

dir, burada $\widetilde{K} = I + K^*K$ ve $\widetilde{H} = I + HH^*$ dir. Eğer

$$X = \begin{pmatrix} -K \\ I \end{pmatrix}, \quad Y = (-H, \quad I), \tag{3.11}$$

alınırsa bu takdirde (3.9) ve (3.10) sırasıyla

$$M^+ = \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + XZ^{-1}Y \tag{3.12}$$

ve

$$M^+ = (I - XX^+)\begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(I - Y^+Y) \tag{3.13}$$

olarak yazılabilir. (3.12) ve (3.13) ifadelerini $M^+ = G$ alarak

$$G = [I - X(I - Z^+Z)X^+]\begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[I - Y^+(I - ZZ^+)Y] + XZ^+Y \tag{3.14}$$

biçiminde birleştirebiliriz.

Teorem 3.1. Eğer $P = 0$, $Q = 0$ ise bu taktirde $M^+ = G$ olması için gerek ve yeter koşul

$$ZZ^+HH^* = HH^*ZZ^+, \qquad Z^+ZK^*K = K^*KZ^+Z \tag{3.15}$$

olmasıdır.

İspat: $MX = \begin{pmatrix} 0 \\ Z \end{pmatrix}$, $YM = (0 \quad Z)$ olduğunda

$$MX(I - Z^+Z) = 0, \qquad (I - ZZ^+)YM = 0 \tag{3.16}$$

yazılabilir. Bu nedenle

$$MG = \begin{pmatrix} AA^+ & 0 \\ H & 0 \end{pmatrix}[I - Y^+(I - ZZ^+)Y] + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ZZ^+Y$$

olur ve $Y^+ = Y^*H^{-1}$ ve $AA^+H^* = H^*$ olduğundan bu da

$$MG = \begin{pmatrix} AA^+ & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - Y^*\widetilde{H}^{-1}(I - ZZ^+)Y \tag{3.17}$$

olduğunu gösterir. Benzer şekilde (3.16) eşitlikleri kullanılarak ve $X^+ = \widetilde{K}^{-1}X^*$ ve $K^*A^+A = K^*$ olduğu göz önüne alınarak

$$GM = \begin{pmatrix} A^+A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - X(I - Z^+Z)K^{-1}X^* \tag{3.18}$$

elde edilir. Son olarak (3.16) ve (3.17) den

$$MGM = (MG)M = M, \quad GMG = G(MG) = G$$

olduğu görülür. Böylece

$(MG)^* = MG \iff ZZ^+HH^* = HH^*ZZ^+$ ve

$(GM)^* = GM \iff Z^+ZK^*K = K^*KZ^+Z$

elde edilmiş olur. Açık olarak (3.9) ve (3.10) Teorem 3.1 in özel durumlarıdır.

Sonuç 3.1. Eğer $P = 0,\ Q = 0,\ (I - ZZ^+)B = 0$ ve $C(I - Z^+Z) = 0$ ise, bu takdirde

$$M^+ = \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + XZ^+Y \tag{3.19}$$

dir.

İspat: $B = ZZ^+B$ olduğundan $HH^* = ZZ^+HH^* = (ZZ^+HH^*)^* = HH^*ZZ^+$ dir. Benzer şekilde, $C = CZ^+Z$ olduğundan $K^*K = K^*KZ^+Z = Z^+ZK^*K$ olacaktır. Böylece Teorem 3.1 kullanılarak (3.19) bağıntısı elde edilir.

Teorem 3.2. Eğer $P = 0,\ Q = 0$ ise, bu takdirde

$$M^+ = [I - X(I - Z^gZ)X^+]\begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[I - Y^+(I - ZZ^g)Y] + XZ^gY, \tag{3.20}$$

yani, $Z^g = Z^+_{\widetilde{H}^{-1},\widetilde{K}}$ olmak üzere

$$(M^+)_{11} = \left[I - K(I - Z^gZ)\widetilde{K}^{-1}K^*\right]A^+\left[I - H^*\widetilde{H}^{-1}(I - ZZ^g)H\right] + KZ^gH,$$

$$(M^+)_{12} = \left[I - K(I - Z^gZ)\widetilde{K}^{-1}K^*\right]A^+H^*\widetilde{H}^{-1}(I - ZZ^g) - KZ^g,$$

$$(M^+)_{21} = (I - Z^gZ)\widetilde{K}^{-1}K^*A^+\left[I - H^*\widetilde{H}^{-1}(I - ZZ^g)H\right] - Z^gH,$$

$$(M^{+})_{22} = (I - Z^{g}Z)\widetilde{K}^{-1}K^{*}A^{+}H^{*}\widetilde{H}^{-1}(I - ZZ^{g}) + Z^{g} \tag{3.21}$$

dir.

İspat: (3.20) nin sağ tarafı G_1 olsun. Bu takdirde,

$$MX(I - Z^{g}Z) = 0\ ,\ \ YY^{+} = I \ \text{ ve } \begin{pmatrix} AA^{+} & 0 \\ H & 0 \end{pmatrix} Y^{+} = Y^{+} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$MG_1 = \begin{pmatrix} AA^{+} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - Y^{*}\widetilde{H}^{-1}(I - ZZ^{g})Y \tag{3.22}$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$(I - ZZ^{g})YM = 0,\ X^{+}X = I \ \text{ ve } \ X^{+}\begin{pmatrix} A^{+}A & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = X^{+} - (0, I)$$

olduğundan

$$G_1 M = \begin{pmatrix} A^{+}A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - X(I - Z^{g}Z)\widetilde{K}^{-1}X^{*} \tag{3.23}$$

olacaktır. Z^{g} nin tanımından, $Y^{*}\widetilde{H}^{-1}(I - ZZ^{g}) - Y$ matrisi Hermitian matristir çünkü $\widetilde{H}^{-1}ZZ^{g}$ matrisi Hermitiandır. Benzer şekilde $X(I - Z^{g}\mathrm{Z})\widetilde{K}^{-1}X^{*}$ matrisi de Hermitian olacaktır. Böylece

$$MG_1M = M\ ,\quad G_1MG_1 = G_1,\quad (MG_1)^{*} = MG_1,\qquad (G_1M)^{*} = G_1M$$

olur.

Özel olarak eğer, A matrisi tersinir ise, bu takdirde $P = 0,\ Q = 0$ olur ve M^{+} inversini bulmak için Teorem 3.2 yi uygulayabiliriz. Teorem 3.2 nin önemli uygulamalarından birisi de herhangi bir kısıtlama olmaksızın pozitif semi definit bir matrisin Moore-Penrose inversinin bulunmasında kullanılabilmesidir.

Sonuç 3.2. Eğer $M = \begin{pmatrix} A & C \\ C^{*} & D \end{pmatrix}$ matrisi pozitif semi definit bir matris ise, bu takdirde

$$M^{+} = [I - X(I - Z^{g}Z)X^{+}]\begin{pmatrix} A^{+} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[I - X^{*+}(I - ZZ^{g})X^{*}] + XZ^{g}X^{*} \tag{3.24}$$

olacaktır, burada

$$Z^g = Z^+_{\tilde{K}^{-1},\tilde{K}} \tag{3.25}$$

dir. Ayrıca, M için özel bir (1,3)- invers aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$M^{(1.3)} = \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [I - X^{*+}(I - ZZ^g)X^*] + XZ^gX^*. \tag{3.26}$$

Herhangi bir M matris için MM^* matrisi pozitif semi definit olup Moore-Penrose inversi $M^+ = M^*(MM^*)^{(1,3)}$ eşitliğinden hesaplanabilir.

$$M_1 = MM^* = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ C_1^* & D_1 \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

alalım. Şimdi Z_1, K_1 ve $Z_1Z_1^g$ için ifadeler türetelim. Öncelikle M_1 için Z_1 esas Schur complementini hesaplayalım. U Lemma 3.2 de tanımlandığı gibi olmak üzere,

$$(A,C)^*A_1^+ = (A,C)^+ = \begin{pmatrix} A^+ - KU \\ U \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

olduğundan

$$Z_1 = D_1 - C_1^*A_1^+C_1 = (B,D)[I - (A,C)^*A_1^+(A,C)](B,D)^*$$

$$= (B,D)[I - (A,C)^+(A,C)](B,D)^*$$

yazılabilir. (3.28) ve $B(I - A^+A)B^* = B(I - A^+A)(I - A^+A)B^* = QQ^*$ olduğu gerçeği dikkate alınırsa bu da

$$Z_1 = QQ^* + Z[(I - UC)D^* - UAB^*] \tag{3.29}$$

olduğunu gösterir. Öte yandan $A^+P = 0$ olduğundan Lemma 3.1. (c) ye göre

$$P^+A = 0\,, \;\; P^+P = P^+C \tag{3.30}$$

olacaktır. (3.3b) deki S nin tanımından, $I - P^+P$ ve S değişmeli olup $I - P^+P$ ve S^{-1} de değişmelidir, böylece

$$S^{-1}(I - P^+P)K^*K(I - P^+P) = I - S^{-1} \tag{3.31}$$

dir. (3.30) ve (3.31) kullanılarak

$$I - UC = S^{-1}(I - P^{+}P), \quad UA = S^{-1}(I - P^{+}P)K^{*} \tag{3.32}$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak (3.29)

$$Z_1 = QQ^{*} + ZS^{-1}(I - P^{+}P)Z^{*} \tag{3.33}$$

şeklini alır. Öte yandan

$$K_1^{*} = C_1^{*}A_1^{+} = (B, D)(A, C)^{*}A_1^{+} = (B, D)(A, C)^{+} = H + ZU \tag{3.34}$$

olduğundan

$$X_1^{*} = (-(H + ZU), I), \qquad \widetilde{K}_1 = I + (H + ZU)(H + ZU)^{*} \tag{3.35}$$

olacaktır. Sonuç 3.2 den

$$M^{+} = M^{*}\begin{pmatrix} A_1^{+} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\left[I - X_1^{*+}\left(I - Z_1 Z_1^{g}\right)X_1^{*}\right] + \begin{pmatrix} Q^{*} - (UA)^{*}Z^{*} \\ (I - UC)^{*}Z^{*} \end{pmatrix} Z_1^{g} X_1^{*} \tag{3.36}$$

yazılabilir. (3.28) ve (3.32) kullanılarak

$$M^{+} = \begin{pmatrix} A^{+} - KU & 0 \\ U & 0 \end{pmatrix}\left[I - X_1^{*+}\left(I - Z_1 Z_1^{g}\right)X_1^{*}\right]$$

$$+ \begin{pmatrix} Q^{*} - KS^{-1}(I - P^{+}P)Z^{*} \\ S^{-1}(I - P^{+}P)Z^{*} \end{pmatrix} Z_1^{g} X_1^{*} \tag{3.37}$$

yazılabilir, burada

$$Z_1^{g} = (Z_1)^{+}_{\widetilde{K}_1^{-1}, \widetilde{K}_1} \tag{3.38}$$

dir.

$$\tilde{Q} = \left(Q, Z(I - P^{+}P)\right), \quad N = diag(I, S) \tag{3.39}$$

olsun. Bu takdirde (3.33) deki Z_1 matrisi

$$Z_1 = \tilde{Q}N^{-1}\tilde{Q}^{*} \tag{3.40}$$

olarak yazılabilir. Şimdi de $Z_1Z_1^{g}$, $S^{-1}(I - P^{+}P)Z^{*}Z_1^{g}$ ve $Q^{*}Z_1^{g}$ matrislerini hesaplayalım ve daha sonra (3.37) de yerlerine yazarak M^{+} matrisini elde edelim. Lemma 2.1 (b) den

$$N^{-1}\tilde{Q}^* Z_1^g = (\tilde{Q})^+_{\tilde{K}_1^{-1},N} = (Q, Z(I-PP)^+_{\tilde{K}_1^{-1},N} \tag{3.41}$$

elde edilir. Buradan

$$N^{-1}\tilde{Q}^* Z_1^g = \begin{pmatrix} Q^* \\ S^{-1}(I-P^+P)Z^* \end{pmatrix} Z_1^g, \tag{3.42}$$

olup Lemma 3.3 te $M = \tilde{K}_1^{-1}$, $N_1 = I$, $N_2 = S$ $L = 0$ alınarak

$$(\tilde{Q})^+_{\tilde{K}_1^{-1},N} = \begin{pmatrix} Q^g - Q^g Z(I-P^+P)V \\ V \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

elde edilir, burada

$$V = W^g + (I - W^g W)T^{-1}(I-P^+P)Z^* Q^{g^*} Q^g,$$

$$T = S + (I-P^+P)Z^* Q^{g^*} Q^g Z(I-P^+P),$$

$$W = (I - QQ^g)Z(I-P^+P),$$

$$Q^g = Q^+_{\tilde{K}_1^{-1},I} \ , \qquad W^g = W^+_{\tilde{K}_1^{-1},T}$$

dir. Bu nedenle,

$$\begin{aligned} Z_1 Z_1^g = \tilde{Q}(\tilde{Q})^+_{\tilde{K}_1^{-1},N} &= QQ^g - QQ^g Z(I-P^+P)V + Z(I-P^+P)V \\ &= QQ^g + WV = QQ^g + WW^g \end{aligned} \tag{3.44}$$

olacaktır. S^{-1} ve $I - P^+P$ değişmeli olduğundan, (3.42) ve (3.43) ün bunlara karşılık gelen alt matrislerinden

$$V = S^{-1}(I-P^+P)Z^* Z_1^g = (I-P^+P)S^{-1}Z^* Z_1^g = (I-P^+P)V,$$

$$Q^* Z_1^g = Q^g - Q^g ZV. \tag{3.45}$$

olduğu görülür. Böylece (3.37) den

$$M^+ = \begin{pmatrix} A^+ - KU & 0 \\ U & 0 \end{pmatrix} [I - X_1^{*+}(I - QQ^g - WW^g)X_1^*] + \begin{pmatrix} Q^g - Q^g ZV - KV \\ V \end{pmatrix} X_1^*$$

yani,

$$(M^+)_{11} = (A^+ - KU)\big[I - (H+ZU)^*\widetilde{K}_1^{-1}(I - QQ^g - WW^g)(H+ZU)\big]$$
$$-(Q^g - Q^gZV - KV)(H+ZU),$$

$$(M^+)_{12} = (A^+ - KU)(H+ZU)^*\widetilde{K}_1^{-1}(I - QQ^g - WW^g) + Q^g - Q^gZV - KV,$$

$$(M^+)_{21} = U\big[I - (H+ZU)^*\widetilde{K}_1^{-1}(I - QQ^g - WW^g)(H+ZU)\big] - V(H+ZU),$$

$$(M^+)_{22} = U(H+ZU)^*\widetilde{K}_1^{-1}(I - QQ^g - WW^g) + V$$

olacaktır.

Şimdi Moore-Penrose inversin daha basit formlara dönüşebilir olması durumundaki bazı özel durumları tartışalım. $P = 0 \Leftrightarrow \Re(C) \subseteq \Re(A)$ ve $Q = 0 \Leftrightarrow \Re(B^*) \subseteq \Re(A^*)$ olduğunu ve aynı zamanda P nin tam sütun ranklı olması için gerek ve yeter şart C nin tam sütun ranklı ve $\Re(C) \cap \Re(A) = \{0\}$ olması ve Q nun tam sütun ranklı olması için B nin tam sütun ranklı ve $\Re(B^*) \cap \Re(A^*) = \{0\}$ olmasının gerek ve yeter şart olduğunu görmek zor değildir.

Durum 1. P tam sütun ranklı ise $W = 0,\ V = 0,\ U = P^+$ olduğundan $\widetilde{K}_1 = I + HH^* + Z(P^*P)^{-1}Z^*$ olup

$$(M^+)_{11} = A^+ - KP^+ - Q^gH - Q^gZ\,P^+$$
$$-[A^+H^* - K(P^*P)^{-1}Z^*]\widetilde{K}_1^{-1}(I - QQ^g)(H + ZP^+),$$

$$(M^+)_{12} = Q^g + [A^+H^* - K(P^*P)^{-1}Z^*]\widetilde{K}_1^{-1}(I - QQ^g)$$

$$(M^+)_{21} = P^+ - (P^*P)^{-1}Z^*\widetilde{K}_1^{-1}(I - QQ^g)(H + ZP^+),$$

$$(M^+)_{22} = (P^*P)^{-1}Z^*\widetilde{K}_1^{-1}(I - QQ^g)$$

olacaktır.

Durum 2. P tam sütun ranklı ve Q tam satır ranklı ise

$$M^+ = \begin{pmatrix} A^+ - KP^+ - Q^+H - Q^+Z\,P^+ & Q^+ \\ P^+ & 0 \end{pmatrix},$$

Durum 3. P tam sütun ranklı ve $Q=0$ ise, $\widetilde{K}_1 = I + HH^* + Z(P^*P)^{-1}Z^*$ ve

$$M^+ = \begin{pmatrix} A^+ - KP^+ - [A^+H^* - K(P^*P)^{-1}Z^*]\widetilde{K}_1^{-1}(H+ZP^+), & [A^+H^* - K(P^*P)^{-1}Z^*]\widetilde{K}_1^{-1} \\ P^+ - (P^*P)^{-1}Z^*\widetilde{K}_1^{-1}(H+ZP^+) & (P^*P)^{-1}Z^*\widetilde{K}_1^{-1} \end{pmatrix},$$

Durum 4. Q tam satır ranklı ise $Q^g = Q^+$, $W = 0$, $V = T^{-1}(I - P^+P)Z^*(QQ^*)^{-1}$ olup

$$M^+ = \begin{pmatrix} A^+ - KU - (Q^+ - Q^+ZV - KV)(H+ZU) & Q^+ - Q^+ZV - KV \\ U - V(H+ZU) & V \end{pmatrix}$$

olacaktır. Sağ-sol simetrikliği ve Durum 1 kullanılarak da M^+ inversini hesaplayabiliriz. $(M^*)^+$ matrisini bularak, M^+ matrisini M^+=$(M^*)^{+*}$ eşitliğinden elde edebiliriz. Gerçekten eğer Q tam satır ranklı ise $\widetilde{H}_1 = I + K^*K + Z^*(QQ^*)^{-1}Z$ ve $P^g = P^+_{I,\widetilde{H}_1}$ olup buradan da

$$(M^+)_{11} = A^+ - KP^g - Q^+H - Q^+ZP^g$$
$$-(K+Q^+Z)(I - P^gP)\widetilde{H}_1^{-1}[K^*A^+ - Z^*(QQ^*)^{-1}H],$$

$$(M^+)_{12} = Q^+ - (K+Q^+Z)(I - P^gP)\widetilde{H}_1^{-1}Z^*(QQ^*)^{-1}$$

$$(M^+)_{21} = P^g + (I - P^gP)\widetilde{H}_1^{-1}[K^*A^+ - Z^*(QQ^*)^{-1}H],$$

$$(M^+)_{22} = (I - P^gP)\widetilde{H}_1^{-1}Z^*(QQ^*)^{-1}$$

elde edilir.

Durum 5. Q tam satır ranklı ve $P=0$ ise $\widetilde{H}_1 = I + K^*K + Z^*(QQ^*)^{-1}Z$ olup, bu durumda da

$$M^+ = \begin{pmatrix} A^+ - Q^+H - (K+Q^+Z)\widetilde{H}_1^{-1}[K^*A^+ - Z^*(QQ^*)^{-1}H] & Q^+ - (K+Q^+Z)\widetilde{H}_1^{-1}Z^*(QQ^*)^{-1} \\ \widetilde{H}_1^{-1}[K^*A^+ - Z^*(QQ^*)^{-1}H] & \widetilde{H}_1^{-1}Z^*(QQ^*)^{-1} \end{pmatrix}$$

olacaktır. Hung ve Markham (1975a,1975b) de $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ matrisinin Moore-Penrose inversini bulmak için bir metod ortaya koymuşlardır. Bu kısımda Moore-

Penrose invesin nasıl elde edildiğini göstermek için bizim sonuçlarımızı kullanacağız. Bizim metodumuzda P (veya Q)$=0$ veya P (veya Q) tam ranklı olduğunda M^+ kolaylıkla hesaplanabilir. Ayrıca yukarıdaki tartışmalara göre P (veya Q)$=0$ veya P (veya Q) tam ranklı olup olmadığı da kolayca kontrol edilebilir. Özel olarak eğer A matrisi tersinir ise bu takdirde, $P=(I-AA^+)C=0$ ve $Q=B(I-A^+A)=0$ olup Teorem 3.2 uygulanabilirdir.

Örnek 3.1 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=(1 \quad 1)$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $D=(0 \quad 1)$ olmak üzere $M=\begin{pmatrix}A & C\\ B & D\end{pmatrix}$ olsun. İlk olarak, P ve Q matrislerini hesaplayalım. A matrisi tersinir olduğundan, $P=0$ ve $Q=0$ olması durumunda Teorem 3.2 uygulanabilir. Şimdi $Z=D-BA^+C=0_{1\times 2}$ olduğundan (3.14) ifadesi (3.13) ifadesine dönüşür. Bu takdirde (3.8) ve (3.11) in notasyonları kullanılarak

$$K=A^+C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \qquad H=BA^+(1 \quad 1),$$

$$X=\begin{pmatrix}-K\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad Y=(-H \quad 1)=(-1, \quad -1, \quad 1).$$

olduğu görülür. Sonuç olarak bazı basit hesaplamalardan sonra M^+ inversi

$$M^+=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5}\\ \frac{-1}{15} & \frac{1}{3} & \frac{4}{15}\\ \frac{4}{15} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{15}\\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

3.2. Schur Complement İçeren Blok Matrislerin Moore–Penrose İnversleri İçin Bazı İfadeler

Bu kısımda, öncelikle X ve Y matrisleri nonsingüler olmak üzere $M=XNY$ formunda yazılabilen bir matrisin Moore-Penrose inversi için bir formül vereceğiz.

Daha sonra, bu formüle dayanarak $2x2$ tipinde $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ şeklinde blok parçalanmış bir parçalı matrisin Moore-Penrose inversi için açık ifadeler geliştireceğiz. Bununla ilgili olarak M blok matrisindeki bir Schur complementinin sıfır veya nonsingüler olması durumlarını inceleyeceğiz.

Bu kısım boyunca 2×2 tipindeki M blok matrisini

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

formunda alacağız, burada A, B, C ve D matrisleri sırasıyla $k \times l,\ s \times l,\ k \times t$ ve $s \times t$ tipinde alt matrislerdir. $S_A = D - BA^+C$ ile A matrisinin M deki genelleştirilmiş Schur complementini göstereceğiz.

$$\Re(B^*) \subseteq \Re(A^*) \ \text{ ve } \ \Re(C) \subseteq \Re(A) \tag{3.47}$$

şartları altında veya buna denk olarak, $E_A = I - AA^+$ ve $F_A = I - A^+A$ olmak üzere $BF_A = 0$ ve $E_AC = 0$ şartları altında M matrisini

$$M = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ BA^+ & I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_l & A^+C \\ 0 & I_t \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

formunda parçalanılır. Ayrıca eğer, $\Re(B) \subseteq \Re(S_A)$ ve $\Re(C^*) \subseteq \Re(S_A^*)$ ise bu takdirde M nin Moore-Penrose inversi

$$\begin{aligned} M^+ &= \begin{bmatrix} I_l & -A^+C \\ 0 & I_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & S_A^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ -BA^+ & I_s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^+ + A^+CS_A^+BA^+ & -A^+CS_A^+ \\ -S_A^+BA^+ & S_A^+ \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.49}$$

formunda olacaktır. (3.47) şartına ilaveten, eğer $S_A = 0$ eşitliği de sağlanıyorsa, bu takdirde M nin Moore-Penrose inversi

$$M^+ = \begin{bmatrix} I \\ (A^+C)^* \end{bmatrix} \psi A^+ \varphi [I \quad (BA^+)^*], \tag{3.50}$$

formunda olacaktır, burada

$$\varphi = (I + (BA^+)^*BA^+)^{-1} \ \text{ ve } \ \psi = (I + A^+C(A^+C)^*)^{-1}$$

dir.

X ve Y matrislerinin her ikisi de nonsingüler olmak üzere $M = XNY$ formunda yazılabilen bir M matrisinin Moore-Penrose inversi için formüllerin geliştirilmesinde blok matrisle geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Öte yandan, eğer $M = XNY$ ise bu takdirde M nin Moore-Penrose inversinin $M^+ = Y^{-1}N^+X^{-1}$ olması gerekmediğini belirtelim. Hangi şartlar altında bunun olabileceği Tian, (1998) tarafından verilmiştir.

Şimdi $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ matrisinin $S_A = D - BA^+C$ olmak üzere

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ BA^+ & I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & E_AC \\ BF_A & S_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_l & A^+C \\ 0 & I_t \end{bmatrix} = XNY \tag{3.51}$$

çarpımı şeklinde parçalandığını varsayalım.

$$N = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & E_AC \\ BF_A & S_A \end{bmatrix} = N_1 + N_2 \tag{3.52}$$

matrisini göz önüne alalım. Bu takdirde $N_1^*N_2 = 0$ ve $N_2N_1^* = 0$ olduğundan $N^+ = N_1^+ + N_2^+$ ve

$$E_N = I - N_1N_1^+ - N_2N_2^+, F_N = I - N_1^+N_1 - N_2^+N_2 \tag{3.53}$$

olacaktır. Ayrıca bu kısım boyunca

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ -BA^+ & I_s \end{bmatrix} \quad , \quad Y^{-1} = \begin{bmatrix} I_l & A^+C \\ 0 & I_t \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

ifadelerine ihtiyacımız olacaktır.

Lemma 3.4. X, N ve Y (3.51) de tanımlandığı gibi olsun. Bu takdirde $XE_N = E_N$ ve $F_NY = F_N$ dir.

İspat: İspat için (3.53) bağıntısından yararlanarak $(X - I)\,(I - N_1N_1^+ - N_2N_2^+) = 0$ ve $(I - N_1^+N_1 - N_2^+N_2)(Y - I) = 0$ olduğunu göstereceğiz. Bu durumda

$$(X - I)(I - N_1N_1^+) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ BA^+ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_A & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} = 0$$

ve $(X - I)N_2 = 0$ elde edilir. Öte yandan,

$$(I - N_1^+ N_1)(Y - I) = \begin{bmatrix} F_A & 0 \\ 0 & I_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^+C \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

ve $N_2(Y - I) = 0$ olduğu aşikardır. Sonuç olarak, Lemma 3.4 deki sonuç elde edilir.

Eğer M matrisi (3.50) formunda ise bu durumda Lemma 3.4 kullanılarak

$$M^+ = (I + L^*)(I + LL^*)^{-1} Y^{-1} N^+ X^{-1} (I + R^* R)^{-1} (I + R^*) \tag{3.55}$$

olduğu gösterilebilir, burada $R = E_N(I - X^{-1})$ ve $L = (I - Y^{-1})F_N$ dir. Bu ifadenin kullanılmasındaki güçlük N^+ nın blok ifadesinin (3.51) deki N için verilen ifadenin kullanılması kadar karmaşık olmasıdır. Bu M deki alt matrisler üzerine bazı ilave şartlar koymaya çalışacağız.

N matrisinin bir blok köşegen matris olması durumuyla başlayalım. Daha sonra da N nin ters üçgensel olması durumunu ele alalım. Bu kısımda, ayrıca $H = BA^+, K = A^+C$ gösterimlerini de kullanalım.

M deki alt matrisler için $\Re(B^*) \subseteq \Re(A^*)$ ve $\Re(C) \subseteq \Re(\mathrm{A})$ veya bunlara denk olarak, $BF_A = 0$ ve $E_A C = 0$ şartlarının sağlandığını varsayalım. Bu takdirde (3.51) deki N matrisi bir köşegen matrise dönüşür.

Teorem 3.3. M matrisi (3.46) da verildiği gibi parçalanmış olsun. Eğer $BF_A = 0$ ve $E_A C = 0$ ise bu takdirde

$$M^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} S_A^+ [0 \quad I] + \begin{bmatrix} I \\ F_{S_A K^*} \end{bmatrix} \sigma [I \quad H^* E_{S_A}] - \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} S_A^+ H \emptyset [I \quad H^* E_{S_A}]$$

$$- \begin{bmatrix} I \\ F_{S_A K^*} \end{bmatrix} \varphi K S_A^+ [0 \quad I] \tag{3.56}$$

olacaktır, burada

$$\emptyset = (I + H^* E_{S_A} H)^{-1}, \ \varphi = (I + K F_{S_A} K^*)^{-1}, \ \sigma = \varphi(A^+ + K S_A^+ H)\emptyset \tag{3.57}$$

dir.

İspat. (3.55) bağıntısı kullanılarak M^+ nın blok ifadesi türetilecektir. $BF_A = 0$ ve $E_A C = 0$ şartları altında (3.52) deki N matrisi

$$N = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S_A \end{bmatrix}$$

şekline dönüşür. Bu takdirde N nin Moore-Penrose inversi N^+, E_N ve F_N ortogonal izdüşümleri

$$N^+ = \begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & S_A^+ \end{bmatrix}, \quad E_N = \begin{bmatrix} E_A & 0 \\ 0 & E_{S_A} \end{bmatrix}, \quad F_N = \begin{bmatrix} F_A & 0 \\ 0 & F_{S_A} \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

olacaktır. (3.54) ve (3.58) kullanılarak $Y^{-1}N^+X^{-1}$ nin blok ifadesi,

$$Y^{-1}N^+X^{-1} = \begin{bmatrix} A^+ + A^+C\,S_A^+B\,A^+ & -A^+CS_A^+ \\ -S_A^+B\,A^+ & S_A^+ \end{bmatrix} \tag{3.59}$$

formundadır. $H = BA^+, K = A^+C$ notasyonlarına göre (3.58) yardımıyla

$$R = E_N(I - X^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E_{S_A}H & 0 \end{bmatrix}, \quad L = (I - Y^{-1})F_N = \begin{bmatrix} 0 & KF_{S_A} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Bu takdirde

$$(I + R^*R)^{-1} = \begin{bmatrix} (I + H^*E_{S_A}H)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (I + LL^*)^{-1} = \begin{bmatrix} (I + KF_{S_A}K^*)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca (3.58) deki notasyonlara göre

$$(I + R^*R)^{-1}(I + R^*) = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset H^*E_{S_A} \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$(I + L^*)(I + LL^*)^{-1} = \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ F_{S_A}K^*\varphi & I \end{bmatrix} \tag{3.60}$$

eşitlikleri de yazılabilir. (3.59) ve (3.60) ifadeleri (3.55) ifadesinde yerine yazılarak M matrisinin Moore-Penrose inversi (3.56) daki şekilde elde edilmiş olur.

Hatırlatma 3.1. U ve V keyfi matrisler olmak üzere

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ I_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_t \\ I_l & 0 \end{bmatrix} = U\widetilde{M}V$$

parçalanışını ve $\left(U\widetilde{M}V\right)^+ = V^*\widetilde{M}^+U^*$ gerçeğini kullanarak

$$M^{+}=\begin{bmatrix}0 & I_l\\ I_t & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D & B\\ C & A\end{bmatrix}^{+}\begin{bmatrix}0 & I_s\\ I_k & 0\end{bmatrix}$$

elde edilir. Buna göre Teorem 3.3 ün bir benzerini S_A yerine M de D nin Schur complementi $S_D=A-CD^{+}B$ yi kullanarak, $E_DB=0$ ve $CF_D=0$ şartları altında verebiliriz.

Teorem 3.4. M matrisi (3.46) da verildiği gibi parçalanmış olsun. Eğer $BF_A=0$ ve $E_AC=0$ ise, bu takdirde

$$M^{+}=\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}A^{+}[I \quad 0]+\begin{bmatrix}-K\\I\end{bmatrix}\tau\,[-H \quad I]+\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}A^{+}\Omega_1[-H \quad I]$$

$$+\begin{bmatrix}-K\\I\end{bmatrix}\Omega_2A^{+}[I \quad 0] \qquad (3.61)$$

olacaktır, burada

$$\widetilde{\emptyset}=(I+HH^{*}E_{S_A})^{-1},\ \ \tilde{\varphi}=(I+F_{S_A}K^{*}K)^{-1},$$

$$\Omega_1=H^{*}E_{S_A}\widetilde{\emptyset},\ \Omega_2=\tilde{\varphi}F_{S_A}K^{*},\ \ \tau=\tilde{\varphi}S_A^{+}\tilde{\varphi}+\Omega_2A^{+}\Omega_1 \qquad (3.62)$$

dir.

İspat: İspat bir önceki teoremin ispatına benzerdir. İlk olarak (3.59) ifadesini

$$Y^{-1}N^{+}X^{-1}=\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}A^{+}[I \quad 0]+\begin{bmatrix}-K\\I\end{bmatrix}S_A^{+}[-H \quad I] \qquad (3.63)$$

formunda yazalım. (3.62) e göre

$$(I+H^{*}E_{S_A}H)^{-1}=I-H^{*}E_{S_A}\widetilde{\emptyset}H\,,\ \ \left(I+KF_{S_A}K^{*}\right)^{-1}=I-K\tilde{\varphi}F_{S_A}K^{*}.$$

yazılabilir. Bu bağıntıları (3.60) yerine yazarak

$$(I+R^{*}R)^{-1}(I+R^{*})=I_{k+s}+\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}H^{*}E_{S_A}\widetilde{\emptyset}[-H \quad I] \qquad (3.64)$$

ve

$$(I+L^{*})(I+LL^{*})^{-1}=I_{l+t}+\begin{bmatrix}-K\\I\end{bmatrix}\tilde{\varphi}F_{S_A}K^{*}[I \quad 0] \qquad (3.65)$$

elde edilir. Buradan (3.63), (3.64) ve (3.65) ifadeleri (3.56) te yerlerine yazılırsa M matrisinin Moore-Penrose invesinin (3.61) şeklinde olduğu görülür.

Yukarıdaki teoremlerin önemli bir sonucu A alt matrisinin kare ve nonsingüler olması durumudur. Bu durumda, M^+ inversi A^+ yerine A^{-1} alınarak (3.57) ve (3.61) formlarının her ikisinde de yazılabilir.

Sonuç 3.2. M matrisi (3.46) da verildiği gibi parçalanmış olsun. Eğer $BF_A = 0$ ve $E_A C = 0$ ise, bu takdirde

(i) MM^+ ve $\mathrm{M}^+\mathrm{M}$ ortogonal izdüşümleri

$$MM^+ = \begin{bmatrix} AA^+\emptyset & \emptyset H^* E_{S_A} \\ E_{S_A} H\emptyset & S_A S_A^+ + E_{S_A} H\emptyset H^* E_{S_A} \end{bmatrix}$$

ve

$$M^+M = \begin{bmatrix} \varphi A^+ A & \varphi K F_{S_A} \\ F_{S_A} K^* \varphi & S_A^+ S_A + F_{S_A} K^* \varphi K F_{S_A} \end{bmatrix}$$

şeklindedir, burada $\emptyset$ ve φ (3.57) de verildiği gibidir.

(ii) Eğer $\mathrm{S_A} = 0$ ise bu takdirde

$$M^+ = \begin{bmatrix} I \\ K^* \end{bmatrix} \varphi A^+ \emptyset [I \quad H^*],$$

şeklindedir, burada $\emptyset = (I + H^*H)^{-1}$ ve $\varphi = (I + KK^*)^{-1}$ dir.

(iii) Eğer $\mathrm{S_A}$ kare ve nonsingüler ise, bu takdirde

$$M^+ = \begin{bmatrix} A^+ + A^+ C S_A^{-1} B A^+ & -A^+ C S_A^{-1} \\ -S_A^{-1} B A^+ & S_A^{-1} \end{bmatrix}$$

olacaktır.

Sonuç 3.3. $T = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$ olsun. Eğer $E_A C = 0$ alınırsa, bu takdirde

$$\varphi = (I + KF_D K^*)^{-1}, \quad \tilde{\varphi} = (I + F_D K^* K)^{-1}$$

olmak üzere

$$T^{+}=\begin{bmatrix}\varphi A^{+} & -\varphi KD^{+}\\ F_D K^{*}\varphi A^{+} & D^{+}-F_D K^{*}\varphi K D^{+}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^{+}-K\tilde{\varphi}F_D K^{*}\varphi A^{+} & -K\tilde{\varphi}D^{+}\\ \tilde{\varphi}F_D K^{*}A^{+} & \tilde{\varphi}D^{+}\end{bmatrix},$$

olacaktır.

Teorem 3.4 ün bandlı matrislere bir uygulamasını verelim. $\widehat{M}=(m_{ij})\in C^{m\times n}$ matrisine kesin olarak alt p-bandlıdır denir şayet $j-i>p$ için $(m_{ij})=0$ ve $j-i=p$ için $m_{ij}\neq 0$ ise. Farzedelim ki $\max\{1,n-m\}\leq p\leq n-1$ olsun. Bu takdirde $\widehat{M}$ matrisi aşağıdaki şekilde blok parçalanabilirdir:

$$\widehat{M}=\begin{bmatrix}C & A\\ D & B\end{bmatrix},$$

burada $A\in C^{(n-p)\times(n-p)}$ nonsingüler alt üçgensel matristir. Şimdi

$$\widehat{M}=\begin{bmatrix}A & C\\ B & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & I_{n-p}\\ I_P & 0\end{bmatrix}$$

yazalım. Bu nedenle,

$$\widehat{M^{+}}=\begin{bmatrix}0 & I_p\\ I_{n-p} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & C\\ B & D\end{bmatrix}^{+}$$

olacaktır. Teorem 3.4 uygulandığında

$$\widehat{M^{+}}=\begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}A^{-1}[I \quad 0]+\begin{bmatrix}I\\ -K\end{bmatrix}\Gamma\,[-H \quad I]+\begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}A^{-1}\Omega_1[-H \quad I]$$
$$+\begin{bmatrix}I\\ -K\end{bmatrix}\Omega_2 A^{-1}[I \quad 0],$$

olduğu görülür. (3.62) de verilen notasyonlara göre $A^{+}=A^{-1}$ elde edilir.

Aşağıdaki teorem (3.46) da verilen M blok matrisinin Moore-Penrose inversinin Schur complement $S_A=D-BA^{+}C$ Schur complementinin sıfıra eşit olması durumuna karşılık gelir. Burada $S_A=0$ şartına ilaveten $BF_A=0$ ve $E_AC=0$ kabul edilecektir. Bu durumda

$$B_1=BF_A \text{ ve } C_1=E_AC \tag{3.66}$$

dir.

Teorem 3.5. M matrisi (3.46) da verildiği gibi parçalanmış olsun. Eğer $S_A = 0$ ise, bu takdirde

$$M^+ = \begin{bmatrix} I \\ F_{C_1}K^* \end{bmatrix} (I - \Theta_2) A^+ (I - \Theta_1) [I \quad H^* E_{B_1}] + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} B_1^+ \omega_1 [-H \quad I]$$

$$+ \begin{bmatrix} -K \\ I \end{bmatrix} \omega_2 C_1^+ [I \quad 0], \tag{3.67}$$

burada B_1, C_1 matrisleri (3.66) daki gibi olmak üzere

$$\omega_1 = (I + HH^* E_{B_1})^{-1}, \ \omega_2 = (I + F_{C_1} K^* K)^{-1},$$

$$\Theta_1 = H^* E_{B_1} \omega_1 H, \ \Theta_2 = K \omega_2 F_{C_1} K^* \tag{3.68}$$

dir.

İspat: M^+ nın blok ifadesini elde etmek için (3.55) bağıntısını kullanacağız. $S_A = 0$ varsayımından, N_2 matrisi ve bunun Moore-Penrose inversi

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & C_1 \\ B_1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad N_2^+ = \begin{bmatrix} 0 & B_1^+ \\ C_1^+ & 0 \end{bmatrix},$$

şeklinde olacaktır, burada B_1 ve C_1 matrisleri (3.66) verildikleri gibidir. Böylece

$$N^+ = \begin{bmatrix} A^+ & B_1^+ \\ C_1^+ & 0 \end{bmatrix} \tag{3.69}$$

olur. Buradan

$$E_N = \begin{bmatrix} E_{C_1} - AA^+ & 0 \\ 0 & E_{B_1} \end{bmatrix}, \quad F_N = \begin{bmatrix} F_{B_1} - A^+A & 0 \\ 0 & F_{C_1} \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak

$$Y^{-1} N^+ X^{-1} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} A^+ [I \quad 0] + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} B_1^+ [-H \quad I] + \begin{bmatrix} -K \\ I \end{bmatrix} C_1^+ [I \quad 0]$$

ve

$$R = E_N (I - X^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E_{B_1} H & 0 \end{bmatrix}, \quad L = (I - X^{-1}) F_N = \begin{bmatrix} 0 & KF_{C_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

olup

$$(I+R^*R)^{-1}=\begin{bmatrix}\left(I+H^*E_{B_1}H\right)^{-1} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix},\qquad (I+LL^*)^{-1}=\begin{bmatrix}\left(I+KF_{C_1}K^*\right)^{-1} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}$$

olacaktır. (3.68) deki ω_1 ve ω_2 dikkate alınırsa

$$\left(I+H^*E_{B_1}H\right)^{-1}=I-H^*E_{B_1}\omega_1H,\quad \left(I+KF_{C_1}K^*\right)^{-1}=I-K\omega_2F_{C_1}K^*$$

yazılabilir. Bu bağıntılar kullanılarak

$$(I+R^*R)^{-1}(I+R^*)=I_{k+s}+\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}H^*E_{B_1}\omega_1[-H\quad I]$$

ve

$$(I+L^*)(I+LL^*)^{-1}=I_{l+t}+\begin{bmatrix}-K\\I\end{bmatrix}\omega_2F_{C_1}K^*[I\quad 0]$$

olduğu görülür. Bulunan bu değerler (3.55) ifadesinde yerlerine yazılarak istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi de, D alt matrisi s mertebeli bir kare matris olmak üzere M matris (3.46) formunda olsun. Farz edelim ki S_A nonsingülerdir. Bu takdirde

$$\hat{B}=S_A^{-1}BF_A,\ \ \hat{C}=E_ACS_A^{-1},\ \ Z=\hat{C}S_A\hat{B}\ ) \tag{3.71}$$

olup $A^+\hat{C}=0$ ve $\hat{B}A^+=0$ eşitlikleri dikkate alınırsa

$$\begin{bmatrix}A & C\\ B & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_k & \hat{C}\\ BA^+ & I_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A-Z & 0\\ 0 & S_A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_l & A^+C\\ \hat{B} & I_s\end{bmatrix}=XNY \tag{3.72}$$

yazılabilir.

Teorem 3.6. M matrisi (3.46) da verildiği gibi parçalanmış olsun. Eğer S_A matrisi nonsingüler ise, bu takdirde

$$M^+=\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}\left((I-\sigma_2)A^+(I-\sigma_1)-Z^+\right)[I\quad 0]+\begin{bmatrix}\tau_2-K\\I\end{bmatrix}\prod[\tau_1-H\quad I]$$

$$+\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}\Theta_1[\tau_1-H\quad I]+\begin{bmatrix}\tau_2-K\\I\end{bmatrix}\Theta_2[I\quad 0], \tag{3.73}$$

şeklindedir, burada

$$\tau_1 = (I + HH^*)\hat{C}^* E_Z,\ \ \sigma_1 = H^* \hat{C}^* E_Z\ ,\quad \xi_1 = (I + \tau_1 \hat{C})^{-1},$$

$$\tau_2 = F_Z \hat{B}^*(I + K^* K),\ \ \sigma_2 = F_Z \hat{B}^* K^*\ ,\quad \xi_2 = (I + \hat{B}\tau_2)^{-1},$$

$$\Theta_1 = (Z^+ + (I - \sigma_2)A^+ \sigma_1)\hat{C}\,\xi_1,\quad \Theta_2 = \xi_2 \hat{B}\big(Z^+ + \sigma_2 A^+ (I - \sigma_1)\big),$$

$$\Pi = \xi_2 \big(S_A^{-1} - \hat{B}(Z^+ - \sigma_2 A^+ \sigma_1)\hat{C}\big)\,\xi_1 \qquad (3.74)$$

İspat: (3.71) in notasyonunda, (3.72) deki X ve Y matrisleri nonsingüler olup

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} I + \hat{C}H & -\hat{C} \\ -H & I \end{bmatrix},\quad Y^{-1} = \begin{bmatrix} I + K\hat{B} & -K \\ -\hat{B} & I \end{bmatrix}$$

dir. $A^* Z = 0$ ve $ZA^* = 0$ olduğundan,

$$N^+ = \begin{bmatrix} A^+ - Z^+ & 0 \\ 0 & S_A^{-1} \end{bmatrix},\ E_N = \begin{bmatrix} E_Z - AA^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad F_N = \begin{bmatrix} F_Z - A^+ A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olacaktır. Öte yandan $XE_N = E_N$ ve $F_N Y = F_N$ olduğu kolayca görülebilir. Bu nedenle M^+ blok ifadesini elde etmek için (3.55) kullanılabir. Bu durmda

$$R = E_N(I - X^{-1}) = \begin{bmatrix} -E_Z \hat{C} H & E_Z \hat{C} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\qquad R^* = \begin{bmatrix} -H^* \hat{C}^* E_Z & 0 \\ \hat{C}^* E_Z & 0 \end{bmatrix}$$

olup

$$I + R^* R = I_{k+s} + \begin{bmatrix} -H^* \\ I \end{bmatrix} \hat{C}^* E_Z \hat{C} [-H \quad I]$$

ve

$$(I + R^* R)^{-1} = I_{k+s} - \begin{bmatrix} -H^* \\ I \end{bmatrix} \hat{C}^* E_Z \hat{C}\,\xi_1 [-H \quad I],$$

dir, burada $\xi_1 = (I + (I + HH^*)\hat{C}^* E_Z \hat{C})^{-1}$ dır. Böylece $\sigma_1 = H^* \hat{C}^* E_Z$ eşitliği ve $(I + HH^*)\hat{C}^* E_Z \hat{C}\,\xi_1 = I - \xi_1$ gerçeği kullanılırsa,

$$X^{-1}(I+R^*R)^{-1}=\begin{bmatrix} I+(I-\sigma_1)\hat{C}\,\xi_1 H & -(I-\sigma_1)\hat{C}\,\xi_1 \\ -\xi_1 H & \xi_1 \end{bmatrix}$$

olacaktır. Şimdi $\Lambda_1 = X^{-1}(I+R^*R)^{-1}(I+R^*)$ alalım. Böylece

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} (I-\sigma_1)(I+\hat{C}\,\xi_1(H-\tau_1)) & -(I-\sigma_1)\hat{C}\,\xi_1 \\ -\xi_1(H-\tau_1) & \xi_1 \end{bmatrix} \tag{3.75}$$

olur. Benzer şekilde

$$L=(I-Y^{-1})F_N=\begin{bmatrix} -K\hat{B}F_Z & 0 \\ \hat{B}F_Z & 0 \end{bmatrix}, \quad L^*=\begin{bmatrix} F_Z\hat{B}^*K^* & F_Z\hat{B}^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$I+LL^*=I_{l+s}+\begin{bmatrix} -K \\ I \end{bmatrix}\hat{B}F_Z\hat{B}^*[-K^* \quad I]$$

ve

$$(I+LL^*)^{-1}=I_{s+l}-\begin{bmatrix} -K \\ I \end{bmatrix}\xi_2\hat{B}F_Z\hat{B}^*[-K^* \quad I]$$

elde edilir, burada $\xi_2=\left(I+\hat{B}F_Z\hat{B}^*(I+K^*K)\right)^{-1}$ dir.

Şimdi de $\Lambda_2=(I+L^*)(I+LL^*)^{-1}Y^{-1}$ alalım. Bu durumda da

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} (I+(K-\tau_2)\,\xi_2\hat{B})(I-\sigma_2) & -(K-\tau_2)\,\xi_2 \\ -\xi_2\hat{B}(I-\sigma_2) & \xi_2 \end{bmatrix} \tag{3.76}$$

olur. Buradan $M^+=\Lambda_2 N^+\Lambda_1$ elde edilir. $Z^+H^*=0$ ve $K^*Z^+=0$ gerçekleri dikkate alınırsa (3.73) blok ifadesi elde edilmiş olur.

Sonuç 3.3. M matrisi (3.46) da verildiği gibi parçalanmış olsun. Eğer S_A nonsingüler ve $\mathrm{BF_A}=0$ ise, bu takdirde

$$M^+=\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}A^+\left(I-H^*\hat{C}^*\right)[I \quad 0]+\begin{bmatrix} -K \\ I \end{bmatrix}S_A^{-1}\,\xi_1[\tau_1-H \quad I]+\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\Theta_1[\tau_1-H \quad I],$$

dir, burada

$$\tau_1=(I+HH^*)\hat{C}^*, \qquad \xi_1=(I+\tau_1\hat{C})^{-1}\ , \quad \Theta_1=A^+H^*\hat{C}^*\hat{C}\,\xi_1$$

dir.

İspat: $BF_A = 0$ ifadesi (3.71) de yerine yazılırsa $\hat{B} = 0$ ve $Z = 0$ olacaktır. Diğer taraftan bu değerler (3.74) de yerlerine yazılırsa, bu takdirde

$$\tau_1 = (I + HH^*)\hat{C}^*, \;\; \sigma_1 = H^*\hat{C}^*, \;\; \tau_2 = 0 \;, \;\; \sigma_2 = 0 \,, \xi_2 = I,$$

$$\Theta_1 = A^+H^*\hat{C}^*\hat{C}\,\xi_1 \,, \;\; \Theta_2 = 0, \qquad \Pi = S_A^{-1}\xi_1$$

olacaktır.

Sonuç 3.4. M matrisi (3.46) da verildiği gibi parçalanmış olsun. Eğer S_A nonsingüler ve $E_AC = 0$ ise, bu takdirde

$$M^+ = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\left(I - \hat{B}^*K^*\right)A^+[I \quad 0] + \begin{bmatrix} \tau_2 - K \\ I \end{bmatrix}\xi_2 S_A^{-1}[-H \quad I] + \begin{bmatrix} \tau_2 - K \\ I \end{bmatrix}\Theta_2[I \quad 0],$$

olacaktır, burada

$$\tau_2 = \hat{B}^*(I + K^*K), \quad \xi_2 = (I + \hat{B}\tau_2)^{-1}, \;\; \Theta_2 = \xi_2\hat{B}B^*K^*A^+$$

dir.

İspat: $E_AC = 0$ ifadesi (3.71) de yerine yazılırsa $\hat{C} = 0$ ve $Z = 0$ olduğu görülür. Diğer taraftan bu değerler (3.74) de yerlerine yazılırsa, bu takdirde

$$\tau_1 = 0, \;\; \sigma_1 = 0 \,, \xi_1 = I, \qquad \tau_2 = \hat{B}^*(I + K^*K), \qquad \sigma_2 = \hat{B}^*K^*,$$

$$\Theta_1 = 0 \,, \qquad \Theta_2 = \xi_2\hat{B}B^*K^*A^+ \,, \qquad \Pi = \xi_2 S_A^{-1}$$

elde edilir.

Şimdi de $B_1 = BF_A$ matrisinin tam satır ranklı ve $C_1 = E_AC$ matrisinin tam sütun ranklı olması durumunu göz önüne alalım.

Sonuç 3.5. M matrisi (3.46) da verildiği gibi parçalanmış olsun. Eğer S_A nonsingüler ve $Z = \hat{C}S_A\hat{B}$ bir tam rank parçalanış ise, bu takdirde

$$M^+ = \begin{bmatrix} A^+ - \Delta & B_1^*(B_1B_1^*)^{-1} \\ (C_1^*C_1)^{-1}C_1^* & 0 \end{bmatrix},$$

olacaktır, burada

$$\Delta = B_1^*(B_1B_1^*)^{-1}S_A(C_1^*C_1)^{-1}C_1^* + B_1^*(B_1B_1^*)^{-1}BA^+ + A^+C(C_1^*C_1)^{-1}C_1^*$$

dir.

İspat: Bu durumda

$$Z^+ = B_1^*(B_1B_1^*)^{-1}S_A(C_1^*C_1)^{-1}C_1^*, \quad E_Z = E_{C_1}, \quad F_Z = F_{B_1}$$

olup bu ifadeler (3.74) te yerlerine yazılırsa, bu takdirde

$$\tau_1 = 0, \quad \sigma_1 = 0, \quad \xi_1 = I, \quad \tau_2 = 0, \quad \sigma_2 = 0, \xi_2 = I,$$

$$\Theta_1 = Z^+\hat{C}, \quad \Theta_2 = \hat{B}Z^+, \quad \prod = 0$$

olacaktır. Bu değerler (3.73) te yerlerine yazılırsa

$$M^+ = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}(A^+ - Z^+)[I \quad 0] + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}Z^+\hat{C}[-H \quad I] + \begin{bmatrix} -K \\ I \end{bmatrix}\hat{B}Z^+[I \quad 0].$$

olduğu görülür. Buradan Z^+ için yukarıda verilen ifade kullanılarak sonuç ispatlanmış olur.

3.3. Parçalı Nonnegatif Definit Bir Matrisin Moore-Penrose İnversi

Keyfi simetrik nonnegatif definit bir M matrisinin ve onun M^+ Moore-Penrose inversinin sırasıyla

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ C' & D \end{pmatrix} \text{ ve } \quad M^+ = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ {G_2}' & G_4 \end{pmatrix}$$

olarak parçalandığını varsayalım. Bu kısımda A, C ve D matrisleri cinsinden G_1, G_2 ve G_4 için açık ifadeler elde edeceğiz. Ayrıca $(M^+/G_4) = G_1 - G_2G_4^+G_2'$ genelleştirilmiş Schur complementinin Lövner kısmi sıralamasına göre daima $(M/D) = A - CD^+C'$ genelleştirilmiş Schur complementinin Moore-Penrose inversi olan $(M/D)^+$ altında olduğunu göstereceğiz.

$m \times n$ tipindeki reel bir M matrisi için, M', M^-, M^+ ve $r(M)$ sembolleri sırasıyla M matrisinin transposu, keyfi bir genelleştirilmiş invesi (iç inversi), Moore-Penrose inversi, ve rankını gösterelim. Aynı mertebeli iki simetrik B ve M matrisinin $B - M$ farkı simetrik nonnegatif definit olduğunda $M \leq_L B$ gösterimini kullanacağız. Bu durumda M matrisi Lövner kısmi sıralamasına göre B nin altındadır diyeceğiz.

A ve D muhtemelen farklı mertebeden simetrik kare matrisler olmak üzere

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ C' & D \end{pmatrix} \tag{3.77}$$

simetrik matrisini göz önüne alalım. Bu durumda A ve D muhtemelen farklı mertebeden simetrik kare matrisler olmak

$$0 \leq_L M \Leftrightarrow 0 \leq_L A, \quad AA^+C = C, 0 \leq_L D - C'A^+C, \tag{3.78}$$

ve benzer şekilde

$$0 \leq_L M \Leftrightarrow 0 \leq_L D, \quad CD^+D = C \;, \; 0 \leq_L A - CD^+C' \tag{3.79}$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

$$S = D - C'A^+C \tag{3.80}$$

matrisi A nın M deki genelleştirilmiş Schur complementi olarak bilinir ve (M/A) ile gösterilir. M nin nonnegatifliğinden (M/A) tektir. D nin M deki genelleştirilmiş Schur complementi

$$(M/D) = A - CD^+C' \tag{3.81}$$

dir. Öte yandan

$$r\begin{pmatrix} A & C \\ C' & D \end{pmatrix} = r(A) + r(M/A) = r(D) + r(M/D) \tag{3.82}$$

olduğu açıktır. Üstelik,

$$\begin{pmatrix} A & C \\ C' & D \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} A^+ + A^+CS^+C'A^+ & -A^+CS^+ \\ -S^+C'A^+ & S^+ \end{pmatrix} \tag{3.83}$$

olacaktır, şayet

$$r\begin{pmatrix} A & C \\ C' & D \end{pmatrix} = r(A) + r(D) \tag{3.84}$$

rank şartı sağlanırsa bununla beraber genel durum için benzer bir formül aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.7. M matris (3.77) deki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde

$$M^{+} = \begin{pmatrix} A^{+} + A^{+}CS^{\sim}C'A^{+} & -A^{+}CS^{\sim} \\ -S^{\sim}C'A^{+} & S^{\sim} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A^{+}(CZ + Z'C')A^{+} & A^{+}Z' \\ ZA^{+} & 0 \end{pmatrix},$$

(3.85) olacaktır, burada

$$S^{\sim} = (Z, I) \begin{pmatrix} A^{+} + A^{+}CS^{+}C'A^{+} & -A^{+}CS^{+} \\ -S^{+}C'A^{+} & S^{+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z' \\ I \end{pmatrix}, \tag{3.86}$$

$$Z = (I - S^{+}S)C'A^{+}(I + A^{+}C(I - S^{+}S)C'A^{+})^{-1}, \tag{3.87}$$

$$S = D - C'A^{+}C = (M/A) \tag{3.88}$$

dir. Ayrıca, $S^{\sim}$ matrisi S matrisinin bir genelleştirilmiş inversidir, yani, $SS^{\sim}S = S$ dir.

İspat: Simetrik nonnegatif definit M matrisi U ve V matrisleri için

$$M = \begin{pmatrix} U' \\ V' \end{pmatrix} (U, V) = \begin{pmatrix} U'U & U'V \\ V'U & V'V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ C' & D \end{pmatrix}$$

formunda yazılabilir. Bu durumda M matrisinin Moore-Penrose inversi

$$M^{+} = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{pmatrix} = (U, V)^{+} \begin{pmatrix} U' \\ V' \end{pmatrix}^{+} = (U, V)^{+}[(U, V)^{+}]'$$

olacaktır, burada $G_3 = {G_2}'$ dir ve bu durumda G_1, G_2 ve G_4 matrislerini belirlemeliyiz. Pringle ve Rayner (1971) deki Teorem 3.4 den

$$(U, V)^{+} = \begin{pmatrix} U^{+} - U^{+}V(C^{+} + K) \\ C^{+} + K \end{pmatrix}$$

olduğu bilinmektedir, burada

$$N = (I - UU^{+})V \text{ ve } K = ZU^{+}(I - VN^{+})$$

$$Z = (I - N^{+}N)[I + (I - N^{+}N)V'(U^{+})'U^{+}V(I - N^{+}N)]^{-1}V'(U^{+})'$$

$N^{+}(U^{+})' = 0$ eşitliği kullanılarak

$$G_1 = (U'U)^{+} + U^{+}VG_4V'(U^{+})' - U^{+}VK(U^{+})' - U^{+}K'V'(U^{+})',$$

$$G_2 = -U^+VG_4 + U^+K'$$

ve

$$G_4 = (N^+ + K)(N^+ + K)'$$

olduğu görülür. Öte yandan

$$N'N = S, \quad N^+N = (N'N)^+N'N = S^+S$$

ve

$$V'(U^+)' = V'U(U'U)^+ = C'A^+, \quad U^+V = (U'U)^+U'V = A^+C,$$

eşitliklerinden

$$Z = (I - S^+S)[I + (I - S^+S)C'A^+A^+C(I - S^+S)]^{-1}C'A^+$$

elde edilir. Ters alma formülü kullanılarak

$$[I + (I - S^+S)C'A^+A^+C(I - S^+S)]^{-1}$$
$$= I - (I - S^+S)C'A^+(I + A^+C(I - S^+S)C'A^+)^{-1}A^+C(I - S^+S)$$

olduğu görülür. Böylece

$$Z = (I - S^+S)C'A^+(I + A^+C(I - S^+S)C'A^+)^{-1}$$

olacaktır. Yine $N^+(U^+)' = 0$ eşitliğini kullanarak

$$K(U^+)' = ZU^+(U^+)' = Z(U'\mathrm{U})^+ = \mathrm{Z}A^+,$$

$$K(N^+)' = -ZU^+V(C'\mathrm{C})^+ = -ZA^+CS^+,$$

ve

$$KK' = Z(A^+ + A^+CS^+C'A^+)Z'.$$

yazılabilir. Bu takdirde

$$G_1 = A^+ + A^+CG_4C'A^+ - A^+CZA^+ - A^+Z'C'A^+,$$

$$G_2 = -A^+CG_4 + A^+Z', \qquad \text{ve}$$

$$G_4 = (C'C)^+ + K(N^+)' + N^+K' + KK'$$

$$= S^+ - ZA^+CS^+ - S^+C'A^+Z' + Z(A^+ + A^+CS^+C'A^+)Z'$$

$$= (Z, I)\begin{pmatrix} A^+ + A^+CS^+C'A^+ & -A^+CS^+ \\ -S^+C'A^+ & S^+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z' \\ I \end{pmatrix}$$

elde edilir. $SG_4S = S$ olduğundan ispat tamamlanmış olur.

Biraz önce belirtildiği gibi $S^{\sim}$ matrisinin M^+deki genelleştirilmiş Schur complementi için bir formül geliştirebiliriz.

Sonuç 3.6. $0 \leq_{\mathrm{L}} \mathrm{M}$ olmak üzere M matris (3.77) deki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde

$$(\mathrm{M}^+/S^{\sim}) = \mathrm{A}^+ - \mathrm{A}^+\mathrm{Z}'(\mathrm{S}^{\sim})^+\mathrm{Z}\mathrm{A}^+ , \tag{3.89}$$

olacaktır, burada $\mathrm{S}^{\sim}$ ve Z matrisleri sırasıyla (3.86) ve (3.87) de verildiği gibidir.

İspat: $0 \leq_L M^+$ olduğundan

$$(-A^+CS^{\sim} + A^+Z')(S^{\sim})^+S^{\sim} = -A^+CS^{\sim} + A^+Z',$$

yazılabilir. Böylece

$$A^+Z'(S^{\sim})^+S^{\sim} = A^+Z'$$

olacaktır. Bu eşitlik $(S^{\sim})^+S^{\sim} = S^{\sim}(S^{\sim})^+$ eşitliği ile birlikte kullanılarak, istenilen sonuç kolayca elde edilir.

A ve S nin sırasıyla, inversleri A^- ve S^- genelleştirilmiş inverslerinin herhangi özel seçimi için her

$$M^- = \begin{pmatrix} A^- + A^-CS^-C'A^- & -A^-CS^- \\ -S^-C'A^- & S^- \end{pmatrix} \tag{3.90}$$

matrisinin M nin bir genelleştirilmiş inversi olacağını hatırlatalım. Bu nedenle (3.85) formülü M nin genelleştirilmiş inverslerinin iki farklı M_1^- ve M_2^- seçimini, yani $A^- = A^+$ ve $S^- = S^{\sim}$ olmak üzere M_1^- inversi (3.85) teki gibi ve $A^- = A^+$ ve $S^- = S^+$ olmak üzere M_2^- inversi (3.85) teki gibi olabilir.

Sonuç 3.7. $0 \leq_{\mathrm{L}} \mathrm{M}$ olmak üzere M matris (3.77) deki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $M^{+} = \begin{pmatrix} A^{+} + A^{+}CS^{+}C'A^{+} & -A^{+}CS^{+} \\ -S^{+}C'A^{+} & S^{+} \end{pmatrix}$,

(ii) $(I - S^{+}S)C'A^{+} = 0$,

(iii) $S^{\sim} = S^{+}$,

(iv) $(M^{+}/S^{\sim}) = A^{+}$,

(v) $S^{\sim}SS^{\sim} = S^{\sim}$,

burada $\mathrm{S}^{\sim}$ matrisi (3.86) da verildiği gibidir.

İspat: (i) sağlansın. Bu takdirde

$$MM^{+} = \begin{pmatrix} AA^{+} & 0 \\ (I - S^{+}S)C'A^{+} & SS^{+} \end{pmatrix}$$

yazılabilir. MM^{+} simetrik olmak zorunda olduğundan (ii) sağlanır. Bu takdirde eğer (3.87) deki Z sıfır ise, (iii) sağlanır. Eğer (iii) sağlanırsa $(S^{\sim})^{+} = (S^{+})^{+} = S$ ve Sonuç 3.6 da $SZ = 0$ alınarak (iv) elde edilir. Eğer (iv) sağlanırsa bu takdirde

$$r(M^{+}) = r(S^{\sim}) + r(M^{+}/S^{\sim})$$

rank eşitliğinden

$$r(M) = r(S^{\sim}) + r(A)$$

ifadesi kolayca elde edilir. Öte yandan $r(S^{\sim}) = r(M) - r(A) = r(S)$ olduğu açıktır. Fakat $S^{\sim}$ matrisi S nin bir genelleştirilmiş inversi olduğundan $r(S^{\sim}) = r(S)$ eşitliği (v) bağıntısına denk olacaktır. Eğer (v) sağlanırsa, bu takdirde

$$A^{+}Z'(S^{\sim})^{+}S^{\sim} = A^{+}Z'(S^{\sim})^{+}S^{\sim}SS^{\sim} = A^{+}Z'SS^{\sim} = A^{+}Z'$$

yazılabilir. Fakat $Z'S = 0$ olduğundan $A^{+}Z' = 0$ elde edilir ki bu da Teorem 3.7 ye göre (i) şartının sağlanması demektir.

Sonuç 3.7 deki (i)-(v) şartlarının her birinin (3.84) ifadesine denk olduğunu belirtelim. Bu durum (ii) şartının sağlanması için gerek ve yeter koşulun

$$(I - S^{+}S)C'A^{+}C = 0,$$

eşitliğinin sağlanması gerçeğinden görülür. Öte yandan $S^+S = SS^+$ olduğundan bu ise $(I - SS^+)D = 0$, yani $r(D) \le r(S)$ olduğundan $D = SS^+D$ olmasına denktir. Fakat $r(S) \le r(D)$, eşitsizliği daima sağlandığından, (ii) ifadesi $r(D) = r(S) = r(M) - r(A)$ eşitliğine, yani (3.84) ifadesine denk olacaktır.

Şimdi $(M^+/S^{\sim})$ Schur complementini yeniden göz önüne alalım. Sonuç 3.6 dan kolayca görülür ki

$$0 \le_L (M^+/S^{\sim}) \le_L A^+ \tag{3.91}$$

dir.

Teorem 3.8. $0 \le_{\mathrm{L}}$ M olmak üzere M matris (3.77) deki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde

$$0 \le_L (M^+/S^{\sim}) \le_L (M/D)^+ \tag{3.92}$$

burada $S^{\sim}$ matrisi (3.86) da verildiği gibidir.

İspat: $\vartheta(M)$ ve $\mu(M)$ sırasıyla bir M matrisinin sütun uzayını ve sıfır uzayını göstersin. Eğer M matrisi sadece reel özdeğerlere sahip bir kare matris ise bu takdirde $ch_1(M)$ ile M nin en büyük özdeğerini gösterelim. Örneğin $0 \le_L (M^+/S^{\sim}) \le_L (M/D)^+$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\vartheta(M^+/S^{\sim}) \subseteq \vartheta(M/D) \quad \text{ve} \quad ch_1[(M^+/S^{\sim})(M/D)] \le 1 \tag{3.93}$$

olmasıdır. Bunu göstermek için M daha önce verildiği gibi olmak üzere N, K ve Z Teorem 3.7 nin ispatında verildiği gibi olsun. $W = N^+ + K$ alalım. Bu takdirde

$$(M^+/S^{\sim}) = U^+(I - W^+W)(U^+)' \quad \text{ve} \quad (M/D) = U'(I - VV^+)U, \tag{3.94}$$

yazılabilir. $\vartheta(M^+/S^{\sim}) \subseteq \vartheta(M/D)$ olması için gerek ve yeter şartın

$$\vartheta[U^+(I - W^+W)] \subseteq \vartheta[U'(I - VV^+)] \tag{3.95}$$

olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için $y \in \vartheta[U^+(I - W^+W)]$, yani bir $z \in \vartheta(I - W^+W) = \mu(W)$ için $y = U^+z$ alalım. z vektörü için $N^+z = -Kz$ yazalım. $CK = 0$ olduğundan bu eşitliği soldan N ile çarparak $NN^+z = -NKz = 0$ elde edilir. Fakat bu durumda $N^+z = 0$ ve $Kz = 0$ olacaktır. $N^+z = 0$ olduğundan son eşitlik $ZU^+z = ZU^+VN^+z = 0$ olması demektir. Bu ise $y = U^+z \in \vartheta(U')$ nin $\mu(Z)$ ye ait olduğunu, yani $y \in \vartheta(U') \cap \mu(Z)$ olduğunu gösterir. $y \in \mu(Z)$ olduğundan

$$(I - N^+N)L^{-1}V'(U^+)'y = 0 \tag{3.96}$$

elde edilir, burada $\mathrm{L} = \mathrm{I} + (I - N^+N)V'(U^+)'U^+V(I - N^+N)$ dir. Ters alma formülünden $N^+NL^{-1} = N^+N$ ve $LN^+N = N^+N$ olduğu görülür. Bu nedenle (3.96)

$$\mathrm{L}(I - N^+N)L^{-1}V'(U^+)'y = (I - N^+N)V'(U^+)'y = 0 \tag{3.97}$$

ye denktir. (3.97) özdeşliği $V'(U^+)'y \in \mu(I - N^+N) = \vartheta(C') = \vartheta[V'(I - UU^+)]$ demektir. Bu nedenle, $V'(U^+)'y - V'(I - UU^+)x = 0$, yani, $(U^+)'y - (I - UU^+)x \in \mu(V') = \vartheta(I - VV^+)$ olacak şekilde en az bir x vektörü mevcuttur. Bu son eşitliği soldan U' ile çarparak ve $U'(U^+)'y = y$ olduğu dikkate alınarak $y \in \vartheta[U'(I - VV^+)]$ elde edilir. Bu ise (3.95) in sağlanması demektir. Geriye

$$ch_1[(M^+/S^{\sim})(M/D)] \leq 1 \tag{3.98}$$

olduğunun gösterilmesi kalmıştır. İki nonnegatif definit matrisin çarpımının sadece sıfırdan küçük olmayan özdeğerlere sahip olduğunu hatırlayalım. Üstelik keyfi iki X ve Y matrisinin XY çarpımının sıfırdan farklı özdeğerlerinin YX in sıfırdan farklı özdeğerleriyle çakışacağını belirtelim. Bu nedenle

$$ch_1[(M^+/S^{\sim})(M/D)] = ch_1(P_1P_2P_3P_2) = ch_1(P_1P_2P_3P_2P_1), \tag{3.99}$$

yazılabilir, burada P_1, P_2 ve P_3 ortogonal izdüşümleri $P_1 = (I - VV^+)$, $P_2 = UU^+$ ve $P_3 = I - W^+W$ şeklindedir. Buradan

$$\begin{aligned} P_1P_2P_3P_2P_1 &= P_1P_2P_1 - P_1P_2(I - P_3)P_2P_1 \\ &= P_1 - P_1(I - P_2)P_1 - P_1P_2(I - P_3)P_2P_1 \end{aligned}$$

yazılarak

$$I - P_1P_2P_3P_2P_1 = (I - P_1) + P_1(I - P_2)P_1 + P_1P_2(I - P_3)P_2P_1$$

matrisinin simetrik nonnegatif definit bir matris olduğu görülür. Başka bir deyişle, $P_1P_2P_3P_2P_1 \leq_L I$ ve dolayısıyla $ch_1(P_1P_2P_3P_2P_1) \leq 1$ olacaktır. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Belirtelim ki

$$0 \leq_L (M/D) \leq_L A\,, \tag{3.100}$$

eşitsizliği daima doğrudur. Dolayısıyla

$$0 \leq_L A^+ \leq_L (M/D)^+ \Leftrightarrow \mathrm{r(A)} = \mathrm{r(M/D)} \tag{3.101}$$

yazılabilir. $\mathrm{r(A)} = \mathrm{r(M/D)}$ koşulunun (3.84) rank koşuluna denk olduğu kolayca gösterilebilir. Sonuç 3.7 deki (iv) koşulunu akılda tutarak, (3.101) in sağlanması durumunda Teorem 3.8 in (3.100) ifadesinin açık bir sonucu olacağı görülür. Bununla beraber, genel durumda, Teorem 3.8 i (3.100) den türetmek mümkün değildir.

Örnek 3.2. (3.85) formülünü açıklamak için

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

simetrik nonnegatif definit matrisinin Moore-Penrose inversini bu matrisi (3.77) e uygun olarak

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = (4)$$

şeklinde parçalayarak hesaplayalım. Bu durumda $S = (0)$, $Z = \frac{1}{9}(2, -2)$ ve $S^{\sim} = \left(\frac{20}{81}\right)$ olacaktır. Böylece Teorem 3.1. den

$$M^+ = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 161 & -161 & -40 \\ -161 & 242 & 40 \\ -40 & 40 & 20 \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -16 & 20 & 4 \\ 20 & -24 & -6 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 17 & 19 & -4 \\ 19 & 26 & -14 \\ -4 & -14 & 20 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Öte yandan

$$(M/D)^{+} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \text{ ve } (M^{+}/S^{\sim}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

olur ki bu da Teorem 3.8 e göre $(M^{+}/S^{\sim}) \leq_L (M/D)^{+}$ olduğunu gösterir.

3.4. $2x2$ Tipindeki Blok Matrislerin Moore-Penrose İnversi İçin Yeni Gösterimler

Bu kısımda

$$M = \begin{pmatrix}A & C\\ B & D\end{pmatrix} \tag{3.102}$$

biçiminde parçalanmış bir matrisin Moore-Penrose inversi için bazı yeni gösterimler vereceğiz. Daha önce verilen notasyonlara ilaveten

$$A = F_A G_A \tag{3.103}$$

(i) $AA^{+} = F_A {F_A}^{+}$ $\Re(A)$ üzerine izdüşüm;

(ii) $A^{+}A = {G_A}^{+} G_A$ $\Re(A^{*})$ üzerine izdüşüm;

(iii) $I - AA^{+} = I - F_A {F_A}^{+}$ $\mathcal{N}(A^{*})$ üzerine izdüşüm;

(iv) $I - A^{+}A = I - {G_A}^{+} G_A$ $\mathcal{N}(A)$ üzerine izdüşüm

gösterimlerini kullanalım. Basitlik için $P_A = I - AA^{+}$ ve $Q_A = I - A^{+}A$ sırasıyla $\mathcal{N}(A^{*})$ ve $\mathcal{N}(A)$ uzayları üzerindeki iki ortogonal izdüşümü göstersin.

Aşağıdaki yararlı bir lemma ile işe başlayalım.

Lemma 3.5. $S,\ E,\ W$ ve R matrisleri

$$S = D - BA^{+}C,\ \ E = P_A C\ ,\ W = BQ_A,\ \ R = P_W S Q_E \tag{3.104}$$

şeklinde olsun. Bu takdirde

$$r(A, C) = r(A) + r(E) \tag{3.105}$$

$$r\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix} = r(A) + r(W) \tag{3.106}$$

$$r\begin{pmatrix}0 & C\\ B & D\end{pmatrix} = r(C) + r(B) + r(\ P_B D Q_C), \tag{3.107}$$

$$r\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = r(A) + r\begin{pmatrix} 0 & E \\ W & S \end{pmatrix} \tag{3.108}$$

$$= r(A) + r(E) + r(W) + r(R) \tag{3.109}$$

Teorem 3.9. Eğer A, E, W ve R matrisleri sırasıyla

$$A = F_A G_A \ , E = F_E G_E \ , \ W = F_W G_W \ , \ \mathrm{R} = F_R G_R, \tag{3.110}$$

tam rank parçalanışlarına sahipse, bu takdirde

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_A & 0 & 0 & F_E \\ BG_A{}^+ & F_R & F_W & P_W S G_E{}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_A & F_A{}^+ C \\ 0 & G_R \\ G_W & F_W{}^+ S \\ 0 & G_E \end{pmatrix} \tag{3.111}$$

tam rank parçalanışı mevcuttur.

İspat: Yukarıda verilenlere göre

$$BG_A{}^+ F_A{}^+ C + F_R G_R + F_W F_W{}^+ S + P_W S G_E{}^+ G_E$$

$$= BA^+ C + P_W S Q_E + WW^+ S + P_W S E^+ E$$

$$= BA^+ C + S Q_E + WW^+ S = BA^+ C + S = D$$

yazılabilir, burada $A = G_A{}^+ F_A{}^+$, $F_W F_W{}^+ = WW^+$, $F_E{}^+ F_E = E^+ E$, $E^+ E + Q_E = I$ ve $WW^+ + P_W = I$ eşitlikleri kullanılmıştır. (3.111) ifadesi

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_A \\ BG_A{}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_A & F_A{}^+ C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E \\ W & S \end{pmatrix} \ , \tag{3.112}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ W & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_W & F_W{}^+ S \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & P_W S \end{pmatrix} \ , \tag{3.113}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & P_W S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_E \\ P_W S G_E{}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & G_E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \tag{3.114}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & G_R \end{pmatrix} \tag{3.115}$$

eşitliklerinden direk olarak elde edilebilir. Öte yandan $\Re(E)\subset\mathcal{N}(A^*)$ olduğundan (3.112) den (3.108) rank eşitliği elde edilir. Benzer şekilde yukarıdaki rank eşitliklerinden Lemma 3.5 deki diğer rank eşitlikleri sağlanabilir.

Teorem 3.10. M ve N sırasıyla (3.111) in sağ tarafındaki çarpımdaki birinci ve ikinci matrisleri göstersin. Bu takdirde

(1) M matrisinin Moore-Penrose inversi

$$M^+ = \begin{pmatrix} F_1U_1U_4 - F_1U_1U_2U_5 \\ -F_2U_2^*U_1U_4 + F_2(U_3 + U_2^*U_1U_2)U_5 \end{pmatrix}, \tag{3.116}$$

olarak yazılabilir, burada

$$F_1 = \begin{pmatrix} F_A{}^+ & 0 \\ 0 & F_R{}^+ \end{pmatrix},\ F_2 = \begin{pmatrix} F_W{}^+ & 0 \\ 0 & F_E{}^+ \end{pmatrix},$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} X_3{}^{-1} & -X_3{}^{-1}\mathrm{H}P_WX_2{}^{-1}X_4 \\ -X_4{}^*X_2{}^{-1}P_WH^*X_3{}^{-1} & X_4 + X_4{}^*X_2{}^{-1}P_WH^*X_3{}^{-1}HP_WX_2{}^{-1}X_4 \end{pmatrix},$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} H & \mathrm{H}P_WH_1{}^*X_1{}^{-1} \\ I & P_WH_1{}^*X_1{}^{-1} \end{pmatrix},\quad U_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & X_1{}^{-1} \end{pmatrix},$$

$$U_4 = \begin{pmatrix} I & \mathrm{H} \\ 0 & I \end{pmatrix}, U_5 = \begin{pmatrix} 0 & WW^+ \\ EE^+ & H_1P_W \end{pmatrix}$$

$$H = A^+B^*,\ \ H_1 = E^{+*}S^*,$$

$$X_1 = I + H_1P_WH_1{}^*\ ,\ \ X_2 = I + P_WH_1{}^*H_1P_W\ ,$$

$$X_3 = \mathrm{I} + \mathrm{H}P_W(X_2{}^{-1} - X_2{}^{-1}X_4X_2{}^{-1})P_WH^*,\quad X_4 = (RR^+X_2{}^{-1}RR^+)^+$$

dir.

(2) N matrisinin Moore-Penrose inversi

$$N^+ = (V_4V_1G_1{}^* - V_5V_3V_2{}^*V_1G_1{}^* - V_4V_1V_2V_3G_2{}^* + V_5(V_3 + V_3V_2{}^*V_1V_2V_3)G_2{}^*)$$
(3.117)

şeklindedir, burada

$$G_1 = \begin{pmatrix} {G_A}^{+*} & 0 \\ 0 & {G_R}^{+*} \end{pmatrix},\ G_2 = \begin{pmatrix} {G_W}^{+*} & 0 \\ 0 & {G_E}^{+*} \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} {Y_3}^{-1} & -{Y_3}^{-1}\mathrm{K}Q_E{Y_2}^{-1}Y_4 \\ -{Y_4}^{*}{Y_2}^{-1}Q_EK^{*}{Y_3}^{-1} & Y_4 + Y_4{Y_2}^{-1}Q_EK^{*}{Y_3}^{-1}KQ_E{Y_2}^{-1}Y_4 \end{pmatrix},$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} KK_1^{\ *} & \mathrm{K} \\ K_1^{\ *} & 0 \end{pmatrix},\quad V_3 = \begin{pmatrix} {Y_1}^{-1} & -{Y_1}^{-1}K_1 \\ -K_1^{\ *}{Y_1}^{-1} & I + K_1^{\ *}{Y_1}^{-1}K_1 \end{pmatrix},$$

$$V_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ K^{*} & I \end{pmatrix},\ V_5 = \begin{pmatrix} W^{+}W & 0 \\ K_1^{\ *} & E^{+}E \end{pmatrix}$$

$$K = A^{+}C,\ \ K_1 = W^{+}S,\ Y_1 = I + K_1Q_EK_1^{\ *},\ \ Y_2 = I + Q_EK_1^{\ *}K_1Q_E\ ,$$

$$Y_3 = \mathrm{I} + \mathrm{K}Q_E({Y_2}^{-1} - {Y_2}^{-1}Y_4{Y_2}^{-1})Q_EK^{*},\quad Y_4 = (R^{+}R{Y_2}^{-1}R^{+}R)^{+}$$

dir.

Lemma 3.6. Aşağıdaki matris eşitlikleri gerçeklenir:

$${X_2}^{-1} = I - P_WH_1^{\ *}{X_1}^{-1}H_1P_W, \tag{3.118}$$

$${X_1}^{-1} = I - H_1P_W{X_2}^{-1}P_WH_1^{\ *}, \tag{3.119}$$

$${X_2}^{-1}P_WH_1^{\ *} = P_WH_1^{\ *}{X_1}^{-1}, \tag{3.120}$$

$${X_2}^{-1}P_WH_1 = P_WH_1{X_1}^{-1}. \tag{3.121}$$

İspat: Bu eşitlikler $\begin{pmatrix} I & -P_WH_1^{\ *} \\ H_1P_W & I \end{pmatrix}$ ile verilen parçalı matrisin inversinin iki farklı gösteriminden kolayca sağlanabilir.

Lemma 3.7. $F_A^{\ *}F_E = 0,\ F_W^{\ *}P_W = 0$ ve $F_A^{\ *}H_1 = 0$ dir.

İspat: Bu eşitlikler sırasıyla $A^{*}E = 0$, $W^{*}P_W = 0$ ve $\Re(E^{+*}) = \Re(E) \subset \mathcal{N}(A^{*})$ eşitliklerinden elde edilir.

Lemma 3.8. Aşağıdaki matris eşitlikleri gerçeklenir:

$$(F_E^{\ *}X_1F_E)^{-1} = F_E^{\ +}{X_1}^{-1}F_E^{\ +*}, \tag{3.122}$$

$$(F_A{}^* X_3 F_A)^{-1} = F_A{}^+ X_3{}^{-1} F_A{}^{+*}, \tag{3.123}$$

$$F_R\left(F_R{}^* X_2{}^{-1} F_R\right)^{-1} F_R{}^* = (RR^+ X_2{}^{-1} RR^+)^+. \tag{3.124}$$

İspat: (3.122) ve (3.123) matris eşitlikleri Moore-Penrose inversin aşağıdaki önemli özelliğinden sağlanır: $(FXG)^{-1} = G^+ X^{-1} F^+$, burada X matrisi nonsingüler, F ve G ise sırasıyla tam sütun ve tam satır ranklı matrislerdir. Öte yandan $RR^+ = F_R F_R{}^+ = F_R{}^{+*} F_R{}^*$ olup

$$F_R\left(F_R{}^* X_2{}^{-1} F_R\right)^{-1} F_R{}^*\left(RR^+ X_2{}^{-1} RR^+\right)$$

$$= F_R\left(F_R{}^* X_2{}^{-1} F_R\right)^{-1} F_R{}^* F_R F_R{}^+ X_2{}^{-1} F_R F_R{}^+ = F_R F_R{}^+,$$

$$\left(RR^+ X_2{}^{-1} RR^+\right) F_R\left(F_R{}^* X_2{}^{-1} F_R\right)^{-1} F_R{}^*$$

$$= F_R{}^{+*} F_R{}^* X_2{}^{-1} F_R F_R{}^+ F_R\left(F_R{}^* X_2{}^{-1} F_R\right)^{-1} F_R{}^* = F_R{}^{+*} F_R{}^*$$

eşitlikleri yazılabilir. Ayrıca Moore-Penrose inversin üçüncü ve dördüncü şartları (3.124) sağlandığını gösterir.

Benzer bir sonuç aşağıdaki şekilde verilebilir.

Lemma 3.9. $G_E G_A{}^* = 0$, $Q_E G_E{}^* = 0$ ve $K_1 G_A{}^* = 0$ olmak üzere, aşağıdaki matris eşitlikleri gerçeklenir:

$$Y_2{}^{-1} = I - Q_E K_1{}^* X_1{}^{-1} K_1 Q_E, \tag{3.125}$$

$$Y_1{}^{-1} = I - K_1 Q_E Y_2{}^{-1} Q_E K_1{}^*, \tag{3.126}$$

$$Y_2{}^{-1} Q_E K_1{}^* = Q_E K_1{}^* X_1{}^{-1}, \tag{3.127}$$

$$X_2{}^{-1} Q_E K_1 = Q_E K_1 X_1{}^{-1}, \tag{3.128}$$

$$(G_W Y_1 G_W{}^*)^{-1} = G_W{}^{+*} Y_1{}^{-1} G_W{}^+, \tag{3.129}$$

$$(G_A Y_3 G_A{}^*)^{-1} = G_A{}^{+*} Y_3{}^{-1} F_A{}^+, \tag{3.130}$$

$$G_R{}^*\left(G_R Y_2{}^{-1} G_R{}^*\right)^{-1} G_R = (R^+ R Y_2{}^{-1} R^+ R)^+. \tag{3.131}$$

Aşağıda Teorem 3.10 un ispatı için bir detay vereceğiz:

Teorem 3.10 un ispatı: (1)

$$M_1 = \begin{pmatrix} F_A & 0 \\ BG_A{}^+ & F_R \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & F_E \\ F_W & P_W S G_E{}^+ \end{pmatrix},$$

olsun. Bu durumda

$$M_1^* M_1 = \begin{pmatrix} F_A^*(I + HH^*)F_A & F_A H F_R \\ F_R{}^* H^* F_A & F_R{}^* F_R \end{pmatrix}, \; M_1^* M_2 = \begin{pmatrix} F_A^* H F_W & F_A^* H P_W H_1{}^* F_E \\ F_R{}^* F_W & F_R{}^* P_W H_1{}^* F_E \end{pmatrix},$$

$$M_2^* M_1 = (M_1^* M_2)^* \;, \; M_2^* M_2 = \begin{pmatrix} F_W^* F_W & 0 \\ 0 & F_E{}^*(I + H_1 P_W H_1{}^*)F_E \end{pmatrix}$$

eşitlikleri sağlanır. (3.122) ve $EE^+ X_1{}^{-1} H_1 = X_1{}^{-1} H_1$ eşitliğinden,

$$M_2^+ = \begin{pmatrix} EE^+ X_1{}^{-1} EE^+ & X_1{}^{-1} H_1 P_W \\ P_W H_1{}^* X_1{}^{-1} & WW^+ + P_W H_1{}^* X_1{}^{-1} H_1 P_W \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Bu takdirde $M^* M$ de $M_2^* M_2$ sağ alt bloğunun Schur complementi

$$M_1^* M_1 - M_1^* M_2^+ M_1 = \begin{pmatrix} F_A^* Z_{11} F_A & F_A^* Z_{12} F_R \\ F_R{}^* Z_{21} F_A & F_R{}^* Z_{22} F_R \end{pmatrix},$$

olacaktır, burada

$$Z_{11} = I + HP_W H^* - EE^+ X_1{}^{-1} EE^+ - X_1{}^{-1} H_1 P_W H^*$$

$$-HP_W H_1{}^* X_1{}^{-1} - HP_W H_1{}^* X_1{}^{-1} H_1 P_W H^* \,,$$

$$Z_{12} = HP_W - X_1{}^{-1} H_1 P_W - HP_W H_1{}^* X_1{}^{-1} H_1 P_W \;, \; Z_{21} = \; Z_{12}{}^* \,, Z_{22} = X_2{}^{-1}.$$

dir. Lemma 3.7 ve Lemma 3.8 den

$$F_A^* Z_{11} F_A$$

$$= F_A^*\big(I + HP_W H^* - H_1 P_W X_2{}^{-1} H^* - HX_2{}^{-1} P_W H_1{}^* - HP_W\big(I - X_2{}^{-1}\big)P_W H^*\big)F_A$$

$$= F_A^*(I + HP_W X_2{}^{-1} P_W H^*)F_A \,,$$

$$F_A^* Z_{12} F_R = F_A^*\left(HP_W - X_1 H_1 P_W - HP_W\big(I - X_2{}^{-1}\big)\right)F_R = F_A^* HP_W X_2{}^{-1} F_R \,,$$

$$F_R{}^*Z_{21}F_A = (F_A^*Z_{12}F_R)^*\ ,\ \ F_R{}^*Z_{22}F_R = F_R{}^*X_2{}^{-1}F_R.$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu nedenle $M_1^*M_1 - M_1^*M_2^+M_1$ matrisindeki $F_R{}^*Z_{22}F_R$ sağ alt bloğunun Schur complementi

$$F_A^*Z_{11}F_A - F_A^*Z_{12}F_R(F_R{}^*Z_{22}F_R)^{-1}F_R{}^*Z_{21}F_A = F_A{}^*X_3F_A$$

olacaktır. $\widetilde{M} = \begin{pmatrix} \widetilde{M}_{11} & \widetilde{M}_{12} \\ \widetilde{M}_{21} & \widetilde{M}_{22} \end{pmatrix}$ matrisi M^*M nin inversini göstersin. Banachiewicz-Schur formülü uygulanırsa

$$\widetilde{M}_{11} = F_1U_1F_1^*\ ,\ \ \widetilde{M}_{12} = -F_1U_1U_2F_2^*\ ,$$

$$\widetilde{M}_{21} = \widetilde{M}_{12}{}^*\ , \widetilde{M}_{22} = F_2(U_3 + U_2^*U_1U_2)F_2^*$$

elde edilir. Böylece

$$M^+ = \begin{pmatrix} \widetilde{M}_{11} & \widetilde{M}_{12} \\ \widetilde{M}_{21} & \widetilde{M}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1^* \\ M_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{M}_{11}M_1^* + \widetilde{M}_{12}M_2^* \\ \widetilde{M}_{21}M_1^* + \widetilde{M}_{22}M_2^* \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_1U_1U_4 - F_1U_1U_2U_5 \\ -F_2U_2^*U_1U_4 + F_2(U_3 + U_2^*U_1U_2)U_5 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu ise birinci sonucun sağlandığını gösterir.

(2) Eğer

$$N_1 = \begin{pmatrix} G_A & F_A{}^+C \\ 0 & G_R \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad N_2 = \begin{pmatrix} G_W & F_W{}^+S \\ 0 & G_E \end{pmatrix}$$

alınırsa bu takdirde

$$N_1N_1^* = \begin{pmatrix} G_A + (I + KK^*)G_A^* & G_AKG_R{}^* \\ G_RK^*G_A^* & G_RG_R{}^* \end{pmatrix},\ N_1N_2^* = \begin{pmatrix} G_AKK_1^*G_W^* & G_AKG_E{}^* \\ G_RK_1^*G_W^* & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_2N_1^* = (N_1N_2^*)^*\ ,\ \ N_2N_2^* = \begin{pmatrix} G_W(I + K_1K_1^*)G_W & G_WK_1G_E{}^* \\ G_EK_1G_W^* & G_EG_E{}^* \end{pmatrix},$$

elde edilir, burada $G_AG_W^* = 0$ ve $G_RG_E^* = 0$ eşitlikleri kullanılmıştır. Banachiewicz-Schur formülü tekrar uygulanırsa

$$(N_2N_2^*)^{-1} = \begin{pmatrix} G_W{}^{+*}Y_1{}^{-1}G_W{}^{+} & -G_W{}^{+*}Y_1{}^{-1}K_1G_E{}^{+} \\ -G_E{}^{+*}K_1^*Y_1{}^{-1}G_W{}^{+} & (G_EG_E^*)^{-1} + G_E{}^{+*}K_1^*Y_1{}^{-1}K_1G_E{}^{+} \end{pmatrix},$$

$$N_2^+ = \begin{pmatrix} W^+WY_1{}^{-1}W^+W & Y_1{}^{-1}K_1Q_E \\ Q_EK_1^*Y_1{}^{-1} & E^+E + Q_EK_1^*Y_1{}^{-1}K_1Q_E \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$\breve{N} = \begin{pmatrix} \widetilde{N}_{11} & \widetilde{N}_{12} \\ \widetilde{N}_{21} & \widetilde{N}_{22} \end{pmatrix}$ matrisi N matrisinin inversini göstersin. Bu durumda birinci kısmın ispatına benzer şekilde,

$$N_1N_1^* - N_1N_2^+N_1^* = \begin{pmatrix} G_A(I + KQ_EY_2{}^{-1}Q_EK^*)G_A^* & G_AKQ_EY_2{}^{-1}G_R{}^{*} \\ G_RY_2{}^{-1}Q_EK^*G_A^* & G_RY_2{}^{-1}G_R{}^{*} \end{pmatrix}$$

ve dolayısıyla

$$N^+ = (N_1^* \quad N_2^*)\begin{pmatrix} \widetilde{N}_{11} & \widetilde{N}_{12} \\ \widetilde{N}_{21} & \widetilde{N}_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \left(N_1^*\widetilde{N}_{11} + N_2^*\widetilde{N}_{21} + N_1^*\widetilde{N}_{12} + N_2^*\widetilde{N}_{22}\right)$$

$$= (V_4V_1G_1{}^{*} + V_5V_3V_2{}^{*}V_1G_1{}^{*}, -V_4V_1V_2V_3G_2{}^{*} + V_5(V_3 + V_3V_2{}^{*}V_1V_2V_3)G_2{}^{*})$$

elde edilir.

Teorem 3.11. $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ blok parçalı matrisinin Moore-Penrose inversi

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}^+ = (V_4 - V_5V_3V_2{}^{*})V_1\begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & R^+ \end{pmatrix}U_1(U_4 - U_2U_5)$$

$$+(V_5 + V_5V_3V_2{}^{*}V_1V_2 - V_4V_1V_2)V_3\begin{pmatrix} W^+ & 0 \\ 0 & E^+ \end{pmatrix}(U_3U_5 + U_2{}^{*}U_1U_2U_5 - U_2{}^{*}U_1U_4)$$

(3.132)

formunda ifade edilebilir.

Şimdi de Moore-Penrose inversin daha basit formlara dönüştürülebildiği bazı özel durumları tartışacağız.

$E = 0 \Leftrightarrow \Re(C) \subset \Re(A)$ ve $W = 0 \Leftrightarrow \Re(B^*) \subset \Re(A^*)$ olduğu gösterilebilir. Ayrıca, E tam sütun ranklıdır $\Leftrightarrow$ C tam sütun ranklıdır ve $\Re(A) \cap \Re(C) = \{0\}$ dir ve W tam satır ranklıdır $\Leftrightarrow$ B tam satır rankıdır ve $\Re(A^*) \cap \Re(B^*)=\{0\}$ dir.

Sonuç 3.9. Aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(1) Eğer $E = 0$ ise, bu takdirde $X = (I + HP_WP_RP_WH^*)^{-1}$ olmak üzere

$$M^+ = \begin{pmatrix} F_A^+ & 0 & 0 \\ 0 & F_R^+ & 0 \\ 0 & 0 & F_W^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & XH(I - P_WRR^+)P_W \\ -P_WH^*X & P_W - P_WH^*XH(I - P_WRR^+)P_W \\ (I - RR^+P_W)H^*X & I - RR^+P_W \end{pmatrix}$$

(3.133)

dir.

(2) Eğer W tam satır ranklı ise, bu takdirde

$$M^+ = \begin{pmatrix} F_A^+ & 0 & 0 \\ 0 & F_W^+ & 0 \\ 0 & 0 & F_E^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -H^* & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{3.134}$$

olacaktır.

(3) Eğer $W = 0$ ise, bu takdirde $Y = (I + KQ_EQ_RQ_EK^*)^{-1}$ olmak üzere

$$N^+ = \begin{pmatrix} Y & -YKQ_E & -YK \\ Q_RQ_EK^*Y & I - Q_RQ_EK^*YK & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_A^+ & 0 & 0 \\ 0 & G_R^+ & 0 \\ 0 & 0 & G_E^+ \end{pmatrix} \tag{3.135}$$

dir.

(4) Eğer E tam sütun ranklı ise, bu takdirde

$$N^+ = \begin{pmatrix} I & I & -K - K_1 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_A^+ & 0 & 0 \\ 0 & G_W^+ & 0 \\ 0 & 0 & G_E^+ \end{pmatrix} \tag{3.136}$$

olacaktır.

İspat: (1) Eğer $E = 0$ ise bu durumda $H_1 = 0$, $X_1 = I$ ve $X_2 = I$ olup $X_4 = RR^+$ ve $X_3 = I + HP_WP_RP_WH^*$ olacaktır. $X = X_3{}^{-1}$ alınırsa

$$U_1=\begin{pmatrix} X & -XHP_WRR^+ \\ -RR^+P_WH^*X & RR^++RR^+P_WH^*XHP_WRR^+\end{pmatrix},$$

$$U_2=\begin{pmatrix} H & 0 \\ I & 0\end{pmatrix},\ U_3=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix},\ U_4=\begin{pmatrix} I & H \\ 0 & I\end{pmatrix},\ U_5=\begin{pmatrix} 0 & WW^+ \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

olur. Bu nedenle

$$U_1U_4=\begin{pmatrix} X & XH(I-P_WRR^+) \\ -RR^+P_WH^*X & RR^+-RR^+P_WH^*XH(I-P_WRR^+)\end{pmatrix},$$

$$U_1U_2U_5=\begin{pmatrix} 0 & XH(I-P_WRR^+)WW^+ \\ 0 & RR^+WW^+-RR^+P_WH^*XH(I-P_WRR^+)WW^+\end{pmatrix},$$

$$U_2^*U_1U_4=\begin{pmatrix} (I-RR^+P_W)H^*X & RR^++(I-RR^+P_W)H^*XH(I-P_WRR^+) \\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$U_3U_5=\begin{pmatrix} 0 & WW^+ \\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$U_2^*U_1U_2U_5=\begin{pmatrix} 0 & RR^+WW^++(I-RR^+P_W)H^*XH(I-P_WRR^+) \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

olduğu görülür.

(2) Eğer W tam satır ranklı ise, bu durumda $P_W=0$ olup $R=0$, $X_1=I$, $X_2=I$, $X_4=0$ ve $X_3=I$ olacaktır. Böylece

$$U_1=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix}, U_2=\begin{pmatrix} H & 0 \\ I & 0\end{pmatrix},\ U_3=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix},\ U_4=\begin{pmatrix} I & H \\ 0 & I\end{pmatrix}, U_5=\begin{pmatrix} 0 & I \\ EE^+ & 0\end{pmatrix}$$

$$U_1U_4=\begin{pmatrix} I & H \\ 0 & I\end{pmatrix}, U_1U_2U_5=\begin{pmatrix} 0 & H \\ 0 & I\end{pmatrix},\ U_2^*U_1U_4=\begin{pmatrix} H^* & I+H^*H \\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$U_3U_5=\begin{pmatrix} 0 & I \\ EE^+ & 0\end{pmatrix},\ U_2^*U_1U_2U_5=\begin{pmatrix} 0 & I+H^*H \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

elde edilir.

(3) Eğer $W=0$ ise, bu takdirde $K_1=0$, $Y_1=I$, $Y_2=I$, $Y_4=RR^+$ ve $Y_3=I+I+KQ_EQ_RQ_EK^*$ olacaktır. Bu durumda $Y={Y_3}^{-1}$ alınarak

$$V_1=\begin{pmatrix} Y & -YKQ_ER^+R \\ -R^+RQ_EK^*Y & R^+R+R^+RQ_EK^*YKQ_ER^+R\end{pmatrix},$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ K^* & I \end{pmatrix}, \quad V_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^+E \end{pmatrix},$$

$$V_4V_1 = \begin{pmatrix} Y & -YKQ_ER^+R \\ K^*Y - R^+RQ_EK^*Y & R^+R - (I - R^+RQ_EK^*YKQ_ER^+R \end{pmatrix},$$

$$V_1V_2V_3 = \begin{pmatrix} 0 & YK \\ 0 & -R^+RQ_EK^*YK \end{pmatrix},$$

$$V_5V_3V_2^*V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E^+EK^*Y & -E^+EK^*YKQ_ER^+R \end{pmatrix},$$

$$V_4V_1V_2V_3 = \begin{pmatrix} 0 & YK \\ 0 & K^*YK - R^+RQ_EK^*YK \end{pmatrix},$$

$$V_5V_3V_2^*V_1V_2V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K^*YK - R^+RQ_EK^*YK \end{pmatrix}$$

elde edilir.

(4) Eğer E tam satır ranklı ise, bu takdirde $Q_E = 0$ olup $R = 0$, $X_1 = I$, $X_2 = I$, $X_4 = 0$ ve $X_3 = I$ olacaktır. Böylece

$$V_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} KK_1^* & K \\ K_1^* & 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} I & -K_1 \\ -K_1^* & I + K_1^*K_1 \end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ K^* & I \end{pmatrix}.$$

$$V_5 = \begin{pmatrix} W^+W & 0 \\ K_1^* & I \end{pmatrix}, V_4V_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ K^* & I \end{pmatrix}, \quad V_2V_3 = \begin{pmatrix} 0 & K \\ K_1^* & K_1^* - K_1^*K \end{pmatrix},$$

$$V_1V_2V_3 = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_5V_3V_2^*V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K^* & 0 \end{pmatrix}, V_4V_1V_2V_3 = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K^*K \end{pmatrix},$$

$$V_5V_3 = \begin{pmatrix} W^+W & -K_1 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad V_5V_3V_2^*V_1V_2V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K^*K \end{pmatrix}$$

olduğu görülür.

Sonuç 3.10. Eğer E ve W matrisleri tam ranklı ise, bu takdirde

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & -K - K_1 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^+ & 0 \\ 0 & E^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -H^* & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{3.137}$$

olacaktır.

İspat: Bu sonuç (3.134) ve (3.136) dan kolayca görülmektedir.

Sonuç 3.11. Eğer $E = 0$ ve $W = 0$ ise, bu takdirde

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} \tilde{Y} & -\tilde{Y}K \\ Q_S K^* \tilde{Y} & I - Q_S K^* \tilde{Y} K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & S^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X} & \tilde{X} H P_S \\ -H^* \tilde{X} & I - H^* \tilde{X} H P_S \end{pmatrix} \quad (3.138)$$

dir, burada $\tilde{X} = (I + HP_S H^*)^{-1}$ ve $\tilde{Y} = (I + KQ_S K^*)^{-1}$ dir. Özel olarak eğer, $\Re(B) \subset \Re(S)$, $\Re(C^*) \subset \Re(S^*)$ ise, bu takdirde

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} I & -K \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & S^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -H^* & I \end{pmatrix} \quad (3.140)$$

$$= \begin{pmatrix} A^+ + KS^+H^* & -KS^+ \\ -S^+H^* & S^+ \end{pmatrix} \quad (3.141)$$

olur.

İspat: Eğer $E = 0$ ve $W = 0$ ise bu takdirde $R = S$ dir. (3.134) ve (3.136) dan (3.138) in sağladığı görülür. Eğer (3.139) sağlanırsa, bu takdirde $HP_S = 0$ ve $KQ_S = 0$ olacağından $\tilde{X} = I$ ve $\tilde{Y} = I$ olacaktır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$$\begin{pmatrix} I & -HP_S \\ H^* & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{X} & \tilde{X} H P_S \\ -H^* \tilde{X} & I - H^* \tilde{X} H P_S \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I & K \\ -Q_S K^* & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{Y} & \tilde{Y} K \\ Q_S K^* \tilde{Y} & I - Q_S K^* \tilde{Y} K \end{pmatrix}$$

olduğundan (3.138) ifadesi

$$\begin{pmatrix} I & -HP_S \\ H^* & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}^{+} \begin{pmatrix} I & K \\ -Q_S K^* & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & S^+ \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. (3.141) formülü Banachiewicz-Schur formülü olarak adlandırılır. Satırları ve sütunları değiştirerek ve bloklar yeniden oluşturularak, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.12. $T = A - CD^+B$ olsun. Eğer,

$$\Re(B) \subset \Re(D), \ \Re(C^*) \subset \Re(D^*), \quad (3.143)$$

$$\Re(C) \subset \Re(T), \ \Re(B^*) \subset \Re(T^*), \quad (3.144)$$

ise, bu takdirde

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} T^{+} & -T^{+}BA^{+} \\ -D^{+}BT^{+} & D^{+} + D^{+}BT^{+}CD^{+} \end{pmatrix} \tag{3.145}$$

dir.

Şimdi mxn tipinde parçalı bir $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ matrisinin Moore-Penrose inversi için açık bir formül vereceğiz. Bu amaçla aşağıdaki bilinen gerçekleri kullanacağız:

$$A^{+} = A^{*}(AA^{*})^{+} = (A^{*}A)^{+}A^{*} ,$$

$$(AA^{*})^{+} = (A^{+})^{*}A^{+}$$

Eğer $\mathcal{N}(A)$ ile A nın sıfır uzayını gösterirsek, bu takdirde

$$\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(B) \Leftrightarrow B = BA^{+}A$$

$$\mathcal{N}(A^{*}) \subset \mathcal{N}(B^{*}) \Leftrightarrow B = AA^{+}B$$

olacaktır. Eğer $\Re(A)$ ile A nın ranj veya sütun uzayını gösterirsek, bu takdirde

$\mathcal{N}(A)$ ve $\Re(A^{*}) = \Re(A^{+})$ uzayları ortogonal complementlerdir. Eğer $E = A^{*}C + B^{*}D$ ise bu takdirde $\mathcal{N}(E) \supset \mathcal{N}(C) \supset \mathcal{N}(D)$ dir. Ayrıca eğer $A = C$ ve $B = D$ ise $\mathcal{N}(E) = \mathcal{N}(C) \cap \mathcal{N}(D)$ olacaktır.

Öncelikle aşağıdaki iki lemmayı ispatsız olarak verelim:

Lemma 3.10. Eğer M mxn matrisi $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & D \end{pmatrix}$ olarak parçalanmış ise, bu takdirde $P = BB^{*} + DD^{*}$ olmak üzere $M^{+} = \begin{pmatrix} A^{+} & B^{*}P^{+} \\ 0 & D^{*}P^{+} \end{pmatrix}$ olması için gerek ve yeter şart $AB^{*} = 0$ olmasıdır.

Lemma 3.11. Eğer M matrisi Lemma 3.10 daki gibi ise, bu takdirde $K = A^{*}A + B^{*}B$ olmak üzere $M^{+} = \begin{pmatrix} K^{+}A^{*} & K^{+}B^{*} \\ 0 & D^{+} \end{pmatrix}$, burada $K = A^{*}A + B^{*}B$ olması için gerek ve yeter şart $B^{*}D = 0$ olmasıdır.

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 3.12. $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ olsun. Bu takdirde

$$M^+ = \begin{pmatrix} K^+(A^* - EF) & K^+(B^* - EH) \\ F & H \end{pmatrix}$$

olacaktır, burada

$$K = A^*A + B^*B \ ,$$

$$E = A^*C + B^*D \ ,$$

$$R = C - AK^+E \ ,$$

$$S = D - BK^+E \ ,$$

$$L = R^*R + S^*S \ ,$$

$$T = K^+E(I - L^+L) \ ,$$

$$F = L^+R^* + (I - L^+L)(I + T^*T)^{-1}(K^+E)^*K^+(A^* - EL^+R^*) \ ,$$

$$H = L^+S^* + (I - L^+L)(I + T^*T)^{-1}(K^+E)^*K^+(B^* - EL^+S^*)$$

dir.

İspat: Eğer $UV^* = 0$ ise, bu takdirde

$$(U + V)^+ = U^+ + (I - U^+V) \times [G^+ + (I - G^+G)QV^*U^{+*}U^+(I - VG^+)],$$

$$G = V - UU^+V \ , \quad Q = [I + (I - G^+G)V^*U^{+*}U^+V(I - G^+G)]^{-1}$$

olduğu gösterilebilir. Şimdi $U = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = U + V$ ve $UV^* = 0$ olacaktır. Lemma 3.11 e göre, $K = A^*A + B^*B$ olmak üzere $U^+ = \begin{pmatrix} K^+A^* & K^+B^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ yazılabilir. Böylece $E = A^*C + B^*D$ olmak üzere $G = \begin{pmatrix} 0 & C - AK^+E \\ 0 & D - BK^+E \end{pmatrix}$ dir. Şimdi de $R = C - AK^+E$ ve $S = D - BK^+E$ olsun. Bu takdirde $G = \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & S \end{pmatrix}$ elde edilir. Dolayısıyla Lemma 3.10 ve $G^+ =$

$((G^*)^+)^*$ gerçeğinden $L = R^*R + S^*S$ olmak üzere $G^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L^+R^* & L^+S^* \end{pmatrix}$ elde edilir. Bu nedenle

$I - G^+G = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I - L^+L \end{pmatrix}$ olacaktır.

Böylece $T = K^+E(I - L^+L)$ olmak üzere

$$U^+V(I - G^+G) = \begin{pmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & (I + T^*T)^{-1} \end{pmatrix},$$

$$U^+(I - VG^+) = \begin{pmatrix} K^+(A^* - EL^+R^*) & K^+(B^* - EL^+S^*) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$G^+ + (I - G^+G)QV^*U^{+*}U^+(I - VG^+) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & H \end{pmatrix},$$

$$F = L^+R^* + (I - L^+L)(I + T^*T)^{-1}(K^+E)^*K^+(A^* - EL^+R^*) ,$$

$$H = L^+S^* + (I - L^+L)(I + T^*T)^{-1}(K^+E)^*K^+(B^* - EL^+S^*),$$

$$(I - U^+V) = \begin{pmatrix} I & -K^+E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Bu nedenle

$$(I - U^+V)[G^+ + (I - G^+G)QV^*U^{+*}U^+(I - VG^+)] = \begin{pmatrix} -K^+EF & -K^+EH \\ F & K \end{pmatrix}$$

olacaktır. Son olarak

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} K^+(A^* - EF) & K^+(B^* - EH) \\ F & H \end{pmatrix}$$

yazılabilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

$J = I + T^*T$ olsun. Bu takdirde

$$JL^+ = L^+ = L^+J \quad \text{ve} \quad J^{-1}L^+L = L^+L = L^+LJ^{-1} , \tag{3.146}$$

$$L = D^*S + C^*R , \tag{3.147}$$

$$R^*A + S^*B = 0 \ , \tag{3.148}$$

$$RF = RL^+R^*, \tag{3.149}$$

$$RH = RL^+S^*, \tag{3.150}$$

$$SF = SL^+R^*, \tag{3.151}$$

$$SH = SL^+S^*, \tag{3.152}$$

$$FA + HB = J^{-1}T^*, \tag{3.153}$$

$$FC + HD = L^+L + I - J^{-1}, \tag{3.154}$$

$$(FA + HB)^* = K^+E - K^+E(FC + HD), \tag{3.155}$$

$$J^{-1}F - L^+R^* - J^{-1}T^*K^+(A^* - EF) = 0, \tag{3.156}$$

$$J^{-1}H - L^+S^* - J^{-1}T^*K^+(B^* - EH) = 0, \tag{3.157}$$

özdeşlikleri yazılabilir. Yukarıdaki özdeşlikler aşağıdaki sıfır uzay içermelerinin sağlandığını kullanarak kolayca gösterilebilir:

$\mathcal{N}(K) \subset \mathcal{N}(A)$, $\mathcal{N}(K) \subset \mathcal{N}(B)$, $\mathcal{N}(K) \subset \mathcal{N}(E^*)$, $\mathcal{N}(L) \subset \mathcal{N}(R)$ ve $\mathcal{N}(L) \subset \mathcal{N}(S)$. Bu nedenle, (3.146) dan, F ve H

$$F = L^+R^* + (I - L^+L)(I + T^*T)^{-1}(K^+E)^*K^+(A^* - EL^+R^*) \ , \tag{3.158}$$

$$H = L^+S^* + (I - L^+L)(I + T^*T)^{-1}(K^+E)^*K^+(B^* - EL^+S^*) \tag{3.159}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca (3.146)-(3.157) özdeşlikleri kullanılarak

$$\begin{pmatrix} K^+(A^* - EF) & K^+(B^* - EH) \\ F & H \end{pmatrix}$$

matrisinin $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ matrisinin Moore-Penrose inversi olduğu görülür.

Teorem 3.12. nin şartları altında:

Sonuç 3.13. $M^+ = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$ olması için gerek ve yeter şart $F = 0$ olmasıdır. Fakat F nin tanımından $\mathcal{N}(L) \subset \mathcal{N}(R)$ olduğundan $LF = LL^+R^* = R^*$ olacaktır. Bu nedenle

$F = 0$ olması $R^* = 0$ olmasını sağlar. Böylece (3.158) den $F = 0$ olması için gerek ve yeter şartın $R^* = 0$ ve $T^*K^+A^* = 0$ olduğu görülür.

Burada belirtelim ki $F = 0$ olması $L = S^*S$ olmasını sağlar. Böylece $L^+S^* = (S^*S)^+S^* = S^+$ ve $H = S^+ + J^{-1}T^*K^+(B^* - ES^+)$ olduğu görülür.

Sonuç 3.14. $M^+ = \begin{pmatrix} K^+(A^* - EL^+R^*) & K^+(B^* - EL^+S^*) \\ L^+R^* & L^+S^* \end{pmatrix}$ olması için gerek ve yeter şart $T = 0$ olmasıdır.

İspat: Farz edelim ki $T = 0$ olsun. Bu takdirde Teorem 3.12 ve (3.158) , (3.159) özdeşliklerinden sonuç elde edilir. Şimdi farz edelim ki

$$M^+ = \begin{pmatrix} K^+(A^* - EL^+R^*) & K^+(B^* - EL^+S^*) \\ L^+R^* & L^+S^* \end{pmatrix}$$

olsun. Bu takdirde Teorem 3.12 ve (3.158) , (3.159) eşitliklerinden

$$T^*K^+(A^* - EL^+R^*) = 0 \qquad (3.160)$$

ve

$$T^*K^+(B^* - EL^+S^*) = 0 \qquad (3.161)$$

elde edilir. (3.160) ve (3.161) sırasıyla C ve D ile önden çarpıp sonuçları toplayarak (3.147) özdeşliği kullanılırsa

$$T^*K^+E(I - L^+L) = 0 \qquad (3.162)$$

elde edilir. Bu nedenle $T^*T = 0$ ve dolayısıyla $T = 0$ elde edilir ki bu da sonucun ispatını tamamlar.

Sonuç 3.15. Aşağıdaki ifadeler denktir:

$$T = 0, \qquad (3.163)$$

$$\mathcal{N}(L) \subset \mathcal{N}(E), \qquad (3.164)$$

$$\mathcal{N}(L) \subset \mathcal{N}(D) \text{ ve } \mathcal{N}(L) \subset \mathcal{N}(C). \qquad (3.165)$$

İspat: $\mathcal{N}(K)\subset\mathcal{N}(E^*)$ olduğundan T nin tanımından $T=0$ olması için gerek ve yeter şartın $\mathcal{N}(L)\subset\mathcal{N}(E)$ olduğu görülür. Şimdi (3.163) ün sağlanması için gerek ve yeter şartın (3.165) sağlanması olduğunu gösterelim. Farz edelim ki $T=0$ olsun. Bu takdirde $\mathcal{N}(L)\subset\mathcal{N}(\mathrm{R})$ olduğundan

$$\begin{aligned} C-CL^+L &= C(I-L^+L)-AT \\ &= C(I-L^+L)-AK^+E(I-L^+L) \\ &= (C-AK^+E)(I-L^+L)=R-RL^+L=0 \end{aligned}$$

ve benzer şekilde $\mathcal{N}(L)\subset\mathcal{N}(S)$ olduğundan

$$D-DL^+L=D(I-L^+L)-BT=S-SL^+L=0$$

elde edilir. Öte yandan $D=DL^+L$ ve $C=CL^+L$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$T=K^+E(I-L^+L)=K^+(A^*C+B^*D)(I-L^+L)=0$$

olacaktır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.16. $M^+=\begin{pmatrix} K^+A^* & K^+B^* \\ L^+C^* & L^+D^* \end{pmatrix} \Leftrightarrow E=0$ dir.

İspat: Farz edelim ki $E=0$ olsun. Yukarıdaki teoremden istenilen sonuç elde edilir. Şimdi farz edelim ki $M^+=\begin{pmatrix} K^+A^* & K^+B^* \\ L^+C^* & L^+D^* \end{pmatrix}$ olsun. Bu takdirde yukarıdaki teorem ve R ve S nin tanımından

$$L^+E^*K^+A^*-J^{-1}T^*K^+(A^*-EL^+R^*)=0, \tag{3.166}$$

$$L^+E^*K^+B^*-J^{-1}T^*K^+(B^*-EL^+S^*)=0, \tag{3.167}$$

elde edilir. (3.166) ve (3.167) eşitlikleri önden L^+L ile çarpılıp (3.146) eşitliği kullanılırsa

$$L^+E^*K^+A^*=0\,, \tag{3.168}$$

$$L^+E^*K^+B^*=0. \tag{3.169}$$

elde edilir. (3.168) ve (3.169) sırasıyla A ve B ile sağdan çarpılıp taraf tarafa toplanırsa $L^{+}E^{*}K^{+}K = 0$ olduğu görülür. Böylece $\mathcal{N}(K) \subset \mathcal{N}(E^{*})$ olduğundan

$$EL^{+} = 0 \tag{3.170}$$

olduğu görülür. Buradan

$$K^{+}EF = 0 \tag{3.171}$$

$$K^{+}EH = 0 \tag{3.172}$$

ve dolayısıyla da

$$K^{+}EJ^{-1}T^{*}K^{+}A^{*} = 0, \tag{3.173}$$

$$K^{+}EJ^{-1}T^{*}K^{+}B^{*} = 0 \tag{3.174}$$

olacaktır. (3.173) ve (3.174) sırasıyla A ve B ile sağdan çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$K^{+}EJ^{-1}T^{*} = 0 \tag{3.175}$$

elde edilir. Öte yandan

$$T = K^{+}E \tag{3.176}$$

olacaktır. (3.175) ten $J^{-1}T^{*}T = I - J^{-1}$ eşitliği $K^{+}E(I - J^{-1}) = 0$ eşitliğini sağlar. Bu nedenle

$$K^{+}E = K^{+}EJ^{-1} \tag{3.177}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (3.175) ,(3.176) ve (3.177) den $(K^{+}E)(K^{+}E)^{*} = 0$ elde edilir ki bu da $K^{+}E = 0$ ve $E = 0$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.17. $M^{+} = \begin{pmatrix} K^{+}(A^{*} - EJ^{-1}T^{*}K^{+}A^{*}) & K^{+}(B^{*} - EJ^{-1}T^{*}K^{+}B^{*}) \\ J^{-1}T^{*}K^{+}A^{*} & J^{-1}T^{*}K^{+}B^{*} \end{pmatrix} \Leftrightarrow L = 0.$

İspat: Farz edelim ki $L = 0$ olsun. Bu takdirde $L^{+} = 0$ dir. Böylece teorem 3.12 den sonuç elde edilir. Şimdi de farz edelim ki M^{+} sonuçta verilen formda olsun. Bu takdirde teorem 3.12 den

$$JL^{+}R^{*} = T^{*}K^{+}EL^{+}R^{*}, \tag{3.178}$$

$$JL^{+}S^{*} = T^{*}K^{+}EL^{+}S^{*} \tag{3.179}$$

olduğu görülür. Şimdi $TL^{+} = 0$ olsun. L nin tanımından $RT^{*} = 0$ ve $ST^{*} = 0$ elde edilir. Böylece (3.178) ve (3.179) nın her ikisi de soldan R ve S ile çarpılıp (3.146) özdeşliği kullanılırsa

$$RL^{+}R^{*} = 0,\ SL^{+}R^{*} = 0, \tag{3.180}$$

$$RL^{+}S^{*} = 0, SL^{+}S^{*} = 0 \tag{3.181}$$

elde edilir. Sonuç olarak $L = LL^{+}L = (R^{*}R + S^{*}S)L^{+}(R^{*}R + S^{*}S) = 0$ olduğu görülür ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.18. $M^{+} = \begin{pmatrix} K^{+}(A^{*} - EJ^{-1}T^{*}K^{+}A^{*}) & K^{+}(B^{*} - EJ^{-1}T^{*}K^{+}B^{*}) \\ L^{+}C^{*} + J^{-1}T^{*}K^{+}A^{*} & L^{+}D^{*} + J^{-1}T^{*}K^{+}B^{*} \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow S = DL^{+}L \text{ ve } R = CL^{+}L.$$

İspat: Farz edelim ki $S = DL^{+}L$ ve $R = CL^{+}L$ olsun. Bu takdirde $SL^{+}L = DL^{+}L$ ve $RL^{+}L = CL^{+}L$ dir. Böylece R ve S nin tanımından

$$AK^{+}EL^{+}L = 0, \tag{3.182}$$

$$BK^{+}EL^{+}L = 0 \tag{3.183}$$

elde edilir. (3.182) ve (3.183) sırasıyla A^{*} ve B^{*} ile soldan çarpılıp toplanırsa $EL^{+}L = 0$ elde edilir. Böylece $EL^{+} = 0$ olup sonuç elde edilir. Şimdi de M^{+} nın sonuçta verildiği gibi olduğunu varsayalım. Bu takdirde teoremden

$$L^{+}C^{*} = L^{+}R^{*} - J^{-1}T^{*}K^{+}EL^{+}R^{*}, \tag{3.184}$$

$$L^{+}D^{*} = L^{+}S^{*} - J^{-1}T^{*}K^{+}EL^{+}S^{*} \tag{3.185}$$

yazılabilir. (3.146) ya göre (3.184) ve (3.185) soldan L ile çarpılırsa

$$LL^{+}C^{*} = R^{*}, \tag{3.186}$$

$$LL^{+}D^{*} = S^{*}, \tag{3.187}$$

elde edilir. $LT^{*} = 0$ olduğundan $\mathcal{N}(L) \subset \mathcal{N}(R)$ ve $\mathcal{N}(L) \subset \mathcal{N}(S)$ olacaktır. Bu nedenle $R = CL^{+}L$ ve $S = DL^{+}L$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.19. $M^{+} = \begin{pmatrix} A^{+} + A^{+}CHBA^{+} & -A^{+}CH \\ -HBA^{+} & H \end{pmatrix}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(B), \\ &\mathcal{N}(A^{*}) \subset \mathcal{N}(C^{*}), \\ &\mathcal{N}(H) \subset \mathcal{N}(B^{*}), \\ &\mathcal{N}(H^{+}) \subset \mathcal{N}(C) \text{ ve } H = (D - BA^{+}C)^{+} \end{aligned} \tag{N_1}$$

olmasıdır.

İspat: Farz edelim ki M^{+} sonuçta verildiği gibi olsun. Bu takdirde teoreme göre

$$K^{+}A^{*} - K^{+}EF = A^{+} + A^{+}CHBA^{+} \ , \tag{3.188}$$

$$K^{+}B^{*} - K^{+}EH = -A^{+}CH, \tag{3.189}$$

$$F = -HBA^{+} \tag{3.190}$$

yazılabilir. Şimdi (3.189) K ile soldan çarpılır ve $\mathcal{N}(K) \subset \mathcal{N}(B)$ ve $\mathcal{N}(K) \subset \mathcal{N}(E^{*})$ gerçeği kullanılırsa

$$B^{*} = (E - KA^{+}C)H \tag{3.191}$$

olduğu görülür. Bu durumda $\mathcal{N}(H) \subset \mathcal{N}(B^{*})$ dir. F nin tanımından $LF = R^{*}$ elde edilir. Böylece

$$C^{*} = E^{*}K^{+}A^{*} - LHBA^{+} \tag{3.192}$$

dir. Bu nedenle $A^{*}X = 0$ eşitliği $A^{+}X = 0$ eşitliğini sağladığından $\mathcal{N}(A^{*}) \subset \mathcal{N}(C^{*})$ olacaktır. Şimdi $H = (D - BA^{+}C)^{+}$ olduğunu gösterelim. H ın tanımından $LH = S^{*}$

elde edilir. Böylece $D^* = LH + E^*K^+B^*$ olur. Öte yandan $\mathcal{N}(H) \subset \mathcal{N}(B^*)$ olduğundan $\mathcal{N}(H) \subset \mathcal{N}(D^*)$ dir. Dolayısıyla

$$[\mathrm{H} - (\mathrm{D} - \mathrm{B}A^+C)]^* = H(D - BA^+C) \tag{3.193}$$

elde edilir. Buradan da

$$(D - BA^+C)H = SL^+S^* + \mathrm{B}K^+B^* \tag{3.194}$$

$$[(D - BA^+C)H]^* = (D - BA^+C)H$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$H(D - BA^+C)H = (L^+L + I - J^{-1})H$$

$$= H + J^{-1}T^*A^+CH = H + H(B - BA^+A)A^+CH = H \tag{3.195}$$

olduğu görülür. Öte yandan

$$(D - BA^+C)H(D - BA^+C) = (SL^+S^* + BK^+B^*)(D - BA^+C)$$

eşitliğinden

$$(D - BA^+C)H(D - BA^+C)$$

$$= SL^+(L - R^*C) - SL^+(-R^*A)A^+C + BK^+B^*D - BK^+(K - A^*A)A^+C$$

$$= S + BK^+E - BA^+C = D - BA^+C, \tag{3.196}$$

elde edilir. (3.147), (3.148) ve sonuçta daha önce ispatlananlardan $\mathcal{N}(A^*) \subset \mathcal{N}(C^*)$ elde edilir. (3.193), (3.194), (3.195) ve (3.196) dan, $H^+ = (D - BA^+C)$ elde edilir. Bu nedenle $H = (D - BA^+C)^+$ olur. Buradan $[K^+E - K^+E(FC + HD)]^* = FA + HB$ ve böylece $(K^+E - K^+EHH^+)^* = H(B - BA^+A)$ olduğu görülür. Bu eşitliği H^* ile soldan çarparak $H^*H(B - BA^+A) = 0$ elde edilir. Bu ise $H^+H(B - BA^+A) = 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $B - BA^+A = 0$ dir. $\mathcal{N}(H^{*+}) = \mathcal{N}(H) \subset \mathcal{N}(B^*)$ olduğundan $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(B)$ olacaktır. Bu nedenle

$$FA + HB = 0, \tag{3.197}$$

olacaktır. Bunun sonucu olarak $K^+E - K^+EFC - K^+EHD = 0$ ve dolayısıyla da $A^+C + A^+CHBA^+C - A^+CHD = 0$ olup $A^+C = A^+CHH^+$ elde edilir. Bu son eşitliği A ile soldan çarparak $C = CHH^+$ olduğu görülür. $\mathcal{N}(A^*) \subset \mathcal{N}(C^*)$ olduğundan bu $\mathcal{N}(H^+) \subset \mathcal{N}(C)$ olduğunu gösterir ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.20. $M^+ = \begin{pmatrix} -B^+DF & B^+ + B^+DFAB^+ \\ F & -FAB^+ \end{pmatrix}$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}(B) \subset \mathcal{N}(A), \\ &\mathcal{N}(B^*) \subset \mathcal{N}(C^*), \qquad (N_2) \\ &\mathcal{N}(F) \subset \mathcal{N}(A^*), \\ &\mathcal{N}(F^+) \subset \mathcal{N}(D) \text{ ve } F = (C - AB^+D)^+ \end{aligned}$$

olmasıdır.

Sonuç 3.21. $M^+ = \begin{pmatrix} F & -FCD^+ \\ -D^+BF & D^+ + D^+BFCD^+ \end{pmatrix}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}(D) \subset \mathcal{N}(C), \\ &\mathcal{N}(D^*) \subset \mathcal{N}(B^*), \qquad (N_3) \\ &\mathcal{N}(F) \subset \mathcal{N}(C^*), \\ &\mathcal{N}(F^+) \subset \mathcal{N}(B) \text{ ve } F = (A - CD^+B)^+ \end{aligned}$$

olmasıdır.

Sonuç 3.22. $M^+ = \begin{pmatrix} -HDC^+ & H \\ C^+ + C^+AHDC^+ & -C^+AH \end{pmatrix}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}(C) \subset \mathcal{N}(D), \\ &\mathcal{N}(C^*) \subset \mathcal{N}(A^*), \qquad (N_4) \\ &\mathcal{N}(H) \subset \mathcal{N}(D^*), \end{aligned}$$

$$\mathcal{N}(H^+)\subset\mathcal{N}(A) \text{ ve } H = (B - DC^+A)^+$$

olmasıdır.

Sonuç 3.20, 3.21 ve 3.22 sonuçlarının ispatları Sonuç 3.19 dan U ve V uygun boyutlu üniter matrisler olmak üzere eğer $P = UMV$ ise, bu takdirde $P^+ = V^*M^+U^*$ olacaktır. Örneğin Sonuç 3.22 ye uygun olarak $U = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ ve $V = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ matrislerini $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ matrisi ile uyumlu olarak parçalayalım. Bu takdirde $P = UMV = \begin{pmatrix} D & B \\ C & A \end{pmatrix}$ olup Sonuç 3.20 den P^+ kolayca belirlenebilir. Bu takdirde $M^+ = VP^+U$ olup blokların uygun bir parçalanışı alınarak Sonuç 3.22 elde edilir.

Örnek 3.4. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin Moore-Penrose inversini hesaplayalım.

İlk olarak $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ parçalanışını yapalım. Son Teoremi uygulamak için

$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $R = 0_{2X2}$, $S = 0_{1X2}$ ve $L = 0_{2X2}$

alalım. $L = 0_{2X2}$ olduğundan Sonuç 3.18 i uygulayabiliriz. Sonuç 3.18 in notasyonunu kullanarak $T = K^+E = C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ alınabilir. Sonuç olarak basit bir hesaplamayla

$$M^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

olduğu görülür.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında kare olmayan ya da kare olduğu halde bilinen anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve lineer denklem sistemlerinin genel durumda çözümünde kullanılan ve bilinen anlamdaki invers özelliklerini de sağlayan genelleştirilmiş invers adı verilen bir kavram ele alınmıştır. Bu amaçla bir matrisin genelleştirilmiş inversi, yansımalı genelleştirilmiş inversi ve Moore-Penrose tipi genelleştirilmiş inversi tanımları verilerek bu inverslerin çeşitli özellikleri ortaya konulmuştur. Herhangi bir matrisi $2x2$ tipinde blok matrise parçalayarak çeşitli durumlarda bu matrislerin Moore-Penrose tipi genelleştirilmiş inversleri için bazı gösterimler verilerek bu tipten inversleri hesaplamada kullanılan bazı yöntemler ortaya konulmuştur. Bununla ilgili olarak, $2x2$ tipinde blok matrislerin Moore–Penrose inversleri için genel ifadeler verilmiş ve Schur Complement içeren blok matrislerin Moore-Penrose inversleri için bazı ifadeler elde edilmiştir. Ayrıca parçalı nonnegatif definit bir matrisin Moore-Penrose inversini bulma yöntemleri tartışılmış ve $2x2$ tipindeki blok matrislerin Moore-Penrose inversi için yeni gösterimler sunulmuştur.

Yapılan bu çalışmalara ilaveten blokların değişik özelliklerine göre parçalanmış matrislerin Moore-Penrose tipi genelleştirilmiş inversleri için hesaplama yöntemleri geliştirilebilir. Ayrıca bu tip inverslerin hesaplanmasında kullanılmak üzere çeşitli bilgisayar programları veya algoritmalar türetilerek bu programlardan veya algoritmalardan faydalanılabilir. Elde edilen bu tip genelleştirilmiş inversler çeşitli tiplerden lineer denklem sistemlerinin çözümlerine uygulanabilir.

5. KAYNAKLAR

Albert, A., 1969. Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudo inverses, SIAM Journal of Applied Mathematics, 17: 434-440.

Baksalary, J.K., 1984. A study of the equivalence between a Gauss-Markoff model and its augmentation by nuisance parameters, Math Operationsforsch. u. Statist., Ser. Statist, 15: 3-35.

Baksalary, J. K., Styan, G. P. H., 2002. Generalized inverses of partitioned matrices in Banachiewicz-Schur form, Linear Algebra and its Appl, 354: 41-47.

Baksalary, K.J., Baksalary, O. M., 2007. Particular formula for the Moore-Penrose inverse of a coloumnwise partitioned matrix, Linear Algebra and its Appl., 421: 16-23.

Ben-Israel, A., Charnes, A., 1963. Contributions to the theory of generalized inverses. SIAM J. Appl. Math., 11: 667-699.

Ben-Israel, A., Greville T. N. E., 1974. Generalized Inverses: Theory and Applications, Wiley-Interscience, New York.

Bhimasankaram, P., Mitra, S. K., 1969. On a theorem of Rao on g-inverses of matrices Sankhya Ser. A, 31: 365-368.

Burns, F., Carlson D., Haynsworth E., and Markham T., 1974. Generalized inverse formulas using the Schur-complement, SIAM J. Appl. Math., 26: 254-259.

Boullion, L. Thomas and Odell L. Patrick, 1971. Generalized İnverse Matrices, Wiley-Interscience, New York.

Branson, R., 1999. Matris işlemleri, Schaum Serisi. (Editor: H. Hilmi Hacısalihoğlu) Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, s: 212.

Castro-Gonzalez, N., Martinez-Serrano M. F., Robles J., 2015. Expressions for the Moore-Penrose inverse a block matrices involving the Schur complement, Linear Algebra and its Applications, 471: 353-368.

Cegielski, A., 2001. Obtuse cones and Gram matrices with non-negative inverse, Linear Algebra Appl., 335: 167-181.

Chipman, J. S., Rao, M. M., 1964. Projections, generalized inverses and quadratic forms. J. Math. Anal. Appl., 9: 1-11.

Chipman, J. S., 1968. Specification problems in regression analysis, Theory and Application of Generalized Inverses and Matrices, Symposium Proceedings, Texas Technological College Mathematics Series, 4: 114-176.

Cline, R.E., 1965. Representations of the generalized inverse of sums of matrices, SIAM J. Numer. Anal., Ser. B, 2: 99-114.

Greville, T. N. E., 1959. The pseudo-inverse of a rectangular matrix and its application to the solution of systems of linear equations, SIAM Rev., 1: 38-43.

Grob Jürgen, 2000. The Moore-Penrose inverse of a partitioned nonnegative definite matrix, Linear Algebra and its Applications, 321: 113-121.

Hacısalihoğlu, H.H., 1977. Lineer Cebir, Matbaa Teknisyenleri Koll. Şti., İstanbul, s: 716.

Hall, F.J., Hartwig R., 1976. Further results on generalized inverses of partitioned matrices, SIAM J. Appl. Math., 30 (4): 617-624.

Hall, F.J., 1979. The Moore-Penrose inverse of particular bordered matrices, J. Austral. Math. Soc., Ser A, 27: 467-478.

Hartwig, R.E., 1976. Block generalized inverses, Arch. Rational Mech. Anal., 61:197-251.

Hartwig, R.E., 1976. Singular value decomposition and the Moore-Penrose inverses of bordered matrices, SIAM J. Math. Appl., 31: 31-41.

Harville, D.A., 1997. Matrix Algebra From a Statistician's Perspective, Springer, New York.

Hung, C.H., Markham, T.L., 1975. The Moore-Penrose inverces of a partitioned matrix $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$. Czechoslavak Math. Journal, 25, 3: 354-361.

Hung, C.H., Markham, T.L., 1975. The Moore-Penrose inverces of a partitioned matrix $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$. Linear Algebra and its Applications, 11: 73-86.

Lancaster, P., 1969. Theory of Matrices, Academic Pres, New York, s: 570.

Marsaglia, G., Styan, G. P. H., 1974. Rank Conditions for Generalized Inverses of Partitioned Matrices. Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series A 36, No. 4, s: 437- 442.

Meyer, C.D., 1972. The Moore-Penrose inverse of a bordered matrix, Linear Algebra Appl., 5: 375-382.

Meyer, C.D., 1973. Generalized inverses and ranks of block matrices, SIAM J. Appl. Math., 25: 597-602.

Miao, Jian-Ming, 1991. General Expressions for the Moore-Penrose inverse of a $2x2$ block matrix, Linear Algebra and its applications, 151: 1-15.

Miao, J.M., An algorithm for computing the weighted Moore-Penrose inverse for a partitioned matrix, J. Comput. Math., to appear.

Milliken, G.A., Akdeniz F., 1977. A theorem on the difference of the generalized inverses of two nonnegative definite matrices, Communications in Statistics Theory and Methods, 6 : 73-79.

Mitra, S. K., 1968. On a generalized inverse of a matrix and applications, Sankhya Ser. A, 30: 107-114.

Mitra, S. K., 1968. A new class of g-inverse of square matrices, Sankhya Ser. A, 30: 323-330.

Noble, B., 1966. A method for computing the generalized inverse of a matrix, SIAM J. Numer. Anal, 3: 582-584.

Noble, B., 1969. Applied Linear Algebra, Prentice-Hall, New Jersey.

Ouellette, D.V., 1981. Schur complements and statistics, Linear Algebra and Its Applications, 36: 187-295.

Penrose, R., 1955. A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Philos. Soc., 51: 406-413.

Pringle, R.M., Rayner A.A., 1970. Expressions for generalized inverses of a bordered matrix with application to the theory of constrained linear models, SIAM Rev., 12: 107-115.

Pringle, R.M., Rayner A.A., 1971. Generalized Inverse Matrices, Griffin, London.

Radhakrishna, Rao, C., 1962. A note on a generalized inverse of a matrix with applications to problems in mathematical statistics, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B., 24: 152-158.

Radhakrishna, Rao, C., 1965. Linear Statistical Inference and its Applications, New York, Wiley.

Radhakrishna, Rao, C., 1966. Generalized inverse for matrices and its applications in mathematical statistics, Research papers in Statistics, Festschrift for J. Neyman, New York, Wiley.

Radhakrishna, Rao, C., 1967. Calculus of generalized inverse of matrices. Part 1: General theory, Sankhya Ser. A, 29: 317-342.

Radhakrishna, Rao. C., Mitra, S.K., 1971. Generalized inverse if matrices and its Applications, Wiley, New York.

Robert, P., 1968. On the group inverse of a linear transformation, J. Math. Appl., 22: 658-699.

Rohde, C.A., 1965. Generalized inverses of partitioned matrices, SIAM J. Math. Appl., 13: 1033-1035.

Tewarson, R.P., 1967. A direct method for generalized matrix inversion, SIAM J. Numer. Anal., 4: 499-507.

Tian, Y., 1998. The Moore-Penrose inverses of mxn block matrices and their applications, Linear Algebra Appl., 283: 35-60.

Tian, Y., Takane, Y., 2009. More on generalized inverces of partitioned matrices with Banachiewicz-Schur forms, Linear Algebra Appl., 430: 1641-1655.

Tian, Y., Styan G. P. H., 2009. On some matrix equalities for generalized inverses with applications, Linear Algebra and its Appl., 430: 2716-2733.

Tseng, Y. Y., 1949. Generalized inverses of unbounded operators between two unitary spaces, Dokl. Akad. Nauk. SSSR., 67: 431-434.

Tseng, Y. Y., 1949. Properties and classifications of generalized inverses of closed operators, Dokl. Akad. Nauk. SSSR., 67: 607-610.

Wang, G., Chen Y., 1986. A recursive algorithm for computing the weighted Moore-Penrose inverse $A^{+}_{M,N}$, J. Comput. Math., 4: 74-85.

Yan, Zi-Zong, 2014. New representations of the Moore-Penrose inverse of $2x2$ block matrices, Linear Algebra and its Applications, 456: 3-15.

Zlobec, S., 1970. An explicit form the Moore-Penrose inverse of an arbitrary complex matrix, SIAM Rev., 12: 132-134.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Tuğçe TOPAL

Doğum Yeri **:** ORDU

Doğum Tarihi **:** 06.03.1992

Yabancı Dili **:** İngilizce

E-mail **:** tugce.topal71@gmail.com

İletişim Bilgileri **:** 05072360910

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/ Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik	Selçuk Üniversitesi	2013
Lisans	İşletme	Anadolu Üniversitesi	2014