T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI MATRİS DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN BAĞIMSIZLIĞI VE RANKLARI

SELİN YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2016

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Selin YILMAZ tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Selahattin MADEN danışmanlığında yürütülen "Bazı Matris Denklemlerinin Çözümlerinin Bağımsızlığı ve Rankları" adlı bu tez, jürimiz tarafından 21 / 12 / 2016 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Selahattin MADEN

Başkan	:	Doç. Dr. İmdat İŞCAN Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Mehmet KORKMAZ Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 22/12/2016 tarih ve 2016/561 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

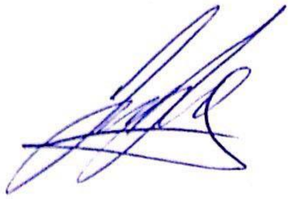
31/01/2017

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Kürşat KORKMAZ

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğu tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığı, kullanılan verilerde herhangi bir tahribat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

SELİN YILMAZ



NOT: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 Sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

BAZI MATRİS DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN BAĞIMSIZLIĞI VE RANKLARI

SELİN YILMAZ

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2016
Yüksek Lisans Tezi, 153s.

Danışman: Doç. Dr. Selahattin MADEN

Bu tez çalışması 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin amacından ve bu amaç doğrultusunda yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Matrislerin genelleştirilmiş inversleri açıklanmış ve bir algoritma verilerek örneklerle pekiştirilmiştir. Daha sonra Moor-Penrose tipi genelleştirilmiş inverslerin özellikleri açıklanmış ve örneklendirilmiştir. Üçüncü bölümde bazı matris denklemlerinin çözümlerinin bağımsızlığı incelenmiştir. BXC=A tipindeki matrislerin çözümündeki alt matrislerin rankalrı ve bağımsızlığı incelenmiştir. A-BXC denkleminin X'e göre maksimal ve minimal ranklarının bulma yöntemleri anlatılmıştır. Birim elemanlı bir regüler halkada lineer matris denklemi ve denklem sistemlerinin çözümü incelenmiştir. Matris denklem sistemlerinin çözümleri incelenmiş ve matris denklem çözümlerinde alt matrislerin tekliği ve bağımsızlığı, rankların bağımsızlığı incelenmiştir. Genelleştirirlmiş inversler kullanılarak matris ifadesinin rankları için alt ve üst sınırlar incelenmiş ve maksimal,minimal ranklar açıklanmıştır. D-CA^{-}B Schur Komplementinin maksimal ve minimal rankları açıklanmıştır. Dördüncü bölümde sonuç ve öneriler verilmiştir. Beşinci bölümde ise yararlanılan kaynaklar listelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bir matrisin rankı, Denetrminant, Kare matrsis, Maksimal ve minimal rank, Moore-Penrose invers, Schur komplementi, Singüler matris

ABSTRACT

RANKS AND INDEPENDENCE OF SOLUTIONS OF SAME MATRIX EQUATIONS

Selin YILMAZ

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematichs, 2016
MSc. Thesis, 153p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Selahattin MADEN

This thesis is consist of five chapters. In the first chapter it is mentioned about the object of the thesis were used in the thesis are given. Generalized inverses of matrices are explained and it’s rainfoced with the examples by given an algorithim. Than some properties of the Moore-Penrose generalized inverses and same examples are given. In the third chapter,it is investigated independence of the solutions of same matrix equations. Also it is considered independence and ranks of submatrices in the solutions of the type matrix equation BXC=A. It is given the methods of finding maximal and minimal rank with respect to X of the matrix expression A-BXC. Then it is considered solution of linear matrix equation systems in a regular ring. Finally it is obtained lower and upper limits fort he rank of the matix expressions by using the generalized inverses and explaind the maxsimal and minimal ranks. Also it is investigated maximal and minimal ranks of the Schur complement of the experession D-CA^{-}B.In the fourth chapter,result and suggestions are given. Then some referances which is used in this thesis are listed.

Keywords: Determinant,Maximal and minimal rank, Moore-Penrose invers, Schur complement, Singuler matrix, Sqare matrix

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı esnasında her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Selahattin MADEN'e içten teşekkürlerimi sunarım. Tez yazım aşamasında maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen değerli babam Sayın Zafer GÜL'e yanımda olan ve bu uzun ve zorlu süreçte ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan annem, eşim ve oğlum Kağan'a değerli aileme yürekten teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım, verilerin kullanımı esirgemeyen ve engin tecrübelerinden yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

A^+	: A matrisinin Moore-Penrose tipi genelleştirilmiş inversi
A veya A(1)	: A matrisinin genelleştirilmiş inversi (iç inversi)
A^*	: A matrisinin eşlenik transpoz matrisi (Hermitian matrisi)
A^T	: A matrisinin transpozu
$\overline{A}$	: A matrisinin eşlenik matrisi (eş matrisi)
$\|A\|$veya det(A)	: A matrisinin determinantı
A_{ij}	: A matrisinin bir a_{ij} elemanının kofaktörü
A^{-1}	: A matrisinin inversi
N(A)	: A matrisinin null (sıfır) uzayı
R(A	: A matrisinin ranj (sütun) uzayı
A(2	: A matrisinin dış inversi
A_0 veya $A^{(1,2)}$	: A matrisinin yansımalı genelleştirilmiş inversi
C	: Kompleks sayılar kümesi
C_n^m	: C üzerinde tanımlı mxn tipindeki tüm matrislerin kümesi
Ek(A)	: A matrisinin ek matrisi
I_n	: nxn tipindeki birim matris
K	: K kümesi
K_n^m	: K üzerinde tanımlı mxn tipindeki tüm matrislerin kümesi
N	: Doğal sayılar kümesi
$P_{(R(A))}$	: A matrisinin R(A) sütun (ranj) uzayının yansıtıcısı (izdüşümü)
R	: Reel sayılar kümesi
r(A) veya rank (A)	: A matrisinin rankı

1. GİRİŞ

Bir singüler matrisin inversi fikri ilk defa 1920 yılında Moore (1920, 1935) tarafından ortaya atılmıştır. Bu fikrin genel operatörlere genişletilmesi ise Tseng (1949a, 1949b, 1956) tarafından yapılmıştır. Ancak, daha sonra 1955 yılına kadar bu konuda her hangi bir sistematik çalışmaya rastlanamamaktadır. 1955 yılında, önceki çalışmalardan habersiz olarak, Penrose (1955, 1956) biraz farklı bir yoldan Moore tarafından verilen invers kavramını tekrar tanımlamıştır. Penrose ile aynı zamanlarda yaşayan bilim adamlarından birisi olan Rao (1955), bir singüler matrisin Pseudo İnversi olarak adlandırdığı, en küçük kareler teorisinde singüler matrisli normal denklemlerin çözümünde ve tahmin edicilerin varyanslarının hesaplanmasında kullanılan yeni bir invers kavramı geliştirmiştir. Rao tarafından geliştirilen Pseuda invers, Moore ve Penrose tarafından ortaya konulan kısıtlamaların tümünü sağlamamaktadır. Bu nedenle de bu invers, Moore-Penrose inversten farklıdır, fakat gözlem denklemlerinin rankları üzerinde herhangi bir kısıtlama konulmaması durumunda en küçük kareler yönteminin genel teorisinin ortaya konulmasında oldukça yararlıdır. Rao (1962), daha sonraki bir çalışmasında, lineer denklemlerle ilgili problemlerinin çözümün- de yeterli olabilecek ve Moore ve Penrose' un vermiş olduğu tanımdan çok daha zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Böyle bir invers, bir genelleştirilmiş invers (g-invers) olarak adlandırılmış ve bunun uygulamaları Rao(1961, 1965a, 1965b, 1966, 1967)' nun birçok çalışmasında yer almıştır. Genelleştirilmiş inversler üzerinde 1955' lerden itibaren çalışan başlıca bilim adamları arasında Greville (1959), Bjerhammer (1951a, 1951b, 1958), Ben-Israel ve Charnes (1963), Chipman (1964, 1968), Chipman ve Rao (1964), Scroggs ve Odell (1966) sayılabilir. Bose (1959), "Varyans Analizi" adlı ders notlarında g-inversi kullanmıştır. Bott ve Duffin (1953) bir kare matrisin kısıtlamalı inversini tanımlamıştır ki bu invers bilinen g-inversten farklıdır ve bazı uygulamalarda kullanılır. Chernoff (1953), singüler nonnegatif tanımlı bir matrisin g-inversini göz önüne almıştır ki bu invers, bir g-invers olmamasına rağmen bazı tahmin problemlerinin incelenmesinde yararlıdır. Rao (1962) tarafından verilen daha zayıf tanımı sağlayan g-invers tek olmamakla birlikte matris cebirinde ilginç bir çalışma olarak kabul edilir. 1967 yılında bir yayınında Rao (1967), değişik amaçlarla kullanılmak üzere g-inverslerin bir sınıflandırmasını vermiştir.

Bu çalışmalar daha sonra genelleştirilmiş inverslerin yeni bir sınıflandırmasını ortaya atan Mitra (1968a, 1968b), Mitra ve Bhimasankaram (1969, 1970) tarafından geliştirilmiştir. Genelleş- tirilmiş inverslerin diğer çeşitli uygulamaları Mitra ve Rao (1968a, 1968b, 1969) ve Rao (1968) tarafından yapılan bir dizi çalışmada ele alınmıştır. Genelleştirilmiş inverslerin hesaplanmasındaki sistematik gelişmeler ve onların çeşitli uygulamaları Generalized Inverse of Matrices and Its Applications (Wiley, 1971) adlı kitapta verilmiştir.

Bu tez çalışmasında öncelikle kare olmayan ya da kare olduğu halde bilinen anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve lineer denklem sistemlerinin genel durumda çözümünde kullanılan ve bilinen anlamdaki invers özelliklerini de sağlayan genelleştirilmiş invers adı verilen bir kavram ele alınmıştır. Bu amaçla bir matrisin genelleştirilmiş inversi, yansımalı genelleştirilmiş inversi ve Moore-Penrose tipi genelleştirilmiş inversi tanımları verilerek bu inverslerin çeşitli özellikleri ortaya konulmuştur. Matrislerin Moore-Penrose inversleri için genel ifadeler verilmiş ve Schur Complement içeren çeşitli matrislerin Moore-Penrose inversleri için bazı ifadeler elde edilmiştir. Daha sonra bazı matris denklemlerinin çözümlerinin bağımsızlığı ve rank problemleri ele alınmıştır. Bu amaçla çeşitli tiplerde matris denklemleri alınarak genelleştirilmiş inversler yardımıyla bu matris denklemlerinin maksimal ve minimal ranklarının hesaplanmasından söz edilmiş, denklemlerin çözümlerinin bağımsızlıkları incelenmiş ve çözümlerdeki alt matrislerin tekliği ve bağımsızlığı üzerinde etraflıca durulmuştur. Birim elemanlı bir regüler halka üzerinde lineer matris denklemleri ve denklem sistemlerinin genel çözümleri ele alınmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 *i.* $\mathbb{K}$ bir cisim olsun. $m, n \in \mathbb{M}$ ve $1 \leq i \leq m,\ \ 1 \leq j \leq n$ olmak üzere bütün (i, j) sıralı ikililerin kümesi $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olsun.

$f : A \to \mathbb{K}$ fonksiyonu

$$(i, j) \to f(i, j) = a_{ij}$$

olarak tanımlansın. $a_{ij} \in \mathbb{K}$ olacak şekilde seçilen $m.n$ tane elemanın oluşturduğu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1.1}$$

sayı tablosuna $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipinde bir matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1.2}$$

matrisi kısaca $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$ şeklinde gösterilir. Her $(i, j),\ \ 1 \leq i \leq m,\ \ 1 \leq j \leq n$ ikilisine karşılık gelen a_{ij} elemanına A matrisinin (i, j)-yinci bileşeni denir.

ii. $m \times n$ tipinde olan ve bileşenleri bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinden seçilen bütün $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$ matrislerinin kümesi $\mathbb{K}_n^m$ ile gösterilir.

iii. $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$ $m \times n$ tipinde her hangi iki matris olmak üzere, her (i, j) için

$$a_{ij} = b_{ij},\ \ 1 \leq i \leq m,\ \ 1 \leq j \leq n$$

ise bu iki matrise eşit matrisler denir.

iv. $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, her bir a_{ij} elemanı sıfıra eşitse A matrisine sıfır matris denir.

v. $A = \left[a_{ij}\right]$ ve $B = \left[b_{ij}\right]$ $m \times n$ tipinde her hangi iki matris olmak üzere, A ve B matrislerinin toplamı, (i,j)-yinci bileşeni $a_{ij} + b_{ij}$ olan bir matris olup

$+ : \mathbb{K}_n^m \times \mathbb{K}_n^m \rightarrow \mathbb{K}_n^m$

$(A,B) \rightarrow A + B = \left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij}\right]$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

vi. $c \in \mathbb{K}$ bir skaler olmak üzere $cA \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi (i,j) -yinci bileşeni ca_{ij} olan bir matristir. Yani

$. : \mathbb{K} \times \mathbb{K}_n^m \rightarrow \mathbb{K}_n^m$

$$(c,A) \rightarrow cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

olur. O halde her $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için $0 \in \mathbb{K}$ olmak üzere, $0A = 0 \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi, $m \times n$ tipinde sıfır matristir.

vii. $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{K}_p^m$ ve $B = \left[b_{ij}\right] \in \mathbb{K}_n^p$ üzere, A ve B matrislerinin çarpımı $C = \left[c_{ij}\right] \in \mathbb{K}_n^m$ şeklinde bir matristir ve

$. : \mathbb{K}_p^m \times \mathbb{K}_n^p \rightarrow \mathbb{K}_n^m$

$(A,B) \rightarrow A.B = C$

$$\left[a_{ij}\right] . \left[b_{ij}\right] = \left[c_{ij}\right] = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right], \;\; 1 \leq i \leq m, \;\; 1 \leq j \leq n$$

şeklindedir, yani

$$A.B = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1p}b_{p1}) & \dots & (a_{11}b_{1n} + \ldots + a_{1p}b_{pn}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_{m1}b_{11} + \ldots + a_{mp}b_{p1}) & \dots & (a_{m1}b_{1n} + \ldots + a_{mp}b_{pn}) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. O halde matris çarpımının tanımlı olabilmesi için birinci çarpanın sütun sayısı, ikinci çarpanın satır sayısına eşit olmalıdır. Herhangi A ve B matrislerinin çarpımı $A.B$ veya AB ile gösterilir. [Hacısalihoğlu H.H., 1977]

Tanım 2.1.2 *i.* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, reel sayılar kümesi olarak alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki A matrisine bir reel matris denir.

ii. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, kompleks sayılar kümesi olarak alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki bir A matrisine bir kompleks matris denir. [Branson R., 1999]

Tanım 2.1.3 *i.* $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ matrisinde $m = n$ ise, A matrisine kare matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1.3}$$

kare matrisinde $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarına köşegen (esas köşegen) elemanları denir.

ii. Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ kare matrisinin $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ köşegen elemanları dışındaki tüm elemanları sıfır ise yani, $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ ise bu matrise köşegen matris denir ve

$$A = \text{Köş}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$$

ile gösterilir.

iii. Bir köşegen matriste $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} = k,\ k \in \mathbb{K}$ ise bu matrise skaler matris denir.

iv. Köşegen üzerindeki elemanları 1 ve köşegen dışındaki elemanları 0 olan $n \times n$

tipindeki bir matrise birim matris denir ve

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Her hangi bir $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için, $I_m A = AI_n = A$ olur.

v. Bir $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m\times n}$ matrisinden aynı numaralı satırlar ve sütunlar kendi aralarında yer değiştirilerek elde edilen $A^T = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m\times n}$ matrisine A matrisinin transpozu (transpoze matrisi) denir. Buna göre A ve B uygun matrisler olmak üzere

$$(A+B)^T = A^T + B^T \text{ ve } (AB)^T = B^T A^T$$

eşitlikleri sağlanır.

vi. A bir reel kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise, A matrisine simetrik matris denir.

vii. A ve B kare matrisleri arasında $AB = BA$ bağıntısı varsa, bu matrislere değişmeli (komutatif) matrisler denir. [Hacısalihoğlu H.H., 1977]

Tanım 2.1.4 *i.* $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin kendisi üzerine bir birebir ve örten bağıntısı veya eş değer olarak $1, 2, \dots, n$ sayılarının yeniden bir sıralanmasına $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin bir σ permütasyonu denir. Böyle bir permütasyon

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

veya

$$\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n, \quad j_i = \sigma(i)$$

ile gösterilir. Bu permütasyonların tümünün kümesi S_n ile gösterilir. S_n de gelişigüzel bir σ permütasyonu, örneğin $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ düşünüldüğünde σ' da çift veya tek sayıda permütasyonlar olmasına göre σ' ya çift veya tek permütasyon denir. O halde bir σ' nın işareti

$$\text{sgn}\sigma = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \sigma \text{ ise} \\ -1, & \text{eğer } \sigma \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve sgnσ ile gösterilir.

ii. $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{n \times n}$ bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı kare matris olsun.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisinin her satırından ve her sütunundan yalnız ve yalnız bir eleman alınmak üzere n elemanın bir çarpımı düşünülsün. Böyle bir çarpım

$$a_{1_{j_1}} \times a_{2_{j_2}} \times \dots \times a_{n_{j_n}}$$

şeklinde yazılır. Burada çarpanlar ardışık satırlardan gelir ve bu yüzden alt indisler $1, 2, \dots, n$ doğal sayı sırasındadır. Çarpanlar farklı sütunlardan geldiğinden, ikinci alt indislerin dizisi S_n de bir $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ permütasyonunu oluşturur. Tersine, S_n deki her permütasyon yukarıdaki şekilde bir çarpım tanımlar. Böylece A matrisi böyle $n!$ çarpım kapsar.

$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{n \times n}$ kare matrisinin determinantı $\det(A)$ veya $|A|$ şeklinde gösterilir ve yukarıdaki her çarpanı sgnσ ile çarpılan veya $n!$ tane çarpımların toplamıdır. Yani

$$|A| = \sum_{\sigma} (\mathrm{sgn}\sigma) \mathrm{a}_{1_{\mathrm{j}_1}} \times \mathrm{a}_{2_{\mathrm{j}_2}} \times \dots \times \mathrm{a}_{\mathrm{n}_{\mathrm{j}_\mathrm{n}}}$$

veya

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (\mathrm{sgn}\sigma) \mathrm{a}_{1\sigma(1)} \times \mathrm{a}_{2\sigma(2)} \times \dots \times \mathrm{a}_{\mathrm{n}\sigma(\mathrm{n})}$$

şeklinde n mertebedendir.

$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{n \times n}$ matrisinin determinantı aşağıdaki şekilde de tanımlanmaktadır.

iii. 1×1 tipinde bir A matrisinin determinantı kendisidir.

$$A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix} \quad \text{ise} \quad \det(A) = |a| = a$$

olur.

iv. 2×2 tipinde bir A matrisinin determinantı aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

olur.

$n > 2$ için bir kare matrisin determinantı, aşağıda gösterildiği gibi bir indirgeme işlemi ve minörleri ile işaretli minörleri kullanılan bir açılımla hesaplanır.

v. Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisinin bir a_ij elemanının $\left|M_{ij}\right|$ şeklinde tanımlanan minörü, A matrisinden i-yinci satırın ve j-yinci sütunun atılması ile oluşan $(n-1)\times(n-1)$ tipindeki kare matrisin determinantıdır.

vi. Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisinin bir a_ij elemanının minörü $\left|M_{ij}\right|$ olsun. A matrisinin bir a_ij elemanının A_ij şeklinde gösterilen kofaktörü (işaretli minörü veya eş çarpanı)

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.\left|M_{ij}\right|$$

şeklinde tanımlanır.

vii. Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisinin determinantı her hangi bir satır (sütun) elemanlarının kendi kofaktörleriyle çarpılıp bu çarpanların toplanmasıyla bulunur. Yani herhangi i ve j $(i,j = 1,2,\ldots,n)$ için

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\left|M_{ik}\right| \tag{2.1.4}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}\left|M_{kj}\right| \tag{2.1.5}$$

şeklinde tanımlanır.

Her bir i için, (2.1.4) ile verilen toplama, A matrisinin determinantının i-yinci satır elemanlarına göre açılımı, her bir j için, (2.1.5) ile verilen toplama ise A matrisinin determinantının j-yinci sütun elemanlarına göre açılımı denir.

viii. Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ kare matrisi için $\left|A\right| = 0$ ise A matrisine singüler (tekil) matris, $\left|A\right| \neq 0$ ise, A matrisine nonsingüler (tekil olmayan veya regüler) matris denir. (Branson R., 1999)

Tanım 2.1.5 *i.* Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisinde bir a_ij elemanının kofaktörü A_ij olsun.

$$\mathrm{Ek(A)} = \left[A_{ij}\right]^{\mathrm{T}} = \left[A_{ij}\right]$$

şeklinde tanımlanan matrise A matrisinin ek matrisi denir. Buna göre

$$\mathrm{Ek(A)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

olur.

ii. Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisi için $A.B = B.A = I_n$ olacak şekilde bir $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisi varsa, B matrisine A matrisinin inversi denir ve $A^{-1} = B$ ile gösterilir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.1.1 Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisi ile bu matrisin ek matrisinin çarpımı bir skaler matris olup

$$A.\mathrm{Ek(A)} = \mathrm{Ek(A).A} = \left|A\right| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \left|A\right| \mathrm{I_n} \qquad (2.1.6)$$

ile verilir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat.

$$\begin{aligned} A.\mathrm{Ek(A)} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left|A\right| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left|A\right| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \left|A\right| \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur ki bu matris bir skaler matristir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
A.\mathrm{Ek(A)} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left|A\right| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left|A\right| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \left|A\right| \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde

$$A.\mathrm{Ek(A)} = \mathrm{Ek(A).A} = \left|A\right| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \left|A\right| \mathrm{I_n}$$

bulunur.

Teorem 2.1.2 Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ nonsingüler matrisinin inversi

$$A^{-1} = \frac{1}{\left|A\right|}\mathrm{Ek(A)} \tag{2.1.7}$$

dır. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat. (2.1.6) bağıntısından dolayı $A.\mathrm{Ek(A)} = \left|A\right| \mathrm{I}$ olur. Bu ifadenin her iki yanı A^{-1} ile çarpıldığında

$$(A^{-1}.A)\mathrm{Ek(A)} = \mathrm{A}^{-1}\left|A\right| \mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{Ek(A)} = \left|A\right| \mathrm{A}^{-1}\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{Ek(A)} = \left|A\right| \mathrm{A}^{-1}$$

olur. Öte yandan A matrisi nonsingüler olduğundan $|A| \neq 0$ olup

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Ek(A)}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.3 $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ nonsingüler bir matris ve B ve C çarpıma uygun matrisler olmak üzere $AB = AC$ ise $B = C$ olur. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat. $AB = AC$ eşitliğinin her iki tarafı soldan A^{-1} ile çarpılmasıyla $A^{-1}AB = A^{-1}AC$ yani $B = C$ elde edilir.

Teorem 2.1.4 *i.* Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matris olsun. A^{-1} matrisi tektir.

ii. A nonsingüler matris ise A^{-1} matrisi de nonsingüler olup $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

iii. A ve B çarpmaya uygun nonsingüler matrisler ise AB matrisi de nonsingüler olup $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dır.

iv. A nonsingüler bir matris ise A^T matrisi de nonsingüler olup $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir. (Branson R., 1999)

İspat.

i. B ve C matrislerinin A matrisinin herhangi iki inversi olduğu varsayılsın. O zaman $AB = BA = I$ ve $AC = CA = I$ olur. Buradan

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$$

elde edilir.

ii. $(A^{-1})^{-1}$ matrisi A^{-1} matrisinin inversidir. Aynı zamanda A matrisi de A^{-1} matrisinin inversidir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

iii. $(AB)^{-1}$ matrisi AB matrisinin inversidir. Ayrıca

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

ve

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

yazılabilir. Böylece $B^{-1}A^{-1}$ matrisi de AB matrisinin inversi olur. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

iv. $(A^T)^{-1}$ matrisi A^T matrisinin inversidir. Ayrıca $I^T = I$ olduğundan

$$I = I^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T(A)^T$$

olur. Bu durum, $(A^{-1})^T$ matrisinin A^T matrisinin bir inversi olduğunu gösterir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ elde edilir.

Tanım 2.1.6 *i.* Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisi için $A^2 = A$ ise, A matrisine idempotent matris denir.

ii. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı A matrisinin elemanlarının yerlerine eşlenikleri yazılarak elde edilen matrise A matrisinin eşleniği (eş matrisi) denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

iii. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı A matrisi için $(\overline{A})^T = A$ ise A matrisine hermitian matris denir ve $A^* = (\overline{A})^T$ ile gösterilir.

iv. Bir A matrisi için $AA^* = A^*A$ ise A matrisine normal matris denir.

v. $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ nonsingüler bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^*$ (veya $AA^* = A^*A = I$) ise A matrisine birimsel (unitary) matris denir.

vi. $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^T$ ise A matrisine ortogonal (dik) matris denir.

vii. $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ reel simetrik bir matris olmak üzere, sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{R}_1^n$ vektörü için $x^TAx > 0$ ($x^TAx \geq 0$) ise, A matrisine Pozitif Tanımlı (Pozitif Yarı Tanımlı) Matris denir.

viii. A, $n \times n$ tipinde bir kare matris olsun. $(A - \lambda I)x = 0$ eşitliğini sağlayan λ skalerine A matrisinin bir özdeğeri, sıfır olmayan x vektörüne de A matrisinin bir özvektörü denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.1.5 *i.* $(\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$.

ii. $(A^*)^* = A$.

iii. $(A + B)^* = A^* + B^*$.

iv. $(AB)^* = B^*A^*$.

eşitlikleri sağlanır. (Branson R., 1999)

İspat.

i. $A = \left[a_{ij}\right]$ $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu taktirde

$$\overline{A} = \left[\overline{a_{ij}}\right] \text{ ve } (\overline{A})^T = \left[\overline{a_{ij}}\right]$$

olur. Diğer taraftan

$$A^T = \left[a_{ij}\right] \text{ ve } \overline{(A^T)} = \left[\overline{a_{ij}}\right]$$

olduğundan

$$\overline{(A^T)} = (\overline{A})^T$$

olduğu görülür.

ii. $A^* = (\overline{A})^T$ olduğundan

$$\left(A^*\right)^* = \left(\overline{(\overline{A})^T}\right)^T = \left(A^T\right)^T = A$$

elde edilir.

iii. Hermitian matris tanımına göre

$$(A+B)^* = \left(\overline{A+B}\right)^T = \left(\overline{A}+\overline{B}\right)^T = \left(\overline{A}\right)^T + \left(\overline{B}\right)^T = A^* + B^*$$

elde edilir.

iv. Hermitian matris tanımına göre

$$(AB)^* = \left(\overline{AB}\right)^T = \left(\overline{A}\overline{B}\right)^T = \left(\overline{B}\right)^T\left(\overline{A}\right)^T = B^*A^*$$

yazılabilir.

Teorem 2.1.6 Reel simetrik bir A matrisinin pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olması için gerek ve yeter şart, tüm özdeğerlerinin (sıfırdan farklı özdeğerlerinin) pozitif olmasıdır. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat. A matrisi pozitif tanımlı olmak üzere, λ özdeğerine ve ilgili x özvektörüne sahip olsun. Bu takdirde bu x vektörü için $Ax = \lambda x$ ve $\langle Ax, x\rangle > 0$ bağıntıları vardır. O halde $0 < \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$ olur. x bir özvektör olduğundan, sıfırdan farklıdır ve dolayısıyla $\langle x, x\rangle$ pozitiftir. Bu durumda $\lambda > 0$ olmalıdır.

A matrisi pozitif yarı tanımlı olmak üzere, λ özdeğerine ve ilgili x özvektörüne sahip olsun. Bu takdirde bu x vektörü için

$$Ax = \lambda x \text{ ve } \langle Ax, x\rangle \geq 0$$

bağıntıları vardır. O halde

$$0 \leq \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$$

olur. x bir özvektör olduğundan, sıfırdan farklıdır ve dolayısıyla $\langle x, x\rangle$ pozitiftir. Bu durumda $\lambda \geq 0$ olmalıdır.

Tüm (sıfırdan farklı) özdeğerleri pozitif olması halinde A matrisinin pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olacağı benzer şekilde gösterilebilir. (Lanchester, P., 1969)

Tanım 2.1.7 *i.* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kümesi verilmiş olsun. $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği ancak $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skalerlerinin tümü birden sıfır olduğunda sağlanıyorsa bu durumda
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektörlerine lineer bağımsızdır denir. Aksi halde yani, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektörlerine lineer bağımlıdır denir.

ii. A matrisi $m \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. A matrisinin sütun vektörlerini $A_{*1}, A_{*2}, \ldots, A_{*n}$ ile, ve satır vektörlerini $A_{1*}, A_{2*}, \ldots, A_{m*}$ ile gösterelim. A_{i*}, $i = 1, 2, \ldots, m$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına A matrisinin satır rankı, A_{*j}, $j = 1, 2, \ldots, n$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına ise A matrisinin sütun rankı denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.1.7 Bir matrisin iki satırının kendi aralarında yer değiştirmesi matrisin satır rankını değiştirmez. (Branson R., 1999)

İspat. A matrisinin herhangi iki satırı yer değiştirdiğinde satır vektörlerinin kümesi değişmeyeceğinden, bu durum matrisin satırları arasındaki lineer bağımsızlığı değiştirmez. Yani satır rankını değiştirmez.

Teorem 2.1.8 $AX = 0$ ve $BX = 0$ denklemlerinin çözüm kümeleri aynı ise, o zaman A ve B $n \times n$ tipindeki matrislerin sütun rankları aynıdır. (Branson R., 1999)

İspat. $AX = 0$ sistemi

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n = 0 \tag{2.1.8}$$

olarak yazılabilir. Burada A_i, A matrisinin i-yinci sütunudur ve $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ olur. Benzer şekilde, $Bx = 0$ sistemi

$$x_1 B_1 + x_2 B_2 + \ldots + x_n B_n = 0 \tag{2.1.9}$$

olarak yazılır.

A matrisinin sütun rankı a, B matrisinin sütun rankı b ile gösterilsin. A matrisinin sütun rankı, B matrisinin sütun rankından büyük kabul edilsin. Böylece $a > b$ olur. Bu durumda A matrisinin a tane lineer bağımsız sütunu olmalıdır. Genellik kaybedilmeden, bunların A matrisinin ilk a sütunu olduğu varsayılabilir. (Eğer değilse, A matrisinin sütunları bu şekilde yeniden düzenlenebilir. Bu durum ise Teorem 2.1.7' ye benzer şekilde A matrisinin sütun rankını değiştirmez.) Ancak $a > b$ kabul edildiğinden B matrisinin ilk a sütunu lineer bağımlıdır. Böylece, hepsi sıfır olmayan öyle $d_1, d_2, \ldots, d_n$ vardır ki

$$d_1 B_1 + d_2 B_2 + \ldots + d_a B_a = 0$$

olur. Buradan

$$d_1 B_1 + d_2 B_2 + \ldots + d_a B_a + 0B_{a+1} + \ldots + 0B_n = 0$$

ve (2.1.9) sisteminin çözümü olarak

$$x_1 = d_1 \;\; x_2 = d_2 \;\; \ldots \;\; x_a = d_a \;\; x_{a+1} = x_{a+2} = \ldots = x_n = 0$$

bulunur. Bu aynı değerler (2.1.8) sisteminin de çözümü olarak verildiğinden

$$d_1A_1 + d_2A_2 + \ldots + d_aA_a = 0$$

dır. Burada, belirtildiği gibi, $d_1, d_2, \ldots, d_a$ sabitlerinin tümü sıfır değildir. Ancak bu $A_1, A_2, \ldots, A_a$ matrislerinin lineer bağımlı olduğunu gösterir ki, bu da bir çelişkidir.

A ve B matrislerinin rollerini değiştirerek yapılan benzer bir çalışma, B matrisinin sütun rankının da A matrisinin sütun rankından daha büyük olamayacağını gösterir. Böylece bu iki matrisin sütun rankları eşit olmalıdır.

Teorem 2.1.9 Elemanter satır işlemleri herhangi bir matrisin sütun rankını değiştirmez. (Branson R., 1999)

İspat. A matrisine elementer satır işlemleri uygulanarak elde edilen matris B olsun. Bu durumda $Ax = 0$ ve $Bx = 0$ homojen denklem sistemlerinin çözüm kümeleri aynıdır. Teorem 2.1.8 yardımıyla A ve B matrislerinin sütun rankları aynıdır.

Teorem 2.1.10 Herhangi bir A matrisi için satır rankı sütun rankına eşittir. (Branson R., 1999)

İspat. $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin satır rankının r ve sütun rankının ise c olduğu kabul edilsin. $r = c$ olduğu gösterilecektir. A matrisinin satırları ilk r satırı lineer bağımsız ve kalan $m - r$ satırı ilk r satırın lineer birleşimi olacak şekilde yeniden düzenlenirse, Teorem 2.1.7 ve Teorem 2.1.8 yardımıyla bu işlemin A matrisinin satır ve sütun ranklarını değiştirmediği görülür. A matrisinin satırları sırasıyla $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ile gösterilsin ve C ve D matrisleri

$$C = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_r \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad D = \begin{bmatrix} A_{r+1} \\ A_{r+2} \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın. O zaman A matrisi $\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$ bloklanmış matrisidir. Ayrıca D matrisinin her bir satırı C matrisinin satırlarının bir lineer birleşimi olduğundan, öyle bir T matrisi vardır ki, $D = TC$ olur. Özel durumda eğer

$$A_{r+1} = d_1A_1 + d_2A_2 + \ldots + d_rA_r$$

ise o zaman $[d_1, d_2, \ldots, d_r]$ vektörü T matrisinin ilk satırıdır. Buradan, her hangi bir n boyutlu x vektörü için

$$Ax = \begin{bmatrix} Cx \\ Dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx \\ TDx \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Bu durumda, ancak ve ancak $Cx = 0$ ise $Ax = 0$ olur ve Teorem 2.1.8 den dolayı A ve B matrislerinin sütun rankı c dir. Ancak B matrisinin sütunları r boyutlu vektörlerdir. Böylece B matrisinin sütun rankı r den büyük olamaz. Yani

$$c \leq r \tag{2.1.10}$$

olur. Yukarıdaki durum A^T matrisi için tekrarlanırsa, A^T matrisinin sütun rankının A^T matrisinin satır rankından büyük olamayacağı görülür. Ancak, A^T matrisinin sütunları A matrisinin satırları olduğundan bu durum A matrisinin satır rankının A matrisinin sütun rankından büyük olamayacağı anlamına gelir. Yani

$$r \leq c \tag{2.1.11}$$

olur. (2.1.10) ve (2.1.11) bağıntılarından $r = c$ olduğu görülür.

Tanım 2.1.8 Herhangi bir A matrisinin rankı, satır ve sütun rankı olarak tanımlanır ve $rank(A)$ veya $r(A)$ şeklinde gösterilir. (Branson R., 1999)

Teorem 2.1.11 *A bir matris olmak üzere $r(A) = r(A^T)$ dir.* (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat. A matrisinin satırları A^T matrisinin sütunları ve A matrisinin sütunları A^T matrisinin satırları olduğundan, Teorem 2.1.12 dan istenilen sonuç elde edilir.

Tanım 2.1.9 $n \times n$ tipindeki bir A kare matrisi için eğer r(A)=n ise A matrisine Nonsingüler (Tekil Olmayan) Matris denir. Aksi durumda yani, $r(A) < n$ ise A matrisine Singüler (Tekil) Matris denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Tanım 2.1.10 *i.* $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun.

$$\mathcal{N}(A) = \{x : Ax = 0\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye A matrisinin null (sıfır) uzayı denir.

ii. $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun.

$$\mathcal{R}(A) = \{y : Ax = y\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye A matrisinin ranj (sütun) uzayı denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.1.12 A, r ranklı $m \times n$ tipinde bir matris ise, bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan nonsingüler P ve Q matrisleri vardır. I, $r \times r$ boyutlu birim matris olmak üzere

i. $m = n = r \Rightarrow PAQ = I$

ii. $m = r < n \Rightarrow PAQ = [I, 0]$

iii.

$$m > r, \;\; n > r \Rightarrow PAQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.1.12}$$

İspat. Lancaster, P., (1969)

Teorem 2.1.13 Çarpmaya uygun A ve B matrislerinin çarpımının rankı A ve B matrislerinin rankını geçemez. Yani

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\} \tag{2.1.13}$$

dir. (Lancaster, P., 1969)

İspat. AB matrisinin her bir sütunu A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonu olduğundan AB matrisinin sütun uzayı A matrisinin sütun uzayının alt kümesi olur. Böylece

$$r(AB) \leq r(A)$$

eşitsizliği bulunur. Benzer şekilde

$$r(AB) \leq r(B)$$

eşitsizliği de sağlanır. Böylece

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$$

elde edilir.

2.1.1 Genelleştirilmiş İnversler

Herhangi bir A matrisi bir inverse sahip olabilmesi için A matrisinin nonsingüler ve kare matris olması gerekir. Bu durumda A matrisi yardımıyla

$$AX = B \tag{2.1.14}$$

lineer denklem sisteminin var olan tek çözümü $X = A^{-1}B$ şeklindedir. Ayrıca

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

şartını sağlayan ve A matrisinin inversi olarak adlandırılan A^{-1} matrisi vardır. Bununla birlikte A matrisinin kare matris olmadığı durumlarda ya da A matrisinin kare matris fakat singüler olduğu durumlarda inversi yoktur. Bu durumlarda A^{-1} matrisinin özelliklerini de içeren ve genelleştirilmiş invers (g-invers) matris adını alan yeni bir kavram sayesinde (2.1.14) sisteminin bir çözümü olabilir. $\mathbb{C}_n^m$, kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesini göstersin. Bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisi için aşağıdaki dört şartı (Moore-Penrose şartları) sağlayan bir G matrisine A matrisinin Moore-Penrose inversi denir ve A^+ veya $A^\dagger$ ile gösterilir.

i. $AGA = A$

ii. $GAG = G$

iii. $(AG)^* = AG$

iv. $(GA)^* = GA$

Eğer G matrisi sadece *i.* şartını sağlıyorsa bu G matrisine A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi (iç inversi) denir ve A^- veya $A^{(1)}$ ile gösterilir. Sadece *ii.* şartını sağlayan G matrisine A matrisinin bir dış inversi denir ve $A^{(2)}$ ile gösterilir. Hem *i.* hem de *ii.* şartını sağlayan G matrisine ise A matrisinin bir yansımalı genelleştirilmiş inversi denir ve $A^{(1,2)}$ veya A_0 ile gösterilir.

2.1.2 Moore-Penrose İnverslerin Varlığı

A nonsingüler matrisinin inversi olan A^{-1} matrisinin Moore-Penrose şartlarını sağlayacağı açıktır. Yani $A^{-1} = A^+$ olur. Bununla birlikte, eğer A bir singüler matris veya kare olmayan bir matris ise bu durumda Moore-Penrose şartlarını sağlayan bir A^+ matrisinin mevcut olup olmadığı ile ilgili bir soru ortaya çıkar. Bu kısımda her A matrisi için bir A^+ matrisinin var ve tek olduğu gösterilecektir. Ayrıca bu şekilde tanımlanan Moore-Penrose inversin bir takım özellikleri ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 2.1.14 Eğer A matrisi $m \times n$ tipinde sıfır matris ise, A^+ matrisi $n \times m$ tipinde sıfır matristir.

İspat. Açık olarak $A^+ = 0$ alındığında Moore-Penrose şartlarının sağlandığı görülür.

Teorem 2.1.15 Her A matrisi için Moore-Penrose şartlarını sağlayan bir A^+ matrisi vardır.

İspat. Eğer $A = 0$ ise $A^+ = 0$ olduğu açıktır. $A \neq 0$ olsun. A matrisinin r ranklı olduğu kabul edilsin. Bu durumda A matrisi

$$A = BC \tag{2.1.15}$$

şeklinde parçalanabilir. Burada B matrisi $m \times r$ tipinde $r > 0$ ranklı ve C matrisi $r \times n$ tipinde $r > 0$ ranklı matrisler olup, B^*B ve CC^* çarpımlarının her ikisi de nonsingülerdir. Bu durumda eğer A^+ matrisi

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \tag{2.1.16}$$

olarak alınırsa, A^+ matrisi Moore-Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

i.

$$\begin{aligned} AA^+A &= (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC) \\ &= B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C = BC = A \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} A^+AA^+ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \\ &= A^+ \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} (AA^+)^* &= [(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*]^* \\ &= B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^* \\ &= B(B^*B)^{-1}B^* \\ &= B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \\ &= (BC)C^*(CC^*)?^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \\ &= AA^+ \end{aligned}$$

iv.

$$\begin{aligned} (A^+A)^* &= [C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)]^* \\ &= C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \\ &= C^*(CC^*)^{-1}C \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC) \\ &= A^+A \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Teorem 2.1.16 Herhangi bir A matrisi için Moore-Penrose şartlarını sağlayan bir tek A^+ matrisi vardır. Yani her A matrisinin bir tek Moore-Penrose inversi vardır.

İspat. A matrisinin Moore-Penrose şartlarını sağlayan herhangi iki Moore-Penrose inversi A_1^+ ve A_2^+ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
A_1^+ &= A_1^+AA_1^+ \\
&= A_1^+(AA_1^+)^* \\
&= A_1^+(A_1^+)^*A^* \\
&= A_1^+(A_1^+)^*(AA_2^+A)^* \\
&= A_1^+(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A^* \\
&= A_1^+(AA_1^+)^*(AA_2^+)^* \\
&= A_1^+AA_1^+AA_2^+ \\
&= A_1^+AA_2^+ \\
&= A_1^+A(A_2^+AA_2^+) \\
&= (A_1^+A)^*(A_2^+A)^*A_2^+ \\
&= A^*(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A_2^+ \\
&= (AA_1^+A)^*(A_2^+)^*A_2^+ \\
&= A^*(A_2^+)^*A_2^+ \\
&= (A_2^+A)^*A_2^+ \\
&= A_2^+AA_2^+ \\
&= A_2^+
\end{aligned}$$

olduğundan $A_1^+ = A_2^+$ olur. Yani A^+ matrisi tektir.

Teorem 2.1.17 $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin bir Moore-Penrose inversi varsa $n \times m$ tipindedir.

İspat. AA^+ matrisinin simetrik ve dolayısıyla kare olması gerçeğinden ispat görülür.

Teorem 2.1.18 *i.* $m \times n$ tipindeki bir $A = [a_i j]$ matrisinin tüm elemanları 1 ise bu takdirde

$$A^+ = \frac{1}{(m.n)} A^*$$

ii. a, $n \times 1$ tipinde ve $a \neq 0$ olan bir sütun vektörü ise bu durumda a^+

$$a^+ = (a^* a)^{-1} a^*$$

şeklindedir.

iii. a, $1 \times n$ tipinde ve $a \neq 0$ olan bir satır vektörü ise bu durumda a^+

$$a^+ = a^* (a a^*)^{-1}$$

şeklindedir.

İspat.

i. İspat için teoremde verilen A^+ matrisinin Moore-Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Bu durumda

i. $AA^+A = A(\frac{1}{mn}A^*)A = A\frac{1}{mn}(A^*A) = A\frac{1}{mn}mn = A$

ii. $A^+AA^+ = (\frac{1}{mn}A^*)A\big(\frac{1}{mn}A^*\big) = \frac{1}{mn}(A^*A)\big(\frac{1}{mn}A^*\big) = \frac{1}{mn}mn\big(\frac{1}{mn}A^*\big) = \big(\frac{1}{mn}A^*\big) = A^+$

iii. $(AA^+)^* = \big(A\frac{1}{mn}A^*\big)^* = A\frac{1}{mn}A^* = AA^+$

iv. $(A^+A)^* = \big(\frac{1}{mn}A^*A\big)^* = \frac{1}{mn}A^*A = A^+A$

olduğu görülür.

ii. a^+ matrisi Moore-Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

i.

$$\begin{aligned} aa^+a &= a(a^*a)^{-1}a^*a \\ &= a(a^*a)^{-1}(a^*a) \\ &= a \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
a^+aa^+ &= (a^*a)^{-1}a^*a(a^*a)^{-1}a^* \\
&= (a^*a)^{-1}(a^*a)(a^*a)^{-1}a^* \\
&= (a^*a)^{-1}a^* \\
&= a^+
\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}
(aa^+)^* &= [a(a^*a)^{-1}a^*]^* \\
&= a(a^*a)^{-1}a^* \\
&= aa^+
\end{aligned}$$

iv.

$$\begin{aligned}
(a^+a)^* &= [(a^*a)^{-1}a^*a]^* \\
&= (a^*a)^{-1}a^*a \\
&= a^+a
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

iii. a^+ matrisi Moore-Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

i.

$$\begin{aligned}
aa^+a &= aa^*(aa^*)^{-1}a \\
&= (a?a^*)(aa^*)^{-1}a \\
&= a
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
a^+aa^+ &= a^*(aa^*)^{-1}aa^*(aa^*)^{-1} \\
&= a^*(aa^*)^{-1}(aa^*)(aa^*)^{-1} \\
&= a^*(aa^*)^{-1} \\
&= a^+
\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}(aa^+)^* &= [aa^*(aa^*)^{-1}]^* \\ &= aa^*(aa^*)^{-1} \\ &= aa^+\end{aligned}$$

iv.

$$\begin{aligned}(a^+a)^* &= [a^*(aa^*)^{-1}a]^* \\ &= a^*(aa^*)^{-1}a \\ &= a^+a\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Teorem 2.1.19 A herhangi bir matris olmak üzere

$$(A^*)^+ = (A^+)^* \tag{2.1.17}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. (2.1.15) bağıntısındaki gibi $A = BC$ olsun. $A^* = C^*B^*$ olduğundan

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

alınırsa

$$(A^+)^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \tag{2.1.18}$$

olur ki bu da A^* matrisinin Moore-Penrose inversidir. Gerçekten

i.

$$\begin{aligned}A^*(A^*)^+A^* &= C^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^* \\ &= C^*B^* \\ &= A^*\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}(A^*)^+A^*(A^*)^+ &= B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C\\ &= B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C\\ &= (A^*)^+\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}[A^*(A^*)^+]^* &= [(C^*B^*)B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C]^*\\ &= [C^*(CC^*)^{-1}C]^*\\ &= C^*(CC^*)^{-1}C\\ &= C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C\\ &= A^*(A^*)^+\end{aligned}$$

iv.

$$\begin{aligned}[(A^*)^+A^*]^* &= [B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C(C^*B^*)]^*\\ &= [B(B^*B)^{-1}B^*]^*\\ &= B(B^*B)^{-1}B^*\\ &= B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^*\\ &= (A^*)^+A^*\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \tag{2.1.19}$$

elde edilir. (2.1.18) ve (2.1.19) bağıntılarından ve bir matrisin Moore-Penrose inversi varsa tek olacağından dolayı

$$(A^*)^+ = (A^+)^*$$

olduğu görülür

Teorem 2.1.20 Bir matrisin Moore-Penrose inversinin Moore-Penrose inversi matrisin kendisine eşittir. Yani her hangi bir A matrisi için

$$(A^+)^+ = A$$

olur.

İspat. Moore-Penrose invers tanımından

i. $A^+(A^+)^+A^+ = A^+AA^+ = A^+$

ii. $(A^+)^+A^+(A^+)^+ = AA^+A = A = (A^+)^+$

iii. $[A^+(A^+)^+]^* = [A^+A]^* = A^+A = A^+(A^+)^+$

iv. $[(A^+)^+A^+]^* = [AA^+]^* = AA^+ = (A^+)^+A^+$

Teorem 2.1.21 A matrisinin Moore-Penrose inversinin rankı A matrisinin rankına eşittir. Yani

$$r(A) = r(A^+) \tag{2.1.20}$$

Teorem (2.1.13) $AA^+A = A$ Moore-Penrose şartına uygulandığında

$$r(A) = r(AA^+A) \leq \min\{r(A), r(A^+)\} \leq r(A^+) \tag{2.1.21}$$

elde edilir. Benzer şekilde Teorem (2.1.13) $A^+AA^+ = A^+$ Moore-Penrose şartına uygulanırsa

$$r(A^+) = r(A^+AA^+) \leq \min\{r(A), r(A^+)\} \leq r(A) \tag{2.1.22}$$

elde edilir. (2.1.21) ve (2.1.22) bağıntılarından dolayı (2.1.20) bağıntısı sağlanır.

Sonuç 2.1.1 A matrisinin rankı r ise A^+, AA^+, A^+A, AA^+A, A^+AA^+ matrislerinin her birinin rankı da r dir.

Teorem 2.1.22 A simetrik ve idempotent matris ise, $A^+ = A$ olur.

İspat. Moore-Penrose invers tanımından

i. $AA^+A = AAA = A^2A = AA = A^2 = A$

ii. $A^+AA^+ = AAA = A^2A = AA = A^2 = A = A^+$

iii. $[AA^+]^* = [AA]^* = [A^2]^* = A^* = A = A^2 = AA = AA^+$

iv. $[A^+A]^* = [AA]^* = [A^2]^* = A^* = A = A^2 = AA = A^+A$

olduğu görülür.

Teorem 2.1.23 $B = \text{Köş}\{b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}\}$ ise, B matrisinin Moore-Penrose inversi B^+, i-yinci satırı ve i-yinci sütununda yer alan köşegen elemanı $b_{ii} \neq 0$ ise b_{ii}^{-1} ve $b_{ii} = 0$ ise 0 olan bir köşegen matristir.

İspat. B^+ matrisinin Moore-Penrose şartlarını sağladığı açıkça görülür.

Teorem 2.1.24 *i.* A, $m \times n$ tipinde tam satır ranklı bir matris ise, bu durumda

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1} \quad \text{ve} \quad AA^+ = I_m$$

olur.

ii. A, $m \times n$ tipinde tam sütun ranklı bir matris ise, bu durumda

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^* \quad \text{ve} \quad A^+A = I_n$$

olur.

İspat. Teoremde verilen A^+ matrislerinin Moore-Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Buna göre

i. *a.* $AA^+A = AA^*(AA^*)^{-1}A = (AA^*)(AA^*)^{-1}A = A$

b. $A^+AA^+ = A^*(AA^*)^{-1}AA^*(AA^*)^{-1} = A^*(AA^*)^{-1}(AA^*)(AA^*)^{-1} = A^*(AA^*)^{-1}$
$= A^+$

c. $(AA^+)^* = (AA^*(AA^*)^{-1})^* = ((AA^*)(AA^*)^{-1})^* = I^* = I = (AA^*)(AA^*)^{-1}$
$= AA^*(AA^*)^{-1} = AA^+$

d. $(A^+A)^* = (A^*(AA^*)^{-1}A)^* = A^*(AA^*)^{-1}A = A^+A$

olduğu görülür. Benzer şekilde

ii. *a.* $AA^+A = A(A^*A)^{-1}A^*A = A(A^*A)^{-1}(A^*A) = A$

b. $A^+AA^+ = (A^*A)^{-1}A^*A(A^*A)^{-1}A^* = (A^*A)^{-1}(A^*A)(A^*A)^{-1}A^* = (A^*A)^{-1}A^*$
$= A^+$

c. $(AA^+)^* = (A(A^*A)^{-1}A^*)^* = A(A^*A)^{-1}A^* = AA^+$

d. $(A^+A)^* = ((A^*A)^{-1}A^*A)^* = ((A^*A)^{-1}(A^*A))^* = I^* = I = (A^*A)^{-1}(A^*A)$
$= (A^*A)^{-1}A^*A = A^+A$

olduğu görülür.

Teorem 2.1.25 $\neq 0$ ve $C \neq 0$ matrisleri sırasıyla $m \times r$ ve $r \times n$ tipinde matrisler olmak üzere r ranklı olsun. Bu durumda

$$(BC)^+ = C^+B^+ \tag{2.1.23}$$

İspat. Teorem 2.1.24 e göre $C^+ = C^*(CC^*)^{-1}$ ve $B^+ = (BB^*)^{-1}B^*$ olur ve buradan

$$C^+B^+ = C^*(CC^*)^{-1}(BB^*)^{-1}B^*$$

elde edilir. Bu değer zaten $(BC)^+$ matrisidir. O halde

$$C^+B^+ = (BC)^+$$

olduğu görülür.

3. BAZI MATRİS DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN BAĞIMSIZLIĞI ve RANKLARI

3.1 $BXC = A$'nın Çözümündeki Altmatrislerin Rankları ve Bağımsızlığı

$BXC = A$ keyfi bir f cismi üzerinde tutarlı bir matris denklemi olsun, burada $A \in f^{m \times n}$, $B \in f^{m \times k}$ ve $C \in f^{l \times n}$ verilsin. $X_1 \in f^{k_1 \times l_1}$, $X_2 \in f^{k_1 \times l_2}$, $X_3 \in f^{k_2 \times l_1}$ ve $X_4 \in f^{k_2 \times l_2}$, $k_1 + k_2 = k,\ l_1 + l_2 = l$ olmak üzere $BXC = A$ denklemi

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = A \tag{3.1.1}$$

şeklinde parçalansın. Bu kısımda (3.1.1) in çözümünde $X_1 - X_4$ alt matrislerinin maksimal ve minimal mümkün ranklarını belirleyeceğiz.

Lineer matris denklemlerinin çözümlerinin mümkün rankları ve ilgili çeşitli konular birçok bilim adamı tarafından ele alınmıştır. Örneğin (mitra, 1999) $AX = B$ ve $AXB = C$ matris denklemlerinin keyfi ranklı çözümlerini incelemiştir. Ayrıca (mitra, 1999) $AX = C,\ XB = D$ ikili matris denkleminin minimal ranklı ortak çözümlerini ele almıştır. (uhling, 1999) $AX = B$ denkleminin çözümlerinin maksimal ve minimal mümkün ranklarını araştırmıştır. (mitra, 1999) $A_1XB_1 = C_1$ ve $A_2XB_2 = C_2$ ikili matris denkleminin minimal ranklı ortak çözümlerini belirlemiştir.

Gösterim uygunluğu için (3.1.1) deki altmatrislerinin ailesini

$$S_i = \left\{ X_i : \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = A \right\} \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{3.1.2}$$

ile gösterelim. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = P_1 \times Q_1 \\
X_2 &= \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = P_1 \times Q_2
\end{aligned} \tag{3.1.3}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
X_3 &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = P_2 \times Q_1 \\
X_4 &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = P_2 \times Q_2
\end{aligned} \tag{3.1.4}
$$

yazılabilir. $BXC = A$ tutarlı olduğundan genel çözümü

$$X = B^{-}AC^{-} + F_B V + W E_C$$

şeklinde yazılabilir. (3.1.3) ve (3.1.4) bu değer yerine yazılırsa $X_1 - X_4$'ün genel ifadeleri

$$
\begin{aligned}
X_1 &= P_1 X_0 Q_1 + P_1 F_B V_1 + W_1 E_C Q_1 \\
X_2 &= P_1 X_0 Q_2 + P_1 F_B V_2 + W_1 E_C Q_2
\end{aligned} \tag{3.1.5}
$$

$$
\begin{aligned}
X_3 &= P_2 X_0 Q_1 + P_2 F_B V_1 + W_2 E_C Q_1 \\
X_4 &= P_2 X_0 Q_2 + P_2 F_B V_2 + W_2 E_C Q_2
\end{aligned} \tag{3.1.6}
$$

şeklinde yazılabilir, burada $X_0 = B^{-}AC^{-}$, $V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}$ ve $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ dir.

Teorem 3.1.1 (3.1.1) denkleminin tutarlı olduğunu varsayalım. Bu taktirde

$$\max_{X_1 \in S_1} r(X_1) = \min \left\{ k_1, l_1, r \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} - r(B) - r(C) + k_1 + l_1 \right\} \tag{3.1.7}$$

$$\min_{X_1 \in S_1} r(X_1) = \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} - r(B_2) - r(C_2) \tag{3.1.8}$$

dir.

İspat. (3.1.1) de X_1'in maksimal ve minimal ranklarının elde edilmesi $BXC = A$ tutarlı denklemine göre P_1XQ_1'in maksimal ve minimal ranklarının elde edilmesine denk olacaktır. Böylece

$$\max_{BXC=A} r(P_1XQ_1) = \min\left\{ r(P_1), r(Q_1), r\begin{bmatrix} 0 & 0 & P_1 \\ 0 & A & B \\ Q_1 & C & 0 \end{bmatrix} - r(B - r(C) \right\}$$

$$\min_{BXC=A} r(P_1XQ_1) = r\begin{bmatrix} 0 & 0 & P_1 \\ 0 & A & B \\ Q_1 & C & 0 \end{bmatrix} - r\begin{pmatrix} P_1 \\ B \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} Q_1, & C \end{pmatrix}$$

yazılabilir. $B = \begin{bmatrix} B_1, & B_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$ ve P_1 ve P_2 matrislerini bu ifadelerde yerine yazıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (3.1.7) ve (3.1.8) ifadeleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

(3.1.1)'deki X_2, X_3 ve X_4'ün maksimal ve minimal rankları da benzer şekilde elde edilebilir. (3.1.7) ve (3.1.8)'deki formüller (3.1.1)'in çözümlerinin yapısının karakterizasyonuna yardımcı olur. Bunun için aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1.1 (3.1.1) matris denkleminin tutarlı olduğunu kabul edelim. Bu taktirde

i. (3.1.1) denkleminin $X = \begin{bmatrix} 0 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$ formunda bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} = r(B_1) + r(C_2)$ olmasıdır.

ii. (3.1.1)'in tüm çözümlerinin $X = \begin{bmatrix} 0 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$ formunda olması için gerek ve yeter şart

$$r\begin{pmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix} = r(B) + r(C) - k_1 - l_1 \tag{3.1.9}$$

veya buna denk olarak

$$r\begin{pmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix} = r(B_2) + r(C_2), \;\; r(B_1) = k_1, \;\; r(C_1) = l_1,$$

$$\mathcal{R}(B_1) \cap \mathcal{R}(B_2) = \{0\} \;\text{ ve }\; \mathcal{R}(C_1^T) \cap \mathcal{R}(C_2^T) = \{0\} \tag{3.1.10}$$

olmasıdır.

İspat. (i) kısmı ve (3.1.9) eşitliği (3.1.7) ve (3.1.8)'den direkt olarak görülmektedir. Öte yandan

$$\begin{aligned} r\begin{pmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix} - r(B) - r(C) + k_1 + l_1 &= r\begin{pmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix} - r(B_2) - r(C_2) \\ &\quad + [k_1 + r(B_1) - r(B)] \\ &\quad + [l_1 + r(C_2) - r(C)] \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece (3.1.9) ifadesi (3.1.10) ifadesine denktir.

Teorem 3.1.2 (3.1.1) matris denklemi tutarlı olsun. Bu taktirde

i. (3.1.1) denklemi $X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & 0 \end{bmatrix}$ formunda bir çözüme sahiptir ancak ve ancak $\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathcal{R}(C_1^T)$ dir.

ii. (3.1.1) denklemi $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ formunda bir çözüme sahiptir ancak ve ancak $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B_1)$ dir.

iii. (3.1.1) denklemi $X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ formunda bir çözüme sahiptir ancak ve ancak $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B_1)$ ve $\mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathcal{R}(C_1^T)$ dir.

İspat. Bilindiği gibi

$$\begin{aligned} \min_{BXC=A} r\begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \end{bmatrix} &= \min_{BXC=A} r(XQ_2) \\ &= r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix} - r(C_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min_{BXC=A} r\begin{pmatrix} X_3 & X_4 \end{pmatrix} &= \min_{BXC=A} r(P_2X) \\ &= r\begin{pmatrix} A & B_1 \end{pmatrix} - r(B_1)\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece *i.* ve *ii.* kısımları sağlanır. *iii.* deki sonuç ise kolayca görülür.

Teorem 3.1.3 (3.1.1) matris denklemi tutarlı olsun. Bu taktirde

i. (3.1.1) denklemi

$$X = \begin{bmatrix} \hat{X}_1 & X_2 \\ X_3 & \hat{X}_4 \end{bmatrix} \text{ ve } X = \begin{bmatrix} X_1 & \hat{X}_2 \\ \hat{X}_3 & X_4 \end{bmatrix}$$

formlarında iki çözüme sahip olmak zorundadır, burada

$$\begin{aligned} r(\hat{X}_1) &= \min_{X_1 \in S_1} r(X_1) \\ &= r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} - r(B_2) - r(C_2) \\ r(\hat{X}_2) &= \min_{X_2 \in S_2} r(X_2) \\ &= r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} - r(B_2) - r(C_1) \\ r(\hat{X}_3) &= \min_{X_3 \in S_3} r(X_3) \\ &= r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} - r(B_1) - r(C_2) \\ r(\hat{X}_4) &= \min_{X_4 \in S_4} r(X_4) \\ &= r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} - r(B_1) - r(C_1) \end{aligned}$$

dir.

ii. (3.1.1) denklemi $X = \begin{bmatrix} 0 & X_2 \\ X_3 & 0 \end{bmatrix}$ formunda bir çözüme sahiptir ancak ve ancak

$$r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} = r(B_1) + r(C_1)$$

ve

$$r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} = r(B_2) + r(C_2)$$

dir.

iii. (3.1.1) matris denklemi $X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_4 \end{bmatrix}$ formunda bir çözüme sahiptir ancak ve ancak

$$r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} = r(B_1) + r(C_2) \text{ ve } r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} = r(B_2) + r(C_1)$$

dir.

Teorem 3.1.3 (iii)'deki sonuç gerçekten $B_1X_1C_1 + B_2X_4C_2 = A$ matris denkleminin çözülebilir olması için bir gerek ve yeter koşuldur. (3.1.1)'deki $X_1 - X_4$ alt matrislerinin tekliği (3.1.3) ve (3.1.4)'dan tain edilir.

Teorem 3.1.4 (3.1.1) denklemi tutarlı olsun. (3.1.1)'deki X_1 matrisinin tek olması için gerek ve yeter şart (3.1.1) denkleminin

$$r(B_1) = k_1,\ r(C_1) = l_1,\ \mathcal{R}(B_1) \cap \mathcal{R}(B_2) = \{0\},\ \mathcal{R}(C_1^T) \cap \mathcal{R}(C_2^T) = \{0\} \quad (3.1.11)$$

dört koşuşunu sağlamasıdır.

İspat. (3.1.3)'den kolayca görülebilir ki X_1'in tek olması için gerek ve yeter şart $P_1F_B = 0$ ve $E_CQ_1 = 0$ olmasıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned} P_1F_B = 0 \Rightarrow r\begin{bmatrix} P_1 \\ B \end{bmatrix} = r(B) \quad &\Rightarrow \quad k_1 + r(B_2) = r(B_1) \\ &\Rightarrow \quad r(B_1) = k \text{ ve } \mathcal{R}(B_1) \cap \mathcal{R}(B_2) = \{0\} \\ E_CQ_1 = 0 \Rightarrow r\begin{bmatrix} Q_1, & C \end{bmatrix} = r(C) \quad &\Rightarrow \quad l_1 + r(C_2) = r(C) \\ &\Rightarrow \quad r(C_1) = l_1 \text{ ve } \mathcal{R}(C_1^T) \cap \mathcal{R}(C_2^T) = \{0\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.1.5 (3.1.1) matris denklemi tutarlı olsun. $B \neq 0$ ve $C \neq 0$ olsun.

i. (3.1.1)'de $S_1 - S_4$ matris kümelerinin bağımsız olduğunu varsayalım. Bu taktirde

$$\max_{X_i \in S_i} r\left(A - \begin{bmatrix} B_1, & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}\right) \tag{3.1.12}$$

$$= \min\{r(B), r(C), r(B_1) + r(B_2) - r(B) + r(C_1) + r(C_2) - r(C)\}$$

dir.

ii. (3.1.1)'deki $X_1 - X_4$ alt matrisleri bağımsızdır, yani $X_i \in S_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$'ün her bir seçimi için $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$ matrisi (3.1.1)'in bir çözümüdür ancak ve ancak

$$\mathcal{R}(B_1) \cap \mathcal{R}(B_2) = \{0\} \text{ ve } \mathcal{R}(C_1^T) \cap \mathcal{R}(C_2^T) = \{0\} \tag{3.1.13}$$

dir.

İspat. (3.1.3) ve (3.1.4)'ya uygun olarak $S_1 - S_4$'deki $X_1 - X_4$ genel ifadeleri birbirinden bağımsız olarak

$$\begin{aligned} X_1 &= P_1X_0Q_1 + P_1F_BV_1 + W_1E_CQ_1 \\ X_2 &= P_1X_0Q_2 + P_1F_BV_2 + W_2E_CQ_2 \\ X_3 &= P_2X_0Q_1 + P_2F_BV_3 + W_3E_CQ_1 \\ X_4 &= P_2X_0Q_2 + P_2F_BV_4 + W_4E_CQ_2 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir, burada $X_0 = B^-AC^-$, $V_1 - V_4$ ve $W_1 - W_4$ keyfidir. Bunları

X'de yerine yazarak

$$\begin{aligned}
X &= \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} X_0 \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} P_1F_B & 0 \\ 0 & P_2F_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_CQ_1 & 0 \\ 0 & E_CQ_2 \end{bmatrix} \\
&= X_0 + GV + WH
\end{aligned}$$

elde edilir, burada $G = \mathrm{diag}(\mathrm{P_1F_B}, \mathrm{P_2F_B})$, $H = \mathrm{diag}(\mathrm{E_CQ_1}, \mathrm{E_CQ_2})$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}
\max_{X_i \in S_i} r &\left(A - \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \right) \\
&= \max_{V,W} r(BGVC + BWHC) \\
&= \min \{r(B), r(C), r(BG) + r(HC)\} \qquad (3.1.14)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da

$$\begin{aligned}
r(BG) &= r \begin{bmatrix} B_1P_1F_B, & B_2P_2F_B \end{bmatrix} \\
&= r \begin{bmatrix} B_1P_1 & B_2P_2 \\ B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} - 2r(B) \\
&= r \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & B_2 \\ B_1 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 \end{bmatrix} - 2r(B) \\
&= r(B_1) + r(B_2) - r(B)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r(HC) &= r\begin{bmatrix} E_C & Q_1 & C_1 \\ E_C & Q_2 & C_2 \end{bmatrix} \\
&= r\begin{bmatrix} Q_1 & C_1 & C & 0 \\ Q_2 & C_2 & 0 & C \end{bmatrix} - 2r(C) \\
&= r\begin{bmatrix} C_1 & C_1 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \\ C_2 & 0 & C_2 \end{bmatrix} - 2r(C) \\
&= r(C_1) + r(C_2) - r(C)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Bu değerler (3.1.14)'te yerine yazılırsa (3.1.12) eşitliği elde edilmiş olur. (ii) kısmındaki ifade ise (3.1.12)'den direkt olarak görülebilir.

$$A \in f^{m\times n},\ \ B \in f^{m\times k},\ \ C \in f^{l\times n},\ \text{ ve }\ D \in f^{l\times k}$$

olmak üzere

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{3.1.15}$$

bir parçalı matris olsun ve M'nin iç inversini $G_1 \in f^{n\times m}$ olmak üzere

$$M^- = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix} \tag{3.1.16}$$

formunda gösterelim. Bu kısımda (3.1.16)'daki $G_1 - G_4$ bloklarının maksimal ve minimal ranklarını belirleyip bunlarla A, B, C ve D'nin maksimal ve minimal rankları arasındaki ilişkiyi göz önüne alacağız. Gösterim uygunluğu olsun diye

$$T_i = \left\{ G_i : \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix} \in \{M^-\} \right\}\ \ i = 1, 2, 3, 4 \tag{3.1.17}$$

notasyonunu tanımlayalım. Belirtelimki M^- $M \times M = M$ matris denkleminin bir çözümüdür. Böylece Teorem (3.1.1)'deki sonuçları (3.1.15) ve (3.1.16)'ya uygularsak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.6 M ve M^- (3.1.15) ve (3.1.16)'da verildiği gibi olsun. Bu taktirde

$$\max_{G_1 \in T_1} r(G_1) = \min\{m, n, m+n+r(D)-r(M)\} \tag{3.1.18}$$

$$\min_{G_1 \in T_1} r(G_1) = r(M) + r(D) - r\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \tag{3.1.19}$$

dır.

İspat. Teoremin ispatı (3.1.7) ve (3.1.8)'den kolayca görülür.

Sonuç 3.1.2 M ve M^- (3.1.15) ve (3.1.16) verildiği gibi olsun. Bu taktirde

i. M, $M^- = \begin{bmatrix} 0 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix}$ formunda bir g-inverse sahiptir ancak ve ancak

$$r(M) = r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} - r(D)$$

dir.

ii. M'nin tüm g-inversleri $M^- = \begin{bmatrix} 0 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix}$ formundadır ancak ve ancak

$$r(M) = m + n - r(D)$$

dir.

İspat. Sonucun ispatı Teorem (3.1.6)'dan kolayca görülür.

Sonuç 3.1.3 M ve M^- (3.1.15) ve (3.1.16) verildiği gibi olsun. Bu taktirde

i. $M, M^- = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ G_3 & 0 \end{bmatrix}$ formunda bir g-inverse sahiptir ancak ve ancak

$$\mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}^T\right) \subset \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}^T\right)$$

dır.

ii. $M, M^- = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ formunda bir g-inverse sahiptir ancak ve ancak

$$\mathcal{R}\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \subset \mathcal{R}\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$$

dir.

iii. $M, M^- = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ formunda bir g-inverse sahiptir ancak ve ancak

$$r(M) = r(A)$$

dır.

İspat. Sonucun ispatı Teorem 3.1.2'den kolayca görülür.

Sonuç 3.1.4 M ve M^- (3.1.15) ve (3.1.16) verildiği gibi olsun. Bu taktirde

i. $M, M^- = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_4 \end{bmatrix}$ formunda g-inverse sahiptir ancak ve ancak

$$\begin{aligned} r(M) &= r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} - r(C) \\ &= r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r(B) \end{aligned}$$

dir.

ii. $M, M^- = \begin{bmatrix} 0 & G_2 \\ G_3 & 0 \end{bmatrix}$ formunda g-inverse sahiptir ancak ve ancak

$$\begin{aligned} r(M) &= r\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} C, & D \end{bmatrix} - r(D) \\ &= r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A, & B \end{bmatrix} - r(A) \end{aligned}$$

dir.

İspat. Sonucun ispatı Teorem 3.1.3 (b) ve (c)'den direkt olarak elde edilir.

Sonuç 3.1.5 M ve M^- (3.1.15) ve (3.1.16)'daki gibi olsun. Bu taktirde (3.1.16)'daki G_1 alt matrisi tektir ancak ve ancak M aşağıdaki üç şartı sağlar.

i. $r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = M$

ii. $r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = n$

iii. $r(M) = n + r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = m + r\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}$

İspat. Sonucun ispatı 3.1.4'ten kolayca görülebilir.

Teorem 3.1.7 M ve M^- (3.1.15) ve (3.1.16)'daki gibi olsun.

i. (3.1.17)'deki $T_1 - T_4$ dört bağımsız matris olarak göz önüne alalım. Bu taktirde

$$\max_{G_i \in T_i} r\left(M - M\begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix} M\right) = \min\left\{r(M), r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} - 2r(M)\right\}$$

dir.

ii. (3.1.16)'daki $G_1 - G_4$ matrisleri bağımsızdır ancak ve ancak M matrisi rank toplanabilirlik şartını sağlar.

$$\begin{aligned} r(M) &= r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \\ &= r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir.

İspat. İspat Teorem 3.1.5'dan kolayca görülebilir.

Aşağıda $T_1 - T_4$ (3.1.17)'deki tanımlandığı şekilde olmak üzere

$$\{A^-\} \text{ ve } T_1;\ \{B^-\} \text{ ve } T_3;\ \{C^-\} \text{ ve } T_2;\ \{D^-\} \text{ ve } T_4$$

arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Teorem 3.1.8 M ve M^- (3.1.15) ve (3.1.16)'daki gibi olsun. Bu taktirde

$$\max_{G_i \in T_i} r(A - AG_1A) = \min\left\{ r(A),\ r(A) + r\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} - r(M) \right\} \tag{3.1.20}$$

ve

$$\min_{G_i \in T_i} r(A - AG_1A) = r(A) + r(M) - r\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & 0B \\ 0 & CD \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{3.1.21}$$

dir.

İspat. $P = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix}$ ve $Q = \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix}^T$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
\max_{G_1 \in T_1} r(A - AG_1A) &= \max_{M^-} r(A - APM^-QA) \\
&= \min\left\{ r(AP),\ r(QA),\ r\begin{bmatrix} M & QA \\ AP & 0 \end{bmatrix} - r(M) \right\} \\
&= \min\{ r(A),\ r(M - QAP) + r(A) - r(M) \} \\
&= \min\left\{ r(A),\ r\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} + r(A) - r(M) \right\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\min_{G_1 \in T_1} r(A - AG_1A) &= \min_{M^-} r(A - APM^-QA) \\
&= r(M) - r\begin{bmatrix} M, & QA \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} M \\ AP \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} M & QA \\ AP & A \end{bmatrix} \\
&= r(A) + r(M) + r(M - QAP) - r\begin{bmatrix} M, & QA \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} M \\ AP \end{bmatrix} \\
&= r(A) + r(M) + r\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & 0B \\ 0 & CD \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olduğu gösterilebilir. Bu da (3.1.20) ve (3.1.21)'deki ifadelerin ta kendisidir.

Sonuç 3.1.6 M ve M^- (3.1.15) ve (3.1.16)'daki gibi olsun. Bu taktirde

i. $M,\ M^- = \begin{bmatrix} A^- & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix}$ formunda bir g-inverse sahiptir ancak ve ancak

$$r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} = r(A) + r(M) + r\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

dir.

ii. $T_1 \subseteq \{A^-\}$ dir. Yani T_1'deki herhangi bir G_1 A'nın bir g-inversidir, ancak ve ancak $r(M) = r(A) + r\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}$ dir.

İspat. İspat Teorem 3.1.8'den kolayca görülebilir.

Sonuç 3.1.7 M ve M^- (3.1.15) ve (3.1.16)'daki gibi olsun. Ayrıca $T_1 - T_4$ (3.1.17)'deki gibi verilsin. Bu taktirde

$$T_1 \subseteq \{A^-\},\ T_2 \subseteq \{C^-\},\ T_3 \subseteq \{B^-\},\ T_4 \subseteq \{D^-\} \tag{3.1.22}$$

ifadelerini sağlaması için gerek ve yeter şart

$$r(M) = r(A) + r(B) + r(C) + r(D) \tag{3.1.23}$$

olmasıdır.

İspat. Eğer (3.1.22) sağlanıyorsa bu taktirde

$$\begin{aligned} r(M) = r(MM^-) &= tr(MM^-) = tr\begin{bmatrix} AG_1 + BG_3 & AG_2 + BG_4 \\ CG_1 + DG_3 & CG_2 + DG_4 \end{bmatrix} \\ &= tr(AG_1) + tr(BG_3) + tr(CG_2) + tr(DG_4) \\ &= tr(AA^-) + tr(BB^-) + tr(CC^-) + tr(DD^-) \\ &= r(A) + r(B) + r(C) + r(D) \end{aligned}$$

elde edilir. Tersine olarak eğer (3.1.23) sağlanıyorsa bu taktirde (3.1.22) Sonuç 3.1.6 (*ii*)'nin doğal bir sonucu olarak sağlanır. Bu da ispatı tamamlar.

3.2 Matris Denklem Çifti İçin Ortak Çözümler

Bu kısımda

$$\begin{aligned} AX + XB &= M \\ AXB &= C \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

eşanlı matris denklem çiftinin ortak çözümlerini ele alacağız ve bunların matrislerin genelleştirilmiş inverslerine bou uygulamalarını vereceğiz. (3.2.1)'deki ilk denkleme literatürde Sylvester denklemi denir ve bu denklem pek çok bilim adamı tarafından çalışılmıştır. (3.2.1)'deki matris denklem çiftinin ortak çözümünün incelenmesinde

$$AA^- = A^-A, \;\; A^kA^- = A^-A^k$$

ve

$$A^DA^- = A^-A^D, \;\; BAA^- = A^-AB$$

ve benzeri matrislerin genelleştirilmiş inversleri için değişik komutatifliklerin karakterizasyonundan yararlanılacaktır. A^- genelleştirilmiş inversi (iç invers) $AXA = A$ matris denkleminin bir çözümüdür. Bu nedenle yukarıdaki eşitlikler (3.2.1)'in özel durumları olarak düşünülebilir.

$\mathbb{C}$ kompleks sayılar çismini, $\mathcal{R}(A)$, $r(A)$, A^* ve A^- de sırasıyla A matrisinin ranjını, rankını, eşlenik transpozunu ve genelleştirilmiş inversini göstermektedir. Ayrıca herhangi bir A^- için $E_A = I - AA^-$ ve $F_A = I - A^-A$ olsun. Aşağıdaki rank formülleri [31] Marsaglia ve Styan tarafından verilmiştir.

Lemma 3.2.1 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times k}$ ve $C \in \mathbb{C}^{l\times n}$ verilmiş olsun.

i. $r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = r(A) + r(E_AB) = r(B) + r(E_BA)$

ii. $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(A) + r(CF_A) = r(C) + r(AF_C)$

iii. $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(B) + r(C) + r(E_BAF_C)$ dir.

3.2.1 *iii*'den

$$r\begin{bmatrix} A & BF_{B_1} \\ E_{C_1}C & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B & 0 \\ C & 0 & C_1 \\ 0 & B_1 & 0 \end{bmatrix} - r(B_1) - r(C_1) \tag{3.2.2}$$

elde edilir. 3.2.1 ve (3.2.2) matrislerin genelleştirilmiş inverslerini içeren çeşitli rank eşitliklerinin belirlenmesinde oldukça kullanışlıdır.

$AXB = C$ matris denklemi hakkındaki aşağıdaki sonuç çok iyi bilinmektedir. [4,6,42]

Lemma 3.2.2 Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i. AXB matris denklemi tutarlıdır,

ii. $AA^{-}C = C$ ve $CB^{-}B = C$,

iii. $AA^{-}CB^{-}B = C$,

iv. $\mathcal{R}(C) \subseteq \mathcal{R}(A)$ ve $\mathcal{R}(C^{*}) \subseteq \mathcal{R}(B^{*})$,

v. $r\begin{bmatrix} A, & C \end{bmatrix} = r(A)$ ve $r\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = r(B)$.

Lemma 3.2.2'deki beş ifadeden birinin sağlanması durumunda $AXB = C$'nin genel çözümü V_1, V_2 ve V keyfi matrisler olmak üzere

$$X = A^{-}CB^{-} + V - A^{-}AVBB^{-} \text{ veya } X = A^{-}CB^{-} + F_AV_1 + V_2E_B$$

formunda ifade edilebilir.

Lemma 3.2.3 $A \in \mathbb{C}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{C}^{q\times n}$, $C \in \mathbb{C}^{m\times r}$, $D \in \mathbb{C}^{s\times n}$ ve $N \in \mathbb{C}^{m\times n}$ verilmiş olsun. Bu taktirde

i.

$$AXB + CYD = N \tag{3.2.3}$$

matris denklemi çözülebilir ancak ve ancak aşağıdaki dört rank eşitliği sağlanır [39].

$$r\begin{bmatrix} A, & C, & N \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A, & C \end{bmatrix}, \quad r\begin{bmatrix} B \\ D \\ N \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \tag{3.2.4}$$

$$r\begin{bmatrix} N & A \\ D & 0 \end{bmatrix} = r(A) + r(D), \quad r\begin{bmatrix} N & C \\ B & 0 \end{bmatrix} = r(B) + r(C) \tag{3.2.5}$$

ii. (3.2.3) çözülebilir olduğunda genel çözüm X_0 ve Y_0 (3.2.3)'ün iki özel çözümü, X_1, X_2, X_3 ve Y_1, Y_2, Y_3 aşağıdaki homojen matris denklemlerinin genel çözümleri olmak üzere

$$X = X_0 + X_1 + X_2 + X_3 \text{ ve } Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 \tag{3.2.6}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} AX_1 - CY_1 &= 0 \\ X_2B + Y_D &= 0 \\ AX_3B &= 0 \\ CY_3D &= 0 \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Veya buna denk olarak X_0 ve Y_0 (3.2.3) denkleminin iki özel çözümü,

$$G = \begin{bmatrix} A, & -C \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}, \quad U, V_1, V_2, W_1, \text{ ve } W_2$$

keyfi olmak üzere

$$X = X_0 + \begin{bmatrix} I_p, & 0 \end{bmatrix} F_G U E_H \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix} + F_A V_1 + V_2 E_B \tag{3.2.8}$$

$$Y = Y_0 + \begin{bmatrix} 0, & I_r \end{bmatrix} F_G U E_H \begin{bmatrix} 0 \\ I_s \end{bmatrix} + F_C W_1 + W_2 E_D \tag{3.2.9}$$

şeklindedir. (3.2.3)'ün özel çözümlerinin bazı ifadeleri [4] ve [39] nolu çalışmalarda verilmiştir. Fakat biz sadece (3.2.8) ve (3.2.9)'u kullanacağız.

Teorem 3.2.1 $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{C}^{m\times n}$ verilsin. Bu taktirde

$$AX + XB = M, \;\; AXB = C \tag{3.2.10}$$

matris denklemleri bir X ortak çözüme sahiptir ancak ve ancak A, B, C, M aşağıdaki altı şartı sağlar.

i.

$$\mathcal{R}(C) \subseteq \mathcal{R}(A), \; \mathcal{R}(C^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*), \; r\begin{bmatrix} M & A \\ B & 0 \end{bmatrix} = r(A) + r(B) \tag{3.2.11}$$

$$AC + CB = AMB, \; \mathcal{R}(C - AM) \subseteq \mathcal{R}(A^2), \; \mathcal{R}\big[(C - MB)^*\big] \subseteq \mathcal{R}\big[(B^2)^*\big] \tag{3.2.12}$$

ii. (3.2.11) ve (3.2.12)'nin sağlanması durumunda (3.2.10)'un genel ortk çözümü

$$X = X_0 + \ldots\ldots \tag{3.2.13}$$

formundadır, burada X_0 (3.2.10) denkleminin bir özel çözümü olup

$$G = \begin{bmatrix} -F_A & -A \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} B \\ E_B \end{bmatrix}, \; U \text{ ve } S \text{ keyfidir.}$$

iii. (3.2.10) denkleminin tek ortak çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart A ve B'nin nonsingüler ve $AC + CB = AMB$ olmasıdır. Bu durumda tek ortak çözüm $X = A^{-1}CB^{-1}$ dir.

İspat. İlk olarak (3.2.10) denkleminin bir ortak çözüme sahip olduğunu varsayalım. Bu $AX+YB = C$ ve $AXB = C$'nin çözülebilir olması demektir. Böylece (3.2.11) Lemma 3.2.2 ve Lemma 3.2.3'ten direkt elde edilir. $AX + XB = M$ denkleminin her iki yanını önden A sondan B ile çarparak sırasıyla $A^2X = AM - C$ ve $XB^2 = MB - C$ elde edilir. Bu ise (3.2.12)'deki iki ranj kapsamasını sağlar. Tersine olarak $AX + XB = M$'nin her iki yanını önden ve sondan A ve B ile çarparak (3.2.12)'deki birinci eşitlik elde edilir.

(3.2.11) ve (3.2.12) altında (3.2.10)'daki iki denklemin bir ortak çözüme sahip olduğunu ve onların genel ortak çözümünün ancak ve ancak (3.2.13)'teki gibi yazılabildiğini göstermeliyiz. Lemma 3.2.2'den (3.2.11) altında $AXB = C$'nin genel çözümü V_1 ve V_2 keyfi olmak üzere

$$X = A^{-}CB^{-} + F_AV_1 + V_2E_B \tag{3.2.14}$$

olacaktır. Bunu $AX + XB = M$'de yerine yazarak

$$AV_2E_B + F_AV_1B = M - CB^{-} - A^{-}C \tag{3.2.15}$$

elde edilir. Lemma 3.2.3'ten bu denklemin çözülebilir olması için

$$r\begin{bmatrix} A, & F_A & N \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & F_A \end{bmatrix}, \; r\begin{bmatrix} B \\ E_B \\ N \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} B \\ E_B \end{bmatrix} \tag{3.2.16}$$

ve

$$r\begin{bmatrix} N & A \\ B & 0 \end{bmatrix} = r(A) + r(B), \; r\begin{bmatrix} N & F_A \\ E_B & 0 \end{bmatrix} r(F_A) + e(E_B) \tag{3.2.17}$$

şeklindeki dört rank denklemini sağlaması olduğu görülür, burada $N = M - CB^{-} - A^{-}C$'dir. Bunları Lemma 3.2.1 ve (3.2.2) ile sadeleştirerek

$$\begin{aligned} r\begin{bmatrix} A, & F_A, & N \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A & I_m & M - A^{-}C \\ 0 & A & 0 \end{bmatrix} - r(A) \\ &= r\begin{bmatrix} A^2, & C - AM \end{bmatrix} + M - r(A), \\ r\begin{bmatrix} A, & F_A \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A & I_m \\ 0 & A \end{bmatrix} - r(A) \\ &= r(A^2) + m - r(A), \\ r\begin{bmatrix} B \\ E_B \\ N \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} B & 0 \\ I_n & B \\ M - C_B^{-} & 0 \end{bmatrix} - r(B) \\ &= r(B^2) + n - r(B), \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

$$
\begin{aligned}
r\begin{bmatrix} N & A \\ B & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} M - CB^{-} - A^{-}C & A \\ B & 0 \end{bmatrix} \\
&= r\begin{bmatrix} M & A \\ B & 0 \end{bmatrix}, \\
r\begin{bmatrix} N & F_A \\ E_B & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} M - CB^{-} - A^{-}C & I_m & 0 \\ I_n & 0 & B \\ 0 & A & 0 \end{bmatrix} - r(A) - r(B), \\
&= r\begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & AMB - AC - CB \end{bmatrix} - r(A) - r(B), \\
&= m + n + r(AMB - AC - CB) - r(A) - r(B),
\end{aligned}
$$

ve

$$
r(F_A) + r(E_B) = m + n - r(A) - r(B)
$$

eşitlikleri elde edilir. Bunları (3.2.16) ve (3.2.17)'de yerine yazarak (3.2.11) ve (3.2.12)'deki sonuçlar elde edilir. Bu durum (3.2.11) ve (3.2.12) altında (3.2.15) denkleminin çözülebilir olduğunu gösterir. Lemma 3.2.3'e göre (3.2.15)'de V_1 ve V_2 için çözüm yaparak V_{10} ve V_{20} (3.2.15)'in iki özel çözümü, U, S_1, S_2, T_1 ve T_2'de keyfi olmak üzere V_1 ve V_2 genel çözümlerinin

$$
V_1 = V_{10} + \ldots
$$

ve

$$
V_2 = V_{20} + \ldots
$$

şeklinde olduğu görülür. Bunlar (3.2.14)'te yerine yazılırsa

$$
X = A^{-}CB^{-} + \ldots
$$

elde edilir ki bu (3.2.13) formunda da yazılabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yukarıdaki teoremden bazı direkt sonuçlar türetilebilir. Burada onlardan bazılarını ifade edeceğiz.

Sonuç 3.2.1 $A, M \in C^{m\times m}$ verilsin. Bu taktirde

i.

$$M = AA^{-} - A^{-}A \tag{3.2.19}$$

olacak şekilde A^{-} nin mevcut olması için gerek ve yeter şart A ve M'nin aşağıdaki dört şartı sağlamasıdır.

$$\begin{aligned} AMA &= 0 \\ \mathcal{R}(A + AM) &\subseteq \mathcal{R}(A^2) \\ \mathcal{R}\big[(A - MA)^*\big] &\subseteq \mathcal{R}\big[(A^2)^*\big] \\ r\begin{bmatrix} M & A \\ A & 0 \end{bmatrix} &= 2r(A) \end{aligned}$$

ii. $r(A^2) = r(A)$ altında (3.2.19) denklemini sağlanacak şekilde A^{-} nin mevcut olması için gerek ve yeter şart

$$AMA = 0 \text{ ve } r\begin{bmatrix} M & A \\ A & 0 \end{bmatrix} = 2r(A)$$

olmasıdır.

iii.

$$M = AA^{-} + A^{-}A \tag{3.2.20}$$

olacak şekilde A^{-} nin olması için gerek ve yeter şart A ve M'nin aşağıdaki dört şartı sağlamasıdır.

$$\begin{aligned} 2A^2 &= AMA \\ \mathcal{R}(A - AM) &\subseteq \mathcal{R}(A^2) \\ \mathcal{R}\big[(A - MA)^*\big] &\subseteq \mathcal{R}\big[(A^2)^*\big] \\ r\begin{bmatrix} M & A \\ A & 0 \end{bmatrix} &= 2r(A) \end{aligned}$$

iv. $r(A^2) = r(A)$ altında (3.2.20) denklemi sağlanacak şekilde bir A^{-} nin alması için gerek ve yeter şart

$$2A^2 = AMA, \;\; r\begin{bmatrix} M & A \\ A & 0 \end{bmatrix} = 2r(A)$$

olmasıdır.

v. $AA^- = A^-A$ sağlanacakşekilde bir A^- nin mevcut olması için gerek ve yeter şart $r(A^2) = r(A)$ olmasıdır.[55]

Gerçekten Teorem 3.2.1 $AX - XA = M$ ve $AXA = A$ sistemine uygulanırsa sonuçtaki ifadeler elde edilir.

Teorem 3.2.1'in bir genişlemesi aşağıda verilmiştir. Bunun ispatı Teorem 3.2.1'in ispatına benzer şekilde yapılabileceğinden burada ispat verilmeyecektir.

Teorem 3.2.2 $A \in \mathbb{C}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{C}^{l\times n}$, $A_1 \in \mathbb{C}^{k\times k}$, $B_1 \in \mathbb{C}^{l\times l}$, $C \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $M \in \mathbb{C}^{k\times l}$ olsun ve

$$\mathcal{R}(A_1^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*) \text{ ve } \mathcal{R}(B_1) \subseteq \mathcal{R}(B) \qquad (3.2.21)$$

olduğunu varsayalım. Bu taktirde

$$A_1X + XB_1 = M, \;\; AXB = C \qquad (3.2.22)$$

matris denklemleri bir X ortak çözümüne sahiptir ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlanırsa:

$$\mathcal{R}(C) \subseteq \mathcal{R}(A), \;\; \mathcal{R}(C^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*), \qquad (3.2.23)$$

$$r\begin{bmatrix} M & A_1 \\ B_1 & 0 \end{bmatrix} = r(A_1) + r(B_1), \;\; AA_1A^-C + CB^-B_1B = AMB, \qquad (3.2.24)$$

$$\mathcal{R}(AM - CB^-B_1) \subseteq \mathcal{R}(AA_1), \;\; \mathcal{R}\big[(MB - A_1A^-C)^*\big] \subseteq \mathcal{R}\big[(B_1B)^*\big]. \qquad (3.2.25)$$

Sonuç 3.2.2 $A, M \in \mathbb{C}^{m\times m}$ verilsin. Bu taktirde

$$M = A^kA^- - A^-A^k \qquad (3.2.26)$$

olacak şekilde bir A^- vardır ancak ve ancak A ve M aşağıdak, dört şartı sağlar.

$$\begin{aligned} AMA &= 0, \\ \mathcal{R}(A^k + AM) &\subseteq \mathcal{R}(A^{k+1}), \\ \mathcal{R}\big[(A^k - MA)^*\big] &\subseteq \mathcal{R}\big[(A^{k+1})^*\big] \end{aligned} \qquad (3.2.27)$$

$$r\begin{bmatrix} M & A^k \\ A^k & 0 \end{bmatrix} = 2r(A^k) \qquad (3.2.28)$$

Özel olarak, $A^kA^- = A^-A^k$ sağlanacak şekilde bir A^- vardır ancak ve ancak $r(A^k)$ dır. [55]

İspat. Gerçekten (3.2.26) ifadesi $A^kX - XA^k = M$ ve $AXA = A$'ya denktir. Böylece (3.2.26)-(3.2.28) ifadeleri (3.2.21)-(3.2.25) ifadelerinden elde edilir.

Sonuç 3.2.3 $A \in \mathbb{C}m \times m$ verilsin. Bu durumda A^DA'nın Drazin inversi olmak üzere $A^DA^- = A^-A^D$ olacak şekilde bir A^- matrisi mevcuttur.

İspat. $A^DA^- = A^-A^D$ ifadesinin

$$A^DX = XA^D \text{ ve } AXA = A \tag{3.2.29}$$

ifadesine denk olduğu aşikardır. $\mathcal{R}(A^D) \subseteq \mathcal{R}(A)$ ve $\mathcal{R}\big[(A^D)^*\big] \subseteq \mathcal{R}(A^*)$ olduğunu belirtelim. Bu taktirde (3.2.29) ifadesine Teorem 3.2.2 uygulanırsa istenen sonuç elde edilmiş olur.

Sonuç 3.2.4 $A, B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ olsun. Bu taktirde

$$BAA^- = A^-AB \tag{3.2.30}$$

olacak şekilde A^- mevcuttur ancak ve ancak

$$r(ABA) = r(AB) = r(BA) \tag{3.2.31}$$

dır.

İspat. (3.2.30) eşitliği $BAX = XAB$ denklem çiftine denk olacaktır. Böylece (3.2.31) ifadesi Teorem 3.2.2'ten elde edilir.

Özel olarak B matrisi $r(ABA) = r(A)$ olacak şekilde seçilirse bu durumda (3.2.30) eşitliği sağlanacak şekilde bir A^- mevcut olacaktır. Bu durumda bu genelleştirilmiş inverse A'nın B'ye göre komutatif genelleştirilmiş inversi denir ve A_B^- ile gösterilir. Öte yandan $r(AA^*A) = r(AA^*) = r(A)$ olduğunu belirtelim. Böylece herhangi bir A kare matrisi bir A_A^- komutatif genelleştirilmiş inverse sahiptir. Gerçekten A^+ ile gösterilen Moore-Penrose invers A_A^- komutatif genelleştirilmiş inversinin bir özel durumudur.

3.3 $A - BXC$ nin maksimal ve minimal rankları

$A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{m\times k}$ ve $C \in F^{l\times n}$ verilen matrisler ve $X \in F^{k\times e}$ bir değişken matris olmak üzere keyfi bir F cismi üzerinde

$$P(X) = A - BXC \tag{3.3.1}$$

lineer matris ifadesi verilsin. (3.3.1) için temel problemlerden birisi X, $F^{k\times l}$ cismi üzerinde dolaşırken (3.3.1) ifadesinin maksimal ve minimal ranklarının belirlenmesidir. Çünkü bir matrisin rankı sıfır ile matrisin satır ve sütunlarının sayısının minimumu arasında bir sayıdır. (3.3.1) in $F^{k\times l}$ ye göre rankının maksimal ve minimal değerleri mevcut olmalıdır ve bu değerler $F^{k\times l}$ deki bazı X ler için elde edilebilir olmalıdır. Gerçekten değişken matrislere göre herhangi bir lineer ya da lineer olmayan matris ifadesinin maksimal ve minimal rankları daima mevcuttur. $A - BXC$ değişik lineer matris ifadeleri arasında en basit durumlarından birisidir. (3.3.1) in maksimal ranklarıyla ilgili sonuçlar diğer lineer ya da liner olmayan matris ifadelerinin ekstremal ranklarının bulunmasında kullanılabilir. Matris ifadelerinin ekstremal ranklarının belirlenmesi matris analizindeki direkt motivasyonlardandır. Örneğin $BXC = A$ matrisi denkleminin tutarlı olması için gerek ve yeter şart

$$\min_X (A - BXC) = 0$$

olmasıdır. $B_1X_1C_1 + B_2X_2C_2 = A$ matris denkleminin tutarlı olması için gerek ve yeter şart

$$\min_{X_1,X_2} r(A - B_1X_1C_1 - B_2X_2C_2) = 0$$

olmasıdır. X_1 ve X_2 aynı boyutlu olmak üzere $B_1X_1C_1 = A_1$ ve $B_2X_2C_2 = A_2$ iki tutarlı matris denkleminin bir ortak çözüme sahip olabilmesi için gerek ve şart

$$\min_{X_1,X_2} r(X_1 - X_2) = 0$$

olmasıdır; n yinci mertebeden $\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix}$ kare blok matrisi nonsingüler olacak şekilde bir X matrisinin mevcut olması için gerek ve yeter $\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix} = n$ olmasıdır. Daha genel olarak herhangi iki $p(X_1, X_2, \ldots, X_s)$ ve $q(Y_1, Y_2, \ldots, Y_t)$

matris ifadesi için

$$p(X_1, X_2, \ldots, X_s) = q(Y_1, Y_2, \ldots, Y_t)$$

olacak şekilde $X_1, X_2, \ldots, X_s, Y_1, Y_2, \ldots, Y_t$ matrislerinin bulunabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\min_{X_1, X_2, \ldots, X_s, Y_1, Y_2, \ldots, Y_t} r\big[p(X_1, X_2, \ldots, X_s) - q(Y_1, Y_2, \ldots, Y_t)\big] = 0$$

olmasıdır ve $p(X_1, X_2, \ldots, X_s)$ ve $q(Y_1, Y_2, \ldots, Y_t)$ özdeş olması için gerek ve yeter koşul

$$\max_{X_1, X_2, \ldots, X_s, Y_1, Y_2, \ldots, Y_t} r\big[p(X_1, X_2, \ldots, X_s) - q(Y_1, Y_2, \ldots, Y_t)\big] = 0$$

olmasıdır. Ayrıca herhangi bir matris ifadesinin değişken matrislere göre rank değişmezliği ve ranj değişmezliği bu matris ifadesinin ekstremal ranklığıyla da karakterize edilebilir. Matris ifadelerinin ekstremal ranklarıyla ilgili örnekler matris analizi ve uygulamalarındaki pek çok konu ile yakından ilişkilidir. Matris ifadelerinin ekstremal ranklarıyla çeşitli ifadeler lineer cebirle ilgilenen insanlar için oldukça kolay anlaşılabilirdir. Fakat şu anki sorun bir matris ifadesinin onun değişken matrislerine göre ekstremal rankları için basit veya kapalı formüllerin nasıl verilebileceğidir. Bu konu 1980 lerin sonlarından itibaren çalışılmaya başlamıştır ve matris tamamlama problemleri olarak ele alınmıştır.[**bknz**] Bu çalışmalarda bazı parçalı matrislerin minimal rankları kapalı formlarda türetilmiştir. Fakat bu çalışmalardakullanılan metotlar elemanter lineer cebiri yeni öğrenmeye başlayanlar için kolayca anlaşılabilecek metotlar değillerdir. Bilindiği gibi matrislerin ranlarının incelenmesinde yararlı bir araç matrislerin genelleştirmiş inversidir. Herhangi bir $n \times m$ lik X matrisine bir A $m \times n$ tipindeki matrisinin bir genelleştirilmiş inversi denir şayet $AXA = A$ eşitliği sağlanırsa, bu durumda genel olarak $X = A^-$ gösterimi kullanılır. Bir A matrisinin genelleştirilmiş inverslerinin ailesi $\{A^-\}$ ile gösterilir. Eğer A matrisi P ve Q matrisleri nonsingüler olmak üzere $A = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q$ şeklinde parçalabilirse bu taktirde A^- nin genel ifadesi V_2, V_3 ve V_4 keyfi matrisler olmak üzere $A^- = Q^{-1} \begin{bmatrix} I_r & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} P^{-1}$ şeklinde yazılabilir. Eğer A

nın bir $A^{\sim}$ genelleştirilmiş inversi biliniyorsa bu durumda A^{-} nin genel ifadesi U_1 ve U_2 keyfi matrisler olmak üzere

$$A^{-} = A^{\sim} + (I_n - A^{\sim}A)U_1 + U_2(I_m - AA^{\sim})$$

şeklinde yazılabilir. Matrislerin genelleştirilmiş inversleri matrisler için çeşitli rank eşitliklerinin belirlenmesinde kullanılanilir. Blok matrisler için bazı bilinen rank eşitlikleri Marsaglia ve Styan [31] tarafından üretilmiş ve bunlar aşağıdaki Lemma 3.3.1 de ifade edilmiştir. Bu rank eşitlikleri ayrıca genelleştirilmiş inversleri içeren matris ifadeleri için çeşitli rank eşitliklerinin verilmesinde ve hesaplanmasında da kullanılabilir. Sıfırdan farklı verilen bir matrisin rankının bir pozitif tamsayı olduğu ve elemanter satır veya sütun işlemleri yardımıyla hesaplanabildiği bilinmektedir. Bu gerçek bizi (3.3.1) için bazı rank eşitliklerinin hesaplanmasında matrisler için blok elemanter işlemler yardımıyla bulunması ve (3.3.1) in maksimal ranklarının bu rank eşitliklerinden elde edilmesi konusuna motive etmektedir. Tian [55] $A - BXC$ matris ifadesinin rankı için blok elemanter işlemler yardımıyla aşağıdaki şekilde bir eşitlik elde etmiştir.

$$r(A - BXC) = r \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r(M) + \dots \tag{3.3.2}$$

burada $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ A ve B den oluşan bir satır blok matris

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}, \ T = \begin{bmatrix} 0 & I_k \end{bmatrix}, \ S = \begin{bmatrix} 0 \\ I_l \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= T - TM^{-}M \\ S_1 &= S - MM^{-}S \\ E_{T_1} &= I_l - T_1T_1 \\ F_{S_1} &= I_k - S_1^{-}S_1 \end{aligned}$$

(3.3.2) nin sağ tarafındaki $r[E_{T_1}(X + TM^{-}S)F_{S_1}]$ ifadesi nonnegatif terim olup $X + TM^{-}S$ deki X keyfidir. Bu nedenle

$$E_{T_1}(X + TM^{-}S)F_{S_1} = 0$$

olacak şekilde $X = -TM^{-}S$ alınabilir. Böylece $A - BXC$ nin X e göre minimal rankı $r \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r(M)$ olur ki bu oldukça basit ve simetrik gözükür. Bu sonucu diğer bazı rank formüllerini kullanarak $AA^{-} - A^{-}A$, $A^{k}A^{-} - A^{-}A^{k}$, ve $BB^{-}A - AC^{-}C$ matrislerinin A^{-}, B^{-} ve C^{-} ye göre minimal rankları için bir formüller grubu Tian tarafından verilmiştir. Fakat $A - BXC$ nin ekstremal rankları ile ilgili bazı başlangıç sonuçları mevcuttur. 2. Kısımda $A - BXC$ nin rankı için yeni bir eşitlik verilecek ve bu yeni eşitlikten yararlanarak $A - BXC$ nin X e göre ekstremal rankları bulunacaktır. $A - BXC$ nin X e göre sırasıyla rank değişmezliği ve ranj değişmezliği de araştırılacaktır. 3. Kısımda $r(A - BXC) + r(BXC) = r(A)$ rank denklemi X için çözülecek ve daha sonrada bu rank denklemine göre $A - BXC$ nin minimal rankı bulunacaktır. F keyfi bir cisim olsun. Fakat F üzerindeki bir A matrisi için E_A ve F_A sembolleri A tarafından türetilen $E_A = I - AA^{-}$ ve $F_A = I - AA^{-}$ iz düşümlerini göstersin. $A^T, r(A), \mathcal{R}(A)$ ve $\mathcal{U}(a)$ sırasıyla A matrisinin tranpozu, rankı, ranj(sütun) uzayı ve sıfır uzayını göstersin. Bir $X \in F^{n\times m}$ matrisine $A \in F^{n\times m}$ matrisinin bir yansımalı genelleştirilmiş inversi denir şayet $AXA = A$ ve $XAX = A$ ikisi birden sağlanıyorsa, bu durumda $X = A_r^{-}$ yazılır. $A - BXC$ nin X e göre ekstremal ranklarını bulmak ve $r(A - BXC) + r(BXC) = r(A)$ rank denklemini çözmek için matris ranklarıyla ilgili aşağıdaki sonuçlara ve bazı matris denklemlerinin gnel çözümlerine ihtiyaç duymaktadır.

Lemma 3.3.1 [31] $A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{m\times k}$, $C \in F^{l\times n}$, $D \in F^{l\times k}$ olsun. Bu taktirde

i. $r \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = r(A) + r(E_A B) = r(B) + r(E_B A)$

ii. $r \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(A) + r(CF_A) = r(C) + r(AF_C)$

iii. $r \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} E_B A \\ C \end{bmatrix} + r(B)$

iv.

$$\begin{aligned} r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= r(A) + r\begin{bmatrix} 0 & E_AB \\ CF_A & S_A \end{bmatrix} \\ &= r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r(A) + r(E_{C_1}S_AF_{B_!}) \end{aligned}$$

dir; burada $B_1 = E_AB, \;\; C_1 = CF_A$ ve $S_A = D - CA^{-}B \;\; M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ deki A matrisinin Schur bileşenidir.

Lemma 3.3.2 [31] PQT üçlü matris çarpımının rankı için

$$r[PQT] = r(PA) + r(AQ) - r(A) + r(E_{AQ}AF_{PA}) \tag{3.3.3}$$

eşitliği gerçeklenir.

Lemma 3.3.3 [41] $BXC = A$, F cismi üzerinde bir lineer matris denklemi olsun. Bu taktirde bu denklemin tutarlı olması için gerek ve yeter şart

$$\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B) \;\; ve \;\; \mathcal{R}(A^T) \subseteq \mathcal{R}(B^T)$$

veya bu denk olarak $B^{-}AC^{-}C = A$ olmasıdır. Bu durumda $BXC = A$ nın genel çözümü U keyfi bir matris olmak üzere

$$X = B^{-}AC^{-} + U - B^{-}BUCC^{-}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer özel olarak A matrisi $A = BJC$ formunda ise bu taktirde $BXC = A$ nın genel çözümü

$$X = JC(BJC)^{-}BJ + U - B^{-}BUCC^{-}$$

Lemma 3.3.4 [48] $AXB = CYD$ homojen lineer matris denkleminin genel çözümü

$$X = X_1X_2 + X_3, \quad Y = Y_1Y_2 + Y_3$$

şeklinde parçalanabilir, burada X_1, X_2, X_3 ve Y_1, Y_2, Y_3 sırasıyla

$$\begin{aligned} AX_1 &= CY_1 \\ X_2B &= Y_2D \\ AX_3B &= 0 \\ CY_3D &= 0 \end{aligned}$$

dört homojen matris denkleminin genel çözümleridir. Genelleştirilmiş inversler kullanılarak $AXB = CYD$ nin gene çözümü

$$\begin{aligned} X &= F_{A_1}UE_{B_1} + U_1 - A^-AU_1BB^- \\ Y &= C^-AF_1UE_{B_1}BD^- + U_2 - C^-CU_2DD^- \end{aligned}$$

şeklinde veya buna denk olarak

$$\begin{aligned} X &= A^-CF_{C_1}UE_{D_1}DB^- + U_1 - A^-AU_1BB^- \\ Y &= F_{C_1}UE_{D_1} + U_2 - C^-CU_2DD^- \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir, burada $A_1 = E_CA$, $B_1 = BF_D$, $C_1 = E_AC$ ve $D_1 = DF_B$ olup U, U_1 ve U_3 matrisleri keyfi matrislerdir.

Lemma 3.3.5 $N \in F^{n\times m}$, $B \in F^{m\times k}$ ve $C \in F^{l\times n}$ verilmiş olsun. Bu taktirde

$$(BXC)N(BXC) = BXC \tag{3.3.4}$$

kuadratik matris denkleminin genel çözümü

$$X = B^-BU_1(U_2CNBU_1)_r^-U_1CC^- + U - B^-BUCC^- \tag{3.3.5}$$

formunda yazılabilir, burada $U_1 \in F^{k\times n}$, $U_2 \in F^{m\times l}$ ve $U \in F^{k\times l}$ keyfi matrislerdir.

İspat. (3.3.5) in (3.3.4) ü sağladığı kolayca görülür. Öte yandan (3.3.4) ün herhangi bir X_0 çözümü için $U_1 = X_0C$, $U_2 = BX_0$ ve $U = X_0$ alınırsa (3.3.5) ifadesi

$$\begin{aligned} X &= B^-BX_0C(BX_0CNBX_0C)_r^-BX_0CC^- + X_0 - B^-BX_0CC^- \\ &= B^-(BX_0C)(BX_0C)_r^-(BX_0C)C^- + X_0 - B^-BX_0CC^- \\ &= B^-(BX_0C)C^- + X_0 - B^-BX_0CC^- \\ &= X_0 \end{aligned}$$

olur. Bu sonuç (3.3.4) ün herhangi bir sonucunun (3.3.5) deki gibi gösterilebileceğini sağlar. Bu nedenle (3.3.5) ifadesi (3.3.4) ün genel çözümüdür.

3.3.1 $A - BXC$ nin X e göre maksimal ve minimal rankları

$P(X)$ (3.3.1) de verildigği gibi olsun. Eğer buna karşılık gelen $BXC = A$ lineer matris denklemi tutarlı ise bu taktirde $P(X)$ e tutarlı bir lineer matris ifadesi denir. Ayrıca (3.3.2) ye ilaveten Lemma 3.3.1 *i.*, *ii.* ve *iii.* şıklarından $P(X)$ in rankı için başka özdeşlikler de elde edilebilir.

Teorem 3.3.1 $P(X)$ (3.3.1) deki gibi verilmiş olsun. Bu taktirde

i. $A_1 = E_B A$ ve $A_2 = AF_C$ olamk üzere $P(X)$

$$\begin{aligned} r(A - BXC) &= r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + r(E_{A_2}AF_{A_1} - E_{A_2}BXCF_{A_1}) \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

rank eşitliğini sağlar.

ii. Aşağıdaki lineer matris ifadesi tutarlıdır.

$$\widehat{P}(X) = E_{A_2}AF_{A_1} - E_{A_2}BXCF_{A_1} \tag{3.3.7}$$

İspat. İlk olarak

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r(A) + r(E_{A_2}AF_{A_1}) \tag{3.3.8}$$

rank eşitliğini gösterelim Blok Gauss eleminasyon yardımıyla

$$r\begin{bmatrix} A & AF_C \\ E_BA & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & E_BAF_C \end{bmatrix} = r(E_BAF_C) + r(A)$$

olduğu kolayca görülebilir. Öte yandan Lemma 3.3.1 *iii.* den

$$r\begin{bmatrix} A & AF_C \\ E_BA & 0 \end{bmatrix} = r(E_BA) + r(AF_C) + r(E_{A_2}AF_{A_1})$$

olacaktır. Bu nedenle

$$r(E_BAF_C) = r(E_BA) + r(AF_C) - r(A) + r(E_{A_2}AF_{A_1})$$

olduğu görülür. Bu eşitliği Lemma 3.3.1 *iii.* de yerine yazar Lemma 3.3.1 *i.* ve *ii.* şıkları uygulanırsa (3.3.8) eşitliği elde edilir. (3.3.8) de A matrisi ile $A - BXC = P(X)$ ifadesi yerdegiştirir ve

$$\begin{aligned}
r\begin{pmatrix} A - BXC & B \\ C & 0 \end{pmatrix} &= r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \\
r\begin{bmatrix} A - BXC \\ C \end{bmatrix} &= r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}, \\
r\begin{bmatrix} A - BXC & B \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \\
E_B(A - BXC) &= E_BA \\
(A - BXC)F_C &= AF_C
\end{aligned}$$

eşitliklerinin göz önüne alalım. Bu durumda (3.3.8) ifadesi

$$\begin{aligned}
r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r(A - BXC) \\
&\quad + r(E_{A_2}AF_{A_1} - E_{A_2}BXCF_{A_1})
\end{aligned}$$

şeklini aır. Diğer taraftan $E_{A_2}A_2 = 0$ ve $A_1F_{A_1} = 0$ olacağından

$$E_{A_2}AC^-C = E_{A_2}A \quad ve \quad BB^-AF_{A_1} = AF_{A_1}$$

olduğu görülür. Böylece

$$\mathcal{R}(E_{A_2}AF_{A_1}) = \mathcal{R}(E_{A_2}BB^-AF_{A_1}) \subseteq \mathcal{R}(E_{A_2}B)$$

ve

$$\mathcal{R}\left[(E_{A_2}AF_{A_1})^T\right] = \mathcal{R}\left[(E_{A_2}AC^-CF_{A_1})^T\right] \subseteq \mathcal{R}\left[(CF_{A_1})^T\right]$$

olacaktır. Bu iki eşitlik $E_{A_2}BXCF_{A_1} = E_{A_2}AF_{A_1}$ matris denkleminin tutarlı olduğunu gösterir. Böylece $\widehat{p}(X)$ tutarlı bir lineer matris ifadesidir. Durumun uygunluğu için (3.3.7) deki $\widehat{p}(X)$ e (3.3.1) deki $P(X)$ in adjoint lineer matris ifadesi diyeceğiz. Eğer $P(X)$ tutarlı ise bu taktirde (3.3.7) de $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olacaktır. Bu durumda (3.3.7) $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olduğunda $\widehat{p}(X)$ ve $P(X)$ özdeş olacaklardır. (3.3.3) den diğer bir ilginç rank eşitliği türetilebilir.

Teorem 3.3.2 $A \in F^{m\times n}$, $P \in F^{p\times n}$ ve $Q \in F^{n\times q}$ verilsin ve $X \in F^{m\times n}$ bir değişken matris olmak olmak üzere

$$P(X) = A - F_P X E_Q \tag{3.3.9}$$

olsun. Bu taktirde

i. (3.3.9) deki $P(X)$ matris ifadesi

$$\begin{aligned} r(P(X)) &= r(PA) + r(AQ) - r(PAQ) \\ &\quad + r(E_{AQ}AF_{PA} - E_{AQ}F_P X E_Q F_{PA}) \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

rank eşitliğini sağlar.

ii. $\widehat{P}(X) = E_{AQ}AF_{PA} - E_{AQ}F_P X E_Q F_{PA}$ matris ifadesi tutarlıdır.

İspat. (3.3.10) A yerine $P(X) = A - F_P X E_Q$ alarak gerekli hesaplamalar yapılarak (3.3.3) den elde edilir. Öte yandan

$$E_{AQ}F_P X E_Q A F_{PA} = E_{AQ}AF_{PA}$$

matris denkleminin tutarlılığı $F_P A F_{PA} = AF_A$ ve $E_{AQ}AE_Q = E_{AQ}A$ basit gerçeklerinden görülebilir. (3.3.6) eşitliği $A - BXC$ nin rankının nonnegatif bir sabit ile tutarlı bir lineer matris ifadesinin rankının toplamı olacağını gösterir. Böylece $A - BXC$ nin X e göre ekstremal rankları bu tutarlı lineer matris ifadesi yardımıyla belirlenebilir.

Lemma 3.3.6 (3.3.1) deki $P(X)$ tutarlı olsun. Bu taktirde

i. $P(X)$ in X e göre maksimal rankı

$$\max_X r(A - BXC) = \min\{r(B), r(C)\} \tag{3.3.11}$$

dır. (3.3.11) yı sağlayan X in genel ifadesi, Y $r(BYC) = \min\{r(B), r(C)\}$ yi sağlayan herhangi bir matris olmak üzere

$$X = B^{-}AC^{-}Y \tag{3.3.12}$$

formunda yazılabilir.

ii. $P(X)$ in X e göre minimal rankı

$$\min_X r(A - BXC) \tag{3.3.13}$$

dir. (3.3.13) i sağlayan X in genel ifadesi $BXC = A$ matris denklmeninin genel çözümüdür.

İspat. $BXC = A$ denkleminin tutarlılığı Lemma 3.3.3 e göre $BB^-AC^-C = A$ olduğu sağlar. Bu nedenle A_BXC yi $Y = B^-AC^- - X$ olmak üzere

$$\begin{aligned} A - BXC &= BB^-AC^-C - BXC \\ &= B(B^-AC^- - X)C \\ &= BYC \end{aligned}$$

olarak yeniden yazabiliriz. Bu lemmadaki durumlar bu ifadeden elde edilir. Lemma 3.3.6 (3.3.6) deki rank eşitliğine uygulanarak aşağıdaki iki sonuç elde edilir.

Teorem 3.3.3 $P(X)$ (3.3.1) deki şekilde verilmiş olsun. Bu taktirde $P(X)$ in X e göre maksimal rankı

$$\max_X r(A - BXC) = \min\left\{ r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}, r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \right\} \tag{3.3.14}$$

dir. (3.3.14) u sağlayan X in genel ifadesi $U \in F^{k\times l}$ matrisi

$$r(E_{A_2}BUCF_{A_1}) = \min\left\{ r(E_{A_2}B), r(CF_{A_1}) \right\}$$

olacak şekilde seçilmiş olmak üzere

$$X = (E_{A_2}B)^- E_{A_2}AF_{A_1}(CF_{A_1})^- - U \tag{3.3.15}$$

İspat. (3.3.6) ifadesinden

$$\max_X r[P(X)] = r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} + \max_X r[\widehat{P}(X)]$$

yazılabilir. (3.3.7) deki $\widehat{P}(X)$ tutarlı olduğundan (3.3.7) ye göre maksimal rankı

$$\max_X r[\widehat{P}(X)] = \min\left\{r(E_{A_2}B), r(CF_{A_1})\right\}$$

olacaktır, burada Lemma 3.3.1 *i.*, *ii.* ve *iii.* den

$$\begin{aligned} r(E_{A_2}B) &= r\begin{bmatrix} A_2 & B \end{bmatrix} - r(A_2) \\ &= r\begin{bmatrix} AF_C & B \end{bmatrix} - r(AF_C) \\ &= r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} r(CF_{A_1}) &= r\begin{bmatrix} A_1 \\ C \end{bmatrix} - r(A_1) \\ &= r\begin{bmatrix} E_BA \\ C \end{bmatrix} - r(E_BA) \\ &= r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir. Böylece (3.3.14) elde edilmiş olur. (3.3.15) eşitliği ise (3.3.12) den kolayca gösterilebilir.

Teorem 3.3.4 $P(X)$ (3.3.1) deki şekilde verilmiş olsun. Bu taktirde $P(X)$ in X e göre minimal rankı

$$\min_X r(A - BXC) = r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.16}$$

dir. (3.3.16) i sağlayan X matrisi $A_1 = E_BA$ ve $A_2 = AF_C$ olmak üzere

$$E_{A_2}BXCF_{A_1} = E_{A_2}AF_{A_1} \tag{3.3.17}$$

tutarlı matris denkleminin genel çözümüdür. Genelleştirilmiş inversler yardımıyla (3.3.16) i sağlayan X genel çözümü

$$\begin{aligned} X &= (E_{A_2}B)^- E_{A_2}AF_{A_1}(CF_{A_1})^- + U \\ &\quad + (E_{A_2}B)^- E_{A_2}BUCF_{A_1}(CF_{A_1})^- \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

ve

$$X = B^- AF_{A_1}(E_{A_2}AF_{A_1})^- E_{A_2}AC^- + U \quad (3.3.19)$$
$$-(E_{A_2}B)^- E_{A_2}BUCF_{A_1}(CF_{A_1})^-$$

şeklinde iki formda yazılabilir, burada $U \in F^{k\times l}$ keyfidir.

İspat. (3.3.6) ifadesinden

$$\min_X r[P(X)] = r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} + \max_X r[\widehat{P}(X)]$$

olduğu görülür. Lemma 3.3.6 (6) ve Lemma 3.3.3

$$\widehat{P}(X) = E_{A_2}AF_{A_1} - E_{A_2}BXCF_{A_1}$$

tutarlı matris ifadesine uygulanırsa bu teoremde istenen sonuçlar sağlanmış olur. Şimdiye kadar verilen (3.3.16) i sağlayan herhangi bir X matrisine $BXC = A$ matris denkleminin minimal rank çözümü diyeceğiz. $BXC = A$ nın minimal rank çözümlerinin iki genel ifadesi (3.3.18) ve (3.3.19) de verilmiştir. (3.3.10) rank eşitliğinden (3.3.9) deki $P(X)$ in ekstremal ranklarını da bulmak mümkündür.

Teorem 3.3.5 $P(X) = A - F_P X E_Q$ (3.3.9) deki şekilde verilmiş olsun . Bu taktirde

i. $A - F_P X E_Q$ nun X e göre minimal rankı

$$\min_X r(A - F_P X E_Q) = \min\{m + r(PA) - r(P), \quad (3.3.20)$$
$$n + r(AQ) - r(Q)\}$$

dir. (3.3.20) i sağlayan X in genel ifadesi $U \in F^{k\times l}$ matrisi

$$r(E_{AQ}F_P U E_Q F_{PA}) = \min\{r(E_{AQ}F_P), r(E_Q F_{PA})\}$$

olacak şekilde şeçilmiş olamk üzere

$$X = (E_{AQ}F_P)^- E_{AQ}AF_P(E_Q F_{PA})^- - U$$

dır.

ii. $A - F_P X E_Q$ nun X e göre minimal rankı

$$\min_X r(A - F_P X E_Q) = r(PA) - r(AQ) - r(PAQ) \tag{3.3.21}$$

(3.3.21) yı sağlayan X in genel ifadesi

$$E_{AQ} F_P X E_Q F_{PA} = E_{AQ} A F_{PA}$$

tutarlı matris denkleminin genel çözümüdür. Genelleştirilmiş inversler yardımıyla (3.3.21) yı sağlayan X in genel ifadesi

$$X = (E_{AQ} F_P)^- (E_{AQ} A F_P)(E_Q F_{PA})^- + U - G^- G U H H^-$$

ve

$$X = A F_P (E_{AQ} F_{PA})^- E_{AQ} A + U - G^- G U H H^-$$

şeklinde yazılabilir, burada $G = E_{AQ} F_P$ ve $H = E_Q F_{PA}$ olup U matrisi keyfidir.

İspat. (3.3.10) den

$$\begin{aligned} \max_X r[P(X)] &= r(PA) + r(AQ) - r(PAQ) \\ &\quad + \max_X r(E_{AQ} A F_{PA} - E_{AQ} F_P X E_Q F_{PA}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \min_X r[P(X)] &= r(PA) + r(AQ) - r(PAQ) \\ &\quad + \min_X r(E_{AQ} A F_{PA} - E_{AQ} F_P X E_Q F_{PA}) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Lemma 3.3.6 i

$$\widehat{P}(X) = E_{AQ} A F_{PA} - E_{AQ} F_P X E_Q F_{PA}$$

tutatlı matris ifadesine uygulanarak bu teoremdeki sonuçlar elde edilmiş olur. Teorem 3.3.3 ve Teorem 3.3.4 in çeşitli sonuçları aşağıda verilmiştir.

Sonuç 3.3.1 $P(X)$ (3.3.1) deki gibi verilmiş olsun. Bu taktirde (3.3.16) i sağlayan X matrisi tektir, yani $BXC = A$ matris denkleminin minimal rank çözümünün tek olması için gerek ve yeter şart

$$r(B) = K, \quad r(C) = l$$

ve

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r(B) = r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + r(C) \tag{3.3.22}$$

olmasıdır. Bu durumda (3.3.16) i sağlayan tek X matrisi $A_1 = E_A$ ve $A_2 = AF_C$ olmak üzere

$$\begin{aligned} X &= (E_{A_2}B)^- E_{A_2} A F_{A_1} (CF_{A_1})^- \\ &= B^- A F_{A_1} (E_{A_2} A F_{A_1})^- E_{A_2} A C^- \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

şeklinde yazılabilir. (3.3.16) i sağlayan X tekliği (3.3.23) in sağ tarafındaki iki matris ifadelerinin A^-, B^- ve C^- nin seçimine göre invaryat(değişmez) olduğunu gösterir.

İspat. (3.3.16) i sağlayan X tektir ancak ve ancak (3.3.17) nin çözümü tektir, bu ise Lemma 3.3.3 e göre

$$r(E_{A_2}B) = k \text{ ve } r(CF_{A_1}) = l \tag{3.3.24}$$

a denktir. $r(B) \leq k$ ve $r(C) \leq l$ olduğunu belirtelim. Bu nedenle (3.3.24) ifadesi aşağıdaki

$$\begin{aligned} r(B) &= k \\ r(C) &= l \\ r(E_{A_2}B) &= r(B) \\ r(CF_{A_1}) &= r(C) \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

dört rank eşitliğine denktir. Lemma 3.3.1 *i.*, *ii.* ve *iii.* yi (3.3.25) deki son iki rank eşitliğine uygularak (3.3.22) elde edilir. (3.3.16) i sağlayan X in tekliği ise (3.3.18) ve (3.3.19) ifadelerinden görülür.

Sonuç 3.3.2 $P(X)$ (3.3.1) de verildiği gibi olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir

i. $\min_X r(A - BXC) = r(A)$

ii. $r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r(A)$

iii. $E_{A_2}AF_{A_1} = 0$, $a_1 = E_B A$ ve $A_2 = AF_C$

iv. $E_{C_1}CA^{-}BF_{B_1} = 0$, $B_1 = E_A B$ ve $c_1 = CF_A$

Bu durumlarda $r(A - BXC)$ yi minimumlaştıran X matrisi $E_{A_2}BXCF_{A_1} = 0$ homojen matris denkleminin genel çözümüdür.

İspat. Sonucun ispatı (3.3.16), (3.3.8) ve Lemma 3.3.1 *iv.* nin birleştirilmesiyle kolayca görülür.

Sonuç 3.3.3 $P(X)$ (3.3.1) deki gibi olsun. Bu taktirde $P(X)$ in rankının X in seçimine göre invaryat olması için gerek ve yeter şart

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} \qquad (3.3.26)$$

olmasıdır.

İspat. (3.3.14) ve (3.3.16) den

$$\begin{aligned} \max_X r[P(X)] &= \min_X r[P(X)] \qquad (3.3.27) \\ &= \min\left\{ r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}, r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

yazılabilir. (3.3.27) nin sağ tarafını sıfır alacak sonuçta verilen durumlar elde ederiz. (3.3.24) ve (3.3.16) kullanarak $A - BXC$ nin X in seçimine göre ranj invaryantlığını karakterize edebiliriz. Benzer problemle [3] ve [26] da $AB^{-}C$ çarpımının B^{-} nin seçimine göre ranj invaryantlığı için incelenmiştir.

Sonuç 3.3.4 $P(X)$ (3.3.1) deki gibi olsun. Bu taktirde

i. $P(X)$ in seçiminden invaryant olması için gerek ve yeter koşul $C = 0$ veya

$$\mathcal{R}\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \mathcal{R}\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \qquad (3.3.28)$$

olmasıdır.

ii. $P^T(X)$ in ranjının X in seçimine göre invaryant olması için gerek ve yeter koşul $B = 0$ veya

$$\mathcal{R}(\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}^T) \subseteq (\mathcal{R}\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}^T) \tag{3.3.29}$$

olmasıdır.

İspat. İki A_1 ve A_2 matrisinin aynı ranja sahip olması yani $\mathcal{R}(A_1) = \mathcal{R}(A_2)$ olması için gerek yeter şart

$$r\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} = r(A_1) = r(A_2)$$

olmasıdır. Bu gerçeği $A - BXC$ ye uygularsak $A - BXC$ nin ranjının X in seçimine göre invaryant olması için gerek ve yeter şart her X ve Y için

$$r\begin{bmatrix} A - BXC & A - BYC \end{bmatrix} = r(A - BXC) = r(A - BYC) \tag{3.3.30}$$

olmasıdır. Açık olarak bu rank eşitliğinin her X ve Y için sağlanması için gerek ve yeter şart her X i.in

$$r(A - BXC) = r(A) \tag{3.3.31}$$

ve her X ve Y için

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A - BXC & A - BYC \end{bmatrix} &= r\left(\begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \right) \\ &= r(A) \end{aligned} \tag{3.3.32}$$

olmasıdır. Sonuç 3.3.3 dan (3.3.31) nın her X için sağlanması içn gerek ve yeter şartın (3.3.26) in sağlanması olduğu görülür. Ayrıca Sonuç 3.3.3 dan (3.3.32) eşitliğinin her $\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix}$ için sağlanması için gerek ve yeter şartın

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} + r(C) = r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \tag{3.3.33}$$

olması olduğu görülür. (3.3.26) ve (3.3.33) birleştirilerek (3.3.30) in her X ve Y için sağlanması için gerek ve yeter şart $C = 0$ veya

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$$

olmasıdır. Bu ise (3.3.28) e denktir. Benzer şekilde *ii.* şıkkıda gösterilebilir. Yukarıdaki iki sonuç birleştirilerek aşağıdaki sonu verilebilir.

Sonuç 3.3.5 $P(X)$ $B \neq 0$ ve $C \neq 0$ olmak üzere (3.3.1) deki gibi verilmiş olsun. Bu taktirde $P(X)$ in rankının X in seçimine göre invaryant olması için gerek ve yeter şart $P(X)$ in ranjının X in seçimine göre invaryomt olması veya $P^T(X)$ in ranjının X in seçimine göre invaryant olmasıdır. Bu kısmın devamında Teorem 3.3.3 ve Teorem 3.3.5 daki sonuçlar için bazı denk ifadeler vereceğiz. $B \in F^{m\times k}$, $C \in F^{l\times n}$, $P \in F^{p\times m}$, Θ ve Ω aşağıdaki gibi olsun.

$$\Theta =^d \{Z \in F^{m\times n} : \mathcal{R}(Z) \subseteq \mathcal{R}(B) \text{ } ve \text{ } \mathcal{R}(Z^T) \subseteq \mathcal{R}(C^T)\} \tag{3.3.34}$$

$$\Omega =^d \{Z \in F^{m\times n} : \mathcal{R}(Z) \subseteq \mathcal{R}(P) \text{ } ve \text{ } \mathcal{R}(Z^T) \subset \mathcal{R}(Q^T)\} \tag{3.3.35}$$

Bu durumda aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Teorem 3.3.6 $A \in F^{m\times n}$ ve Θ (3.3.34) da verildiği gibi olsun. Bu taktirde

i. $A - Z$ nin $Z \in \Theta$ ya göre maksimal rankı

$$\max_{Z\in\Theta} r(A-Z) = \min\left\{ r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \right\} \tag{3.3.36}$$

dir. (3.3.36) i sağlayan Z nin genel ifadesi, U matrisi

$$r(E_{A_2}BUCF_{A_1}) = \min\{r(E_{A_2}B), r(CF_{A_1})\}$$

olacak şekilde seçilmiş olmak üzere,

$$Z = B(E_{A_2}B)^- E_{A_2}AF_{A_1}(CF_{A_1})^- C - BUC$$

formunda yazılabilir.

ii. $A - Z$ nin $Z \in \Theta$ ya göre minimal rankı

$$\min_{Z\in\Theta} r(A-Z) = r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.37}$$

dir. (3.3.37) yi sağlayan Z nin genel ifadesi $A_1 = E_BA$ ve $A_2 = AF_C$, $V \in \Theta$ matrisi keyfi olmak üzere

$$\begin{aligned} Z &= B(E_{A_2}B)^- E_{A_2}AF_{A_1}(CF_{A_1})^- C + V \\ &\quad - B(E_{A_2}B)^- E_{A_2}VF_{A_1}(CF_{A_1})^- C \end{aligned} \tag{3.3.38}$$

ve

$$
\begin{aligned}
Z &= AF_{A_1}(E_{A_2}AF_{A_1})^{-}E_{A_2}A+V \qquad (3.3.39)\\
&\quad -B(E_{A_2}B)^{-}E_{A_2}VF_{A_1}(CF_{A_1})^{-}C
\end{aligned}
$$

formlarında yazılabilir.

İspat. (3.3.34) ve Lemma 3.3.3 ten herhangi bir $Z \in \Theta$ nın $Z = BXC$ şeklinde ifade edilebileceğini kolayca görürüz. Bu nedenle (3.3.34) daki Θ matris kümesi, denk olarak,

$$\Theta = \left\{Z = BXC : X \in F^{k\times l}\right\}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Böylece (3.3.6) den $Z \in \Theta$ olmak üzere $A - Z$ nin rankı

$$
\begin{aligned}
r(A-Z) &= r(A-BXC)\\
&= r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} + r(E_{A_2}AF_{A_1} - E_{A_2}BXCF_{A_1})\\
&= r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} + r(E_{A_2}AF_{A_1} - E_{A_2}ZF_{A_1})
\end{aligned}
$$

eşitliğini sağlar. Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.4 ten bu eşitliğin bu teoremin sonuçlarını sağladığı görülür. Teorem (3.3.6) i sağlayan Z matrisine literatürde A nın Θ ya kısıtlanışı denir. (3.3.38) ve (3.3.39) denklemleri A nın Θ ya kısıtlanmış matrislerinin iki genel ifadesidir. (3.3.38) ve (3.3.39) den (3.3.37) yi sağlayan $Z \in \Theta$ matrisinin tekliği için bir gerek ve yeter şart türetilebilir. Bu problem değişik yazarlar tarafından çalışılmıştır. [1,13,35,37]

Sonuç 3.3.6 [35] $A \in F^{m\times n}$ ve Θ (3.3.34) da verildiği gibi olsun. Bu taktirde A nın Θ ya kısıtlanmış matrisinin tek olması için gerek ve yeter şart

$$
\begin{aligned}
r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r(B)\\
&= r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + r(C)
\end{aligned}
$$

olmasıdır. Bu durumda tek kısıtlanmış matris $A_1 = E_B A$ ve $A_2 = AF_C$ olmak üzere

$$\begin{aligned} Z &= B(E_{A_2}B)^{-}E_{A_2}AF_{A_1}(CF_{A_1})^{-}C \\ &= AF_{A_1}(E_{A_2}AF_{A_1})^{-}E_{A_2}A \\ &= A - A(E_B AF_C)^{-}A \end{aligned}$$

formlarında yazılabilir. Bu matris ifadeleri onlardaki genelleştirilmiş inverslerin seçimine göre invaryanttır.

Teorem 3.3.7 $A \in F^{m\times n}$ ve Ω (3.3.35) daki gibi olsun. Bu taktirde

i. $A - Z$ nin $Z \in \Omega$ göre maksimal rankı

$$\max_{Z\in\Omega} r(A - Z) = \min\left\{r(E_{AQ}F_P), r(E_Q F_{PA})\right\} \tag{3.3.40}$$

dir. (3.3.40) i sağlayan Z nin genel ifadesi, U matrisi

$$r(E_{AQ}F_P U E_Q F_{PA}) = \min\left\{r(E_{AQ}F_P), r(E_Q F_{PA})\right\}$$

olacak şekilde seçilmiş olmak üzere,

$$Z = F_P(E_{AQ}F_P)^{-}E_{AQ}AF_{PA}(E_Q AF_{PA})^{-}F_P U E_Q$$

şeklinde yazılabilir.

ii. $A - Z$ nin $Z \in \Omega$ ya göre minimal rankı

$$\min_{Z\in\Omega} r(A - Z) = r(PA) + r(AQ) - r(PAQ)\} \tag{3.3.41}$$

dır. (3.3.41) i sağlayan Z nin genel ifadesi, $V \in \Omega$ matrisi keyfi olmak üzere

$$\begin{aligned} Z &= F_P(E_{AQ}F_P)^{-}E_{AQ}AF_{PA}(E_Q F_{PA})^{-}E_Q + V \\ &\quad -F_P(E_{AQ}F_P)^{-}E_{AQ}VF_{PA}(E_Q F_{PA})^{-}E_Q + V \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Z &= AF_{PA}(E_{AQ}AF_{PA})^{-}E_{AQ}A + V \\ &\quad -F_P(E_{AQ}F_P)^{-}E_{AQ}VF_{PA}(E_Q F_{PA})^{-}E_Q \end{aligned}$$

şeklinde iki formda yazılabilir.

İspat. Lemma 3.3.3 den (3.3.35) daki Ω yı

$$\Omega = \{Z = F_P X E_Q : X \in F^{m\times n}\}$$

olarak yazabiliriz. Bu nedenle (3.3.10) ten $A - Z$ nin rankının

$$\begin{aligned} r(A - Z) &= r(A - F_P X E_Q) \\ &= r(PA) + r(AQ) - r(PAQ) \\ &\quad + r(E_{AQ} A F_{PA} - E_{AQ} F_P X E_Q F_{PA}) \\ &= r(PA) + r(AQ) - r(PAQ) \\ &\quad + r(E_{AQ} A F_{PA} - E_{AQ} Z F_{PA}) \end{aligned}$$

eşitliğini sağladığı görülür. Teorem 3.3.5 yı uygulayarak bu eşitliğin bu teoremdeki sonuçları sağladığı görülür.

Teorem 3.3.8 [13] $A \in F^{m\times n}$ ve Ω (3.3.35) da tanımlandığı gibi olsun. Bu taktirde A nın Ω ya kısıtlanmış matrisi tektir ancak ve ancak

$$r(PAQ) = r(PA) = r(AQ)$$

dır. Bu durumda tek kısıtlanmış matris

$$\begin{aligned} Z &= F_P (E_{AQ} F_P)^- E_{AQ} A F_{PA} (E_Q F_{PA})^- E_Q \\ &= A F_{PA} (E_{AQ} A F_{PA})^- E_{AQ} A \\ &= A - AQ(PAQ)^- PA \end{aligned}$$

şeklinde üç formda yazılabilir. Bu ifadeler onlardaki genelleştirilmiş inverslerin seçimlerine göre invaryanttır.

3.3.2 $r(A - BXC) + r(BXC) = r(A)$ Denkleminin Çözümleri

$P(X) = A - BXC$ (3.3.1) de verildiği gibi olsun. Bu kısımda $P(X)$ tarafından türetilen aşağıdaki rank denklemini çözeceğiz.

$$r(A - BXC) + r(BXC) = r(A) \tag{3.3.42}$$

ve daha sonra $P(X)$ in (3.3.42) e göre minimal rankını gözönüne alacağız. (3.3.42) rank denklemini çözmek için Marsalia ve Styan [31] ye uygun olarak aşağıdaki sonuca ihtiyaç vardır.

Lemma 3.3.7 $A, S \in F^{m\times n}$ matrisleri aşağıdaki rank eşitliğini sağlar.

$$\begin{aligned} r(A-S)+r(S)=r(A) \Leftrightarrow \mathcal{R}(S) &\subseteq \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{R}(S^T) &\subseteq \mathcal{R}(A^T) \\ \{A^-\} &\subseteq \{S^-\} \end{aligned}$$

Lemma 3.3.7 (3.3.42) eşitliğine uygulayarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Lemma 3.3.8 (3.3.42) rank denklemi ve

$$\begin{aligned} (BXC)A^-(BXC) &= BXC \\ &= AYA \end{aligned} \tag{3.3.43}$$

matris denklem sistemi X için aynı çözüme sahiptir, burada $A^- \in \{A^-\}$ keyfidir.

İspat. Lemma 3.3.7 e göre (3.3.42) denklemi

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(BXC) &\subseteq \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{R}\left[(BXC)^T\right] &\subseteq \mathcal{R}(A^T) \\ \{A^-\} &\subseteq \{(BXC)^-\} \end{aligned} \tag{3.3.44}$$

e denktir. Lemma 3.3.7 e göre ilk iki ranj kapsamasının sağlanması için gerek ve yeter şart $BXC = AYA$ matris denkleminin Y için çözülebilir olmasıdır. Genelleştirilmiş invers tanımına göre üçüncü küme kapsamasının sağlanması için gerek ve yeter şart herhangi bir $A^- \in \{A^-\}$ için

$$(BXC)A^-(BXC) = BXC$$

olmasıdır. Böylece (3.3.43) elde edilir.

Teorem 3.3.9 (3.3.43) deki rank denkleminin genel çözümü

$$\begin{aligned} A_1 &= E_B A \\ A_2 &= AF_C \\ B_1 &= E_A C \\ C_1 &= AF_A \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
U_1 &= F^{n\times n} \\
U_2 &= F^{m\times m} \\
U_3 &= F^{k\times n} \\
U_4 &= F^{m\times l}
\end{aligned}
$$

matrisleri keyfi olmak üzere

$$
\begin{aligned}
X &= B^{-}AF_1U(U_2E_{A_2}AF_{A_1}U_1)_r^{-}U_2E_{A_2}AC^{-} \\
&\quad +U-B^{-}BUCC^{-}
\end{aligned}
\tag{3.3.45}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
X &= B^{-}BF_{B_1}U_3(U_4E_{C_1}CA^{-}BF_{B_1}U_3)_r^{-}U_4E_{C_1}CC^{-} \\
&\quad +U-B^{-}BUCC^{-}
\end{aligned}
\tag{3.3.46}
$$

şeklinde iki formda ifade edilebilir.

İspat. Lemma 3.3.4 ten (3.3.43) deki $BXC = AYA$ nın genel çözümü $U \in F^{k\times l}$, $V_1 \in F^{k\times n}$ ve $V_2 \in F^{k\times l}$ keyfi olmak üzere

$$
X = B^{-}AF_{A_1}V_1E_{A_2}AC^{-} + U - B^{-}BUCC^{-} \tag{3.3.47}
$$

ve

$$
X = F_{B_1}V_2E_{C_2} + U - B^{-}BUCC^{-} \tag{3.3.48}
$$

şeklinde iki formda yazılabilir. (3.3.47) yı (3.3.43) deki ilk denklemde yerine yazar ve $BB^{-}F_{A_1} = AF_{A_1}$ ve $E_{A_2}AC^{-}C = E_{A_2}A$ olduğu dikkate alınırsa

$$
(AF_{A_1}V_1E_{A_2}A)A^{-}(AF_{A_1}V_1E_{A_2}A) = AF_{A_1}VE_{A_2}A
$$

yazılabilir. Lemma 3.3.5 ten bu denklemin genel çözümü, $U_1 = F^{n\times n}$ ve $U_2 = F^{m\times m}$ keyfi olmak üzere

$$
V_1 = (AF_{A_1})^{-}(AF_{A_1})U_1(U_2E_{A_2}AF_{A_1}U_1)_r^{-}U_2(E_{A_2}A)(E_{A_2}A)^{-} + Z \tag{3.3.49}
$$

olacaktır. Burada Z, $AF_{A_1}ZE_{A_2}A = 0$ matris denkelminin genel çözümüdür. (3.3.49) ifadesi i (3.3.47) da yerine yazılırsa (3.3.42) in X genel çözümü için (3.3.45) ifadesi elde edilir. Benzer şekilde (3.3.48) den (3.3.46) elde edilir. Teorem 3.3.9 ün bazı özel durumları aşağıda verilmiştir.

Sonuç 3.3.7 (3.3.42) rank denklemi ve $BXC = 0$ matris denklemi aynı çözüme sahiptir ancak ve ancak

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r(A) \tag{3.3.50}$$

dır.

İspat. $BXC = 0$ denkleminin herhangi bir çözümü (3.3.42) denkleminide sağlar. Tersine olarak (3.3.42) in (3.3.45) çözümünü BXC de yerine yazarak

$$BXC = AF_{A_1}U_1(U_2E_{A_2}AF_{A_1}U_1)_r^- U_2E_{A_2}A$$

elde edilir. Bu nedenle (3.3.42) ve $BXC = 0$ ın aynı çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $E_{A_2}AF_{A_1} = 0$ olmasıdır ki bu da Sonuç 3.3.2 e göre (3.3.50) a denktir.

Sonuç 3.3.8 (3.3.42) rank denklemi sadece sıfır çözümüne sahiptir ancak ve ancak B tam sütun ranklı, C tam satır ranklı ve (3.3.50) eşitliği sağlanır.

İspat. Sonucun ispatı (3.3.42) in (3.3.45) genel çözümünden kolayca elde edilir.

Sonuç 3.3.9 $BXC = A$ matris genel denklemi tutarlı olsun. Bu taktirde (3.3.42) rank denkleminin genel çözümü U, U_1 ve U_2 (3.3.45) te verildiği şekilde olmak üzere

$$X = B^-AU_1(U_2A^-U_1)_r^- U_2AC^- + U - B^-BUCC^- \tag{3.3.51}$$

dır.

İspat. $BXC = A$ nın tutarlılığı $A_1 = E_BA = 0$ ve $A_2 = AF_C$ a denktir. Dolayısıyla (3.3.45) ifadesi (3.3.51) a dönüşür.

Sonuç 3.3.10 A, B ve C matrisleri

$$\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A) \text{ ve } \mathcal{R}(C^T) \subseteq \mathcal{R}(A^T) \tag{3.3.52}$$

özelliklerini sağlasın. Bu taktirde (3.3.42) in genel çözümü $U_1 = F^{k\times n}$, $U_2 = F^{m\times l}$ ve $U = F^{k\times l}$ keyfi olmak üzere

$$X = B^- BU_1(U_2CA^- BU_1)_r^- U_2CC^- + U - B^- BUCC^- \tag{3.3.53}$$

şeklindedir.

İspat. Açık olarak (3.3.52) şartları $B_1 = E_A B = 0$ ve $C_1 = CF_A = 0$ a denktir. Bu nedenle (3.3.46) ifadesi (3.3.53) ye dönüşür. Geri kalan kısımda X (3.3.42) rank denklmeini sağladığında $A - BXC$ nin minimal rankını gözönüne alacağız. Bu amaçla

$$\Delta =^d \left\{X \in F^{k\times l} : r(A - BXC) + r(BXC) = r(A)\right\} \tag{3.3.54}$$

alalım. Kolayca görülür ki Δ boştan farklı bir kümedir.

Teorem 3.3.10 Δ (3.3.54) de tanımlandığı gibi olsun. Bu taktirde

$$\max_{X\in\Delta} r(BXC) = r(A) - r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.55}$$

ve

$$\min_{X\in\Delta} r(A - BXC) = r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.56}$$

dir. (3.3.55) ve (3.3.56) i sağlayan X matrisi (3.3.45) ve (3.3.46) te verilmiştir. Burada U_1, U_2, U_3 ve U_4 matrisleri

$$\begin{aligned} r(U_2E_{A_2}AF_{A_1}U_1) &= r(E_{A_2}AF_{A_1}) \\ r(U_4E_{C_1}CA^- BF_{B_1}U_3) &= r(E_{C_1}CA^- BF_{B_1}) \end{aligned}$$

olacak şekilde saçilmiştir.

İspat. (3.3.42) in (3.3.46) ve (3.3.46) genel çözümlerini BXC de yerine yazarak sırasıyla

$$BXC = AF_{A_1}U_1(U_2E_{A_2}AF_{A_1}U_1)_r^- U_2E_{A_2}A$$

ve

$$BXC = BF_{B_1}U_3(U_4E_{C_1}CA^- BF_{B_1}U_3)_r^- U_4E_{C_1}C$$

elde edilir. Bu durumlarda BXC nin rankı

$$r(BXC) = r(U_2E_{A_2}AF_{A_1}U_1)$$

veya

$$r(BXC) = r(U_4E_{C_1}CA^- BF_{B_1}U_3)$$

olacaktır. Böylece

$$\begin{aligned} \max_{X\in\Delta} r(BXC) &= r(E_{A_2}AF_{A_1}) \\ &= r(E_{C_1}CA^- BF_{B_1}) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu sonucu (3.3.8) ve Lemma 3.3.1 *iv.* ile birleştirirsek (3.3.55) elde edilir. Yine (3.3.54) ten

$$\min_{X\in\Delta} r(A - BXC) = r(A) - \max_{X\in\Delta} r(BXC) \tag{3.3.57}$$

olduğu görülür. Bu nedenle (3.3.56) ifadesi (3.3.57) ve (3.3.57) dan elde edilir. Teorem 3.3.4 ve Teorem 3.3.10 deki sonuçlar göstermektedir ki

$$\min_{X\in\Delta} r(A - BXC) = \min_{X} r(A - BXC)$$

dir. Teorem 3.3.9 aşağıdaki gibi yeniden ifade edilebilir.

Sonuç 3.3.11 Θ (3.3.34) daki gibi olsun. Bu taktirde

$$r(A - Z) + r(Z) = r(A)$$

$Z \in \Theta$ altında rank denkleminin genel çözümü U_1, U_2, U_3 ve U_4 (3.3.45) ve (3.3.46) teki gibi olamk üzere

$$Z = AF_{A_1}U_1(U_2E_{A_2}AF_{A_1}U_1)_r^- U_2E_{A_2}A$$

ve

$$Z = BF_{B_1}U_3(U_4E_{C_1}CA^- BF_{B_1}U_3)_r^- U_4E_{C_1}C$$

şeklinde iki formda yazılabilir.

İspat. Sonucun ispatı Teorem 3.3.9 den kolayca görülebilir.

$$\Theta_A =^d \left\{ Z \in F^{m\times n} : r(A-Z) + r(Z) = r(A), Z \in \Theta \right\} \tag{3.3.58}$$

olsun. Burada Θ, (3.3.34) daki gibi tanımlıdır. Kolaylıkla görülürki $\Theta_A \subseteq \Theta$

Teorem 3.3.11 Θ_A (3.3.58) deki gibi tanımlı olsun. Bu durumda

$$\min_{Z\in\Theta_A} r(A-Z) = r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3.59}$$

$$Z = AF_{A_1}U_1(U_2E_{A_2}AF_{A_1}U_1)_r^- U_2E_{A_2}A \tag{3.3.60}$$

ve

$$Z = BF_{B_1}U_3(U_4E_{C_1}CA^-BF_{B_1}U_3)_r^- U_4E_{C_1}C \tag{3.3.61}$$

formlarında ifade edilebilir. Burada U_1, U_2, U_3 ve U_4 matrisleri

$$r(U_2E_{A_2}AF_{A_1}U_1) = r(E_{A_2}AF_{A_1})$$

ve

$$r(U_4E_{C_1}CA^-BF_{B_1}U_3) = r(E_{C_1}CA^-BF_{B_1})$$

eşitliklerini sağlamaktadır.

İspat. Teoremin ispatı Teorem 3.3.10 den direkt olarak görülmektedir. (3.3.59) i sağlayan herhangi bir $Z \in \Theta_A$ matrisi aynı zamanda A nın Θ_A kısıtlanmış matrisidir ve buna Θ_A ya kısıtlanış matrisi de denir. A nın Θ_A ya kısıtlanış matrislerinin iki genel ifadesi (3.3.60) ve (3.3.61) de verilmiştir. A nın Θ_A ya kısıtlanış matrisinin tekliği ile ilgili tartışma Sonuç 3.3.6 teki ile aynıdır. (3.3.42) in bir özel durumu olarak blok matrisler için

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D-X \end{bmatrix} + r(X)$$

rank denkleminin çözümü ele alınabilir. Bu denklem aşağıdaki standart formda yeniden yazılabilir.

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ I_l \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0 & I_k \end{bmatrix} \right) + r\left(\begin{bmatrix} 0 \\ I_l \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0 & I_k \end{bmatrix} \right)$$

3.4 Birim Elemanlı Bir Regüler Halkada Lineer Matris Denklemi ve Denklem Sistemleri

Bu kısımda

$$\begin{aligned} A_1XB_1 &= C_1 \\ A_2XB_2 &= C_2 \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

şeklindeki bir sistemin genel çözümün varlığı için gerek ve yeter şartlar verilecek ve çözümün ne şekilde ifade edileceği üzerinde durulacaktır.

Bu problem ilk kez 1970' li yıllarda Mitra [33] tarafından ortaya atılmış ve daha sonra bir çok çalışmada da ele alınmışır. [33,66] Kontrol teorisi ve sistemlerdeki bir çok problem $AX - YB = C$ şeklinde [5] Sylvester matris denkleminin çözümüne dayanmaktadır. Roth [43] bir çalışmasında Roth varlık teoremi adındaki bir teoremde matris denkleminin tutarlılığı için bir gerek ve yeter şart vermiştir. Sylvester denkleminin bir genelleştirmesi olarak

$$AXB + CYD = E \tag{3.4.2}$$

matris denklemi Baksalary ve Kalar [4], Özgüler [39], Wang [66] vs. bir çok araştırmacı tarafından ele alınmıştır.

Burada biz birim elemanlı bir $\mathcal{R}$ regüler halkası üzerinde (3.4.1) denklemini göz önüne alacağız. (3.4.1) denkleminin genel çözümünün bir ifadesini vereceğiz ve çözümün varlığı için gerek ve yeter şart bulmaya çalışacağız. Daha sonra $\mathcal{R}$ üzerinde (3.4.2) denkleminin genel çözümünün ifadeleri ve çözümün varlığı için bazı gerek ve yeter şartlar elde edilecektir. Son olarak (3.4.1) sistemine göre bazı araştırma problemleri ve bazı başlangıç yorumları geliştireceğiz.

Bilindiği gibi bir $\mathcal{R}$ halkasına regülerdir denir. Eğer her $a \in \mathcal{R}$ için $aa^{(1)}a = a$ olacak şekilde bir $a^{(1)} \in \mathcal{R}$ elemanı mevcutsa, burada $a^{(1)}$ a' nin iç tersi ile aynı anlama gelmektedir. Çalışmamızda $\mathcal{R}$ regüler bir halka olmak üzere $\mathcal{R}$ üzerindeki tüm $m \times n$ matrislerin kümesini $\mathcal{R}^{m\times n}$ ile göstereceğiz. $\mathcal{R}^{m\times n}$ de bir A matrisi için $AA^{(1)}A = A$ şartını sağlayan $A^{(1)}$ matrisine A' nın iç inversi, $AA^{+}A = A$

ve $A^+AA^+ = A$ eşitliklerini sağlayan A^+ matrisine A' nın yansımalı inversi adı verilir. Açıkça görülmektedirki eğer X iç invers ise XAX A' nın bir yansımalı inversi olacaktır. Dolayısıyla bir A matrisi bir iç inverse sahiptir ancak ve ancak bir yansımalı inverse sahiptir. Üstelik $L_A = I - A^+A$ ve $\mathcal{R}_A = I - AA^+$, A^+ keyfi fakat sabit bir ters, olduğunu belirtelim.

$$T_{m+r,s+n} = \left\{ \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} : A \in \mathcal{R}^{m\times s},\ B \in \mathcal{R}^{r\times n},\ C \in \mathcal{R}^{m\times n} \right\}$$

olsun. $A \in \mathcal{R}^{m\times s},\ B \in \mathcal{R}^{r\times n},\ C \in \mathcal{R}^{m\times n}$ matrisleri için eğer

$$\begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} Q$$

olacak şekilde $P \in T_{m+r,m+r}$ ve $Q \in T_{s+n,s+n}$ tersinir matrisleri bulunabilirse bu taktirde

$$\begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}$$

diyeceğiz.

Önerme 3.4.1 Regüler bir halka üzerindeki tüm kare matrislerin halkası bir regülerdir.

Önerme 3.4.2 Bir $\mathcal{R}$ halkasının regüler olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{R}^{m\times n}$ deki her matrisin bir yansımalı inverse sahip olmasıdır.

İspat. $\mathcal{R}^{m\times n}$ deki her matris bir yansımalı inverse sahip olsun. Bu taktirde keyfi bir $a \in \mathcal{R}; E_{11}$ (3.4.1)-inci elemanı 1 diğerleri 0 olan bir matris olmak üzere $A = aE_{11} \in \mathcal{R}^{m\times n}$ olsun ve $A^{(1)} = (b_{ij})_{n\times m}$ olduğunu varsayalım. $aE_{11} = (aE_{11})A^{(1)}(aE_{11})$ olduğundan $a = ab_{11}a$ elde edilir. Bu ise $\mathcal{R}$'nin regüler olduğunu gösterir. Tersine olarak $\mathcal{R}$ regüler bir halka olsun. Önerme (3.4.1)' e göre herhangi bir $A \in \mathcal{R}^{m\times n}$ matrisi için A bir iç inverse sahiptir. Dolayısıyla $m = n$ ise bir yansımalı inverse sahip olacaktır. $m \neq n$ olması durumu için genelliği bozmaksızın $m > n$ kabul edebiliriz. A' ya 0 stunları ekleyerek $(A, 0) \in \mathcal{R}^{m\times m}$ yazabiliriz. Bu durumda Önerme (3.4.1)' e göre $(A, 0)$ matrisi $B_1 \in \mathcal{R}^{n\times m}$ olmak üzere bir $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ iç inverse sahip olacaktır. Böylece

$$(A,0)\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}(A,0) = (A,0)$$

ve buradan da $AB_1A = A$ yani $A^{(1)} = B_1$ olduğu görülür. Bu nedenle A matrisi bir B_1AB_1 yansımalı inverse sahip olacaktır.

3.4.1 (3.4.1) Denklem Sistemi İçin Genel Çözüm

Lemma 3.4.1 $A \in \mathcal{R}^{m\times s},\ B \in \mathcal{R}^{r\times n}$ ve $C \in \mathcal{R}^{m\times n}$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir:

i. $AX - YB = C$ mstrid denklemi tutarlıdır.

ii. $R_ACL_B = 0$ dır.

iii. $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ dır.

Lemma 3.4.2 $A \in \mathcal{R}^{m\times s},\ B \in \mathcal{R}^{r\times n}$ ve $C \in \mathcal{R}^{m\times n}$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir:

i.

$$AXB = C \tag{3.4.3}$$

matris denklemi tutarlıdır.

ii. $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$

iii. $AA^+CB^+B = C$

iv. $AA^+C = C,\ \ CB^+C = C$

Bu durumda (3.4.3) matris denkleminin genel çözümü, U, V $\mathcal{R}$ üzerinde çarpımlara uygun boyutlu keyfi matrisler olmak üzere,

$$X = A^+CB + L_AV + UR_B$$

dir.

Lemma 3.4.3 $\mathcal{R}$' de A ve B matrisleri için

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}, \quad S = A_2 L_{A_1}, \quad T = R_{B_1} B_2$$

olsun. Bu taktirde

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_1^+ - L_{A_1} S^+ A_2 A_1^+ & L_{A_1} S^+ \end{bmatrix}, \quad B^+ = \begin{bmatrix} B_1^+ - B_1^+ B_2 T^+ R_{B_1} \\ T^+ R_{B_1} \end{bmatrix} \tag{3.4.4}$$

matrisleri sırasıyla A ve B' nin yansımalı inversleridir.

İspat. $A_1 L_{A_1} S^+ A_2 A_1^+ = 0$, $R_{B_1} = 0$ olduğunu belirtelim. Bu taktirde tanıma göre (3.4.4)' deki ifadelerin sağlandığı kolaca görülür.

Teorem 3.4.1 $A_1 \in \mathcal{R}^{m\times n}$, $A_2 \in \mathcal{R}^{s\times n}$, $B_1 \in \mathcal{R}^{r\times p}$, $B_2 \in \mathcal{R}^{r\times l}$, $C_1 \in \mathcal{R}^{m\times p}$, $C_2 \in \mathcal{R}^{s\times f}$ bilinen matrisler ve $X \in \mathcal{R}^{n\times r}$ bilinmeyenler matrisi, $S = A_2 L_{A_1}$, $T = R_{B_1} B_2$, $F = B_2 L_T$, $G = R_S A_2$ olsun. Bu taktirde şağıdaki şartlar denktir.

i. (3.4.1) sistemi tutarlıdır.

ii.

$$A_i A_1^+ C_i B_i^+ B_i = C_i, \quad i = 1, 2 \tag{3.4.5}$$

ve

$$G\left(A_2^+ C_2 B_2^+ - A_1^+ C_1 B_1^+\right) F = 0 \tag{3.4.6}$$

iii.

$$\begin{bmatrix} A_1 & C_1 & 0 \\ A_2 & 0 & -C_2 \\ 0 & B_1 & B_2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & B_2 \end{bmatrix} \tag{3.4.7}$$

ve

$$\begin{bmatrix} A_i & C_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & C_i \\ 0 & B_i \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2 \tag{3.4.8}$$

dir. Bu durumda (3.4.1) sisteminin genel çözümü Y ve W, $\mathcal{R}$' de uygun boyutta matrisler olmak üzere,

$$\begin{aligned} X &= A_1^+C_1B_1^+ + L_{A_1}S^+ + A_2L_G\left(A_2^+C_2B_2^+ - A_1^+C_1B_1^+\right)B_2B_2^+ \\ &\quad +G^+ + G\left(A_2^+C_2B_2^+ - A_1^+C_1B_1^+\right)B_2T^+R_{B_1} \\ &\quad +L_{A_1}\left(Y - S^+SYB_2B_2^+\right) - L_{A_1}S^+A_2L_GWTB_2 \\ &\quad +\left(W - G^+GWTT^+\right)R_{B_1} \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

İspat. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* : (3.4.1) sistemi bir X_0 çözümüne sahip olsun. Bu taktirde $A_iX_0B_i = C_i,\ i = 1,2$ olacaktır. Böylece Lemma 3.4.2' den (3.4.5) eşitliğinin sağlandığı ve U ve V $\mathcal{R}$' de matrisler olmak üzere

$$X_0 = A_1^+C_1B_1^+ + L_{A_1}V + UR_{B_1}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $A_2X_0B_2 = C_2$ olduğundan

$$A_2UT + SVB_2 = C_2 - A_2A_1^+C_1B_1^+B_2 \tag{3.4.10}$$

yazılabilir. $R_SS = 0$ ve $TL_T = 0$ olduğundan (3.4.5) ve (3.4.10)' den

$$\begin{aligned} G\left(A_2^+C_2B_2^+ - A_1^+C_1B_1^+\right)F &= R_S\left(C_2 - A_2A_1^+C_1B_1^+B_2\right)L_T \\ &= R_S\left(A_2UT + SVB_2\right)L_T = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani (3.4.6) sağlanır.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)* : (3.4.5) ve (3.4.6)' ün sağlandığını varsayalım. (3.4.6)' ten

$$G\left(A_2^+C_2B_2^+ - A_1^+C_1B_1^+\right)B_2T^+T = G\left(A_2^+C_2B_2^+ - A_1^+C_1B_1^+B_2\right) \tag{3.4.11}$$

yazılabilir. $A_1L_{A_1} = 0,\ R_{B_1}B_1 = 0$ olduğundan (3.4.5)' ten (3.4.9) formundaki X matrisinin $A_1XB_1 = C_1$' in bir çözümü olduğu söylenebilir. Şimdi (3.4.9) formundaki X matrisinin $A_2XB_2 = C_2$' nin de bir çzöümü olduğunu gösterelim.

$$SS^+A_2 = A_2 = A_2 - G,\ \ TB_2^+B_2 = T$$

olduğundan (3.4.5) ve (3.4.11)' a göre

$$\begin{aligned}
A_2XB_2 &= A_2A_1^+C_1B_1^+B_2 + A_2L_{A_1}S^+A_2L_G\left(A_2^+C_2B_2^+ - A_1^+C_1B_1^+\right)B_1B_2^+B_2 \\
&\quad +A_2G^+G\left(A_2^+C_2B_2^+ - A_1^+C_1B_1^+\right)B_2T^+R_{B_1}B_2 \\
&\quad +A_2L_{A_1}\left(Y - S^+SYB_2B_2^+\right)B_2 - A_2L_{A_1}S^+A_2L_GWTB_2^+B_2 \\
&\quad +A_2\left(W - G^+GWTT^+\right)R_{B_1}B_2 \\
&= A_2A_1^+C_1B_1^+B_2 + (A_2 - G)L_G\left(A_2^+C_2B_2^+ - A_1^+C_1B_1^+\right)B_2 \\
&\quad +A_2G^+G\left(A_2^+C_2B_2^+ - A_1^+C_1B_1^+\right)B_2 + S\left(Y - S^+S_YB_2B_2^+\right)B_2 \\
&\quad -(A_2 - G)L_GWT + A_2\left(W - G^+GWTT^+\right)T \\
&= A_2A_1^+C_1B_1^+B_2 + A_2\left(A_2^+C_2B_2^+ - A_1^+C_1B_1^+\right)B_2 \\
&= C_2 \qquad (3.4.12)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.4.9) formundaki X matrisi (3.4.1) sisteminin bir çözümüdür.

(i) $\Rightarrow$ *(iii)* : (3.4.1) sistemi bir X_0 çözümüne sahip olsun. Bu taktirde

$$A_1X_0B_1 = C_1, \quad A_2X_0B_2 = C_2$$

dir. Bunun sonucu olarak Lemma 3.4.2' ye göre (3.4.8) sağlanır.

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & A_2X_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & C_1 & 0 \\ A_2 & 0 & -C_2 \\ 0 & B_1 & B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -X_0B_1 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & B_2 \end{bmatrix}$$

eşitliğinden (3.4.7)' in sağlandığı görülür.

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)* : Eğer (3.4.8) sağlanırsa bu taktirde Lemma 3.4.2' ye göre (3.4.5) sağlanır. Şimdi (3.4.7)' in sağlandığını varsayalım. Bu taktirde Lemma 3.4.1' den

$$\left[I - \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^+\right]\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & -C_2 \end{bmatrix}\left[I - \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}^+\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}\right] = 0 \qquad (3.4.13)$$

elde edilir. Lemma 3.4.3 ve (3.4.5) ifadesinden

$$\begin{aligned}
-\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^+ &= \begin{bmatrix} R_{A_1} & 0 \\ -GA_1^+ & R_S \end{bmatrix}, \\
\left[I - \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}\right] &= \begin{bmatrix} L_{B_1} & -B_1^+F \\ 0 & L_T \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu nedenle (3.4.13)

$$\begin{bmatrix} R_{A_1}C_1L_{B_1} & -R_{A_1}C_1B_1^+F \\ -GA_1^+C_1L_{B_1} & G\left(A_1^+C_1B_1^+ - A_2^+C_2B_2^+\right)F \end{bmatrix} = 0$$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla $(A_1^+C_1B_1^+ - A_2^+C_2B_2^+)F = 0$ olur. Yani (3.4.6) gerçeklenir.

Şimdi (3.4.1) sistemi tutarlı ise yani (3.4.5) ve (3.4.6) sağlanırsa bu taktirde (3.4.1)' in genel çözümünün (3.4.9)' deki gibi ifade edilebileceğini gösterelim. *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)*' de (3.4.9) formundaki bir X matrisinin (3.4.1) sisteminin bir çözümü olduğunu göstermiştik. Dolayısıyla (3.4.1) sisteminin herhangi bir X_0 keyfi çözümünün (3.4.9) formundaki gibi ifade edilebildiğini göstermemiz gerekmektedir.

$$\begin{aligned}
U &= W - G^+GWTT^+ + G^+G\left(A_2^+C_2B_2^+ - A_1^+C_1B_1^+\right)B_2T^+, \\
V &= Y - S^+SYB_2B_2^+ + S^+\left(C_2 - A_2A_1^+C_1B_1^+B_2 - A_2UT\right)B_2^+
\end{aligned}$$

olsun. Bu taktirde (3.4.11) ve (3.4.5) ifadelerine göre (3.4.9) ifadesi

$$X = A_1^+C_1B_1^+ + L_{A_1}V + UR_{B_1} \tag{3.4.14}$$

şeklinde olur. X_0 (3.4.1) sisteminin keyfi bir çözümü olmak üzere $W = X_0$, $Y = X_0B_1B_1^+$ olduğunu varsayalım. Bu taktirde,

$$\begin{aligned}
X_0 - U &= G^+GX_0TT^+ - G^+G(A_2^+C_2B_2^+ - A_1^+C_1B_1^+)B_2T \\
&= G^+R_S(A_2X_0R_{B_1}B_2 - C_2 + A_2A_1^+C_1B_1^+B_2)T^+ \\
&= G^+R_S(A_2A_1^+C_1B_1^+B_2 - A_2X_0B_1B_1^+B_2)T^+ \\
&= -G^+R_SSX_0B_1B_1^+B_2T^+ \\
&= -G^+R_SSX_0B_1B_1^+B_2T^+ \\
&= -G^+R_SSX_0B_1B_1^+B_2T^+ = 0
\end{aligned}$$

yani $X_0 = U$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} X_0B_1B_1^+ - V &= S^+SX_0B_1B_1^+B_2B_2^+ - S^+(C_2 - A_2A_1^+C_1B_1^+B_2 - A_2X_0T)B_2^+ \\ &= S^+(SX_0B_1B_1^+B_2 - C_2 + A_2A_1^+C_1B_1^+B_2 + A_2X_0T)B_2^+ \\ &= S^+(A_2X_0B_1B_1^+B_2 - A_2A_1^+A_1X_0B_1B_1^+B_2 - C_2 + A_2A_1^+C_1B_1^+B_2 \\ &\quad + A_2X_0T)B_2^+ \\ &= S^+\left[A_2X_0(B_1B_1^+R_{B_1})B_2 - C_2\right]B_2^+ \\ &= S^+(A_2X_0B_2 - C_2)B_2^+ = 0 \end{aligned}$$

Yani $X_0B_1B_1^+ = V$ elde edilir. Dolayısıyla

$$X_0 = A_1^+C_1B_1^+ + L_{A_1}X_0B_1B_1^+ + X_0R_{B_1}$$

(3.4.14)' deki gibi yani (3.4.9)' deki gibi ifade edilebilir. Burada

$$W = X_0, \;\; Y = X_0B_1B_1^+$$

dir.

3.4.2 $AXB + CYD = E$ Lineer Matris Denklemi

Bu kısımda Teorem 3.4.1' ü kullanarak $A \in \mathcal{R}^{m\times n}, \;\; B \in \mathcal{R}^{p\times q}, \;\; C \in \mathcal{R}^{m\times r}, \;\; D \in \mathcal{R}^{l\times q}, \;\; E \in \mathcal{R}^{m\times q}$ bilinenler olmak üzere (3.4.2) lineer matris denklemini göz önüne alacağız.

$$M = R_AC, \;\; N = DL_B, \;\; S = CL_M,$$

$$T = R_DN, \;\; F = NL_T, \;\; G = R_SC,$$

$$P = R_CA, \;\; Q = BL_D, \;\; S_1 = AL_P,$$

$$T_1 = R_BQ, \;\; G_1 = R_{S_1}A$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.4.2 (3.4.2) lineer matris denklemi için aşağıdaki ifadeler denktir.

i. (3.4.2) tutarlıdır.

ii. $R_M R_A E = 0, \;\; R_A E L_D = 0, \;\; E L_B L_N = O, \;\; R_C E L_B = 0$

iii. $MM^+ R_A E D^+ D = R_A E, \;\; CC^+ E L_B N^+ N = E L_B$

iv. $R_P R_C E = 0, \;\; B_C E L_B = 0, \;\; R_A E L_D = 0, \;\; E L_D L_Q = 0$

v. $PP^+ B_C E B^+ B = B_C E, \;\; AA^+ E L_D Q^+ Q = E L_D$

vi.

$$\begin{bmatrix} A & E \\ 0 & D \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}, \tag{3.4.15}$$

$$\begin{bmatrix} C & E \\ 0 & B \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \tag{3.4.16}$$

$$\begin{bmatrix} (A\ C) & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} (A\ C) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.4.17}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & E \\ 0 & \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} \end{bmatrix} \tag{3.4.18}$$

Bu durumda (3.4.2)' nin genel çözümü, U, VW, Z uygun boyutlu matrisler olmak üzere,

$$\begin{aligned} X &= A^+(E - CYD)B^+ + L_A U + Z R_B, \\ Y &= M^+ R_A E D^+ + L_M (V - S^+ S V N N^+) \\ &\quad - L_M S^+ C L_G W T N^+ + (W - G^+ G W T T^+) R_D \end{aligned} \tag{3.4.19}$$

veya U, VW, Z uygun boyutlu matrisler olmak üzere,

$$\begin{aligned} X &= P^+ R_C E B^+ + L_P (V_1 - S_1^+ S_1 V_1 Q Q^+) - L_P S^+ A L_{G_1} W_1 T_1 Q^+ \\ &\quad + (W_1 - G_1^+ G_1 W_1 T_1 T_1^+) R_B \\ Y &= C^+(E - CXD)D^+ + L_C U_1 + Z_1 R_D \end{aligned} \tag{3.4.20}$$

şeklinde ifade edilebilir.

İspat. $ii \Rightarrow iii$, $iv \Rightarrow v$ durumları açıkça görülür. Şimdi $i \Rightarrow ii$ durumunu gösterelim.

Bu durumda (3.4.2) matris denkleminin tutarlı olması için gerek ve yeter şart $AXB = E - CYD$ matris denkleminin tutarlı olmasıdır. Lemma 3.4.2' ye göre (3.4.2) matris denkleminin tutarlı olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} AA^{+}(E-CYD) &= E-CYD, \\ (E-CYD)B^{+}B &= E-CYD, \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned} MYD &= R_A E \\ CYN &= EL_B \end{aligned} \tag{3.4.21}$$

sisteminin tutarlı olmasıdır. Teorem 3.4.1' e göre (3.4.21) sisteminin tutarlı olabilmesi için gerek ve yeter şart *iii* koşulunun sağlanması ve

$$G(C^{+}EL_BN^{+} - M^{+}R_AED^{+})F = 0 \tag{3.4.22}$$

olmasıdır. Şimdi (3.4.22) ifadesini kullanarak eğer *iii* yani *ii* sağlanırsa bu taktirde,

$$G(C^{+}EL_BN^{+} - MR_AED^{+})N = 0 \tag{3.4.23}$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim. $S = CL_M$ olduğundan $CM^{+}M = C - S$ elde edilir. $R_SS = 0$ olacağından

$$\begin{aligned} GM^{+}R_AED^{+}N &= R_SCM^{+}R_AED^{+}DL_B = R_SCM^{+}R_AEL_B \\ &= R_SCM^{+}R_ACC^{+}EL_B = R_SCM^{+}MC^{+}EL_B \\ &= R_S(C-S)C^{+}EL_B = R_SCC^{+}EL_B \\ &= R_SEL_B \\ GC^{+}EL_BN^{+}N &= R_SCC^{+}EL_BN^{+}N = R_SEL_B \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu nedenle (3.4.22)' in sağlanması durumunda (3.4.23)' da sağlanır. Dolayısıyla (3.4.21) sistemi tutatlı olur, böylece (3.4.2)' nin tutarlı olması için gerek ve yeter şart *ii*' nin sağlanmasıdır.

Benzer şekilde $i \Leftrightarrow iv$ gösterilebilir.

$i \Leftrightarrow vi$ durumunu ispatlayalım. Farzedelim ki (3.4.2) sistemi tutarlı olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = E$$

matris denklemi tutarlıdır ve Lemma 3.4.1' e göre (3.4.15) ve (3.4.16) sağlanır. Böylece Lemma 3.4.2' den (3.4.17) ve (3.4.18)' ün de sağlandığı görülür. Sonuç olarak vi sağlanmış olur. Tersine olarak farzedelim ki vi koşulu sağlansın. Bu taktirde (3.4.17), (3.4.18) ve Lemma 3.4.1 kullanarak

$$\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} X = E \tag{3.4.24}$$

ve

$$Y \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = E \tag{3.4.25}$$

matris denklemlerinin tutarlı olduğu görülür. O halde X_0, Y_0' ın sırasıyla (3.4.24) ve (3.4.25)' in bir çözümü olduğunu kabul edebiliriz.

$$DL_BL_N = NL_N = 0, \;\; R_MM = 0, \;\; R_AA = 0, \;\; BL_B = 0$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} R_MR_AE &= R_MR_A \begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} X_0 \\ &= \begin{bmatrix} R_MR_AAX_0 & R_MR_ACX_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_MR_AX_0 & R_MMX_0 \end{bmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} EL_BL_N &= Y_0 \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} L_BL_N \\ &= Y_0 \begin{bmatrix} BL_BL_N \\ DL_BL_N \end{bmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.4.15), (3.4.16) ve Lemma 3.4.1' e göre $AX - YD = E$ ve $CX - YB = E$ denklemleri tutarlı olacaktır. Bu nedenle Lemma 3.4.1' in sonucu olarak $R_A E L_D = 0$, $R_C E L_B = 0$ olduğu yani *ii* şartının sağlandığı görülür. Böylece (3.4.2) sistemi tutarlıdır.

Eğer (3.4.2) sistemi bir çözüme sahipse bu taktirde (3.4.22), Teorem 3.4.1 ve Lemma 3.4.2' ye göre (3.4.19) ve (3.4.20)' da verilen X ve Y' nin (3.4.2)' nin genel çözümü olacağı görülür. Böylece de Teorem ispatlanmış olur.

3.5 Matris Denklemlerinin Çözümlerindeki Altmatrislerin Tekliği ve Bağımsızlığı

A ve B sırasıyla $m \times n$ ve $m \times k$ tipinde matrisler olmak üzere $AX = B$ eşitliğini sağlayan bir X matrisinin mevcut olduğunu varsayalım. Matris denklemi

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = A_1 X_1 + A_2 X_2 = B \tag{3.5.1}$$

blok formunda parçalayalım. Bu kısımda bu matris denklemiyle ilgili aşağıdaki iki temel problemi ele alacağız:

i. Hangi şartlar altında (3.5.1)' in çözümündeki X_1 ve X_2 tektir?

ii. Hangi şartlar altında (3.5.1)' in çözümündeki X_1 ve X_2 bağımsızdır. Yani (3.5.1)' in herhangi iki $\begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} X_1'' \\ X_2'' \end{bmatrix}$ çözümü için $\begin{bmatrix} X_1' \\ X_2'' \end{bmatrix}$' de bir çözüm olur?

Matrislerin genelleştirilmiş inversleri ile ilgili teoriden bilinmektedir ki (3.5.1) denkleminin tutarlı olması için gerek ve yeter şart $AA^- B = B$ olmasıdır. Bu durumda (3.5.1)' in genel çözümü, A^-, A' nın bir genelleştirilmiş inversi yani $AA^- A = A$ ve V keyfi bir matris olmak üzere

$$X = A^- B + (I_n - A^- A)V \tag{3.5.2}$$

şeklinde yazılabilir. X' deki X_1 ve X_2 sırasıyla $n_1 \times k$ ve $n_2 \times k$ tipinde olsun. Bu taktirde X_1 ve X_2' nin genel ifadeleri $P_1 = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \end{bmatrix}$ ve $P_2 = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$X_1 = P_1 A^- B + P_1(I_n - A^- A)V \tag{3.5.3}$$

$$X_2 = P_2 A^- B + P_2(I_n - A^- A)V \tag{3.5.4}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $r(A < n)$ ise bu taktirde (3.5.1)' in çözümü tektir. Basitlik için $\{X_1\}$ ve $\{X_2\}$ ile (3.5.1)' in X_1 ve X_2 çözümlerinin ailesini gösterelim. Yani

$$\{X_1\} = \left\{X_1 : X_1 = P_1 A^- B + P_1(I_n - A^- A)V_1\right\} \tag{3.5.5}$$

$$\{X_2\} = \left\{X_2 : X_2 = P_2 A^- B + P_2(I_n - A^- A)V_2\right\} \tag{3.5.6}$$

olsun şimdi i ve ii' deki iki problemin çözümünü bulabiliriz.

Teorem 3.5.1 (3.5.1) denklemi tutarlı olsun. Bu taktirde

i. (3.5.1)' in çözümündeki X_1 bloğunun tek olması için gerek ve yeter şart

$$r(A) = n_1 + r(A_2) \tag{3.5.7}$$

veya buna denk olarak

$$\mathcal{R}(A_1) \cap \mathcal{R}(A_2) = \{0\} \text{ ve } r(A_1) = n_1 \tag{3.5.8}$$

olmasıdır.

ii. (3.5.1)' in çözümündeki X_2 bloğunun tek olması için gerek ve yeter şart

$$r(A_2) = n_2 \text{ ve } \mathcal{R}(A_1) \cap \mathcal{R}(A_2) = \{0\} \tag{3.5.9}$$

olmasıdır.

İspat. (3.5.3)' de verilen X_1' in genel ifadesinden kolayca görülür ki X_1 tektir ancak ve ancak

$$P_1(I_n - A^- A) = 0 \tag{3.5.10}$$

dır. Böylece

$$r\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = r(M) + r(N - NM^{-}M) \tag{3.5.11}$$

rank formülünden

$$r\begin{bmatrix} A \\ P_1 \end{bmatrix} = r(A) \tag{3.5.12}$$

olduğu görülür. Burada $P_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix}$ alıp gerekli sadeleştirme yapılarak (3.5.7) elde edilir. Aynı şekilde

$$r(A) \leq r(A_1) + r(A_2) \leq n_1 + r(A_2)$$

yazılabilir. Böylece (3.5.7) ifadesi (3.5.8) ifadesine denktir. Benzer şekilde *ii* şıkkının ispatı yapılabilir.

Teorem 3.5.2 (3.5.1) denkleminin tutarlı olduğunu kabul edelim. Bu taktirde (3.5.1)' in çözümündeki X_1 ve X_2 blokları bağımsızdır, yani herhangi $X_1 \in \{X_1\}$ ve $X_2 \in \{X_2\}$ için $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ (3.5.1)' in bir çözümüdür ancak ve ancak

$$\mathcal{R}(A_1) \cap \mathcal{R}(A_2) = \{0\} \tag{3.5.13}$$

dır.

İspat. (3.5.5) ve (3.5.6)' da verilen X_1 ve X_2 değerlerini $AX - B$ ifadesinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} AX - B &= A_1X_1 + A_2X_2 - B \\ &= A_1P_1A^{-}B + A_1P_1(I_n - A^{-}A)V_1 + A_2P_2A^{-}B + A_2P_2(I_n - A^{-}A)V_2 - B \\ &= (A_1P_1 + A_2P_2)A^{-}B + A_1P_1(I_n - A^{-}A)V_1 + A_2P_2(I_n - A^{-}A)V_2 - B \\ &= \begin{bmatrix} A_1P_1(I_n - A^{-}A), & A_2P_2(I_n - A^{-}A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik göstermektedir ki herhangi $X_1 \in \{X_1\}$ ve $X_2 \in \{X_2\}$ için $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ (3.5.1)' in bir çözümüdür ancak ve ancak

$$A_1P_1(I_n - A^{-}A) = 0 \;\text{ ve }\; A_2P_2(I_n - A^{-}A) = 0$$

dır. (3.5.11) rank formülünden bu iki eşitliğin

$$r\begin{pmatrix} A \\ A_1P_1 \end{pmatrix} = r(A) \text{ ve } r\begin{pmatrix} A \\ A_2P_2 \end{pmatrix} = r(A) \tag{3.5.14}$$

eşitliklerine denk olduğu elde edilir, burada

$$r\begin{pmatrix} A \\ A_1P_1 \end{pmatrix} = \text{rank}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_1 & 0 \end{bmatrix} = \text{rankA}_1 + \text{rankA}_2$$

ve

$$r\begin{pmatrix} A \\ A_2P_2 \end{pmatrix} = \text{rank}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \text{rankA}_1 + \text{rankA}_2$$

dır. Böylece (3.5.14) (3.5.13)' e denk olmuş olur.

Teorem 3.5.2' deki sonuç p blok parçalı X matrisine de genişletilebilir.

Teorem 3.5.3 $AX = B$ tutarlı olsun ve aşağıdaki gibi parçalansın.

$$AX = [A_1, A_2, \ldots, A_p]\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} = A_1X_1 + A_2X_2 + \ldots + A_pX_p = B \tag{3.5.15}$$

Bu taktirde (3.5.15)' deki $X_1, X_2, \ldots, X_p$ blokları bağımsızdır ancak ve ancak

$$r[A-1, A_2, \ldots, A_p] = r(A_1), r(A_2), \ldots, r(A_p) \tag{3.5.16}$$

dır.

Matrislerin kroneker çarpımına göre herhangi bir lineer matris denkleminin $AX = B$ formunda bir lineer matris denklemine dönüştürülebildiği bilinmektedir. Böylece herhangi bir lineer matris denkleminin çözümündeki alt matrislerin tekliği ve bağımsızlığı yukarıdaki üç teoremdeki sonuçlar kullanılarak test edilebilir. Örneğin A, B, C ve D sırasıyla $m \times p_1$, $q_1 \times n$, $m \times p_2$, $q_2 \times n$ matrisleri için

$$AXB + CYD = E \tag{3.5.17}$$

formunda bir matris denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin çözümü ve tutarlılığı bir çok araştırmacı tarafından ele alınmıştır.

Matrislerin kroneker çarpımından bu denklem, denk olarak,

$$(B^T \otimes A)\mathrm{vecX} + (\mathrm{D}^\mathrm{T} \otimes \mathrm{C})\mathrm{vecY} = \mathrm{vecE} \tag{3.5.18}$$

formunda yazılabilir. Şimdi farzedelim ki(3.5.17) tutarlı olsun. Bu taktirde Teorem 3.5.1 *i*' den (3.5.17)' nin çözümünün tek olması için gerek ve yeter şart

$$r(B^T \otimes A) = p_1 q_1 \ \text{ ve } \ \mathcal{R}(B^T \otimes A) \cap \mathcal{R}(D^T \otimes C) = \{0\} \tag{3.5.19}$$

olmasıdır. Teorem 3.5.2' den (3.5.17)' deki X ve Y için çözümlerin bağımsız olması için gerek ve yeter şart

$$\mathcal{R}(B^T \otimes A) \cap \mathcal{R}(D^T \otimes C) = \{0\} \tag{3.5.20}$$

olmasıdır. $r(M \otimes N) = [r(M)]\,[r(N)]$ temel gerçeğinden $r(B^T \otimes A) = p_1 q_1$ olması $r(A) = p_1$ ve $r(B) = q_1$ olmasına denktir. Öte yandan

$$r[A \otimes B, C \otimes D] \geq r(B)r[A, C] - r(B)r(C) + r(C)r(D)$$

ve

$$r[A \otimes B, C \otimes D] \geq r(A) + r[B, D] - r(A)r(D) + r(C)r(D)$$

olduğunu Tian [60] tarafından gösterilmiştir. Bu nedenle eğer $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(C) = \{0\}$ veya $\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{R}(D) = \{0\}$ ise bu taktirde

$$r[A \otimes B, C \otimes D] = r(A \otimes B) + r(C \otimes D)$$

olacaktır. Böylece eğer $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(C) = \{0\}$ veya $\mathcal{R}(B^T) \cap \mathcal{R}(D^T) = \{0\}$ ise bu taktirde (3.5.20) eşitliği sağlanır.

Uyarı 3.5.1 Herhangi bir tutarlı lineer matris denklemi için matris denkleminin çözümündeki alt matrislerin tekliği ve bağımsızlığı araştırılabilir. Bu çalışmayı sürdürerek

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = C$$

tutarlı matris denkleminin çözümündeki X_1, X_2, X_3, X_4 alt matrislerinin tekliği ve bağımsızlığı [60]' da ele alınmıştır. Bir uygulama olarak $M^- = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix}$ genelleştirilmiş inversindeki G_1, G_2, G_3, G_4 alt matrislerinin tekliği ve bağımsızlığı aynı çalışmada verilmiştir. Ayrıca $AX = C$ ve $AXB = C$ kompleks sayılar cismi üzerinde iki tutarlı matris denklemi olsun, ve bunlarun çözümleri $X = X_0 + iX_2$ olarak yazılabilsin. Bu taktirde bu iki X_0 ve X_1 reel matrislerinin tekliği ve bağımsızlığı doğal olarak akla gelen bir sorudur. Matris denklemleri lineer cebirdeki çalışmaların temel kavramlarıdır. $AX = B$ ve $AXB = C$ tipindeki denklemlerin yanında bazı diğer genel lineer matris denklemleri de literatürde detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Örneğin

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_1XB_1 & A_2XB_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, \\ A_1XB_1 + A_2XB_2 &= C, \\ A_1X_1B_1 + A_2X_2B_2 + A_3X_3B_3 &= C \end{aligned}$$

gibi. Bu denklemlerin çözümlerinin tekliği ve bağımsızlığı da araştırmaya değerdir.

3.6 $AXB + CYD = M$ Matris Denkleminin Çözümlerinin Rankları ve Bağımsızlığı

A^T, A^*, $r(A)$ ve $\mathcal{R}(A)$ notasyonları sırasıyla $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir A matrisinin transpozunu, eşlenik traspozunu, rankını ve ranjını (sütun uzayını) gösterir. Bir X matrisine A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi denir. Şayet $AXA = A$ sağlanıyorsa. Arıca $E_A = I - AA^-$ ve $F_A = I - A^-A$ A ve A^- tarafından türetilen iki izdüşüm olsun.

Lineer matris denklemleri matris teorisi ve uygulamalarında ki pek çok çalışmanın konusu olmuştur. Matris denklemlerinin incelenmesindeki temel çalışma bu denklemlerin çözülebilirlik şartları ve genel çözümleridir. Bunlara ilaveten bir matris denklemi için incelenebilecek olan pek çok başlıca konuda vardır. Örneğin çözümün tekliği, minimal norm çözümler, en küçük kroler çözümleri, Hermityan çözümler ve çarpık Hermityan çözümler araştırılabilir. Bazı en basit matris denklemleri için genelleştirilmiş inversler yardımıyla çözülebilirliği karakterize etmek ve genel çözümleri vermek oldukça kolaydır. Örneğin A, B ve C sırasıyla $m \times p$, $q \times n$ ve $m \times n$ tipinde matrisler olmak üzere $AXB = C$ matris denkleminin tutarlı olması için gerek ve yeter şart $AA^{-}CB^{-}B = C$ olmasıdır. Bu durumda $AXB = C$' nin genel çözümü U ve V keyfi matrisler olmak üzere $X = A^{-}CB^{-} + (I_p - A^{-}A)U + V(T_q - BB^{-})$ olarak yazılabilir. $AXB = C$' nin çözümü için pek çok problem göz önüne alınabilir. Bunlardan bir tanesi çözümlerin maksimal ve minimal mümkün ranklarının belirlenmesidir. Tian [56] bir çalışmasında

$$\max_{AXB=C} r(X) = \min\{p, q, p + q + r(C) - r(A) - r(B)\}$$

ve

$$\min_{AXB=C} r(X) = r(C)$$

olduğunu göstermiştir. $AXB = C$' nin kompleks çözümünü X_0 ve X_1 reel olmak üzere $X = X_0 + iX_1$ şeklinde yazalım. Tian [56] X_0 ve X_1' in maksimal ve minimal rankları da verilmiştir. Ayrıca $AXB = C$' ye ilaveten pek sık karşılaşılan bir diğer matris denklemi

$$A \in \mathbb{C}^{m\times p},\ \ B \in \mathbb{C}^{q\times n},\ \ C \in \mathbb{C}^{m\times s},\ \ D \in \mathbb{C}^{l\times n},\ \ M \in \mathbb{C}^{m\times n}$$

olmak üzere

$$AXB + CYD = M \tag{3.6.1}$$

denklemidir. (3.6.1) denklemi ve onun çeşitli uygulamaları bir çok çalışmada ele alınmıştır. [4,39,46,53,54,44,75]. (3.6.1) ile ilgili bir regresyon modeli X ve Y bilinmeyen parametre matrisleri ve ϵ rasgele bir hata matrisi olmak üzere

$$M = AXB + CYD + \epsilon$$

dır. Bu model literatürde yuvarlatılmış büyüme eğri modeli olarak adlandırılır [46, 61].

Bir A matrisinin rankı, lineer cebirde bir anahtar kelime olup A' nın satırları veya sütunları tarafından üretilen vektör uzayının boyutudur. Yani A' nın lineer bağımsız satır ya da sütunlarının maksimum sayısıdır. Buna denk olarak, bir A matrisinin rankı A' nın determinantı sıfırdan farklı olan en büyük mertebeli kare alt matrisinin mertebesidir.

Lineer matris denklemini çözmek için kullanılan bir genel metot bir $Z = (z_{ij} \in \mathbb{C}^{m\times n})$ matrisinin

$$\mathrm{vecZ} = [\mathrm{z_{11}}, \ldots, \mathrm{z_{m1}}, \mathrm{z_{12}}, \ldots, \mathrm{z_{m2}}, \ldots, \mathrm{z_{1n}}, \ldots, \mathrm{z_{mn}}]^{\mathrm{T}}$$

ile tanımlanan bir vec operasyonudur. $B^T \otimes A$ A^T ve A' nın kroneker çarpımı olmak üzere çok iyi bilinen

$$\mathrm{vec(AXB)} = (\mathrm{B^T} \otimes \mathrm{A})\mathrm{vecX}$$

formülü (3.6.1) denklemine uygulanarak

$$\begin{bmatrix} B^T \otimes A & D^T \otimes C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{vecX} \\ \mathrm{vecY} \end{bmatrix} = \mathrm{vecM} \tag{3.6.2}$$

elde edilir. Burada $\begin{bmatrix} B^T \otimes A & D^T \otimes C \end{bmatrix}$ bir satır blok matristir. Bu nedenle (3.6.2)' nin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{bmatrix} B^T \otimes A & D^T \otimes C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T \otimes A & D^T \otimes C \end{bmatrix}^{-} \mathrm{vecM} = \mathrm{vecM}$$

olmasıdır. Böyle bir durumda (3.6.2)' nin genel çözümü V keyfi bir sütun vektör olmak üzere

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathrm{vecX} \\ \mathrm{vecY} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B^T \otimes A & D^T \otimes C \end{bmatrix}^{-} \mathrm{vecM} \\ &+ \left(I - \begin{bmatrix} B^T \otimes A & D^T \otimes C \end{bmatrix}^{-} \begin{bmatrix} B^T \otimes A & D^T \otimes C \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \tag{3.6.3}$$

şeklinde yazılabilir. (3.6.3) sonucu göstermektedir ki (3.6.1)' in X ve Y genel çözümleri değişken bileşenler içeren iki lineer matris ifadeleridir.

(3.6.1)' i sağlayan X ve Y matrislerinin tek olması gerekmediğinden (3.6.1)' de X, Y AXB ve CYD' nin maksimal ve minimal ranklarının bulunması ilginçtir. (3.6.1)' deki X ve Y çözümler ikilisi hakkındaki diğer bir problem onların bağımsızlığı ile ilgilidir. Burada bağımsızlıktan kasıt (3.6.1)' in herhangi iki X_1, Y_1 ve X_2, Y_2 çözümler ikilisi için X_1, Y_2 ve X_2, Y_1 yeni ikililerinin de (3.6.1)' in çözümleri olduğudur. Bu problem (3.6.1) ile ilgili bazı rank formülleri yardımıyla çözülebilir.

Parçalı matrisler için bazı yararlı rank formülleri aşağıdaki Lemma da verilmiştir.

Lemma 3.6.1 [31]

$$A \in \mathbb{C}^{m\times n}, \;\; B \in \mathbb{C}^{m\times k} \text{ ve } C \in \mathbb{C}^{l\times n}$$

olsun. Bu taktirde

i. $r[A, B] = r(A) + r(E_A B) = r(B) + r(E_B A)$

ii. $r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(A) + r(CF_A) = r(C) + r(AF_C)$

iii. $r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} r(B) + r(C) + r(E_B A F_C)$

Lemma 3.6.1' deki formüller matrislerin genelleştirilmiş inversleri içeren çeşitli matris ifadelerini sadeleştirmek için kullanılabilir. Örneğin

$$r\begin{bmatrix} E_{A_1} & B_1 \\ E_{A_2} & B_2 \end{bmatrix} = I\begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \end{bmatrix} - r(A_1) - r(A_2) \tag{3.6.4}$$

$$r[D_1 F_{C_1}, D_2 F_{C_2}] = r\begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} - r(C_1) - r(C_2) \tag{3.6.5}$$

$$r\begin{bmatrix} A & B_{F_1} \\ E_{C_1}C & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B & 0 \\ C & 0 & C_1 \\ 0 & B_1 & 0 \end{bmatrix} - r(B_1) - r(C_1) \tag{3.6.6}$$

dır.

Lemma 3.6.2

$$A \in \mathbb{C}^{m\times n},\ \ B \in \mathbb{C}^{m\times k},\ \ C \in \mathbb{C}^{l\times n}, B_1 \in \mathbb{C}^{m\times p}\ \text{ ve }\ C_1 \in \mathbb{C}^{q\times n}$$

verilmiş olsun ve

$$X \in \mathbb{C}^{k\times l},\ \ Y \in \mathbb{C}^{k\times n}, Z \in \mathbb{C}^{m\times n}\ \text{ ve }\ U \in \mathbb{C}^{p\times q}$$

değişken matrisler olsun. Bu taktirde

$$\max_X r(A - BXC) = \min\left\{ r[A, B],\ \ r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix},\right\} \tag{3.6.7}$$

$$\min_X r(A - BXC) = r[A, B] + r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.6.8}$$

$$\max_{Y,Z}(A - BY - ZC) = \min\left\{ m,\ \ n\ r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}\right\} \tag{3.6.9}$$

$$\min_{Y,Z} r(A - BY - ZC) = r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} - r(B) - r(C), \tag{3.6.10}$$

$$\max_{Y,Z,U} r(A - BY - ZC - B_1UC_1) = \min\left\{ m,\ n,\ r\begin{bmatrix} A & B & B_1 \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix},\ r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}\right\}, \tag{3.6.11}$$

$$\begin{aligned} \min_{Y,Z,U} r(A - BY - ZC - B_1UC_1) &= r\begin{bmatrix} A & B & B_1 \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B & B_1 \\ C & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(B) - r(C) \end{aligned} \tag{3.6.12}$$

(3.6.7) ve (3.6.8) ifadeleri [58]' de gösterilmiştir. (3.6.9) ve (3.6.10) [50, 51]' de gösterilmiştir. (3.6.7)- (3.6.10) ifadelerini sağlayan X ve Y' nin genel ifadeleri [50, 51, 56]' de verilmiştir. (3.6.7) ile (3.6.9)' u ve (3.6.8) ile (3.6.10)' u birleştirerek sırasıyla (3.6.11) ve (3.6.12) ifadeleri elde edilir.

3.6.1 $AXB + CYD = M$ Çözümlerinin Rankları

(3.6.1) denkleminin genel çözümleri ve çözülebilirlik şartları ile ilgili olarak aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Lemma 3.6.3 *i.* (3.6.1) denkleminin sağlayan X ve Y' nin mevcut olması için gerek ve yeter şart

$$r[A, C, M] = r[A, C], \quad r\begin{bmatrix} B \\ D \\ M \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \tag{3.6.13}$$

ve

$$r\begin{bmatrix} M & A \\ D & 0 \end{bmatrix} = r(A) + r(D), \quad r\begin{bmatrix} M & C \\ B & 0 \end{bmatrix} = r(B) + r(C) \tag{3.6.14}$$

veya buna denk olarak

$$[A, C][A, C]^{-}M = M, \quad M\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}^{-}\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = M,$$

$$(I_m - AA^{-})M(I_n - D^{-}D) = 0, \quad (I_m - CC^{-})M(I_n - B^{-}B) = 0$$

olmasıdır. [39]

ii. (3.6.13) ve (3.6.14) altında (3.6.1)' in X ve Y çözümleri

$$X = X_0 + X_1X_2 + X_3, \qquad Y = Y_0 + Y_1Y_2 + Y_3$$

şeklinde parçalanabilir, burada X_0 ve Y_0 (3.6.1)' in bir özel çözümler ikilisi, X_1, X_2, X_3 ve Y_1, Y_2, Y_3 ise

$$\begin{aligned} AX_1 &= -CY_1 \\ X_2B &= Y_2D \\ AX_3B &= 0 \\ CY_3D &= 0 \end{aligned}$$

dört homajen matris denkleminin genel çözümleridir veya daha açık olarak

$$X = X_0 + S_1F_GUE_HT_1 + F_AV_1 + V_2E_B \tag{3.6.15}$$

$$Y = Y_0 + S_2 F_G U E_H T_2 + F_C W_1 + W_2 E_D \tag{3.6.16}$$

dir, burada U, V_1, V_2, W_1 ve W_2 keyfi matrisler olmak üzere

$$\begin{aligned} S_1 &= [I_p, 0], \\ S_2 &= [0, I_s], \\ T_1 &= \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}, \\ T_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ I_t \end{bmatrix}, \\ G &= [A, C], \\ H &= \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

dır.

Kolaylık olması bakımından aşağıdaki notasyonları verelim.

$$J_1 = \left\{ X \in \mathbb{C}^{p\times q} : AXB + CYD = M \right\}, \tag{3.6.17}$$

$$J_2 = \left\{ Y \in \mathbb{C}^{s\times t} : AXB + CYD = M \right\}. \tag{3.6.18}$$

olsun. (3.6.15) ve (3.6.16) ifadeleri göstermektedir ki (3.6.1)' in genel çözümleri gerçekte iki lineer matris ifadesi olup her birisi üç bağımsız değişken matris içermektedir. (3.6.15) ve (3.6.16) ifadelerine Lemma 3.6.2' yi uygularsak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.6.1 (3.6.1) matris denkleminin çözülebilir olduğunu ve J_1 ve J_2' nin de (3.6.17) ve (3.6.18)' da verilmiş olduğunu varsayalım. Bu taktirde

i. (3.6.1)' in X çözümünün maksimal ve minimal rankları

$$\begin{aligned} \max_{X\in J_1} r(X) &= \min\Bigg\{ p, q, p+q+r[M, C] - r[A, C] - r(B), \\ &\qquad p+q+r\begin{bmatrix} M \\ D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} - r(A) \Bigg\}, \end{aligned}$$

ve

$$\min_{X\in J_1} r(X) \;=\; r[M,C] + r\begin{bmatrix} M \\ D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} M & C \\ D & 0 \end{bmatrix}.$$

şeklindedir.

ii. (3.6.1)' in Y çözümünün maksimal ve minimal rankları

$$\begin{aligned}\max_{Y\in J_2} r(Y) \;&=\; \min\Bigg\{ s, t, s+t+r[M,A]-r[C,A]-r(D), \\ &\qquad s+t+r\begin{bmatrix} M \\ B \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} - r(C)\Bigg\},\end{aligned}$$

ve

$$\min_{Y\in J_2} r(Y) \;=\; r[M,A] + r\begin{bmatrix} M \\ B \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} M & A \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

şeklindedir.

İspat. (3.6.7) ve (3.6.8) eşitlikleri (3.6.15)' e uygulanırsa

$$\begin{aligned}\max_{X\in J_1} \;&=\; \max_{U,V_1,V_2} r(X_0 + S_1F_GUE_HT_1 + F_AV_1 + V_2E_B) \\ &=\; \min\left\{ p, q, r\begin{bmatrix} X_0 & F_A & S_1F_G \\ E_B & 0 & 0 \end{bmatrix},\; r\begin{bmatrix} X_0 & F_A \\ E_B & 0 \\ E_HT_1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\min_{X\in J_1} r(X) \;&=\; \min_{U,V_1,V_2} r(X_0 + S_1F_GUE_HT_1 + F_AV_1 + V_2E_B) \\ &=\; r\begin{bmatrix} X_0 & F_A & S_1F_G \\ E_B & 0 & 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} X_0 & F_A \\ E_B & 0 \\ E_HT_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad -r\begin{bmatrix} X_0 & F_A & S_1F_G \\ E_B & 0 & 0 \\ E_HT_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(F_A) - r(E_B)\end{aligned}$$

elde edilir, burada $r(F_A) = p - r(A)$ ve $r(E_B) = q - r(B)$ dir. (3.6.4), (3.6.5) ve (3.6.6)' da gösterildiği gibibu iki formüldeki blok matrislerin rankları Lemma 3.6.1, $AX_0B + CY_0D = M$ eşitliği ve elemanter blok matris işlemleri kullanarak sadeleştirilebilir.

$$
\begin{aligned}
r\begin{bmatrix} X_0 & F_A & S_1F_G \\ E_B & 0 & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} X_0 & I_p & S_1 & 0 \\ I_q & 0 & 0 & B \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 \end{bmatrix} - r(A) - r(B) - r(G) \\
&= r\begin{bmatrix} 0 & I_p & 0 & 0 \\ I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -AS_1 & AX_0B \\ 0 & 0 & G & 0 \end{bmatrix} - r(A) - r(B) - r(G) \\
&= r\begin{bmatrix} -A & 0 & AX_0B \\ A & C & 0 \end{bmatrix} + p + q - r(A) - r(B) - r(G) \\
&= r[C, AX_0B] + p + q - r(B) - r(G) \\
&= r[C, M] + p + q - r(B) - r(G), \\
r\begin{bmatrix} X_0 & F_A \\ E_B & 0 \\ E_HT_1 & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} X_0 & I_p & 0 & 0 \\ I_q & 0 & B & 0 \\ T_1 & 0 & 0 & H \\ 0 & A & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(A) - r(B) - r(H) \\
&= r\begin{bmatrix} 0 & I_p & 0 & 0 \\ I_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T_1B & H \\ 0 & 0 & AX_0B & 0 \end{bmatrix} - r(A) - r(B) - r(H) \\
&= r\begin{bmatrix} B & B \\ 0 & D \\ AX_0B & 0 \end{bmatrix} + p + q - r(A) - r(B) - r(H) \\
&= r\begin{bmatrix} D \\ AX_0B \end{bmatrix} + p + q - r(A) - r(H)
\end{aligned}
$$

$$= r\begin{bmatrix} D \\ M \end{bmatrix} + p + q - r(A) - r(H),$$

$$r\begin{bmatrix} X_0 & F_A & S_1F_G \\ E_B & 0 & 0 \\ E_HT_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} X_0 & I_p & S_1 & 0 & 0 \\ I_q & 0 & 0 & B & 0 \\ T_1 & 0 & 0 & 0 & H \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(A) - r(B) - r(G) - r(H)$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & I_p & 0 & 0 & 0 \\ I_q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -T_1B & H \\ 0 & 0 & -AS_1 & AX_0B & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(A) - r(B) - r(G) - r(H)$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & 0 & -B & B \\ 0 & 0 & 0 & -D \\ -A & 0 & AX_0B & 0 \\ A & C & 0 & 0 \end{bmatrix} + p + q - r(A) - r(B) - r(G) - r(H)$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \\ -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & M \end{bmatrix} + p + q - r(A) - r(B) - r(G) - r(H)$$

$$= r\begin{bmatrix} M & C \\ D & 0 \end{bmatrix} + p + q - r(G) - r(H)$$

yazılabilir. Böylece teoremin i şıkkı ispatlanmış olur. Benzer şekilde i şıkkıda ispatlanabilir.

Ayrıca çözülebilir olması durumunda (3.6.1)' deki AXB ve CYD' nin maksimal ve minimal rankları içinde formüller geliştirebiliriz.

Teorem 3.6.2 (3.6.1)' i sağlayan X ve Y' nin mevcut olduğunu varsayalım ve

J_1 ve J_2' de (3.6.17) ve (3.6.18)' da verildiği gibi olsunlar. Bu taktirde

$$\max_{X\in J_1} r(AXB) = \min\left\{ r[M,C] - r[A,C] + r(A),\ r\begin{bmatrix} M \\ D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} + r(B) \right\}, \tag{3.6.19}$$

$$\min_{X\in J_1} r(AXB) = r[M,C] + r\begin{bmatrix} M \\ D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} M & C \\ D & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.6.20}$$

$$\max_{Y\in J_2} r(CYD) = \min\left\{ r[M,A] - r[C,A] + r(C),\ r\begin{bmatrix} M \\ B \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} + r(D) \right\}, \tag{3.6.21}$$

$$\min_{Y\in J_2} r(CYD) = r[M,A] + r\begin{bmatrix} M \\ B \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} M & A \\ B & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.6.22}$$

dır.

İspat. (3.6.7) ve (3.6.8) ifadeleri $AXB = AX_0B + AS_1F_GUE_HT_1B$' ye uygulanırsa bu durumda sırasıyla

$$\begin{aligned} \max_{X\in J_1} r(AXB) &= \max_{U} r(AX_0B + AS_1F_GUE_HT_1B) \\ &= \min\left\{ r[AX_0B, AS_1F_G],\ r\begin{bmatrix} A & X_0 & B \\ E_H & T_1 & B \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \min_{X\in J_1} r(AXB) &= \min_{U} r(AX_0B + AS_1F_GUE_HT_1B) \\ &= r[AX_0B, AS_1F_G],\ +r\begin{bmatrix} A & X_0 & B \\ E_H & T_1 & B \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} AX_0B & AS_1F_G \\ E_HT_1B & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

yazılabilir. Yine Lemma 3.6.1, $AX_0B + CY_0D = M$ eşitliği ve elemanter blok matris işlemleri kullanarak

$$
\begin{aligned}
r[AX_0B, AS_1F_G] &= r\begin{bmatrix} AX_B & AS_1 \\ 0 & G \end{bmatrix} - r(G) \\
&= r\begin{bmatrix} AX_0B & A & 0 \\ 0 & A & C \end{bmatrix} - r(G) \\
&= r[AX_0B, C] + r(A) - r(G) \\
&= r[M, C] + r(A) - r(G),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r\begin{bmatrix} AX_0B \\ P_HT_1B \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} AX_0B & 0 \\ T_1B & H \end{bmatrix} r(H) \\
&= r\begin{bmatrix} AX_0B & 0 \\ B & B \\ 0 & -D \end{bmatrix} - r(H) \\
&= r\begin{bmatrix} AX_0B \\ D \end{bmatrix} + r(B) - r(H) \\
&= r\begin{bmatrix} M \\ D \end{bmatrix} + r(B) - r(H)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
r\begin{bmatrix} AX_0B & AS_1F_G \\ E_HT_1B & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} AX_0B & AS_1 & 0 \\ T_1B & 0 & H \\ 0 & G & 0 \end{bmatrix} - r(G) - r(H) \\
&= r\begin{bmatrix} AX_0B & A & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & -D \\ 0 & A & C & 0 \end{bmatrix} - r(G) - r(H)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= r\begin{bmatrix} 0 & A & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & C & AX_0B \end{bmatrix} - r(G) - r(H) \\
&= r\begin{bmatrix} M & C \\ D & 0 \end{bmatrix} + r(A) + r(B) - r(G) - r(H).
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. Bu nedenle (3.6.19) ve (3.6.20) ifadeleri sağlanır. Benzer şekilde (3.6.21) ve (3.6.22)' un sağlandığıda gösterilebilir. Böylece teoremin ispatı sağlanmış olur.

3.6.2 $AXB + CYD = M$' deki X ve Y Çözümlerinin Bağımsızlığı

$A_1X_1+A_2X_2 = B$ matris denklemini sağlayan iki X_1 ve X_2 matrisinin bağımsızlığı Tian [57] tarafından araştırılmıştır. Bu kısımda (3.6.1) matris denklemini sağlayan X ve Y' nin bağımsızlığını göz önüne alacağız.

(3.6.17) ve (3.6.18)' da verilen J_1 ve J_2' yi iki bağımsız matris kümesi olarak göz önüne alalım. Eğer verilen herhangi $X \in J_1$ ve $X \in J_2$ için (3.6.1) sağlanırsa (3.6.1) denklemi için X ve Y bağımsızdır denir. (3.6.1) için X ve Y çözümlerinin bağımsızlığı Lemma 3.6.2' deki rank formülleri yardımıyla da araştırılabilir.

Teorem 3.6.3 (3.6.1) matris denkleminin çözülebilir olduğunu varsayalım. Ayrıca (3.6.17) ve (3.6.18)' da tanımlanan J_1 ve J_2 iki bağımsız matris kümesi olsun. Bu taktirde

$$
\begin{aligned}
\max_{X\in J_1, Y\in J_2} r(M - AXB - CYD) &= \min\Bigg\{ r(A) + r(C) - r[A, C], \\
& \qquad r(B) + r(D) - r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \Bigg\}
\end{aligned} \tag{3.6.23}
$$

eşitliği sağlanır. Özel olarak

i. (3.6.1)' in X ve Y çözümlerinin bağımsız olması için gerek ve yeter şart

$$
\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(C) = \{0\} \quad \text{veya} \quad \mathcal{R}(B^*) \cap \mathcal{R}(D^*) = \{0\} \tag{3.6.24}
$$

olmasıdır.

ii. Eğer (3.6.24) sağlanırsa (3.6.1) denkleminin genel çözümü aşağıdaki bağımsız formda yazılabilir.

$$X = X_0 + S_1 F_G U_1 E_H T_1 + F_A V_1 + V_2 E_B \tag{3.6.25}$$

$$Y = Y_0 + S_2 F_G U_2 E_H T_2 + F_C W_1 + W_2 E_D \tag{3.6.26}$$

burada X_0 ve Y_0 (3.6.1) için bir özel çözümler ikilisi ve U_1, U_2, V_1, V_2, W_1 ve W_2 ise keyfi matrislerdir.

İspat. (3.6.15) ve (3.6.16) ifadeleri iki bağımsız matris ifadesi olarak yazar ve bunları $M - AXB - CYD$' de yerine yazarak $AS_1F_G = -CS_2F_G$ ve $E_HT_1B = E_HT_2B$ eşitlikleri kullanılırsa U_1 ve U_2 keyfi olmak üzere

$$\begin{aligned} M - AXB - CYD &= M - AX_0B - CY_0D - AS_1F_GU_1E_HT_1B - CS_2F_GU_2E_HT_2D \\ &= -AS_1F_GU_1E_HT_1B - CS_2F_GU_2E_HT_2D \\ &= -AS_1F_GU_1E_HT_1B + AS_1F_GU_2E_HT_1B \\ &= AS_1F_G(-U_1 + U_2)E_HT_1B, \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu taktirde (3.6.3) ifadesinden

$$\begin{aligned} \max_{X \in J_1, Y \in J_2} r(M - AXB - CYD) &= \max_{U_1, U_2} r\left[AS_1F_G(-U_1 + U_2)E_HT_1B\right] \\ &= \min\left\{r(AS_1F_G), r(E_HT_1B)\right\} \end{aligned}$$

yazılabilir, burada Lemma 3.6.1' e göre

$$\begin{aligned} r(AS_1F_G) &= r\begin{bmatrix} AS_1 \\ G \end{bmatrix} - r(G) \\ &= r\begin{bmatrix} A & 0 \\ A & C \end{bmatrix} - r(G) \\ &= r(A) + r(C) - r(G) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} r(E_H T_1 B) &= r[T_1 B, H] - r(H) \\ &= r\begin{bmatrix} B & B \\ 0 & -D \end{bmatrix} - r(H) \\ &= r(B) + r(D) - r(H) \end{aligned}$$

dır. Böylece (3.6.23) eşitliği elde edilmiş olur. (3.6.24) ifadesi (3.6.23)' den elde edilebilir. (3.6.25) ve (3.6.26)' deki çözümler (3.6.15) ve (3.6.16) ifadelerinden elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Not 3.6.1 (3.6.1) matris denklemi temel lineer matris denklemlerinden birisidir. Diğer bir çok matris denklemi tipi (3.6.1)' den yararlanılarak çözülebilir. örneğin, Lemma 3.6.3' den $AXA^* + BYB^* = C$ matris denkleminin Hermityan ve çarpık Hermityan çözümlere sahip olması için gerek ve yeter şartlar türetilebilir. Aynı şekilde Lemma 3.6.3 kullanılarak $AXB + (AXB)^* = C$ ve $AXB - (AXB)^* = C$ matris denklemlerinin çözülebilir olması için gerek ve yeter şartlar türetilebilir.

3.7 Genelleştirilmiş İnversler Kullanılarak Matris İfadesinin Rankları İçin Alt Üst Sınırları

Bazı değişken bileşenler içeren bir matris veya bazı değişken matrisler içeren bir matris ifadesi verildiğinde parçalı matrisin veya matris ifadesinin rankı bu değişken bileşenlere veya değişken matrislere göre değişecektir. Çünkü bir matrisin rankı sıfırla matris satır veya sütunlarının minimumu arasında bir tam sayıdır. Parçalı matrislerin veya matris ifadesinin maksimal ve minimal rankları onların değişken bileşenlere veya değişken matrislerine göre mevcut olacaktır. Matris teorisi ve uygulamalardaki birçok problem değişken bileşenleri matris ifadelerinin maksimal veya minimal mümkün ranklarıyla yakından ilişkilidir. Örneğin $AXB = C$ matris denkleminin tutarlı olması için gerek ve yeter şart $C - AXB$ nin X e göre minimal rankının sıfır olmasıdır. İki tutarlı $A_1X_1B_1 = C_1$ ve $A_2X_2B_2$ matris denkleminin bir ortak çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart onların çözümlerinin $X_1 - X_2$ farkının minimal rankının sıfır olmasıdır.

Ayrıca $\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix}$ n-yinci mertebeden kare matrisnin nonsingüler olması için gerek ve yeter şart bu matrisin X e göre maksimal rankının n olmasıdır. Parçalı matrislerin maksimal ve minimal rankları 1980 li yıllardan sonra çaşılmaya başlanmıştır. [5,10,11,14,15,23,28-30] lineer matris ifadelerinin maksimal ve minimal rankları ile ilgili başlangıç çalışmaları [23-25] deki çalışmalar kabul edilebilir. Burada $A - BXC$ nin bir üst üçgensel blok matrisine göre maksimal ve minimal rankları verilmiş ve $BXC = A$ matris denkleminin bir X üst üçgensel blok çözüme sahip olması için bir gerek ve yeter şart ortaya konulmuştur. Ayrıca matrislerin genelleştirilmiş inversleri kullanılarak

$$\min_{X,Y} r(A - BX - CY) = r \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} - r(B) - r(C) \tag{3.7.1}$$

eşitliği ispatlanmış ve (3.7.1) i sağlayan X ve Y nin genel ifadesi verilmiştir. $A - B_1X_1C_1 - B_2X_2C_2$ matris denkleminin X_1 ve X_2 ye göre maksimal ve minimal ranklarını bulmak için daha genel çalışmalar mevcuttur. [25] de 3×3 lük blok matrisler için [10] da verilen sonuç kullanılarak

$$\begin{aligned} \min_{X_1, X_2} r(A - B_1X_1C_1 - B_2X_2C_2) &= r \begin{bmatrix} A \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \end{bmatrix} \\ &+ \max \left\{ r \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right. \\ &- r \begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}, r \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\left. - r \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \tag{3.7.2}$$

eşitliği verilir. Bu kısımdaki çalışma üç parçadan oluşmaktadır. İkinci kısımda $A - B_1X_1C_1 - B_2X_2C_2$ nin X_1 ve X_2 ye göre maksimal rankları bulunacaktır. $A - B_1X_1C_1 - B_2X_2C_2$ nin maksimal ve minimal rankları birleştirilerek $A - B_1X_1C_1 - B_2X_2C_2$ nin X_1 ve X_2 ye göre rank ve ranj değişmezlikleri tartışılmıştır.

Üçüncü kısımda $A - B_1X_1C_1$ matris denkleminin $B_2X_2 = A_2$ tutarlı matris denklemine göre maksimal ve minimal rankları belirlenmiştir. Ayrıca $A - B_1XC$ nin $B_2XC_2 = A$ ye göre rank ve ranj değişmezlikleri ele alınmıştır. Dördüncü kısımda ise $D - CA^{-}B$ Schur komplementinin A nın A^{-} iç inversine göre maksimal ve minimal rankları gözönüne alınmıştır. A^{-} iç inversi bilindiği gibi $AXA = A$ matrsi denkleminin bir çözümüdür. Çalışma boyunca F keyfi cismi göstermektedir. A^T, $r(A)$, $\mathcal{R}(A)$ sırasıyla A matrisinin transpozu, rankı ve ranjını göstersin $\{A^{-}\}$ A nın tüm iç inverslerinin kümesi E_A ve F_A ise A tarafından üretilen $E_A - AA^{-}$ ve $F_A = I - A^{-}A$ izdüşümlerini göstersin.

3.7.1 $A - B_1X_1C_1 - B_2X_2C_2$ nin Maksimal Rankları

$A \in F^{m\times n}$, $B_1 \in F^{m\times p_1}$, $B_2 \in F^{m\times p_2}$, $C_1 \in F^{q_1\times n}$, $C_2 \in F^{q_2\times n}$ verilen matrisler olmak üzere

$$A = A - B_1X_1C_1 - B_2X_2C_2 \tag{3.7.3}$$

lineer matris denkleminin $X_1 \in F^{p_1\times q_1}$ ve $X_2 \in F^{p_2\times q_2}$ değişken matrislerine göre maksimal rankının bulmak için bir 3×3 lük parçalı blok matrisin maksimal rankı ile ilgili aşağıdaki sonuca ihtiyaç vardır.

Lemma 3.7.1 [10,14] $A_{ij} \in F^{m_i\times n_i}$ $(1 \le i, j \le 3)$ verilsin ve $F^{m_1\times n_3}$ ve $F^{m_3\times n_1}$ değişken iki matris olmak üzere

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & X \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ Y & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \tag{3.7.4}$$

olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \max_{X,Y} r(M) \quad = \quad \min\Bigg\{ & m_3 + n_3 + r\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \\ & m_1 + n_1 + r\begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \\ & m_1 + m_3 + r\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.7.5}$$

$$n_1 + n_3 + r \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{bmatrix} \Bigg\}$$

dır. Blok Gauss eliminasyon yöntemiyle (3.7.3) deki $p(X_1, X_2)$ nin rankının

$$r[p(X_1,X_2)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I_{p_2} & -X_2 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 & I_{q_2} \\ 0 & B_1 & A & B_2 & 0 \\ I_{q_1} & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ -X_1 & I_{p_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - p_1 - p_2 - q_1 - q_2 \qquad (3.7.6)$$

şeklinde ifade edilebildiği kolayca gösterilebilir. (3.7.6) deki blok matrise Lemma 3.7.1 uygulanırsa gerekli sadeleştirme yapılırsa aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 3.7.1 $P(X_1, X_2)$ (3.7.3) de verildiği gibi olsun. Bu taktirde

$$\max_{X_1, X_2} r[p(X_1,X_2)] = r\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \end{bmatrix}, r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}, r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.7.7)$$

(3.7.2) ve (3.7.7) ile ilgili çok önemli bir çalışma X_1 ve X_2 yi $P(x_1, X_2)$ sırasıyla X_1 ve X_2 nin maksimal ve mimimal ranklarını verecek şekilde seçmektedir. (3.7.4) parçalı blok matrisi için benzer çalışma hala açıktır. (3.7.7) deki A matrisi m mertebeli bir kare matris olduğunda (3.7.7) den $P(X_1, X_2)$ nonsingülerdir ancak ve ancak

$$\begin{aligned} r\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \end{bmatrix} &\geq m, \\ r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} &\geq m, \\ r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} &\geq m, \\ r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} &\geq m \end{aligned}$$

eşitsizliklerinin tümü sağlayacak şekilde X_1 ve X_2 nin mevcut olduğu görülür. (3.7.7) deki A matrisi m mertebeli bir kare matris olduğunda hem (3.7.2) hemde

(3.7.7) e eşit olacaktır. Bu durumda (3.7.3) in X_1 ve X_2 nin her seçimi için hala nonsingüler olmasının bir gerek ve yeter şart olduğu gösterilebilir. (3.7.2) ve (3.7.7) in sağ tarafları blok matrislerin ranklarından ibaret olduğundan (3.7.3) de verilen matrisler bazı kısıtlamaları sağladığında blok Gauss eliminasyonla bu ifadeler sadeleştirilebilir. Örneğin (3.7.3) de

$$\mathcal{R}(B_1) \subseteq \mathcal{R}(B_2) \text{ ve } \mathcal{R}(C_2^T) \subseteq \mathcal{R}(C_1^T) \tag{3.7.8}$$

ise bu taktirde (3.7.2) ve (3.7.7) sırasıyla

$$\max_{X_1, X_2} r[P(X_1,\, X_2)] = \min\left\{ r\begin{bmatrix} A & B_2 \end{bmatrix}, r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix}, r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \right\} \tag{3.7.9}$$

ve

$$\begin{aligned} \min_{X_1, X_2} r[P(X_1,\, X_2)] \;\; = \;\; \min\Bigg\{ & r\begin{bmatrix} A & B_2 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \\ & - r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \Bigg\} \end{aligned} \tag{3.7.10}$$

e dönüşecektir. Gerçekten (3.7.8) altında $B_1 = B_2 Y$ ve $C_2 = ZC_1$ yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} r\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A & B_2 \end{bmatrix}, \\ r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix}, \\ r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A & B_2Y \\ ZC_1 & 0 \end{bmatrix} \leq r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece (3.7.7), (3.7.9) ye dönüşür. Öte yandan

$$\begin{aligned}
r\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}, \\
r\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

dir. Bu nedenle (3.7.2) nin sağ tarafı

$$\begin{aligned}
\max\Bigg\{ r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B_2 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.7.11) \\
r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B_2 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} \Bigg\}
\end{aligned}$$

a dönüşür.

$$r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B)$$

Frobenius rank eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A & B_2Y \\ ZC_1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= r\left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right) \\
&\geq r\left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}\right) + r\left(\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right) - r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

yani

$$r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} \geq r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece (3.7.11), (3.7.10) e dönüşmüş olur. (3.7.9) ve (3.7.10) deki iki rank eşitliği 3. ve 4. kısımlarda direkt olarak kullanılacaktır. Dolayısıyla (3.7.8) altında (3.7.3) in rankı ile ilgili daha fazla bilgiye ihtiyacımız olacaktır.

Sonuç 3.7.1 $P(X_1, X_2)$ (3.7.3) ve (3.7.8) da verildiği gibi olsun. Bu taktirde $P(X_1, X_2)$ nin rankı X_1 ve X_2 nin seçimine göre değişmezdir veya buna denk olarak her X_1 ve X_2 için $r[P(X_1, X_2)] = r(A)$ dır ancak ve ancak

$$r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix} \text{ ve } r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.7.12}$$

veya

$$r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B_2 \end{bmatrix} \text{ ve } r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.7.13}$$

veya

$$r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix} \text{ ve } r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B_1 \end{bmatrix} \tag{3.7.14}$$

dir.

İspat. (3.7.9) ve (3.7.10) den ilk olarak

$$\max_{X_1, X_2} r[P(X_1, X_2)] - \min_{X_1, X_2} r[P(X_1, X_2)] = \min\{s_1, s_2, s_3\} \tag{3.7.15}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
s_1 &= \left(r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix} \right) + \left(r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
s_2 &= \left(r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B_2 \end{bmatrix} \right) + \left(r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
s_3 &= \left(r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix} \right) + \left(r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B_2 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

dır. (3.7.15) ün sağ tarafı sıfır olsun. Bu taktirde $P(X_1, X_2)$ rankı X_1 ve X_2 ye göre değişmeyecektir ancak ve ancak $s_1 = 0$ veya $s_2 = 0$ veya $s_3 = 0$ dır. Ayrıca yukarıdaki parantez içindeki ifadenin tümü sıfırdan farklıdır. Böylece $s_1 = 0$ (3.7.12) a denk, $s_1 = 0$ (3.7.13) e denk $s_3 = 0$ (3.7.14) ye denktir.

$$r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = r(A) \Leftrightarrow \mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A) \tag{3.7.16}$$

$$r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = r(A) \Leftrightarrow \mathcal{R}(C^T) \subseteq \mathcal{R}(A^T) \tag{3.7.17}$$

iki basit gerçeğini ifade edelim Böylece (3.7.12) daki iki rank eşitliği

$$\mathcal{R}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \mathcal{R}\begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathcal{R}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \mathcal{R}\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.7.18}$$

ya (3.7.13) de iki rank eşitliği

$$\mathcal{R}\begin{bmatrix} C_2 & 0 \end{bmatrix}^T \subseteq \mathcal{R}\begin{bmatrix} A & B_2 \end{bmatrix}^T \text{ ve } \mathcal{R}\begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}^T \subseteq \mathcal{R}\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.7.19}$$

ye (3.7.14) deki iki rank eşitli ise

$$\mathcal{R}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \mathcal{R}\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \text{ ve } \mathcal{R}\begin{bmatrix} C_2 & 0 \end{bmatrix}^T \subseteq \mathcal{R}\begin{bmatrix} A & B_2 \end{bmatrix}^T \tag{3.7.20}$$

ye denk olacaktır. (3.7.9) ve (3.7.10) e göre (3.7.3) in X_1 ve X_2 nin seçimlerine göre ranj invaryanlığıda belirlenebilir.

Sonuç 3.7.2 $P(X_1, X_2)$ (3.7.3) ve (3.7.8) daki gibi olsun.

i. $\mathcal{R}[P(X_1, X_2)]$ ranjı X_1 ve X_2 nin seçimine göre invaryanttır ancak ve ancak

$$C_1 = 0 \text{ ve } C_2 = 0 \tag{3.7.21}$$

veya

$$C_2 = 0 \text{ ve } r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix} \tag{3.7.22}$$

veya

$$r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.7.23}$$

dir.

ii. $\mathcal{R}[P^T(X_1, X_2)]$ ranjı X_1 ve X_2 nin seçimine göre invaryanttır ancak ve ancak

$$B_1 = 0 \quad \text{ve} \quad B_2 = 0 \tag{3.7.24}$$

veya

$$B_1 = 0 \quad \text{ve} \quad r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B_2 \end{bmatrix} \tag{3.7.25}$$

veya

$$r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B_2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.7.26}$$

dir.

İspat. A ve B matrislerinin aynı ranja sahip olması için gerek ve yeter şartın

$$r(A) = r(B) = r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$$

olduğu gerçeğini hatırlayalım. Böylece $\mathcal{R}[P(X_1, X_2)]$ nin X_1 ve X_2 nin seçimine göre invaryant olması için gerek ve yeter şart her X_1, X_2, Y_1 ve Y_2 için

$$\begin{aligned} r\begin{bmatrix} P(X_1, X_2) & P(Y_1, Y_2) \end{bmatrix} &= r[P(X_1, X_2)] \\ &= r[P(Y_1, Y_2)] \\ &= r(A) \end{aligned} \tag{3.7.27}$$

olmasıdır. Sonuç 3.7.1 e göre her X_1 ve X_2 için $r[P(X_1, X_2)] = r(A)$ sağlanır ancak ve ancak (3.7.12)-(3.7.14) den biri sağlanır. Öte yandan

$$\begin{aligned} r\begin{bmatrix} P(X_1, X_2) & P(Y_1, Y_2) \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix} - B_1 r\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix} \\ &\quad - B_2 r\begin{bmatrix} X_2 & Y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dır. Aynı şekilde Sonuç 3.7.12 e göre her X_1, X_2, Y_1 ve Y_2 için

$$r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.7.28}$$

veya

$$\begin{aligned} r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} + r(C_2) &= r\begin{bmatrix} A & B_2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \\ r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} + r(C_2) &= r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} + r(C_1) \end{aligned} \tag{3.7.29}$$

veya

$$r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}) = r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad r\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} + r(C_2) = r\begin{bmatrix} A & B_2 \end{bmatrix} \tag{3.7.30}$$

dır. (3.7.28)-(3.7.30) ve (3.7.12)-(3.7.14) zıtlığı (3.7.21)-(3.7.23) in sağlandığını gösterir. Benzer şekilde *ii.* şıkkıda gösterilebilir.

3.7.2 $B_2XC_2 = A_2$ ye göre $A_1 - B_1XC_1$ in Maksimal ve Minimal Rankları

Kısım 2 deki sonuçların bir direkt uygulaması olarak bu kısımda X, $B_2XC_2 = A_2$ tutarlı matrisin denkleminin bir çözümü olduğunda $A_1 - B_1XC_1$ matris ifadesinin maksimal ve minimal ranklarını belirleyeceğiz ve daha sonra da bu sonuçların bazılarını ortaya koyacağız. Bu konuya direkt motive olmak için $D - CA^{-}B$ Schur komplementinin rankını göz önüne almak gerekir, burada A^{-} iç inversi $AXA = A$ tutarlı matris denkleminin gerçekten bir çözümüdür. Öncelikle bazı bilinen rank eşitliklerini vermekte yarar vardır.

Lemma 3.7.2 [16] $A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{m\times k}$ ve $C \in F^{l\times n}$ olsun. Bu taktirde

i. $r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = r(A) + r((I - AA^{-})B)$

ii. $r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(A) + r[C(I - AA^{-})]$

iii.

$$
\begin{aligned}
r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} (I-BB^{-})A \\ C \end{bmatrix} + r(B) \\
&= r\begin{bmatrix} A(I-C^{-}C) & B \end{bmatrix} + r(C) \\
&= r(B) + r(C) + r[(I-BB^{-})A(I-C^{-}C)]
\end{aligned}
$$

iv. $r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r(A) + r[E_{C_1}(D - CA^{-}B)F_{B_1}]$

dir. Burada $B_1 = E_A B$ ve $C_1 = CF_A$ dır.

Teorem 3.7.2 $B_2XC_2 = A_2$ matris denklemi tutarlı olsun. Bu taktirde

i. $B_2XC_2 = A_2$ ye göre $P(X) = A_1 - B_1XC_1$ in maksimal rankı

$$
\begin{aligned}
\max_{B_2XC_2=A_2} r[P(X)] &= \min\left\{ r\begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix} - r(B_2) \right. \\
&\quad \left. -r(C_2), r\begin{bmatrix} A_1 \\ C_1 \end{bmatrix}, r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned} \tag{3.7.31}
$$

ii. $B_2XC_2 = A_2$ ye göre $P(X) = A_1 - B_1XC_1$ in minimal rankı

$$
\begin{aligned}
\min_{B_2XC_2=A_2} r[P(X)] &= r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A_1 \\ C_1 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \\
&\quad - r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.7.32}
$$

dır.

İspat. $B_2XC_2 = A_2$ tutarlı lineer matris denkleminin genel çözümü $X_0 = B_2^- A_2 C_2^-$, $F_{B_2} = I - B_2^- B_2$, $E_{C_2} = I - C_2 C_2^-$, V ve W keyfi olmak üzere

$$X = X_0 + F_{B_2}V + WE_{C_2}$$

olarak yazılabilir. Bunun $P(X) = A_1 - C_1XB_1$ de yerine yazarsak

$$P(X) = A - B_1VC_1 - B_1WE_{C_2}C_1 \tag{3.7.33}$$

elde edilir, burada æ $= A_1 - B_1X_0C_1$ dir. Öte yandan

$$\mathcal{R}(B_1F_{B_2}) \subseteq \mathcal{R}(B_1) \;\; \text{ve} \;\; \mathcal{R}[(E_{C_2}C_1)^T] \subseteq \mathcal{R}[(C_1)^T] \tag{3.7.34}$$

olduğunu belirtelim. Böylece (3.7.33), (3.7.8) altında (3.7.3) in bir özel durumu olacaktır. Bu durumda (3.7.9) ve (3.7.10) den

$$\begin{aligned}
\max_{B_2XC_2=A_2} r[P(X)] &= \max_{V,W} r(A - B_1F_{B_2}VC_1 - B_1WE_{C_2}C_1) \\
&= \min\left\{ r\begin{bmatrix} A & B_1 \end{bmatrix}, r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix}, r\begin{bmatrix} A & B_1F_{B_2} \\ E_{C_2}C_1 & 0 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\min_{B_2XC_2=A_2} r[P(X)] &= \max_{V,W} r(A - B_1F_{B_2}VC_1 - B_1WE_{C_2}C_1) \\
&= r\begin{bmatrix} A & B_1 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B_1F_{B_2} \\ E_{C_2}C_1 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad - r\begin{bmatrix} A & B_1F_{B_2} \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ E_{C_2}C_1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. Matrislerin rankları sadeleştirerek Lemma 3.7.2 ve Gauss eliminasyonundan

$$\begin{aligned}
r\begin{bmatrix} A & B_1 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A_1 - B_1X_0C_1 & B_1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} \\
r\begin{bmatrix} A \\ C_1 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A_1 - B_1X_0C_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A_1 \\ C_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r\begin{bmatrix} A & B_1F_{B_2} \\ E_{C_2}C_1 & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A_1 - B_1X_0C_1 & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 \\ 0 & B_2 & 0 \end{bmatrix} - r(B_2) - r(C_2) \\
&= r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 \\ 0 & B_2 & -A_2 \end{bmatrix} - r(B_2) - r(C_2) \\
r\begin{bmatrix} A & B_1F_{B_2} \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A_1 - B_1X_0C_1 & B_1 \\ C_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} - r(B_2) \\
&= r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} - r(B_2) \\
r\begin{bmatrix} A & B_1 \\ E_{C_2}C_1 & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A_1 - B_1X_0C_1 & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 \end{bmatrix} - r(C_2) \\
&= r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 \end{bmatrix} - r(C_2)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bunlar yukarıdaki iki rank eşitliğinde yerlerine yazılarak (3.7.31) ve (3.7.32) nin sağlandığı görülür. Bazı direkt sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Sonuç 3.7.3 $B_1XC_1 = A_1$ ve $B_2XC_2 = A_2$ matris denklemlerinin tutarlı olduğunu varsayalım. Bu taktirde

$$
\begin{aligned}
\max_{B_2XC_2=A_2} r(A - B_1XC_1) &= \left\{ \min r\begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & -A_2 & B_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix} - r(B_2) \right. \\
&\qquad \left. -r(C_2), r(C_1), r(B_1) \right\}
\end{aligned}
\tag{3.7.35}
$$

ve

$$
\min_{B_2XC_2=A_2} r(A - B_1XC_1) = r\begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & -A_2 & B_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \tag{3.7.36}
$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $B_1XC_1 = A_1$ tutarlılığı $\mathcal{R}(A_1) \subseteq \mathcal{R}(B_1)$ ve $\mathcal{R}(A_1^T) \subseteq \mathcal{R}(C_1^T)$ olduğunu gösterir. $B_2XC_2 = A_2$ nın tutarlılığı ise $\mathcal{R}(A_2) \subseteq \mathcal{R}(B_2)$ ve $\mathcal{R}(A_2^T) \subseteq \mathcal{R}(C_2^T)$ olduğunu gerektirir. Bu nedenle (3.7.31) ve (3.7.32) (3.7.35) ve (3.7.36) ya sadeleştirilmiş olur. $B_1XC_1 = A_1$ ve $B_2XC_2 = A_2$ nin bir ortak çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart sırasıyla $B_1XC_1 = A_1$ ve $B_2XC_2 = A_2$ nın tutarlı olmasıdır gerçeğini ve

$$\min_{B_2XC_2=A_2} r(A_1 - B_1XC_1) = 0$$

olduğunu hatırlayalım (3.7.36) dan aşağıdaki sonuç kolay görülür.

Sonuç 3.7.4 [17,19] $B_1XC_1 = A_1$ ve $B_2XC_2 = A_2$ matris denklemleri çifti bir ortak çözüme sahiptir ancak ve ancak $B_1XC_1 = A_1$ ve $B_2XC_2 = A_2$ denklemleri sırasıyl tutarlı olup

$$r\begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & -A_2 & B_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \tag{3.7.37}$$

dir.

Sonuç 3.7.5 $B_1XC_1 = A_1$ ve $B_2XC_2 = A_2$ denklemleri sırasıyla tutarlı olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \min_{B_1XC_1=A_1,\, B_2XC_2=A_2} r(X_1 - X_2) \;&=\; r\begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & -A_2 & B_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad -r\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.7.38}$$

dır. Son olarak $B_2XC_2 = A_2$ ye göre $A - B_1XC_1$ in rank invaryantlığı ranj inveryantlığı gözönüne alalım.

Teorem 3.7.3 $B_2XC_2 = A_2$ matris denkleminin tutarlı olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $B_2XA_2 = C_2$ ye göre $A_1 - B_1XC_1$ in rank invaryanttır ancak ve ancak

$$r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A_1 \\ C_1 \end{bmatrix} + r(B_2) \quad \text{ve} \tag{3.7.39}$$

$$r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} + r(C_2)$$

veya

$$r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} + r(C_2) \quad \text{ve} \tag{3.7.40}$$

$$r\begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & -A_2 & B_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} + r(C_2)$$

veya

$$r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A_1 \\ C_1 \end{bmatrix} + r(B_2) \quad \text{ve} \tag{3.7.41}$$

$$r\begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & -A_2 & B_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 \end{bmatrix} + r(B_2)$$

dir.

İspat. $A_1 - B_1XC_1$ in rankının $B_2XC_2 = A_2$ ye göre invaryant olması için gerek ve yeter şart

$$\max_{B_2XC_2=A_2} r(A_1 - B_1XC_1) = \min_{B_2XC_2=A_2} r(A_1 - B_1XC_1) = 0 \tag{3.7.42}$$

olmasıdır. Teorem 3.7.2 den (3.7.42) nin sol tarafının

$$\max_{B_2XC_2=A_2} r(A_1 - B_1XC_1) \quad - \quad \min_{B_2XC_2=A_2} r(A_1 - B_1XC_1) \tag{3.7.43}$$
$$= \min\{s_1, s_2, s_3\}$$

olduğu gözükür.

$$s_1 \;=\; r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A_1 \\ C_1 \end{bmatrix} \tag{3.7.44}$$
$$-r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} - r(B_2) - r(C_2)$$

$$s_2 \;=\; r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} \tag{3.7.45}$$
$$-r\begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & -A_2 & B_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_2 \;=\; r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A_1 \\ C_1 \end{bmatrix} \tag{3.7.46}$$
$$-r\begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & -A_2 & B_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Böylece $A_1 - B_1XC_1$ in rankının $B_2XC_2 = A_2$ ye göre invaryant olması için gerek ve yeter şart $s_1 = 0$ veya $s_2 = 0$ veya $s_3 = 0$ olmasıdır. Lemma 3.7.2 *iii.* den

$$r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \;\geq\; r\begin{bmatrix} A_1 \\ C_1 \end{bmatrix} + r(B_2) \quad \text{ve} \tag{3.7.47}$$
$$r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \;\geq\; r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} + r(C_2)$$

yazılabilir. Bu nedenle $s_1 = 0$ olması (3.7.39) daki iki rank eşitliğine denktir. Ayrıca

$$r\begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & -A_2 & B_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix} \leq r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & B_2 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 0 \\ -A_2 \\ C_2 \end{bmatrix} \tag{3.7.48}$$

$$= r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} + r(C_2)$$

olduğunu belirtelim. (3.7.47) ve (3.7.48) i (3.7.45) ile birleştirirsek $s_2 = 0$ ın (3.7.40) a denk olduğunu görürüz. Benzer şekilde (3.7.46) için $s_3 = 0$ ın (3.7.41) e denk olduğunu gösterilebilir. Sonuç 3.7.4 ü (3.7.33) lineer matris ifadesine uygulanırsa aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 3.7.4 $B_2XC_2 = 0$ matris denkleminin tutarlı olduğunu kabul edelim. Bu taktirde

i. $\mathcal{R}(A_1 - B_1XC_1)$ ranjı $A_2XC_2 = A_2$ ye göre invaryanttır ancak ve ancak

$$C_1 = 0$$

veya

$$\mathcal{R}(C_1) \subseteq \mathcal{R}(C_2) \text{ ve}$$

$$r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A_1 \\ C_1 \end{bmatrix} + r(B_2)$$

veya

$$r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$r\begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & -A_2 & B_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} + r(B_2)$$

olmasıdır.

ii. $\mathcal{R}[(A_1 - B_1XC_1)^T]$ ranjı $A_2XC_2 = A_2$ ye göre invaryanttır ancak ve ancak

$$B_2 = 0$$

veya

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(B_1^T) &\subseteq \mathcal{R}(B_2^T) \text{ ve} \\ r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} + r(C_2) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 \\ C_1 & 0 & C_2 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \end{bmatrix} + r(C_2) \text{ ve} \\ r\begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & -A_2 & B_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} + r(C_2) \end{aligned}$$

olmasıdır.

3.7.3 $D - CA^{-}B$ Matrisinin Maksimal ve Minimal Rankları

Bu kısımda $D - CA^{-}B$ nin A^{-} ye göre maksimal ve minimal ranklarını belirleyeceğiz ve Schur komplementlerinin rankları için eşitlikler ve eşitsizlikler hakkında bir takım tartışmlar ortaya konulacaktır. A, B, C ve D sırasıyla $m \times n$, $m \times k$, $l \times n$ ve $l \times k$ tipinde matrisler olmak üzere

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

F cismi üzerinde bir parçalı matris olsun. A nın M deki Schur komplementi, A^{-}, A nın bir iç inversi olmak üzere

$$S_A = D - CA^{-}B \tag{3.7.49}$$

ile tanımlanır. Matris teorisindeki en önemli matris ifadelerinden biri olduğundan Schur komplementi ve uygulamaları hakkında pek çok çalışma literatürde mevcuttur. Bazı çalışmalar Schur komplementlerinin rankları için eşitlikler ve eşitsizlikler üzerine odaklanmıştır. $D - CA^{-}B$ Schur komplementi için iyi bilinen iki rank eşitsizliği

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \geq r(A) + r(D - CA^{-}B) \tag{3.7.50}$$

ve

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \leq r\begin{bmatrix} A & B \\ C & CA^{-}B \end{bmatrix} + r(D - CA^{-}B) \tag{3.7.51}$$

şeklinde verilmiştir. Bunlar gerçekten $D - CA^{-}B$ Schur komplementinin rankı için alt ve üst sınırları vermektedir, fakat bunlar genelde $D - CA^{-}B$ nin A^{-} ye göre maksimal ve minimal rankları değildir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.7.5 $S_A = D - CA^{-}B$ (3.7.49) de verildiği gibi olsun.

i. S_A nın A^{-} ye göre maksimal rankı

$$\max_{A^{-}} r(D - CA^{-}B) = \min\left\{ r\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}, r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}, r\begin{bmatrix} A & C \\ C & D \end{bmatrix} - r(A) \right\} \tag{3.7.52}$$

dir.

ii. S_A nın A^{-} ye göre minimal rankı

$$\begin{aligned} \min_{A^{-}} r(D - CA^{-}B) &= r(A) + r\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & C \\ C & D \end{bmatrix} \\ &\quad - r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.7.53}$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned} \min_{A^{-}} r(D - CA^{-}B) &= \max_{AXA=A} r(D - CXB) \\ \min_{A^{-}} r(D - CA^{-}B) &= \min_{AXA=A} r(D - CXB) \end{aligned}$$

olduğu oldukça açıktır. Böylece Teorem 3.7.2 ye göre (3.7.52) ve (3.7.53) eşitlikleri sağlanmış olur. Öte yandan (3.7.53) eşitliği

$$\begin{aligned}\min_{A^-} r(D - CA^-B) &= \left(r\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} \right) \\ &\quad + \left(r\begin{bmatrix} A & C \\ C & D \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} + r(A) \right. \\ &\quad \left. - r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} \right)\end{aligned}$$

olarak da yazılabilir ve yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki parantezlerdeki iki büyüklük nonnegatiftir. (3.7.52) ve (3.7.53) iki formül A, B, C ve D matrisleri $\mathcal{R}(D) \subseteq \mathcal{R}(C)$ ve $\mathcal{R}(D^T) \subseteq \mathcal{R}(B^T)$; $\mathcal{R}(D) \cap \mathcal{R}(C) = \{0\}$ ve $\mathcal{R}(D^T) \cap \mathcal{R}(B^T) = \{0\}$; $\mathcal{R}(C) \subseteq \mathcal{R}(D)$ ve $\mathcal{R}(B^T) \subseteq \mathcal{R}(D^T)$ gibi bazı şartları sağladığında daha da sadeleştirilebilir. Böylece aşağıdaki karşılık gelen sonuçlar kolayca listelenebilir.

Sonuç 3.7.6 $D - CA^-B$ nin rankı A^- ye göre invaryanttır ancak ve ancak

$$\begin{aligned} r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \text{ve} \\ r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} + r(A) \end{aligned} \tag{3.7.54}$$

veya

$$\begin{aligned} r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} + r(A) \quad \text{ve} \\ r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} + r(A) \end{aligned} \tag{3.7.55}$$

veya

$$r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} + r(A) \quad \text{ve} \tag{3.7.56}$$

$$r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} + r(A)$$

dir.

İspat. $D - CA^{-}B$ nin rankı A^{-} ye göre invaryant olması için gerek ve yeter şart

$$\max_{A^{-}} r(D - CA^{-}B) = \min_{A^{-}} r(D - CA^{-}B)$$

olmasıdır. Teorem 3.7.5 uygulanarak Sonuç 3.7.6 deki iddianın sağlandığı görülür. Ayrıca Sonuç 3.7.6 direkt olarak Teorem 3.7.3 dan da türetilebilir. (3.7.16) ve (3.7.17) ifadelerine dayanarak Roth teoremi olarak ta bilinen

$$AX + YB = C \ \text{ tutarlıdır} \Leftrightarrow r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(B) + r(C)$$

ifadesi elde edilir. (3.7.54) daki iki rank eşitliği ifadesi

$$\mathcal{R}\begin{bmatrix} A^T \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \mathcal{R}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} X + YA = \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix}$$

tutarlıdır ifadesine denktir. (3.7.55) deki iki rank eşitliği ifadesi

$$\mathcal{R}\begin{bmatrix} A^T \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \mathcal{R}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T \quad \text{ve } AX + Y\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B \end{bmatrix}$$

tutarlıdır ifadesine denktir. (3.7.56) deki iki rank eşitliği ifadesi ise hem

$$\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} X_1 + Y_1 A \ \text{ hem de } \ AX_2 + Y\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B \end{bmatrix}$$

nin tutarlı olması ifadesine denktir.

Sonuç 3.7.7 *i.* $\mathcal{R}(D - CA^{-}B)$ ranjı A^{-} ye göre invaryanttır ancak ve ancak

$$B = 0$$

veya

$$\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A) \text{ ve } r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} + r(A)$$

veya

$$r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ ve } r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} + r(A)$$

dır.

ii. $\mathcal{R}[(D - CA^{-}B)^{T}]$ ranjı A^{-} ye göre invaryanttır ancak ve ancak

$$C = 0$$

veya

$$\mathcal{R}(C^{T}) \subseteq \mathcal{R}(A^{T}) \text{ ve } r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} + r(A)$$

dır. veya

$$r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} + r(A) \text{ ve } r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

dir.

İspat. Sonucun ispatı Teorem 3.7.4 den elde edilir. (3.7.50) ve (3.7.52) ü (3.7.51) ve (3.7.53) ile birleştirerek aşağıdaki teoremleri verebiliriz. Bunlar daha önce literatürde tartışılan Schur komplementi ile ilgili bir çok sonuçla yakından ilişkilidir.

Teorem 3.7.6 S_A (3.7.49) deki gibi olsun. Bu taktirde

i.

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r(A) + r(D - CA^{-}B) \tag{3.7.57}$$

olacak şekilde bir $A^{-} \in \{A^{-}\}$ mevcuttur ancak ve ancak

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \leq r(A) + \min\left\{ r\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}, r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \right\} \tag{3.7.58}$$

dır.

ii. (3.7.57) eşitliği herhangi $A^{-} \in \{A^{-}\}$ için sağlanır ancak ve ancak

$$r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} = r(A) + r\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \quad \text{ve} \tag{3.7.59}$$

$$r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(A) + r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$$

dir.

İspat. (3.7.50) deki $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - r(A)$ nın $r(D - CA^{-}B)$ için bir üst sınır olduğunu belirtelim. Böylece (3.7.57) sağlanacak şekilde bir $A^{-} \in \{A^{-}\}$ mevcuttur ancak ve ancak

$$\max_{A^{-}} r(d - CA^{-}B) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - r(A)$$

dir. (3.7.52) deki ifadesi burada yerine yazılırsa (3.7.58) nun sağlandığı kolayca görülür. Öte yandan (3.7.57) herhangi bir $A^{-} \in \{A^{-}\}$ için sağlanır ancak ve ancak

$$\min_{A^{-}} r(D - CA^{-}B) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - r(A)$$

dır. (3.7.53) ifadesi burada yerine yazılırsa (3.7.59) inde sağlandığı kolayca görülür.

Teorem 3.7.7 S_A (3.7.49) deki gibi olsun. Bu taktirde

i.

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B \\ C & CA^-B \end{bmatrix} - r(D - CA^-B) \tag{3.7.60}$$

olacak şekilde bir $A^- \in \{A^-\}$ mevcuttur ancak ve ancak

$$\begin{aligned} r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \text{ ve} \\ r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} &= r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.7.61}$$

ii. (3.7.60) eşitliği herhangi bir $A^- \in \{A^-\}$ için sağlanır ancak ve ancak

$$\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A) \text{ ve } \mathcal{R}(C^T) \subseteq \mathcal{R}(A^T) \tag{3.7.62}$$

veya

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \text{ ve } \mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A) \tag{3.7.63}$$

veya

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \text{ ve } \mathcal{R}(C^T) \subseteq \mathcal{R}(A^T) \tag{3.7.64}$$

dır.

İspat. (3.7.51) den

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B \\ C & CA^-B \end{bmatrix}$$

nin $r(D-CA^-B)$ için bir alt sınır olduğu görülür. Böylece (3.7.60) nin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} \min_{A^-} r(D - CA^-B) &= r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \\ C & CA^-B \end{bmatrix} \\ &= r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + r(A) \end{aligned}$$

olmasıdır. Bunu (3.7.53) ile birleştirerek

$$r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}$$

olduğu görülür ki bu da açık olarak (3.7.61) e denktir. Öte yandan herhangi bir $A^- \in \{A^-\}$ için (3.7.60) nin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\max_{A^-} r(D - CA^-B) = r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B \\ C & CA^-B \end{bmatrix}$$

olmasıdır. Bunu (3.7.52) ile birleştirirsek (3.7.62)-(3.7.64) ifadeleri elde edilmiş olur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.7.8 $A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{m\times k}$ ve $C \in F^{l\times n}$ verilsin.

i. $CA - B$ nin A^- ye göre maksimal rankı

$$\max_{A^-} r(CA^-B) = \min\{r(B), r(C), r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} - r(A)\}$$

dir.

ii. CA^-B nin A^- ye göre minimal rankı

$$\min_{A^-} r(CA^-B) = r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + r(A)$$

dir.

iii. $CA^-B = 0$ olacak şekilde bir $A^- = \{A^-\}$ vardır $\Leftrightarrow$

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r(A)$$

dır.

iv. Herhangi $A^- \in \{A^-\}$ için $CA^-B = 0$ olması için gerek ve yeter şart $B = 0$ veya $C = 0$ veya $r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(A)$ dır.

v. CA^-B nin rankı A^- ye göre invaryanttır ancak ve ancak

$$\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A) \text{ ve } \mathcal{R}(C^T) \subseteq \mathcal{R}(A^T)$$

veya

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + r(C) \text{ ve } \mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$$

dır.

Sonuç 3.7.9 $A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{m\times k}$ ve $C \in F^{l\times n}$ verilsin.

i. $\mathcal{R}(CA^-B)$ ranjı A^- nin seçimine göre invaryanttır ancak ve ancak

$$B = 0$$

veya

$$\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A) \text{ ve } \mathcal{R}(C^T) \subseteq \mathcal{R}(A^T)$$

veya

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + r(C) \text{ ve } \mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$$

ii. $\mathcal{R}[(CA^-B)^T]$ ranjı A^- nin seçimine göre invaryanttır ancak ve ancak

$$C = 0$$

veya

$$\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A) \text{ ve } \mathcal{R}(C^T) \subseteq \mathcal{R}(A^T)$$

veya

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + r(C) \text{ ve } \mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$$

dır.

iii. CA^-B nin rankı A^- nin seçimine göre invaryanttır ancak ve ancak $\mathcal{R}(CA^-B)$ veya $\mathcal{R}[(CA^-B)^T]$, A^- nin seçimine göre invaryanttır.

Sonuç 3.7.10 $A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{m\times k}$ ve $C \in F^{l\times n}$ verilsin.

$$\begin{aligned} \min_{A^-} r(A^-B) &= \min_{B^-}(B^-A) \\ &= r(A) + r(B) - r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7.65)$$

ve

$$\begin{aligned} \min_{A^-} r(CA^-) &= \min_{C^-}(AC^-) \\ &= r(A) + r(C) - r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7.66)$$

dir. Özel olarak

i. $A^-B = 0$ ve $B^-A = 0$ olacak şekilde $A^- \in \{A^-\}$ ve $B^- \in \{B^-\}$ mevcuttur ancak ve ancak $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$ dır.

ii. $CA^- = 0$ ve $CC^- = 0$ olacak şekilde $A^- \in \{A^-\}$ ve $C^- \in \{C^-\}$ mevcuttur ancak ve ancak $\mathcal{R}(A^T) \cap \mathcal{R}(C^T) = \{0\}$ dır.

(3.7.52) ve (3.7.53) deki iki formül matrislerin genelleştirilmiş inversleri için çeşitli rank eşitliklerinin ortay konulmasına ve bunlardan değişik sonuçların türetilmesine yardımcı olmaktadır. Şimdi bununla ilgili bazı sonuçlar verelim.

Teorem 3.7.8 $A, B \in F^{m\times n}$ verilsin. Bu taktirde

$$\max_{A-} r(A - AB^-A) = \min\{r(A), r(B - A) - r(B) + r(A)\} \quad (3.7.67)$$

$$\begin{aligned} \min_{A-} r(A - AB^-A) &= \min_{A^-, B^-}\{r(A^- - B^-)\} \\ &= r(A - B) + r(A) + r(B) - r\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7.68)$$

Özel olarak

i. A ve B ortak bir iç inverse sahiptir ancak ve ancak

$$r(A - B) = r\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} -r(A) - r(B)A & B \end{bmatrix}$$

dir.

ii. $\{B^-\} \subseteq \{A^-\} \Leftrightarrow A = 0$ veya $r(B - A) = r(B) - r(A)$ dır.

iii. $\{A^-\} = \{B^-\} \Leftrightarrow A = B$ dir.

iv. $\{A^-\} \cap \{B^-\} = \emptyset \Leftrightarrow r(A - B) \geq r \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} - r(A) - r(B)$ dir.

v. $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$ ve $\mathcal{R}(A^T) \cap \mathcal{R}(B^T) = \{0\}$ ise bu taktirde $A^- = B^-$ olacak şekilde $A^- \in \{A^-\}$ ve $B^- = \{B^-\}$ mevcuttur.

İspat. (3.7.67) eşitliği (3.7.52) den ve (3.7.68) eşitliği ise (3.7.53) ve (3.7.38) den elde edilir. *i.-v.* deki ifadeler ise (3.7.67) ve (3.7.68) den kolayca gösterilebilir.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında öncelikle kare olmayan ya da kare olduğu halde bilinen anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve lineer denklem sistemlerinin genel durumda çözümünde kullanılan ve bilinen anlamdaki invers özelliklerini de sağlayan genelleştirilmiş invers adı verilen bir kavram ele alınmıştır. Bu amaçla bir matrisin genelleştirilmiş inversi, yansımalı genelleştirilmiş inversi ve Moore-Penrose tipi genelleştirilmiş inversi tanımları verilerek bu inverslerin çeşitli özellikleri ortaya konulmuştur. Matrislerin Moore-Penrose inversleri için genel ifadeler verilmiş ve Schur Complement içeren çeşitli matrislerin Moore-Penrose inversleri için bazı ifadeler elde edilmiştir. Daha sonra bazı matris denklemlerinin çözümlerinin bağımsızlığı ve rank problemleri ele alınmıştır. Bu amaçla çeşitli tiplerde matris denklemleri alınarak genelleştirilmiş inversler yardımıyla bu matris denklemlerinin maksimal ve minimal ranklarının hesaplanmasından söz edilmiş, denklemlerin çözümlerinin bağımsızlıkları incelenmiş ve çözümlerdeki alt matrislerin tekliği ve bağımsızlığı üzerinde etraflıca durulmuştur. Birim elemanlı bir regüler halka üzerinde lineer matris denklemleri ve denklem sistemlerinin genel çözümleri ele alınmıştır.

Yapılan bu çalışmalara ilaveten daha değişik tipten matris denklemleri alınarak bu denklemler için çözümlerin varlığı ve bağımsızlığı ile rank durumları incelenebilir. Ayrıca genelleştirilmiş inverslerin hesaplanmasında kullanılmak üzere çeşitli bilgisayar programları veya algoritmalar türetilerek bu programlardan veya algoritmalardan faydalanılabilir. Elde edilen bu tip genelleştirilmiş inversler kullanılarak çeşitli tipten lineer matris denklem sistemlerinin çözümlerinin araştırılmasında ve hesaplanmasında bu programlar ve algoritmalar kullanılabilir. Elde edilen bulgular matrislerin en önemli uygulama alanlarından olan lineer istatistiksel modeller diferansiyel denklem sistemleri ve nümerik analizdeki çeşitli problemlerin çözümünde kullanılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Anderson, Jr W. N. 1971. *Shorted operators.* SIAM Journal on Applied Mathematics, 20: 520-525.

[2] Ando, T. 1979. *Generalized schur complements.* Linear Algebra Application, 27: 173-186.

[3] Baksalary, J. K., Kalar, R. 1986. *Range invariance of certain matrix products.* Linear and Multilinear Algebra, 14: 89-96.

[4] Baksalary, J. K., Kalar R. 1980. *The matrix equation $AXB + CYD = E$.* Linear Algebra Application, 30: 141-147.

[5] Beitia, M. A., Gracia, J. M. 1996. *Sylvester matrix equation for matrix quadruples.* Linear Algebra Application, 232: 155-197.

[6] Ben-Israel, A., Greville, T. N. E. 1980. *Generalized Inverses: Theory and Applications.* Krieger Publishing Company, New York.

[7] Bhatia, R., Rosenthal, P. 1997. *How and why to solve the operator equation $AX - XB = Y$.* Bull London Mathematical Society, 29: 1-21.

[8] Brown, B., McCoy, N. H. 1952. *The maximal regular ideal of a ring.* Proceedings of the American Mathematical Society, 1: 165-171.

[9] Carlson, D. 1986. *What are schur complements, anway.* Linear Algebra Application, 74: 257-275.

[10] Cohen, N., Johnson, C. R., Rodman, L., Woerdeman, H. J. 1988. *Ranks of completions of partial matrices.* Operator Theory, 40: 87-95.

[11] Davis, C. 1988. *Completing a matrix so as to minimize the rank.* Operator Theory, 29: 87-95.

[12] Fiedler, M. 1988. *Remarks on the schur complement.* Linear Algebra Application, 39: 189-195.

[13] Goller, H. 1986. *Shorted operators and rank decomposition matrices.* Linear Algebra Application, 81: 207-236.

[14] Grob, J. 1996. *Comments on range invariance of matrix products.* Linear and Multilinear Algebra, 41: 157-160.

[15] Guralnick R. M. 1982. *Matrix equivalence and isomorphism of modules,* Linear Algebra Application, 43: 125-136.

[16] Guralnick, R. M. 1981. *Roth's theorems and decomposition of modules.* Linear Algebra Application, 39: 155-165.

[17] Guralnick, R. M. 1985. *Roth's theorems for sets of matrices.* Linear Algebra Application, 71: 113-117.

[18] Gustafson, W., Zelmanowitz J. 1979. *On matrix equivalence and matrix equations.* Linear Algebra Application, 27: 219-224.

[19] Gustafson, W. 1979. *Roth's theorems over commutative rings.* Linear Algebra Application, 23: 245-251.

[20] Hartwig, R. E. 1976. *Roth's equivalence problem in unit regular rings.* Proceedings of the American Mathematical Society, 59:39-44.

[21] Hartwig, R. E. 1984. *Roth's removal rule revisited.* Linear Algebra Application, 49: 91-115.

[22] Huylebrouck, D. 1996. *The generalized inverses of a sum with Radical elements: applications.* Linear Algebra Application, 246: 159-175.

[23] Huang, L., Liu, J. 1997. *The extension of Roth's theorem for matrix equations over a ring.* Linear Algebra Application, 259: 229-235.

[24] Huang, L., Zeng, Q. 1995. *The solvability of matrix equation $AXB+CYD = E$ over a simple Artinian ring.* Linear and Multilinear Algebra, 38: 225-232.

[25] Huang, L. 1997. *The solvability of matrix equation $AXB + CYD = E$ over a ring.* Advances in Mathematics, China, 26(3): 269-275 (in Chinese).

[26] Horn, R. A., Johnson, C. R. 1994. *Topics in Matrix Analysis, Cambridge U. P.*. New York.

[27] Johnson, C. R. 1990. *Matrix completion problems: a survey. in matrix theory and applications.* Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, 40: 171-197.

[28] Johnson, C. R., Whitney, G. T. 1991. *Minimum rank completions.* Linear and Multilinear Algebra, 2: 271-273.

[29] Khatri, C. G. 1970. *A note on a commutative g-inverse of matrix.* Sankhy$\overline{a}$ Series A, 32: 299-310.

[30] Khatri, C. G. 1985. *Commutative g-inverse of a matrix.* Math Today, 3: 37-40.

[31] Marsaglia, G., Styan, G. P. H. 1974. *Equalities and inequalities for ranks of matrices.* Linear and Multilinear Algebra, 2: 269-292.

[32] Meyer Jr, C. D. 1973. *Generalized inverses and ranks of block matrices.* SIAM Journal on Applied Mathematics, 25: 597-602.

[33] Mitra, S. K. 1973. *A pair of simultaneous linear matrix equations* $A_1XB_1 = C_1$ *and* $A_2XB_2 = C_2$. Cambridge Philosophical Society, 74: 213-216.

[34] Mitra, S. K. 1990. *A pair of simultaneous linear matrix equations and a matrix programming problem.* Linear Algebra Application, 131: 97-123.

[35] Mitra, S. K. 1986. *The minus partial order and the shorted matrix.* Linear Algebra Application, 83: 1-27.

[36] Mitra, S. K. 1990. *A pair of simultaneous linear matrix equations* $A_1XB_1 = C_1$ *and* $A_2XB_2 = C_2$ *and a programming problem.* Linear Algebra Application, 13: 107-123.

[37] Mitra, S. K., Puri, M. L. 1982. *Shorted matrices-an extended concept and some applications.* Linear Algebra Application, 42: 57-79.

[38] Navarra, A. 2001. *P.L. Odell, D.M. Young, A representation of the general common solution to the matrix equations $A_1XB_1 = C_1$ and $A_2XB_2 = C_2$ with applications.* Computers Mathematics Application, 41: 929-935.

[39] Özgüler, A. B. 1991. *$AXB + CYD = E$ over a princibal ideal domain.* SIAM Journal on Matrix Analysis Application, 12: 581-591.

[40] Özgüler, A. B., Akar, N. 1991. *A common solution to a pair of linear matrix equations over a principle domain.* Linear Algebra Application, 144: 85-99.

[41] Penrose, R. 1955. *A generalized inverse for matrices.* Proceedings Cambridge Philosophical Society, 51: 406-413.

[42] Rao, C. R., Mitra, S. K. 1971. *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications.* Wiley, New York.

[43] Roth, R. E. 1952. *The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices.* Proceedings of the American Mathematical Society, 3: 392-396.

[44] Shinozaki, N., Sibuya, M. 1974. *Consistency of a pair of matrix equations with an application.* Keio Eng. Rep., 27: 141-146.

[45] Shim, S-Y., Chen, Y. 2003. *Least squares solution of matrix equation $AXB*$ $+CYD* = E$.* SIAM Journal on Matrix Analysis Application, 24: 802-808.

[46] Srivastava, M. S. 2002. *Nested growth curve models.* Sankhy$\bar{a}$, Series A, 64: 379-408.

[47] Tian, Y. 1988. *The generalized solutions of the matrix equation $AXB = CYD$.* Mathematics Theory Practice, 1: 71-73.

[48] Tian, Y. 2000. *Completing triangulars block matrices with maximal and minimal ranks.* Linear Algebra Application, 321: 327-345.

[49] Tian, Y. 2002. *The minimum rank of a 3×3 partial block matrix.* Linear Algebra Application, 50: 125-131.

[50] Tian, Y. 2002. *The minimal ranks of the matrix expression $A - BX - YC$.* Missouri Journal of Mathematical Sciences, 14: 40-48.

[51] Tian, Y. 2002. *Upper and lower bounds for ranks of matrix expressions of generalized inverses*. Linear Algebra Application, 355: 187-214.

[52] Tian, Y. 1988. *The general solution of the matrix equation $AXB = CYD$*. Mathematics Practice and Theory, 1: 61-63.

[53] Tian, Y. 2000. *Solvability of two linear matrix equations*. Linear and Multilinear Algebra, 48: 123-147.

[54] Tian, Y. 2002. *The maximal and minimal ranks of some expressions of generalized inverse of matrices*. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 25: 745-755.

[55] Tian, Y. 2009. *The minimal rank of a block matrix with generalized inverses*. The Bulletin of the International Linear Algebra Society, 29: 35.

[56] Tian, Y. 2003. *Ranks of solutions of the matrix equation $AXB = C$*. Linear and Multilinear Algebra, 51: 111-125.

[57] Tian, Y. 2003. *Uniqueness and independence of submatrices in solutions of matrix equations*. Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 72: 159-163.

[58] Tian, Y., Cheng, S. 2003. *The maximal and minimal ranks of $A - BXC$ with applications*. New York Journal of Mathematics, 9: 345-362.

[59] Tian, Y. *A set of new rank equalities and inequalities for Kronecker products of matrices*. Submitted.

[60] Tian, Y. *Extremal ranks of submatrices in a solution to the equation $AXB = C$*. Submitted.

[61] Tian, Y. 1993. *Homogeneous matrix equations and multivarite models*. Linear Algebra Application, 193: 19-33.

[62] Van der Woulde, J. 1987. *Feedback decoupling and stabilization for linear system with multiple exogenous variables, Ph.D. Thesis, Technical University of Eindhoven, Netherlands.*

[63] Van der Woulde, J. 1987. *Almost noninteracting control by measurement feedback, Systems Control Lett.* 9: 7-16.

[64] Von Rosen, D. 1993. *Some results on homogeneous matrix equations.* SIAM Journal on Matrix Analysis Application, 14: 137-145.

[65] Woerdeman, H. J. 1989. *Minimal rank completions for block matrices.* Linear Algebra Application, 121: 105-122.

[66] Wang, Q. W. 1996. *The decomposition of pairwise matrices and matrix equations over an arbitrary skew field.* Acta Mathematica Sinica, 39(3): 396-403 (in Chinese).

[67] Wang Q. W. *Roth's theorems for centroselfconjugate and centroskewselfconjugate solutions to systems of linear matrix equations over a finite dimensional central algebra, Southeast Asian Bull. Math. 27.* In press.

[68] Wang, Q. W., Sun, J. H., Li, S. Z. 2002. *Consistency for bi(skew) symmetric solutions to systems of generalized Sylvester equations over a finite central algebra.* Linear Algebra Application, 353: 169-182.

[69] Wang, Q. W. 2001. *On the center (skew-)self-conjugate solutions to the systems of matrix equations over a finite dimensional central algebra.* Mathematical Sciences Research Hot-Line, 5(12): 11-17.

[70] Wang, Q. W., Li, S. Z. 2004. *Persymmetric and perskewsymmetric solutions to sets of matrix equations over a finite central algebra.* Acta Mathematica Sinica, 47(1): 27-34.

[71] Wang, Q. W., Sun, J. H. 2001. *The consistency of systems of matrix equations over a finite central algebra.* Journal of Natural Sciences Mathematics, 41(1): 61-69.

[72] Wimmer, H. K. 1994. *Roth's theorems for matrix equations with symmetry constraints.* Linear Algebra Application, 199: 357-362.

[73] Wimmer, H. K. 1989. *Linear matrix equations: the module theoretic approach.* Linear Algebra Application, 120 149-164.

[74] Wimmer, H. K. 1994. *Consistency of a pair of generalized Sylvester equations.* IEEE Transactions Automatic Control, 39: 1014-1016.

[75] Xu, G., Wei, M., Zheng, D. 1998. *On solution of matrix equation* $AXB + CYD = F$. Linear Algebra Application, 279: 93-109.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Selin YILMAZ

Doğum Yeri : Ordu

Doğum Tarihi : 23.07.1982

Yabancı Dil : İngilizce

E-mail : selingulyilmaz@hotmail.com

İletişim Bilgileri : Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü,

Öğrenim Durumu

Derece	Bölüm \ Program	Üniversite	Yıl
Lisans	Matemetik	E. Osmangazi Üniversitesi	2004
Tezsiz Y. Lisans	Ortaöğretim Alan Öğretmenliği	Marmara Üniversitesi	2006

İş Deneyimi

Görev	Görev Yeri	Yıl
Matematik Öğretmeni	Final Koleji	2013
Matematik Öğretmeni	Özel Altaş Koleji	2013-