T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU BİR ARALIKTA TANIMLI SÜREKLİ RASGELE DEĞİŞKENİN MOMENTLERİ İÇİN EŞİTSİZLİKLER

Büşra Nur KURŞUN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2016

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Büşra Nur KURŞUN tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Selahattin MADEN danışmanlığında yürütülen "Sonlu Bir Aralıkta Tanımlı Sürekli Rastgele Değişkenin Momentleri İçin Eşitsizlikler" adlı bu tez, jürimiz tarafından 11/ 05/ 2016 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman	:	Doç. Dr. Selahattin MADEN	
Başkan	:	Doç. Dr. İmdat İŞCAN Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Erhan SET Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 13../05./2016 tarih ve 2016.../.328 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

09./09./2016..

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Kürşat KORKMAZ

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza:

Büşra Nur KURŞUN

B.NUR

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirimlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

SONLU BİR ARALIKTA TANIMLI SÜREKLİ RASGELE DEĞİŞKENİN MOMENTLERİ İÇİN EŞİTSİZLİKLER

Büşra Nur KURŞUN

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2016
Yüksek Lisans Tezi, 108 sayfa

Danışman: Doç.Dr.Selahattin MADEN

Bu tezin amacı olasılık yoğunluk fonksiyonu sonlu bir aralıkta tanımlanan sürekli bir rasgele değişkenin momentleri için bazı eşitsizlikler ortaya koymaktır.

Tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde olasılık teorisinin tarihsel gelişimi ile ilgili bir giriş yapılmıştır. İkinci bölümde çalışmamızda temel olan olasılık teorisi ve eşitsizliklerle ilgili bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde sonlu bir aralık üzerinde tanımlanmış sürekli bir rasgele değişkenin beklenen değer, varyans, dağılım fonksiyonu ve yüksek mertebeden momentleri ile ilgili bazı eşitisizlikler elde edilmiştir. Dördüncü bölümde sonuç ve tartışmalar verilmiştir. Beşinci bölümde ise çalışmada kullanılan kaynaklar listelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Olasılık Uzayı, Rasgele Değişken, Beklenen Değer, Varyans, Standart Sapma, Eşitsizlik, Moment

ABSTRACT

INEQUALITIES INVOLVING MOMENTS OF A CONTINUOUS RANDOM VARIABLE DEFINED OVER A FINITE INTERVAL

Büşra Nur KURŞUN

Ordu University
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2016
MSc. Thesis, 108 page

Supervisor: Doç.Dr.Selahattin MADEN

The aim of the present thesis is the investipote some inequalities for the moments of a continuous random variable whose probobilitiy density function defined over a finite interval.

This thesis comist of five main chapters. In chapter 1 it is given an introduction concerning with the historical develop ments of probobility theory. In chater 2, some definitions and theorems on probobility theory and inequaities which are crucial for our study are expressed. In chapter 3, it is obtaired some inequalities for the expectation, variance, standart deviation, distribution function and the moments of higher order of a continuous random variable defined over a finite interval. Conclusion and success are given in fourth chapter. It is listed some used references in fifth chapter.

Keywords: Probobility Space, Random Variable, Expectation, Variance, Standart Deviation, Inequality, Moment

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam Sayın Doç. Dr. Selahattin MADEN' e en samimi duygularım ile teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen Matematik Bölümü öğretim üyelerine en içten şükranlarımı sunuyorum.

Çalışmam boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen babama, anneme ve kardeşime teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

X	:	Rasgele değişken
E	:	Evrensel küme
Ω	:	Örnek uzay
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$V(X)$	:	X' in varyansı
M_k	:	X' in beklenen değere göre k-ıncı momenti
$\Gamma(x)$	:	Gamma fonksiyonu
$\beta(x)$	:	Beta fonksiyonu
f	:	Olasılık yoğunluk fonksiyonu
F	:	Dağılım fonksiyonu
$\|\|.\|\|_p$	:	Lebesque normu
$\widetilde{B}$	:	Yarı tamamlanmamış Euler Beta fonksiyonu

1. GİRİŞ

Bilim dünyasında teoriler, bu dünyaya özgü aksiyomlar üzerine inşa olunurlar. Teorik sonuçlar, bu aksiyomlardan didaktif mantık yoluyla süzülüp çıkartılırlar. Bilim dünyasının teorileri ve ürünleri, gerçek dünyanın gerçekleri ile uyum içerisinde olmalarını sağlayacak şekilde biçimlendirilmiş olmalarına rağmen gerçeğin kendisi değildirler; nice varsayımın iklimlendirdiği bir ortamda boy atmış varlıklardır. Örneğin, yerden d kadar yüksekte bulunan bir cismin $t = \sqrt{2d}/g$ saniye içerisinde yere düşeceğini ifade eden yasa, ancak ve ancak söz konusu cismin, havası boşaltılmış bir tüp içerisinde düşme hareketini gerçekleştirmesi durumunda geçerlidir. Bu tip olaylara ve yasalara deterministik olaylar ve yasalar diyoruz. Aynı koşullar altında tekrarlandıklarında aynı sonuçları verdiklerini, vereceklerini biliyoruz.

Oysa bazı olaylar için bu tür bir determinizm söz konusu olmayabilir. Düzgün bir zarı aynı koşullar altında atmamız halinde, gelen yüzlerin hep aynı olmadığını görürüz. Aynı durum, iyi karıştırılmış bir deste kart içerisinden rastgele çekilen bir kart için de geçerlidir. Karar vermekte acele etmek, bu tür olayların matematiksel modellerini kurmanın mümkün olmayacağı sanısına kapılmak doğru olmaz. Düzgün bir zarı bir kez değilde söz gelimi 600 kez atarsak hemen her yüzün eşit sayılabilecek sayıda geldiğini görürüz. Bu atışların sayısını daha da yükseltirsek savımızın yasa mertebesine yükseldiğine şahit oluruz ve bu tür rastgele olayların da gerisinde yatan istatistiki bir düzenliliğin mevcut bulunduğunu kabule mecbur kalırız. Bir deney aynı şartlar altında bir çok kez tekrar edildiğinde sonuçlar belli bir kurala bağlı olmaksızın her kez değişebiliyorsa, bu deneyin belirli bir sonucuna bağımlı olarak gerçekleşen (ya da gerçekleşmeyen) bir olaya rastgele olay denmektedir. Rastgele olaylara etki eden nedenlerin çokluğu ve karmaşıklığı bunların incelenmesi için özel metodları gerekli kılmıştır. Pratikte deneyler göstermiştir ki, bir rastgele olayın gerçekleşmesi ya da gerçekleşmemesi pek çok sayıda gözlemlendiğinde, az çok bir kararlılık göstermektedir. Yani tek başına bir rastgele olayın karmaşıklığına karşılık, bunların cümlesi için geçerli basit bir kanun elde edilebilmektedir.

Onyedinci yüzyılda doğan olasılık teorisi, rastgele olayların ve raslantı değişkenlerinin çizdiği çerçeveyi kendisine konu edinmiştir. Bu nedenle olasılık teorisi, rastgele olaylara egemen olan kanunları matematiksel metodlarla inceleyen bir bilimdir. Talih değişmelerine bağlı hemen hemen bütün gözlemleri, bu talih değişmelerinin doğal özelliklerini incelemek olasılık kuramıdır. Talih kavramları ve onunla birlikte "Talih" tarih öncesine kadar gider, ancak bunların matematiksel incelenmesi 300 yıl eskiye dayanır. Olasılık hesabı başlangıçta talih oyunları ya da kumar oyunları ile canlandırıldı. Bir çift zarı 24 kez atıp en az bir kez düşeş getirme olasılığının, 4 zari bir kez atıp en az bir şeş getirmenin olasılığına eşit olacağını düşünen Chevalier de Mere adlı kumarbaz, kumar masalarında harcadığı ömründen edindiği deneyiminin bu düşüncesini doğrulamadığını görür ve derdine deva olur umudu ile dönemin ünlü matematikçilerinden Blaise Pascal' a başvurur. Pascal (1623-1662) ve Pierre Fermat' ın (1601-1665) ortak çalışmaları, bir yandan de Mere' nin derdine deva olurken öte yandan da olasılık teorisinin doğmasına neden olmuştur.

Onyedinci asrın geri kalan kısmında, de Mere tarafından gündeme getirilen benzer nitelikteki problemler ve benzerleri tartışılmış ancak ne genel bir çerçeve ne de teorik bir taban oluşturulmamıştır.

Onsekizinci asrın hemen başlarında Jakob Bernoulli (1654-1705) ve Abraham de Moivre' ın (1667-1754) çalışmaları olasılık hesabı teorisinin başlamasını sağlamıştır. Bernoulli, ölümünden sonra 1713 de yayınlanan Ars Conectandi (The Art of Conjecture) adlı kitabında, önemli diğer çalışmalarının yanı sıra, adıyla anılan ve olasılığı, belirli bir disiplin olma seviyesine yükselten teoremi, bilim dünyasının hizmetine sunmuştur. Olasılık teorisinin temel kanunlarından biri olan "Büyük Sayılar Kanunu" nu ilk defa J.Bernoulli ispat etmiştir ve ilk kez bir olayın olasılığını, bu olayın frekansının limiti olarak tanımlanmıştır. De Moivre (1667-1754), 1718 yılında The Doctrine of Chances adlı kitabını yayınlayarak olasılık teorisine çarpım kuralını hediye etmiş ve normal olasılık yoğunluk fonksiyonunun oluşumuna ilk katkıyı yapmıştır.

Laplace (1749-1891), Gauss (1777-1855), Markow(1856-1922), Tchebychev(1821-1891) olasılık teorisinin gelişimine hız kazandırmışlardır. Olasılık teorisinin temel taşlarından biri olan "Merkezi Limit Teoremi" (Moivre-Laplace Teoremi) ilk kez Laplace tarafından ispat edilmiş ve birçok dikkate değer uygulamaları yapılmıştır. Quetelet ve arkadaşları, Maxwell, Boltzman ve Gibbs çalışmalarında olasılık teorisinden şans oyunlarında, fizik ve astronomi sahalarında, sigortacılıkta, özellikle de ölüm istatistiklerinin oluşturulmasında, istatiksel mekanikte bol miktarda yararlanmışlardır.

Olasılık teorisinde stokastik kavramı ilk kez bu teorinin kurucularından olan J.Bernovilli (1654-1705) tarafından kullanılmaya başlanmıştır. Sonra bu kavram bir süre unutulmuş olmasına rağmen ünlü olasılıkçı V.Bortkiyeviç (1868-1913) in büyük katkısıyla yirminci asrın başlarında yeniden kullanılmaya başlanmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Bazı Temel Olasılık Kavramları

Bu kısımda tezin hazırlanmasında kullanılan bazı temel kavramları ve teoremleri vereceğiz. Verilecek olan teoremlerin ispatlarını olasılık teorisi ve eşitsizliklerle ilgili kaynaklarda kolayca bulmak mümkün olduğundan ve araştırmacıların bunların büyük bir kısmını bildiğini varsaydığımızdan dolayı ispatlara bu kısımda girilmeyecektir. Ancak yine de tezi inceleyip faydalanmak isteyenlerin kolayca ulaşabilmesi için verilen teoremler kaynaklar gösterilerek ifade edilecektir.

Olasılık teorisinin en temel kavramı olaylardır. Olay ise bir deneyin mümkün sonuçlarının bir kümesidir. Bu nedenle olasılık teorisinin temel kavramlarını tartışabilmek için küme teorisinin kavramlarının iyi bilinmesi gerekmektedir. Küme kavramı XIX. yüzyılın ikinci yarısında İngiliz matematikçi George Boole (1815-1864) tarafından geliştirilmeye başlanmıştır. Küme matematikçilere göre öyle bir topluluktur ki buna neyin dahil olduğu ve neyin dahil olmadığı kesin bir şekilde belli olmalıdır. Aksi takdirde matematiksel disiplinden yoksun olarak kabul edilmesi gerekir. Küme nesnelerin herhangi bir çeşidinin tümü olacağına göre kümeye ait olan nesnelere kümenin elemanları (veya ögeleri) denir. Elemanlarının sayısı sonlu olan kümelere sonlu küme aksi durumda sonsuz küme adı verilmektedir. Hiç bir elemanı bulunmayan kümeye boş küme, üzerinde çalışılan tüm nesnelerin oluşturduğu kümeye ise evrensel küme adı verilmektedir. Herhangi bir küme verildiğinde bu kümenin bir takım elemanlarının oluşturduğu kümeye bu kümenin bir alt kümesi denir. Boştan farklı bir kümenin alt kümelerinden oluşan bir aileye ise bu küme üzerinde bir sınıf adı verilmektedir. Buna bir küme üzerinde birden fazla sınıf oluşturulabilir.

Tanım 2.1.1 Boştan farklı bir E kümesi üzerinde bir R sınıfı verilmiş olsun. Bu durumda eğer

i. $E \in R$

ii. Her $A \in R$ için $\overline{A} = E/A \in R$

iii. $A_n \in R, \quad n = 1, 2, \ldots$ için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in R$

koşulları sağlanıyorsa R sınıfına E kümesi üzerinde bir σ - cebir adı verilir. Örneğin $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde $R_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, $R_2 = \{\emptyset, Q, \overline{Q}, \mathbb{R}\}$ ve $R_3 = \{A : A \subset R\}$ sınıflarının her birisi birer σ - cebir olacaktır.

Tanım 2.1.2 Bilimsel bir gerçeği göstermek, bir yasayı doğrulamak veya bir varsayımı kanıtlamak için yapılan işleme deney denilmektedir. Eğer deney yapılmadan önce kesin sonucu söylenemiyorsa böyle bir deneye bir slokastik deney veya bir rasgele deney adı verilir. Bir rasgele deneyin tüm mümkün sonuçlarının kümesine örnek uzay, örnek uzayın herhangi bir alt kümesine ise olay denir.

Tanım 2.1.3 Ω bir örnek uzay u ise bu uzayın alt kümeleri üzerinde tanımlanmış bir σ - cebir olsun. Bu durumda bir $A \subset \Omega$ için eğer $A \in u$ oluyorsa A ya Ω' da bir olay denir.

Tanım 2.1.4 Ω bir örnek uzay, u Ω' nın alt kümeleri üzerinde tanımlanmış bir σ - cebir olsun. Bu durumda u üzerinde tanımlanmış bir

$$P : u \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa P' ye u' da tanımlanmış bir olasılık ölçüsü denir.

i. Her $A \in u$ için $P(A) \geq 0$

ii. $P(\Omega) = 1$

iii. $A_i \in u$, $i = 1, 2, \ldots$ ve $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ olmak üzere

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Bu durumda (Ω, u, P) üçlüsüne bir olasılık uzayı ve bir $A \in u$ için $P(A)$ değerinede A olayının olasılığı adı verilir.

Teorem 2.1.1 (Ω, u, P) bir olasılık uzayı olsun. Bu takdirde

i. Her $A \in u$ için $0 \leq P(A) \leq 1$ dır.

ii. $P(\emptyset) = 0$ dır.

iii. $A, B \in u$ için $A \cap B = \emptyset$ ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$' dır.

iv. $A \in u$ için $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$' dır.

v. $A, B \in u$ için $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$' dır.

vi. $A_n \in v$ $n = 1, 2, \ldots$ ise

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_n)$$

' dır.

vii. (A_n) u' da monoton bir dizi olmak üzere $P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$' dır.

viii. $A, B \in u$, $A \subset B$ ise $P(A) \leq P(B)$' dır.

Tanım 2.1.5 (Ω, u, P) bir olasılık uzayı olmak üzere A ve B bu uzayda iki olay olsun. Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B olaylarına ayrık olaylar denir. Öte yandan A ve B gibi iki olay için $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ eşitliği sağlanıyorsa bu iki olaya bağımsızdır denir. Bune göre iki olayın ayrık olması ve bağımsız olması kavramları birbirinden farklı iki kavramdır.

Tanım 2.1.6 Eğer bir değişken slokastik deneylerle inceleniyorsa böyle bir değişkene bir rasgele değişken adı verilir. Örneğin bir fabrikada üretilen parçaların dayanma süresi incelendiğinde bu inceleme bir slokastik deney olacaktır. Çünkü parçaların dayanma sürelerinin ne kadar olacağını önceden bilmek mümkün değildir. Yani bu parçaların dayanma süreleri bir rasgele değişkendir.

Tanım 2.1.7 (Ω, u, P) bir olasılık uzayı olsun. Bu durumda

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu için $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in u$ ise X fonksiyonuna Ω' da bir rasgele değişken adı verilir. Burada B $\mathbb{R}$ üzerinde bir Borel kümesidir. Bu tanıma göre bir rasgele değişken bir ölçülebilir fonksiyondur.

Tanım 2.1.8 (Ω, u, P) bir olasılık uzayı X ise Ω' da tanımlı bir rasgele değişken olsun. Bu takdirde eğer X' in alabileceği değerler kümesi sonlu ya da sayılabilir sonsuz küme ise X' e bir kesikli rasgele değişken, X'in alabileceği değerlerin kümesi bir aralık ya da aralıkların birleşimi ise X' e sürekli rasgele değişken adı verilir.

Tanım 2.1.9 X bir keskli rasgele değişken ve X' in değerler kümesi $R_x = \{x_1, x_2, \ldots\}$ olmak üzere $P(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ ile bir $P : R_x \to [0, 1]$ fonksiyonuna X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu ya da olasılık dağılımı denir. Şayet *i.* Her $i = 1, 2, \ldots$ için $P(x_i) \geq 0$

ii. $\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1$

ise.

Tanım 2.1.10 X sürekli bir rasgele değişken olsun. Genelliği bozmaksızın X' in $(-\infty, +\infty)$ da değer aldığını varsayalım. Bu takdirde aşağıdaki koşulları sağlayan bir f fonksiyonuna X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu adı verilir.

i. Her $x \in (-\infty, +\infty)$ için $f(x) \geq 0$

ii. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Burada (ii) şartının f' nin eğrisi altında kalan ve x - ekseni ile sınırlı bölgenin alanının 1' e eşit olduğunu gösterdiğine dikkat edelim. Bunun yanında X' in herhangi bir $[a, b]$ aralığında yer alması olasılığını

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \tag{2.1.1}$$

olarak yazabiliriz. Öte yandan

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) \tag{2.1.2}$$

olduğunuda belirtelim.

Tanım 2.1.11 X kesikli veya sürekli bir rasgele değişken olsun. Bu takdirde X' in kümülatif dağılım fonksiyonu $F(x)$ ile gösterilir ve

$$F(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P(X \leq x) \tag{2.1.3}$$

ile tanımlanır. Buna göre eğer X $R_x\{x_1, x_2, \ldots\}$' de değerler alan kesikli bir rasgele değişken ise

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \tag{2.1.4}$$

dır.

Teorem 2.1.2 X bir rasgele değişken ve $F\mathbb{R} \to [0,1]$ X' in kümülatif dağılım fonksiyonu olsun. Bu takdirde

i. F azalmayan bir fonksiyondur

ii. F sağdan süreklidir

iii. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ ve $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$' dir.

iv. X $x_1, x_2, \ldots$ değişkenlerini alan kesikli bir rasgele değişken olmak üzere $x_1 \leq x_2 \leq \ldots$ ise bu durumda $P(x_j) = P(X = x_j) = F(x_j) - F(x_{j-1})$' dir.

v. X sürekli bir rasgele değişken ise bu takdirde $f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = F(x)$' dir. Bu durumda özel olarak $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ eşitliği sağlanır.

Tanım 2.1.12 (Ω, u, P) bir olasılık uzayı ve X Ω' da tanımlı bir rasgele değişken olsun. Bu durumda

i. Eğer X, $x_1, x_2, \ldots$ değerlerini $P(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ olasılıkları ile alan kesikli bir rasgele değişken ise X' in beklenen değeri $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(x_i)$ ile tanımlanır.

ii. Eğer X $(-\infty, +\infty)$ de değerler alan sürekli bir rasgele değişken ve f X' in olasılık yoğunluk fonksiyonu ise X' in beklenen değeri $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$ ile tanımlanır.

Uyarı 2.1.1 Tanım de verilen ifadelerin yazılabilmesi için genelleştirilmiş integralin mevcut ve sonlu olması gerektiğini hatırlatalım.

Teorem 2.1.3 Tanım 2.1.12' da verilen beklenen değer ifadelerinden

i. $E(aX + b) = aE(X) + b \qquad a, b \in \mathbb{R}$

ii. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

iii. X ve Y bağımsız ise $E(XY) = E(X).E(Y)$

elitlikleri gerçeklenir.

Tanım 2.1.13 (Ω, u, P) bir olasılık uzayı ve X' de Ω üzerinde bir rasgele değişken olsun. X' in $V(X)$ veya σ^2 ile gösterilen varyansı

$$V(X) = \sigma^2 = E[X - E(X)]^2 \tag{2.1.5}$$

ile tanımlanır. Varyansın pozitif kareköküne ise X' in standart sapması (veya dispersiyonu) adı verilir ve σ ile gösterilir.

Teorem 2.1.4 Yukarıda verilen varyans tanımından

i. $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

ii. $V(aX + b) = a^2 Var(X)$

iii. X ve Y bağımsz ise $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

iv. $a \in \mathbb{R}$ keyfi olmak üzere $Var(X) = E[(X - a)^2] - [E(X) - a]^2$

ifadeleri sağlanır.

Teorem 2.1.5 X bir rasgele değişken olmak üzere $E(X) = \mu$ ve $Var(X) = \sigma^2$ olsun. Bu takdirde $k > 0$ keyfi bir sabit olmak üzere

$$P\{|X - \mu| \geq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2} \tag{2.1.6}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Chebyshev Eşitsizliği denir.

Tanım 2.1.14 (Ω, u, P) bir olasılık uzayı X bu uzayda $\mu = E(X)$ beklenen değerine sahip bir rasgele değişken olsun. Bu takdirde $k \geq 0$ tam sayı olmak üzere

$$M_k = E[(X - E(X))^k] \tag{2.1.7}$$

sayısına X' in beklenen değere göre k -yıncı momenti denir. Bu durumda $M_0 = 1, M_1 = 0$ ve $M_2 = Var(X)$ olduğunu belirtelim.

Tanım 2.1.15 (Ω, u, P) bir olasılık uzayı X bu uzayda rasgele değişken olmak üzere $\mu = E(X)$ olsun. Bu takdirde $k \geq 1$ bir tam sayı olmak üzere

$$m_k = E[X^k] \tag{2.1.8}$$

sayısına X rasgele değişkeninin k -yıncı momenti (orjine göre k -yıncı momenti) adı verilir. Bir rasgele değişkenin beklenen değere ve orjine göre momentleri için verilen ifade (2.1.7) ve ifade (2.1.8) ifadeleri göz önüne alındığında

i. $M_0 = m_0$

ii. $M_1 = 0, m_1 = \mu = E(X)$

iii. $M_2 = Var(X) = m_2 - m_1^2$

iv. $M_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^2$

olduğu gösterilbilir.

2.2 Bazı Eşitsizlik Kavramları

Tanım 2.2.1 (Konveks Küme) L bir lineer uzay $A \subset L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1-\alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitsizliğindeki z ve y' nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki α, $(1-\alpha)$ yerine $\alpha+\beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir.

Tanım 2.2.2 (Konveks Fonksiyon) I, $\mathbb{R}$' de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \tag{2.2.1}$$

şartını sağlayan, f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer ifade (2.2.1) eşitsizliği $x \neq y$ ve $\alpha \in [0,1]$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir.

Teorem 2.2.1 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyonlar öyle ki $\varphi, \Phi, \psi, \Psi$ sabitler olmak üzere her $x \in [a, b]$ için $\varphi < f(x) < \Phi$ ve $\psi < g(x) < \Psi$ olsun. Öyleyse

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right| \leq \frac{1}{4}(\Phi - \varphi)(\Psi - \psi) \quad (2.2.2)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\frac{1}{4}$ sabiti kesin, yani eşitisizliğe $\frac{1}{4}$' den daha küçük bir sabit yerleştirilemez.

Teorem 2.2.2 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyonlar öyle ki $\varphi, \Phi, \psi, \Psi$ sabitler olmak üzere her $x \in [a, b]$ için $\varphi < f(x) < \Phi$, $\psi < g(x) < \Psi$ ve $p : [a, b] \to [0, \infty)$ pozitif değerli fonksiyon olsun. Öyleyse

$$|T(f, g, p)| \leq \frac{(\Phi - \varphi)(\Psi - \psi)}{4} \left(\int_a^b p(x)dx \right)^2 \quad (2.2.3)$$

eşitsizliği sağlanır ve buradaki

$$T(f, g, p) = \int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx - \left(\int_a^b p(x)f(x)dx \right) \left(\int_a^b p(x)g(x)dx \right)$$

biçimindedir.

Teorem 2.2.3 (İntegraller İçin Hölder İntegral Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığı üzerinde integrallenebilen iki fonksiyon ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.2.4)$$

eşitliğinin sağlanabilmesi için gerekli ve yeterli koşul A ve B sabit olmak üzere hemen hemen her yerde $A|f(x)| = B|g(x)|$ olmasıdır.

Teorem 2.2.4 (İntegraller İçin Minkowski İntegral Eşitsizliği) f ve g, $[a, b]$ aralığı üzerinde integrallenebilen iki reel değerli fonksiyon ve $p > 1$ için

$$\int_a^b |f(x)|^p < \infty \quad ve \quad \int_a^b |g(x)|^q < \infty$$

olsun. Öyleyse

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.2.5}$$

eşitliğinin olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul A ve B sabit olmak üzere hemen hemen her yerde $A|f(x)| = B|g(x)|$ olmasıdır.

Tanım 2.2.3 (Gamma Fonksiyonu) Kesirli hesaplar ile doğrudan ilgili olan Gamma fonksiyonu faktöriyelin bütün reel sayılar için genelleştirilmesini temel alan bir fonksiyondur. Gamma fonksiyonu $x > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dx$$

genelleştirilmiş integraliyle tanımlanır. Bu tanım bazı kaynaklarda genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu olarak geçer. Bu integral $x < 0$ için ıraksaktır. Gamma fonksiyonunun bazı temel özelliklerini aşağıdaki gibi verebiliriz.

i. $x > 0$ reel bir sayı olmak üzere $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

ii. $n \in N$ için $\Gamma(n+1) = n!$

iii. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

iv. $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \qquad 0 < p < 1$

v. $2(n-1)\Gamma(n)\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n)$

Tanım 2.2.4 (Beta Fonksiyonu) $m, n > 0$ için

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$$

integrali yardımıyla tanımlanan fonksiyona Beta fonksiyonu denir. Beta fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıdaki gibidir.

i. $\beta(x,y) = \beta(y,x)$

ii. $\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y)$

iii. $\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \qquad \mathfrak{R}(x), \mathfrak{R}(y) > 0$

3. SONLU BİR ARALIKTA TANIMLI SÜREKLİ RASGELE DEĞİŞKENİN MOMENTLERİ İÇİN EŞİTSİZ

Dağılım fonksiyonları ve olasılık yoğunluk fonksiyonları verilen bir rasgele değişkenin olasılık dağılımını tam olarak belirleyen özel fonksiyonlardır. Ancak, bunlar bizim iki farklı dağılım arasında bir karşılaştırma yapmamız için yeterli değildir. Makul koşullarda olasılık dağılımını karakterize eden momentler sınıfı bu karşılaştırmayı yapmada bize yardımcı olacaktır. Öte yandan, bir rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunun bilinmesi durumunda bu rasgele değişkeninin momentlerinin belirlenebileceğini biliyoruz. Bununla birlikte, olasılık dağılımlarının açık formlarının tam olarak bilinmediği veya matematiksel olarak hesaplanamadığı ve bu nedenlede momentlerinin belirlenemediği uygulamalar da mevcuttur. Bu durum bizi bir olasılık dağılımının momentleri için alternatif tahminler bulmaya yönlendirir. Matematiksel eşitsizlikleri uygulayarak, rastgele değişkenlerin momentleri için bazı tahminler birçok bilim insanı tarafından verilmiştir.[1-6] Bu kısımda, matematiksel eşitsizlikler kullanılarak sonlu bir araLıkta tanımlı bir rasgele değişkenin momentleri için bazı tahminler verilecektir.

I reel sayıların bir aralığı olmak üzere, olasılık yoğunluk fonksiyonu $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ şeklindeki konveks bir fonksiyon ve dağılım fonksiyonu $F : [a, b] \to [0, 1]$ olan sürekli bir rasgele değişkeni X ile gösterelim ve $a, b \in I$ olmak üzere $a < b$ olsun.

$$M_r = \int_a^b t^r f(t)dt \tag{3.0.1}$$

olarak tanımlanan X'in r-inci momentini M_r , $r \geq 0$ ile gösterelim.

X rasgele değişkeninin ortalama ve varyansı sırasıyla

$$\mu = M_1 = \int_a^b tf(t)dt \tag{3.0.2}$$

ve

$$\sigma^2 = M_2 - M_1^2 = \int_a^b (t-\mu)^2 f(t)dt \tag{3.0.3}$$

şeklindedir.

Bir özel dağılımın $r-$inci momentinden bahsettiğimizde o dağılım için uygun olan integralin yakınsak olduğu varsayılmıştır.

3.1 Momentleri Kapsayan Eşitsizlikler

Bu kısım da X rasgele değişkeninin momentleri için bazı sonuçlar vereceğiz. Bununla ilgili olarak önce bazı eşitsizlikleri verelim.

$m, g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyonları için aşağıdaki sonuçlar, eşitsizlikler ve özdeşliklerin sağlandığı değişik kaynaklarda verilmiştir.

Korkine Eşitliği [2]:

$$\begin{aligned}&\int_a^b m(t)dt \int_a^b m(t)g(t)h(t)dt - \int_a^b m(t)g(t)dt \int_a^b m(t)h(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b \int_a^b m(t)m(s)[g(t)-g(s)][h(t)-h(s)]dtds\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

(3.1.1)' de yer alan tüm integrallerin mevcut ve sonlu olması koşulu ile sağlanır.

Çift katlı integraller için Hölder Eşitsizliği [2]:

$$\int_a^b \int_a^b g(t)g(s)dtds \leq \Big(\int_a^b \int_a^b g^p(t)g^p(s)dtds\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_a^b \int_a^b g^q(t)g^q(s)dtds\Big)^{\frac{1}{q}} \tag{3.1.2}$$

dir, burada $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dır.

Grüss Eşitsizliği [6]:

$$|T(g, h)| \leq \frac{(\Phi - \phi)(\Gamma - \gamma)}{4} \tag{3.1.3}$$

Burada,

$$T(g, h) = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)h(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt \frac{1}{b-a}\int_a^b h(t)dt \tag{3.1.4}$$

$\phi, \Phi, \gamma, \Gamma$ $[a, b]$ aralığında $\phi \leq g(t) \leq \Phi$ ve $\gamma \leq h(t) \leq \Gamma$ olacak şekilde reel sayılardır.

Yukarıdaki Grüss Eşitsizliğinden daha keskin sınırlı olan bir mini Grüss eşitsizliği [6]

$$|T(g,h)| \leq \frac{(\Phi - \phi)}{2} |T(h,h)|^{\frac{1}{2}} \tag{3.1.5}$$

dir. Tüm integraller mevcut ve sonlu, $\int_a^b g(t)dt > 0$ ve $m \leq g(t) \leq M$ olmak şartı ile [18]

$$0 \leq \frac{\displaystyle\int_a^b g(t)h^2(t)dt}{\displaystyle\int_a^b g(t)dt} - \left(\frac{\displaystyle\int_a^b g(t)h(t)dt}{\displaystyle\int_a^b g(t)dt} \right)^2 \leq \frac{(M-m)^2}{4} \tag{3.1.6}$$

eşitsizliği sağlanır.

(3.1.3) ve (3.1.6) eşitsizlikleri 1/4 sabiti daha küçük bir sabit ile değiştirilemez anlamında keskindir.

Teorem 3.1.1 $r \geq 0$ ve $x \in [a,b]$ olmak üzere $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için $f \in L_\infty[a,b]$ şartıyla

$$M_r - \mu M_{r-1} \leq \begin{cases} \dfrac{(b-a)(b^{r-1} - a^{r-1})}{2} \\ (b-a)\Big(\dfrac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1} - \dfrac{(a+b)(b^r - a^r)}{4} \Big) ||f||_\infty^2 \end{cases} \tag{3.1.7}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.1.1 (3.1.1) Korkine's Eşitsizliğinde $m(t) = f(t), g(t) = (t-\mu)$ ve $h(t) = t^{r-1}$ dönüşümlerini seçelim. (3.1.1)' in sol tarafı

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(t)dt \int_a^b t^{r-1}(t-\mu)f(t)dt - \int_a^b (t-\mu)f(t)dt \int_a^b t^{r-1}f(t)dt \\ &= \int_a^b t^{r-1}f(t)dt \ \Big(\int_a^b f(t)dt = 1 \text{ ve } \int_a^b (t-\mu)f(t)dt = 0 \Big) \\ &= \int_a^b t^r f(t)dt - \mu \int_a^b t^{r-1}f(t)dt = M_r - \mu M_{r-1} \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

ve (3.1.1)' in sağ tarafı

$$\frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b (t-s)(t^{r-1} - s^{r-1}) f(t) f(s) dt ds \tag{3.1.9}$$

dır. Öte yandan

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \int_a^b (t-s)(t^{r-1}-s^{r-1})f(t)f(s)dtds \\
&\leq \sup_{(t,s)\in[a,b]^2} |(t-s)(t^{r-1}-s^{r-1})| \int_a^b \int_a^b f(t)f(s)dtds \\
&= (b-a)(b^{r-1}-a^{r-1}) \ \left(\int_a^b \int_a^b f(t)f(s)dtds = 1\right)
\end{aligned} \tag{3.1.10}
$$

eşitsizliği dikkate alınırsa (3.1.7) eşitsizliğinin birinci kısmı elde edilir. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \int_a^b (t-s)(t^{r-1}-s^{r-1})f(t)f(s)dtds \\
&\leq \sup_{(t,s)\in[a,b]^2} |f(t)f(s)| \int_a^b \int_a^b (t-s)(t^{r-1}-s^{r-1})dtds \\
&= \sup_{(t,s)\in[a,b]^2} |f(t)f(s)| \Big[2(b-a)\Big(\frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1} - \frac{(a+b)(b^r-a^r)}{4}\Big)\Big] \\
&= ||f||_\infty^2 \Big[2(b-a)\Big(\frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1} - \frac{(a+b)(b^r-a^r)}{4}\Big)\Big]
\end{aligned} \tag{3.1.11}
$$

eşitsizliği dikkate alınırsa (3.1.7) eşitsizliğinin ikinci kısmı elde edilir. (3.1.6) Grüss Eşitsizliği kullanılarak teoremi ispatlamış oluruz.

Teorem 3.1.2 $r \geq 0$ ve $x \in [a,b]$ olmak üzere $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için:

$$
M_{2r} - M_r^2 \leq \frac{1}{4}(b^r - a^r)^2 \tag{3.1.12}
$$

eşitsizliği sağlanır.

3.1.2 (3.1.6) Grüss Eşitsizliğinde $t \in [a,b]$ için $g(t) = f(t)$ ve $h(t) = t^r$ seçelim. Böylelikle, $m = a^r$ ve $M = b^r$ olup

$$
\begin{aligned}
&0 \leq \frac{\int_a^b t^{2r} f(t)dt}{\int_a^b f(t)dt} (\frac{\int_a^b t^r f(t)dt}{\int_a^b f(t)dt})^2 \leq \frac{(b^r-a^r)^2}{4}, \\
&M_{2r} - M_r^2 \leq \frac{1}{4}(b^r-a^r)^2 \ \left(\int_a^b f(t)dt = 1\right)
\end{aligned} \tag{3.1.13}
$$

olduğu görülür.

Teorem 3.1.3 $r \geq 0$ ve $x \in [a,b]$ olmak üzere $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i x^{r-i} M^i$$

$$\leq \begin{cases} ||f||_\infty \Big[\dfrac{(x-a)^{r+1} - (x-b)^{r+1}}{r+1} \Big] & f \in L_\infty[a,b] \\ ||f||_p \Big[\dfrac{(x-a)^{rq+1} - (x-b)^{rq+1}}{rq+1} \Big]^{\frac{1}{q}} & f \in L_p[a,b] \;\; p > 1 \;\; \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \\ \Big[\dfrac{b-a}{2} + \Big| x - \dfrac{a+b}{2} \Big| \Big]^r \end{cases} \tag{3.1.14}$$

eşitsizliği verilir.

3.1.3

$$(x-t)^r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i t^i x^{r-i} \tag{3.1.15}$$

Binom açılımı uygulanarak

$$\int_a^b (x-t)^r f(t)dt = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i x^{r-i} M^i \tag{3.1.16}$$

elde edilir. Ayrıca $f \in L_\infty[a,b]$ olmak şartıyla

$$\begin{aligned} \int_a^b (x-t)^r f(t)dt &\leq ess \sup_{t \in [a,b]} |f(t)| \int_a^b (x-t)^r dt \\ &= ||f||_\infty \Big[\frac{(x-a)^{r+1} - (x-b)^{r+1}}{r+1} \Big] \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

elde edilir. Böylece (3.1.14) eşitsizliğinin birinci kısmı elde edilir. (3.1.14) eşitsizliğinin ikinci kısmını elde etmek için (3.1.2) Hölder Eşitsizliğinden $f \in L_p[a,b]$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere:

$$\begin{aligned} &\int_a^b (x-t)^r f(t)dt \leq \Big(\int_a^b f^p(t)dt \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_a^b (x-t)^{rq} dt \Big)^{\frac{1}{q}} \\ &= ||f||_p \Big[\frac{(x-a)^{rq+1} - (x-b)^{rq+1}}{rq+1} \Big]^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

elde edilir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\int_a^b (x-t)^r f(t)dt &\leq \sup_{t\in[a,b]} |(x-t)^r| \int_a^b f(t)dt \\
&= [max(x-a, b-x)]^r \\
&= \Big[\frac{b-a}{2} + \Big|x - \frac{a+b}{2}\Big|\Big]^r
\end{aligned} \tag{3.1.19}
$$

olduğu dikkate alınırsa (3.1.14) eşitsizliğinin üçüncü kısmı elde edilir.

Sonuç 3.1.1 (3.1.14)' den elde edilen en iyi eşitszilik $x = (a+b)/2$ için yazılabilendir. $r \geq 0$ için

$$
\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i x^{r-i} M_i
$$

$$
\leq \begin{cases} ||f||_\infty \Big[\dfrac{(b-a)^{r+1} - (a-b)^{r+1}}{2^{r+1}(r+1)}\Big] & f \in L_\infty[a,b] \\ ||f||_p \Big[\dfrac{(b-a)^{rq+1} - (a-b)^{rq+1}}{2^{rq+1}(rq+1)}\Big]^{\frac{1}{q}} & f \in L_p[a,b] \;\; p>1 \;\; \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \\ \Big[\dfrac{b-a}{2}\Big]^r & \end{cases} \tag{3.1.20}
$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Sonuç 3.1.2 $x \in [a,b]$, $p = q = 2$ ve $r \geq 0$ için $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için $f \in L_2[a,b]$ şartıyla:

$$
\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i x^{r-i} M_i \leq ||f||_2 \Big[\frac{(x-a)^{2r+1} - (x-b)^{2r+1}}{2r+1}\Big]^{\frac{1}{2}} \tag{3.1.21}
$$

eşitsizliği sağlanır. (3.1.20)' den X' in varyansı için aşağıdaki gibi bir üst sınır hesaplanabilir.

Sonuç 3.1.3 $x \in [a,b]$ ve $p = q = r = 2$ için $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için $f \in L_2[a,b]$ şartıyla:

$$
\sigma^2 \leq \mu[(a+b) - \mu] + ||f||_2 \frac{(b-a)^{\frac{5}{2}}}{4\sqrt{5}} - \Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2 \tag{3.1.22}
$$

eşitsizliği gerçeklenir.

3.2 Momentler İçin Karma Sonuçlar

Momentleri içeren sonuçları kanıtlamak için (3.1.5) - (3.1.3), Grüss Eşitsizliklerini uygulayalım.

Teorem 3.2.1 $r \geq 0$, $x \in [a,b]$ ve $m \leq f \leq M$ olmak üzere $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için:

$$\Big| M_r - \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(b-a)(r+1)} \Big| \leq \frac{(b-a)(M-m)}{2} \sqrt{|T(h,h)|} \tag{3.2.1}$$

eşitsizliği verilebilir. Burada,

$$T(h,h) = \frac{b^{2r+1} - a^{2r+1}}{(b-a)(2r+1)} - (\frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(b-a)(r+1)})^2 \tag{3.2.2}$$

dır.

3.2.1 (3.1.4) Grüss Eşitsizliğinde $g(t) = f(t)$ ve $h(t) = t^r$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} T(g,h) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b t^r f(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \frac{1}{b-a}\int_a^b t^r dt \\ &= \frac{1}{b-a} M_r - \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(b-a)^2(r+1)} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (3.2.1)' in sol tarafıdır ve

$$\begin{aligned} T(h,h) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b t^r t^r dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b t^r dt \frac{1}{b-a}\int_a^b t^r dt \\ &= \frac{b^{2r+1} - a^{2r+1}}{(b-a)(2r+1)} - (\frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(b-a)(r+1)})^2 \end{aligned}$$

dır. (3.1.5) eşitsizliği kullanılarak teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 3.2.1 $r \geq 0$, $x \in [a,b]$ ve $m \leq f \leq M$ olmak üzere $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için moment tahmininden (3.2.1)' in tersi eşitsizlik:

$$M_r \leq \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(b-a)(r+1)} + \frac{(b-a)(M-m)}{2} \sqrt{|T(h,h)|} \tag{3.2.3}$$

şeklinde verilebilir. X 'in $c \in [a,b]$ keyfi sabitine göre $r \geq 0$ olmak üzere

$$M_r(c) = \int_a^b (t-c)^r f(t)dt$$

ile tanımlanan r inci momentini içeren bir eşitsizliği sağlayan bir teorem verilebilir.

Teorem 3.2.2 $r \geq 0$, $x, c \in [a,b]$ ve $m \leq f \leq M$ olmak üzere $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için:

$$\Big| M_r(c) - \frac{(b-c)^{r+1} - (a-c)^{r+1}}{(b-a)(r+1)} \Big| \leq \frac{(b-a)(M-m)}{2} \sqrt{|T(h,h)|} \tag{3.2.4}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$T(h,h) = \frac{(b-c)^{2r+1} - (a-c)^{2r+1}}{(b-a)(2r+1)} - \Big(\frac{(b-c)^{r+1} - (a-c)^{r+1}}{(b-a)(2r+1)} \Big)^2 \tag{3.2.5}$$

dır. Teoremin ispatı $g(t) = f(t)$ ve $h(t) = (t-c)^r$ alınarak (3.2.1) teoremine benzer şekilde yapılabilir.

Sonuç 3.2.2 $r \geq 0$, $x, c \in [a,b]$ ve $m \leq f \leq M$ olmak üzere $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip $M_r(c)$ X rasgele değişkeni için moment tahmininden (3.2.4)' in tersi eşitsizlik:

$$M_r(c) \leq \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(b-a)(r+1)} + \frac{(b-a)(M-m)}{2} \sqrt{|T(h,h)|} \tag{3.2.6}$$

dır. Burada $T(h,h)$ (3.2.5) de verildiği gibidir.

Uyarı 3.2.1 (3.2.5) eşitsizliğinden elde edilebilen en iyi eşitsizlik $c = (a+b)/2$ durumudur.

$$\Big| M_r\Big(\frac{a+b}{2}\Big) - \frac{(b-a)^{r+1} - (a-b)^{r+1}}{2^{r+1}(b-a)(r+1)} \Big| \leq \frac{(b-a)(M-m)}{2} \sqrt{|T(h,h)|} \tag{3.2.7}$$

olup, burada

$$T(h,h)=\frac{(b-a)^{2r+1}-(a-b)^{2r+1}}{2^{2r+1}(b-a)(2r+1)}-\Big(\frac{(b-a)^{r+1}-(a-b)^{r+1}}{2^{r+1}(b-a)(r+1)}\Big)^2 \tag{3.2.8}$$

dir.

Teorem 3.2.3 $x\in[a,b]$ olmak üzere$f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için varsayalım ki f türevlenebilir ve öyle ki $||f'||_\infty:=\sup_{t\in[a,b]}|f'(t)|<\infty$ olsun. Bu takdirde $r\geq 0$ için

$$\Big|M_r-\frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{(b-a)(r+1)}\Big|\leq\frac{(b-a)}{\sqrt{12}}||f'||_\infty\Big(\frac{(b-a)(b^{2r+1}-a^{2r+1})}{(2r+1)}-\Big(\frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{(r+1)}\Big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{3.2.9}$$

eşitsizliği verilebilir.

3.2.2 $g,h\in[a,b]\to\mathbb{R}$ mutlak sürekli ve h',g' sınırlı olsun. Chebyshev's Eşitsizliğinden [4]:

$$T(g,h)\leq\frac{(b-a)^2}{12}\sup_{t\in[a,b]}|g'(t)h'(t)|$$

elde edilir. Matic,Pecaric ve Ujevic [6]

$$|T(g,h)|\leq\frac{(b-a)}{\sqrt{12}\sup_{t\in[a,b]}|g'(t)|\sqrt{T(h,h)}} \tag{3.2.10}$$

olduğunu göstermişlerdir. $g(t)=f(t)$ ve $h(t)=t^r$ olsun. Buradan

$$\sup_{t\in[a,b]}|g'(t)|=||g'||_\infty$$

ve (3.2.1) , (3.2.2) ve (3.2.10)' dan

$$\Big|\frac{1}{b-a}M_r-\frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{(b-a)^2(r+1)}\Big|\leq\frac{(b-a)}{\sqrt{12}}\Big(\frac{b^{2r+1}-a^{2r+1}}{(b-a)(2r+1)}-\Big(\frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{(b-a)(r+1)}\Big)^2\Big)^{1/2}$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.3 $x \in [a,b]$ olmak üzere $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X resgele değişkeni için f türevlenebilir olsun. Bu takdirde $r \geq 0$ için (3.2.9)' den

$$M_r \leq \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{(b-a)(r+1)} + \frac{(b-a)}{\sqrt{12}}||f'||_\infty \Big(\frac{(b-a)(b^{2r+1}-a^{2r+1})}{(b-a)(2r+1)} - \Big(\frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{(r+1)} \Big)^2 \Big)^{1/2} \tag{3.2.11}$$

ters eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.2.4 $x \in [a,b]$ olmak üzere $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için $f' \in L_2(a,b)$ ve f (a,b) de lokal mutlak sürekli olsun. Bu takdirde $r \geq 0$ olmak üzere

$$\Big| M_r - \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{(b-a)(r+1)} \Big| \leq \frac{(b-a)}{\pi}||f'||_2 \sqrt{\frac{(b-a)(b^{2r+1}-a^{2r+1})}{(b-a)(2r+1)} - \Big(\frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{(r+1)} \Big)^2} \tag{3.2.12}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.2.3 $g, h : (a,b) \to \mathbb{R}$ lokal mutlak sürekli ve $g', h' \in L_2(a,b)$ için

$$|T(g,h)| \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2}||g''||_2^\dagger ||h''||_2^\dagger$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $k \in L_2(a,b)$ için

$$||g''||_2^\dagger = \Big(\frac{1}{b-a} \int_a^b |k(t)|^2 dt \Big)^{1/2}$$

dir. Ayrıca Matic,Pecaric ve Ujevic [6]

$$|T(g,h)| \leq \frac{(b-a)}{\pi}||g''||_2^\dagger \sqrt{T(h,h)} \tag{3.2.13}$$

eşitsizliğini ispatlamışlardır. 3.2.13' de $g(t) = f(t)$ ve $h(t) = t^r$ alınırsa teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 3.2.4 $x \in [a,b]$ olmak üzere $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için $f' \in L_2(a,b)$ ve varsayalım ki f (a,b) de lokal mutlak sürekli olsun. Bu takdirde (3.2.12)' dan $r \geq 0$ için

$$M_r \leq \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(b-a)(r+1)} + \frac{(b-a)}{\pi}||f'||_2 \sqrt{\frac{(b-a)(b^{2r+1} - a^{2r+1})}{(b-a)(2r+1)} - \Big(\frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(r+1)}\Big)^2} \quad (3.2.14)$$

eşitsizliği sağlanır.

X' in merkezi momentlerini tahmin etmek için Grüss Eşitsizliğini uygulayalım.

$$S(h(x)) = h(x) - M(h) \quad (3.2.15)$$

olsun. Burada

$$M(h) = \frac{1}{b-a}\int_a^b h(u)du$$

dır. (3.1.5)' den:

$$T(g,h) = M(gh) - M(g)M(h)$$

elde edilir. Dragomir ve McAndrew [18]

$$T(g,h) = T(S(g), S(h))$$

eşitliğini vermişlerdir.

Teorem 3.2.5 $x \in [a,b]$ olmak üzere $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için $r \geq 0$ olmak üzere

$$\Big|M_r - \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(b-a)(r+1)}\Big| = \Big|\int_a^b S(t^r)\Big(f(t) - \frac{1}{b-a}\Big)dt\Big| \quad (3.2.16)$$

dir.

3.2.4 $g(t) = f(t)$ ve $h(t) = t^(r)$ olsun. (3.2.15)' den:

$$\int_a^b t^r f(t)dt - M(t^r) = \int_a^b [t^r - M(t^r)]\Big(f(t) - \frac{1}{b-a}\Big)dt \quad (3.2.17)$$

elde edilir. Burada

$$M(t^r) = \frac{1}{b-a}\int_a^b t^r dt = \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{(b-a)(r+1)}$$

ve

$$S(t^r) = t^r - M()t^r \tag{3.2.18}$$

dir. (3.0.1), (3.2.17) ve (3.2.18)' den:

$$M_r - \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{(b-a)(r+1)} = \int_a^b S(t^r)\Big(f(t) - \frac{1}{b-a}\Big)dt$$

elde edilir. Her iki tarafın mutlak değeri alınırsa teorem ispatlanır.

Sonuç 3.2.5 $x \in [a,b]$ ve $f \in L_\infty[a,b]$ olmak üzere $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için $r \geq 0$ olmak üzere

$$\Big|M_r - \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{(b-a)(r+1)}\Big| \leq ||\Big(f(.) - \frac{1}{b-a}\Big)||_\infty \int_a^b |S(t^r)|dt \tag{3.2.19}$$

eşitsizliği sağlanır.

Remark 3.2.1 $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$ ve $f \in L_p[a,b]$ için (3.2.16)' den momentler için diğer tahminleri elde edebiliriz. Ancak bu tahminlerde

$$\Big(\int_a^b |S(t^r)|^q dt\Big)^{1/q} \text{ burada } S(t^r) = t^r - \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{(b-a)(r+1)}$$

integralinin hesaplanması gerekecektir.

3.3 Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu Mutlak Sürekli Olduğunda Tahminler

Lemma 3.3.1 X rasgele değişken olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonu $[a,b]$ de mutlak sürekli olsun. Bu takdirde $r \geq 0$ için

$$\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^i x^{r-i} M_i = \frac{(x-a)^{r+1} - (x-b)^{r+1}}{(b-a)(r+1)} + \frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b (x-t)^r p(t,s) f'(s)dsdt \tag{3.3.1}$$

dir. Burada her $x \in [a,b]$ için $p : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$

3.3.1 (3.1.15)' dan, her $x \in [a,b]$ için

$$\int_a^b (x-t)^r f(t)dt = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i x^{r-i} M_i \tag{3.3.2}$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca kısmi integral alınarak her $t \in [a,b]$ için

$$f(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s)ds + \frac{1}{b-a}\int_a^b p(t,s)f'(s)ds \tag{3.3.3}$$

yazılabilir. (3.3.3) ifadesi (3.3.2) de yerine yazılırsa lemma ispatlanmış olur. Aşağıdaki teorem mutlak sürekli ve esas itibari ile sınırlı türevlere sahip olasılık yoğunluk fonksiyonları için geçerlidir.

Teorem 3.3.1 $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonu $[a,b]$ de mutlak sürekli ve $f' \in L_\infty[a,b]$, $||f'||_\infty := ess\sup_{t\in[a,b]} |f'(t)| < \infty$ olmak üzere X bir rasgele değişken olsun. Bu takdirde, $r \geq 0$ olmak üzere her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i x^{r-i} M_i - \frac{(x-a)^{r+1} - (x-b)^{r+1}}{(b-a)(r+1)}\Big| \\
&\leq \frac{||f'||_\infty}{2(b-a)} \int_a^b |(x-t)^r|[(t-a)^2 + (b-t)^2]dt
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.3.2 (3.3.1) eşitliği uygulanarak yukarıda verilen Lemma'dan

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i x^{r-i} M_i - \frac{(x-a)^{r+1} - (x-b)^{r+1}}{(b-a)(r+1)}\Big| \\
&= \frac{1}{b-a}\Big|\int_a^b \int_a^b (x-t)^r p(t,s) f'(s)dsdt\Big| \\
&\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \int_a^b |(x-t)^r p(t,s)||f'(s)|dsdt \\
&\leq \frac{||f'||_\infty}{b-a}\int_a^b \int_a^b |(x-t)^r p(t,s)dsdt
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \int_a^b |(x-t)^r p(t,s)| ds dt \\
&\leq \int_a^b |(x-t)^r| \Big[\int_a^b (s-a) ds + \int_a^b (b-s) ds \Big] dt \\
&= \int_a^b |(x-t)^r| \Big[\frac{(t-a)^2 + (b-t)^2}{2} \Big] dt
\end{aligned}
$$

dir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 3.3.1 $f' \in L_\infty[a,b]$ ve $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonu $[a,b]$ de mutlak sürekli olsun. Bu takdirde, her $x \in [a,b]$ için $r \geq 2$ çift tamsayı ve $1/p + 1/q = 1$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\Big| \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i x^{r-i} M_i - \frac{(x-a)^{r+1} - (x-b)^{r+1}}{(b-a)(r+1)} \Big| \\
&\leq \frac{(-1)^r ||f'||_\infty}{2(b-a)} \left\{ \begin{array}{l} (x-a)^{r+3} B\Big(\frac{b-a}{x-a}, r+1, 3 \Big) \\ (b-x)^{r+3} B\Big(\frac{b-a}{b-x}, r+1, 3 \Big) \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{3.3.5}
$$

dır. Burada $B(.,.)$ fonksiyonu

$$
B(,.,) = \int_0^z (u-1)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du \quad \alpha, \beta > 0 \quad z \geq 1
$$

yarı tamamlanmamış Euler' in Beta fonksiyonudur.

3.3.3 $r \geq 2$ çift tamsayısı için (3.3.4)' dan;

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b |(x-t)^r| [(t-a)^2 + (b-t)^2] dt \\
&= \int_a^b (x-t)^r [(t-a)^2 + (b-t)^2] dt \\
&= (-1)^r \Big(\int_a^b (t-x)^r (t-a)^2 dt + \int_a^b (t-x)^r (b-t)^2 dt \Big)
\end{aligned} \tag{3.3.6}
$$

elde edilir. Buradan $t = (1-u)a + ux$ değişken değişimi yapılarak

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_a^b (t-x)^r (t-a)^2 dt \\
&= (x-a)^{r+3} \int_0^{(b-a)/(x-a)} (u-1)^r u^2 du \\
&= (x-a)^{r+3} B\Big(\frac{b-a}{x-a}, r+1, 3 \Big)
\end{aligned} \tag{3.3.7}
$$

ve $t = (1-v)a + vx$ değişken değişimi yapılarak

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_a^b (t-x)^r (b-t)^2 dt \\ &= (b-x)^{r+3} \int_0^{(b-a)/(b-x)} (v-1)^r v^2 dv \\ &= (x-a)^{r+3} B\Big(\frac{b-a}{b-x}, r+1, 3\Big) \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.2 $f' \in L_\infty[a,b]$ ve $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonu $[a,b]$ de mutlak sürekli olsun. Bu takdirde, $r \geq 2$ çift tamsayı ve $x = (a+b)/2, 1/p + 1/q = 1$ için

$$\begin{aligned} &\Big| \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i x^{r-i} M_i - \frac{(b-a)^r (1-(-1)^{r+1})}{(r+1)} \Big| \\ &\leq \frac{(-1)^r (b-a)^{r+2} ||f'||_\infty}{2^{r+3}} [B(r+1,3) + \Psi(r+1,3)] \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $B(.,.)$ Euler Beta fonksiyonu ve

$$\Psi(\alpha, \beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1} (1+u)^{\beta-1} du \ \ \alpha, \beta > 0 \ \ z \geq 1$$

dir.

3.3.4 (3.3.5)' de $x = (a+b)/2$ alalım. Bu takdirde (3.3.9)' ün sol tarafı açıktır. Sağ tarafı için

$$\begin{aligned} &B\Big(\frac{b-a}{x-a}, r+1, 3\Big) = B(2, r+1, 3) \\ &= \int_0^2 u^2 (u-1)^r du \\ &= \int_0^1 u^2 (u-1)^r du + \int_1^2 u^2 (u-1)^r du \\ &= B(r+1,3) + \Psi(r+1,3) \end{aligned}$$

dir. Bu durumda (3.3.9)' un sağ tarafı

$$\frac{(-1)^r ||f'||_\infty}{2(b-a)} \left\{ \begin{array}{l} (x-a)^{r+3} B\Big(\frac{b-a}{x-a}, r+1, 3\Big) \\ +(b-x)^{r+3} B\Big(\frac{b-a}{b-x}, r+1, 3\Big) \end{array} \right\} = \frac{(-1)^r (b-a)^{r+2} ||f'||_\infty}{2^{r+3}} [B(r+1,3) + \Psi(r+1,3)]$$

şeklindedir. Böylece sonuç ispatlanmış olur.

Teorem 3.3.2 $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonu $[a,b]$ de mutlak sürekli ve $f' \in L_p[a,b]$ olsun, yani

$$||f'||_p := \Big(\int_a^b |f'(t)|^p dt\Big)^{1/p} < \infty \;\; p \in (1,\infty)$$

olsun. Bu takdirde, her $x \in [a,b]$, $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$ ve $r \geq 0$ için

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^i x^{r-i}M_i - \frac{(x-a)^{r+1}-(x-b)^{r+1}}{(b-a)(r+1)}\Big| \\ &\leq \frac{||f'||_p}{(b-a)^{1/q}}\Big(\int_a^b |(x-t)^r|^q\Big[\frac{(t-a)^{q+1}+(b-t)^{q+1}}{q+1}\Big]dt\Big)^{1/q} \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

eşitsizliği verilir.

3.3.5 Lemma (3.3.1) uygulanırsa

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^i x^{r-i}M_i - \frac{(x-a)^{r+1}-(x-b)^{r+1}}{(b-a)(r+1)}\Big| \\ &= \frac{1}{b-a}\Big|\int_a^b\int_a^b (x-t)^r p(t,s)f'(s)dsdt\Big| \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b |(x-t)^r p(t,s)||f'(s)|dsdt \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Bir önceki teoremdeki yol izlenerek teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 3.3.3 $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonu $[a,b]$ de mutlak sürekli ve $f' \in L_p[a,b]$ olsun. Bu takdirde, $x = (a+b)/2$, $1/p + 1/q = 1 = 1$, $p > 1$ ve $r \geq 2$ çift tamsayısı için

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^i x^{r-i}M_i - \frac{(b-a)^r(1-(-1)^{r+1})}{2^{r+1}(r+1)}\Big| \\ &\leq \frac{(-1)^r(b-a)^{r+1+1/q}||f'||_p}{2^{r+1+1/q}(q+1)}[B(rq+1,q+2)+\Psi(rq+1,q+2)]^{1/q} \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

3.3.6 Bir önceki teoremde $x = (a+b)/2$ alalım. (3.3.11)' in sol tarafı açıktır. Sağ tarafı için

$$
\begin{aligned}
B\Big(\frac{b-a}{x-a}, rq+1, q+2\Big) &= B(2, rq+1, q+2)\\
&= \int_0^2 u^{q+1}(u-1)^{qr}du\\
&= \int_0^1 u^{q+1}(u-1)^{qr}du + \int_1^2 u^{q+1}(u-1)^{qr}du\\
&= B(rq+1, q+2) + \Psi(rq+1, q+2)
\end{aligned}
$$

olduğunu göz önüne alalım. Böylece (3.3.11)' in sağ tarafı

$$
\begin{aligned}
&\frac{||f'||_p}{(b-a)^{1/q}}\Big(\frac{(-1)^{qr}}{q+1}\Big\{ \begin{array}{l} (x-a)^{qr+q+2}B\Big(\frac{b-a}{x-a}, qr+1, q+2\Big) \\ +(b-x)^{qr+q+2}B\Big(\frac{b-a}{b-x}, qr+1, q+2\Big) \end{array} \Big\}\Big)^{1/q}\\
&= \frac{(-1)^r(b-a)^{r+1+1/q}||f'||_p}{2^{r+1+1/q(q+1)}}[B(rq+1, q+2) + \Psi(rq+1, q+2)]
\end{aligned}
$$

şeklini alır. Bu da sonucun ispatını tamamlar.

Sonuç 3.3.4 $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonu $[a, b]$ de mutlak sürekli ve $f' \in L_2[a, b]$ olsun. Bu takdirde, $x = (a + b)/2$ ve $p = q = r = 2$ için

$$
\sigma^2 \leq \mu[(a+b) - \mu] + 0.0833(b-a)^2 + 0.0330(b-a)^{7/2}||f'||_2
$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca eğer f mutlak sürekli ise $f' \in L_1[a, b]$ ve $||f'||_1 = \int_a^b |f(t)|dt$ olup aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.3 $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ olasılık yoğunluk fpnksiyonu $[a, b]$ mutlak sürekli olsun. Bu takdirde, $r \geq 0$ ve her $x \in [a, b]$ için

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^i x^{r-i}M_i - \frac{(x-a)^{r+1} - (x-b)^{r+1}}{(b-a)(r+1)}\Big|\\
&\leq ||f'||_1(b-a)\Big(\frac{b-a}{2} + \Big|x - \frac{a+b}{2}\Big|\Big)^r
\end{aligned} \tag{3.3.12}
$$

eşitsizliği verilir.

3.3.7 $r \geq 0$ için

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \int_a^b |(x-t)^r p(t,s)||f'(s)|dsdt \\
&\leq \sup_{t,s\in[a,b]^2} [|(x-t)^r||p(t,s)|] \int_a^b \int_a^b |f'(s)|dsdt \\
&= ||f'||_1 I
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada

$$
\begin{aligned}
I &= \sup_{t,s\in[a,b]^2}[|(x-t)^r||p(t,s)|] \\
&\leq (b-a)\sup_{t\in[a,b]} |(x-t)^r| \\
&= (b-a)[max(|x-a|,|b-x|)]^r \\
&= (b-a)\Big[\frac{b-a}{2} + \Big|x - \frac{a+b}{2}\Big|\Big]^r
\end{aligned}
$$

olup, böylece teorem ispatlanmış olur

Sonuç 3.3.5 $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ olasılık yoğunluk fonksiyonu $[a,b]$ de mutlak sürekli olsun. Bu takdirde, $r \geq 0$ için

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i x^{r-i} M_i - \frac{(b-a)^r(1-(-1)^{r+1})}{2^{r+1}(r+1)}\Big| \\
&\leq ||f'||_1 \frac{(b-a)^{r+1}}{2^r}
\end{aligned} \tag{3.3.13}
$$

eşitsizliği sağlanır.

3.4 Özel Ortalamalar İçin Uygulamalar

Bu kısımda ilk olarak aşağıdaki konveks dönüşümü göz önüne alalım. $f(x) = x^p$, $p > 1$, $x > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ olsun ve aritmetik ortalama $A(a^p, b^p) = (a^p + b^p)/2$, $a, b > 0$ ve

$$
f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) = A^p(a,b), \quad \frac{f(a)+f(b)}{2} = A(a^p b^p), \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = L_p^p(a,b) \tag{3.4.1}
$$

alınsın.

3.4.1 $p > 1$, $q = p/(p-1)$ ve $0 < a < b$ olsun. Bu takdirde, $r \geq 0$ için

$$
\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i x^{r-i} M_i \leq \Big(\frac{(x-a)^{pr+1} - (x-b)^{pr+1}}{(pr+1)}\Big)^{1/p} (b-a)^{1/q} L_{pq}^p(a,b) \tag{3.4.2}
$$

dır.

3.4.2 $f(x) = x^p$ konveks dönüşümü için Hölder İntegral Eşitsizliğini uygularsak

$$\int_a^b (x-t)^r f(t)dt \leq \Big(\int_a^b f^q(t)dt\Big)^{1/q}\Big(\int_a^b (x-t)^{pr}dt\Big)^{1/p}$$
$$= \Big(\int_a^b x^{pq}dx\Big)^{1/q}\Big(\frac{(x-a)^{pr+1}-(x-b)^{pr+1}}{(pr+1)}\Big)^{1/p}$$

olduğu görülür. (3.1.15)' dan

$$\int_a^b x^{pq}dx = (b-a)L_{pq}^{pq}(a,b)$$

yazılabilir ve böylece istenen eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 3.4.1 $x = (a+b)/2$ ve $r = 2$ için

$$\sigma^2 \leq \mu[(a+b)-\mu] + \Big(\frac{(b-a)^{2p+1}-(a-b)^{2p+1}}{2^{2p+1}(2p+1)} - \Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\Big)(b-a)^{1/q}L_{pq}^{p}(a,b)$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi de $f(x) = 1/x$, $x > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ dönüşümünü göz önüne alalım.

Logaritmik Ortalama, $L(a,b) = \begin{cases} \frac{b-a}{\ln b - \ln a}, & \text{eğer } a \neq b, \ \ a,b>0 \\ a, & \text{eğer } a = b, \ \ a,b > 0 \end{cases}$

Harmonik Ortalama, $H(a,b) = \frac{2}{1/a+1/b}$, $a, b > 0$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$-\frac{1}{a^2} \leq f'(x) = -\frac{1}{x^2} \leq -\frac{1}{b^2}$$

$$f\Big(\frac{a+b}{2} = A^{-1}(a,b)\Big), \quad \frac{f(a)+f(b)}{2} = H^{-1}(a,b), \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = L^{-1}(a,b) \quad (3.4.3)$$

olsun.

3.4.3 $p > 1$, $q = p/(p-1)$ ve $0 < a < b$ olsun. Bu takdirde, $r \geq 0$ için

$$\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^i x^{r-i}M_i \leq \Big(\frac{(x-a)^{pr+1}-(x-b)^{pr+1}}{(pr+1)}\Big)^{1/p}(b-a)^{1/q}L_{-pq}^{-p}(a,b) \qquad (3.4.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 3.4.2 (3.4.4)' den $x=(a+b)/2$ ve $r=2$ için

$$\sigma^2 \leq \mu[(a+b)-\mu]+\Big(\frac{(b-a)^{2p+1}-(a-b)^{2p+1}}{2^{2p+1}(2p+1)}-\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\Big)(b-a)^{1/q}L_{-pq}^{-p}(a,b) \quad (3.4.5)$$

eşitsizliği yazılabilir.

3.5 Beta Dağılımları İçin Uygulamalar

α ve β parametreli Beta olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için

$$f(x)=\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, \quad \alpha,\beta>0, \quad 0<x<1 \qquad (3.5.1)$$

dır. Burada $B(.,.)$ $B(\alpha,\beta)=\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}dz$ ile tanımlanan Beta fonksiyonunu gösterir. $f(x)$' in maksimum değeri için X' in değerini M ile gösterirsek

$$M=\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta-2}, \quad \alpha,\beta>1$$

elde edilir. 3.2.2' dan

$$T(h,h)=\frac{r^2}{(2r+1)(r+1)^2}$$

$r\geq 0$ ve $\alpha,\beta>1$ ve buradan da

$$M_r \leq \frac{1}{r+1}\Big(1+\frac{r(\alpha-1)}{2(\alpha+\beta-2)}\sqrt{\frac{1}{2r+1}}\Big) \qquad (3.5.2)$$

elde edilir. Ayrıca (3.2.2) ve (3.2.11)' den $r\geq 0$ ve $\alpha,\beta>1$ için

$$M_r \leq \frac{1}{r+1}+\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{r^2}{(2r+1)(r+1)^2}}||f'||_2 \qquad (3.5.3)$$

yazılabilir. Burada

$$||f'||_2=((\alpha-1)^2B(2\alpha-3,2\beta-1)+(\beta-1)^2B(2\alpha-1,2\beta-3)$$
$$-2(\alpha-1)(\beta-1)B(2\alpha-2,2\beta-2))^{1/2}$$

dır. (3.5.1)' dan, $\alpha=\beta$, $r\geq 0$ parametreli Beta rasgele değişkeni için

$$M_r \leq \frac{1}{r+1}\Big(1+\frac{r}{4}\sqrt{\frac{1}{2r+1}}\Big) \tag{3.5.4}$$

ve (3.5.3)' dan

$$M_r \leq \frac{1}{r+1}+\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{r^2}{(2r+1)(r+1)^2}}||f'||_2 \tag{3.5.5}$$

elde edilir. Burada $\Gamma(n)=(n-1)!$ ve

$$||f'||_2=(\alpha-1)\Big(\frac{2\Gamma(2\alpha-2)\Gamma(2\alpha-3)}{\Gamma(4\alpha-4)}\Big)^{1/2}$$

dır. $\alpha,\beta>0$ ve $r=1,2$ olduğunda (3.5.1)' den σ^2 ve μ için üst sınır

$$\begin{aligned}\mu &\leq \frac{1}{2}\Big(1+\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}\sqrt{\frac{1}{12}}\Big)\\ \sigma^2+\mu^2 &\leq \frac{1}{3}\Big(1+\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}\sqrt{\frac{1}{5}}\Big)\end{aligned} \tag{3.5.6}$$

ve dolayısıyla (3.5.3)' den

$$\begin{aligned}\mu &\leq \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}||f'||_2\Big)\\ \sigma^2+\mu^2 &\leq \frac{1}{3}\Big(1+\frac{2}{\pi\sqrt{5}}||f'||_2\Big)\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

elde edilir. Burada

$$||f'||_2=((\alpha-1)^2B(2\alpha-3,2\beta-1)+(\beta-1)^2B(2\alpha-1,2\beta-3)$$
$$-2(\alpha-1)(\beta-1)B(2\alpha-2,2\beta-2))^{1/2}$$

dır. (3.5.6)' den $\alpha=\beta$ olmak üzere Beta rasgele değişkenleri için

$$\begin{aligned}\mu &\leq \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{4\sqrt{3}}\Big)\\ \sigma^2+\mu^2 &\leq \frac{1}{3}\Big(1+\frac{1}{2\sqrt{5}}\Big)\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

ve dolayısıyla (3.5.7)' den

$$\mu \leq \frac{1}{2}\Big[1+\frac{1}{\pi}\Big(\frac{2}{3}\frac{(\alpha-1)\Gamma(2\alpha-2)\Gamma(2\alpha-3)}{\Gamma(4\alpha-4)}\Big)^{1/2}\Big]$$
$$\sigma^2+\mu^2 \leq \frac{1}{3}\Big[1+\frac{2}{\pi}\Big(\frac{2}{5}\frac{(\alpha-1)\Gamma(2\alpha-2)\Gamma(2\alpha-3)}{\Gamma(4\alpha-4)}\Big)^{1/2}\Big](||f'||_2) \tag{3.5.9}$$

elde edilir.

3.6 Yüksek Mertebeden Momentler İçin Sonuçlar

X rasgele değişkeninin daha yüksek mertebeden merkezi momentleri için aşağıdaki teoremi vererek işleme başlayalım.

Teorem 3.6.1 $F : [a,b] \to [0,1]$ dağılım fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için

$$\int_a^b (b-t)(t-a)^m dF = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(\mu-a)^k[(b-\mu)M_{m-k}-M_{m-k+1}] \;\; m=1,2,3,\ldots \tag{3.6.1}$$

eşitliği sağlanır.

3.6.1 (3.6.1)' in sol tarafını

$$\int_a^b (b-t)(t-a)^m dF = \int_a^b [(b-\mu)-(t-\mu)][(t-\mu)+(\mu-a)]^m dF$$

şekilde açar ve

$$[(t-\mu)+(\mu-a)]^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(\mu-a)^k(t-\mu)^{m-k}$$

binom açılımını kullanırsak

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (b-t)(t-a)^m dF \\
&= \int_a^b [(b-\mu)-(t-\mu)]\Big[\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(\mu-a)^k(t-\mu)^{m-k}\Big]dF \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(b-\mu)(\mu-a)^k\int_a^b (t-\mu)^{m-k}dF \\
&-\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(\mu-a)^k\int_a^b (t-\mu)^{m-k+1}dF
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Pratikde bir rasgele değişkenin dördüncü ve daha yüksek mertebeden momentleri nadiren kullanılır. Bununla beraber burada Teorem (3.6.1)' den faydalanılarak bir X rasgele değişkenin ilk dört merkezi momenti için bazı sonuçlar verilecektir.

Sonuç 3.6.1 (3.6.1)' de $m = 1$ $k = 0, 1$ alınırsa

$$\int_a^b (b-t)(t-a)dF = (b-\mu)(\mu-a) - M_2 \tag{3.6.2}$$

elde edilir.

Sonuç 3.6.2 (3.6.1)' de $m = 2$ $k = 0, 1, 2$ alınırsa

$$\int_a^b (b-t)(t-a)^2 dF = (b-\mu)(\mu-a)^2 + [(b-\mu)-2(\mu-a)]M_2 - M_3 \tag{3.6.3}$$

elde edilir.

Sonuç 3.6.3 (3.6.1)' de $m = 3$ $k = 0, 1, 2, 3$ alınırsa

$$\int_a^b (b-t)(t-a)^2 dF = (b-\mu)(\mu-a)^3 + 3(\mu-a)[(b-\mu)-(\mu-a)]M_2 \tag{3.6.4}$$

elde edilir.

3.7 Merkezi Momentler İçin Bazı Tahminler

Bu kısımda X rasgele değişkeninin merkezi momentleri için sınırlar belirlemede Barnett ve Dragomir' ın [9] vermiş olduğu sonuçlar ve Hölder Eşitsizliği [5] kullanılacaktır.

Teorem 3.7.1 $F : [a,b] \to [0,1]$ dağılım fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için $p > 1$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $r, s \geq$ olmak üzere

$$\int_a^b (b-t)^r (t-a)^s dF \leq \begin{cases} (b-a)^{r+s+1} \dfrac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)} ||f||_\infty \\ (b-a)^{2+\frac{1}{q}} [B(rq+1, sq+1)] ||f||_p \end{cases} \tag{3.7.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.7.1 $t = a(1-u) + bu$ olsun. Bu takdirde

$$\int_a^b (b-t)^r (t-a)^s dt = (b-a)^{r+s+1} \int_0^1 (1-u)^r u^s du$$

yazılabilir. $\int_0^1 u^s (1-u)^r du = \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)}$ olduğundan

$$\int_a^b (b-t)^r (t-a)^s dt = (b-a)^{r+s+1} \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)}$$

dır. Bu durumda

$$\int_a^b (b-t)^s (t-a)^r dF \geq 0 \quad r, s \geq 0 \tag{3.7.2}$$

belirli integral özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} &\int_a^b (b-t)^s (t-a)^r dF \\ &\leq ||f||_\infty \int_a^b (b-t)^s (t-a)^r dt \\ &= (b-a)^{r+s+1} \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)} ||f||_\infty \quad r, s \geq 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da (3.7.1)' deki ilk eşitsizliktir. Şimdi Hölder Eşitsizliğini uygulayalım:

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b (b-t)^s (t-a)^r dF \\
&\leq \Big[\int_a^b f^p(t)dt\Big]^{\frac{1}{p}} \Big[\int_a^b (b-t)^{sq}(t-a)^{rq}dt\Big]^{\frac{1}{q}} \\
&= (b-a)^{2+\frac{1}{q}} [B(rq+1, sq+1)] ||f||_p
\end{aligned}
$$

Bu ise (3.7.1)' deki ikinci eşitsizliktir.

Teorem 3.7.2 $F : [a,b] \to [0,1]$ dağılım fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için

$$
\begin{aligned}
&(b-a)^{r+s+1} \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)} \\
&\leq \int_a^b (b-t)^s (t-a)^r dF \\
&\leq M(b-a)^{r+s+1} \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)} \quad r,s \geq 0
\end{aligned}
\tag{3.7.3}
$$

dır.

3.7.2 $[a,b]$ aralığında $m \leq f \leq M$ ise bu takdirde $[a,b]$ aralığında

$$m(b-t)^s(t-a)^r \leq (b-t)^s(t-a)^r f \leq M(b-t)^s(t-a)^r$$

olup, $[a,b]$ aralığında integral alınarak teorem ispatlanmış olur.

3.7.1 İkinci Merkezi Moment(Varyans) İçin Sınırlar

(3.6.2) ve (3.7.2) eşitliklerinden X rasgele değişkeninin varyansı M_2 için üst sınır:

$$M_2 \leq (b-\mu)(\mu-a) \tag{3.7.4}$$

dır.

$$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \quad x,y \in \mathbb{R}$$

temel sonucunda $x = (b-\mu)$ ve $y = (\mu-a)$ alınarak

$$M_2 \leq \frac{(b-a)^2}{4} \tag{3.7.5}$$

elde edilir. Ve böylece

$$0 \leq M_2 \leq (b-\mu)(\mu-a) \leq \frac{(b-a)^2}{4} \tag{3.7.6}$$

dır.

(3.6.2) ve (3.7.1)' den

$$(b-\mu)(\mu-a) - M_2 \leq \frac{(b-a)^3}{6}||f||_\infty$$

$$(b-\mu)(\mu-a) - M_2 \leq ||f||_p (b-a)^{2+\frac{1}{q}}[B(q+1,q+1)] \quad p>1 \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

elde edilir. (3.6.2) ve (3.7.1)' den M_2 için diğer tahminler

$$m\frac{(b-a)^3}{6} \leq (b-\mu)(\mu-a) - M_2 \leq M\frac{(b-a)^3}{6} \quad m \leq f \leq M$$

olup bunun sonucunda

$$M_2 \leq (b-\mu)(\mu-a) - m\frac{(b-a)^3}{6} \quad m \leq f \leq M \tag{3.7.7}$$

şeklinde verilebilir.

3.7.2 Üçüncü Merkezi Momenti İçin Sınırlar

(3.6.3) ve (3.7.2)' den M_3 için bir üst sınır

$$M_3 \leq (b-\mu)(\mu-a)^2 + [(b-\mu) - 2(\mu-a)]M_2$$

dır. Ayrıca (3.6.3) ve (3.7.4)' den

$$M_3 \leq (b-\mu)(\mu-a)(a+b-2\mu) \tag{3.7.8}$$

eşitsizliği, (3.6.3) ve (3.7.5)' dan

$$M_3 \leq \frac{1}{4}[(b-\mu)^3 + (b-\mu)(\mu-a)^2 - 2(\mu-a)^3] \tag{3.7.9}$$

eşitsizliği ve (3.6.3) ve (3.7.7)' den

$$M_3 \leq (b-\mu)(\mu-a)(a+b+-2\mu) - \frac{m(b-a)^3(b+\mu-2a)}{6} \tag{3.7.10}$$

eşitsizliği yazılabilir.

3.7.3 Dördüncü Merkezi Momenti İçin Sınırlar

(3.6.4) ve (3.7.2)' dan M_4 için

$$M_4 \leq (b-\mu)(\mu-a)^3 + 3(\mu-a)[(b-\mu)-(\mu-a)]M_2 + [(b-\mu)-3(\mu-a)]M_3$$

dır. (3.6.4), (3.7.4) ve (3.7.8)' den

$$M_4 \leq (b-\mu)(\mu-a)[(b-a)^2 - 3(b-\mu)(\mu-a)] \tag{3.7.11}$$

dır. (3.6.4), (3.7.5) ve (3.7.9)' den

$$M_4 \leq \frac{1}{4}[(b-\mu)^4 + 4(b-\mu)^2(\mu-a)^2 - 4(b-\mu)(\mu-a)^3 + 3(\mu-a)^4] \tag{3.7.12}$$

dır. (3.6.4), (3.7.7) ve (3.7.10)' den

$$\begin{aligned} M_4 &\leq (b-\mu)(\mu-a)[(\mu-a)^2 + (a+b-2\mu)(a+b-4\mu) \\ &+3(b-\mu)(a+b-2\mu)] - \frac{m(b-a)^3(a+b-2\mu)(b-2a-\mu)}{6} \end{aligned} \tag{3.7.13}$$

dır.

3.8 Grüss Tipi Eşitsizliklere Dayalı Sonuçlar

Ön-Grüss eşitsizliğine dayanarak aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem 3.8.1 $F : [a,b] \to [0,1]$ dağılım fonksiyonuna sahip bir X rasgele değişkeni için $[a,b]$' de $m \leq f \leq M$ ve $r, s \geq 0$ olmak üzere:

$$\begin{aligned}&\Big|\int_a^b (b-t)^r (t-a)^s f(t)dt - (b-a)^{r+s}\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)}\Big| \\ &\leq \frac{1}{2}(M-m)(b-a)^{r+s+1}\Big[\frac{\Gamma(2r+1)\Gamma(2s+1)}{\Gamma(2r+2s+2)} - \Big(\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)}\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{3.8.1}$$

3.8.1 $h, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilir, verilen tüm integraller mevcut ve sonlu ve $[a,b]$' de $\gamma \leq h \leq \phi$ olmak üzere:

$$\begin{aligned}&\Big|\int_a^b h(t)g(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b h(t)dt\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\Big| \\ &\leq \frac{1}{2}(\phi-\gamma)\Big[\frac{1}{b-a}\int_a^b g^2(t)dt - \Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{3.8.2}$$

Ön-Grüss eşitsizliğini [5] uygulayalım. (3.8.2)' da $h(t) = f(t)$, $g(t) = (b-t)^r(t-a)^s$ olsun. Bu takdirde $[a,b]$' de $m \leq f \leq M$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&\Big|\int_a^b (b-t)^r(t-a)^s f(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\frac{1}{b-a}\int_a^b (b-t)^r(t-a)^s dt\Big| \\ &\frac{1}{2}(M-m)\Big[\frac{1}{b-a}\int_a^b (b-t)^r(t-a)^{s2}dt \\ &-\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b (b-t)^r(t-a)^s dt\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{3.8.3}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.7.2) ifadesi (3.8.3)' de yerine yazılarak teorem ispatlanır.

Sonuç 3.8.1 (3.8.2) bağıntısında $r = s = 1$ alınırsa

$$\Big|\int_a^b (b-t)(t-a)f(t)dt - \frac{(b-a)^2}{6}\Big| \leq \frac{(M-m)(b-a)^3}{12\sqrt{5}}$$

elde edilir.

Ön-Grüss eşitsizliğine dayanarak aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 3.8.1 $F : [a,b] \to [0,1]$ dağılım fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için $[a,b]$' de $m \leq f \leq M$ $r, s \geq 0$ olmak üzere:

$$\Big|\int_a^b (b-t)^r(t-a)^s f(t)dt-(b-a)^{r+s}\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)}\Big|$$
$$\frac{1}{2}(M-m)\Big[(b-a)\int_a^b f^2(t)dt-1\Big]^{\frac{1}{2}} \tag{3.8.4}$$

dır.

3.8.2 (3.8.2) Ön-Grüss eşitsizliğinde $h(t)=(b-t)^r(t-a)^s$, $g(t)=f(t)$ alınırsa lemmanın sağlandığı görülür. Lemma (3.8.1)' den faydalanarak aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 3.8.2 $F:[a,b]\to[0,1]$ dağılım fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için $[a,b]$' de $m\leq f\leq M$ $r,s\geq 0$ olmak üzere:

$$\Big|\int_a^b (b-t)^r(t-a)^s f(t)dt-(b-a)^{r+s}\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)}\Big|\leq\frac{1}{4}(b-a)(M-m)^2 \tag{3.8.5}$$

dır.

3.8.3 Barnett ve Dragomir [14]

$$|p|\leq\frac{1}{4}(\Gamma-\gamma)(\Phi-\phi),\quad \Gamma<f<\gamma,\quad \Phi<g<\phi$$

olmak üzere

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)dt=p+\Big(\frac{1}{b-a}\Big)^2\int_a^b f(t)dt\int_a^b g(t)dt \tag{3.8.6}$$

eşitliğini vermişlerdir. Bu eşitlikde $g=f$ alınarak

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)dt=p+\Big(\frac{1}{b-a}\Big)^2,\quad |p|\leq\frac{1}{4}(M-m),\quad M<f<m \tag{3.8.7}$$

elde edilir. Böylece (3.8.4) ve (3.8.7)' den teoremler ispatlanmış olur.

Barnett ve Dragomir [14] sonuçlarına dayanarak diğer bir eşitsizlik aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 3.8.3 $F : [a,b] \to [0,1]$ dağılım fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için $[a,b]$' de $m \le f \le M$ $r,s \ge 0$ olmak üzere

$$\Big|\int_a^b (b-t)^r(t-a)^s f(t)dt - (b-a)^{r+s}\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)}\Big| \le \frac{1}{4}M(M-m)(b-a) \quad (3.8.8)$$

dır.

3.8.4 Barnett ve Dragomir [14] $\gamma < f < \Gamma$ olmak üzere

$$\Big|\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(t)dt - \Big(\frac{1}{b-a}\Big)^n\Big| \le \frac{\Gamma^2}{4(b-a)^{n-2}}\Big[\frac{\Gamma^{n-1}(b-a)^{n-1}-1}{\Gamma(b-a)-1}\Big] \quad (3.8.9)$$

eşitsizliğini vermiştir. (3.8.9)' den

$$\Big[\Big|\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)dt - \Big(\frac{1}{b-a}\Big)^2\Big|\Big]^{\frac{1}{2}} \le \frac{M}{2}, \quad m \le f \le M$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik (3.8.4)' de yerine yazılırsa teorem ispatlanmış olur.

3.9 Hölder İntegral Eşitsizliğine Dayalı Sonuçlar

$t \in [a,b]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\Big|\int_a^t (t-u)^n f^{(n+1)}(u)du\Big| \\ &\le \Big(\int_a^t |f^{(n+1)}(u)|du\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_a^t (t-u)^{nq}du\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\le ||f^{(n+1)}||_p\Big[\frac{(t-a)^{nq+1}}{nq+1}\Big]^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (3.9.1)$$

Hölder İntegral Eşitsizliğini [5] göz önüne alalım. Bu eşitsizliği uygulayarak aşağıdaki teoremi verebiliriz. $F : [a,b] \to [0,1]$ dağılım fonksiyonuna sahip X rasgele değişkeni için $[a,b]$' de tanımlı f yoğunluk fonksiyonunun n. kez türevlenebildiğini ve $f^{(n)}$ $(n \ge 0)$' nin $[a,b]$' de mutlak sürekli olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$\Big|\int_a^b (t-a)^r(b-t)^s f(t)dt - \sum_{k=0}^{n}(b-a)^{r+s+k+1}\frac{\Gamma(s+1)\Gamma(r+k+1)}{\Gamma(r+s+k+2)}\Big|$$

$$\leq \frac{1}{n!}\begin{cases} \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{n+1}(b-a)^{r+s+n+2}\frac{\Gamma(r+n+2)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+n+3)} & f^{(n+1)}\in L_\infty[a,b] \\ \frac{||f^{(n+1)}||_p}{(nq+1)^{\frac{1}{q}}}(b-a)^{r+s+n+\frac{1}{q+1}}\frac{\Gamma(r+n+\frac{1}{q}+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+n+\frac{1}{q}+2)} & f^{(n+1)}\in L_p[a,b] \quad p>1 \\ ||f^{(n+1)}||_1(b-a)^{r+s+n+1}\frac{\Gamma(r+n+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+n+2)} & f^{(n+1)}\in L_1[a,b] \end{cases} \tag{3.9.2}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $||.||_p$ $(1\leq p\leq\infty)$ $[a,b]$' de Lebesque normlarıdır. Yani,

$$||g||_\infty = ess \sup_{t\in[a,b]}|g(t)| \quad ||g||_p = \Big(\int_a^b |g(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} \quad (p\geq 1)$$

dır.

3.9.1 f fonksiyonu a noktası civarında

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(t-a)^k}{k!}f^k(a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (t-u)^n f^{(n+1)}(u)du \quad t\in[a,b]$$

Taylor açılımını kullanarak

$$\begin{aligned}\int_a^b (t-a)^r(b-t)^s f(t)dt &= \sum_{k=0}^{n}\Big[\int_a^b (t-a)^{r+k}(b-t)^s dt\frac{f^k(a)}{k!}\Big] \\ &+\Big[\frac{1}{n!}\int_a^b (t-a)^r(b-t)^s\Big(\int_a^b (t-u)^n f^{(n+1)}(u)du\Big)dt\Big]\end{aligned} \tag{3.9.3}$$

elde edilir. $t=(1-x)a+xb$ dönüşümü uygulanırsa

$$\int_a^b (t-a)^{r+k}(b-t)^s dt = (b-a)^{r+s+k+1}\frac{\Gamma(s+1)\Gamma(r+k+1)}{\Gamma(r+s+k+2)} \tag{3.9.4}$$

eşitliği elde edilir. $t\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^t (t-u)^n f^{(n+1)(u)du}\Big| &\leq \int_a^t |(t-u)^n||f^{(n+1)}(u)|du \\ &\leq \sup_{u\in[a,b]}|f^{(n+1)}(u)|\int_a^t (t-u)^n du \\ &\leq ||f^{(n+1)}||_\infty\frac{(t-a)^{n+1}}{n+1}\end{aligned} \tag{3.9.5}$$

yazılabilir. Ayrıca $t \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned} \Big|\int_a^t (t-u)^n f^{(n+1)}(u)du\Big| &\leq \int_a^t (t-u)^n |f^{(n+1)}(u)|du \\ &\leq (t-a)^n \int_a^t |f^{(n+1)}(u)|du \\ &\leq ||f^{(n+1)}||(t-a)^n \end{aligned} \tag{3.9.6}$$

yazılabilir.

$$M(a,b) = \frac{1}{n!}\int_a^b (t-a)^r (b-t)^s \Big(\int_a^t (t-u)^n f^{(n+1)}(u)du\Big)dt \tag{3.9.7}$$

olsun. Bu takdirde (3.9.1) ve (3.9.5), (3.9.7)' de yerine yazılırsa

$$M(a,b) \leq \frac{1}{n!}\begin{cases} \dfrac{||f^{(n+1)}||_\infty}{n+1}\displaystyle\int_a^b (t-a)^{r+n+1}(b-t)^s dt & f^{(n+1)} \in L_\infty[a,b] \\ \dfrac{||f^{(n+1)}||_p}{(nq+1)^{\frac{1}{q}}}\displaystyle\int_a^b (t-a)^{r+n+\frac{1}{q}}(b-t)^s dt & f^{(n+1)} \in L_p[a,b] \quad p>1 \\ ||f^{(n+1)}||_1 \displaystyle\int_a^b (t-a)^{r+n}(b-t)^s dt & f^{(n+1)} \in L_1[a,b] \end{cases} \tag{3.9.8}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.9.3) ve (3.9.4) ve (3.9.8) eşitsizlikleri kullanılarak teoremler ispatlanmış olur.

Sonuç 3.9.1 (3.9.8) eşitsizliğinde $r = s = 1$ alınırsa

$$M(a,b) \leq \frac{1}{n!}\begin{cases} \dfrac{||f^{(n+1)}||_\infty}{n+1}\dfrac{(b-a)^{n+4}}{(n+3)(n+4)} & f^{(n+1)} \in L_\infty[a,b] \\ \dfrac{||f^{(n+1)}||_p}{(nq+1)^{\frac{1}{q}}}\dfrac{(b-a)^{n+\frac{1}{q}+3}}{(n+\frac{1}{q}+2)(n+\frac{1}{q}+3)} & f^{(n+1)} \in L_p[a,b] \quad p>1 \\ ||f^{(n+1)}||_1\dfrac{(b-a)^{n+3}}{(n+2)(n+3)} & f^{(n+1)} \in L_1[a,b] \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.10 Kırpık Üstel Dağılıma Uygulama

Kırpık üstel dağılım indirim ve tavan fiyata sahip sigortacılık ve yaşam testi alanında özellikle pek çok uygulamaya sahiptir denir.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{için} \quad 0 \leq x \leq c \\ 1 \quad \text{için} \quad x \leq c \end{cases}$$

dağılım fonksiyonuna sahip bir X rasgele değişkenine λ ve c parametreli bir kırpık üstel dağılıma sahiptir. X' in yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{için} \quad 0 \leq x \leq c \\ 0 \quad \text{için} \quad x \leq c \end{cases}$$

şeklindedir. Burada δ_c $x = c$ noktasında delta fonksiyonudur. Böylece bu dağılım $0 \leq x \leq c$ aralığında $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ sürekli dağılımı ile $x = c$ de $e^{-\lambda c}$ büyüklüklü bir nokta yoğunluğunun karmasıdır. Bu takdirde X' in moment çıkaran fonksiyonu

$$\begin{aligned} M_x(t) &= \int_0^c e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx + e^{tc} e^{-\lambda c} \\ &= \begin{cases} \dfrac{\lambda - te^{-c(\lambda - t)}}{\lambda - t} & \text{için} \quad t \neq \lambda \\ \lambda c + 1 \quad \text{için} \quad t = \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

dır. Aşağıdaki hesaplamalarda $t \neq \lambda$ kabul edilmiştir. $M_x(t)$ moment çıkaran fonksiyonundan

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1 - e^{-\lambda c}}{\lambda} \\ E(X^2) &= \frac{2[1 - (1 + \lambda c) e^{-\lambda c}]}{\lambda^2} \\ E(X^3) &= \frac{3[2 - (2 + 2\lambda c + \lambda^2 c^2) e^{-\lambda c}]}{\lambda^3} \\ E(X^4) &= \frac{4[6 - (6 + 6\lambda c + 3\lambda^2 c^2 + \lambda^3 c^3) e^{-\lambda c}]}{\lambda^4} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Daha yüksek mertebeden merkezi momentler

$$M_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} E(X^i) \mu^{k-i} \quad \text{için} \quad k = 2, 3, 4, \ldots$$

eşitliği ile hesaplanır. Özel olarak

$$M_2 = \frac{1 - 2\lambda c e^{-\lambda c} - e^{-2\lambda c}}{\lambda^2}$$

$$M_3 = \frac{16 - 3e^{-\lambda c}(10 + 4\lambda c + \lambda^2 c^2) + 6e^{-2\lambda c}(3 + \lambda c) - 4e^{-3\lambda c}}{\lambda^3}$$

$$M_4 = \frac{65 - 4e^{-\lambda c}(32 + 15\lambda c + 6\lambda^2 c^2 + \lambda^3 c^3)}{\lambda^4}$$

$$+ \frac{3e - 2\lambda c(30 + 16\lambda c + 4\lambda^2 c^2) - 4e^{-3\lambda c}(8 + 3\lambda c) + 5e^{-4\lambda c}}{\lambda^4}$$

dır. (3.7.6) Moment-Tahmin eşitsizliğini kullanarak M_2 için üst sınır dağılımın λ ve c parametreleri cinsinden

$$\hat{M}_2 \leq \frac{(1 - e^{-\lambda c})(\lambda c - 1 + e^{-\lambda c})}{\lambda^2}$$

şeklindedir. (3.7.8)' ü kullanarak M_3 için bir üst sınır

$$\hat{M}_3 \leq \frac{(2 - 3\lambda c + \lambda^2 c^2) - e^{-\lambda c}(6 - 6\lambda c + \lambda^2 c^2) + 3e^{-2\lambda c}(2 - \lambda c) - 2e^{-3\lambda c}}{\lambda^3}$$

ve (3.7.9)' ü kullanarak da:

$$\hat{M}_3 \leq \frac{(-3 + 4\lambda c - 3\lambda^2 c^2 + \lambda^3 c^3) + e^{-\lambda c}(9 - 8\lambda c + 3\lambda^2 c^2) - e^{-2\lambda c}(9 - 4\lambda c) + 3e^{-3\lambda c}}{4\lambda^3}$$

dır. Öte yandan M_4 için bir üst sınır ise (3.7.11)' i kullanarak

$$\hat{M}_4 \leq \frac{(-3 + 6\lambda c - 4\lambda^2 c^2 + \lambda^3 c^3) + e^{-\lambda c}(12 - 18\lambda c + 8\lambda^2 c^2 - \lambda^3 c^3)}{\lambda^4}$$

$$- \frac{2e^{-2\lambda c}(9 + 9\lambda c + 2\lambda^2 c^2) - 6e^{-3\lambda c}(2 - \lambda c) + 3e^{-4\lambda c}}{\lambda^4}$$

ve (3.7.12)' ı kullanarak da

$$\hat{M}_4 \leq \frac{(12 - 16\lambda c + 104\lambda^2 c^2 - 4\lambda^3 c^3 + \lambda^4 c^4) - 4e^{-\lambda c}(12 - 12\lambda c + 5\lambda^2 c^2 - \lambda^3 c^3)}{4\lambda^4}$$

$$+ \frac{2e^{-2\lambda c}(36 + 24\lambda c + 5\lambda^2 c^2) - 16e^{-3\lambda c}(3 - \lambda c) + 12e^{-4\lambda c}}{4\lambda^4}$$

şeklinde verilebilir.

3.11 Standart Sapma İçin Bazı Eşitsizlikler

Bu kısımda olasılık yoğunluk fonksiyonu f sonlu bir $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli bir X rasgele değişkeninin standart sapması için bazı eşitsizlikler vereceğiz.

X bir rasgele değişken olmak üzere X' in olasılık yoğunluk fonksiyonunu $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, X' in beklenen değerini

$$E(X) := \int_a^b t f(t) dt$$

ve X' in standart sapmasını

$$\sigma(X) = \left[\int_a^b (t - E(X))^2 f(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_a^b t^2 f(t) dt - [E(X)]^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

ile gösterelim. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.11.1 Yukarıdaki varsayımlar altında

$$0 \leq \sigma(X) \leq \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}(b-a)^2}{6} ||f||_\infty & f \in L_\infty[a,b] \\ \\ \dfrac{\sqrt{2}(b-a)^{1+\frac{1}{q}}}{2[(q+1)(2q+1)]^{\frac{2}{q}}} ||f||_p & f \in L_p[a,b] \\ \\ \dfrac{\sqrt{2}(b-a)}{2} \quad p > 1 & \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \end{cases} \tag{3.11.1}$$

dır.

3.11.1 Korkine Özdeşliği [3]

$$\begin{aligned} &\int_a^b p(t) dt \int_a^b p(t) g(t) h(t) dt - \int_a^b p(t) g(t) dt . \int_a^b p(t) h(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b p(t) p(s) (g(t) - g(s))(h(t) - h(s)) dt ds \end{aligned} \tag{3.11.2}$$

şeklinde olup bu eşitlik (3.11.2)' deki integraller mevcut ve sonlu olmak üzere $p, g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ ölçülebilir dönüşümleri için sağlanır. (3.11.2)' de $p(t) = f(t)$, $g(t) = h(t) = t - E(X)$, $t \in [a,b]$ seçilirse

$$\sigma^2(X) = \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b f(t)f(s)(t-s)^2 dtds \tag{3.11.3}$$

eşitliği yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_a^b f(t)f(s)(t-s)^2 dtds &\leq \sup_{(t,s)\in[a,b]^2} |f(t)f(s)| \int_a^b | \int_a^b (t-s)^2 dtds \\ &= \frac{(b-a)^4}{6}||f||_\infty^2\end{aligned} \tag{3.11.4}$$

yazılabilir. Bu takdirde (3.11.3)' e göre (3.11.1)' in birinci kısmı elde edilir. İkinci kısım için iki katlı integraller için Hölder' in integral eşitsizliği uygulanırsa $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_a^b f(t)f(s)(t-s)^2 dtds &\leq \Big(\int_a^b\int_a^b f^p(s)dtds\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_a^b\int_a^b (t-s)^{2q}dtds\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &= ||f||_p^2\Big[\frac{(b-a)^{2q+2}}{(q+1)(2q+1)}\Big]^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece (3.11.1) ikinci kısmıda sağlanmış olur. Son kısım için

$$\int_a^b\int_a^b f(t)f(s)(t-s)^2 dtds \leq \sup_{(t,s)\in[a,b]^2}(t-s)^2\int_a^b\int_a^b f(t)f(s)dtds = (b-a)^2$$

olduğunu belirtelim. Çünkü

$$\int_a^b\int_a^b f(t)f(s)dtds = \int_a^b f(t)dt\int_a^b f(s)ds = 1$$

dır.

Teorem 3.11.2 Yukarıdaki varsayımlar altında

$$0 \leq \sigma(X) \leq \frac{1}{2}(b-a) \tag{3.11.5}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.11.2 Aşağıdaki Grüss tipi eşitsizliği kullanalım:

$$0 \leq \frac{\int_a^b p(t)g^2(t)dt}{\int_a^b p(t)dt} - \left(\frac{\int_a^b p(t)g(t)dt}{\int_a^b p(t)dt}\right)^2 \leq \frac{1}{4}(M-m)^2 \qquad (3.11.6)$$

Öyle ki p, q $[a, b]$ üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar, (3.11.6)' daki tüm integraller mevcut ve sonlu, $\int_a^b p(t)dt > 0$ ve $[a, b]$ de $m \leq g \leq M$ dir. (3.11.6)' de $p(t) = f(t)$, $g(t) = t - E(X)$, $t \in [a, b]$ seçelim. Bu durumda $m = a - E(X)$, $M = b - E(X)$ alırız. (3.11.6)' dan (3.11.2) elde edilir.

Remark 3.11.1 Aynı tartışma $g(t) = f(t)$ ve $g(t) = t$, $t \in [a, b]$ seçilerekde elde edilir. Şimdi aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Teorem 3.11.3 X , $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ile verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olsun. Bu takdirde herhangi bir $x \in [a, b]$ için

$$\sigma^2(X) + (x - E(X))^2 \leq \begin{cases} (b-a)\Big[\frac{(b-a)^2}{12} + \Big(x - \frac{a+b}{2}\Big)^2\Big]||f||_\infty & f \in L_\infty[a, b] \\ \Big[\frac{(b-a)^{2q+1} + (x-a)^{2q+1}}{2q+1}\Big]^{\frac{1}{q}}||f||_p & f \in L_p[a, b] \quad p > 1 \\ \Big(\frac{b-a}{2} + \Big|x - \frac{a+b}{2}\Big|\Big)^2 & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{cases} \qquad (3.11.7)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.11.3

$$\int_a^b (x-t)^2 f(t)dt = \int_a^b (x^2 - 2xt + t^2) f(t)dt = x^2 - 2xE(X) + \int_a^b t^2 f(t)dt \qquad (3.11.8)$$

olduğunu belirtelim ve

$$\sigma^2(X) = \int_a^b t^2 f(t)dt - [E(X)]^2 \qquad (3.11.9)$$

olduğundan (3.11.8) ve (3.11.9)' a göre

$$[x - E(X)]^2 + \sigma^2(X) = \int_a^b (x-t)^2 f(t)dt \qquad (3.11.10)$$

eşitliği yazılablir ki bu eşitsizlik kendi başına ilginçtir. Öte yandan

$$\int_a^b (x-t)^2 f(t)dt \le ess \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \int_a^b (x-t)^2 dt$$

$$= ||f||_\infty \frac{(b-x)^3+(x-a)^3}{3}$$

$$= (b-a)||f||_\infty \left[\frac{(b-a)^2}{12} + \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$

yazılabilir. Böylece (3.11.7)' de ilk eşitsizlik sağlanmış olur. İkinci eşitsizlik için Hölder' in integral eşitsizliğine göre

$$\int_a^b (x-t)^2 f(t)dt \le \left(\int_a^b f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (x-t)^{2q}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= ||f||_p \left[\frac{(b-x)^{2q+1}+(x-a)^{2q+1}}{2q+1}\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece (3.11.7)' deki ikinci eşitsizlik te sağlanmış olur. Son olarak

$$\int_a^b (x-t)^2 f(t)dt \le \sup_{t\in[a,b]} (x-t)^2 \int_a^b f(t)dt$$

$$= \max\left\{(x-a)^2, (b-x)^2\right\}$$

$$= (\max\{x-a, b-x\})^2$$

$$= \left(\frac{b-a}{2} + \left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right)^2$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Böylece de ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.11.1 Yukarıdaki varsayımlar altında

$$0 \leq \sigma(X) \leq \begin{cases} (b-a)^{\frac{1}{2}}\left[\dfrac{(b-a)^2}{12} + \left(E(X) - \dfrac{a+b}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} ||f||_{\infty}^{\frac{1}{2}} & f \in L_{\infty}[a,b] \\ \left[\dfrac{(b-E(X))^{2q+1} + (E(X)-a)^{2q+1}}{2q+1}\right]^{\frac{1}{2q}} ||f||_{p}^{\frac{1}{2}} & f \in L_p[a,b] \quad p > 1 \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \\ \dfrac{b-a}{2} + \left|E(X) - \dfrac{a+b}{2}\right| & \end{cases} \tag{3.11.11}$$

dır.

Remark 3.11.2 (3.11.11)' daki son eşitisizlik (3.11.2)' verilen eşitsizlikten daha kötü olup Grüss eşitisizliğine dayanan bir teknikle elde edilmiştir. (3.11.7)' den elde edebileceğimiz en iyi eşitsizlik $x = \frac{a+b}{2}$ için yazılan eşitsizliktir. Ve

$$\min_{x\in[a,b]} \left[\frac{(b-a)^2}{12} + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\min_{x\in[a,b]} \frac{(b-x)^{2q+1} + (x-a)^{2q+1}}{2q+1} = \frac{(b-a)^{2q+1}}{2^{2q}(2q+1)}$$

ve

$$\min_{x\in[a,b]} \left[\frac{b-a}{2} + \left|x - \frac{a+b}{2}\right|\right] = \frac{b-a}{2}$$

olduğudan bu eşitsizlik tüm sınırlar için uygulanabilir. Sonuç olarak aşağıdaki eşitiszliği ifade edebiliriz.

Sonuç 3.11.2 Yukarıdaki varsayımlar altında

$$0 \leq \sigma^2(X) + \left[E(X) - \frac{a+b}{2}\right]^2 \leq \begin{cases} \dfrac{(b-a)^3}{12} ||f||_{\infty} & f \in L_{\infty}[a,b] \\ \dfrac{(b-a)^{2q+1}}{4(2q+1)^{\frac{1}{q}}} ||f||_p & f \in L_p[a,b] \quad p > 1 \\ \dfrac{(b-a)^2}{4} & \end{cases} \tag{3.11.12}$$

eşitsizliği elde edilir.

Remark 3.11.3 (3.11.12)' de son eşitsizlikten

$$0 \leq \sigma^2(X) \leq (b - E(X))(E(X) - a) \leq \frac{1}{4}(b-a)^2 \tag{3.11.13}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise (3.11.2) eşitsizliği üzerinde bir ilerlemedir.

3.12 Grüss Tipi Eşitsizlikleri Kullanılarak Oluşan Sonuçlar

1935 de Grüss, bir çarpımın integralini integrallerin çarpımı cinsinden yaklaşık olarak veren aşağıdaki integral eşitsizliğini ortaya koymuştur.

Teorem 3.12.1 *$h, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ her $x \in [a, b]$ için $\phi \leq h(x) \leq \Phi$ ve $\gamma \leq g(x) \leq \Gamma$ olacak şekilde iki integrallenebilir dönüşüm $\phi, \Phi, \gamma, \Gamma$ reel sayılar olsun. Bu takdirde*

$$|T(h, g)| \leq \frac{1}{4}(\Phi - \phi)(\Gamma - \gamma) \tag{3.12.1}$$

dir. Burada

$$T(h, g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b h(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b h(x)dx.\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx \tag{3.12.2}$$

olup eşitsizlik $\frac{1}{4}$ sabiti daha küçük bir sayıyla yerdeğişmedikçe keskindir.

Teorem 3.12.2 *h, g $[a, b]$' de tanımlı integrallenebilir fonksiyonlar ve $d \leq g(t) \leq D$ olsun. Bu takdirde $T(h, g)$ (3.12.2)' de tanımlandığı gibi olacak üzere*

$$|T(h, g)| \leq \frac{D - d}{2}|T(h, h)|^{\frac{1}{2}} \tag{3.12.3}$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi bu teoremi bir olasılık yoğunluk fonksiyonunun beklenen değer ve varyansını içeren bir kuralı ispatlamada kullanacağız.

Teorem 3.12.3 X $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ ile verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olsun. Bu takdirde herhangi bir $x\in[a,b]$ ve $m\leq f(x)\leq M$ için

$$\begin{aligned}|P_V(x)| &:= \left|\sigma^2(X)+(x-E(X))^2-\frac{(b-a)^2}{12}-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right| \\ &\leq \frac{M-m}{2}.\frac{(b-a)^2}{\sqrt{45}}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+15\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (3.12.4)\\ &\leq (M-m)\frac{(b-a)^3}{\sqrt{45}}\end{aligned}$$

eşitliği gerçeklenir.

3.12.1 $h(t)=(x-t)^2$ ve $g(t)$ ile $f(t)$ değişim yaparak (3.12.3) Grüss sonucu uygulanarak (3.12.1) - (3.12.3) eşitsizliklerinden

$$\left|\int_a^b (x-t)^2 f(t)dt-\frac{1}{b-a}\int_a^b (x-t)^2dt.\int_a^b f(t)dt\right|\leq (b-a)\frac{M-m}{2}[T(h,h)]^{\frac{1}{2}} \quad (3.12.5)$$

elde edilir. Burada (3.12.2)' den

$$T(h,h)=\frac{1}{b-a}\int_a^b (x-t)^4dt-\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b (x-t)^2dt\right]^2 \quad (3.12.6)$$

dır. Şimdi

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (x-t)^2dt=\frac{(x-a)^3+(b-x)^3}{3(b-a)}=\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (3.12.7)$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (x-t)^4dt=\frac{(x-a)^5+(b-x)^5}{5(b-a)}$$

eşitliğini göz önüne alırsak (3.12.6) için

$$45T(h,h)=9\left[\frac{(x-a)^5+(b-x)^5}{b-a}\right]-5\left[\frac{(x-a)^3+(b-x)^3}{b-a}\right]^2 \quad (3.12.8)$$

elde edilir. $A = x - a$ ve $B = b - x$ alınırsa (3.12.8)' den

$$45T(h,h) = 9\left(\frac{A^5 + B^5}{A + B}\right) - 5\left(\frac{A^3 + B^3}{A + B}\right)^2$$

$$= 9[A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4] - 5[A^2 - AB + B^2]^2$$

$$= (4A^2 - 7AB + 4B^2)(A + B)^2$$

$$= \left[\left(\frac{A + B}{2}\right)^2 + 15\left(\frac{A - B}{2}\right)^2\right](A + B)^2$$

olduğu görülür. $A + B = b - a$ ve $A - B = 2x - (a + b)$ gerçekleri kullanılarak

$$T(h,h) = \frac{(b-a)^2}{45}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + 15\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] \tag{3.12.9}$$

ve (3.12.7)' den de

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (x-t)^2 dt = \frac{A^3 + B^3}{3(A+B)} = \frac{1}{3}[A^2 - AB + B^2] = 1\frac{}{3}\left[\left(\frac{A+B}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{A-B}{2}\right)^2\right]$$

ve buradan da

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (x-t)^2 dt = \frac{(b-a)^2}{12} + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \tag{3.12.10}$$

eşitliği elde edilir. Böylece (3.12.5) , (3.12.9) , (3.12.10) ve (3.11.10)' dan (3.12.4)' deki birinci sonuç elde edilmiş olur. x i bir uç noktada alarak en kaba düzgün sınır elde edilir. Böylece teorem tamamlanarak ispatlanmış olur.

Remark 3.12.1 (3.12.4)' den elde edilen en iyi eşitsizlik $x = \frac{a+b}{2}$' deki değer olup

$$\left|\sigma^2(X) + \left[E(X) - \frac{a+b}{2}\right]^2 - \frac{(b-a)^2}{12}\right| \le \frac{M-m}{12}\frac{(b-a)^3}{\sqrt{5}} \tag{3.12.11}$$

dır. $0 \le M - m \le 2||f||_\infty$ olduğundan (3.12.11) sonucu (3.11.12)' nin birinci kısmında elde edilenden daha ince bir sınırdır. Simetrik bir olasılık yoğunluk fonksiyonu için $E(X) = \frac{a+b}{2}$ olup yukarıdaki sonuçlar sağlanır. Eğer $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu türevlenebilir ise yani $f(x)$ mutlak olarak sürekli ise aşağıdaki sonuçlar sağlanır.

Teorem 3.12.4 Teorem (3.12.4)' ün şartları sağlansın. Ayrıca f türevlebnebilir ve

$$||f'||_\infty := \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)| < \infty$$

olsun. Bu takdirde

$$|P_V(x)| \leq \frac{b-a}{\sqrt{12}} ||f'||_\infty . I(x) \tag{3.12.12}$$

dir. Burada $P_v(x)$ (3.12.4)' nin sol tarafında verildiği gibi olup

$$I(x) = \frac{(b-a)^2}{\sqrt{45}} \left[\left(\frac{b-a}{2} \right)^2 + 15 \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.12.13}$$

dir.

3.12.2 $h, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mutlak sürekli ve h', g' sınırlı olsun. Bu takdirde Chebychev eşitsizliğinden [7]

$$|T(h,g)| \leq \frac{(b-a)^2}{12} \sup_{t\in[a,b]} |h'(t)| . \sup_{t\in[a,b]} |g'(t)|$$

sağlanır. Öte yandan Matic , Peranic ve Ujevic [7]

$$|T(h,g)| \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{12}} \sup_{t\in[a,b]} |g'(t)| \sqrt{T(h,h)} \tag{3.12.14}$$

olduğunu ispatlamışlardır. (3.12.13) ifadesinde $f(.)$ ile $g(.)$ ve $(x-.)^2$ ile $h(.)$ değiştirilerek (3.12.5) ve (3.12.9)' den $I(x) = (b-a)[T(h,h)]^{\frac{1}{2}}$ elde edilir ki bu da (3.12.13)' yı basitleştirir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.12.5 Teorem (3.12.4)' ün şartları sağlansın. Ayrıca f (a,b)' de lokal mutlak sürekli ve $f' \in L_2(a,b)$ olsun. Bu takdirde $P_v(x)$ (3.12.4)' nin sol tarafında ve $I(x)$' de (3.12.13)' da verildiği şekilde olmak üzere

$$|P_V(x)| \leq \frac{b-a}{\pi} ||f'||_2 . I(x) \tag{3.12.15}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.12.3 Aşağıdaki sonuç Lupaş [7] tarafından elde edilmiştir. $h, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, (a, b) de lokal mutlak sürekli ve $h', g' \in L_2(a, b)$ fonksiyonları için

$$|T(h,g)| \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} ||h'||_2^{\dagger} ||g'||_2^{\dagger}$$

dır. Burada

$$||k||_2^{\dagger} := \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b |k(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{için} \quad k \in L_2(a,b)$$

dır. Matic , Peranic ve Ujevic [7] ayrıca

$$|T(h,g)| \leq \frac{b-a}{\pi} ||g'||_2^{\dagger} \sqrt{T(h,h)} \tag{3.12.16}$$

olduğunu göstermişlerdir. (3.12.16)' da $f(.)$ ile $g(.)$' yi ve $(x - .)^2$ ile h yerdeğiştirerek (3.12.15) elde edilir. Burada (3.12.5) , (3.12.9)' den $I(x) = (b-a)[T(h,h)]^{\frac{1}{2}}$ olduğundan $I(x)$ (3.12.15)' de elde edildiği gibidir. Şimdi varyansı içeren eşitsizlikler için alternatif Grüss tipi sonuçlar verelim.

$$S(h(x)) = h(x) - \mathcal{M}(h) \tag{3.12.17}$$

olsun. Burada

$$\mathcal{M}(h) = \frac{1}{b-a} \int_a^b h(u)du \tag{3.12.18}$$

dır. Bu takdirde (3.12.2)' den

$$T(h,g) = \mathcal{M}(hg) - \mathcal{M}(h)\mathcal{M}(g) \tag{3.12.19}$$

elde edilir. Dragomir ve McAndrew [19]

$$T(h,g) = T(S(h), S(g)) \tag{3.12.20}$$

olduğunu göstermişler ve bazı sınırlar elde etmek için bunu kullanmışlardır. (3.12.20) özdeşliğini varyans için sınırlar elde etmede kullanalım.

Teorem 3.12.6 X $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olsun. Bu takdirde herhengi bir $x \in [a,b]$ için

$$|P_V(x)| \leq \frac{8}{3} v^3(x) \left\| |f(.) - \frac{1}{b-a} \right\| |_\infty \quad L_\infty[a,b] \tag{3.12.21}$$

eşitliği sağlanır ve burada $P_v(x)$ (3.12.4)'ün sol tarafında tanımladığı gibidir ve $v = v(x) = \frac{1}{3}(\frac{b-a}{2})^2 + (x - \frac{a+b}{2})^2$ dir.

3.12.4 $h(.)$ ile $(x-.)^2$' yi ve $F(.)$ ile $g(.)$ yerdeğiştirip (3.12.20) özdeşliği kullanılarak

$$\int_a^b (x-t)^2 f(t)dt - \mathcal{M}((x-.)^2) = \int_a^b [(x-t)^2 - \mathcal{M}((x-.)^2)] \left[f(t) - \frac{1}{b-a} \right] dt \tag{3.12.22}$$

olup (3.12.17)' dan

$$\mathcal{M}((x-.)^2) = \frac{1}{b-a} \int_a^b (x-t)^2 dt = \frac{1}{3(b-a)} [(x-a)^3 + (b-x)^3]$$

ve dolayısıyla

$$3\mathcal{M}((x-.)^2) = \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 + 3 \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \tag{3.12.23}$$

elde edilir. Ayrıca (3.12.16)' den

$$S((x-.)^2) = (x-t)^2 - \mathcal{M}((x-.)^2)$$

ve dolayısıyla (3.12.23) eşitliği kullanılarak

$$S((x-.)^2) = (x-t)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \tag{3.12.24}$$

elde edilir. (3.11.10) , (3.12.23) ve (3.12.24) kullanılarak (3.12.22)' den aşağıdaki özdeşlik elde edilir.

$$\sigma^2(X) + [x - E(X)]^2 - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{b-a}{2} \right)^2 + 3 \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \right] = \int_a^b S((x-t)^2) \left(f(t) - \frac{1}{b-a} \right) dt \tag{3.12.25}$$

burada $S(.)$ (3.12.24) ve verildiği gibidir. (3.12.25) 'ın modülleri alınarak

$$|P_V(x)| = \left| \int_a^b S((x-t)^2)\left(f(t) - \frac{1}{b-a}\right)dt \right| \tag{3.12.26}$$

elde edilir. $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun normları ilgili olarak farklı varsayımlar altında değişik sınırların elde edilebileceğini belirtelim. $f \in L_\infty[a,b]$ için

$$|P_V(x)| \leq \left\| f(.) - \frac{1}{b-a} \right\|_\infty \int_a^b |S((x-t)^2)|dt \tag{3.12.27}$$

yazılabilir. Böylece

$$S((x-t)^2) = (t-x)^2 - v^2 = (t - X_-)(t - X_+) \tag{3.12.28}$$

olsun. Burada

$$v^2 = \mathcal{M}((x-.)^2) = \frac{(x-a)^3 + (b-x)^3}{3(b-a)} = \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \tag{3.12.29}$$

ve

$$X_- = x - v \quad , \quad X_+ = x + v \tag{3.12.30}$$

dır. Bu takdirde

$$H(t) = \int S((x-t)^2)dt = \int [(t-x)^2 - v^2]dt = \frac{(t-x)^3}{3} - v^2 t + k \tag{3.12.31}$$

ve buradan da (3.12.28) ve (3.12.29) göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b |S((x-t)^2)|dt \\
&= H(X_-) - H(a) - [H(X_+) - H(X_-)] + [H(b) - H(X_+)] \\
&= 2[H(X_-) - H(X_+)] + H(b) - H(a) \\
&= 2\left\{ -\frac{v^3}{3} - v^2 X_- - \frac{v^3}{3} + v^2 X_+ \right\} + \frac{(b-x)^3}{3} - v^2 b + \frac{(x-a)^3}{3} + v^2 a \qquad (3.12.32) \\
&= 2\left[2v^3 - \frac{2}{3}v^3 \right] + \frac{(b-x)^3 + (x-a)^3}{3} - v^2(b-a) \\
&= \frac{8}{3}v^3
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece (3.12.26)' yı (3.12.27) de yerine koyarsak ve (3.12.29)' ı uygularsak kolaylıkla (3.12.21) sonucuna ulaşırız ve buradan da teorem ispatlanmış olur.

Remark 3.12.2 Bununla beraber bu sınırlar için açık ifadelerin elde edilmesine burada girmeyeceğimize rağmen $f \in L_p[a,b], p \geq 1$ için diğer sınırlar elde edilebilir. Onlar $f \in L_1[a,b]$ için

$$\sup_{t\in[a,b]} |(t-x)^2 - v^2| = \max\{|(x-a)^2 - v^2|, v^2, |(b-x)^2 - v^2|\}$$

ifadesinin ve $f \in L_p[a,b], \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$ için

$$\left(\int_a^b |(t-x)^2 - v^2|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

nun hesaplamasını gerektirir. Burada v^2 (3.12.29) de verildiği gibidir.

3.13 Mutlak Sürekli Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları İçin Bazı Eşitsizlikler

Aşağıdaki ilginç Lemma' yı vererek işe başlayalım.

Lemma 3.13.1 X $[a,b]$ de mutlak sürekli $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olsun. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$\sigma^2(X) + [E(X) - x]^2 = \frac{(b-a)^2}{12} + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{b-a}\int_a^b \int_a^b (t-x)^2 p(t,s) f'(s) ds dt \tag{3.13.1}$$

özdeşliği sağlanır. Burada $p : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$

$$p(t,s) := \begin{cases} s-a & , \quad a \le s \le t \le b \\ s-b & , \quad a \le t \le s \le b \end{cases}$$

dır.

3.13.1 Her $x \in [a,b]$ için

$$\sigma^2(X) + [E(X) - x]^2 = \int_a^b (x-t)^2 f(t) dt \tag{3.13.2}$$

eşitliğini kullanalım. Öte yandan kısmi integrasyon kullanılarak kolayca gösterilebilir ki her $t \in [a,b]$ için

$$f(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s) ds + \frac{1}{b-a}\int_a^b p(t,s) f'(s) ds \tag{3.13.3}$$

yazılabilir. (3.13.3) eşitliği (3.12.31) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &\sigma^2(X) + [E(X) - x]^2 \\ &= \int_a^b (t-x)^2 \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(s) ds + \frac{1}{b-a}\int_a^b p(t,s) f'(s) ds\right] dt \\ &= \frac{1}{b-a} . \frac{1}{3}[(x-a)^3 + (b-x)^3] + \frac{1}{b-a}\int_a^b \int_a^b (t-x)^2 p(t,s) f'(s) ds dt \end{aligned} \tag{3.13.4}$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{1}{3}[(x-a)^3 + (b-x)^3] = \frac{(b-a)^2}{12} + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \quad x \in [a,b]$$

ve dolayısıyla (3.13.4)' e göre (3.12.31) sonucunun iddia edildiği gibi sağlandığı gösterilmiş olur.

Teorem 3.13.1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ $[a,b]$ de mutlak sürekli ve $f'\in L_\infty[a,b]$ yani $||f'||_\infty = ess\sup|f'(t)|<\infty$ olsun. Bu takdirde her $x\in[a,b]$ için

$$\left|\sigma^2(X)+[E(X)-x]^2-\frac{(b-a)^2}{12}-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right| \le \frac{(b-a)^2}{3}\left[\frac{(b-a)^2}{10}+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]||f'||_\infty \tag{3.13.5}$$

eşitsizliği yazılabilir.

3.13.2 Lemma'ya göre

$$\begin{aligned}
&\left|\sigma^2(X)+[E(X)-x]^2-\frac{(b-a)^2}{12}-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right|\\
&=\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b\int_a^b(t-x)^2p(t,s)f'(s)dsdt\right|\\
&\le\frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b(t-x)^2|p(t,s)||f'(s)|dsdt\\
&\le\frac{||f'||_\infty}{b-a}\int_a^b\int_a^b(t-x)^2|p(t,s)|dsdt
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir.

$$\begin{aligned}
I &:= \int_a^b\int_a^b(t-x)^2|p(t,s)|dsdt\\
&=\int_a^b(t-x)^2\left[\int_a^t(s-a)ds+\int_t^b(b-s)ds\right]dt\\
&=\int_a^b(t-x)^2\left[\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{2}\right]dt\\
&=\frac{1}{2}\left[\int_a^b(t-x)^2(t-a)^2dt+\int_a^b(t-x)^2(b-t)^2dt\right]\\
&=\frac{I_a+I_b}{2}
\end{aligned}$$

alalım. $A=x-a, B=b-x$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
I_a &= \int_a^b (t-x)^2 (t-a)^2 dt \\
&= \int_0^{b-a} (u^2 - 2Au + A^2) u^2 du \\
&= \frac{(b-a)^3}{3} \left[A^2 - \frac{3}{2} A(b-a) + \frac{3}{5}(b-a)^2 \right]
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
I_b &= \int_a^b (t-x)^2 (b-t)^2 dt \\
&= \int_0^{b-a} (u^2 - 2Bu + B^2) u^2 du \\
&= \frac{(b-a)^3}{3} \left[B^2 - \frac{3}{2} B(b-a) + \frac{3}{5}(b-a)^2 \right]
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Buradan da

$$
\begin{aligned}
\frac{I_a + I_b}{2} &= \frac{(b-a)^3}{3} \left[\frac{A^2 + B^2}{2} - \frac{3}{4}(A+B)(b-a) + \frac{3}{5}(b-a)^2 \right] \\
&= \frac{(b-a)^3}{3} \left[\left(\frac{b-a}{2} \right)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 - 3\frac{(b-a)^2}{20} \right] \\
&= \frac{(b-a)^3}{3} \left[\frac{(b-a)^2}{10} + \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur. (3.13.5)' dan elde edebileceğimiz en iyi eşitsizlik aşağıdaki sonuçta verilmiştir.

Sonuç 3.13.1 Eğer f Teorem [4.2]' deki gibi ise

$$
\left| \sigma^2(X) + \left[E(X) - \frac{a+b}{2} \right]^2 - \frac{(b-a)^2}{12} \right| \leq \frac{(b-a)^4}{30} ||f'||_\infty \tag{3.13.6}
$$

yazılabilir. Şimdi $p \in (1, \infty)$ olmak üzere f' nin Lebesque p integrallenebilir dönüşüm olması durumunu inceleyelim.

Remark 3.13.1 Teorem[4.2]' nin sonucu Teorem[3.5]' inkiyle karşılaştırılabilir. Her iki sınırında $x = \frac{a+b}{2}$ etrafında konveks ve simetrik olduğu gösterilebilir. Ayrıca (3.12.12) - (3.12.13)' dan yani Chabychev yaklaşımıyla verilen sınır (3.13.5) doğru yaklaşımıyla elde edilenden daha sıkışıktır. Bu sınırları B_p ve B_c ile gösterirsek

$$B_p = \frac{b-a}{2\sqrt{15}}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + 15Y\right]^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$B_c = \frac{(b-a)^2}{100} + Y$$

elde edilir. Burada

$$Y = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

dır. Buradan basit bir cebirsel hesaplamayla her $x \in [a,b]$ için $B_c^2 - B_p^2 > 0$ olduğu yani $B_c > B_p$ olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.13.2 Eğer $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ $[a,b]$ de mutlak sürekli ve $f' \in L_p$ yani

$$||f'||_p := \left(\int_a^b |f'(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad , \quad p \in (1,\infty)$$

ise bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$\left|\sigma^2(X) + [E(X) - x]^2 - \frac{(b-a)^2}{12} - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right|$$

$$\leq \frac{||f'||_p}{(b-a)^{\frac{1}{p}}(q+1)^{\frac{1}{q}}}\left[(x-a)^{3q+2}\widetilde{B}\left(\frac{b-a}{x-a}, 2q+1, q+2\right)\right. \tag{3.13.7}$$

$$\left. +(b-x)^{3q+2}\widetilde{B}\left(\frac{b-a}{b-x}, 2q+1, q+2\right)\right]$$

dir. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\widetilde{B}(.,.)$ tamamlayan Euler Beta fonksiyonudur yani

$$\widetilde{B}(z;\alpha,\beta) := \int_0^z (u-1)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du \quad ,\alpha,\beta>0 \quad ,z\geq 1$$

dir.

3.13.3 Teorem[4.2]' de olduğu gibi Lemma[4.1]' i kullanırsak

$$\begin{aligned} &\left|\sigma^2(X)+[E(X)-x]^2-\frac{(b-a)^2}{12}-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right| \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b (t-x)^2|p(t,s)||f'(s)|dsdt \end{aligned} \tag{3.13.8}$$

elde edilir. İki katlı integraller için Hölder eşitsizliğine göre $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\int_a^b\int_a^b (t-x)^2|p(t,s)||f'(s)|dsdt \\ &\leq \left(\int_a^b\int_a^b |f'(s)|^p dsdt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b\int_a^b (t-x)^{2q}|p(t,s)|^q dsdt\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (b-a)^{\frac{1}{p}}||f'||_p\left(\int_a^b\int_a^b (t-x)^{2q}|p(t,s)|^q dsdt\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{3.13.9}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} D &:= \int_a^b\int_a^b (t-x)^{2q}|p(t,s)|^q dsdt \\ &= \int_a^b (t-x)^{2q}\left[\int_a^t (s-a)^q ds+\int_t^b (b-s)^q ds\right]dt \\ &= \int_a^b (t-x)^{2q}\left[\frac{(t-a)^{q+1}+(b-t)^{q+1}}{q+1}\right]dt \\ &= \frac{1}{q+1}\left[\int_a^b (t-x)^{2q}(t-a)^{q+1}dt+\int_a^b (t-x)^{2q}(b-t)^{q+1}dt\right] \end{aligned} \tag{3.13.10}$$

integralini hesaplamalıyız. Bunun için

$$E := \int_a^b (t-x)^{2q}(t-a)^{q+1}dt \tag{3.13.11}$$

tanımlayalım. $t=(1-u)a+ux$ değişken değişimi yapılırsa $t=a$ için $u=0$, $t=b$ için $u=\frac{b-a}{x-a}$, $dt=(x-a)du$ olup

$$
\begin{aligned}
E &= \int_0^{\frac{b-a}{x-a}} [(1-u)a+ux-x]^{2q}[(1-u)a+ux-a](x-a)du \\
&= (x-a)^{3q+2}\int_0^{\frac{b-a}{x-a}} (u-1)^{2q}u^{q+1}du \qquad (3.13.12)\\
&= (x-a)^{3q+2}\widetilde{B}\left(\frac{b-a}{x-a},2q+1,q+2\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada

$$
F := \int_a^b (t-x)^{2q}(b-t)^{q+1}dt \qquad (3.13.13)
$$

tanımlayalım. $t=(1-u)b+ux$ değişken değişimi yapılırsa $t=b$ için $v=0$ ve $t=a$ için $v=\frac{b-a}{b-x}$, $dt=(x-b)du$ olup

$$
\begin{aligned}
F &= \int_{\frac{b-a}{b-x}}^{0} [(1-v)b+vx-x]^{2q}[b-(1-v)b-vx]^{q+1}(x-b)dv \\
&= (b-x)^{3q+2}\int_0^{\frac{b-a}{b-x}} (v-1)^{2q}v^{q+1}dv \qquad (3.13.14)\\
&= (b-x)^{3q+2}\widetilde{B}\left(\frac{b-a}{b-x},2q+1,q+2\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.13.8) - (3.13.9) eşitsizliklerini ve (3.13.10) - (3.13.14) bağıntılarını kullanarak $D=\frac{1}{q+1}(E+F)$ olduğundan (3.13.7)' daki iddia elde edilir. Aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.13.2 f Teorem[4.5] deki gibi olsun. Bu takdirde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>1$ ve $B(.,.)$ Euler Beta dönüşümü ve $\psi(\alpha,\beta):=\int_0^1 u^{\alpha-1}(u-1)^{\beta-1}du$, $\alpha,\beta>0$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\left|\sigma^2(X)+\left[E(X)-\frac{a+b}{2}\right]^2-\frac{(b-a)^2}{12}\right| \\
&\leq \frac{||f'||_p(b-a)^{2+\frac{3}{q}}}{(q+1)^{\frac{1}{q}}s^{3+\frac{2}{q}}}[B(2q+1,q+1)+\Psi(2q+1,q+2)]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \qquad (3.13.15)
$$

eşitsizliği sağlanır.

3.13.4 (3.13.7)' de $x = \frac{a+b}{2}$ alalım. Sol taraf açıktır.

$$\begin{aligned}\widetilde{B}(2, 2q+1, q+2) &= \int_0^2 (u-1)^{2q} u^{q+1} du \\ &= \int_0^1 (u-1)^{2q} u^{q+1} du + \int_1^2 (u-1)^{2q} u^{q+1} du \\ &= B(2q+1, q+2) + \Psi(2q+1, q+2)\end{aligned}$$

yazılabilir. (3.13.7)' in sağ tarafı

$$\begin{aligned}&\frac{||f'||_p (\frac{b-a}{2})^{\frac{3q+2}{q}}}{(b-a)^{\frac{1}{p}} (q+1)^{\frac{1}{q}}} [2B(2q+1, q+2) + 2\Psi(2q+1, q+2)]^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{||f'||_p (b-a)^{2+\frac{3}{q}}}{(q+1)^{\frac{1}{q}} 2^{3+\frac{2}{q}}} [B(2q+1, q+2) + \Psi(2q+1, q+2)]^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

olup sonuç ispatlanmış olur. Son olarak eğer f mutlak sürekli , $f' \in L_1[a,b]$ ve $||f'||_1 = \int_a^b |f'(t)| dt$ ise bu takdirde aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.13.3 Eğer $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ olasılık yoğunluk fonksiyonu $[a,b]$ de mutlak sürekli ise bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}&\left| \sigma^2(X) + [E(X) - x]^2 - \frac{(b-a)^2}{12} - \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \right| \\ &\leq ||f'||_1 (b-a) \left[\frac{1}{2}(b-a) + \left| x - \frac{a+b}{2} \right| \right]^2\end{aligned} \tag{3.13.16}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.13.5 Yukarıda işlenen yol izlenerek

$$
\begin{aligned}
&\left|\sigma^2(X) + [E(X) - x]^2 - \frac{(b-a)^2}{12} - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right| \\
&\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b (t-x)^2|p(t,s)||f'(s)|dsdt \\
&\leq \sup_{(t,s)\in[a,b]^2}[(t-x)^2|p(t,s)|]\frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b |f'(s)|dsdt \\
&= ||f'||_1 G
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Burada

$$
\begin{aligned}
G &:= \sup_{(t,s)\in[a,b]^2}[(t-x)^2|p(t,s)|] \\
&\leq (b-a)\sup_{t\in[a,b]}(t-x)^2 \\
&= (b-a)[\max(x-a, b-x)]^2 \\
&(b-a)\left[\frac{1}{2}(b-a) + \left|x - \frac{a+b}{2}\right|\right]^2
\end{aligned}
$$

dır. Böylece teorem ispatlanmış olur. (3.13.6)' den elde edebileceğimiz en iyi eşitsizliğin $x = \frac{a+b}{2}$ olduğu durumda elde edilen eşitsizlik olduğu aşikardır. Bu durumda aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.13.3 Teorem[4.7]' nin varsayımları altında

$$
\left|\sigma^2(X) + [E(X) - \frac{a+b}{2}]^2 - \frac{(b-a)^2}{12}\right| \leq \frac{(b-a)^3}{4}||f'||_1 \tag{3.13.17}
$$

eşitsizliği gerçeklenir.

3.14 $\sigma^2(X) + (x - E(X))^2$ ve $\sigma(X)$ İçin Bazı Üst Sınırlar

$f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to [0,\infty]$ bir X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere beklenen değeri ve standart sapması sırasıyla

$$
EX = \int_a^b tf(t)dt
$$

ve

$$\sigma(X) = \sqrt{\int_a^b (t - EX)^2 f(t)dt} = \sqrt{\int_a^b t^2 f(t)dt - (EX)^2}$$

idi. $\sigma(X)$ için

$$\sigma(X) \leq \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}(b-a)^2}{6}||f||_\infty & f \in L_\infty[a,b] \\ \dfrac{\sqrt{2}(b-a)^{1+q^{-1}}}{2[(q+1)(2q+1)]^{\frac{2}{q}}}||f||_p & f \in L_p[a,b] \quad p > 1 \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}(b-a)}{2} & f \in L_1[a,b] \end{cases}$$

ve $\sigma^2(X) + (x - EX)^2$ için

$$\sigma^2(X)+(x-EX)^2 \leq \begin{cases} (b-a)\left[\dfrac{(b-a)^2}{12} + \left(x - \dfrac{b-a}{2}\right)^2\right]\sqrt{||f||_\infty} & f \in L_\infty[a,b] \\ \left[\dfrac{(b-x)^{2q+1} + (x-a)^{2q+1}}{2q+1}\right]^{\frac{1}{2q}}\sqrt{||f||_p} & f \in L_p[a,b] \quad p > 1 \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \\ \left(\dfrac{b-a}{2} + \left|x - \dfrac{b+a}{2}\right|\right)^2 & f \in L_1[a,b] \end{cases}$$

eşitsizlikleri verilmiştir. Bu kısımda $\sigma(X)$ ve $\sigma^2 + (x - E(X))^2$ ile ilgili üst sınırları olasılık yoğunluk fonksiyonundan bağımsız olarak sadece verilen aralığın uç noktaları yardımıyla vermeye çalışacağız.

Teorem 3.14.1 Olasılık yoğunluk fonksiyonu ile ilgili yukarıdaki kısıtlama altında

$$\sigma(X) \leq \min\{\max\{|a|, |b|\}, b - a\}$$

dır.

3.14.1 Öncelikle herhangi bir $t \in [a,b]$ için $f(1) \geq 0$ olduğundan $af(1) \leq tf(x) \leq bf(t)$ ve dolayısıyla $a \leq E(X) \leq b$ olduğunu belirtelim. Buradan

$$0 \leq EX - a \leq b - a \quad \text{ve} \quad 0 \leq b - EX \leq b - a \tag{3.14.1}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. $g(t) = (t - E(X))^2$ ile tanımlanan $g : [a, b] \to [0, \infty]$ fonksiyonunun sınırlı bir konveks fonksiyon olduğunu ve $(E(X), 0)$ noktasında minimum olduğunu belirtelim. Bu durumda (3.14.1) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \beta &= \sup\{(t - EX)^2 : t \in [a, b]\} \\ &= \max\{(a - EX)^2, (b - EX)^2\} \\ &\leq (b - a)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\sigma(X) = \sqrt{\int_a^b (t - EX)^2 f(t)dt} \leq \sqrt{\beta \int_a^b f(t)dt} = \sqrt{\beta} \leq b - a$$

olduğu kolayca görülür. $h(t) = t^2$ fonksiyonunun $(-\infty, 0)$ de azalan, $(0, \infty)$ de artan olduğu göz önüne alınırsa

$$\sigma(X) = \sqrt{\int_a^b t^2 f(t)dt - (EX)^2} \leq \sqrt{\int_a^b t^2 f(t)dt}$$

den

$$\sigma^2(X) \leq \int_a^b t^2 f(t)dt \leq \begin{cases} b^2 & a \geq 0 \\ \max\{a^2, b^2\} & a < 0 \quad b > 0 \\ a^2 & b \leq 0 \end{cases}$$

olduğu kolayca yazılabilir. Dolayısıyla $\sigma^2(X) \leq \max a^2, b^2$ dir. Buradan da teoremin iddiasının gerçeklendiği görülür.

Teorem 3.14.2 Olasılık yoğunluk fonksiyonu üzerindeki kısıtlamalar altında her $x \in [a, b]$ için

$$\sqrt{\sigma^2(X) + (x - EX)^2} \leq 2 \min\{\max\{|a|, |b|\}, b - a\}$$

dır.

3.14.2 Teorem[2.4]' ün ispatından

$$\sigma^2(X) + (x - EX)^2 = \int_a^b (t-x)^2 f(t)dt \quad x \in [a,b]$$

eşitliğini hatırlayalım. Buradan

$$\int_a^b (t-x)^2 f(t)dt \leq \max\{(t-x)^2 : t, x \in [a,b]\}$$

olduğu aşikardır. Dolayısıyla

$$\sqrt{\sigma^2(X) + (x - EX)^2} \leq \max\{|t-x| : t, x \in [a,b]\}$$

yazılabilir. $t, x \in [a,b]$ olduğundan $0 \leq t - a \leq b - a$ ve $0 \leq x - a \leq b - a$ olduğu açıktır. Böylece $|t-x|$ büyüklüğünü yukardan iki yolda tahmin edebiliriz.

$$|t-x| \leq |t-a| + |a-x| \leq 2(b-a)$$

ve

$$|t-x| \leq |t| + |x| \leq 2\max\{|a|, |b|\}$$

dır. Sonuç olarak

$$\max\{|t-x| : t, x \in [a,b]\} \leq 2\min\{\max\{|a|,|b|\}, b-a\}$$

elde edilir. Bu da istenen sonucun sağlandığını gösterir.

3.15 Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu n-kez Türevlenebilen Rasgele Değişkenin Beklenen Değer ve Varyansı İçin Bazı Eşitsizlikler

$f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere

$$E(X) := \int_a^b tf(t)dt$$

ve

$$\sigma(X)=\left[\int_a^b (t-E(X))^2 f(t)dt\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\int_a^b t^2 f(t)dt-[E(X)]^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

sırasıyla X' in beklenen değer ve varyansı olsun.

$$[x-E(X)]^2+\sigma^2(X)=\int_a^b (x-t)^2 f(t)dt \tag{3.15.1}$$

eşitsizliği kullanılarak ve Hölder eştsizliği, pre-Grüss, pre-Chebychev, pre-Lupaş veya Ostrowski tipi eşitsizlikler kullanılarak X rasgele değişkeninin beklenen değer ve varyansı ile ilgili çeşitli sonuçlar verilmiştir. Örneğin her $x\in[a,b]$ için

$$\sigma^2(X)+[x-E(X)]^2\leq\begin{cases}(b-a)\left[\dfrac{(b-a)^2}{12}+\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)^2\right]||f||_\infty & f\in L_\infty[a,b]\\[2ex] \left[\dfrac{(b-x)^{2q+1}+(x-a)^{2q+1}}{2q+1}\right]^{\frac{1}{q}}||f||_p & f\in L_p[a,b]\\[2ex] \left(\dfrac{b-a}{2}+\left|x-\dfrac{a+b}{2}\right|\right)^2 & p>1 \quad \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\end{cases} \tag{3.15.2}$$

ve bunun sonucu olarak da

$$0\leq\sigma(X)\leq\begin{cases}(b-a)^{\frac{1}{2}}\left[\dfrac{(b-a)^2}{12}+\left[E(X)-\dfrac{a+b}{2}\right]^2\right]^{\frac{1}{2}}||f||_\infty^{\frac{1}{2}} & f\in L_\infty[a,b]\\[2ex] \left\{\dfrac{[b-E(X)]^{2q+1}+[E(X)-a]^{2q+1}}{2q+1}\right\}^{\frac{1}{2q}}||f||_p^{\frac{1}{2}} & f\in L_p[a,b]\\[2ex] \dfrac{b-a}{2}+\left|E(X)-\dfrac{a+b}{2}\right| & p>1 \quad \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\end{cases} \tag{3.15.3}$$

ve

$$0\leq\sigma^2(X)\leq[b-E(X)][E(X)-a]\leq\frac{1}{4}(b-a)^2 \tag{3.15.4}$$

eşitsizlikleri gösterilmiştir. Bu kısımda X' in olasılık yoğunluk fonksiyonunun n-kez türevlenebilmesi ve $f^n(x)$' in $[a,b]$' de mutlak sürekli olması varsayımı altında daha kesin eşitsizlikle elde edilecektir.

Aşağıdaki Lemma başlı başına oldukça ilginçtir.

Lemma 3.15.1 X $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ olasılık yoğunluk fonksiyonu n-kez türevlenebilen ve $f^n(x)$ $[a,b]$ de mutlak sürekli olan bir rasgele değişken olsun. Bu takdirde her $x\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}\sigma^2(X)+[E(X)-x]^2 &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-x)^{k+3}+(-1)^k(x-a)^{k+3}}{(k+3)k!}f^{(k)}(x)\\ &+\frac{1}{n!}\int_a^b(t-x)^2\left(\int_x^t(t-s)^nf^{(n+1)}(s)ds\right)dt\end{aligned} \tag{3.15.5}$$

dır.

3.15.1 Her $t,x\in[a,b]$ için

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(t-x)^k}{k!}f^{(k)}(x)+\frac{1}{n!}\int_x^t(t-s)^nf^{(n+1)}(s)ds \tag{3.15.6}$$

olduğunu hatırlayalım. f X rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere bununla birlikte

$$\sigma^2(X)+[E(X)-x]^2=\int_a^b(t-x)^2f(t)dt \tag{3.15.7}$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}&\sigma^2(X)+[E(X)-x]^2\\ &=\int_a^b(t-x)^2\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(t-x)^k}{k!}f^{(k)}(x)+\frac{1}{n!}\int_x^t(t-s)^nf^{(n+1)}(s)ds\right]dt\\ &=\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(x)\int_a^b\frac{(t-x)^{k+2}}{k!}dt+\frac{1}{n!}\int_a^b(t-x)^2\left(\int_x^t(t-s)^nf^{(n+1)}(s)ds\right)dt\end{aligned} \tag{3.15.8}$$

olduğu gösterilebilir ve

$$\int_a^b \frac{(t-x)^{k+2}}{k!}dt = \frac{(b-x)^{k+3}+(-1)^k(x-a)^{k+3}}{(k+3)k!}$$

olduğundan (3.15.8) eşitliği (3.15.5) eşitliğini kolayca türetir.

Sonuç 3.15.1 Yukarıdaki varsayımlar altında

$$\begin{aligned} &\sigma^2(X) + \left[E(X) - \frac{a+b}{2}\right]^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\left[1+(-1)^k\right](b-a)^{k+3}}{2^{k+3}(k+3)k!} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &+\frac{1}{n!}\int_a^b \left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2 \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^{t} (t-s)^n f^{(n+1)}(s)ds\right)dt \end{aligned} \tag{3.15.9}$$

dır.

Sonuç 3.15.2 Yukarıdaki varsayımlar altında

$$\begin{aligned} &\sigma^2(X) + \frac{1}{2}[(E(X)-a)^2 + (E(X)-b)^2] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^{k+3}}{(k+3)k!}\left[\frac{f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)}{2}\right] \\ &+\frac{1}{n!}\int_a^b\int_a^b K(t,s)(t-s)^n f^{(n+1)}(s)dsdt \end{aligned} \tag{3.15.10}$$

yazılabilir. Burada

$$K(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(t-a)^2}{2} & a \le s \le t \le b \\[2ex] -\dfrac{(t-b)^2}{2} & a \le t \le s \le b \end{cases}$$

dır.

3.15.2 (3.15.5)' de $x = a$ ve $x = b$ alınarak

$$\sigma^2(X)+[E(X)-a]^2=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^{k+3}}{(k+3)k!}f^{(k)}(a)+\frac{1}{n!}\int_a^b(t-a)^2\left(\int_a^t(t-s)^nf^{(n+1)}(s)ds\right)dt \tag{3.15.11}$$

ve

$$\sigma^2(X)+[E(X)-b]^2=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(b-a)^{k+3}}{(k+3)k!}f^{(k)}(b)+\frac{1}{n!}\int_a^b(t-b)^2\left(\int_b^t(t-s)^nf^{(n+1)}(s)ds\right)dt \tag{3.15.12}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunları toplayıp 2 ile bölerek (3.15.10) eşitliğinin sağlandığı görülür. $\mu=E(X)\in[a,b]$ alarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.15.3 Yukardaki varsayımlar altında

$$\sigma^2(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-\mu)^{k+3}+(-1)^k(\mu-a)^{k+3}}{(k+3)k!}f^{(k)}(\mu)+\frac{1}{n!}\int_a^b(t-\mu)^2\left(\int_\mu^t(t-s)^nf^{(n+1)}(s)ds\right)dt \tag{3.15.13}$$

dır.

3.15.3 Sonucun ispatı (3.15.5)' den $x=\mu\in[a,b]$ alınarak görülür.

Lemma 3.15.2 f fonksiyonu ile ilgili olarak Lemma[2.1]' in şartlarını sağlasın. Bu takdirde

$$\sigma^2(X)+[E(X)-x]^2=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-x)^{k+3}+(-1)^k(x-a)^{k+3}}{k+3}.\frac{f^{(k)}(x)}{k!}+\frac{1}{n!}\int_a^bK_n(x,s)f^{(n+1)}(s)ds \tag{3.15.14}$$

dır. Burada

$$K(x,s)=\begin{cases}(-1)^{n+1}\psi_n(s-a,x-s) & a\le s\le x\\ \\ \psi_n(b-s,s-x) & x\le s\le b\end{cases} \tag{3.15.15}$$

ve

$$\psi_n(u,v) = \frac{u^{n+1}}{(n+3)(n+2)(n+1)}.[(n+2)(n+1)u^2 + 2(n+3)(n+1)uv + (n+3)(n+2)v^2] \tag{3.15.16}$$

3.15.4 (3.15.5)' den integrasyon sırasını değiştirerek

$$\frac{1}{n!}\int_a^b (t-x)^2 dt \int_x^t (t-s)^n f^{(n+1)}(s)ds$$

$$= \frac{1}{n!}\left\{ -\int_a^x \int_a^s (t-x)^2(t-s)^n f^{(n+1)}(s)dtds + \int_x^b \int_s^b (t-x)^2(t-s)^n f^{(n+1)}(s)dtds \right\}$$

$$\frac{1}{n!}\int_a^b \widetilde{K}_n(x,s) f^{(n+1)}(s)ds$$

elde edilir. Burada

$$\widetilde{K}_n(x,s) = \begin{cases} p_n(x,s) = -\int_a^s (t-x)^2(t-s)^n dt & a \le s \le x \\ \\ q_n(x,s) = \int_s^b (t-x)^2(t-s)^n dt & x \le s \le b \end{cases}$$

dır. Lemmayı ispatlamak için $K \equiv \widetilde{K}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\psi(.,.)$ (3.15.15)' de olduğu gibi olmak üzere

$$\widetilde{p}_n(x,s) = -\int_a^s (t-x)^2(t-s)^n dt = (-1)^{n+1}\int_0^{s-a} (u+x-s)^2 u^2 du$$

$$= (-1)^{n+1}\int_0^{s-a} [u^2 + 2(x-s)u + (x-s)^2]u^n du$$

$$= (-1)^{n+1}\psi_n(s-a, x-s)$$

yazılabilir. Ayrıca $\psi(.,.)$ aynı şekilde olmak üzere

$$\widetilde{q}_n(x,s) = \int_s^b (t-x)^2(t-s)^n dt = \int_0^{b-s} [u+(s-x)]^2 u^n du = \psi_n(b-s, s-x)$$

olur. Bu nedenle $K \equiv \widetilde{K}$ olup Lemma ispatlanmış olur.

Şimdi aşağıdaki eşitsizlikleri verebiliriz.

Teorem 3.15.1 X $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ olasılık yoğunluk fonksiyonu n-kez türevlenebilir ve $f^{(n)}$ $[a,b]$ de mutlak sürekli olacak şekilde bir rasgele değişken olsun. Bu takdirde her $x\in[a,b]$ için

$$\left|\sigma^2(X)+[E(X)-x]^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-x)^{k+3}+(-1)^k(x-a)^{k+3}}{(k+3)k!}f^{(k)}(x)\right|$$
$$\leq\begin{cases}\dfrac{||f^{(n+1)}||_\infty}{(n+1)(n+4)}\Big[(x-a)^{n+4}+(b-x)^{n+4}\Big] & f^{(n+1)}\in L_\infty[a,b]\\[2ex] \dfrac{||f^{(n+1)}||_p}{n!(n+3+\frac{1}{q})}.\dfrac{\Big[(x-a)^{n+3+\frac{1}{q}}+(b-x)^{n+3+\frac{1}{q}}\Big]^{\frac{1}{q}}}{nq+1} & f^{(n+1)}\in L_p[a,b]\\[2ex] \dfrac{||f^{(n+1)}||_1}{n!(n+3)}\Big[(x-a)^{n+3}+(b-x)^{n+3}\Big] & p>1\quad \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\end{cases}\tag{3.15.17}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $||.||_p(1\leq p\leq\infty)$ $[a,b]$ de alışılmış Lebesque normu yani

$$||g||_\infty=ess\sup_{t\in[a,b]}|g(t)|\quad\text{ve}\quad ||g||_p=\left(\int_a^b|g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\quad p\geq1$$

dir

3.15.5 Lemma[2.1]' den

$$\begin{aligned}&\sigma^2(X)+[E(X)-x]^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-x)^{k+3}+(-1)^k(x-a)^{k+3}}{k!(k+3)}f^{(k)}(x)\\&=\frac{1}{n!}\int_a^b(t-x)^2\left(\int_x^t(t-s)^n f^{(n+1)}(s)ds\right)dt\\&=M(a,b;x)\end{aligned}\tag{3.15.18}$$

yazılabilir. Açık olarak

$$|M(a,b;x)| \leq \frac{1}{n!}\int_a^b (t-x)^2 \left| \int_x^t (t-s)^n f^{(n+1)}(s)ds \right| dt$$

$$\leq \frac{1}{n!}\int_a^b (t-x)^2 \left[\sup_{s\in[x,t]} \left| f^{(n+1)}(s) \right| \left| \int_x^t |t-s|^n ds \right| \right] dt$$

$$\leq \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{n!}\int_a^b \frac{(t-x)^2|t-x|^{n+1}}{n+1} dt$$

$$= \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{(n+1)!}\int_a^b |t-x|^{n+3} dt$$

$$= \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{(n+1)!}\left[\int_a^x (x-t)^{n+3}dt + \int_x^b (t-x)^{n+3}dt \right]$$

$$= \frac{||f^{(n+1)}||_\infty \left[(x-a)^{n+4} + (b-x)^{n+4} \right]}{(n+1)!(n+4)}$$

dır. Böylece (3.15.17)' deki ilk eşitsizlik elde edilmiş olur. İkincisi için Hölder integral eşitsizliğini kullanırsak

$$|M(a,b;x)| \leq \frac{1}{n!}\int_a^b (t-x)^2 \left| \int_x^t |t-s|^{nq} ds \right|^{\frac{1}{q}} \left| \int_x^t \left| f^{(n+1)}(s) \right|^p ds \right|^{\frac{1}{p}} dt$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left(\int_a^b \left| f^{(n+1)}(s) \right|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \int_a^b (t-x)^2 |t-x|^{\frac{nq+1}{q}} dt$$

$$= \frac{1}{n!}\frac{||f^{(n+1)}||_p}{(nq+1)^{\frac{1}{q}}}\int_a^b |t-x|^{n+2+\frac{1}{q}} dt$$

$$= \frac{1}{n!}\frac{||f^{(n+1)}||_p}{(nq+1)^{\frac{1}{q}}}\left[\frac{(b-x)^{n+3+\frac{1}{q}} + (x-a)^{n+3+\frac{1}{q}}}{n+3+\frac{1}{q}} \right]$$

elde edilir. Son olarak

$$|M(a,b;x)| \leq \frac{1}{n!}\int_a^b (t-x)^2|t-x|^n \left|\int_x^t \left|f^{(n+1)}(s)\right| ds\right| dt$$

$$\leq \frac{||f^{(n+1)}||_1}{n!}\int_a^b |t-x|^{n+2} dt$$

$$= \frac{||f^{(n+1)}||_1}{n!}\left[\frac{(x-a)^{n+3}+(b-x)^{n+3}}{n+3}\right]$$

olduğunu belirtelim. Böylece (3.15.17)' deki üçüncü kısımda elde edilmiş olur. (3.15.17)' deki en yi eşitsizlik $x = \frac{a+b}{2}$ alındığındaki durum olup Sonuç[3.2] de verilmiştir.

Sonuç 3.15.4 X ve f için yukarıda verilen varsayımlar altında

$$\left|\sigma^2(X) + \left[E(X) - \frac{a+b}{2}\right]^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\left[1+(-1)^k\right](b-a)^{k+3}}{2^{k+3}(k+3)k!} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \begin{cases} \dfrac{||f^{(n+1)}||_\infty}{2^{n+3}(n+1)!(n+4)}(b-a)^{n+4} & f^{(n+1)} \in L_\infty[a,b] \\[2ex] \dfrac{||f^{(n+1)}||_p}{2^{n+2+\frac{1}{q}}n!(n+3+\frac{1}{q})}\dfrac{(b-a)^{n+3+\frac{1}{q}}}{(nq+1)^{\frac{1}{q}}} & f^{(n+1)} \in L_p[a,b] \quad p>1 \\[2ex] \dfrac{||f^{(n+1)}||_1}{2^{n+2}n!(n+3)}(b-a)^{n+3} & \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1 \end{cases} \tag{3.15.19}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Aşağıdaki sonuç $f^{(k)}(\mu), k = 0, 1, \ldots, n$ değerleri bilindiğinde varyansa yaklaşık olarak kullanılabilindiğinden oldukça ilginç bi sonuçtur.

Sonuç 3.15.5 Yukarıdaki varsayımlar altında $\mu = \frac{a+b}{2}$ için

$$\left|\sigma^2(X) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-\mu)^{k+3} + (-1)^k(\mu-a)^{k+3}}{(k+3)k!} f^k(\mu)\right|$$

$$\leq \begin{cases} \dfrac{||f^{n+1}||_\infty}{(n+1)!(n+4)} \Big[(\mu-a)^{n+4} + (b-\mu)^{n+4}\Big] & f^{(n+1)} \in L_\infty[a,b] \\[2ex] \dfrac{||f^{(n+1)}||_p}{n!(n+3+\frac{1}{q})} \dfrac{\Big[(\mu-a)^{n+3+\frac{1}{q}} + (b-\mu)^{n+3+\frac{1}{q}}\Big]}{(nq+1)^{\frac{1}{q}}} & f^{(n+1)} \in L_p[a,b] \\[2ex] \dfrac{||f^{(n+1)}||_1}{n!(n+3)} \Big[(\mu-a)^{n+3} + (b-\mu)^{n+3}\Big] & p>1 \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \end{cases} \tag{3.15.20}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.15.2 X $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ olasılık yoğunluk fonksiyonu n-kez türevlenebilir ve $f^{(n)}$ $[a,b]$ de mutlak sürekli olan bir rasgele değişken olsun. Bu takdirde

$$\left|\sigma^2(X) + \frac{1}{2}[(E(X)-a)^2 + (E(X)-b)^2] - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^{k+3}}{(k+3)k!} \left[\frac{f^{(k)}(a) + (-1)^{(k)} f^{(k)}(b)}{2}\right]\right|$$

$$\leq \begin{cases} \dfrac{1}{(n+4)(n+1)!} ||f^{(n+1)}||_\infty (b-a)^{n+4} & f^{(n+1)} \in L_\infty[a,b] \\[2ex] \dfrac{2^{\frac{1}{q}-1}}{n!(qn+1)^{\frac{1}{q}}[(n+2)q+2]^{\frac{1}{q}}} ||f^{(n+1)}||_p \dfrac{(b-a)^{n+3+\frac{1}{q}}}{(nq+1)^{\frac{1}{q}}} & f^{(n+1)} \in L_p[a,b] \\[2ex] \frac{1}{2n!} ||f^{(n+1)}||_1 (b-a)^{n+3} & p>1 \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{cases} \tag{3.15.21}$$

eşitsizliği verilir. Burada $||.||_p (1 \leq p \leq \infty)$ alışılmış Lebesque p-normudur.

3.15.6 Sonuç[2.3] kullanılarak

$$\left|\sigma^2(X) + \frac{1}{2}\Big[(E(X)-a)^2 + (E(X)-b)^2\Big] - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^{k+3}}{(k+3)k!} \left[\frac{f^{(k)}(a) + (-1)^k f^{(k)}(b)}{2}\right]\right|$$

$$\leq \frac{1}{n!} \int_a^b \int_a^b |K(t,s)||t-s|^n |f^{(n+1)}(s)| ds dt$$

$$= N(a,b)$$

yazılabilir. Buradan

$$N(a,b) \leq ||f^{(n+1)}||_\infty \frac{1}{n!} \int_a^b \int_a^b |K(t,s)||t-s|^n ds dt$$

$$= ||f^{(n+1)}||_\infty \frac{1}{n!} \int_a^b \left(\int_a^b |K(t,s)||t-s|^n ds + \int_t^b |K(t,s)||t-s|^n ds \right) dt$$

$$= \frac{1}{n!} ||f^{(n+1)}||_\infty \int_a^b \left[\frac{(t-a)^2}{2} . \frac{(t-a)^{n+1}}{n+1} + \frac{(t-b)^2}{2} . \frac{(b-t)^{n+1}}{n+1} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2(n+1)!} ||f^{(n+1)}||_\infty \int_a^b [(t-a)^{n+3} + (b-t)^{n+3}] dt$$

$$= \frac{1}{2(n+1)!} ||f^{(n+1)}||_\infty \left[\frac{(b-a)^{n+4}}{n+4} + \frac{(b-a)^{n+4}}{n+4} \right]$$

$$= \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{(n+4)(n+1)!} (b-a)^{n+4}$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla (3.15.21) deki birinci kısım ispatlanmış olur. Katlı integraller için Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa

$$N(a,b) \leq \frac{1}{n!}\left(\int_a^b\int_a^b |f^{(n+1)}(s)|^p dsdt\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^q|t-s|^{qn}dsdt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}||f^{(n+1)}||_p}{n!}\left[\int_a^b\left(\int_a^t |K(t,s)|^q|t-s|^{qn}ds + \int_t^b |K(t,s)|^q|t-s|^{qn}ds\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}||f^{(n+1)}||_p}{n!}\left[\int_a^b\left[\frac{(t-a)^{2q}}{2^q}\int_a^t |t-s|^{qn}ds + \frac{(t-b)^{2q}}{2^q}\int_t^b |t-s|^{qn}ds\right]dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{(b-a)\frac{1}{p}||f^{(n+1)}||_p}{n!}\left[\int_a^b\left[\frac{(t-a)^{2q}(t-a)^{qn+1}}{2^q(qn+1)} + \frac{(t-b)^{2q}(b-t)^{qn+1}}{2^q(qn+1)}\right]dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}||f^{(n+1)}||_p}{n!}\left[\frac{1}{2^q(qn+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\left[\int_a^b (t-a)^{(n+2)q+1}dt + \int_a^b (b-t)^{(n+2)q+1}dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}||f^{(n+1)}||_p}{n!}\left[\frac{1}{2^q(qn+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(b-a)^{(n+2)q+2}}{(n+2)q+2} + \frac{(b-a)^{(n+2)q+2}}{(n+2)q+2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{2^{1/q}||f^{(n+1)}||_p(b-a)^{n+2+\frac{1}{p}+\frac{2}{q}}}{n!2(qn+1)^{\frac{1}{q}}((n+2)q+2)^{\frac{1}{q}}}$$

$$= \frac{2^{1/q-1}||f^{(n+1)}||_p\left[(b-a)^{n+3+\frac{1}{q}}\right]}{n!(qn+1)^{\frac{1}{q}}[(n+2)q+2]^{\frac{1}{q}}}$$

yazılabilir ve (3.15.21) deki ikinci kısımda ispatlanmış olur. Son olarak

$$N(a,b) \leq \frac{1}{n!}\sup_{(t,s)\in[a,b]^2}|K(t,s)||t-s|^n\int_a^b\int_a^b |f^{(n+1)}(s)|dsdt$$

$$= \frac{1}{n!}\frac{(b-a)^2}{2}.(b-a)^n(b-a)\int_a^b |f^{(n+1)}(s)|ds$$

$$= \frac{1}{2n!}(b-a)^{n+3}||f^{(n+1)}||_1$$

olduğunu belirtelim ki bu da (3.15.21) deki son kısımdır. Aşağıdaki özel durum pratiksel uygulamalarda kullanılabilir. $n=0$ için (3.15.17) ifadesi her $x\in[a,b]$ için

$$\left|\sigma^2(X)+[E(X)-x]^2-(b-a)\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{(b-a)^2}{12}\right]f(x)\right|$$

$$\leq\begin{cases}\frac{||f'||_\infty}{4}\left[(x-a)^4+(b-x)^4\right] & f'\in L_\infty[a,b]\\ \frac{q||f'||_p}{3q+1}\left[(x-a)^{3+\frac{1}{q}}+(b-x)^{3+\frac{1}{q}}\right] & f'\in L_p[a,b]\\ ||f'||_1\left[\frac{(b-a)^2}{12}+(x+\frac{a+b}{2})^2\right] & p>1\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\end{cases} \tag{3.15.22}$$

şeklini alır. Özel olarak $x=\frac{a+b}{2}$ için

$$\left|\sigma^2(X)+\left[E(X)-\frac{a+b}{2}\right]^2-\frac{(b-a)^3}{12}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq\begin{cases}\frac{||f'||_\infty}{32}(b-a)^4 & f'\in L_\infty[a,b]\\ \frac{q||f'||_p(b-a)^{3+\frac{1}{q}}}{2^{2+\frac{1}{q}}(3q+1)} & f'\in L_p[a,b]\\ \frac{||f'||_1}{12}(b-a)^3 & p>1\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\end{cases} \tag{3.15.23}$$

yazılır. Bir anlamda bu ifade (3.15.22) den elde edilebilen en iyi eşitsizliktir. Eğer (3.15.22) de $x=\mu=E(X)$ alınırsa

$$\left|\sigma^2(X)-(b-a)\left[\left(E(X)-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{(b-a)^2}{12}\right]f(E(X))\right|$$

$$\leq\begin{cases}\frac{||f'||_\infty}{4}\left[(E(X)-a)^4+(b-E(X))^4\right] & f'\in L_\infty[a,b]\\ \frac{||f'||_p}{(3+\frac{1}{q})}\left[(E(X)-a)^4+(b-E(X))^4\right] & f'\in L_p[a,b]\quad p>1\\ ||f'||_1\left[\frac{(b-a)^2}{12}+(E(X)-\frac{a+b}{2})^2\right] & \end{cases} \tag{3.15.24}$$

elde edilir. Ayrıca (3.15.21) den

$$\left|\sigma^2(X)+\frac{1}{2}\Big[(E(X)-a)^2+(E(X)-b)^2\Big]-\frac{(b-a)^3}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]\right|$$

$$\leq\begin{cases}\dfrac{1}{4}||f'||_\infty(b-a)^4 & f'\in L_\infty[a,b]\\[2ex] \dfrac{1}{n!2^{\frac{1}{2}}(q+1)^{\frac{1}{q}}}||f'||_p(b-a)^{3+\frac{1}{q}} & f'\in L_p[a,b]\quad p>1\\[2ex] \dfrac{1}{2}||f'||_1(b-a)^3\end{cases}\tag{3.15.25}$$

olduğu açıktır. Bu ise f' nin a ve b uç noktalarındaki değerleri ve beklenen değer cinsinden varyans için bir yaklaşımdır.

Teorem 3.15.3 X $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ olasılık yoğunluk fonksiyonu n-kez türevlenebilir ve $f^{(n)}$ $[a,b]$ de mutlak sürekli olacak şekilde bir rasgele değişken olsun. Bu takdirde

$$\left|\sigma^2(X)+(E(X)-x)^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-x)^{k+3}+(-1)^k(x-a)^{k+3}}{k+3}.\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\right|$$

$$\leq\begin{cases}\Big[(x-a)^{n+4}+(b-x)^{n+4}\Big]\dfrac{||f^{n+1}||_\infty}{(n+1)!(n+4)} & f^{(n+1)}\in L_\infty[a,b]\\[2ex] C^{\frac{1}{q}}\left[(x-a)^{(n+3)q+1}+(b-x)^{(n+3)q+1}\right]^{\frac{1}{q}}\dfrac{||f^{(n+1)}||_p}{n!} & f^{(n+1)}\in L_p[a,b]\quad p>1\\[2ex] \left[\dfrac{b-a}{2}+\left|x-\dfrac{a+b}{2}\right|\right]^{n+3}.\dfrac{||f^{(n+1)}||_1}{n!(n+3)}\end{cases}\tag{3.15.26}$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$C=\int_0^1\left[\frac{u^{n+3}}{n+3}+2(1-u)\frac{u^{n+2}}{n+2}+(1-u)^2\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]^q du\tag{3.15.27}$$

dır.

3.15.7 (3.15.14) ifadesinden

$$\left|\sigma^2(X) + (E(X) - x)^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^{k+3} + (-1)^k (x-a)^{k+3}}{k+3} . \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\right|$$
$$= \left|\frac{1}{n!}\int_a^b K_n(x,s) f^{(n+1)}(s)ds\right| \tag{3.15.28}$$

yazılabilir. (3.15.15) ve (3.15.17) ifadeleri kullanılarak $u, v \geq 0$ için $\psi_n(u,v) \geq 0$ olduğundan

$$\left|\frac{1}{n!}\int_a^b K_n(x,s) f^{(n+1)}(s)ds\right|$$
$$\leq \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{n!}\left\{\int_a^x \psi(s-a, x-s)ds + \int_x^b \psi(b-s, s-x)ds\right\} \tag{3.15.29}$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\psi_n(u,v) = \frac{u^{n+3}}{n+3} + 2v\frac{u^{n+2}}{n+2} + v^2\frac{u^{n+1}}{n+1} \tag{3.15.30}$$

ve dolayısıyla

$$\int_a^x \psi_n(s-a, x-s)ds$$
$$= \int_a^x \left[\frac{(s-a)^{n+3}}{n+3} + 2(x-s)\frac{(s-a)^{n+2}}{n+2} + (x-s)^2\frac{(s-a)^{n+1}}{n+1}\right]ds \tag{3.15.31}$$
$$= (x-a)^{n+4}\int_0^1 \left[\frac{\lambda^{n+3}}{n+3} + 2(1-\lambda)\frac{\lambda^{n+2}}{n+2} + (1-\lambda)^2\frac{\lambda^{n+1}}{n+1}\right]d\lambda$$

olacaktır. Burada $\gamma = \frac{s-a}{x-a}$ alınmıştır. γ' nın kuvvetlerini birleştirerek

$$\lambda^{n+3}\left[\frac{1}{n+3} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+1}\right] - \frac{2\lambda^{n+2}}{(n+2)(n+1)} + \frac{\lambda^{n+1}}{n+1}$$

olduğu ve dolayısıyla (3.15.31) den

$$\int_a^x \psi_n(s-a, x-s)ds$$

$$= (x-a)^{n+4}\left\{\frac{1}{n+4}\left[\frac{1}{n+3} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+1}\right] - \frac{2}{(n+3)(n+2)(n+1)} + \frac{1}{(n+2)(n+1)}\right\}$$

$$= \frac{(x-a)^{n+4}}{(n+4)(n+1)} \tag{3.15.32}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde (3.15.30) kullanılarak

$$\int_x^b \psi_n(b-s, s-x)ds = \int_x^b \left[\frac{(b-s)^{n+3}}{n+3} + 2(s-x)\frac{(b-s)^{n+2}}{n+2} + (s-x)^2\frac{(b-s)^{n+1}}{n+1}\right]ds$$

ve $v = \frac{b-s}{b-x}$ alınarak

$$\int_x^b \psi_n(b-s, s-x)ds = (b-x)^{n+4}\int_0^1 \left[\frac{v^{n+3}}{n+3} + 2(1-v)\frac{v^{n+2}}{n+2} + (1-v)^2\frac{v^{n+1}}{n+1}\right]dv$$

$$= \frac{(b-x)^{n+4}}{(n+4)(n+1)} \tag{3.15.33}$$

yazılabilir. Burada (3.15.31) ve (3.15.32) kullanılmıştır. (3.15.32) ve (3.15.33) birleştirilerek (3.15.26) deki birinci eşitsizlik elde edilir. (3.15.26) deki ikinci eşitsizlik için Hölder integral eşitsizliğini kullanırsak

$$\left|\frac{1}{n!}\int_a^b K_n(x,s)f^{(n+1)}(s)ds\right| \leq \frac{||f^{(n+1)}(s)||_p}{n!}\left(\int_a^b |K_n(x,s)|^q ds\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.15.34}$$

yazılabilir. Böylece (3.15.15) ve (3.15.30) den

$$\int_a^b |K_n(x,s)|^q ds = \int_a^x \psi^q(s-a, x-s)ds + \int_x^b \psi^q(b-s, s-x)ds$$

$$= C\Big[(x-a)^{(n+3)q+1} + (b-x)^{(n+3)q+1}\Big]$$

olduğu görülür. Burada C (3.15.27) de tanımlandığı gibi olup (3.15.31) ve (3.15.32) eşitlikleri kullanılmıştır. (3.15.34) de bu eşitlik yerine yazılırsa (3.15.26) deki ikinci eşitsizliğin sağlandığı görülür. Son olarak (3.15.26) deki üçüncü eşitsizliği sağlayalım. (3.15.28) den

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n!}\int_a^b K_n(x,s)f^{(n+1)}(s)ds\right| \\
&\leq \frac{1}{n!}\left\{\int_a^x \psi_n(s-a,x-s)|f^{(n+1)}(s)|ds + \int_x^b \psi_n(b-s,s-x)|f^{(n+1)}(s)|ds\right\} \qquad (3.15.35)\\
&\leq \frac{1}{n!}\left\{\psi_n(x-a,0)\int_a^x |f^{(n+1)}(s)|ds + \psi_n(b-x,0)\int_x^b |f^{(n+1)}(s)|ds\right\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada (3.15.30) den

$$\psi_n(u,0) = \frac{u^{n+3}}{n+3} \qquad (3.15.36)$$

olacaktır. Böylece (3.15.35) ve (3.15.36) den

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n!}\int_a^b K_n(x,s)f^{(n+1)}(s)ds\right| \\
&\leq \frac{1}{n!}\max\left\{\frac{(x-a)^{n+3}}{n+3}, \frac{(b-x)^{n+3}}{n+3}\right\}||f^{(n+1)}(.)||_1 \\
&= \frac{1}{n!(n+3)}[\max\{x-a,b-x\}]^{n+3}||f^{(n+1)}(.)||_1
\end{aligned}$$

elde edilir. $X, Y \in \mathbb{R}$ için

$$\max\{X,Y\} = \frac{X+Y}{2} + \left|\frac{X-Y}{2}\right|$$

gerçeği kullanılarak (3.15.28) den (3.15.26) deki üçüncü eşitsizlik elde edilir. Böylece teorem tamamen ispatlanmış olur.

3.16 Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu Sınırlı Rasgele Değişkenler İçin Bazı Eşitsizlikler

Bir çalışmalarında Barnett ve Dragomir [12], Matic, Pecaric ve Ujevic [8] tarafından verilen pre-Grüss eşitsizliğini kullanarak olasılık yoğunluk fonksiyonu sınırlı olan rasgele değişkenler için bazı eştsizlikler ortaya koymuşlardır. Daha kestirme olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 3.16.1 X $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olsun. $F(x) := \int_a^b f(t)dt$ X' in dağılım fonksiyonu $E(X)$ de beklenen değeri olsun. $[a, b]$ de $0 \leq \gamma \leq f(t) \leq \varphi$ olacak şekilde iki γ ve φ sabitinin bulunduğunu varsayalım. Bu taktirde her $x \in [a, b]$ için

$$\left| E(X) + (b-a)F(x) - x - \frac{b-a}{2} \right| \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(\varphi - \gamma)(b-a)^2 \tag{3.16.1}$$

dır. Özel olarak eğer (3.16.1) de $x = a$ ve $x = b$ alınırsa

$$\left| E(X) - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(\varphi - \gamma)(b-a)^2 \tag{3.16.2}$$

elde edilir. Aşağıdaki sonuç ispatlanmıştır.

Teorem 3.16.2 $X, f, \gamma, \varphi ve F$ yukarıdaki gibi olsun. Bu takdirde her $x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} \left| E(X) + \frac{b-a}{2}F(X) - \frac{b+x}{2} \right| &\leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(\varphi - \gamma)\left[\frac{1}{4}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] \\ &\leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(\varphi - \gamma)(b-a)^2 \end{aligned} \tag{3.16.3}$$

dir.

Burada amacımız yukarıdaki teoremlerde verilenlere benzer bazı eşitsizlikler vermektir. Bizim yaklaşımımız X.L.Cheng ve J.Sun [21] tarafından elde edilen sonuca dayanmaktadır.

Teorem 3.16.3 $h, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ her $x \in [a, b]$ ve bazı reel sabitler için $\gamma \leq g(x) \leq \varphi$ olacak şekilde iki integrallenebilir fonksiyon olsunlar. Bu takdirde

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b h(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b h(x)dx\int_a^b g(x)dx\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\int_a^b \left|h(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b h(y)dy\right|dx\right)(\varphi-\gamma)
\end{aligned} \tag{3.16.4}
$$

eşitsizliği gerçeklenir. Aşağıdaki teorem bizim ilk sonucumuzdur.

Teorem 3.16.4 X $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olsun. $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ ile X' in dağılım fonksiyonunu $E(X)$ ile de beklenen değerini gösterelim. Ayrıca $[a,b]$ de $0\leq\gamma\leq f(t)\leq\varphi$ olacak şekilde iki γ,φ sabiti mevcut olsun. Bu takdirde her $x\in[a,b]$ için

$$
\left|E(X)+(b-a)F(x)-x-\frac{b-a}{2}\right|\leq\frac{1}{8}(\varphi-\gamma)(b-a)^2 \tag{3.16.5}
$$

eşitsizliği sağlanır. Özellikle $x=a$ ve $x=b$ seçilirse

$$
\left|E(X)-\frac{a+b}{2}\right|\leq\frac{1}{8}(\varphi-\gamma)(b-a)^2 \tag{3.16.6}
$$

elde edilir. Ayrıca (3.16.5) deki (Dolayısıyla (3.16.6) daki) $\frac{1}{8}$ sabiti en iyi mümkün değerdir.

3.16.1 X,f,γ,φ yukarıdaki gibi olsun. $p(x,t)$, $[a,b]x[a,b]$ de

$$
p(x,t)=\begin{cases} t-a & t\in[a,x] \\ \\ t-b & t\in[x,b] \end{cases}
$$

ile tanımlı çekirdek olsun. Kısmi integrasyon uygulanarak aşağıdaki eşitsizlik kolayca türetilebilir.

$$
(b-a)F(x)+E(X)-b=\int_a^b p(x,t)f(t)dt \tag{3.16.7}
$$

(3.16.4) eşitsizliğini f ve $g(t):=p(x,t)$ ye uygulayarak

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b f(t)p(x,t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt. \int_a^b f(t)dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\int_a^b \left| p(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds \right| dt \right)(\varphi - \gamma)
\end{aligned} \tag{3.16.8}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\int_a^b f(t)dt = 1 \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)dt = x - \frac{a+b}{2}$$

olduğunu belirtelim. Geriye $\int_a^b |p(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds|dt$ integralini hesaplamak kalır. Bunun için iki durum tartışacağız $x \in [a, \frac{a+b}{2}]$ olsun. $t_1(x) = x - \frac{b-a}{2}$ ve $\gamma \leq t_2(x) \leq b$ olacaktır. Öte yandan

$$\int_a^b \left| p(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds \right| dt = \int_a^x [t - t_1(x)]dt + \int_x^b |t - t_2(x)|dt = I_1 + I_2$$

yazılabilir. Buradan

$$I_1 = \int_a^x [t - t_1(x)]dt = \frac{(b-a)^2}{8} - \frac{1}{2}\left[x - \frac{a+b}{2}\right]^2$$

ve

$$I_2 = \int_x^{t_2(x)} [t_2(x) - t]dt + \int_{t_2(x)}^b [t - t_2(x)]dt = \frac{(b-a)^2}{8} + \frac{1}{2}\left[x - \frac{a+b}{2}\right]^2$$

olacaktır. Bu durumda

$$\int_a^b \left| p(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds \right| dt = \frac{(b-a)^2}{4} \tag{3.16.9}$$

elde edilir. $x \in [\frac{a+b}{2}, b]$ durumunda $t_1(x) = x - \frac{b-a}{2}$ ve $t_2 = x + \frac{b-a}{2}$ alalım. Bu durumda $t_2(x) \geq b$ ve $0 \leq t_1(x) \leq x$ olacaktır. Buradan

$$\int_a^b \left| p(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds \right| dt = \int_a^x |t - t_1(x)|dt + \int_x^b [t_2(x) - t]dt = J_1 + J_2$$

yazılabilir. Burada

$$J_2 = \int_x^b [t_2(x) - t]dt = \frac{(b-a)^2}{8} - \frac{1}{2}\left[x - \frac{a+b}{2}\right]^2$$

ve

$$J_1 = \int_a^{t_1(x)} [t_1(x) - t]dt + \int_{t_1(x)}^b [t - t_1(x)]dt = \frac{1}{2}\left[x - \frac{a+b}{2}\right]^2 + \frac{(b-a)^2}{8}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\int_a^b \left| p(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds \right| dt = \frac{(b-a)^2}{4} \tag{3.16.10}$$

bulunur. Bu nedenle her $x \in [a,b]$ için

$$\int_a^b \left| p(x,t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,s)ds \right| dt = \frac{(b-a)^2}{4} \tag{3.16.11}$$

elde edilir. (3.16.7), (3.16.8) ve (3.16.11) den (3.16.5) deki eşitsizlik türetilebilir. (3.16.5) deki $\frac{1}{8}$ sabitinin en küçüklüğünü ispatlamak için (3.16.5)' nin bir $c > 0$ sabiti ile sağlandığını yani sonlu bir $[a,b]$ aralığı her $x \in [a,b]$ ve $[a,b]$ de değer alıp $[a,b]$ de $0 \le \gamma \le f(t) \le \varphi$ olacak şekilde bir f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip her X rasgele değişkeni için

$$\left| E(X) + (b-a)F(x) - x - \frac{b-a}{2} \right| \le C(\varphi - \gamma)(b-a)^2 \tag{3.16.12}$$

oldupunu varsayalım. $[a,b] = [0,1]$ alalım ve X_0 rasgele değişkenini $[0,1]$ de değer alan

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \\ \frac{3}{2} & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

ile tanımlı olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olarak alalom. Bu takdirde $\varphi = \frac{3}{2}$ ve $\gamma = \frac{1}{2}$ dır. $E(X_0) = \frac{5}{8}$ olduğu kolayca görülür. Sonuç olarak (3.16.12)' e göre her $x \in [a,b]$ için

$$\left|\frac{1}{8}+F(x)-x\right|\leq C$$

elde edilir. $x=0$ için $\frac{1}{8}\leq C$ dır. Bu nedenle $\frac{1}{8}$ sabiti (3.16.5) de en küçüktür. Aynı örnek $\frac{1}{8}$ sabitinin (3.16.6) daki en iyi ihtimal olduğunu gösterecektir. Böylece sonucumuz ispatlanmış olur.

Sonuç 3.16.1 X, f, γ, φ ve F yukarıdaki gibi olsun. Bu takdirde her $x\in[a,b]$ için

$$\left|E(X)+(b-a)P_r\left(X\leq\frac{a+b}{2}\right)-b\right|\leq\frac{1}{8}(\varphi-\gamma)(b-a)^2 \tag{3.16.13}$$

dır. Ayrıca (3.16.13) deki $\frac{1}{8}$ sabiti en iyi ihtimaldir. (3.16.13) ifadesi (3.16.5) den $x=\frac{a+b}{2}$ seçilerek elde edilir. Teorem[4]' ün ispatında kullanılan örnek $\frac{1}{8}$ sabitininin (3.16.13) de en küçüklüğünü göstermek için kullanılabilir. İkinci sonucumuz aşağıdaki teoremdir.

Teorem 3.16.5 X, f, γ, φ ve F yukarıdaki gibi olsun. Bu takdirde her $x\in[a,b]$ için

$$\left|E(X)+\frac{b-a}{2}F(x)-\frac{b+x}{2}\right|\leq\frac{1}{4}(\varphi-\gamma)\left[\frac{1}{4}(b-a)^2+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\leq\frac{1}{8}(\varphi-\gamma)(b-a)^2 \tag{3.16.14}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca (3.16.14)' ün ikinci ifadesindeki $(\varphi-\gamma)$ nın çarpanı olan $\frac{1}{4}$ sabiti en iyi ihtimaldir.

3.16.2 $x\in[a,b]$ olsun. (3.16.7) özdeşliğinden

$$(b-a)F(x)+E(X)-b=\int_a^b(t-a)f(t)dt+\int_a^b(t-b)f(t)dt$$

olduğunu biliyoruz. f ve $g(t)=t-a$ alarak $[a,x]$ aralığında (3.16.4) eşitsizliğini uygularsak

$$\left|\int_a^x f(t)[t-a]dt-\frac{1}{x-a}\int_a^x[t-a]dt.\int_a^x f(t)dt\right|\leq\frac{1}{2}\left(\int_a^x\left|t-a-\frac{1}{x-a}\int_a^x(s-a)ds\right|dt\right)(\varphi-\gamma) \tag{3.16.15}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)\quad\frac{1}{x-a}\int_a^x(t-a)dt=\frac{x-a}{2}$$

dır. $t_1(x) = \frac{x+a}{2}$ alınırsa

$$\int_a^x \left| t - a - \frac{1}{x-a}\int_a^x (s-a)ds \right| dt = \int_a^x |t - t_1(x)| dt = \frac{(x-a)^2}{4}$$

olduğu görülür. Böylece

$$\left| \int_a^x f(t)[t-a]dt - \frac{x-a}{2}F(x) \right| \leq \frac{1}{8}(\varphi - \gamma)(x-a)^2 \tag{3.16.16}$$

elde edilir. f ve $g(t) = t - b$ alarak $[x, h]$ aralığında (3.16.4) eşitsizliğini uygularsak

$$\left| \int_x^b f(t)[t-b]dt - \frac{1}{b-x}\int_x^b [t-b]dt. \int_x^b f(t)dt \right| \leq \frac{1}{2}\left(\int_x^b \left| t - b - \frac{1}{b-x}\int_x^b (s-b)ds \right| dt \right)(\varphi - \gamma) \tag{3.16.17}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\int_x^b f(t)dt = 1 - F(x) \quad \frac{1}{b-x}\int_x^b (t-b)dt = \frac{x-b}{2}$$

olacaktır. $t_2(x) = \frac{x+b}{2}$ alınarak

$$\int_x^b \left| t - a - \frac{1}{b-x}\int_x^b (s-b)ds \right| dt = \int_a^x |t - t_2(x)| dt = \frac{(b-x)^2}{4}$$

olduğu görülür. Böylece her $x \in [a, b]$ için

$$\left| \int_x^b f(t)[t-b]dt + \frac{b-x}{2}[1 - F(x)] \right| \leq \frac{1}{8}(\varphi - \gamma)(b-x)^2 \tag{3.16.18}$$

elde edilir. (3.16.16) ve (3.16.18) toplayarak ve üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\left| \int_a^x (t-a)f(t)dt + \int_x^b (t-b)f(t)dt - \frac{b-a}{2}F(x) + \frac{b-x}{2} \right| \leq \frac{1}{8}(\varphi - \gamma)[(x-a)^2 + (b-x)^2] \tag{3.16.19}$$

olduğu görülür. Bununla beraber

$$\frac{1}{2}[(x-a)^2+(b-x)^2]=\frac{1}{4}(b-a)^2+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

dır.(3.16.7), (3.16.19) ve yukarıdaki eşitlikten (3.16.14)' in birinci eşitsizliği elde edilmiş olur. Şimdi Teorem[4]'ün ispatında ortaya konulan örneği kullanarak (3.16.14)' ün ikinci terimindeki $(\varphi-\gamma)$' nın katsayısı olan $\frac{1}{4}$ sabitinin en iyi ihtimal olduğu kolayca gösterilebilir. (3.16.14) deki ikinci eşitsizlik ise açıktır. Böylece sonucumuz tamamen ispatlanmış olur.

Remark 3.16.1 Eğer (3.16.14) de $x=a$ veya $x=b$ seçilirse bu takdirde

$$\left|E(X)-\frac{a+b}{2}\right|\leq\frac{1}{8}(\varphi-\gamma)(b-a)^(2) \tag{3.16.20}$$

elde edilir. Böylece (3.16.6)' ı yeniden elde ederiz.

Remark 3.16.2 Eğer (3.16.14) de $x=\frac{a+b}{2}$ alınırsa bu taktirde

$$\left|E(X)+\frac{b-a}{2}P_r\left(X\leq\frac{a+b}{2}\right)-\frac{a+3b}{4}\right|\leq\frac{1}{16}(\varphi-\gamma)(b-a)^2 \tag{3.16.21}$$

elde edilir ki bu (3.16.14) den elde edilebilen en iyi eşitsizliktir.

X yukarıdaki gibi bir rasgele değişken olsun. $\mu_0=\frac{a+b}{2}$ ve $A_{\mu_0}=\int_a^b|t-\mu_0|f(t)dt$ taımlayalım. [1] nolu çalışmada

$$\left|A_{\mu_0}-\frac{b-a}{4}\right|\leq\frac{1}{8\sqrt{3}}(\varphi-\gamma)(b-a)^2 \tag{3.16.22}$$

eşitsizliği gösterilmiştir. Bu kısımda Cheng-Sun eşitsizliğini kullanarak bu eşitsizliğin bir gelişimini vereceğiz.

Teorem 3.16.6 X,f,γ,φ ve F yukarıdaki şekilde verilmiş olsun. Bu takdirde

$$\left|A_{\mu_0}-\frac{b-a}{4}\right|\leq\frac{1}{16}(\varphi-\gamma)(b-a)^2 \tag{3.16.23}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

3.16.3 Basit bir hesaplamayla

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |t-\mu_0|dt = \frac{b-a}{4}$$

olduğu gösterilebilir. Cheng-Sun eşitliğini kullanarak

$$\left|A_{\mu_0} - \frac{b-a}{4}\right| \leq \frac{1}{2}(\varphi-\gamma)\int_a^b \left||t-\mu_0| - \frac{b-a}{4}\right|dt$$

elde edilir. Bununla beraber

$$\int_a^b \left||t-\mu_0| - \frac{b-a}{4}\right|dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left|\frac{3a+b}{4} - t\right|dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left|t - \frac{a+3b}{4}\right|dt$$

$$= \int_a^{\frac{3a+b}{4}} \left(\frac{3a+b}{4} - t\right)dt + \int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}} \left(t - \frac{3a+b}{4}\right)dt$$

$$+ \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+3b}{4}} \left(\frac{a+3b}{4} - t\right)dt + \int_{\frac{a+3b}{4}}^b \left(t - \frac{a+3b}{4}\right)dt$$

$$= K_1 + K_2 + K_3 + K_4$$

yazılabilir. Basit bir hesaplamalarla $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = \frac{1}{32}(6-a)^2$ olduğu gösterilebilir. Bu eşitliklerden istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada Korkine özdeşliği, Hölder integral eşitsizliği ve Grüss eşitsizliği kullanılarak olasılık yoğunluk fonksiyonu reel sayıların bir kapalı aralığında tanımlı olan sürekli rasgele değişkenlerin momentleri için bazı eşitsizlikler verilmiştir. Bununla ilgili olarak böyle bir rasgele değişkenin yüksek mertebeden momentleri için bazı tahminler ve eşitsizlikler ispatlanmıştır. Olasılık yoğunluk fonksiyonunun mutlak sürekli olması ve n -yinci mertebeden türevlenebilir olması durumları için beklenen değer, varyans, standart sapma ve kümülatif dağılım fonksiyonu ile ilgili bazı üst sınırlar belirlenmiştir. Ayrıca N. S. Barnett ve S. S. Dragomir tarafından verilen bazı eşitsizlikler olasılık yoğunluk fonksiyonu sınırlı olan rasgele değişkenler için uyarlanmıştır.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlara ilaveten aşağıdaki çalışmalarda yapılabilir.

1. Literatürde Ostrowski eşitsizliği olarak bilinen eşitsizlik kullanılarak sonlu bir aralıkta tanımlı bir olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip rasgele değişkenlerin beklenen değer ve varyansı için benzer eşitsizlikler belirlenebilir.

2. Olasılık yoğunluk fonksiyonu sonlu bir aralıkta tanımlı sürekli rasgele değişkenlerin kümülatif dağılım fonksiyonları için Ostrowski tipi eşitsizlikler verilebilir.

3. Pre-Grüss tipi eşitsizlikler kullanılarak olasılık yoğunluk fonksiyonları sınırlı olan rasgele değişkenlerin beklenen değer ve varyansı için eşitsizlikler verilebilir.

4. Olasılık yoğunluk fonksiyonları $L_p[a,b]$ veya $L_\infty[a,b]$ sınıfından olan rasgele değişkenlerin kümülatif dağılım fonksiyonları, beklenen değer ve varyansı için Ostrowski tipi eşitsizlikler türetilebilir.

5. Olasılık yoğunluk fonksiyonları bir $[a,b]$ aralığında sınırlı olan sürekli rasgele değişkenlerin kümülatif dağılım fonksiyonları için Hermite-Hadarmard tipi eşitsizlikler verilebilir.

KAYNAKLAR

[1] A.Lupas, *The best constant in an integral inequality*, Math. 15(38) (1973), 219–222.

[2] D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric and A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic, (1993).

[3] D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric and A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, (1993).

[4] J. E. Pecaric, F. Proschan and Y. L. Tong, *Convex Functions*, Partial Orderings and Statiscal Appl. Academic Press, (1992).

[5] J. E. Pecaric, F. Proschan and Y. L. Tong, *Convex Functions Partial Orderings and Statistical Applications*, Academic Press, (1992).

[6] M. Matic, J. E. Pecaric and N. Ujevic, *On new estimations of the remainder in generalized Taylor's formula*, Math. Ineqval. Appl. 2, (1999), 343–361.

[7] M. Matic, J. E. Pecaric and N. Ujevic, *On New estimation of the remainder in Generalised Taylor's Formula*, Math. Inequal. Appl. 2(3) (1999), 343–361.

[8] M. Matic, J. E. Pecaric and N. Ujevic, *On new estimation of the remainder in generalized Taylor's formula*, Math. Ineq. Appl., 3(2) (1999), 343–361.

[9] N. S. Barnett and S. S. Dragomir, *Some elementary inequalities for the expectation and variance of a random variable whose pdf is defined on a finite interval*, RGMIA Res. Rep. Coll., 2(7) (1999).

[10] N. S. Barnett and S. S. Dragomir, *Some further inequalities for univariate moments and some new ones for the covariance*, RGMIA Res. Rep. Coll., 3(4) (2000).

[11] N. S. Barnett, P. Cerone, S. S. Dragomir and J. Roumeliotis, *Some inequalities for the expectation and variance of a random variable whose PDF is n-time differentiable*, Jour. Ineqval. Pure Appl. Math., 12 (2000), 1–29.

[12] N. S. Barnett and S. S. Dragomir, *Some inequalities for random variables whose probability density functions are bounded using a pre-Grüss Inequality*, Kyungpook Math. Jour. 40(2) (2000), 299–311.

[13] N. S. Barnett, P. Cerone, S. S. Dragomir and J. Roumeliotis, *Some inequalities for the dispersion of a random variable whose PDF is defined on a finite interval*, Jour.Ineqval.Pure Appl.Math. 2(1) (2001), 1–18.

[14] N. S. Barnett, P. Cerone, S. S. Dragomir and J. Roumeliotis, *Some inequalities for the dispersion of a random variable whose pdf is defined on a finite interval*, J. Ineq. Pure and Appl. Math., 2(1) (2001), 1–18.

[15] P.Kumar and S.S.Dragomir, *Some inequalities for the gamma functions and moment ratios of gamma variables*, Indian Jour. Math., (2001).

[16] P. Kumar, *Moment inequalities of a random variable defined over a finite interval*, Jour. Ineqval. Pure Appl. Math. 3(41) (2002), 1–11.

[17] P. Kumar, *Hermite-Hadamard inequalities and their applications in estimating moments*, In Ineqvality Theory Appl., Volume 2, Nova Science, (2003).

[18] S. S. Dragomir and A. McAndrew, *On trapezoid inequality via Grüss type result and applications*, Tamkang Jour. Math. 31, (2000), 193–201.

[19] S. S. Dragomir and A. McAndrew, *On Trapezoid inequality via a Grüss type result and appl.*, Tamkang J. Math. 31(3) (2000), 193–201.

[20] S. S. Dragomir, P. Kumar and S. P. Singh, *Mathematical inequalities with applications to the beta and gamma mappings*, Indian Jour. Math. 42(3) (2000), 1–19.

[21] X. L. Cheng and J. Sun, *A note on the perturbed trapezoid inequality*, RGMIA (2002), 1–4.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	Büşra Nur KURŞUN
Doğum Yeri	:	İstanbul
Doğum Tarihi	:	1992
Medeni Hali	:	Bekar
Bildiği Yabancı Dil	:	İngilizce
İletişim Bilgileri	:	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, `bnur-1992@hotmail.com`
Lise	:	Rami Atatürk Anadolu Lisesi, 2010
Lisans	:	Ordu Üniversitesi Fen-Ed. Fak. Matematik Böl.-2014