T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

QUASİ KONVEKS VE GENELLEŞTİRİLMİŞ QUASİ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN SIMPSON TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

NAZLI UYGUN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2016

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Nazlı UYGUN tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Erhan SET danışmanlığında yürütülen "QUASİ KONVEKS VE GENELLEŞTİRİLMİŞ QUASİ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN SIMPSON TİPLİ EŞİTSİZLİKLER" adlı bu tez, jürimiz tarafından 30/12/2016 tarihinde oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman	:	Doç. Dr. Erhan SET	
Başkan	:	Doç. Dr. İmdat İŞCAN Matematik Bölümü, Giresun Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Selehattin MADEN Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Erhan SET Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 25../01./.2017 tarih ve 2017../08. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

14../02./2017

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Kürşat KORKMAZ

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ 1923

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Nazlı UYGUN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

QUASİ KONVEKS VE GENELLEŞTİRİLMİŞ QUASİ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN SIMPSON TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Nazlı UYGUN

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2016
Yüksek Lisans Tezi, 47s.

Danışman: Doç. Dr. Erhan SET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm eşitsizlikler, konveks fonksiyonlar ve kesirli integraller ile ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalar hakkında bazı bilgileri içeren giriş bölümüdür. İkinci bölümde temel tanımlar, teoremler ile birlikte ilgili sonuçlar ve örnekler verilmiştir. Üçüncü bölümde ilk olarak Riemann-Liouville kesirli integralleri hakkında bilgiler ve ilgili Simpson tipli bazı eşitsizlikler verilmiştir. Daha sonra α tipli kümeler hakkında temel bilgiler ile α tipli kümelerde limit, süreklilik, lokal kesirli türev, lokal kesirli integral gibi kavramlar hakkında genel bilgiler verilmiştir. Dördüncü bölümde lokal kesirli integraller yardımıyla elde edilen özdeşlikler ile bu özdeşliklerden faydalanılarak genelleştirilmiş quasi-konveks fonksiyonlar için yeni Simpson tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Son bölümde ise sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş quasi konveks fonksiyon, Kesirli integraller, Quasi konveks fonksiyon, Simpson tipli eşitsizlikler.

ABSTRACT

SIMPSON TYPE INEQUALITIES FOR QUASI CONVEX AND GENERALİZED QUASI CONVEX FUNCTIONS

Nazlı UYGUN

Ordu University
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2016
MSc. Thesis, 47p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Erhan SET

This thesis consist of four chapters. First chapter is the introduction part that includes information about the studies that have been performed related to inequalities, convex functions and fractional integrals until now. In the second chapter, fundamental definitions, theorems, related results and examples are given. In the third chapter, firstly the informations about Riemann-Liouville fractional integral and its associated some Simpson type inequalities are given. Then, fundamental informations about α type sets and general informations the concept as limit, continuity, local fractional derivative and local fractional integral on α type sets(or fractional sets) are given.

In the fourth chapter, the identities obtained via local fractional integrals and by using these identites, new Simpson type inequalities for generalized quasi-convex functions is established. It is given the result and propositions in the last chapter.

Key Words: Generalized quasi convex function, Fractional integrals, Quasi convex function, Simpson type inequalities.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam Sayın Doç. Dr. Erhan SET' e en samimi duygularımla teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Anabilim dalımızın yüksek lisans öğrencilerinden Sayın Necla KORKUT ve Sayın Barış ÇELİK’e düzenleme, yardım ve desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmam boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen babama, anneme müteşekkirim.

Bu çalışma Ordu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir (**Proje No:TF-1605**).

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

β	: Beta fonksiyonu
$C_\alpha[a,b]$	: $[a,b]$ Aralığında Hölder Kesirli Sürekli Fonksiyonlar Kümesi
$D_\alpha[a,b]$	: α. Dereceden $[a,b]$ Aralığında Diferansiyellenebilen Fonksiyonlar Kümesi
f'	: f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
f''	: f Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
$f^{(\alpha)}$	: f Fonksiyonunun α. Mertebeden Lokal Kesirli Türevi
Γ	: Gamma fonksiyonu
I	: $\mathbb{R}$ Sayılar Kümesinde Bir Aralık
I^0	: I' nın İçi
${}_aI_b^\alpha$	: f(x)'in Lokal Kesirli İntegrali
$J_{a^+}^\alpha$	: α. Dereceden Sağ Riemann-Liouville Kesirli İntegral
$J_{b^-}^\alpha$	: α. Dereceden Sol Riemann-Liouville Kesirli İntegral
$L[a,b]$	: $[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonlar Kümesi
$\mathbb{N}^\alpha$	: α-Tipli Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}^\alpha$	: α-Tipli Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^\alpha$	: α-Tipli Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}^\alpha$	: α-Tipli Tam Sayılar Kümesi

1. GİRİŞ

Eşitsizlikler ve konveks fonksiyonlar matematiğin tüm alanlarında önemli bir rol oynaması ve aktif bir araştırma alanı olmasından dolayı, özellikle son yıllarda araştırmacıların ilgi odağı haline gelmiştir.

Eşitsizlikler matematiğin hemen hemen tüm alanlarında önemli bir rol oynar. Eşitsizlikler ile ilgili ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Polya[8] tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır. E.F. Beckenbach and R. Bellman[4] tarafından 1934-1960 döneminde eşitsizlikler üzerine elde edilen bazı ilginç sonuçları içeren "Inequalities" adlı ikinci kitap yazılmıştır. Mitrinovic'in[11] 1970'te yayınlanan "Analytic Inequalities " adlı kitabı yukarıda bahsedilen iki kitapta da yer almayan yeni konular içerir. Bu üç temel kaynağın yanı sıra Mitrinovic ve arkadaşları[12] tarafından "Classical and New Inequalities in Analysis", Pachpatte[14] tarafından "Mathematical Inequalities" adlı kitaplar ve son yıllarda da Sever S.S. Dragomir, V. Lakshmikantham, R.P. Agarwal gibi araştırmacılar tarafından eşitsizlikler konusunda pek çok kitap, makale ve monografi yazılmıştır. Eşitsizlikler yaygın olarak matematik ve uygulamalı matematiğin çeşitli dallarının gelişiminin arkasındaki temel itici güçlerinden biri olarak kabul edilmektedir. Son on yıldan fazladır matematiğin birçok farklı alanlardaki uygulamalarda literatürde yerini almış temel eşitsizlikler büyük bir katkı sağlamaktadır. Bu eşitsizliklerden biri de Simpson eşitsizliğidir.

Konveks fonksiyonların tarihi M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü pi değerini hesaplamasına kadar dayanmakla birlikte başlangıcı 19. yüzyılın sonları olarak gösterilebilir. Konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen tarafından çalışıldığı ve Jensen'in bu öncü çalışmalarından itibaren konveks fonksiyonlar teorisinin hızlı bir gelişme gösterdiği kabul edilmektedir. Beckenbech ve Bellman[4] ve Mitrinovic[11] gibi pek çok araştırmacı konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler konusunu kitaplarında ele almışlardır. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak (Convex functions: Inequalities) 1987 yılında Pecaric[15] tarafından yazılmıştır. Ayrıca Roberts ve Varberg[17], Pečarić ve arkadaşları[16], Niculescu ve Persson[13] gibi pek çok kişi konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizliklerle ilgili çok sayıda çalışma yapmışlardır. Matematiksel analiz, uygulamalı matematik, olasılık teorisi ve matematiğin diğer çeşitli alanlarında doğrudan veya dolaylı olarak konveks fonksiyonların birçok uygulaması vardır. Ayrıca farklı araştırmacılar tarafından konveks fonksiyonların birçok farklı türü tanımlanmış ve bu yeni konveksikler yardımıyla eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu konveksliklerden biri de quasi konveks fonksiyonlardır. 1953'te, quasi konveks fonksiyonlar sınıfını oluşturan, isimlendiren ve geliştiren kişilerin başında W. Fenchel gelmektedir. Fenchel'in "Convexs Cones Sets and Functions" adlı ders notları bu sınıfın ilk kaynaklarındandır.

Kesirli türev ve kesirli integral kavramları ilk olarak Liouville tarafından duyruldu. Kesirli türev ve kesirli integral kavramı türev ve integrallerin sadece tam sayılar için var mıdır sorusundan yola çıkılarak ortaya çıkmış 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer birçok matematikçinin kesirli mertebe için diferensiyel ve integrasyonun genelleştirilmesine dayanan öncü çalışmalarıyla gelişmeye başlanmıştır. Uygulamalı alanlarda kesirli türev ve kesirli integral kavramları hakkında ilk kaynak kitap S.G. Samko ile A.A. Kilbas ve O.I. Marichev[18] tarafından yazılmış olup bu kavramlar üzerinde birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan bir tanesi de 2011 yılında Xiao-Jun Yang[27] tarafından yazılan, kesirli küme, lokal kesirli türev ve lokal kesirli integral gibi kavramların tanıtıldığı "Lokal Kesirli Fonksiyonel Analiz ve Uygulamaları" adlı eserdir. Yang'ın bu eserinden faydalanarak son bir kaç yılda genelleştirilmiş konveks fonksiyonlar ve bazı türleri tanıtılmış ve bu fonksiyonlar yardımıyla da yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Bu tezin amacı ilk olarak Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla quasi-konveks fonksiyonlar için bazı Simpson tipli eşitsizliklerin genelleştirmelerini vermektir. Daha sonra ise $\alpha-$ tipli kümeler hakkında bilgi verilerek bu kümeler yardımıyla genelleştirilmiş quasi-konvekslik kavramı verilip, bu fonksiyon yardımıyla yeni genelleştirilmiş Simpson tipli eşitsizlikler elde etmektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamızda kullanılacak olan tanımlar, teoremler, bazı iyi bilinen eşitsizlikler ve temel özellikler ile gerekli olan ispatlar verilecektir.

2.1 Genel Kavramlar

Tanım 2.1.1 "(**Lineer Uzay**): L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun.
$+ : L \times L \to L$ ve $\cdot : F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde lineer uzay(vektör uzayı) denir.
A) L, + işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,
G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir,
G2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir,
G3. Her $x \in L$ için $x + \Theta = \Theta + x = x$ olacak şekilde $\Theta \in L$ vardır,
G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \Theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır,
G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.
B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.
L1. $\alpha.x \in L$ dir,
L2. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir,
L3. $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$ dir,
L4. $(\alpha\beta).x = \alpha(\beta.x)$ dir,
L5. $1.x = x$ dir(Burada 1, F nin birim elemanıdır).

$F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye kompleks uzay adı verilir [1].

Tanım 2.1.2 F bir cisim ve V ve W, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T : V \to W$ dönüşümü,
(a) $T(u + v) = T(u) + T(v)$
(b) $T(cu) = cT(u)$
şartlarını sağlıyorsa T ye V üzerinde lineer dönüşüm denir [1].

Tanım 2.1.3 (**Konveks Küme**): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğindeki x ve y'nin katsayıları icin $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki α, $1-\alpha$ yerine $\alpha+\beta=1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan reel α, β sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir [3].

Tanım 2.1.4 (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y) \tag{2.1.1}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eşitsizlikte $'' \geq ''$ olması durumunda ise f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir. Eğer (2.1.1) eşitsizliği $t \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir [13].

Tanım 2.1.5 Eğer f fonksiyonu hem konveks hem de konkav ise f'ye afin(lineer)dir denir[7].

Tanım 2.1.6 (J-Konveks Fonksiyon): I, $\mathbb{R}$'de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen konveks veya J-konveks fonksiyon denir [11].

Tanım 2.1.7 (Kesin J-Konveks Fonksiyon): Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde J-konveks fonksiyon denir [11].

Sonuç 2.1.1 Her konveks fonksiyon J konveks fonksiyondur.

Sonuç 2.1.2 $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun I'da konveks olması için gerek ve yeter sart, her $x, y \in I$ ve her $p, q > 0$ reel sayıları için

$$f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) \leq \frac{pf(x)+qf(y)}{p+q}$$

olmasıdır. Bu eşitsizlik (2.1.1) eşitsizliğine denktir [12].

Teorem 2.1.1 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise
a. $f, (a, b)$ aralığında süreklidir
b. $f, [a, b]$ aralığında sınırlıdır [2].

Teorem 2.1.2 f fonksiyonunun I aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter sart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır [11].

Tanım 2.1.8 (Quasi Konveks Fonksiyon): $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $I \subset \mathbb{R}$ boştan farklı konveks küme olsun. Her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\left\{f(x), f(y)\right\}$$

ise f'ye quasi konveks fonksiyon denir[5].
Eğer

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \max\left\{f(x), f(y)\right\}$$

ise f'ye kesin quasi konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \max\left\{f(x), f(y)\right\}$$

ise f'ye quasi konkav fonksiyon ve

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \max\left\{f(x), f(y)\right\}$$

ise f'ye kesin quasi konkav fonksiyon denir [5].

Tanım 2.1.9 f hem quasi konveks hem de quasi konkav ise f' ye quasi monotonik denir [7].

Not 2.1.1 Her konveks fonksiyon aynı zamanda bir quasi konveks fonksiyondur. Fakat bunun tersi doğru değildir. Yani konveks fonksiyon olmadığı halde quasi-konveks olan fonksiyonlar vardır.

Örnek 2.1.1 $g : [-2,2] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-2,-1], \\ t, & t \in (-1,2]. \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu $g(t)$ fonksiyonu $[-2,2]$'de quasi konveks fonksiyondur; fakat konveks fonksiyon değildir [10].

Teorem 2.1.3 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $I, \mathbb{R}$'de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği literatürde konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir [16].

Teorem 2.1.4 (Simpson Eşitsizliği): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon ve $\|f^{(4)}\|_\infty=\sup\limits_{x\in(a,b)}|f^{(4)}(x)|<\infty$ olsun. Bu durumda

$$\left|\frac{1}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{1}{2880}\|f^{(4)}\|_\infty(b-a)^4$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik literatürde Simpson Eşitsizliği olarak bilinmektedir [6].

İspat. Bu teoremi ispatlamak için aşağıdaki eşitlik kullanılacaktır. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon ve $||f^{(4)}||_\infty=\sup\limits_{x\in(a,b)}|f^{(4)}|<\infty$ ve

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{24}(x-a)^3\big(x-\frac{a+2b}{3}\big), & x\in[a,\frac{a+b}{2}),\\ \frac{1}{24}(x-b)^3\big(x-\frac{2a+b}{3}\big), & x\in[\frac{a+b}{2},b].\end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\int_a^b S(x)f^{(4)}(x)dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{1}{24}(x-a)^3\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)f^{(4)}(x)dx\\ &+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\frac{1}{24}(x-b)^3\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)f^{(4)}(x)dx \qquad (2.1.2)\end{aligned}$$

yazılır.

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınıp üçgen eşitsizliği uygulanırsa;

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b S(x)f^{(4)}(x)dx\right|\\ =&\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{1}{24}(x-a)^3\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)f^{(4)}(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\frac{1}{24}(x-b)^3\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)f^{(4)}dx\right|\\ \leq&\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{1}{24}|x-a|^3\left|x-\frac{a+2b}{3}\right|\left|f^{(4)}(x)\right|dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\frac{1}{24}|x-b|^3\left|x-\frac{2a+b}{3}\right|\left|f^{(4)}(x)\right|dx\\ \leq&\frac{||f^4||_\infty}{24}\left\{\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^3\left(-x+\frac{a+2b}{3}\right)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)^3\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)dx\right\}\\ =&\frac{||f^4||_\infty}{2880}(b-a)^5\end{aligned}$$

olur. İlk ve son terimlerden

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{1}{24}(x-a)^3\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)f^{(4)}(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\frac{1}{24}(x-b)^3\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)f^{(4)}(x)dx\right|\\ \leq&\frac{||f^4||_\infty}{2880}(b-a)^5 \qquad (2.1.3)\end{aligned}$$

yazılır. Şimdi (2.1.2) eşitliğine adım adım kısmi integrasyon metodu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b S(x)f^{(4)}(x)dx\right| \qquad (2.1.4)\\
=&\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{1}{24}(x-a)^3\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)f^{(4)}(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\frac{1}{24}(x-b)^3\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)f^{(4)}(x)dx\right|\\
=&\left|-\frac{2}{3}(b-a)f\big(\frac{a+b}{2}\big)-\frac{1}{6}(b-a)[f(a)+f(b)]+\int_a^b f(x)dx\right|
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.1.3) ve (2.1.4) den

$$\begin{aligned}
&\left|-\frac{2}{3}(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{6}(b-a)[f(a)+f(b)]+\int_a^b f(x)dx\right|\\
=&\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{1}{24}(x-a)^3\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)f^{(4)}(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\frac{1}{24}(x-b)^3\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)f^{(4)}(x)dx\right|\\
\leq&\ \frac{||f^4||_\infty}{2880}(b-a)^5
\end{aligned}$$

yazılır. Yani

$$\left|-\frac{2}{3}(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{6}(b-a)[f(a)+f(b)]+\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{||f^4||_\infty}{2880}(b-a)^5$$

olur. Her iki taraf $(b-a)$' ya bölünürse

$$\left|\frac{1}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{||f^4||_\infty}{2880}(b-a)^4$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Quasi-konveks fonksiyonlar, Hermite-Hadamard eşitsizliği ve Simpson eşitsizliği üzerine yazılan birçok makalenin dışında literatürde yapılan tez çalışmalarına da rastlanmaktadır [24, 32].

Hua ve arkadaşları iki kez diferansiyellenebilen fonksiyonlar için aşağıdaki eşitliği elde etmişlerdir [9].

Lemma 2.1.1 $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f', mutlak sürekli ve $f''\in L_1[a,b]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6}\left[f(a)+2f\big(\frac{2a+b}{3}\big)+2f\big(\frac{a+2b}{3}\big)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{(b-a)^2}{54}\int_0^1 t(1-t)\\
&\times\left[f''\big(\frac{2+t}{3}a+\frac{1-t}{3}b\big)+f''\big(\frac{1+t}{3}a+\frac{2-t}{3}b\big)+f''\big(\frac{t}{3}a+\frac{3-t}{3}b\big)\right]dt \qquad (2.1.5)
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

Set ve arkadaşları quasi-konveks fonksiyonlar için Simpson tipli aşağıda verilen eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 2.1.5 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, I^{\circ}$'de diferansiyellenebilen bir dönüşüm, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde quasi-konveks ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \\ & \leq \frac{5(b-a)}{36} \max\{|f'(a)|, |f'(b)|\} \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

eşitsizliği geçerlidir [19].

Teorem 2.1.6 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, I^{\circ}$'de diferansiyellenebilen bir dönüşüm, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde quasi-konveks ve $q > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \\ & \leq \frac{1}{6}(b-a)\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\max\left\{ |f'(a)|^q, |f'(b)|^q \right\} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

eşitsizliği geçerlidir [19].

Teorem 2.1.7 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, I^{\circ}$'de diferansiyellenebilen bir dönüşüm, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde quasi-konveks ve $q \geq 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \\ & \leq \frac{5(b-a)}{36} \left(\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

eşitsizliği geçerlidir [19].

Teorem 2.1.8 (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi x, y reel sayıları için

$$\begin{aligned} |x+y| &\leq |x| + |y|, \\ \big||x| - |y|\big| &\leq |x-y|, \\ \big||x| - |y|\big| &\leq |x+y|, \end{aligned}$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + ... + x_n| \leq |x_1| + ... + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir [12].

Teorem 2.1.9 (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): $f, [a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir [12].

Teorem 2.1.10 (Hölder Eşitsizliği): $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ve $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki $n-$lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

a. $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

b. $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [11].

Teorem 2.1.11 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [12].

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan power-mean eşitsizliği de aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir. Power-mean eşitsizliği kullanılarak daha iyi üst sınırlar elde edilir.

Sonuç 2.1.3 (Power-Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise ,

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.1.10 (Gamma Fonksiyonu): $n > 0$ için

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-u} u^{n-1} du$$

ile tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonunun bazı önemli özellikleri aşağıda verilmiştir.

1. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\Pi}$

3. $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\Pi}{\sin p\Pi}, \quad 0 < p < 1$

4. $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\Pi}\Gamma(2n)$.

Tanım 2.1.11 (Beta Fonksiyonu): $x > 0$ ve $y > 0$ için

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dx$$

şeklinde ifade edilen $\beta(x, y)$ gösterimine β fonksiyonu denir. Gamma ve Beta fonksiyonları arasında

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad m, n > 0$$

şeklindeki ilişki literatürde sıkça kullanılmaktadır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde Riemann-Liouville kesirli integralleri ve bu integraller yardımıyla elde edilen Simpson tipli bazı eşitsizlikler verilecektir.

3.1 Kesirli İntegraller Yardımıyla Simpson Tipli Eşitsizlikler

3.1.1 Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri

Kesirli Riemann-Liouville integral operatörünü elde etmek için ilk olarak n-katlı

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} ... \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} ... d\sigma_2 d\sigma_1 \tag{3.1.1}$$

integralini ele alalım. Bu integrallerde integrasyon sırasını ve buna bağlı sınırları değiştirelim. Bunun için;

$$\begin{array}{cc} a < \sigma_1 < x & \sigma_2 < \sigma_1 < x \\ a < \sigma_2 < \sigma_1 & \sigma_3 < \sigma_2 < x \\ ,\ldots, & ,\ldots, \\ a < \sigma_{n-1} < \sigma_{n-2} & \sigma_n < \sigma_{n-1} < x \\ a < \sigma_n < \sigma_{n-1} & a < \sigma_n < x \end{array} \tag{3.1.2}$$

sınır değişimleri altında (3.1.1) ifadesi,

$$\begin{aligned} & \int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} ... \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} ... d\sigma_2 d\sigma_1 \\ = & \int_a^x f(\sigma_n) \left(\int_{\sigma_n}^x \left(\int_{\sigma_{n-1}}^x \cdots \int_{\sigma_3}^x \left(\int_{\sigma_2}^x d\sigma_1 \right) d\sigma_2 ... \right) d\sigma_{n-1} \right) d\sigma_n \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

şeklinde yazılır. (3.1.3) ifadesinin sağ tarafı terim terim hesaplanırsa

$$\begin{aligned} & \int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} ... \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} ... d\sigma_2 d\sigma_1 \\ = & \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(\sigma_n)(x-\sigma_n)^{n-1} d\sigma_n \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\Gamma(n) = (n-1)!$ eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} ... \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} ... d\sigma_2 d\sigma_1 \\ = & \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(\sigma_n)(x-\sigma_n)^{n-1} d\sigma_n \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

yazılır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki n-sayısı pozitif bir tamsayıdır. Gamma fonksiyonu tamsayılar dışında da ifade edilebildiğinden, n'nin tamsayı olmaması durumunda (3.1.4) eşitliğinin sağ tarafı için aşağıdaki kesirli Riemann-Liouville integral operatörünün tanımı verilebilir.

Tanım 3.1.1 $f(x) \in L_1(a, b)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}(J^{\alpha}_{a^+}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}dt, \quad x > a \\ (J^{\alpha}_{b^-}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b f(t)(t-x)^{\alpha-1}dt, \quad x < b\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

integrallerine $\alpha > 0$ için α. mertebeden kesirli integral denir. Bu integral literatürde Riemann-Liouville kesirli integrali olarak bilinir. Burada $(J^0_{a^+}f) = f(x)$ ve $(J^0_{b^-}f) = f(x)$ şeklindedir.

Şimdi $f(x) = 2x$ fonksiyonunun $\alpha = \frac{1}{2}$ mertebeden kesirli integralinin $\frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}$ olduğunu gösterelim. $a = 0$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integrali

$$\big(J^{\alpha}f\big)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}dt, \;\; x > 0$$

olarak yazılır. Kabuller altında $f(x) = 2x$ fonksiyonunun $\alpha = \frac{1}{2}$ inci mertebeden kesirli integralinin,

$$\begin{aligned}\big(J^{\frac{1}{2}}f\big)(x) \quad &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x 2t(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt, \;\; x > 0 \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x t(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{t}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt, \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 (ux)(1-u)^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}du, \;\; t = ux \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}\int_0^1 u(1-u)^{-\frac{1}{2}}du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}B(2, \frac{1}{2}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}\frac{\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}} \\ &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

olduğu görülür. Şimdi de elde edilen sonucun tekrar $\frac{1}{2}$ inci mertebeden integrali alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\left(J^{\frac{1}{2}}f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x \frac{8}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt, \;\; x>0 \\
&= \frac{8}{3\pi}\int_0^1 (ux)^{\frac{3}{2}}(x-ux)^{-\frac{1}{2}}xdu, \;\; t=ux \\
&= \frac{8}{3\pi}x^2\int_0^1 (u)^{\frac{3}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du \\
&= \frac{8}{3\pi}x^2 B(\frac{5}{2},\frac{1}{2}) \\
&= \frac{8}{3\pi}x^2 \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2}+\frac{1}{2})} \\
&= \frac{8}{3\pi}x^2 \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3)} \\
&= x^2
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

3.1.2 Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri yardımıyla Simpson Tipli Eşitsizlikler

Lemma 3.1.1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f'\in L[a,b]$, $a<b$, $n\geq 0$ ve $\alpha>0$ olsun. $\forall\, x\in[a,b]$ için $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha-1}du$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
I(a,b;n.\alpha) \;=\; & \frac{1}{6}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+nb}{n+1}\right)+2f\left(\frac{na+b}{n+1}\right)\right] \\
& -\frac{\Gamma(\alpha+1)(n+1)^\alpha}{6(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f\left(\frac{na+b}{n+1}\right)+J_{b^-}^\alpha f\left(\frac{a+nb}{n+1}\right)\right] \\
& -\frac{\Gamma(\alpha+1)(n+1)^\alpha}{3(b-a)^\alpha}\left[J_{\frac{a+nb}{n+1}^+}^\alpha f(b)+J_{\frac{na+b}{n+1}^-}^\alpha f(a)\right] \\
=\; & \frac{b-a}{2(n+1)}\left[\int_0^1\left[\frac{2(1-t)^\alpha-t^\alpha}{3}\right]f'\left(\frac{n+t}{n+1}a+\frac{1-t}{n+1}b\right)dt\right. \\
& \left.+\int_0^1\left[\frac{t^\alpha-2(1-t)^\alpha}{3}\right]f'\left(\frac{1-t}{n+1}a+\frac{n+t}{n+1}b\right)dt\right]
\end{aligned}
$$

eşitliği geçerlidir [21].

İspat. Kısmi integral alınarak,

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1\left[\frac{2(1-t)^\alpha-t^\alpha}{3}\right]f'\left(\frac{n+t}{n+1}a+\frac{1-t}{n+1}b\right)dt \\
= \;& \frac{n+1}{3(b-a)}\left[f(a)+2f\left(\frac{na+b}{n+1}\right)\right]-\frac{\alpha(n+1)^{\alpha+1}}{3(b-a)^{\alpha+1}}\int_a^{\frac{na+b}{n+1}} f(x)\left(\frac{na+b}{n+1}-x\right)^{\alpha-1}dx \\
& -\frac{2\alpha(n+1)^{\alpha+1}}{3(b-a)^{\alpha+1}}\int_a^{\frac{na+b}{n+1}} f(x)(x-a)^{\alpha-1}dx
\end{aligned}
$$

ve

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[\frac{t^\alpha - 2(1-t)^\alpha}{3}\right] f'\left(\frac{1-t}{n+1}a + \frac{n+t}{n+1}b\right) dt \\
= \;& \frac{n+1}{3(b-a)}\left[f(b) + 2f\left(\frac{a+nb}{n+1}\right)\right] - \frac{\alpha(n+1)^{\alpha+1}}{3(b-a)^{\alpha+1}} \int_{\frac{a+nb}{n+1}}^b f(x)\left(x - \frac{a+nb}{n+1}\right)^{\alpha-1} dx \\
&- \frac{2\alpha(n+1)^{\alpha+1}}{3(b-a)^{\alpha+1}} \int_{\frac{a+nb}{n+1}}^b f(x)\,(b-x)^{\alpha-1} dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan yukarıdaki eşitlikler taraf tarafa toplanıp, elde edilen ifadede her iki taraf $\frac{b-a}{2(n+1)}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
&\frac{b-a}{2(n+1)}\left[\left(\int_0^1 \left[\frac{2(1-t)^\alpha - t^\alpha}{3}\right] f'\left(\frac{n+t}{n+1}a + \frac{1-t}{n+1}b\right) dt\right.\right. \\
&\left.+\int_0^1 \left[\frac{t^\alpha - 2(1-t)^\alpha}{3}\right] f'\left(\frac{1-t}{n+1}a + \frac{n+t}{n+1}b\right) dt\right] \\
= \;& \frac{1}{6}\left[f(a) + f(b) + 2f\left(\frac{a+nb}{n+1}\right) + 2f\left(\frac{na+b}{n+1}\right)\right] \\
&- \frac{\alpha(n+1)^\alpha}{6(b-a)^\alpha} \int_a^{\frac{na+b}{n+1}} f(x)\left(\frac{na+b}{n+1} - x\right)^{\alpha-1} dx \\
&- \frac{\alpha(n+1)^\alpha}{3(b-a)^\alpha} \int_a^{\frac{na+b}{n+1}} f(x)\,(x-a)^{\alpha-1} dx \\
&- \frac{\alpha(n+1)^\alpha}{6(b-a)^\alpha} \int_{\frac{a+nb}{n+1}}^b f(x)\left(x - \frac{a+nb}{n+1}\right)^{\alpha-1} dx \\
&- \frac{\alpha(n+1)^\alpha}{3(b-a)^\alpha} \int_{\frac{a+nb}{n+1}}^b f(x)\,(b-x)^{\alpha-1} dx
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\frac{na+b}{n+1}} f(x)\,(x-a)^{\alpha-1} dx &= J^\alpha_{\frac{na+b}{n+1}-} f(a), \\
\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\frac{a+nb}{n+1}}^b f(x)\,(b-x)^{\alpha-1} dx &= J^\alpha_{\frac{a+nb}{n+1}+} f(b), \\
\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\frac{na+b}{n+1}} f(x)\left(\frac{na+b}{n+1} - x\right)^{\alpha-1} dx &= J^\alpha_{a^+} f\left(\frac{na+b}{n+1}\right), \\
\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\frac{a+nb}{n+1}}^b f(x)\left(x - \frac{a+nb}{n+1}\right)^{\alpha-1} dx &= J^\alpha_{b^-} f\left(\frac{a+nb}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

kesirli integralleri kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.1.1 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında quasi-konveks ise

$$|I(a,b;n.\alpha)| \;\leq\; \frac{b-a}{n+1}\left[\frac{3 - 2\left(\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{2^{\frac{1}{\alpha}}+1}\right)^{\alpha+1} - 4\left(1 - \frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{2^{\frac{1}{\alpha}}+1}\right)^{\alpha+1}}{3(\alpha+1)}\right] \max\{f'|(a)|, f'|(b)|\}$$

eşitsizliği geçerlidir [20].

İspat. Lemma 3.1.1 özdeşliğinde her iki tarafın mutlak değeri alınırsa,

$$\begin{aligned} |I(a,b;n.\alpha)| &\leq \frac{b-a}{2(n+1)}\left(\int_0^1\left|\frac{2(1-t)^\alpha-t^\alpha}{3}\right|\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}a+\frac{1-t}{n+1}b\right)\right|dt\right. \\ &\quad \left.+\int_0^1\left|\frac{t^\alpha-2(1-t)^\alpha}{3}\right|\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}a+\frac{n+t}{n+1}b\right)\right|dt\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $|f'|$ quasi-konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} |I(a,b;n.\alpha)| &\leq \frac{b-a}{2(n+1)}\left(\int_0^1\left|\frac{2(1-t)^\alpha-t^\alpha}{3}\right|\max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}dt\right. \\ &\quad \left.+\int_0^1\left|\frac{t^\alpha-2(1-t)^\alpha}{3}\right|\max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}dt\right) \\ &= \frac{b-a}{2(n+1)}\left[\left(\int_0^{\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{2^{\frac{1}{\alpha}}+1}}\left(\frac{2(1-t)^\alpha-t^\alpha}{3}\right)dt\right.\right. \\ &\quad \left.+\int_{\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{2^{\frac{1}{\alpha}}+1}}^1\left(\frac{t^\alpha-2(1-t)^\alpha}{3}\right)dt\right)\max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}dt \\ &\quad +\left(\int_0^{\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{2^{\frac{1}{\alpha}}+1}}\left(\frac{2(1-t)^\alpha-t^\alpha}{3}\right)dt\right. \\ &\quad \left.\left.+\int_{\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{2^{\frac{1}{\alpha}}+1}}^1\left(\frac{t^\alpha-2(1-t)^\alpha}{3}\right)dt\right)\max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da

$$|I(a,b;n.\alpha))| \leq \frac{b-a}{n+1}\left[\frac{3-2\left(\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{2^{\frac{1}{\alpha}}+1}\right)^{\alpha+1}-4\left(1-\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{2^{\frac{1}{\alpha}}+1}\right)^{\alpha+1}}{3(\alpha+1)}\right]\max\{f'|(a)|,f'|(b)|\}$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1.1 Teorem 3.1.1'de $\alpha = 1$ seçilirse

$$|I(a,b;n)| \leq \frac{5(b-a)}{18(n+1)}\max\left\{|f'(a)|,|f'(b)|\right\}$$

eşitsizliği elde edilir [20].

Teorem 3.1.2 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. $\alpha > 0$, $q > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında quasi-konveks fonksiyon ise

$$|I(a,b;n.\alpha)| \leq \frac{b-a}{n+1}\left(\int_0^1\left|\frac{2(1-t)^\alpha-t^\alpha}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [20].

İspat. Lemma 3.1.1'de her iki tarafın mutlak değeri alınıp, Hölder eşitsizliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
|I(a,b;n.\alpha)| &\leq \frac{b-a}{2(n+1)}\Bigg[\int_0^1 \left|\frac{2(1-t)^\alpha - t^\alpha}{3}\right|\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}a+\frac{1-t}{n+1}b\right)\right|dt \\
&\quad + \int_0^1 \left|\frac{t^\alpha - 2(1-t)^\alpha}{3}\right|\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}a+\frac{n+t}{n+1}b\right)\right|dt\Bigg] \\
&\leq \frac{b-a}{2(n+1)}\Bigg[\left(\int_0^1 \left|\frac{2(1-t)^\alpha - t^\alpha}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}a+\frac{1-t}{n+1}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_0^1 \left|\frac{t^\alpha - 2(1-t)^\alpha}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}a+\frac{n+t}{n+1}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $|f'|^q$ quasi-konveks fonksiyon olduğundan ve

$$\left(\int_0^1 \left|\frac{2(1-t)^\alpha - t^\alpha}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 \left|\frac{t^\alpha - 2(1-t)^\alpha}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
|I(a,b;n.\alpha)| &\leq \frac{b-a}{2(n+1)}\Bigg(\int_0^1 \left|\frac{2(1-t)^\alpha - t^\alpha}{3}\right|\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}a+\frac{1-t}{n+1}b\right)\right|dt \\
&\quad + \int_0^1 \left|\frac{t^\alpha - 2(1-t)^\alpha}{3}\right|\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}a+\frac{n+t}{n+1}b\right)\right|dt\Bigg) \\
&\leq \frac{b-a}{2(n+1)}\Bigg[\left(\int_0^1 \left|\frac{2(1-t)^\alpha - t^\alpha}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_0^1 \left|\frac{t^\alpha - 2(1-t)^\alpha}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg] \\
&\leq \frac{b-a}{n+1}\left(\int_0^1 \left|\frac{2(1-t)^\alpha - t^\alpha}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.2 Teorem 3.1.2' de $\alpha = 1$ seçilirse

$$|I(a,b;n)| \leq \frac{b-a}{n+1}\left(\int_0^1 \left|\frac{2-3t}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\max\left\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir [20].

Sonuç 3.1.3 Teorem 3.1.2' de $\alpha = 1$ ve $n = 1$ seçilirse

$$|I(a,b;1)| \leq \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 \left|\frac{2-3t}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\max\left\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir [20].

Teorem 3.1.3 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $\alpha > 0$, $q \geq 1$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a, b]$ aralığında quasi-konveks fonksiyon ise

$$|I(a,b;n.\alpha)| \leq \frac{b-a}{n+1}\left[\frac{3-2\left(\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{2^{\frac{1}{\alpha}}+1}\right)^{\alpha+1}-4\left(1-\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{2^{\frac{1}{\alpha}}+1}\right)^{\alpha+1}}{3(\alpha+1)}\right]\left(\max\{f'|(a)|^q, f'|(b)|^q\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir [20].

İspat. Lemma 3.1.1'de her iki tarafın mutlak değeri alınıp, power-mean eşitsizliği uygulanılırsa;

$$\begin{aligned}
|I(a,b;n.\alpha)| \leq\ & \frac{b-a}{2(n+1)}\left[\int_0^1\left|\frac{2(1-t)^\alpha-t^\alpha}{3}\right|\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}a+\frac{1-t}{n+1}b\right)\right|dt\right. \\
& \left.+\int_0^1\left|\frac{t^\alpha-2(1-t)^\alpha}{3}\right|\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}a+\frac{n+t}{n+1}b\right)\right|dt\right] \\
\leq\ & \frac{b-a}{2(n+1)}\left[\left(\int_0^1\left|\frac{2(1-t)^\alpha-t^\alpha}{3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\right. \\
& \times\left(\int_0^1\left|\frac{2(1-t)^\alpha-t^\alpha}{3}\right|\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}a+\frac{1-t}{n+1}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\left(\int_0^1\left|\frac{t^\alpha-2(1-t)^\alpha}{3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times\left(\int_0^1\left|\frac{t^\alpha-2(1-t)^\alpha}{3}\right|\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}a+\frac{n+t}{n+1}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan $|f'|^q$' nin quasi-konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
|I(a,b;n.\alpha)| \leq\ & \frac{b-a}{2(n+1)}\left(\int_0^1\left|\frac{2(1-t)^\alpha-t^\alpha}{3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times\left[\left(\int_0^1\left|\frac{2(1-t)^\alpha-t^\alpha}{3}\right|\max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left.+\left(\int_0^1\left|\frac{t^\alpha-2(1-t)^\alpha}{3}\right|\max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak yukarıdaki integraller hesaplanırsa istenilen sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.1.4 Teorem 3.1.3' de $\alpha = 1$ seçilirse

$$|I(a,b;n)| \leq \frac{5(b-a)}{18(n+1)}\left(\max\left\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir [20].

Sonuç 3.1.5 Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.3' de, $\alpha = 1$ ve $n = 1$ seçilirse, sırasıyla Teorem (2.1.5) ve Teorem (2.1.7) elde edilir [19].

3.2 $\alpha-$ TİPLİ KÜMELER

Bu bölümde α tipli kümeler hakkında temel bilgiler ile α tipli kümelerde limit, süreklilik, lokal kesirli türev, lokal kesirli integral gibi kavramlar hakkında genel bilgiler verilmiştir. [26, 27]. Lokal kesirli analiz ile ilgili daha detaylı bilgiler için [25],[28],[29],[30],[31] refaranslarına bakılabilir.

3.2.1 Bazı Sonsuz Kümeler

Bazı sonsuz kümeler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Doğal Sayılar Kümesi; $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$.

Pozitif Doğal Sayılar Kümesi; $\mathbb{N} = \{1, 2, ..., n, ...\}$.

Tamsayılar Kümesi; $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, ..., \pm n, ...\}$.

Negatif Tamsayılar Kümesi; $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, ..., -n, ...\}$.

Rasyonel Sayılar Kümesi; $\mathbb{Q} = \{m = \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.

İrrasyonel Sayılar Kümesi; $\Im = \{m \neq \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.

Reel Sayılar Kümesi; $\mathbb{R} = \Im \cup \mathbb{Q}$.

Not 3.2.1 Bu sonsuz kümeler arasında $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ şeklinde bir ilişki vardır.

3.2.2 $\alpha-$ tipli Kümeler

Tanım 3.2.1 $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere Ω kümesinin α-tipli kümesi Ω^α olarak tanımlanır ve bu küme bir kümenin kesirli kümesi olarak adlandırılır.

Örnek 3.2.1 $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ kümesi verilsin. Buna göre Ω kümesinin α- tipli kümesi $\Omega^\alpha = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i^\alpha, b_i^\alpha)$ şeklindedir.

3.2.3 $\alpha-$ tipli Sayı Kümeleri

$0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere bazı α-tipli kümeleri;

α-tipli doğal sayılar kümesi; $\mathbb{N}_0^\alpha = \{0^\alpha, 1^\alpha, 2^\alpha, ..., n^\alpha, ...\}$.

α-tipli pozitif doğal sayılar kümesi; $\mathbb{N}^\alpha = \{1^\alpha, 2^\alpha, ..., n^\alpha, ...\}$.

α-tipli tamsayılar kümesi; $\mathbb{Z}^\alpha = \{0^\alpha, \pm 1^\alpha, \pm 2^\alpha ..., \pm n^\alpha, ...\}$.

α-tipli rasyonel sayılar kümesi; $\mathbb{Q}^\alpha = \{m^\alpha = (\frac{p}{q})^\alpha : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.

α-tipli irrasyonel Sayılar Kümesi; $\Im^\alpha = \{m^\alpha \neq (\frac{p}{q})^\alpha : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.

α-tipli reel sayılar kümesi; $\mathbb{R}^\alpha = \Im^\alpha \cup \mathbb{Q}^\alpha$

şeklinde tanımlanmıştır.

Not 3.2.2 α-tipli kümeler arasında $\mathbb{N}^\alpha \subset \mathbb{Z}^\alpha \subset \mathbb{Q}^\alpha \subset \mathbb{R}^\alpha$ şeklinde bir ilişki vardır.

Teorem 3.2.1 Ω^α kümesi; $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \subset \mathbb{R}$ ile bire-bir eşleşen bir küme ve $A \subset \Omega$ olsun. O halde $A \subset \mathbb{R}$ ile bire-bir eşleşen bir A^α kümesi vardır ve $A^\alpha \subseteq \Omega^\alpha$ dır.

İspat. $A \subseteq \Omega$ olsun. Bu durumda her $x \in A$ iken $x \in \Omega$ yazılır. Dolayısıyla kümelerin kesirli kümelerinin tanımından $x^\alpha \in A^\alpha$ ve $x^\alpha \in \Omega^\alpha$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.2.4 α- tipli Reel Sayılar Kümesinde İşlemler

$a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$ olmak üzere aşağıdaki özellikler vardır:

1. $a^\alpha + b^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$ ve $a^\alpha b^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$,
2. $a^\alpha + b^\alpha = b^\alpha + a^\alpha = (a + b)^\alpha = (b + a)^\alpha$,
3. $a^\alpha + (b^\alpha + c^\alpha) = (a^\alpha + b^\alpha) + c^\alpha$,
4. $a^\alpha b^\alpha = b^\alpha a^\alpha = (ab)^\alpha = (ba)^\alpha$,
5. $a^\alpha(b^\alpha c^\alpha) = (a^\alpha b^\alpha)c^\alpha$,

6. $a^\alpha(b^\alpha + c^\alpha) = a^\alpha b^\alpha + a^\alpha c^\alpha$,

7. $a^\alpha + 0^\alpha = 0^\alpha + a^\alpha = a^\alpha$ ve $a^\alpha 1^\alpha = 1^\alpha a^\alpha = a^\alpha$.

Yukarıda tanımlanan $''+''(a^\alpha + b^\alpha := (a+b)^\alpha)$ ve $''\cdot''(a^\alpha \cdot b^\alpha = a^\alpha b^\alpha := (ab)^\alpha)$ işlemlerine göre $(\mathbb{R}^\alpha, +, \cdot)$ bir cisimdir. Çünkü

- $(\mathbb{R}^\alpha, +)$ değişmeli bir gruptur: a^α, b^α, $c^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$ için,

  (A_1) $a^\alpha + b^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$;

  (A_2) $a^\alpha + b^\alpha = b^\alpha + a^\alpha$;

  (A_3) $a^\alpha + (b^\alpha + c^\alpha) = (a^\alpha + b^\alpha) + c^\alpha$;

  (A_4) $(\mathbb{R}^\alpha, +)$'nın birim elemanı 0^α dır ve her $a^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$ için $a^\alpha + 0^\alpha = 0^\alpha + a^\alpha = a^\alpha$;

  (A_5) $(\mathbb{R}^\alpha, +)$ işlemine göre her a^α 'nın ters elemanı $(-a)^\alpha$ dır ve $a^\alpha + (-a)^\alpha = (a + (-a))^\alpha = 0^\alpha$ dır.

- $(\mathbb{R}^\alpha \setminus \{0^\alpha\}, \cdot)$ değişmeli bir gruptur: a^α, b^α, $c^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$ için,

  (M_1) $a^\alpha b^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$;

  (M_2) $a^\alpha\, b^\alpha = b^\alpha\, a^\alpha$;

  (M_3) $a^\alpha\,(b^\alpha c^\alpha) = (a^\alpha\, b^\alpha)\, c^\alpha$;

  (M_4) $(\mathbb{R}^\alpha, \cdot)$ 'nın birim elemanı 1^α dır ve her $a^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$ için $a^\alpha 1^\alpha = 1^\alpha a^\alpha = a^\alpha$;

  (M_5) $(\mathbb{R}^\alpha, \cdot)$ işlemine göre her $a^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha \setminus \{0^\alpha\}$ 'nın ters elemanı $(1/a)^\alpha$ dır ve $a^\alpha(1/a)^\alpha = (a(1/a))^\alpha = 1^\alpha$;

  dır.

- Toplama işleminin çarpma işlemi üzerine dağılma özelliği:

  $$a^\alpha\,(b^\alpha + c^\alpha) = a^\alpha b^\alpha + a^\alpha c^\alpha$$

  şeklindedir.

3.2.5 α-tipli Reel Sayıların Mutlak Değeri

1. $|a^\alpha b^\alpha| = |a^\alpha| \cdot |b^\alpha|$

2. $|a^\alpha| - |b^\alpha| \leq |a^\alpha + b^\alpha| \leq |a^\alpha| + |b^\alpha|$.

3.2.6 α- tipli Reel Sayılarda Eşitsizlikler ve Özellikleri

$a^\alpha - b^\alpha$ negatif olmayan bir sayı ise a^α, b^α'ya büyük veya eşittir ya da b^α, a^α'dan küçük veya eşittir denir ve sırasıyla $a^\alpha \geq b^\alpha$, $b^\alpha \leq a^\alpha$ şeklinde gösterilir.
Eğer $a^\alpha = b^\alpha$ olma ihtimali yoksa, $a^\alpha > b^\alpha$ veya $b^\alpha < a^\alpha$ yazılır.

$a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$ olsun. O halde α-tipli reel sayıların özellikleri;

1. $a^\alpha > b^\alpha$, $a^\alpha = b^\alpha$ *veya* $a^\alpha < b^\alpha$ durumlarından biri geçerlidir.
2. $a^\alpha > b^\alpha$ ve $b^\alpha > c^\alpha$ ise $a^\alpha > c^\alpha$.
3. $a^\alpha > b^\alpha$ ise $a^\alpha + c^\alpha > b^\alpha + c^\alpha$.
4. $a^\alpha > b^\alpha$ ve $c^\alpha > 0^\alpha$ ise $a^\alpha c^\alpha > b^\alpha c^\alpha$.
5. $a^\alpha > b^\alpha$ ve $c^\alpha < 0^\alpha$ ise $a^\alpha \cdot c^\alpha < b^\alpha \cdot c^\alpha$.
6. $a^\alpha, b^\alpha \geq 0^\alpha$ ise $a^\alpha b^\alpha \leq \dfrac{a^{2\alpha} + b^{2\alpha}}{2}$.
7. $a^\alpha, b^\alpha \geq 0^\alpha$, $p, q \geq 1$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ise $a^{\frac{\alpha}{p}} b^{\frac{\alpha}{q}} \leq \dfrac{a^\alpha}{p} + \dfrac{b^\alpha}{q}$

şeklindedir.

Sonuç 3.2.1 Burada $\alpha = 1$ şeçilirse $\mathbb{R}$' deki özelliklere indirgeme yapılmış olur. Ayrıca;

1. $a^\alpha > b^\alpha$ ise $a > b$
2. $a^\alpha = b^\alpha$ ise $a = b$
3. $a^\alpha < b^\alpha$ ise $a < b$

dır.

3.2.7 $\alpha-$ tipli Kümelerde Sayılabilirlik

Bir kümenin tüm elemanları doğal sayılarla bire-bir eşleşebiliyorsa bu kümeye sayılabilir küme, bir küme kendisinin alt kümesi ile bire-bir eşleşebiliyorsa bu kümeye sonsuz küme denir. Hem sayılabilir hemde sonsuz olan kümeye sayılabilir sonsuz küme denir. $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Q}^\alpha$ kümeleri sayılabilir sonsuz kümelerdir.

3.2.8 $\alpha-$ tipli Kümelerde Komşuluk

$\delta^\alpha, a^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$ ve $\delta^\alpha > 0$ olmak üzere

$$A = \left\{ x^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha : |x^\alpha - a^\alpha| < \delta^\alpha \right\}$$

kümesine a^α'nın δ^α-komşuluğu denir.

Burada $A - \{a^\alpha\}$ kümesine de a^α'nın δ^α-delinmiş komşuluğu denir.

3.2.9 $\alpha-$ tipli Kümenin Limit Noktası

l^α sayısının her δ^α komşuluğu x^α elemanlarının kümesinin en az bir elemanını içeriyorsa l^α sayısına x^α elemanlarının kümesinin bir limit noktası denir. Diğer bir ifadeyle, ne kadar küçük olursa olsun herhangi bir $\delta^\alpha > 0$ için $|x^\alpha - l^\alpha| < \delta^\alpha$ olacak şekilde her zaman $x^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$ sayısı vardır.

Diğer taraftan $|x^\alpha - l^\alpha| < \delta^\alpha$ olmak üzere α, 1'e yaklaşıyorken limit alırsak herhangi bir $\delta > 0$ için $|x - l| < \delta$ elde edilir.

3.3 $\alpha-$ tipli Kümeler Üzerinde Fonksiyonlar

$f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesinin ve değer kümesinin elemanları sırasıyla x^α ve y^α olsun. Bu durumda $y^\alpha = f(x)$ yazılır.

3.3.1 $\alpha-$ tipli Kümelerde Fonksiyonların Limiti

$F \subset \mathbb{R}^\alpha$, $f : F \to \mathbb{R}^\alpha$ bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. $\forall\, \varepsilon > 0$ için $0 < |x - a| < \delta$ iken $|f(x) - l^\alpha| < \varepsilon^\alpha$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa l^α'ya x, a ya yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun limiti denir ve $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l^\alpha$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.3.1 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1^\alpha$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l_2^\alpha$ olsun. Bu durumda

1. $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right] = l_1^\alpha + l_2^\alpha$,
2. $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |l_1^\alpha|$,

3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = l_1^\alpha l_2^\alpha,$

4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1^\alpha}{l_2^\alpha}$, $(l_2 \neq 0)$

şeklindedir.

İspat.

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1^\alpha$ verildiğinden, limitin tanımından her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x-a| < \delta_1$ olduğunda $|f(x) - l_1^\alpha| < \varepsilon^\alpha$ olacak şekilde $\delta_1 > 0$ sayısı vardır. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2^\alpha$ olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x-a| < \delta_2$ olduğunda $|g(x)-l_2^\alpha| < \varepsilon^\alpha$ olacak şekilde $\delta_2 > 0$ sayısı vardır. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. O halde, her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x-a| < \delta$ olduğunda
$$\left|f(x) + g(x) - l_1^\alpha - l_2^\alpha\right| \leq \left|f(x) - l_1^\alpha\right| + \left|g(x) - l_2^\alpha\right| \leq 2\,\varepsilon^\alpha$$
olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunur. Dolayısıyla;
$$\lim_{x\to a}\left[f(x) + g(x)\right] = l_1^\alpha + l_2^\alpha = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$
dır.

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1^\alpha$ verildiğinden, $\varepsilon > 0$ için $0 < |x-a| < \delta$ seçildiğinde $|f(x) - l_1^\alpha| < \varepsilon^\alpha$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. O halde
$$\Big|\left|f(x)\right| - \left|l^\alpha\right|\Big| \leq \left|f(x) - l_1^\alpha\right| < \varepsilon^\alpha$$
dır.

3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1^\alpha$ verildiğinden, limitin tanımından her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x-a| < \delta_1$ olduğunda $|f(x) - l_1^\alpha| < \varepsilon^\alpha$ olacak şekilde $\delta_1 > 0$ sayısı vardır. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2^\alpha$ olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x-a| < \delta_2$ olduğunda $|g(x)-l_2^\alpha| < \varepsilon^\alpha$ olacak şekilde $\delta_2 > 0$ sayısı vardır. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. O halde, her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x-a| < \delta$ olduğunda
$$\begin{aligned}\left|f(x)g(x) - l_1^\alpha l_2^\alpha\right| &= \left|\big(f(x) - l_1^\alpha\big)g(x) - l_1^\alpha\big(l_2^\alpha - g(x)\big)\right| \\ &\leq \varepsilon^\alpha\left|g(x)\right| + \varepsilon^\alpha\left|l_1^\alpha\right| \\ &< \varepsilon^\alpha\big(\left|g(x)\right| + \left|l_1^\alpha\right|\big)\end{aligned}$$
olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunur. Dolayısıyla;
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1^\alpha}{l_2^\alpha}$, $(l_2 \neq 0)$ dır.

4. Varsayalım ki $m \neq 0$ olsun. $|g(x)| > \frac{1}{2}|m^\alpha|$ olacak şekilde $0 < |x-a| < \delta$ vardır ve her $0 < |x-a| < \delta$ için $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tanımlıdır. $\varepsilon > 0$ için $0 < |x-a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - l^\alpha| < \varepsilon^\alpha$ ve $|f(x) - m^\alpha| < \varepsilon^\alpha$ olur ve her $0 < |x-a| < \delta$ için
$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l^\alpha}{m^\alpha}\right| = \left|\frac{f(x)m^\alpha - l^\alpha g(x)}{g(x)m^\alpha}\right| \leq \left|\frac{m^\alpha(f(x)-l^\alpha) - l^\alpha(g(x)-m^\alpha)}{\frac{1}{2}|m^\alpha|}\right| \leq \frac{|m^\alpha| + |l^\alpha|}{\frac{1}{4}|m^\alpha|^2}\varepsilon^\alpha$$

elde edilir.

3.3.2 $\alpha-$ tipli Kümelerde Fonksiyonların Lokal Kesirli Sürekliliği

Sağdan Lokal Kesirli Süreklilik

$F \subset \mathbb{R}^\alpha$, $x_0 \in F$, $f : F \to \mathbb{R}^\alpha$ bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Eğer f fonksiyonu x_0 noktasında tanımlı ve $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$ ise f fonksiyonuna x_0 noktasında sağdan lokal kesirli süreklidir denir.

Soldan Lokal Kesirli Süreklilik

$F \subset \mathbb{R}^\alpha$, $x_0 \in F$, $f : F \to \mathbb{R}^\alpha$ bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Eğer f fonksiyonu x_0 noktasında tanımlı ve $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$ ise f fonksiyonuna x_0 noktasında soldan lokal kesirli süreklidir denir.

Lokal Kesirli Süreklilik

$F \subset \mathbb{R}^\alpha$, $x_0 \in F$, $f : F \to \mathbb{R}^\alpha$ bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Eğer f fonksiyonu x_0 noktasında tanımlı ve $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ise f fonksiyonuna x_0 noktasında lokal kesirli süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu F kümesinin her noktasında lokal kesirli sürekli ise f fonksiyonu F üzerinde lokal kesirli süreklidir denir.

Teorem 3.3.2 $F \subset \mathbb{R}^\alpha$, $x_0 \in F$, $f : F \to \mathbb{R}^\alpha$ bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Eğer x_0 noktasında f fonksiyonunun sağdan ve soldan limit var ve birbirine eşit ise fonksiyonun bu noktada limiti vardır ve

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

şeklindedir.

Tanım 3.3.1 $F \subset \mathbb{R}^\alpha$, $x_0 \in F$, $f : F \to \mathbb{R}^\alpha$ bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon^\alpha$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa bu $f(x)$ fonksiyonuna x_0'da lokal kesirli süreklidir denir ve $f(x)$, (a, b) aralığında lokal kesirli sürekli ise $f(x) \in C_\alpha(a, b)$ dir.

Tanım 3.3.2 $[a, b] \subset \mathbb{R}^\alpha$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}^\alpha$ bir fonksiyon olsun. $x, y \in [a, b]$, $0 < \alpha \leq 1$ ve c pozitif sabit bir sayı olmak üzere

$$|f(x) - f(y)| < c|x - y|^\alpha$$

oluyorsa bu fonksiyona Hölder süreklidir denir. $[a, b]$ üzerinde Hölder sürekli fonksiyonların kümesi $C_\alpha[a, b]$ ile gösterilir.

Teorem 3.3.3 $f : [a, b] \to \mathbb{R}^\alpha$ Hölder sürekli bir fonksiyon ise $f(x)$, $[a, b]$ üzerinde lokal kesirli süreklidir.

İspat. $f(x)$ Hölder sürekli bir fonksiyon, $0 < \alpha \leq 1$ ve $x^\alpha, x_0^\alpha \in [a^\alpha, b^\alpha]$ için $|f(x) - f(y)| < c|x - y|^\alpha$'dır.

$|x - x_0| = \varepsilon = \delta$ olsun. Her $\delta > 0$ için $0 < |x - x_0|^\alpha < \delta^\alpha$ olduğunda $|f(x) - f(x_0)| < c\varepsilon^\alpha$'dır. Bundan dolayı $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ elde edilir. Dolayısıyla f, $[a, b]$ üzerinde lokal süreklidir.

Teorem 3.3.4 $F \subset \mathbb{R}^\alpha$, $x_0 \in F$, $f, g : F \to \mathbb{R}^\alpha$ iki fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ve $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ olmak üzere

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \big[f(x) \pm g(x)\big] = f(x_0) \pm g(x_0)$;
2. $\lim\limits_{x \to x_0} \big[f(x)g(x)\big] = f(x_0)g(x_0)$;
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}, \quad (g(x_0) \neq 0)$

dir.

3.3.3 $\alpha-$ tipli Kümeler Üzerinde Elementer Fonksiyonlar

1. α-tipli kümeler üzerinde tanımlanan bir fonksiyon $x \in \mathbb{R}$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $f(x) = x^\alpha$ şeklindedir.

2. α-tipli kümeler üzerinde Mittag- Leffler fonksiyonu $x \in \mathbb{R}$ ve $0 < \alpha \leq 1$ iken $E_\alpha\big(x^\alpha\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{\alpha k}}{(1+k\alpha)}$ şeklinde tanımlanır.

Ayrıca aşağıdaki kurallar geçerlidir.

1. $E_\alpha\big(x^\alpha\big)E_\alpha\big(y^\alpha\big) = E_\alpha\Big(\big(x+y\big)^\alpha\Big)$;

2. $E_\alpha\big(x^\alpha\big)E_\alpha\big(-y^\alpha\big) = E_\alpha\Big(\big(x-y\big)^\alpha\Big)$;

3. $E_\alpha\big(i^\alpha x^\alpha\big)E_\alpha\big(i^\alpha y^\alpha\big) = E_\alpha\Big(x^\alpha\big(x+y\big)^\alpha\Big)$.

α-tipli kümeler üzerinde sinüs ve kosinüs fonksiyonları $x \in \mathbb{R}$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$\sin_\alpha x^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{\alpha(2k+1)}}{\Gamma\big[1+\alpha(2k+1)\big]} \tag{3.3.1}$$

$$\cos_\alpha x^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2\alpha k}}{\Gamma\big[1+2\alpha k\big]} \tag{3.3.2}$$

şeklinde tanımlanır. Daha fazla bilgi için [25, **?**] kaynaklarına bakılabilir.
Benzer şekilde ; (3.3.1) ve (3.3.2) formüllerini dikkate alınırsa; α-tipli kümeler üzerinde tanjant fonksiyonu $x \in \mathbb{R}$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\tan_\alpha x^\alpha = \frac{\sin_\alpha x^\alpha}{\cos_\alpha x^\alpha}$$

şeklinde tanımlanır.

3.3.4 $\alpha-$ tipli Kümelerde Fonksiyonların Lokal Kesirli Türevi

Lokal Kesirli Türev

$f(x) \in C_\alpha[a,b]$ olsun. $0 < \alpha \leq 1$, $\delta > 0$ ve $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ için

$${}_{x_0}D_x^\alpha f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Gamma(1+\alpha)\big[f(x)-f(x_0)\big]}{(x-x_0)^\alpha}$$

limiti var ve sonlu ise bu limite $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki α. dereceden lokal kesirli türevi denir ve

$$\left.\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}\right|_{x=x_0} \; veya \; f^{(\alpha)}(x_0)$$

ile gösterilir.

Sol ve Sağ Lokal Kesirli Türev

$f(x) \in C_\alpha[a,b]$ olsun. $0 < \alpha \leq 1$, $\delta > 0$ ve $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ için

$$ {}_{x_0^-}D_x^\alpha f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Gamma(1+\alpha)\big[f(x) - f(x_0^-)\big]}{(x - x_0^-)^\alpha} $$

limiti var ve sonlu ise bu limite $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$'da α. dereceden soldan lokal kesirli türevi denir ve $f(x)$' in $x = x_0$ noktasındaki soldan lokal kesirli türevi

$$ \left. \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right|_{x = x_0^-} \quad veya \;\; f^{(\alpha)}(x_0^-) $$

ile gösterilir.

$f(x) \in C_\alpha[a,b]$ olsun. $0 < \alpha \leq 1$, $\delta > 0$ ve $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ için

$$ {}_{x_0^+}D_x^\alpha f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Gamma(1+\alpha)\big[f(x) - f(x_0^+)\big]}{(x - x_0^+)^\alpha} $$

limiti var ve sonlu ise bu limite $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$' da α. dereceden sağdan lokal kesirli türevi denir ve $f(x)$' in $x = x_0$ noktasındaki sağdan lokal kesirli türevi

$$ \left. \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right|_{x = x_0^+} \quad veya \;\; f^{(\alpha)}(x_0^+) $$

ile gösterilir. Ayrıca bir fonksiyonun bir noktada α. dereceden lokal kesirli türevinin var olması için gerek ve yeter şart α. dereceden sağ ve sol lokal kesirli türevlerinin mevcut ve birbirine eşit olmasıdır.

3.3.5 $\alpha-$ tipli Kümelerde Fonksiyonların Lokal Kesirli Diferansiyeli

$0 < \alpha \leq 1$ için $f(x)$ fonksiyonunun lokal kesirli diferansiyeli

$$ d^\alpha f = f^{(\alpha)}(x)(dx)^\alpha $$

şeklindedir ve her $x_0 \in (a,b)$ için

$$ \left. \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right|_{x = x_0} = f^\alpha(x_0) \tag{3.3.3} $$

mevcuttur. α. dereceden lokal kesirli diferansiyellenebilen fonksiyonların kümesi $D_\alpha(a,b)$ ile gösterilir.

Elemanter fonksiyonun lokal kesirli türev kuralları;

1. $\dfrac{d^{\alpha}x^{k\alpha}}{dx^{\alpha}} = \dfrac{\Gamma(1+k\alpha)}{\Gamma(1+(k-1)\alpha)}x^{(k-1)\alpha};$

2. $\dfrac{d^{\alpha}E_{\alpha}(x^{\alpha})}{dx^{\alpha}} = E_{\alpha}(x^{\alpha});$

3. $\dfrac{d^{\alpha}E_{\alpha}(kx^{\alpha})}{dx^{\alpha}} = kE_{\alpha}(kx^{\alpha}), \quad k$ sabit;

4. $\dfrac{d^{\alpha}\sin_{\alpha}x^{\alpha}}{dx^{\alpha}} = \cos_{\alpha}x^{\alpha};$

5. $\dfrac{d^{\alpha}\cos_{\alpha}x^{\alpha}}{dx^{\alpha}} = -\sin_{\alpha}x^{\alpha};$

şeklindedir.

3.3.6 Yüksek Mertebeden Lokal Kesirli Türev

$0<\alpha\leq 1$ için $f(x)$ fonksiyonunun $x=x_0$ noktasındaki 2α-lokal kesirli türevi

$$D_x^{2\alpha}\big[f(x)\big] = \big(D_x\cdot D_x\big)f(x) = \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\left[\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}f(x)\right] = f^{(2\alpha)}(x)$$

şeklinde tanımlanır. Bu işlemi n kez tekrarlarsak; $n\alpha$-lokal kesirli türev ise

$$\overbrace{\big(D_x^{\alpha}\cdot\ldots\cdot D_x^{\alpha}\big)}^{n\ kez}f(x)\Big|_{x=x_0} = D_x^{n\alpha}f(x)\Big|_{x=x_0} = f^{(n\alpha)(x)}\Big|_{x=x_0} = f^{n\alpha}(x_0)$$

şeklinde tanımlanır.

3.4 $\alpha-$ tipli Kümelerde Fonksiyonların Lokal Kesirli İntegrali

3.4.1 Lokal Kesirli İntegral

Tanım 3.4.1 $f(x)\in C_{\alpha}\,[a,b]$, $0<\alpha\leq 1$ ve $\big[t_j,t_{j+1}\big]$ $(j=0,\ldots,N-1)$, $[a,b]$ aralığının bir bölüntüsü, $\Delta t_j = t_{j+1}-t_j$ ve $\Delta t = \max\{\Delta t_1,\Delta t_2,\ldots,\Delta t_{N-1}\}$ olsun. Ayrıca $a=t_0<t_1<\cdots<t_{N-1}<t_N=b$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun lokal kesirli integrali;

$${}_aI_b^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^b f(t)(dt)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{j=0}^{N-1}f(t_j)(\Delta t_j)^{\alpha}$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$a=b$ için ${}_aI_b^{\alpha}f(x)=0$,

$$a < b \quad \text{için} \quad {}_aI_b^{\alpha} f(x) = -{}_bI_a^{\alpha} f(x),$$

şeklindedir.

Önerme 3.4.1 α-tipli bir küme üzerinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlı (veya $f \in C_\alpha[a,b]$) olsun. Bu takdirde $\dfrac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \displaystyle\int_a^b f(t)(dt)^\alpha$ integralinin var olması için gerek ve yeter şart $f(t)$ 'nin süreksiz kesirli kümesinin genelleştirilmiş Lebesgue sıfır ölçümüne sahip olmasıdır.

3.4.2 Lokal Kesirli İntegralin Özellikleri

1. $f(x), g(x) \in C_\alpha[a,b]$ olmak üzere ${}_aI_b^{\alpha}\big[f(x) \pm g(x)\big] =_a I_b^{\alpha} f(x) \pm_a I_b^{\alpha} g(x)$ dır.
2. $f(x) \in C_\alpha[a,b]$ ve C sabit olmak üzere ${}_aI_b^{\alpha}\big[Cf(x)\big] = C_aI_b^{\alpha} f(x)$ dır.
3. $f(x) = 1$ olmak üzere ${}_aI_b^{\alpha} 1 = \dfrac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ dır.
4. $f(x) \in C_\alpha[a,b]$ ve $f(x) \geq 0$ olmak üzere ${}_aI_b^{\alpha} f(x) \geq 0$ dır
5. $f(x), g(x) \in C_\alpha[a,b]$ ve $f(x) \geq g(x)$ olmak üzere $b - a \geq 0$ iken ${}_aI_b^{\alpha} f(x) \geq_a I_b^{\alpha} g(x)$ dir.
6. $f(x) \in C_\alpha[a,b]$ ve $[a,b]$ üzerinde $f(x)$ in sırasıyla maksimum ve minumum değerleri M ve m olmak üzere $b - a > 0$ için
$$M\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \geq_a I_b^{\alpha} f(x) \geq m\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$
dır.
7. $f(x) \in C_\alpha[a,b]$ olmak üzere $b - a > 0$ için $\big|{}_aI_b^{\alpha} f(x)\big| \leq {}_aI_b^{\alpha}|f(x)|$ dır.
8. $f(x) \in C_\alpha[a,b]$ ve $a < c < b$ olmak üzere ${}_aI_b^{\alpha} f(x) =_a I_c^{\alpha} f(x) +_c I_b^{\alpha} f(x)$ dır.

3.4.3 Lokal Kesirli İntegraller için Teoremler

Teorem 3.4.1 (**Lokal Kesirli İntegraller için Ortalama Değer Teoremi**)

$f(x) \in C_\alpha[a,b]$ ve $\xi,\ (a,b)$ üzerinde bir nokta olmak üzere
$${}_aI_b^{\alpha} f(x) = f(\xi)\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$$

şeklindedir.

Teorem 3.4.2 $f(x) \in C_\alpha[a,b]$ olsun. Bu durumda $\Pi(x) =_a I_x^\alpha f(x)$ fonksiyonu vardır ve bu fonksiyonun $(dx)^\alpha$ ya göre türevi $a < x < c$ olmak üzere

$$\frac{d^\alpha \Pi(x)}{dx^\alpha} = f(x)$$

dır.

Teorem 3.4.3 $f(x) \in C_\alpha[a,b]$ olsun. Bu durumda $\Pi(x) =_a I_x^\alpha f(x)$ olacak şekilde $\Pi \in C_\alpha[a,b]$ vardır.

Teorem 3.4.4 $f(x) = g^{(\alpha)}(x) \in C_\alpha[a,b]$ olsun. Bu durumda

$${}_aI_b^\alpha f(x) = g(b) - g(a)$$

dır.

Teorem 3.4.5 $g(x) \in C_1[a,b]$ ve $(f \circ g)(s) \in C_\alpha\big[g(a), g(b)\big]$ olsun. Bu durumda

$${}_{g(a)}I_{g(b)}^\alpha f(x) =_a I_b^\alpha \big(f \circ g\big)(s)\big[g'(s)\big]^\alpha$$

şeklindedir.

Teorem 3.4.6 (**Kısmi Lokal Kesirli İntegrasyon**)

$f(x), g(x) \in D_\alpha\,(a,b)$ ve $f^{(\alpha)}(x),\ g^{(\alpha)}(x) \in C_\alpha\,[a,b]$ olsun. Bu durumda lokal kesirli integral için kısmi integrasyon

$${}_aI_b^\alpha f(t)g^{(\alpha)}(t) = \big[f(t)g(t)\big]_a^b -_a I_b^\alpha f^{(\alpha)}(t)g(t)$$

şeklindedir.

3.4.4 Trigonometrik Fonksiyonların Lokal Kesirli İntegrali

$m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere trigonometrik fonksiyonların lokal kesirli integralleri aşağıda verilmiştir.

1. $\dfrac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin_\alpha(nx)^\alpha (dt)^\alpha = 0$;
2. $\dfrac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos_\alpha(nx)^\alpha (dt)^\alpha = 0$;

3. $\dfrac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin_\alpha(mx)^\alpha\cos_\alpha(nx)^\alpha(dt)^\alpha=0$;

4. $\dfrac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos_\alpha(mx)^\alpha\cos_\alpha(nx)^\alpha(dt)^\alpha=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \dfrac{\pi^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, & m=n\end{cases}$;

5. $\dfrac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin_\alpha(mx)^\alpha\sin_\alpha(nx)^\alpha(dt)^\alpha=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \dfrac{\pi^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, & m=n\end{cases}$;

6. $\dfrac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin_\alpha\left(\dfrac{(2n+1)x}{2}\right)^\alpha}{2^\alpha\sin_\alpha\left(\dfrac{x}{2}\right)^\alpha}(dt)^\alpha=\dfrac{\pi^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$;

7. $\dfrac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}E_\alpha\big(-x^{2\alpha}\big)(dx)^\alpha=2^{\frac{1-\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\pi^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}$

3.4.5 Lokal Kesirli Belirsiz İntegral

Lokal Kesirli Anti-Türev

$f(x)$ ve $g(x)$, (a,b) aralığı üzerinde tanımlanan lokal kesirli sürekli iki fonksiyon olsun. Her $x\in(a,b)$ için $g^\alpha(x)=f(x)$ ise $g(x)$ fonksiyonuna, (a,b) üzerinde $f(x)$ fonksiyonunun lokal kesirli ilkel fonksiyonu veya lokal kesirli anti-türevi denir.

Lokal Kesirli Belirsiz İntegral

Eger $g(x)$, (a,b) üzerinde $f(x)$'in lokal kesirli anti-türevi ise bu takdirde $\big\{g(x)+C\ :\ Csabit\big\}$ kümesi $f(x)$'in lokal kesirli anti-türevlerinin bir ailesi olarak adlandırılır. Bu aileye $f(x)$'in (a,b) üzerinde lokal kesirli belirsiz integrali denir ve

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int f(x)dx=g(x)+C$$

şeklinde ifade edilir.

3.4.6 Elementer Fonksiyonların Lokal Kesirli Belirsiz İntegrali

C sabit olmak üzere lokal kesirli belirsiz integral için aşağıdaki kurallar geçerlidir.

$$
\begin{aligned}
&1. \quad \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int E_\alpha\big(x^\alpha\big)(dx)^\alpha = E_\alpha\big(x^\alpha\big) + C; \\
&2. \quad \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int x^{k\alpha}(dx)^\alpha = \frac{\Gamma(1+k\alpha)x^{(k+1)\alpha}}{\Gamma(1+(k+1)\alpha)} + C; \\
&3. \quad \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int \sin_\alpha x^\alpha (dx)^\alpha = -\cos_\alpha x^\alpha + C; \\
&4. \quad \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int \cos_\alpha x^\alpha (dx)^\alpha = \sin_\alpha x^\alpha + C.
\end{aligned} \tag{3.4.1}
$$

Teorem 3.4.7 (**Genelleştirilmiş Hölder Eşitsizliği**) $p, q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $f, g \in C_\alpha[a, b]$ olmak üzere genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b |f(x)g(x)|\,(dx)^\alpha \\
&\leq \left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b |f(x)|^p\,(dx)^\alpha\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b |g(x)|^q\,(dx)^\alpha\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{3.4.2}
$$

şeklindedir. [27]

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1 Lokal Kesirli İntegraller Yardımıyla Genelleştirilmiş Quasi-Konveks Fonksiyonlar İçin Simpson Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde genelleştirilmiş quasi-konveks fonksiyonlar ile ilgili elde edilen bazı yeni Simpson tipli eşitsizlikler verilecektir.

Lemma 4.1.1 $I, \mathbb{R}$' de bir aralık olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}^{\alpha}$ bir fonksiyon (I°, I'nın içi), $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ için $f \in D_{\alpha}(I^{\circ})$ ve $f^{(\alpha)} \in C_{\alpha}[a, b]$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6^{\alpha}}\left[f(a) + 4^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\, {}_aI_b^{\alpha} f(x) \\ =\;& \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha}\int_0^1 \left[\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right)^{\alpha} f^{(\alpha)}\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right)\right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right)^{\alpha} f^{(\alpha)}\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right)\right](dt)^{\alpha} \qquad (4.1.1) \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Kısmi lokal kesirli intgrasyon uygulanırsa;

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \left(\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right)^{\alpha} f^{(\alpha)}\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right)(dt)^{\alpha} \\ &= \left(\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right)^{\alpha}\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\alpha} f\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right)\Bigg|_0^1 \\ &\quad -\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\alpha}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha) f\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right)(dt)^{\alpha} \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra $x = \frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a$ dönüşümü yapılır ve $(dx)^{\alpha} = (\frac{b-a}{2})^{\alpha}(dt)^{\alpha}$ diferansiyeli gözönünde bulundurulursa;

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\frac{2}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\left(\frac{1}{6}\right)^{\alpha} f(b) + \left(\frac{2}{6}\right)^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\ &\quad -\left(\frac{2}{b-a}\right)^{2\alpha}\frac{1}{2^{\alpha}}\Gamma(1+\alpha)\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)(dx)^{\alpha} \qquad (4.1.2) \end{aligned}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right)^{\alpha} f^{(\alpha)}\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right)(dt)^{\alpha} \\ &= \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right)^{\alpha}\left(\frac{2}{a-b}\right)^{\alpha} f\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right)\Bigg|_0^1 \\ &\quad -\left(\frac{2}{a-b}\right)^{\alpha}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\Gamma(1+\alpha) f\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right)(dt)^{\alpha} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $x = \frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b$ dönüşümü uygulanıp $(dx)^\alpha = (\frac{a-b}{2})^\alpha (dt)^\alpha$ diferansiyeli gözönünde bulundurulursa;

$$\begin{aligned} I_2 &= \left(\frac{2}{a-b}\right)^\alpha \left[\left(-\frac{1}{6}\right)^\alpha f(a) + \left(\frac{2}{6}\right)^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\ &\quad -\left(\frac{2}{a-b}\right)^{2\alpha} \frac{1}{2^\alpha}\Gamma(1+\alpha)\int_{\frac{a+b}{2}}^{a} f(x)(dx)^\alpha \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

yazılır. (4.1.2) ve (4.1.3) taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \left(\frac{2}{b-a}\right)^\alpha \frac{1}{6^\alpha}\left[f(a) + 4^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \\ &\quad -\left(\frac{2}{b-a}\right)^{2\alpha} \frac{1}{2^\alpha}\Gamma(1+\alpha)\int_a^b f(x)(dx)^\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı $(\frac{b-a}{2})^\alpha$ ile çarpılırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.1 $I, \mathbb{R}$' de bir aralık olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}^\alpha$ bir fonksiyon (I°, I'nın için), $f \in D_\alpha(I^\circ)$ ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ için $f^{(\alpha)} \in C_\alpha[a,b]$ olsun. $|f^{(\alpha)}|$, $[a,b]$ üzerinde genelleştirilmiş quasi-konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{6^\alpha}\left[f(a) + 4^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}\, {}_aI_b^\alpha f(x)\right| \\ &\leq (b-a)^\alpha \left(\frac{5}{18}\right)^\alpha \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} \sup\left\{|f^{(\alpha)}(a)|, |f^{(\alpha)}(b)|\right\} \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (4.1.1)'de her iki tarafın mutlak değeri alınırsa;

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{6^\alpha}\left[f(a) + 4^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}\, {}_aI_b^\alpha f(x)\right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\frac{b-a}{2}\right)^\alpha \int_0^1 \left[\left|\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\right|^\alpha \left|f^{(\alpha)}\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right)\right|\right. \\ &\quad \left. + \left[\left|\frac{1}{3} - \frac{t}{2}\right|^\alpha \left|f^{(\alpha)}\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right)\right|\right]\right](dt)^\alpha \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

elde edilir. Daha sonra $|f^{(\alpha)}|$ 'nın genelleştirilmiş qausi-konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{6^\alpha}\left[f(a) + 4^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}\, {}_aI_b^\alpha f(x)\right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\frac{b-a}{2}\right)^\alpha \int_0^1 \left|\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\right|^\alpha \\ &\quad \times \left[\sup\left\{|f^{(\alpha)}(b)|, |f^{(\alpha)}(a)|\right\} + \sup\left\{|f^{(\alpha)}(a)|, |f^{(\alpha)}(b)|\right\}\right] \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

yazılır. Ayrıca (3.4.1) kullanılarak;

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \left|\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\right|^\alpha (dt)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \left|\frac{1}{3} - \frac{t}{2}\right|^\alpha (dt)^\alpha = \left(\frac{5}{18}\right)^\alpha \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} \tag{4.1.7}$$

elde edilir. Böylece (4.1.6) ve (4.1.7)'den

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{6^{\alpha}}\left[f(a)+4^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\,{}_aI_b^{\alpha}f(x)\right|\\ \leq\ &(b-a)^{\alpha}\left(\frac{5}{18}\right)^{\alpha}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\sup\left\{|f^{(\alpha)}(a)|,|f^{(\alpha)}(b)|\right\}\end{aligned}$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.2 $I,\mathbb{R}$' de bir aralık olmak üzere $f: I \to \mathbb{R}^{\alpha}$ bir fonksiyon (I°, I'nın içi), $f \in D_{\alpha}(I^{\circ})$ ve $a,b \in I^{\circ}$, $a < b$ için $f^{(\alpha)} \in C_{\alpha}[a,b]$ olsun. $[a,b]$ üzerinde $|f^{(\alpha)}|$ genelleştirilmiş quasi-konveks ve $q \geq 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ise

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{6^{\alpha}}\left[f(a)+4^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\,{}_aI_b^{\alpha}f(x)\right|\\ \leq\ &(b-a)^{\alpha}\left(2^{\alpha}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{(p+1)\alpha}+\left(\frac{1}{6}\right)^{(p+1)\alpha}\right]\frac{\Gamma(1+p\alpha)}{\Gamma(1+(p+1))\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (4.1.8)\\ &\times\left(\sup\left\{|f^{(\alpha)}(a)|^{q},|f^{(\alpha)}(b)|^{q}\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 4.1.1 ve genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{6^{\alpha}}\left[f(a)+4^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\,{}_aI_b^{\alpha}f(x)\right|\\ \leq\ &\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha}\int_0^1\left[\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|^{\alpha}\left|f^{(\alpha)}\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|\right.\\ &\left.+\left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|^{\alpha}\left|f^{(\alpha)}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|\right](dt)^{\alpha}\\ \leq\ &\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha}\left[\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|^{p\alpha}(dt)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}\right.\\ &\times\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|f^{(\alpha)}\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^{q}(dt)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &+\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|^{p\alpha}(dt)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\left.\times\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|f^{(\alpha)}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^{q}(dt)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\end{aligned}$$

elde edilir. $|f^{(\alpha)}|^q$, $[a,b]$ üzerinde genelleştirilmiş quasi-konveks olduğundan

$$\left|\frac{1}{6^\alpha}\left[f(a)+4^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}\,{}_aI_b^\alpha f(x)\right| \tag{4.1.9}$$

$$\leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^\alpha\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|^{p\alpha}(dt)^\alpha\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\left(\sup\left\{|f^{(\alpha)}(b)|^q,|f^{(\alpha)}(a)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sup\left\{|f^{(\alpha)}(a)|^q,|f^{(\alpha)}(b)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \tag{4.1.10}$$

yazılır. (3.4.1) kullanılarak;

$$\int_0^1\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|^{p\alpha}(dt)^\alpha = \int_0^1\left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|^{p\alpha}(dt)^\alpha$$

$$= 2^\alpha\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{(p+1)\alpha}+\left(\frac{1}{6}\right)^{(p+1)\alpha}\right]\frac{\Gamma(1+p\alpha)}{\Gamma(1+(p+1)\alpha)} \tag{4.1.11}$$

elde edilir. Buradan da (4.1.9) ve (4.1.11) den (4.1.2) elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.3 $I,\mathbb{R}$' de bir aralık olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}^\alpha$ bir fonksiyon (I°, I'nın içi), $f \in D_\alpha(I^\circ)$ ve $a,b \in I^\circ$, $a < b$ için $f^{(\alpha)} \in C_\alpha[a,b]$ olsun. $[a,b]$ üzerinde $|f^{(\alpha)}|$ genelleştirilmiş quasi-konveks ve $q \geq 1$ ise

$$\left|\frac{1}{6^\alpha}\left[f(a)+4^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}\,{}_aI_b^\alpha f(x)\right|$$

$$\leq (b-a)^\alpha\left(\frac{5}{18}\right)^\alpha\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left(\sup\left\{|f^{(\alpha)}(a)|^q,|f^{(\alpha)}(b)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.1.12}$$

dır.

İspat. Lemma 4.1.1 ve genelleştirilmiş power-mean eşitsizliği kullanılarak

$$\left|\frac{1}{6^\alpha}\left[f(a)+4^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}\,{}_aI_b^\alpha f(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\frac{b-a}{2}\right)^\alpha\int_0^1\left[\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|^\alpha\left|f^{(\alpha)}\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|\right.$$

$$\left.+\left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|^\alpha\left|f^{(\alpha)}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|\right](dt)^\alpha$$

$$\leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^\alpha\left[\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|^\alpha(dt)^\alpha\right)^{1-\frac{1}{q}}\right.$$

$$\times\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|^\alpha\left|f^{(\alpha)}\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q(dt)^\alpha\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|^\alpha(dt)^\alpha\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|^\alpha\left|f^{(\alpha)}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q(dt)^\alpha\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $|f^{(\alpha)}|^q$, $[a,b]$ üzerinde genelleştirilmiş quasi-konveks olduğundan

$$\left|\frac{1}{6^\alpha}\left[f(a)+4^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{\Gamma(1+\alpha)}{(b-a)^\alpha}\,{}_aI_b^\alpha f(x)\right| \tag{4.1.13}$$

$$\begin{aligned}\leq\ & \left(\frac{b-a}{2}\right)^\alpha\left[\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|^\alpha(dt)^\alpha\right)^{1-\frac{1}{q}}\right.\\ & \times\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|^\alpha\sup\left\{|f^{(\alpha)}(b)|^q,|f^{(\alpha)}(a)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}(dt)^\alpha\\ & +\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|^\alpha(dt)^\alpha\right)^{1-\frac{1}{q}}\\ & \left.\times\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|^\alpha\sup\left\{|f^{(\alpha)}(a)|^q,|f^{(\alpha)}(b)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}(dt)^\alpha\right]\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

elde edilir. Burada (3.4.1) kullanılarak

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|^\alpha=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|^\alpha=\left(\frac{5}{18}\right)^\alpha\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} \tag{4.1.15}$$

elde edilmiştir. Böylece (4.1.13) ve (4.1.15) den (4.1.3) elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.1 Teorem 4.1.3' de $q=1$ alınırsa Teorem 4.1.1 elde edilir.

Sonuç 4.1.2 Teorem 4.1.1' de $\alpha=1$ alınırsa Teorem 2.1.5 elde edilir.

Sonuç 4.1.3 Teorem 4.1.2' de $\alpha=1$ alınırsa Teorem 2.1.6 elde edilir.

Sonuç 4.1.4 Teorem 4.1.3' de $\alpha=1$ alınırsa Teorem 2.1.7 elde edilir.

Lemma 4.1.2 *$I,\mathbb{R}$' de bir aralık olmak üzere $f:I\to\mathbb{R}^\alpha$ bir fonksiyon, $f\in D_\alpha(I^\circ)$ ve $a,b\in I^\circ$, $a<b$ için $f^{(\alpha)}\in C_\alpha[a,b]$ olsun. Bu takdirde*

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3^\alpha}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\Big(f(b)-f(a)\Big)\right.\\ &\left.+\frac{1}{\Gamma^2(1+\alpha)}\left(f(a)+f\Big(\frac{2a+b}{3}\Big)+f\Big(\frac{a+2b}{3}\Big)\right)\right]-\frac{1}{(b-a)^\alpha}\,{}_aI_b^\alpha f(x)\\ =\ &\frac{(b-a)^{2\alpha}}{3^{3\alpha}\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 t^\alpha(1-t)^\alpha\left[f^{(2\alpha)}\left(\frac{2+t}{3}a+\frac{1-t}{3}b\right)\right.\\ &\left.+f^{(2\alpha)}\left(\frac{1+t}{3}a+\frac{2-t}{3}b\right)+f^{(2\alpha)}\left(\frac{t}{3}a+\frac{3-t}{3}b\right)\right](dt)^\alpha\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $I_1,\ I_2,\ I_3$ ifadelerinde kısmi lokal kesirli integrasyon uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 t^\alpha(1-t)^\alpha f^{(2\alpha)}\left(\frac{2+t}{3}a+\frac{1-t}{3}b\right)(dt)^\alpha \\
&= (t^\alpha - t^{2\alpha})\left(\frac{3}{a-b}\right)^\alpha f^{(\alpha)}\left(\frac{2+t}{3}a+\frac{1-t}{3}b\right)\Bigg|_0^1 \\
&\quad -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left(\frac{3}{a-b}\right)^\alpha f^{(\alpha)}\left(\frac{2+t}{3}a+\frac{1-t}{3}b\right)\left(\Gamma(1+\alpha)-\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}t^\alpha\right)(dt)^\alpha \\
&= -\left(\frac{3}{a-b}\right)^\alpha \Gamma(1+\alpha)\,\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 f^{(\alpha)}\left(\frac{2+t}{3}a+\frac{1-t}{3}b\right)(dt)^\alpha \\
&\quad +\left(\frac{3}{a-b}\right)^\alpha\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\,\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 t^\alpha f^{(\alpha)}\left(\frac{2+t}{3}a+\frac{1-t}{3}b\right)(dt)^\alpha \\
&= -\left(\frac{3}{a-b}\right)^{2\alpha}\Gamma(1+\alpha)\,f\left(\frac{2+t}{3}a+\frac{1-t}{3}b\right)\Bigg|_0^1 \\
&\quad +\left(\frac{3}{a-b}\right)^\alpha\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\left[t^\alpha\left(\frac{3}{a-b}\right)^\alpha f\left(\frac{2+t}{3}a+\frac{1-t}{3}b\right)\Bigg|_0^1\right. \\
&\quad \left.-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left(\frac{3}{a-b}\right)^\alpha f\left(\frac{2+t}{3}a+\frac{1-t}{3}b\right)\Gamma(1+\alpha)(dt)^\alpha\right] \\
&= -\left(\frac{3}{a-b}\right)^{2\alpha}\Gamma(1+\alpha)\left[f(a)-f\left(\frac{2a+b}{3}\right)\right] \\
&\quad +\left(\frac{3}{a-b}\right)^{2\alpha}\left[\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}f(a)-\Gamma(1+2\alpha)\,\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 f\left(\frac{2+t}{3}a+\frac{1-t}{3}b\right)(dt)^\alpha\right] \\
&= -\left(\frac{3}{a-b}\right)^{2\alpha}\Gamma(1+\alpha)\left[f(a)-f\left(\frac{2a+b}{3}\right)\right] \\
&\quad +\left(\frac{3}{a-b}\right)^{2\alpha}\left[\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}f(a)-\Gamma(1+2\alpha)\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{\frac{2a+b}{3}}^{a}\left(\frac{3}{a-b}\right)^\alpha f(x)(dx)^\alpha\right] \\
&= -\left(\frac{3}{b-a}\right)^{2\alpha}\Gamma(1+\alpha)\left[f(a)-f\left(\frac{2a+b}{3}\right)\right]+\left(\frac{3}{b-a}\right)^{2\alpha}\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}f(a) \\
&\quad -\left(\frac{3}{b-a}\right)^{3\alpha}\Gamma(1+2\alpha)\int_a^{\frac{2a+b}{3}} f(x)(dx)^\alpha \qquad (4.1.17)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 t^\alpha(1-t)^\alpha f^{(2\alpha)}\left(\frac{1+t}{3}a+\frac{2-t}{3}b\right)(dt)^\alpha \qquad (4.1.18) \\
&= -\left(\frac{3}{b-a}\right)^{2\alpha}\Gamma(1+\alpha)\left[f\left(\frac{2a+b}{3}\right)-f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right] \\
&\quad +\left(\frac{3}{b-a}\right)^{2\alpha}\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}f\left(\frac{2a+b}{3}\right)-\left(\frac{3}{b-a}\right)^{3\alpha}\Gamma(1+2\alpha)\int_{\frac{2a+b}{3}}^{\frac{a+2b}{3}} f(x)(dx)^\alpha
\end{aligned}
$$

ve

$$I_3 = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 t^\alpha(1-t)^\alpha f^{(2\alpha)}\left(\frac{t}{3}a+\frac{3-t}{3}b\right)(dt)^\alpha \tag{4.1.19}$$
$$= -\left(\frac{3}{b-a}\right)^{2\alpha}\Gamma(1+\alpha)\left[f\left(\frac{a+2b}{3}\right)-f(b)\right]$$
$$+\left(\frac{3}{b-a}\right)^{2\alpha}\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}f\left(\frac{a+2b}{3}\right)-\left(\frac{3}{b-a}\right)^{3\alpha}\Gamma(1+2\alpha)\int_{\frac{a+2b}{3}}^b f(x)(dx)^\alpha$$

elde edilir. (4.1.17), (4.1.18) ve (4.1.19) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa;

$$I_1+I_2+I_3 = -\left(\frac{3}{b-a}\right)^{2\alpha}\Gamma(1+\alpha)\big(f(a)-f(b)\big)$$
$$+\left(\frac{3}{b-a}\right)^{2\alpha}\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\left[f(a)+f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right]$$
$$-\left(\frac{3}{b-a}\right)^{3\alpha}\Gamma(1+2\alpha)\int_a^b f(x)(dx)^\alpha$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafı $\dfrac{(b-a)^{2\alpha}}{3^{3\alpha}\Gamma(1+2\alpha)\Gamma(1+\alpha)}$ ile çarpılırsa (4.1.16) elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.5 Lemma 4.1.2' de $\alpha = 1$ alınırsa Lemma 2.1.1 elde edilir.

Burada Lemma 4.1.2 kullanılarak genelleştirilmiş quasi-konveks dönüşümler içeren Simpson tipli bazı yeni integral eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 4.1.4 $I,\mathbb{R}$' de bir aralık olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}^\alpha$ bir fonksiyon (I°, I'da bir aralık), $f \in D_\alpha(I^\circ)$ ve $a,b \in I^\circ$, $a<b$ için $f^{(\alpha)} \in C_\alpha[a,b]$ olsun. $[a,b]$ üzerinde $|f^{(2\alpha)}|$ genelleştirilmiş quasi-konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{1}{3^\alpha}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\big(f(b)-f(a)\big)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\Gamma^2(1+\alpha)}\left(f(a)+f\big(\frac{2a+b}{3}\big)+f\big(\frac{a+2b}{3}\big)\right)\right]-\frac{1}{(b-a)^\alpha}{}_aI_b^\alpha f(x)\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^{2\alpha}}{3^\alpha}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma^2(1+2\alpha)}-\frac{1}{\Gamma(1+3\alpha)}\right]\sup\left\{|f^{(2\alpha)}(a)|,|f^{(2\alpha)}(b)|\right\}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat. Lemma 4.1.2' de her iki tarafın mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\frac{1}{3^\alpha}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\left(f(b)-f(a)\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\Gamma^2(1+\alpha)}\left(f(a)+f\big(\frac{2a+b}{3}\big)+f\big(\frac{a+2b}{3}\big)\right)\right]-\frac{1}{(b-a)^\alpha}{}_aI_b^\alpha f(x)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{2\alpha}}{3^{2\alpha}\Gamma(1+2\alpha)}\left\{\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \left|t^\alpha - t^{2\alpha}\right|\left|f^{(2\alpha)}\left(\frac{2+t}{3}a+\frac{1-t}{3}b\right)\right|(dt)^\alpha\right.$$
$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \left|t^\alpha - t^{2\alpha}\right|\left|f^{(2\alpha)}\left(\frac{1+t}{3}a+\frac{2-t}{3}b\right)\right|(dt)^\alpha$$
$$\left.+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \left|t^\alpha - t^{2\alpha}\right|\left|f^{(2\alpha)}\left(\frac{t}{3}a+\frac{3-t}{3}b\right)\right|(dt)^\alpha\right\} \tag{4.1.20}$$

elde edilir. $\left|f^{(2\alpha)}\right|$ genelleştirilmiş quasi konveks fonksiyon olduğundan

$$\left|\frac{1}{3^\alpha}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\Big(f(b)-f(a)\Big)+\frac{1}{\Gamma^2(1+\alpha)}\Big(f(a)+f(\frac{2a+b}{3})\right.$$
$$\left.+f(\frac{a+2b}{3})\Big)\right]-\frac{1}{(b-a)^\alpha}{}_aI_b^\alpha f(x)\Bigg|$$
$$\leq \frac{(b-a)^{2\alpha}}{3^{2\alpha}\Gamma(1+2\alpha)}\left\{\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \left(t^\alpha - t^{2\alpha}\right)\sup\left\{\left|f^{(2\alpha)}(a)\right|,\left|f^{(2\alpha)}(b)\right|\right\}\right.$$
$$+\int_0^1 \left(t^\alpha - t^{2\alpha}\right)\sup\left\{\left|f^{(2\alpha)}(a)\right|,\left|f^{(2\alpha)}(b)\right|\right\}$$
$$\left.+\int_0^1 \left(t^\alpha - t^{2\alpha}\right)\sup\left\{\left|f^{(2\alpha)}(a)\right|,\left|f^{(2\alpha)}(b)\right|\right\}\right\}$$
$$\leq \frac{(b-a)^{2\alpha}}{3^{2\alpha}\Gamma(1+2\alpha)}3^\alpha\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \left(t^\alpha - t^{2\alpha}\right)\sup\left\{\left|f^{(2\alpha)}(a)\right|,\left|f^{(2\alpha)}(b)\right|\right\}$$
$$\leq \frac{(b-a)^{2\alpha}}{3^{2\alpha}\Gamma(1+2\alpha)}3^\alpha\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}-\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\right]\sup\left\{\left|f^{(2\alpha)}(a)\right|,\left|f^{(2\alpha)}(b)\right|\right\}$$
$$\leq \frac{(b-a)^{2\alpha}}{3^{\alpha}}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma^2(1+2\alpha)}-\frac{1}{\Gamma(1+3\alpha)}\right]\sup\left\{\left|f^{(2\alpha)}(a)\right|,\left|f^{(2\alpha)}(b)\right|\right\}$$

yazılır. Buradan (3.4.1) kullanılarak

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \left(t^\alpha - t^{2\alpha}\right)(dt)^\alpha = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}-\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.6 Teorem 4.1.4'de $\alpha = 1$ alınırsa

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+2f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+2f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]-{}_aI_b^\alpha f(x)\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^2}{36}\sup\left\{|f''(a)|,|f''(b)|\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.1.5 $I,\mathbb{R}$' de bir aralık olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}^\alpha$ bir fonksiyon (I°, I'da bir aralık), $f \in D_\alpha(I^\circ)$ ve $a,b \in I^\circ$, $a < b$ için $f^{(\alpha)} \in C_\alpha[a,b]$ olsun. $|f^{(2\alpha)}|$, $[a,b]$ üzerinde genelleştirilmiş quasi konveks fonksiyon ve $q \geq 1$ ise

$$\left|\frac{1}{3^{\alpha}}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\big(f(b)-f(a)\big)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\Gamma^2(1+\alpha)}\left(f(a)+f\big(\frac{2a+b}{3}\big)+f\big(\frac{a+2b}{3}\big)\right)\right]-\frac{1}{(b-a)^{\alpha}}{}_aI_b^{\alpha}f(x)\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^{2\alpha}}{3^{\alpha}}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma^2(1+2\alpha)}-\frac{1}{\Gamma(1+3\alpha)}\right]^{1-\frac{1}{q}}\left(\sup\left\{\left|f^{(2\alpha)}(a)\right|^q,\left|f^{(2\alpha)}(b)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat. Lemma 4.1.2, genelleştirilmiş power-mean eşitsizliği ve $|f^{(2\alpha)}|$'in genelleştirilmiş quasi konveksliği kullanılarak

$$\left|\frac{1}{3^{\alpha}}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}\big(f(b)-f(a)\big)+\frac{1}{\Gamma^2(1+\alpha)}\left(f(a)+f\big(\frac{2a+b}{3}\big)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+f\big(\frac{a+2b}{3}\big)\right)\right]-\frac{1}{(b-a)^{\alpha}}{}_aI_b^{\alpha}f(x)\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^{2\alpha}}{3^{2\alpha}\Gamma(1+2\alpha)}\left\{\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|t^{\alpha}-t^{2\alpha}\right|\left|f^{(2\alpha)}\left(\frac{2+t}{3}a+\frac{1-t}{3}b\right)\right|(dt)^{\alpha}\right.$$
$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|t^{\alpha}-t^{2\alpha}\right|\left|f^{(2\alpha)}\left(\frac{1+t}{3}a+\frac{2-t}{3}b\right)\right|(dt)^{\alpha}$$
$$\left.+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|t^{\alpha}-t^{2\alpha}\right|\left|f^{(2\alpha)}\left(\frac{t}{3}a+\frac{3-t}{3}b\right)\right|(dt)^{\alpha}\right\}$$
$$\leq \frac{(b-a)^{2\alpha}}{3^{2\alpha}\Gamma(1+2\alpha)}\left\{\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|t^{\alpha}-t^{2\alpha}\right|(dt)^{\alpha}\right)^{1-\frac{1}{q}}\right.$$
$$\times\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|f^{(2\alpha)}\left(\frac{2+t}{3}a+\frac{1-t}{3}b\right)\right|^q(dt)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\int_0^1\left|t^{\alpha}-t^{2\alpha}\right|(dt)^{\alpha}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|f^{(2\alpha)}\left(\frac{1+t}{3}a+\frac{2-t}{3}b\right)\right|^q(dt)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\left.+\left(\int_0^1\left|t^{\alpha}-t^{2\alpha}\right|(dt)^{\alpha}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\left|f^{(2\alpha)}\left(\frac{t}{3}a+\frac{3-t}{3}b\right)\right|^q(dt)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$
$$\leq \frac{(b-a)^{2\alpha}}{3^{2\alpha}\Gamma(1+2\alpha)}3^{\alpha}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}-\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\right]^{1-\frac{1}{q}}\left(\sup\left\{\left|f^{(2\alpha)}(a)\right|^q,\left|f^{(2\alpha)}(b)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq \frac{(b-a)^{2\alpha}}{3^{\alpha}\Gamma(1+2\alpha)}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}-\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}\right]^{1-\frac{1}{q}}\left(\sup\left\{\left|f^{(2\alpha)}(a)\right|^q,\left|f^{(2\alpha)}(b)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. (3.4.1) kullanılarak

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \left(t^{\alpha}-t^{2\alpha}\right)(dt)^{\alpha}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}-\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} \tag{4.1.21}$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.7 Teorem 4.1.5' in şartları altında $\alpha=1$ alınırsa

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+2f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+2f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]-{}_aI_b^{\alpha}f(x)\right|\\&\leq\frac{(b-a)^2}{36}\sqrt[q]{12}\left(\sup\left\{|f''(a)|^q,|f''(b)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

elde edilir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Araştırmanın temelini oluşturan beşinci bölümde, lokal kesirli integralleri içeren yeni özdeşlikler verilip bu özdeşlikler yardımıyla genelleştirilmiş quasi-konveks fonksiyonlar için yeni Simpson tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların daha önce literatürde elde edilmiş olan sonuçların bir genelleştirmesi olduğu görülmüştür. Elde edilen bu yeni sonuçlar "E. Set, M.Z. Sarıkaya, N. Uygun, On New Inequalities of Simpson's type for generalized quasi convex functions, Advences in Inequalities and Applications, In Press" [22] ve "E. Set, A.O. Akdemir, N. Uygun, On New Simpson type Inequalities for Generalized Quasi-convex Mappings, Abstract and Proceedings Book, Xth International Statics Days Conference, 2016, Giresun, Turkey" [23] şeklinde yayınlanmıştır. Konuyla ilgilenen araştırmacılar Lemma 1 ve Lemma 2' deki özdeşliklerden faydalanarak genelleştirilmiş konveksliğin farklı sınıfları için yeni Simpson tipli eşitsizlikler elde edebilirler.

KAYNAKLAR

[1] Anton, H., Rorres, C. 2006. Elementary Linear Algebra. Jhon Wiley and Sonsi Inc.

[2] Azpeitia, A.G. 1994. Convex functions and the Hadamard inequality. Rev. Colombiana Mat., (28): 7-12.

[3] Bayraktar, M. 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.

[4] Beckenback, E.F., Bellman, R. 1961. Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

[5] Dragomir, S.S., Pearce, C.E.M. 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality, Bull. Austral. Math. Soc., 57: 337-385.

[6] Dragomir, S.S., Agarwal, R.P., Cerone, P. 2000. On Simpson's inequality and applications., J. Ineq. Appl., 5, 533-579.

[7] Greenberg, H.J., Pierskalla, W.P. 1970. A review of quasi convex functions, Reprinted from Operations Research, 19,7.

[8] Hardy, G., Litllewood, J.E., Polya, G. 1952. Inequalities, 2nd Ed., Cambridge University Press.

[9] Hua, J., Xi, B.Y., Qi, F. 2015. Some new inequalities of Simpson type for strongly s-convex functions, Africa Mathematika, 26 (5-6): 741-752.

[10] Ion, D.A. 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions, Annals of Universty of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser., 34, 82-87.

[11] Mitrinović, D.S. 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag.

[12] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., Fink, A.M. 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers.

[13] Niculescu, C.P., Persson, L.E. 2006. Convex Functions and Their Appl., A Contemporary Approach, Springer Science+ Business Media, Inc., 255 pp.

[14] Pachpatte, B.G. 2005. Mathematical Inequalities, Elsevier B. V., Amsterdam, Netherlands.

[15] Pečarić, J. 1987. Konveksne funkcije: nejednakosti, Naučna knjiga, Beograd, 243 pp.

[16] Pečarić, J.E., Proschan, F., Tong, Y.L. 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Appl., Academic, Inc, San Diego.

[17] Roberts, A.W., Varberg, D.E. 1973. Convex Functions, AcademicPress.

[18] Samko, S.G., Kilbaş, A.A., Marichev, O.I. 1993. Fractional Integrals and Derivatives Theory and Appl., Gordon and Breach, Longhorne, PA.

[19] Set, E., Özdemir, M.E., Sarıkaya, M.Z. 2012. On new inequalities of Simpson's type for quasi-convex functions with applications, Tamkang J. Math., 43(3): 357-364.

[20] Set, E., Özdemir, M.E., Uygun, N. 2016. On new Simpson type inequalities for quasi-convex functions via Riemann-Liouville integrals, AIP Conf. Proc., 1726, 020068, 1-5.

[21] Set, E., Akdemir, A.O., Özdemir, M.E. 2016. Simpson type integral inequalities for convex functions via Riemann-Liouville integrals. Filomat, accepted 2016.

[22] Set, E., Sarıkaya, M.Z., Uygun, N. 2017. On new inequalities of Simpson's type generalized quasi-convex functions, Advences in Inequalities and Applications, accepted.

[23] Set, E., Özdemir, M. E., Uygun, N. 2016. On new Simpson type inequalities for generalized quasi-convex mappings, International Statistics Days Conference, Giresun,Turkey.

[24] Set, E. 2010. Bazı Farklı Türden Fonksiyonlar için İntegral Eşitsizlikleri. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

[25] Yang, X. 2011. Local fractional Laplace's transform based on the local fractional calculus. 2011 International Conference on Computer Science and Information Engineering, Springer.

[26] Yang, X. 2011. Local fractional functional analysis and its applications, Asian academic publisher limited, July 25.

[27] Yang, X.J. 2012. Advanced Local Fractional Calculus and Its Applications, World Science Publisher, New York.

[28] Yang, J., Baleanu, D., Yang, X.J. 2013. Analysis of fractal wave equations by local fractional Fourier series method, Advan. Math. Phys., 2013, Article ID 632309.

[29] Yang, X.J. 2012. Local fractional integral equations and their applications, Advan. Comput. Sci. Appl., 1(4).

[30] Yang, X.J. 2012. Generalized local fractional Taylor's formula with local fractional derivative, Journal of Expert Systems, 1(1): 26-30.

[31] Yang, X.J. 2012. Local fractional Fourier analysis, Advan, Mech. Engineer. Appl., 1(1): 12-16.

[32] Yıldız, Ç. 2011. Quasi-Konveks Fonksiyonlar için Eşitsizlikler ve Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	Nazlı UYGUN
Doğum Yeri	:	Fatsa
Doğum Tarihi	:	29.05.1978
Medeni Hali	:	Bekar
Bildiği Yabancı Dil	:	İngilizce
İletişim Bilgileri	:	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, `matnaz@hotmail.com`
Lise	:	Fatsa Lisesi, 1994
Lisans	:	Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Ed. Fak. Matematik Böl.-2000