T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GÜÇLÜ KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLERİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

Fatih YETGİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2016

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Fatih YETGİN tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Selahattin MADEN danışmanlığında yürütülen "Güçlü Konveks Stokastik Süreçlerin Bazı Karakterizasyonları" adlı bu tez, jürimiz tarafından 11/ 05/ 2016 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman	:	Doç. Dr. Selahattin MADEN	
Başkan	:	Doç. Dr. İmdat İŞCAN Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Erhan SET Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 11/05/2016 tarih ve 2016/238 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

09/06/2016

Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Kürşat KORKMAZ

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Fatih YETGİN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirimlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

GÜÇLÜ KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLERİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

Fatih YETGİN
Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2016
Yüksek Lisans, 81 sayfa

Danışman: Doç. Dr. Selahattin MADEN

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde eşitsizlikler, olasılık teorisi ve stokastik süreçler teorisinin tarihsel gelişimini veren bir giriş yapılmıştır. İkinci bölümde tezde kullanılan bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde konveks stokastik süreçler ve bu süreçlerle ilgili bazı eşitsizlikler ele alınmıştır. Dördüncü bölümde sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Stokastik süreç, Konvekslik, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Güçlü konveks stokastik süreç

ABSTRACT

SOME CHARACTERIZATIONS OF STRONGLY CONVEX STOSHASTIC PROCESSES

Fatih YETGİN
Ordu University
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2016
MSc./PhD Thesis, 81 page

Supervisor: Doç. Dr. Selahattin MADEN

This thesis consists of four chapters. In the first chapter it is given an introduction historical development on inequalities, probabilty theory and stochastic processes. We given some definitions and theorems which are used in this thesis in the second chapter. In the chapter three, it is obtained convex stochastic processes and some inequalities concerning with this processes. It is given some result and propositions in the fourth chapter.

Keywords: Stochastic processes, Convexity, Hermite-Hadamard inequality, Strongly convex stochastic processes

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam Sayın Doç. Dr. Selahattin MADEN' e en samimi duygularım ile teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen tüm Matematik Bölümü öğretim elamanlarına en içten şükranlarımı sunuyorum.

Hem bu zorlu ve uzun süreçte hem de hayatım boyunca yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan değerli babama, anneme, abilerime ve ablama teşekkürlerimi sunuyorum.

Çalışmalarım boyunca maddi ve manavi desteğini esirgemeyen tüm arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
I	:	$\mathbb{R}$' de Bir Aralık
I°	:	I' nın İçi
K_s^1	:	Birinci Anlamda s-konveks Fonksiyonların Sınıfı
K_s^2	:	İkinci Anlamda s-konveks Fonksiyonların Sınıfı
$X'(t,\cdot)$	:	$X(t,\cdot)$ Stokastik Sürecinin Birinci Türevi
$X''(t,\cdot)$	:	$X(t,\cdot)$ Stokastik Sürecinin İkinci Türevi
$X'_-(t,\cdot)$	:	$X(t,\cdot)$ Stokastik Sürecinin Sol Türevi
$X'_+(t,\cdot)$	:	$X(t,\cdot)$ Stokastik Sürecinin Sağ Türevi
C_λ	:	λ-konveks Stokastik Süreç Sınıfı
C_l	:	$log-$konveks Stokastik Süreç Sınıfı
$P-\lim$	:	Olasılıkta Limit

1. GİRİŞ

Eşitsizlikler matematiğin hemen hemen tüm alanlarında önemli bi rol oynar. Eşitsizlikler ile ilgili ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından yazılan "Inequelities" adlı kitaptır [20]. Bu salt eşitsizlikler konusunu ele alan ve birçok yeni eşitsizlikler ve uygulamaları içeren ilk kaynak kitaptır. E.F. Beckenbach ve R.Bellman [15] tarafından 1934-1960 döneminde eşitsizlikler üzerine elde edilen bazı ilginç sonuçları içeren "Inequalities" adlı ikinci kitab yazılmıştır. Mitrinović ' in 1970' te yayınlanan "Analytic Inequalities" adlı kitabı yukarıda bahsedilen iki kitapta da yer almayan yeni konular içerir. Son yıllarda da Sever S. Dragomir, V. Lakshmikantham, Ravi P. Agarwal gibi araştırmacılar tarafından eşitsizlikler konusunda pek çok kitap, makale ve monografi yazılmıştır.

Konveks fonksiyonların tarihi çok eskiye dayanmakla birlikte başlangıcı 19. yüzyılın sonları olarak gösterilebilir. 1893' te Hadamard'ın çalışmasında açıkça belirtilmese de bu türden fonksiyonların temellerinden bahsedilmektedir. Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları ima eden sonuçlara rastlanılmasına rağmen konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen tarafından çalışıldığı ve Jensen' ın bu öncü çalışmalarından itibaren konveks fonksiyonlar teorisinin hızlı bir gelişme gösterdiği kabul edilmektedir. Beckenbach ve Bellman [15] ve Mitrinović [13] gibi pek çok araştırmacı, konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler konusunu kitaplarında ele almışlardır. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak [24] Pećarić tarafından yazılmıştır. Ayrıca Roberts ve Varberg [5], Pećarić [23], Niculescu ve Persson [8] gibi pek çok kişi konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizliklerle ilgi çok sayıda çalışma yapmışlardır. Bu çalışmaların bir kısmını integral eşitsizlikleri oluşturmaktadır.

"Neden Matematiksel Eşitsizlikler" sorusu için 1978 yılında Richard Bellman tarafından şöyle bir cevap verilmiştir: "Eşitsizlik çalışmak için bazı nedenler vardır. Pratik açıdan bakıldığında, birçok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak karşımıza çıkmaktadır. Klasik Eşitsizlikler de bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik açıdan bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturulabilir. Son olarak estetik açıdan bakıldığında genel olarak resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir."

Matematiksel analiz, uygulamalı matematik, olasılık teorisi ve matematiğin diğer çeşitli alanlarında doğrudan veya dolaylı olarak konveks fonksiyonların birçok uygulaması vardır. Bununla birlikte konveks fonksiyonlar, eşitsizlikler teorisiyle yakından ilişkilidir ve birçok önemli eşitsizlik, konveks fonksiyonların uygulamalarının sonucudur. Örneğin; Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri gibi genel eşitsizlikler, konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğinin sonucudur. Bu bağlamda, konveks fonksiyonlar teorisinde eşitsizliklerin, özel bir yere sahip olduğu ifade edilebilir. Aslında konveks fonksiyonun kendi tanımı da bir eşitsizliktir. Benzer şekilde, konveks fonksiyonlar da eşitsizlikler teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. 19. yüzyılın sonlarında ve 20. yüzyılın başlarında pek çok eşitsizlik bulunmuştur. Bu eşitsizliklerin bazıları konveks fonksiyonlar sınıfı için yazılan temel eşitsizlikler haline gelmiştir. 1881 yılında Hermite tarafından ifade edilen ve bugün birçok kaynakta Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılan eşitsizlik bunlardan bir tanesidir. Bu eşitsizlik üzerine günümüze kadar birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların büyük bir bölümü S.S. Dragomir ve C.E.M Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" adlı kaynakta toplanmıştır.

Eşitsizlikler ve konveks fonksiyonlar matematiğin tüm alanlarında önemli bir rol oynaması ve aktif bir araştırma alanı olmasından dolayı, özellikle son yıllarda araştırmacıların ilgi odağı haline gelmiş ve bu konuda yapılan çalışmaların sayısında bir hayli artış gözlenmiştir.

Olasılık teorisi ve stokastik süreçlerden kısaca bahsedecek olursak; bilim adamlarının çoğu olasılık hesabının doğuşunu Blaise Pascal (1623-1662) ile Pierre de Fermat (1601-1665)' in 17. yüzyıldaki yazışmalarına bağlıyor. Ancak bu dönemdeki Olasılık Teoresinin oluşumundaki en önemli rol Jacop Bernoulli'e (1654-1705) aittir. J. Bernoulli'nin elde ettiği en önemli sonuç "Büyük Sayılar Kanunudur". Bu kanun Olasılık Teorisinin uygulamaları için temel oluşturmaktadır. Bu kanun ilk kez J.Bernoulli'nin ölümünden sonra 1713 yılında yayınlanan "Ars Conectandi(The Art of Conjecture)" isimli kitabında limit teoremi şeklinde yer almıştır. J.Bernoulli'den sonraki dönemlerde Olasılık Teoresinde iz bırakmış bilim adamlarından Pierre-Remond de Montmort (1678-1719), Abraham de Moivre (1667-1754), Thomas Bayes (1702-1761), Pieere Simon de Laplace (1749-1827), Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ve Simon Denis Poisson (1781-1840) sıralamak mümkündür.

19.yüzyılın ikinci yarısından itibaren Olasılık Teoresinin temel problemlerinin incelenmesinde P. L. Chebyshev (1821-1894), A. A. Markov (1856-1922), A. M. Liapunov

(1857-1918) vs. büyük rol oynadılar.

Olasılık teorisinde stokastik kavramı ilk kez bu teorinin kurucularından olan J. Bernoulli (1654-1705) tarafından kullanılmaya başlanmıştır. Sonra bu kavram bir süre unutulmuş olmasına rağmen ünlü olasılıkçı V. Bortkiyeviç (1868-1913) in büyük katkısıyla yirminci yüzyılın başlarında yeniden kullanılmaya başlanmıştır.

Stokastik süreç kavramı ise sistematik olarak A. N. Kolmogorov ve A. Y. Hinçin gibi ünlü olasılıkçılar tarafından ortaya konulmuş ve bu alanda ilk esaslı sonuçlar elde edilmeye başlanmıştır. A. N. Kolmogorov günümüzde Markov tipli süreç olarak adlandırılan stokastik süreçlerin esaslarını ortaya koyarken A. Y. Hinçin çalışmalarında stasyoner süreçler olarak adlandırdığı stokastik süreçler üzerinde çalışmalar yapmıştır. Çağımızda stokastik süreçlere ilişkin problemlere büyük ilgi gösterilmektedir. 20. yüzyılın 2. yarısından sonra Stokastik Süreçler Teorisinin gelişmesinde ve derinleşmesinde büyük hizmetleri olmuş bilim adamlarından J.L. Doob, N. Winner, A. V. Skorokhod, W. Feller, E. Dinkin, E. Çınlar, T. Sarimkov, P. Levy isimlerini sıralamak mümkündür. Bu dönemde Stokastik Süreçlerin bir çok yararlı uygulamaları da bilim adamları tarafından ele alınmıştır.

Olaslık teorisi, özellikle rastgele değişkenler ve stokastik süreçler eşitsizlikler ve konveks fonksiyonların uygulama alanlarındandır. Son zamanlarda konveks fonksiyonlar için sağlanan bir çok eşitsizlik konveks stokastik süreçler için de elde edilmiştir. Nikodem [25] 1980 yılında konveks stokastik süreçleri tanıttı. Sonra Skowronski [3] Jensen-konveks stokastik süreçlerin özelliklerini tanıttı. 1995 yılında ise Skowronski [4] konveks stokastik süreçler için daha ileri sonuçları sundu. Sonra konveks ve güçlü konveks stokastik süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği [9] ve [10] de ispatlandı. 2014 de Maden [49] ve arkadaşları birinci anlamda s-konveks stokastik süreçleri tanıttı ve bu süreçler için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri ispatladılar. Ayrıca 2014 de Set [18] ve arkadaşları ikinci anlamda s-konveks stokastik süreçleri tanıttı ve bu süreçler için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler araştırdılar.

2. TEMEL KAVRAMLAR

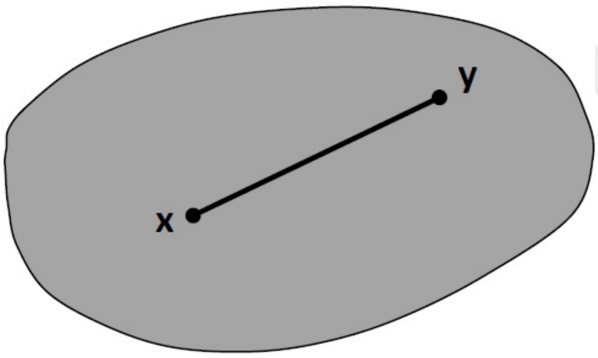
Bu bölümde, tezde kullanılacak bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

2.1 Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Kavramlar

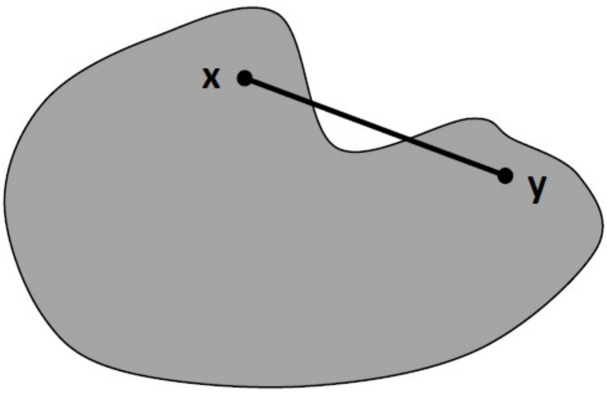
Tanım 2.1.1 (Konveks Küme) L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \left\{ z \in L : z = \alpha x + (1-\alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \right\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitsliğindeki x ve y'nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki α, $(1-\alpha)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir [28].



Şekil 2.1: Konveks küme



Şekil 2.2: Konveks olmayan küme

Örneğin aralıklar reel eksen üzerindeki konveks kümelerdir.

Tanım 2.1.2 (J-Konveks Fonksiyon) I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{2.1.1}$$

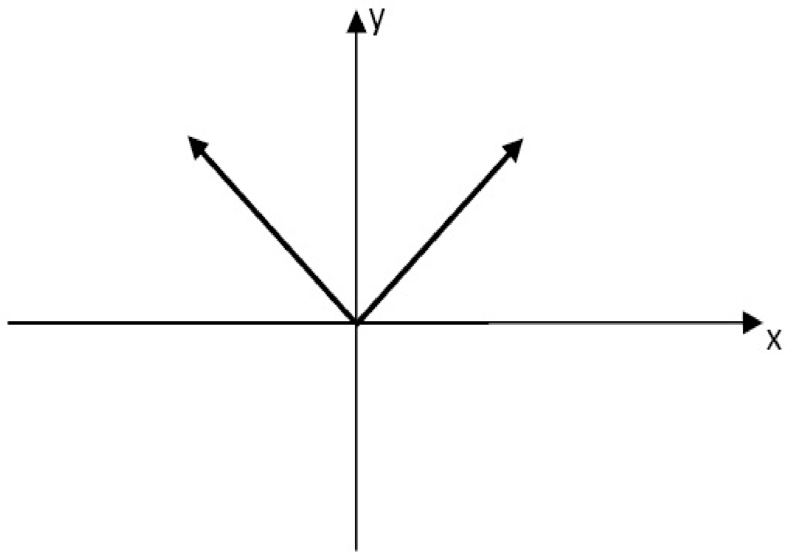
şartını sağlayan f fonksiyonuna I uzerinde Jensen anlamında konveks veya $J-$konveks fonksiyon denir [13].

Tanım 2.1.3 (Konveks Fonksiyon) I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \tag{2.1.2}$$

şartını sağlayan , f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer (2.1.2) eşitsizliği $x \neq y$ ve $\alpha \in [0,1]$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir [23].

Örneğin, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.



Şekil 2.3: Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) =| x |$)

Sonuç 2.1.1 Her konveks fonksiyon $J-$konveks fonksiyondur [13].

Sonuç 2.1.2 $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun I'da konveks olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in I$ ve her $p, q > 0$ reel sayıları için

$$f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) \leq \frac{pf(x)+qf(y)}{p+q} \tag{2.1.3}$$

olmasıdır [13].

Teorem 2.1.1 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

(i) f, (a, b) aralığında süreklidir ve

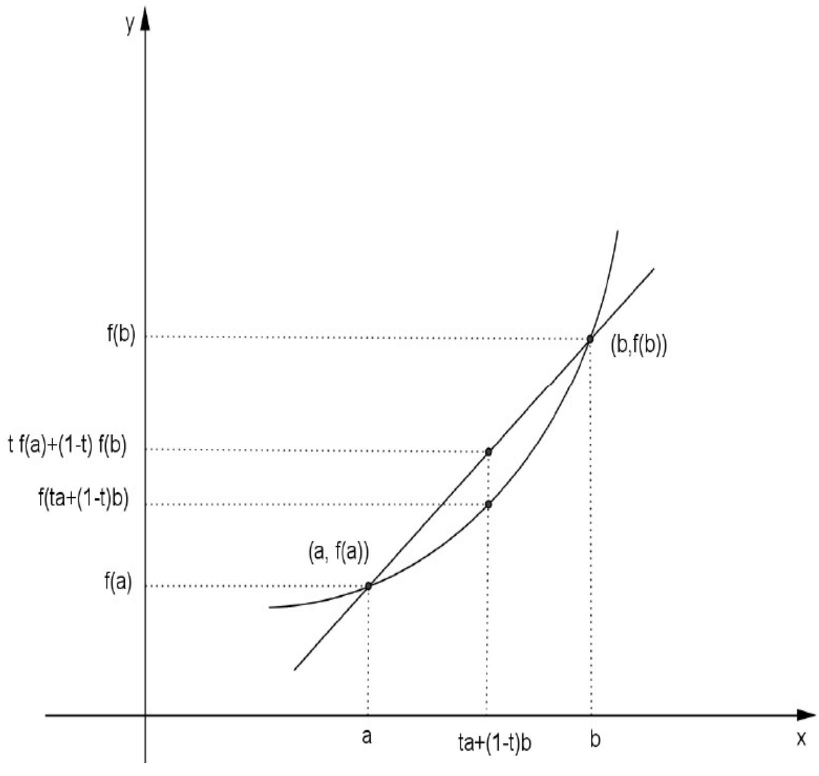
(ii) f, $[a, b]$ aralığında sınırlıdır [2].

Teorem 2.1.2 f fonksiyonunun I aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır [13].

I üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun kesin konveksliğinin geometrik anlamı $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f'nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır (Bakınız Şekil 2.4).



Şekil 2.4: Konveksliğin Geometrik Yorumu

Konveks fonksiyonlar için literatürde birçok eşitsizlik elde edilmiştir. Bu eşitsizliklerin en önemlilerinden biri de Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik üzerine son yıllarda Pachpatte, Dragomir ve Mcandrew, Kırmacı, Alomari, Sarıkaya, Set, Özdemir ve arkdaşları yazarları ve başka birçok araştırmacı tarafından çeşitli genelleştirmeler ve yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 2.1.3 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) I, $\mathbb{R}$'de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.1.4}$$

olur [23].

Tanım 2.1.4 (Güçlü Konveks Fonksiyon) $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık olsun. Eğer her $x, y \in I$ ve $\lambda \in I$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \tag{2.1.5}$$

ise $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu c modülüne göre güçlü konveks fonksiyon olarak adlandırılır. Açıkça her güçlü konveks fonksiyon konvekstir [11].

Tanım 2.1.5 (Artan ve Azalan Fonksiyonlar) f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 de I'da iki nokta olsun. Bu durumda

(i) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,

(ii) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,

(iii) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,

(iv) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır

denir [36].

Teorem 2.1.4 f bir fonksiyon olsun. Bu durumda

(i) Eğer bir aralıkta f fonksiyonunun türevi pozitif ise fonksiyon o aralıkta artandır.

(ii) Eğer bir aralıkta f fonksiyonunun türevi negatif ise fonksiyon o aralıkta azalandır [16].

Sonuç 2.1.3 f, g konveks fonsiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $f \circ g$ fonksiyonu konvekstir [5].

Teorem 2.1.5 Eğer $f : I \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyon I°'de artandır (kesin artandır). Burada $f'_+(x)$ sağ türev, $f'_-(x)$ sol türevi göstermektedir [23].

Teorem 2.1.6 f fonksiyonu (a,b) aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f''nin artan (kesin artan) olmasıdır [23].

Tanım 2.1.6 (Log-konveks Fonksiyon) I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\log f$ konveks ise veya her $x, y \in I$ ve her $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq [f(x)]^{\alpha}[f(y)]^{1-\alpha} \tag{2.1.6}$$

ise f'ye $\log -$konveks fonksiyon ve (2.1.6) eşitsizliği ters çevrilirse f'ye $\log -$konkav fonksiyon denir [23].

(2.1.4) eşitsizliğine $f: I \to (0,\infty)$, $\log -$konveks fonksiyonu uygulanırsa

$$\ln\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx \leq \frac{\ln f(a) + \ln f(b)}{2}$$

olur. Buradan da

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx\right] \leq \sqrt{f(a)f(b)}$$

şeklinde $\log -$konveks fonksiyonlar için Hadamard eşitsizliği elde edilir [42].

Tanım 2.1.7 (Birinci Anlamda $s-$Konveks Fonksiyon) $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere her $x, y \in \mathbb{R}_+$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y) \tag{2.1.7}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda $s-$konveks fonksiyon denir [51].

Tanım 2.1.8 (İkinci Anlamda $s-$Konveks Fonksiyon) $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $x, y \in \mathbb{R}_+$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y) \tag{2.1.8}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyon denir [51].

İkinci anlamda $s-$konveks fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir [52].
Yukarıda verilen her iki $s-$konvekslik tanımı $s = 1$ için bilinen konveksliğe dönüşür.
İkinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Teorem 2.1.7 $s \in (0,1)$ olmak üzere $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ ikinci anlamda $s-$konveks bir fonksiyon, $a, b \in [0,\infty)$ ve $a < b$ olsun. $f \in L^1([a,b])$ ise

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1} \tag{2.1.9}$$

olur.

(2.1.9) eşitsizliğindeki ikinci eşitsizlikteki olabilecek en iyi sabit $k = 1/s + 1$'dir [40].

Tanım 2.1.9 (Wright-Konveks Fonksiyon) $f : I \to \mathbb{R}$ tanımlı ve $y > x$, $\delta > 0$ şartları altında her bir $y + \delta$, $x \in I$ için

$$f(x+\delta) - f(x) \leq f(y+\delta) - f(y) \tag{2.1.10}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye $I \subseteq \mathbb{R}$'de Wright-konveks fonksiyon denir [43].

Tanım 2.1.10 a, b pozitif iki reel sayi olmak üzere;

(i) Aritmetik ortalama:

$$A = A(a,b) := \frac{a+b}{2}$$

(ii) Geometrik ortalama:

$$G = G(a,b) := \sqrt{ab}$$

(iii) Logaritmik ortalama:

$$L = L(a,b) := \begin{cases} a & , \ a = b \\ \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a} & , \ a \neq b \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

2.2 Olasılık ve Stokastik Süreçlerle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1 (Olasılık Uzayı) $\mathcal{A}$, Ω üzerinde bir $\sigma-$cebiri olmak üzere $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

(i.) Her $A \in \Omega$ için $P(A) \geq 0$

(ii.) $P(\Omega) = 1$

(iii.) $\mathcal{A}$ daki ayrık kümelerin her A_n dizisi için

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

özelliklerine sahipse P fonksiyonuna $\mathcal{A}$ üzerinde bir olasılık ölçüsü denir. Bu durumda $P(A)$ ya da A olayının olasılığı denir. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ üçlüsüne ise bir olasılık uzayı adı verilir [48].

Tanım 2.2.2 (Örnek Uzay) Bir rastgele deneyin tüm mümkün sonuçlarının kümesine örnek uzay, örnek uzaydaki her bir noktaya örnek nokta, örnek uzayın herhangi bir alt kümesine ise olay adı verilir. Olaylar A, B, C gibi büyük harflerle gösterilecektir [48].

Tanım 2.2.3 (Olayın Olasılığı) Bir deneyin birbirinden ayrık ve her biri aynı şansa sahip olmak şartıyla n tane mümkün sonucundan m tanesi bir A olayının olmasını gerektiriyor ise bu takdirde

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

oranına A olayının olasılığı adı verilir [48].

Teorem 2.2.1 Eğer $\emptyset$ mümkün olmayan olay ise bu takdirde $P(\emptyset) = 0$ dır [48].

Teorem 2.2.2 $\overline{A}$ olayı A olayının bütünleyeni ise $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ dır [48].

Teorem 2.2.3 A ve B olayları için $A \subset B$ ise $P(A) \leq P(B)$ dır [48].

Tanım 2.2.4 (Bağımsız Olaylar) A ve B olayları bağımsızdır $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$ [48].

Tanım 2.2.5 (Rastgele Değişken) $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ keyfi olasılık uzayı olsun. Eğer $X : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathcal{A}$-ölçülebilir ise X e rastgele değişken denir [9].

Bu tanıma göre rastgele değişken tanım kümesi örnek uzayı ve değer kümesi ise gerçek sayılar kümesinin uygun bir alt kümesi olan bir fonksiyondur. Rastgele değişkenleri genel olarak $X, Y, Z, \ldots$ gibi harflerle göstereceğiz. O halde bir rastgele değişkeni $X : \Omega \to \mathbb{R}$ olarak yazarız. Böylece E bir deney ve Ω de bu deneyle ilgili bir örnek uzayı olmak üzere her $s \in \Omega$ elamanına bir $X(s) = x$ gerçek sayısı karşılık getiren bir X fonksiyonuna bir rastgele değişken denir.

Tanım 2.2.6 (Kesikli Rastgele Değişken) X bir rastgele değişken olmak üzere X' in alabileceği değerlerin kümesi sonlu yada sayılabilir sonsuz bir küme ise X'e bir kesikli rastgele değişken denir [48].

Tanım 2.2.7 (Sürekli Rastgele Değişken) X rastgele değişkeninin alabileceği değerlerin kümesi bir aralık yada aralıkların birleşimi şeklinde ise X'e sürekli rastgele değişken adı verilir [48].

Tanım 2.2.8 (İki Boyutlu Rastgele Değişken) E bir deney ve S de bu deneyle ilgili örnek uzay olsun. $X = X(s)$ ve $Y = Y(s)$ ise her biri her bir $s \in S$ neticesine bir gerçek sayı karşılık getiren iki fonksiyon olsun. Bu durumda (X, Y) ikilisine iki boyutlu bir rastgele değişken (rastgele vektör) adı verilir [48].

Eğer $X_1 = X_1(s),\ X_2 = X_2(s),\ \ldots,\ X_n = X_n(s)$ fonksiyonları her biri her bir $s \in S$ neticesine bir gerçek sayı karşılık getiren n tane fonksiyon ise $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ ye n boyutlu bir rastgele değişken veya n boyutlu bir rastgele vektör denir [48].

Tanım 2.2.9 X rastgele değişkeni $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$ mümkün değerlerini $p(x_i) = P(X = x_i),\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$ olasılıklarıyla alan kesikli bir rastgele değişken olsun. Bu takdirde X rastgele değişkeninin $E(X)$ ile gösterilen beklenen değeri

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i) \tag{2.2.1}$$

olarak tanımlanır [48].

Tanım 2.2.10 X rastgele değişkeni f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rastgele değişken olsun. Bu durumda X rastgele değişkeninin beklenen değeri

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{2.2.2}$$

olarak tanımlanır [48].

Özellik 2.2.1 (Beklenen Değerin Özellikleri) C bir sabit olmak üzere

(i.) Eğer $X = C$ ise $E(X) = C$ olacaktır.

(ii.) C bir sabit ve X bir rastgele değişken olmak üzere $E(CX) = C \cdot E(X)$ olacaktır.

(iii.) (X, Y) iki boyutlu rastgele değişkeni $f(x, y)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun. $Z = H_1(X, Y)$ ve $W = H_2(X, Y)$ ise bu takdirde $E(Z+W) = E(Z)+E(W)$ olacaktır.

(iv.) X ve Y herhangi iki rastgele değişken olmak üzere $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ olacaktır.

(v.) $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ n tane rastgele değişken olsun. Bu takdirde

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$$

olacaktır [48].

3. GÜÇLÜ KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLERİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

3.1 Bazı Tanım ve Teoremler

Şimdi bu bölümde kullanacağımız bazı tanım ve teoremleri verelim.

Tanım 3.1.1 (Stokastik Süreç) Eğer her $t \in I$ için $X(t, \cdot)$ fonksiyonu bir rastgele değişken ise $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir stokastik süreç denir [9].

Tanım 3.1.2 (Olasılıkta Sürekli) Eğer her $t_0 \in I$ için,

$$P - \lim_{t \to t_0} X(t, \cdot) = X(t_0, \cdot)$$

ise $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine I aralığında olasılıkta sürekli denir. Burada $P - \lim$ olasılıkta limiti ifade eder [9].

Tanım 3.1.3 (Ortalama-Kare Sürekli) Eğer her $t_0 \in I$ için,

$$P - \lim_{t \to t_0} E\left[\left(X(t, \cdot) - X(t_0, \cdot)\right)^2\right] = 0$$

ise $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine I aralığında ortalama-kare sürekli denir. Burada $E[X(t, \cdot)]$, $X(t, \cdot)$ rastgele değişkenin beklenen değeridir [9].

Tanım 3.1.4 (Artan-Azalan Süreç) Eğer her $u, v \in I$ öyleki $u < v$ için,

$$X(u, \cdot) \leq X(v, \cdot), (X(u, \cdot) \geq X(v, \cdot))$$

ise $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine artan(azalan) stokastik süreç deriz. Eğer $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci artıyorsa veya azalıyorsa monotondur denir [3, 4, 9, 25].

Tanım 3.1.5 (Türevlenebilir Süreç) Eğer aşağıdaki şekilde tanımlı bir $X'(t, \cdot) : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ rastgele değişkeni mevcut ise $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine $t_0 \in I$ da türevlenebilirdir denir.

$$X'(t, \cdot) = P - \lim_{t \to t_0} \frac{X(t, \cdot) - X(t_0, \cdot)}{t - t_0}$$

Eğer $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, I aralığındaki bütün değerlerde sürekli(türevlenebilir) ise bu X stokastik sürecine sürekli(türevlenebilir) denir [11].

A.Skowronski [3] makelesinde ispatladığı gibi eğer bir $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci konveks ise X'_-, X'_+ (sırasıyla X in sağ ve sol türevleri) artan stokastik süreçleri vardır öyleki;

$$P - \lim_{t \to t_0^-} \frac{X(t,\cdot) - X(t_0,\cdot)}{t - t_0} = X'_-(t_0,\cdot) \quad P - \lim_{t \to t_0^+} \frac{X(t,\cdot) - X(t_0,\cdot)}{t - t_0} = X'_+(t_0,\cdot)$$

dır. Diğer taraftan her $t, s \in I^\circ$ öykeki $t < s$ için

$$X'_-(t,\cdot) \leq X'_+(t,\cdot) \leq X'_-(s,\cdot) \leq X'_-(s,\cdot)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 3.1.6 (Ortalama-Kare Türevlenebilir Süreç) Eğer her $t_0 \in I$ için

$$\lim_{t \to t_0} E\left[\frac{X(t) - X(t_0)}{t - t_0} - X'(t_0)\right]^2 = 0$$

olacak şekilde bir X' stokastik süreci varsa $X(t,\cdot)$ stokastik sürecine I aralığında ortalama-kare türevlenebilir denir [11].

Tanım 3.1.7 (Ortalama-Kare İntegral) $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bir olasılık uzayı olsun ve her $t \in I$ için $E[X(t)^2] < \infty$ olmak üzere $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. $[a,b] \subset I$, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$, $[a,b]$ nin normal parçalanış dizisi ve $k = 1 \ldots n$ için $\Theta_k \in [t_{k-1}, t_k]$ olsun. Eğer $[a,b]$ aralığının her bir normal parçalanış dizisi için ve her $\Theta_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1 \ldots n$ için

$$\lim_{n \to \infty} E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X(\Theta_k) \cdot (t_k - t_{k-1}) - Y\right)^2\right] = 0$$

ise $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ rastgele değişkenine X in $[a,b]$ aralığında ortalama-kare integrali denir.

$$Y(.) = \int_a^b X(s,\cdot)ds$$

ile gösterilir.

Ortalama-kare integralin var olması için X stokastik sürecinin ortalama-kare sürekliliğini kabul etmek yeterlidir. Aynı zamanda $[a,b]$ aralığında $X(t,\cdot) \leq Z(t,\cdot)$ için

$$\int_a^b X(t,\cdot)dt \leq \int_a^b Z(t,\cdot)dt \ (a.e.),$$

eşitsizliği sağlanmaktadır [22]. Yani ortalama-kare integral operatörü artandır.

Tanım 3.1.8 Eğer her $s, t \in \mathbb{R}$ için

$$X(s + t,\cdot) = X(s,\cdot) + X(t,\cdot)$$

ise $X : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine toplamsal denir [3].

3.2 Konveks Stokastik Süreçler

Tanım 3.2.1 (Konveks Stokastik Süreçler) Eğer her $\lambda \in [0,1]$ ve $u, v \in I$ için

$$X(\lambda u + (1-\lambda)v, \cdot) \leq \lambda X(u, \cdot) + (1-\lambda)X(v, \cdot) \tag{3.2.1}$$

eşitsizliği sağlanırsa $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine konvekstir denir. Eğer yukarıdaki eşitlik $\lambda = \frac{1}{2}$ için varsa, X stokastik süreci jensen-konveks veya $\frac{1}{2}-$konveksdir. Bir $(-X)$ stokastik süreci konveks ise X süreci konkavdır denir [9].

Tanım 3.2.2 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olasılık uzayı ve $T \subset \mathbb{R}$ bir aralık olsun. $X : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine ;

i. *Eğer her $u, v \in T$ ve $\lambda \in (0,1)$ için*

$$X\left(\lambda u + (1-\lambda)\, v, \cdot\right) \leq \lambda X\left(u, \cdot\right) + (1-\lambda)\, X(u, \cdot)$$

ise λ-konvekstir(burada λ, (0, 1)de sabit bir sayıdır) denir. Bu tür stokastik süreç sınıfı C_λ ile gösterilir.

ii. *Eğer her $u, v \in T$ ve $\lambda \in [0,1]$ için*

$$X\left(\lambda u + (1-\lambda)\, v, \cdot\right) + X\left((1-\lambda)u + \lambda v, \cdot\right) \leq X\left(u, \cdot\right) + X\left(v, \cdot\right)$$

ise Wright-konvekstir denir. Bu tür stokastik süreç sınıfı W ile gösterilir [3, 4, 9, 25].

Bu temel sonuçla ilgili son zamandaki çıkmış sonuçlar için [14, 23, 37, 42] kitaplarına ve [6, 29, 39, 44–47, 50] makalelerine bakınız ki bunlarda daha geniş bilgiler verilmektedir.

Lemma 3.2.1 $A, B : \Omega \to \mathbb{R}$ rastgele değişkenleri $E[A^2] < \infty, E[B^2] < \infty$ olmak üzere, eğer $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X(t, \cdot) = A(\cdot)t + B(\cdot)$ formunda bir stokastik süreç ve $[a, b] \subset I$ ise bu takdirde

$$\int_a^b X(t, \cdot)dt = A(\cdot)\frac{b^2 - a^2}{2} + B(\cdot)(b - a)$$

dır [9].

İspat. Yukarıdaki notasyon ve beklenen değerin temel özellikleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X(\Theta_k)\cdot(t_k-t_{k-1}) - A\frac{b^2-a^2}{2} - B(b-a)\right)^2\right] \\
=\;& E\left[\left(\sum_{k=1}^{n}(A\Theta_k+B)(t_k-t_{k-1}) - A\frac{b^2-a^2}{2} - B(b-a)\right)^2\right] \qquad (3.2.2)\\
=\;& E\left[\left(A\left(\sum_{k=1}^{n}\Theta_k(t_k-t_{k-1}) - \frac{b^2-a^2}{2}\right) + B\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})-(b-a)\right)}_{=0}\right)^2\right]\\
=\;& E\left[\left(A\left(\sum_{k=1}^{n}\Theta_k(t_k-t_{k-1}) - \frac{b^2-a^2}{2}\right)\right)^2\right]\\
=\;& \left(\sum_{k=1}^{n}\Theta_k(t_k-t_{k-1}) - \frac{b^2-a^2}{2}\right)E[A^2]
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Eğer $n \to \infty$ ise Riemann integralin tanımından yukarıdaki ifade 0' a gidecektir. Bu ise lemmanın ispatını tamamlar.

Önerme 3.2.1 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir konveks stokastik süreç ve $t_0 \in I^\circ$ olsun. Bu takdirde öyle bir $A : \Omega \to \mathbb{R}$ rastgele değişkeni vardır ki X stokastik süreci t_0 da $A(\cdot)(t-t_0)+X(t_0,\cdot)$ formundaki süreç tarafından desteklenir. Yani her $t \in I$ için

$$X(t,\cdot) \geq A(\cdot)(t-t_0) + X(t_0,\cdot) \qquad (3.2.3)$$

dır [9].

İspat. $r, s, u, v, t_0 \in I^\circ$ sayılarını $r < s < t_0 < u < v$ olacak şekilde alalım. Bu durumda $r < s < t_0$ için

$$s = \frac{t_0-s}{t_0-r}r + \frac{s-r}{t_0-r}t_0$$

ifadesi r ve t_0 noktalarının bir konveks kombinasyonudur. X'in konveksliğini kullanarak

$$X(s,\cdot) \leq \frac{t_0-s}{t_0-r}X(r,\cdot) + \frac{s-r}{t_0-r}X(t_0,\cdot)$$

yazabiliriz. Buradan

$$\frac{X(t_0,\cdot)-X(r,\cdot)}{t_0-r} \leq \frac{X(t_0,\cdot)-X(s,\cdot)}{t_0-s}$$

elde edilir. O halde, eğer $s \to t_0^-$ ise

$$\frac{X(t_0,\cdot)-X(r,\cdot)}{t_0-r} \leq X'_-(t_0,\cdot) \qquad (3.2.4)$$

olacaktır. Benzer şekilde $t_0 < u < v$ için X'in konveksliğini kullanarak

$$\frac{X(u,\cdot)-X(t_0,\cdot)}{u-t_0} \leq \frac{X(v,\cdot)-X(t_0,\cdot)}{v-t_0}$$

elde edilir. Eğer $u \to t_0^+$ ise

$$X'_+(t_0,\cdot) \le \frac{X(v,\cdot)-X(t_0,\cdot)}{v-t_0} \tag{3.2.5}$$

sonucuna varılır. (3.2.4), (3.2.5) eşitsizlikleri ve Skowronski lemmasının bir sonucu olarak

$$\frac{X(t_0,\cdot)-X(r,\cdot)}{t_0-r} \le X'_-(t_0,\cdot) \le X'_+(t_0,\cdot) \le \frac{X(v,\cdot)-X(t_0,\cdot)}{v-t_0}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer $A:\Omega\to\mathbb{R}$, $X'_-(t_0,\cdot)\le A(\cdot)\le X'_+(t_0,\cdot)$ eşitsizliğini sağlayan herhangi bir rastgele değişkense, yukarıdaki eşitsizlikten (3.2.3) yi elde ederiz.

İyi bilinir ki $I\subset\mathbb{R}$ aralığında tanımlı Jensen-konveks, sürekli fonksiyonlar Hermite-Hadamard eşitsizliğini sağlar ve tersine olarak eğer sürekli bir fonksiyon Hermite-Hadamard eşitsizliğini sağlıyorsa konvekstir ([30], [7]). Bu kısımda stokastik süreçler için benzer sonuçlar ispatlanacaktır.

Teorem 3.2.1 $X: I\times\Omega\to\mathbb{R}$ Jensen-konveks, I aralığında ortalama-kare sürekli bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde herhangi $u,v\in I$ için

$$X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) \le \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt \le \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2} \tag{3.2.6}$$

dır [9].

İspat. X stokastik süreci ortalama-kare sürekli olduğundan aynı zamanda olasılıkta süreklidir. Nikodem her Jensen-konveks ve olasılıkta sürekli stokastik sürecin konveks olduğunu ispatlamıştır. Dolayısıyla X konvekstir, Önerme 3.2.1'den herhangi bir $t_0\in I^\circ$ noktasında bu süreç bir desteğe sahiptir. $t_0=\frac{u+v}{2}$ de bir destek alalım. Bu takdirde

$$X(t,\cdot)\ge A(\cdot)(t-\frac{u+v}{2})+X(\frac{u+v}{2},\cdot)$$

elde edilir. Lemma 3.2.1' i kullanarak

$$\begin{aligned}
\int_u^v X(t,\cdot)dt &\ge \int_u^v \left[A(\cdot)(t-\frac{u+v}{2})+X(\frac{u+v}{2},\cdot)\right]dt \\
&= \frac{A(\cdot)}{2}(v^2-u^2)-\frac{u+v}{2}A(\cdot)(v-u)+X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right)(v-u) \\
&= X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right)(v-u)
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Sonuç olarak

$$X\left(\frac{u+v}{2}\right) \le \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt$$

elde edilir. Böylece ispatın birinci bölümü biter. (3.2.1) eşitsizliğinde eğer $t = \lambda u + (1-\lambda)v$ alınırsa $\lambda = \dfrac{t-v}{u-v}$ olup X in konveksliğinden

$$\begin{aligned}
X(t,\cdot) &\leq \frac{t-v}{u-v}X(u,\cdot) + (1 - \frac{t-v}{u-v})X(v,\cdot) \\
&= \frac{X(u,\cdot) - X(v,\cdot)}{u-v}(t-v) + X(v,\cdot) \\
&= \frac{X(u,\cdot) - X(v,\cdot)}{u-v}t + \frac{X(v,\cdot)(u-v) - X(u,\cdot)v + X(v,\cdot)v}{u-v} \\
&= \frac{X(v,\cdot) - X(u,\cdot)}{v-u}t + \frac{X(v,\cdot)u - X(u,\cdot)v}{u-v}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Daha önce olduğu gibi Lemma 3.2.1' i kullanarak

$$\begin{aligned}
\int_u^v X(t,\cdot)dt &\leq \int_u^v \left[\frac{X(v,\cdot) - X(u,\cdot)}{v-u}t + \frac{X(v,\cdot)u - X(u,\cdot)v}{u-v}\right]dt \\
&= \frac{X(v,\cdot) - X(u,\cdot)}{v-u}\frac{1}{2}(v^2 - u^2) - \frac{X(v,\cdot)u - X(u,\cdot)v}{v-u}(v-u) \\
&= \frac{1}{2}\Big(X(v,\cdot)(v-u) + X(u,\cdot)(v-u)\Big) \\
&= \frac{X(v,\cdot) + X(u,\cdot)}{2}(v-u)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt \leq \frac{X(u,\cdot) + X(v,\cdot)}{2}$$

olduğu görülür.

Teoremin tersini göstermeden önce iki basit yorumdan söz edelim. Bunlardan ikincisi konkveksliğin tanımının doğrudan bir sonucu iken birincisi Schwartz eşitliğinin bir sonucudur.

Yorum 3.2.1 Eğer bir $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci I aralığında ortalama-kare sürekli ise $\varphi(t) = E[X(t)]$(X sürecinin beklenen değeri) ile tanımlı $\varphi : I \to \mathbb{R}$ fonsiyonu da süreklidir [9].

Yorum 3.2.2 Eğer $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci konveks(veya konkav) ise $\varphi(t) = E[X(t)]$ ile tanımlı $\varphi : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da konvekstir(veya konkav) [9].

Şimdi Hermite-Hadamard eşitsizliğinin tersini ispatlayalım.

Teorem 3.2.2 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç ve I aralığında ortalama-kare sürekli olsun ve (3.2.6) eşitsizliğinin sağ veya sol tarafını sağlasın. Bu takdirde X konvekstir [9].

İspat. Önce (3.2.6) eşitsizlğinin sol tarafının sağlanması durumunda teoremi ispatlayacağız.
Tersine olarak X stokastik sürecinin konveks olmadığını kabul edelim. Bu takdirde her $\omega \in A$ için

$$X(\lambda_0 x + (1-\lambda_0)y, \omega) > \lambda_0 X(x,\omega) + (1-\lambda_0)X(y,\omega) \tag{3.2.7}$$

olacak şekilde $P(A) > 0$ olan $A \subset \Omega$ olayı ve $x, y \in X$, $x < y$, $\lambda_0 \in (0,1)$ sayıları mevcuttur.

$$\widetilde{X}(t,\omega) = \begin{cases} X(t,\omega) & ise \quad \omega \in A \\ 0 & ise \quad \omega \notin A \end{cases}$$

sürecini tanımlayalım ve $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = E[\widetilde{X}(t)]$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Yorum 3.2.1'e göre φ sürekli fakat (3.2.7)' den dolayı φ, I da konveks değildir. Pales'in [53] çalışmasındaki sonucunu kullanarak üsten yarısürekli fonksiyon konveks değilse en az bir noktada kesin olarak konkav olacağından φ, p de kesin olarak konkav olacak şekilde bir $p \in I$ noktasının mevcut olduğu sonucuna varırız. Dolayısıyla her $t \in (p-\delta, p+\delta) \setminus \{p\}$ için

$$\varphi(t) < \varphi(p) + c(t-p) \tag{3.2.8}$$

olacak şekilde bir c sabiti ve bir $\delta > 0$ sayısı vardır. $p = \dfrac{u+v}{2}$ olmak üzere $[u,v] \subset (p-\delta, p+\delta)$ alalım. Bu takdirde Pales teoremine göre her $t \in (p-\delta, p+\delta) \setminus \{p\}$ için

$$\varphi(t) < c\left(t - \frac{u+v}{2}\right) + \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

yazılabilir. Yukarıdaki ifadenin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\int_u^v \varphi(t)dt < c\int_u^v \left[t - \frac{u+v}{2}\right]dt + \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)(v-u) = \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)(v-u)$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v \varphi(t)dt < \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

elde edilir. Tekrar $\varphi(t)$ ile $E[\widetilde{X}(t)]$ yi yer değiştirerek

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v E[\widetilde{X}(t)]dt < E\left[\widetilde{X}\left(\frac{u+v}{2}\right)\right] \tag{3.2.9}$$

eşitsizliği yazılabilir. Eğer X stokastik süreci Hermite-Hadamard eşitsizliğini sağlarsa $\widetilde{X}$ nında sağlayacağı kolayca görülür. $\widetilde{X}$ ve $[u,v]$ için (3.2.6) eşitsizliğinin sol tarafını kullanarak

$$E\left[\widetilde{X}\left(\frac{u+v}{2}\right)\right] < \frac{1}{v-u}E\left[\int_u^v \widetilde{X}(t)dt\right] \tag{3.2.10}$$

olduğu görülür. (3.2.9) ve (3.2.10) eşitsizliklerinden

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v E[\widetilde{X}(t)]dt < E\left[\widetilde{X}\left(\frac{u+v}{2}\right)\right] \leq \frac{1}{v-u}E\left[\int_u^v \widetilde{X}(t)dt\right] \tag{3.2.11}$$

elde edilir. (3.2.11) ifadesinde integrasyon sınırını değiştirerek ve Fubini teoremini kullanarak istenilen çelişki elde edilir.

Şimdi de Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı sağlansın. Daha önce olduğu gibi tersini kabul edelim, yani X stokastik süreci konveks olmasın. Bu takdirde her $\omega \in A$ için

$$X(\lambda_0 x + (1-\lambda_0)y, \omega) > \lambda_0 X(x,\omega) + (1-\lambda_0)X(y,\omega) \tag{3.2.12}$$

olacak şekilde $P(A) > 0$ olan bir $A \subset \Omega$ olayı ve $x, y \in X$, $x < y$, $\lambda_0 \in (0,1)$ sayıları mevcuttur. $\widetilde{X}(t,\omega)$ sürecini ve $\varphi(t)$ fonksiyonunu ispatın birinci kısmındaki gibi tanımlayalım. (3.2.12) eşitsizliğini φ için yazar ve sürekliliği kullanarak her $\lambda \in (0,1)$ için

$$\varphi(\lambda u + (1-\lambda)v) > \lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(v) \tag{3.2.13}$$

olacak şekilde bir $[u,v] \subset I$ aralığının mevcut olduğu görülür. Keyfi bir $t \in [u,v]$ alalım. Bu takdirde $\lambda = \dfrac{v-t}{v-u}$ olmak üzere $t = \lambda u + (1-\lambda)v$ dir. Buradan

$$\varphi(t) > \frac{\varphi(u)v - \varphi(v)u}{v-u} - \frac{\varphi(u)-\varphi(v)}{v-u}\cdot t$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikten integral alınırsa

$$\int_u^v \varphi(t)dt > \frac{1}{2}[\varphi(u)+\varphi(v)](v-u)$$

ve buradan da

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v \varphi(t)dt > \frac{\varphi(u)+\varphi(v)}{2}$$

elde edilir. Yine $\varphi(t)$ ile $E[\widetilde{X}(t)]$ yi yer değiştirerek

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v E[\widetilde{X}(t)]dt > \frac{E[\widetilde{X}(u)] + E[\widetilde{X}(v)]}{2} \tag{3.2.14}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. X süreci Hermite-Hadamard eşitsizliğini sağladığından $\widetilde{X}$ da sağlar. $\widetilde{X}$ ve $[u,v]$ için (3.2.6) eşitsizliğinin sağ tarafı kullanılırsa

$$\frac{1}{v-u}E\left[\int_u^v \widetilde{X}(t)dt\right] \leq \frac{E[\widetilde{X}(u)] + E[\widetilde{X}(v)]}{2} \tag{3.2.15}$$

yazabiliriz. (3.2.14) ve (3.2.15)' ten

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v E[\widetilde{X}(t)]dt \leq \frac{E[\widetilde{X}(u)] + E[\widetilde{X}(v)]}{2} < \frac{1}{v-u}E\left[\int_u^v \widetilde{X}(t)dt\right] \tag{3.2.16}$$

elde ederiz. (3.2.16)' de integrasyon sırası değiştirilir ve Fubini teoremi kullanılırsa istenilen çelişki elde edilir.

3.3 J-konveks Stokastik Süreçler

Tanım 3.3.1 Eğer her $s, t \in (a, b)$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$X\left(\frac{s+t}{2}, \cdot\right) \leq \frac{X(s, \cdot) + X(t, \cdot)}{2}$$

ise $X : (a, b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine J-konveks denir. Eğer $-X$ konveks(J-konveks) ise X konkav(J-konkav) denir [3].

Teorem 3.3.1 Eğer $X : (a, b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir monoton stokastik süreç ise bu takdirde bu süreç sayılabilir çoklukta noktalar hariç heryerde süreklidir [3].

İspat. X in monoton artan bir stokastik süreç olduğunu farzedelim. $t_0 \in (a, b)$ keyfi bir nokta olsun ve $(t_n : n \in \mathbb{N})$, (a, b)' de t_0 noktasına azalan dizi alalım. Bu takdirde $a \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$A_n := \{\omega \in \Omega : X(t_0, \omega) > X(t_{n+1}, \omega)\} \cup \{\omega \in \Omega : X(t_{n+1}, \omega) > X(t_n, \omega)\},$$

olaylar dizisini ve

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

olayını tanımlayalım.
X' in artanlığından $P(A) = 0$ olup her $n \in \mathbb{N}$ ve $\omega \in \Omega \setminus A$ için

$$X(t_0, \omega) \leq X(t_{n+1}, \omega) \leq X(t_n, \omega)$$

yazılabilir. Buradan $\omega \in \Omega \setminus A$ sabit noktası için $(X(t_n, \omega) : n \in \mathbb{N})$ dizisi azalan ve alttan sınırlıdır ve dolayısıyla yakınsaktır. $X^+(t_0, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$X^+(t_0, \omega) := \begin{cases} \lim_{n \to \infty} X(t_n, \omega), & \text{eğer } \omega \in \Omega \setminus A \\ 0 & \text{eğer } \omega \notin \Omega \setminus A \end{cases}$$

ile tanımlı bir rastgele değişken olsun. Bu durumda

$$P - \lim_{u \to t_0} X(u, \cdot) = X^+(t_0, \cdot) \tag{3.3.1}$$

olduğunu kanıtlamalıyız. Keyfi $\varepsilon > 0$ ve $\eta > 0$ sayılarını gözönüne alalım. Böylece

$$\lim_{n \to \infty} X(t_n, \cdot) = X^+(t_0, \cdot)$$

ve buradan da

$$P - \lim_{n \to \infty} X(t_N, \cdot) = X^+(t_0, \cdot)$$

yazılabilir. Sonuç olarak

$$P(\{\omega \in \Omega :| X(t_N,\omega) - X^+(t_0,\omega) > \eta)\} < \varepsilon \tag{3.3.2}$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $\delta := t_N - t_0$ alalım. Bu takdirde her $u \in (t_0, t_0+\delta)$ için

$$X^+(t_0,\cdot) \leq X(u,\cdot) \leq X(t_N,\cdot)$$

yazılabilir. (3.3.2) ile birlikte bu eşitsizlik

$$P(\{\omega \in \Omega :| X(u,\omega) - X^+(t_0,\omega) > \eta)\} < \varepsilon$$

olduğu anlamına gelir. Bu ise (3.3.1) eşitsizliğini ispatlar. Benzer şekilde

$$P - \lim_{u \to t_0^-} X(u,\cdot) = X^-(t_0,\cdot)$$

olacak şekilde bir $X^-(t_0,\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$ rastgele değişkeninin olduğunu gösterebiliriz. $t_0 \in (a,b)$ keyfi bir nokta olduğundan

$$P - \lim_{u \to t^-} X(u,\cdot) = X^-(t,\cdot) \ \ ve \ \ P - \lim_{u \to t^+} X(u,\cdot) = X^+(t,\cdot) \tag{3.3.3}$$

olacak şekilde $X^-, X^+ : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreçlerinin mevcut olduğu görülür. Diğer tarafdan her $t \in (a,b)$ için

$$X^-(t,\cdot) \leq X(t,\cdot) \leq X^+(t,\cdot) \tag{3.3.4}$$

elde edilir.

$s < t$ olmak üzere her $s,t \in (a,b)$ için

$$X^+(s,\cdot) \leq X^-(t,\cdot) \tag{3.3.5}$$

olduğunu görmek kolaydır.

(3.3.3) ve (3.3.4)' den

$$X^-(t,\cdot) = X^+(t,\cdot) \tag{3.3.6}$$

olduğunda X' in $t \in (a,b)$ noktasında sürekli olduğu sonucuna varılır.

İspatı tamalamak için

$$S := \{t \in (a,b) : P(\{\omega \in \Omega : X^-(t,\omega) < X^+(t,\omega)\}) > 0\}$$

ile tanımlı S kümesinin sayılabilir olduğunu göstermek yeterlidir. Her $t \in S$ için

$$P(t) := \{\omega \in \Omega : X^-(t,\omega) < X^+(t,\omega)\}$$

ve

$$N(t) := \bigcup_{\omega \in P(t)} \{\omega\} \times \{X^{-}(t,\omega), X^{-}(t,\omega)\}$$

alalım. Bu durumda her $t \in S$ için $N(t)$ kümesi $P \times l_1$ pozitif çarpım ölçülü $\Omega \times \mathbb{R}$ kümesinin bir alt kümesidir. Diğer taraftan (3.3.5)' den her $t_1, t_2 \in S$, $t_1 \neq t_2$ için

$$P \times l_1(N(t_1 \cap N(t_2)) = 0$$

elde edilir. $P \times l_1$, σ-sonlu ölçü olduğundan $\{N(t) : t \in S\}$ ailesi olsa olsa sayılabilirdir. Buradan S de sayılabilirdir. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 3.3.1 Eğer bir $X : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci konveks ise bu takdirde her $t \in (a,b)$ için

$$P - \lim_{u \to t^{-}} \frac{X(u,\cdot) - X(t,\cdot)}{u - t} = X_{-}^{'}(t,\cdot)$$

ve

$$P - \lim_{u \to t^{+}} \frac{X(u,\cdot) - X(t,\cdot)}{u - t} = X_{+}^{'}(t,\cdot)$$

olacak şekilde $X_{+}^{'}, X_{-}^{'} : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ artan stokastik süreçleri vardır. Üstelik $t < s$ olacak şekildeki her $t, s \in (a,b)$ için

$$X_{-}^{'}(t,\cdot) \leq X_{+}^{'}(t,\cdot) \leq X_{-}^{'}(s,\cdot) \leq X_{+}^{'}(s,\cdot) \tag{3.3.7}$$

dir [3].

İspat. $t, s \in (a,b)$, $t < s$ keyfi sabitler olsun. Şimdi $u, v \in (a,b)$ sayılarını $u < t < v < s$ olacak şekilde seçelim. Bu takdirde

$$\frac{X(t,\cdot) - X(u,\cdot)}{t - u} \leq \frac{X(v,\cdot) - X(u,\cdot)}{v - u} \tag{3.3.8}$$

olduğunu göstermeliyiz. Açıkça

$$t = \frac{v - t}{v - u} u + \frac{t - u}{v - u} v,$$

olduğu yani t'nin u, v noktalarının konveks kombinasyonu olduğu görülür. X' in konveksliğinden

$$X(t,\cdot) \leq \frac{v - t}{v - u} X(u,\cdot) + \frac{t - u}{v - u} X(v,\cdot) \tag{3.3.9}$$

elde edilir ki bu da (3.3.8)' i sağlar. (3.3.9)' u kullanarak

$$\frac{X(v,\cdot)-X(u,\cdot)}{v-u} \leq \frac{X(v,\cdot)-X(t,\cdot)}{v-t} \tag{3.3.10}$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.3.8) ve (3.3.10) dan

$$\frac{X(u,\cdot)-X(t,\cdot)}{u-t} \leq \frac{X(v,\cdot)-X(t,\cdot)}{v-t} \tag{3.3.11}$$

elde edilir. Bu durumda (3.3.10) dan $\frac{X(u,\cdot)-X(t,\cdot)}{u-t}$ fark oranı $u \in (a,b)$ ye göre bir artan stokastik süreçtir. Teorem 3.3.1' in ispatında olduğu gibi (3.3.11)' i kullanarak

$$P - \lim_{u \to t^-} \frac{X(u,\cdot)-X(t,\cdot)}{u-t} = X'_-(t,\cdot)$$

$X'_- : \Omega \to \mathbb{R}$ rastgele değişkeninin mevcut olduğunu gözlemleriz.
Benzer şekilde

$$P - \lim_{v \to t^+} \frac{X(v,\cdot)-X(t,\cdot)}{v-t} = X'_+(t,\cdot)$$

olacak şekilde bir $X'_+ : \Omega \to \mathbb{R}$ rastgele değişkeni vardır. (3.3.11)' den

$$X'_-(t,\cdot) \leq X'_+(t,\cdot) \tag{3.3.12}$$

olduğunu kolayca elde ederiz. (3.3.8) ve (3.3.10)' u kullanarak

$$\frac{X(v,\cdot)-X(t,\cdot)}{v-t} \leq \frac{X(s,\cdot)-X(v,\cdot)}{s-v}$$

elde edilir ki bu da

$$X'_+(t,\cdot) \leq X'_-(s,\cdot) \tag{3.3.13}$$

olduğu anlamına gelir.
$t, s \in (a,b)$ keyfi olduğundan (3.3.12) ve (3.3.13)'ü kullanarak ispatı tamamlayan (3.3.7) eşitsizliğini elde ederiz.

Teorem 3.3.2 Eğer bir $X : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci konveks ise bu takdirde bu süreç sayılabilir çoklukta nokta hariç her noktada diferansiyellenebilirdir [3].

İspat. $t \in (a,b)$ keyfi bir sabit ve $u, v \in (a,b)$ sayılarını $u < v < t$ olacak şekilde seçelim. Lemma 3.3.1' den

$$X'_+(v,\cdot) \geq X'_-(v,\cdot) \geq \frac{X(u,\cdot)-X(v,\cdot)}{u-v}$$

yazılabilir.
X sürekli olduğundan ([25] Teorem 5) ve Lemma 3.3.1' e göre X'_+ artan olup

$$(X'_+)^-(t,\cdot) \geq \frac{X(u,\cdot)-X(t,\cdot)}{u-t}$$

ve buradan da

$$(X'_+)^-(t,\cdot) \geq X'_-(t,\cdot)$$

olduğu görülür. Lemma 3.3.1' i kullanarak bu eşitsizliğin tersini de elde edebiliriz ve buradan da

$$(X'_+)^-(t,\cdot) = X'_-(t,\cdot)$$

olduğu görülür. Açıkça, eğer t noktası X stokastik sürecinin sürekli olduğu bir nokta ise bu takdirde

$$X'_+(t,\cdot) = X'_-(t,\cdot)$$

olacaktır. Bu da X' in t de diferansiyellenebilir olduğu anlamında gelir. X'_+ artan olduğundan bu süreç en fazla sayıbilir çoklukta süreksizlik noktasına sahiptir. Bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki lemma konveks fonksiyonlar için [25] deki Lemmanın stokastik süreç versiyonudur. Dolayısıyla ispatı benzer şekilde yapılabileceğinden burada ispat verilmeyecektir.

Lemma 3.3.2 $0 \in (a,b)$ ve $X : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X(0,\cdot) = 0$ ile tanımlı bir J-konveks stokastik süreç olsun. Eğer $X + Y$ J-konkav olacak şekilde $Y : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$, 0 da diferansiyellenebilir konkav stokastik süreç var ise bu takdirde $X = A + Z$ olacak şekilde bir $A : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ toplamsal stokastik süreci ve bir konveks $Z : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci vardır [3].

Teorem 3.3.3 $X : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci J-konveks stokastik süreç olsun. Bu takdirde $X + Y$ J-konkav olacak şekilde bir $Y : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ konkav stokastik sürecinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul $A : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir toplamsal stokastik süreç ve $Z : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ konveks stokastik süreç olmak üzere $X = A + Z$ olmasıdır [3].

İspat. $Y : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci $X + Y$ J-konkav olacak şekilde bir konkav stokastik süreç olsun. Bu takdirde Teorem 3.3.2' ye göre Y' nin diferansiyellenebilir olduğu bir $t_0 \in (a,b)$ noktası vardır. Her $t \in (a - t_0, b - t_0)$ ve $\omega \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} Y_1(t,\omega) &:= Y(t+t_0,\omega) \\ X_1(t,\omega) &:= X(t+t_0,\omega) - X(t_0,\omega) \end{aligned}$$

ile tanımlı stokastik süreçleri gözönüne alalım. Bu durumda Lemma 3.3.2' ye göre her $t \in (a - t_0, b - t_0)$ için

$$X_1(t,\cdot) = A(t,\cdot) + Z_1(t,\cdot)$$

olacak şekilde bir $A : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ toplamsal ve bir $Z_1 : (a - t_0, b - t_0) \times \Omega \to \mathbb{R}$ konveks stokastik süreci vardır. Bu nedenle A süreci ve her $t \in (a, b)$, $\omega \in \Omega$ için

$$Z(t, \omega) := Z_1(t - t_0, \omega) + X(t_0, \omega) - A(t_0, \omega)$$

ile tanımlı Z stokastik süreci aradığımız süreçlerdir.
Tersini ispatlamak için toplamsal A stokastik sürecinin J-konkav ve $Y = -Z$ konkav olduğunu gözönüne almak yeterlidir.

Teorem 3.3.4 Eğer $X_1, X_2 : (a, b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreçleri sırasıyla J-konveks ve J-konkav ise ve her $t \in (a, b)$ için

$$X_1(t, \cdot) \leq X_2(t, \cdot)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu takdirde Y_1 konveks Y_2 konkav A toplamsal ve $X_1 = A + Y_1$ ve $X_2 = A + Y_2$ olacak şekilde $Y_1, Y_2 : (a, b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreçleri ve $A : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreçleri vardır [3].

İspat. $Z := X_2 - X_1$ ile tanımlı $Z : (a, b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreç olsun. Açıkça görülür ki Z süreci J-konkav ve her $t \in (a, b)$ için

$$Z(t, \cdot) \geq 0 \tag{3.3.14}$$

dır. Bu nedenle Z süreci konkav olup $X_1 + Z = X_2$ dir. Teorem 3.3.3' e göre $X_1 = A + Y_1$ olacak şekilde $A : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ toplamsal stokastik süreci ve bir $Y_1 : (a, b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ konveks stokastik süreci vardır. $Y_2 = X_2 - A$ alalım, bu takdirde Y_2 süreci J-konkav olup $Y_2 = Y_1 + Z$ dir. Böylece Y_2 sürekli ve dolayısıyla konkavdır. Bu ise teoremin ispatını bitirir.

Hatırlatma 3.3.1 Eğer Teorem 3.3.4' de verilenlere ek olarak $(a, b) = \mathbb{R}$ alınırsa bu takdirde Y_1 ve Y_2 stokastik süreçleri birinci değişkene bağlı değillerdir, yani onlar birer rastgele değişkendir [3].

İspat. $Z := X_2 - X_1$ sürecinin bir rastgele değişken olduğunu göstermeliyiz. Tersini kabul edelim. Yani

$$B := \{\omega \in \Omega : Z(t_1, \omega) > Z(t_2, \omega)\}$$

ile tanımlı B kümesi pozitif ölçümlü olacak şekilde $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ sayıları mevcut olsun. Bu durumda

$$B_n := \{\omega \in B : n(Z(t_2, \omega) - Z(t_1, \omega)) + Z(t_1, \omega) < 0\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

kümesini göz önüne alalım. Açıkça görülür ki $(B_n : n \in \mathbb{N})$ dizisi artan olup $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ dir. Bu nedenle $P(B_k) > 0$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Z nin konkavlığından her $\omega \in C$ için

$$(k-1)Z(t_1,\omega)/k + Z(kt_2 + (1-k)t_1,\omega)/k \leq Z(t_2,\omega)$$

olacak şekilde tam ölçümlü bir $C \subset \Omega$ mevcuttur. B_k' nın tanımından her $\omega \in (a,b)$ için

$$Z(kt_2 + (1-k)t_1,\omega) < 0$$

dır ve bu (3.3.14) ile çelişir. Böylece her $t \in (a,b)$ için $M : \Omega \to \mathbb{R}$ bir rastgele değişken olmak üzere

$$X_2(t,\cdot) - X_1(t,\cdot) = M(\cdot) \tag{3.3.15}$$

elde edilir.

X_1 süreci J-konvekstir ve aynı anda, (3.3.15)' den dolayı J-konkavdır. Bu nedenle Jensen eşitsizliğini sağlar, yani her $t, s \in \mathbb{R}$ için

$$X_1((t+s)/2,\cdot) = (X_1(t,\cdot) + X_1(s,\cdot))/2$$

dir. Bu nedenle her $t \in \mathbb{R}$ ve $\omega \in \Omega$ için

$$X_1(t,\omega) = A(t,\omega) + Y_1(\omega)$$

olacak şekilde bir $A : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ toplamsal stokastik süreci ve bir $Y_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ rastgele değişken mevcuttur. Böylece $Y_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ yi

$$Y_2(\omega) := Y_1(\omega) + M(\omega), \ \ \omega \in \Omega$$

şeklinde tanımlayıp (3.3.15) ifadesini kullanarak her $t \in \mathbb{R}$ için $X_2(t,\cdot) := A(t,\cdot) + Y_2(\cdot)$ olduğu görülür. Bu da ispatı sonlandırır.

3.4 Güçlü Konveks Stokastik Süreçler

Tanım 3.4.1 $C : \Omega \to \mathbb{R}$ bir pozitif rastgele değişken olsun. Eğer her $u, v \in I$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$X(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot) \leq \lambda X(u,\cdot) + (1-\lambda)X(v,\cdot) - C(\cdot)\lambda(1-\lambda)(u-v)^2 \tag{3.4.1}$$

sağlanıyorsa, bu durumda $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine $C(\cdot) > 0$ modülüne göre güçlü konvekstir denir. Eğer (3.4.1) eşitsizliği sadece $\lambda = \frac{1}{2}$ için sağlanıyorsa, X sürecine $C(\cdot)$

modülüne göre güçlü Jensen-konveks veya $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü yarıkonvekstir denir. Eğer bu eşitsizlik sabit bir $\lambda \in (0,1)$ sayısı için sağlanıyorsa X sürecine $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü $\lambda-$konvekstir denir [10].

Eğer (3.4.1) eşitsizliğinde $C(\cdot)\lambda(1-\lambda)(u-v)^2$ ifadesi atılırsa, Nikodem tarafından verilen konveks stokastik süreç tanımını elde edilmiş olur (bak [25]). Diğer taraftan (3.4.1)' de $C(\cdot) \equiv 0$ olduğunda bir limit durum söz konusudur.

Bu kısımdaki amacımız konveks fonksiyon ile ilgili bilinen bazı sonuçları güçlü konveks stokastik süreç için ifade etmektir. Bu amaçla Hermite-Hadamard eşitsizliğinin, Jensen eşitsizliğinin, Kuhn teoreminin ve Bernstein-Doetsch teoreminin benzerlerini vereceğiz.

Lemma 3.4.1 X stokastik sürecinin $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü λ-konveks(veya güçlü konveks) stokastik süreç için olması gerek ve yeter şart $Y(t,\cdot) := X(t,\cdot) - C(\cdot)t^2$ ile tanımlı $Y : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecinin λ-konveks(veya konveks) olmasıdır [10].

İspat. İspatın birinci kısmında X stokastik sürecinin güçlü λ-konveks olduğunu kabul edelim. $u, v \in I$ keyfi olsun. Bu durumda güçlü λ-konvekslikten

$$
\begin{aligned}
Y(\lambda u+(1-\lambda)v,\cdot) &= X(\lambda u+(1-\lambda)v,\cdot) - C(\cdot)(\lambda u+(1-\lambda)v)^2 \\
&\leq \lambda X(u,\cdot)+(1-\lambda)X(v,\cdot) - C(\cdot)[\lambda(1-\lambda)(u-v)^2 \\
&\quad +(\lambda u+(1-\lambda)v)^2] \\
&= \lambda X(u,\cdot)+(1-\lambda)X(v,\cdot) - C(\cdot)(\lambda u^2+(1-\lambda)v^2) \\
&= \lambda(X(u,\cdot)-C(\cdot)u^2)+(1-\lambda)(X(v,\cdot)-C(\cdot)v^2) \\
&= \lambda Y(u,\cdot)+(1-\lambda)Y(v,\cdot)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Teoremin ikinci kısmı benzer şekilde olduğu için ihmal edilmiştir.

Eğer $\lambda \in [0,1]$ keyfi seçilmiş olsaydı bu takdirde güçlü konveks stokastik süreçler için lemma elde edilmiş olurdu.

Sonuç 3.4.1 Eğer bir $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü konveks stokastik süreç ise, bu takdirde her $t_0 \in I^\circ$ için X stokastik süreci t_0 da

$$H(t,\cdot) = C(\cdot)(t-t_0)^2 + A(\cdot)(t-t_0) + X(t_0,\cdot)$$

ile tanımlanan $H : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci tarafından desteklenir [10].

Şimdi güçlü konveks stokastik süreçler için bir Jensen-tipi teorem sunalım.

Teorem 3.4.1 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü konveks olsun. Bu takdirde $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$ ve $\bar{t} = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \ldots + \lambda_n t_n$ olacak şekildeki her $t_1, t_2, \ldots, t_n \in I$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ için

$$X\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_i, t_i, .\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_i X(t_i, .) - C(\cdot) \sum_{k=1}^{n} \lambda_i (t_i - \bar{t})^2$$

dir [10].

İspat. $t_1, t_2, \ldots, t_n \in I$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ sayılarını $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$ olacak şekilde alalım. $\bar{t} = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \ldots + \lambda_n t_n$ olsun. Bu takdirde Sonuç 3.4.1' e göre $\bar{t}$ ' de

$$H(t, \cdot) = C(\cdot)(t - \bar{t})^2 + A(\cdot)(t - \bar{t}) + X(\bar{t}, \cdot)$$

desteğini elde ederiz. Bu takdirde her $i \in 1, \ldots, n$ için

$$X(t_i, \cdot) \geq H(t_i, \cdot) = C(\cdot)(t_i - \bar{t})^2 + A(\cdot)(t_i - \bar{t}) + X(\bar{t}, \cdot)$$

dir. Yukarıdaki eşitsizliği λ_i ile çarpar ve tüm eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X(t_i, \cdot) \geq C(\cdot) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (t_i - \bar{t})^2 + A(\cdot) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i ((t_i - \bar{t}) + X(\bar{t}, \cdot))$$

elde edilir. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (t_i - \bar{t}) = 0$ olduğundan

$$X\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t_i, .\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X(t_i, \cdot) - C(\cdot) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (t_i - \bar{t})^2$$

eşitsizliği elde edilir.

Kuhn [34], eğer $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu keyfi $\lambda \in (0, 1)$ ve her $x, y \in I$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa yani f bir λ-konveks fonksiyon ise bu takdirde f' nin aynı zamanda Jensen-konveks olduğunu ifade etmiştir. Bu da

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

anlamında gelir.
Skowronski [4] çalışmasında bir λ-konveks stokastik sürecin aynı zamanda Jensen-konveks olduğunu göstermiştir. Bu kısımda bu gerçeklerin güçlü λ-konveks stokastik süreçler için geliştirilmiş halini vereceğiz.

Teorem 3.4.2 $\lambda \in (0,1)$ sabit bir sayı olsun ve $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü λ-konveks stokastik süreç olsun. Bu takdirde X süreci, $C(\cdot)$ modülüne göre Jensen-konvekstir [10].

İspat. X stokastik sürecinin güçlü $\lambda-$konveks olduğunu farzedelim. Lemma 3.4.1 sağlandığı için $Y(t,\cdot) = X(t,\cdot) - C(\cdot)t^2$ sürecide $\lambda-$konvekstir. Skowronski lemmasına göre Y stokastik süreci Jensen konvekstir. Bu ise

$$Y\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) \leq \frac{Y(u,\cdot)+Y(v,\cdot)}{2}$$

olması demektir. Bu nedenle

$$X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) - C(\cdot)\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 \leq \frac{X(u,\cdot) - C(\cdot)u^2 + X(v,\cdot) - C(\cdot)v^2}{2}$$

olduğu ve bazı düzenlemelerden sonra

$$X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) \leq \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2} - \frac{C(\cdot)}{4}(u-v)^2$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. Bu da ispatı bitirir.

Nikodem Jensen konveks stokastik süreçlerin konveksliğini garantileyen koşulları [25]' de sunmuştur. Şimdi güçlü konveks stokastik süreç için benzer problemleri göz önüne alalım. Bununla ilgili olarak aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 3.4.2 (P-Üsten Sınırlı) Bir $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci için

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in(a,b)} \{P(\omega \in \Omega : X(t,\omega) \geq n)\} = 0$$

eşitliği sağlanırsa X süreci $(a,b) \subset I$ aralığında P-üsten sınırlı olarak adlandırılır [10].

Teorem 3.4.3 Eğer $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü Jensen konveks bir stokastik süreç ve $(a,b) \subset I$ aralığında P-üsten sınırlı ise bu takdirde bu süreç I aralığında süreklidir [10].

İspat. X süreci güçlü Jensen konveks olduğundan aynı zamanda Jensen konveks stokastik süreçtir. Öte yandan X, I aralğında P-üsten sınırlı olduğundan [25]' deki Teorem 4 den o süreklidir.

Teorem 3.4.4 I nın açık aralık olduğunu varsayalım. $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü yarıkonveks olan bir X stokastik sürecinin sürekli olması için gerek ve yeter şart bu sürecin $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü konveks olmasıdır [10].

İspat. Gerekliliği ispatlamak için $Y(t,\cdot) = X(t,\cdot) - C(\cdot)t^2$ sürecini alalım. Lemma 3.4.1' ye göre Y nin Jensen konveks olduğunu görülür. X sürekli olduğu için Y' de süreklidir. Nikodem' in sonucunu [25] kullanarak Y nin konveksliğini elde ederiz. Lemma 3.4.1' i birkez daha kullanarak; X' in $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü konveks olduğu sonucunu çıkarırız. Yeterliliği ispatlamak için X güçlü konveks ise X aynı zamanda konveks olduğunu belirtelim. Nikodemin sonucundan ([25], Teorem 5) X' in sürekliliğini elde ederiz.

Sonuç 3.4.2 Eğer bir $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci sürekli ve $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü λ-konveks ise bu takdirde bu süreç $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü konvekstir [10].

Her $f : I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonun herhangi $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{y-x}\int_x^y f(s)ds \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

ile verilen Hermite-Hadamard eşitsizliğini sağladığı bilinmektedir. Bu ilginç sonuç Konveks analizde çok önemli bir rol oynamaktadır. Her $t_0 \in I$ için $\lim_{t \to t_0} E([X(t) - X(t_0)]^2) = 0$ şartı sağlanırsa bir $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine I aralığında ortalama-kare sürekli stokastik süreç denildiğini hatırlatalım.

Teorem 3.4.5 Eğer $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, Jensen-konveks, I aralığında ortalama-kare sürekli stokastik süreç ise bu takdirde herhangi $u, v \in I$ için

$$X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt \leq \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2} \tag{3.4.2}$$

eşitsizliği gerçeklenir [10].

Bu ifadedeki integral ortalama-kare integraldir. Ortalama kare integralin tanımı ve temel özellikleri için [27]'e bakılabilir. Şimdi güçlü konveks stokastik süreç için Hermite-Hadamard eşitsizliğini ispatlayalım. İşe teknik bir lemmayla başlayalım.

Lemma 3.4.2 $C : \Omega \to \mathbb{R}$ rastgele değişkeni için $E[C^2] < \infty$ olmak üzere. $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci $X(t,\cdot) = C(\cdot)t^2$ formunda bir stokastik süreç olsun. Eğer $[u, v] \subset I$ ise

$$\int_u^v X(t,\cdot)dt = C(\cdot)\frac{v^3 - u^3}{3}$$

eşitliği gerçeklenir [10].

İspat. Beklenen değerin temel özelliğinden

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{i=1}^{n} X(\Theta_i)(t_i - t_{i-1}) - C\frac{v^3-u^3}{3}\right]^2 &= E\left[\sum_{i=1}^{n} C\Theta_i^2(t_i - t_{i-1}) - C\frac{v^3-u^3}{3}\right]^2 \\
&= E\left[C\left(\sum_{i=1}^{n} \Theta_i^2(t_i - t_{i-1}) - \frac{v^3-u^3}{3}\right)\right]^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \Theta_i^2(t_i - t_{i-1}) - \frac{v^3-u^3}{3}\right)^2 E[C^2]
\end{aligned}$$

yazılabilir. Eğer $n \to \infty$ için limite geçilirse Riemann integralin tanımından yukarıdaki ifade 0' a gidecektir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.4.6 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü Jensen-konveks ve I aralığında ortalama-kare sürekli bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde herhangi $u, v \in I$ için

$$X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) + C(\cdot)\frac{(v-u)^2}{12} \le \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt \le \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2} - C(\cdot)\frac{(u-v)^2}{6} \quad (3.4.3)$$

eşitsizliği sağlanır [10].

İspat. Teoremin varsayımına göre X süreci $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü konveks süreçtir, dolayısıyla Lemma 3.4.1' den $Y(t,\cdot) := X(t,\cdot) - C(\cdot)t^2$ süreci de konvekstir. (3.4.2) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
Y\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) &\le \frac{1}{v-u}\int_u^v Y(t,\cdot)dt \\
&\le \frac{Y(u,\cdot)+Y(v,\cdot)}{2}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bundan dolayı

$$\begin{aligned}
X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) - C(\cdot)\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 &\le \frac{1}{v-u}\int_u^v (X(t,\cdot) - C(\cdot)t^2)dt \\
&\le \frac{X(u,\cdot) - C(\cdot)u^2 + X(v,\cdot) - C(\cdot)v^2}{2}
\end{aligned}$$

olacaktır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) - C(\cdot)\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 &\le \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt - \frac{1}{v-u}\int_u^v C(\cdot)t^2dt \\
&\le \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2} - \frac{C(\cdot)}{2}(u^2+v^2)
\end{aligned}$$

olup Lemma 3.4.2' ye göre

$$\begin{aligned}
X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right)-C(\cdot)\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 &\le \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt - C(\cdot)\frac{1}{v-u}\frac{v^3-u^3}{3}\\
&\le \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2}-\frac{C(\cdot)}{2}(u^2+v^2)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki yanına $C(\cdot)\frac{1}{v-u}\frac{v^3-u^3}{3}$ terimini ekleyerek ve bazı basit hesaplamalar yapılarak (3.4.3) eşitsizliği elde edilir.

Lemma 3.4.3 Bir $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecinin konveks olması için gerek ve yeter koşul X' in herhangi bir $t_0 \in I^\circ$ noktasında $A(\cdot)(t-t_0)+X(t_0,\cdot)$ formundaki bir süreç tarafından desteklenmesidir. Burada $A : \Omega \to \mathbb{R}$ bir rastgele değişkendir [11].

İspat. Farz edelimki X süreci konveks olsun. Önerme 3.2.1' e göre herhangi bir $t_0 \in I^\circ$ noktasında $A(\cdot)(t-t_0)+X(t_0,\cdot)$ formunda bir destek elde edilir. X süreci herhangi bir $t_0 \in I$ noktasında bir desteğe sahip olsun. Bu durumda

$$X(t,\cdot) \ge A(\cdot)(t-t_0)+X(t_0,\cdot) \tag{3.4.4}$$

eşitsizliği sağlanır. $u, v \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ sayılarını $t_0 = \lambda u + (1-\lambda)v$ olacak şekilde keyfi alalım. u ve v için ayrı ayrı olarak (3.4.4) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\lambda X(u,\cdot) &\ge \lambda A(\cdot)(u-t_0)+\lambda X(t_0,\cdot)\\
(1-\lambda)X(v,\cdot) &\ge (1-\lambda)A(\cdot)(v-t_0)+(1-\lambda)X(t_0,\cdot)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikleri taraf tarafa toplayarak

$$\lambda X(u,\cdot)+(1-\lambda)X(v,\cdot) \ge X(t_0,\cdot)$$

elde edilir. Son olarak t_0 ile $\lambda u + (1-\lambda)v$ yer değiştirerek.

$$\lambda X(u,\cdot)+(1-\lambda)X(v,\cdot) \ge X(\lambda u+(1-\lambda)v,\cdot)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu da ispatı tamamlar.
Yukarıdaki lemmaları kullanarak aşağıdaki teoremi kolayca ispatlanabilir.

Teorem 3.4.7 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde X in $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü konveks olması için gerek ve yeter şart her $t_0 \in I^\circ$ için

$$C(\cdot)(t-t_0)^2 + A(\cdot)(t-t_0)+X(t_0,\cdot)$$

formunda bir desteğin mevcut olmasıdır. Burada $A : \Omega \to \mathbb{R}$ bir rastgele değişkendir [11].

Şimdi güçlü konveks stokastik süreçlerin birinci türevine göre bir karekterizasyonunu vereceğiz.

Lemma 3.4.4 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir ortalama-kare diferansiyellenebilir stokastik süreç olsun. X' in I aralığında konveks olması için gerek ve yeter şart birinci türevinin I da azalmayan olmasıdır [11].

İspat. Açıkça görülür ki ortalama-kare türevlenebilirlik olasılığa göre türevlenebilirliği sağlar. Ancak tersi doğru değildir. X konveks olduğundan Lemma 3.3.1' e göre her $u, v \in I$, $u < v$ için

$$X'_{-}(u,\cdot) \leq X'_{+}(u,\cdot) \leq X'_{-}(v,\cdot) \leq X'_{+}(v,\cdot) \tag{3.4.5}$$

olacak şekilde $X'_{+}, X'_{-} : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ azalmayan stokastik süreçleri mevcuttur. X' in diferansiyellenebilirliğinden

$$\begin{aligned} X'_{-}(u,\cdot) &= X'_{+}(u,\cdot) &= X'(u,\cdot) \\ X'_{-}(v,\cdot) &= X'_{+}(v,\cdot) &= X'(v,\cdot) \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

elde edilir. (3.4.5) ve (3.4.6) ifadelerinden $u < v$ olacak şekilde her $u, v \in I$ için

$$X'(u,\cdot) \leq X'(v,\cdot) \tag{3.4.7}$$

elde edilir.

Şimdi bir oratalama-kare türevin azalmayan olduğunu varsayalım. Bu da (3.4.7) eşitsizliğinin $u < v$ olacak şekilde her $u, v \in I$ için sağlanması demektir. $t_0 \in (a,b) \subset I$ yı keyfi alalım ve $t \in (a,b)$ yi $t_0 < t$ olacak şekilde seçelim. Oratalama-kare integralin temel özelliklerinden ve (3.4.7) eşitsizliğinden

$$X(t,\cdot) - X(t_0,\cdot) = \int_{t_0}^{t} X'(s,\cdot)ds \geq \int_{t_0}^{t} X'(t_0,\cdot)ds = X'(t_0,\cdot)(t - t_0)$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer $t < t_0$ ise benzer şekilde

$$X(t,\cdot) - X(t_0,\cdot) = \int_{t_0}^{t} X'(s,\cdot)ds = -\int_{t}^{t_0} X'(s,\cdot)ds \geq -\int_{t}^{t_0} X'(t_0,\cdot)ds = X'(t_0,\cdot)(t - t_0)$$

eşitsizliği yazılır. Bu ise X' in herhangi bir $t_0 \in (a,b)$ noktasında

$$X(t,\cdot) \geq X(t_0,\cdot) + X'(t_0,\cdot)(t - t_0)$$

formunda desteğe sahip olması demektir. Böylece Lemma 3.4.3 ispatı tamamlar. Daha önce olduğu Lemma 3.4.1 ve yukarıdaki ispatlanan Lemma 3.4.4' ün sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.4.8 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir ortalama-kare türevlenebilir stokastik süreç olsun. Bu takdirde X in $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü konveks olması için gerek yeter şart birinci türevin güçlü artan olmasıdır. Yani $u < v$ olacak şekilde her $u, v \in I$ için

$$X^{'}(v,\cdot) - X^{'}(u,\cdot) \geq 2C(\cdot)(v-u) \tag{3.4.8}$$

eşitsizliğinin sağlamasıdır [11].

İspat. $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü konveks stokastik süreçlerin gösterimine göre her $t \in I$ için $X(t,\cdot) = H(t,\cdot) + C(\cdot)t^2$ olacak şekilde bir $H : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ konveks stokastik süreci mevcuttur. H konveks ve oratalama-kare diferansiyellenebilir olduğundan Lemma 3.4.4' e göre H' ın birinci türevi azalmayandır. $u < v$ olacak şekilde her $u, v \in I$ için

$$H^{'}(u,\cdot) \leq H^{'}(v,\cdot) \tag{3.4.9}$$

elde ederiz. Her $t \in I$ için $X(t,\cdot) = H(t,\cdot) + C(\cdot)t^2$ nin birinci ortalama-kare türevinin

$$X^{'}(t,\cdot) = H^{'}(t,\cdot) + 2C(\cdot)t \tag{3.4.10}$$

ye eşit olduğu kolayca gösterilebilir. (3.4.10)' dan $u, v \in I$ için

$$\begin{aligned} X^{'}(u,\cdot) &= H^{'}(u,\cdot) + 2C(\cdot)u \\ X^{'}(v,\cdot) &= H^{'}(v,\cdot) + 2C(\cdot)v \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

elde edilir. (3.4.9) ve (3.4.11)' den

$$X^{'}(u,\cdot) - 2C(\cdot)u \leq X^{'}(v,\cdot) - 2C(\cdot)v$$

elde edilir. Bu da (3.4.8)' in geçerli olduğunu ifade eder. Şimdi (3.4.8)' in geçerli olduğunu farz edelim. Her $t \in I$ için

$$H^{'}(t,\cdot) := X^{'}(t,\cdot) - 2C(\cdot)t$$

alalım. Tanımdan H süreci ortalama-kare diferansiyellenebilirdir. (3.4.8)' den $u < v$ olacak şekildeki keyfi $u, v \in I$ için $H^{'}(u,\cdot) \leq H^{'}(v,\cdot)$ elde edilir. Lemma 3.4.4' den H konveks stokastik süreçtir. Şimdi Lemma 3.4.1'den

$$X(t,\cdot) = H(t,\cdot) + C(\cdot)t^2$$

nın $C(\cdot)$ modülene göre güçlü konveks stokastik süreç olduğunu görürüz. Bu da ispatı tamamlar. Son olarak ikinci türevi kullanarak güçlü konveks stokastik süreçlerin bazı karaterizasyonlarını verelim.

Lemma 3.4.5 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ iki kez ortalama-kare diferansiyellenebilir stokastik süreç olsun. X' in I' da konveks olması için gerek ve yeter şart her $t \in I$ için $X^{''}(t,\cdot) \geq 0$ olmasıdır [11].

İspat. İlk olarak $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ konveks olduğunu varsayalım. Lemma 3.4.4' den $X^{'}(t,\cdot)$ birinci ortalama-kare türevi I aralığında azalmayandır. $t_0 < t$ olacak şekilde $t, t_0 \in I$ alalım. Birinci türevin monotonlouğundan

$$\frac{X^{'}(t,\cdot) - X^{'}(t_0,\cdot)}{t - t_0} \geq 0$$

elde edilir. $t < t_0$ olması durumunda ise

$$\frac{X^{'}(t_0,\cdot) - X^{'}(t,\cdot)}{t_0 - t} \geq 0$$

elde edilir. Ortalama-kare limite geçerek $X^{''}(t_0,\cdot) \geq 0$ elde edilir.
Şimdi her $t \in I$ için $X^{''}(t,\cdot) \geq 0$ olsun. $t_0 \in I^{\circ}$ sabitleyelim ve $t_0 < t$ olacak şekilde $t \in I$ alalım. İki kez ortalama-kare integrali hesaplayarak

$$0 \leq \int_{t_0}^{t} X^{''}(s,\cdot)ds = X^{'}(t,\cdot) - X^{'}(t_0,\cdot)$$

ve

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad \int_{t_0}^{t} [X^{'}(s,\cdot) - X^{'}(t_0,\cdot)]ds \quad &= \quad \int_{t_0}^{t} X^{'}(s,\cdot)ds - \int_{t_0}^{t} X^{'}(t_0,\cdot)ds \\ &= \quad X(t,\cdot) - X(t_0,\cdot) - X^{'}(t_0,\cdot)(t - t_0) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $t < t_0$ olması durumunda

$$0 \leq \int_{t}^{t_0} X^{''}(s,\cdot)ds = X^{'}(t_0,\cdot) - X^{'}(t,\cdot)$$

ve

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad \int_{t}^{t_0} [X^{'}(t_0,\cdot) - X^{'}(s,\cdot)]ds \quad &= \quad \int_{t}^{t_0} X^{'}(t_0,\cdot)ds - \int_{t}^{t_0} X^{'}(s,\cdot)ds \\ &= \quad X(t,\cdot) - X(t_0,\cdot) + X^{'}(t_0,\cdot)(t_0 - t) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece X' in herhangi bir $t_0 \in I^{\circ}$ sayısı için

$$X(t,\cdot) \geq X(t_0,\cdot) + X^{'}(t_0,\cdot)(t - t_0)$$

formunda desteğe sahip olduğu görülür. Lemma 3.4.3' den X konvekstir.
Lemma 3.4.5 ve Lemma 3.4.1'in sonucu olarak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.4.9 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ iki kez ortalama-kare diferansiyellenebilir bir stokastik süreç olsun. X'in I da $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü konveks stokastik süreç olması için gerek ve yeter şart $t \in I$ için $X^{''}(t,\cdot) \geq 2C(\cdot)$ olmasıdır [11].

3.4.1 Güçlü Konveks Stokastik Süreçler için Jensen Eşitsizlikleri

Bu kısımda güçlü Jensen-konveks stokastik süreç için Jensen-tipi eşitsizliklerin benzerlerini ve güçlü konveks stokastik süreçler için Jensen integral eşitsizliğinin bir benzerini sunacağız. Bunun için iki önemli lemmayı hatırlayalım.

Lemma 3.4.6 Bir $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecinin $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü Jensen-konveks stokastik süreç olması için gerek ve yeter şart $Y(t,\cdot) := X(t,\cdot) - C(\cdot)t^2$ ile tanımlı $Y : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecinin Jensen-konveks olmasıdır [12].

Lemma 3.4.7 *I bir açık aralık olsun. Eğer $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir Jensen-konveks stokastik süreç ise her $n \in \mathbb{N}$ ve her $t_1, \dots, t_n \in I$ için*

$$X\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i, \cdot\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(t_i,\cdot) \tag{3.4.12}$$

eşitsizliği geçerlidir [12].

Şimdi güçlü Jensen-konveks stokastik süreçler için bir Jensen tipi eşitsizlik verilecektir.

Teorem 3.4.10 *I bir açık aralık olsun. Eğer $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü Jensen-konveks stokastik süreç ise bu takdirde her $n \in \mathbb{N}$ ve her $t_1, \dots, t_n \in I$ için*

$$X\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i, \cdot\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(t_i,\cdot) - \frac{C(\cdot)}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2 \tag{3.4.13}$$

eşitsizliği geçerlidir [12].

İspat. $n \in \mathbb{N}$ ve $t_1, \dots, t_n \in I$ alalım. X, $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü Jensen-konveks bir stokastik süreç olduğundan Lemma 3.4.6' dan $X(t,\cdot) = Y(t,\cdot) + C(\cdot)t^2$ olacak şekilde bir $Y : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci vardır. Y süreci (3.4.12) eşitsizliğini sağlar. Bu da

$$Y\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i, \cdot\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y(t_i,\cdot)$$

olduğu anlamına gelir. $Y(t,\cdot) = X(t,\cdot) - C(\cdot)t^2$ ifadesi yukarıdaki eşitsizlikte yerine konulursa

$$X\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i, \cdot\right) - C(\cdot)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2 \leq \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\{X(t,\cdot) - C(\cdot)t_i^2\}\right]$$

ve dolayısıyla

$$X\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i,\cdot\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X(t_i,\cdot) - C(\cdot)\underbrace{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2 - \big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i\big)^2\right]}_{A}$$

elde edilir. Notasyonu sadeleştirmek için sadece A ifadesini dönüştürelim. Ayrıca $s := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i$ alalım. Bu takdirde

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2 - (s)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - s + s)^2 - (s)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(t_i-s)^2+2(t_i-s)s+(s)^2\right]-(s)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i-s)^2+2\frac{1}{n}s\left[\sum_{i=1}^{n}(t_i-s)\right]+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(s)^2-(s)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - s)^2 + 2\frac{1}{n}s\left[\underbrace{\sum_{i=1}^{n}t_i - ns}_{0}\right] + \underbrace{\frac{1}{n}n(s)^2 - (s)^2}_{0} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - s)^2$$

yazılabilir. Sonuç olarak

$$X\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i,\cdot\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X(t_i,\cdot) - \frac{C(\cdot)}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i\right)^2$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi yukarıdaki teoremi keyfi rasyonel katsayılı konveks kombinasyona genişletelim.

Teorem 3.4.11 I bir açık aralık olsun. Eğer $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü Jensen-konveks stokastik bir süreç ise her $t_1, \ldots, t_n \in I$ ve $q_1 + \ldots + q_n = 1$ olacak şekildeki her $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir [12].

$$X\left(\sum_{i=1}^{n}q_i t_i,\cdot\right) \le \sum_{i=1}^{n}q_i X(t_i,\cdot) - C(\cdot)\sum_{i=1}^{n}q_i\left(t_i - \sum_{i=1}^{n}q_i t_i\right)^2 \tag{3.4.14}$$

İspat. $t_1, \ldots, t_n \in I$ keyfi olsun ve $q_1 + \ldots + q_n = 1$ olmak üzere $q_1 = \frac{k_1}{l_1}, \ldots, q_n = \frac{k_n}{l_n} \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ olsun. Genelliği kaybetmeksizin $l_1 = \ldots = l_n = l$ olduğunu farz edebiliriz. Bu takdirde $k_1 + \ldots + k_n = l$ dir. $u_{11} = \ldots = u_{1k_1} =: t_1$, $u_{21} = \ldots = u_{2k_2} =: t_2$, $\ldots$, $u_{n1} = \ldots = u_{nk_n} =: t_n$ alalım. Bu takdirde

$$\sum_{i=1}^{n}q_i t_i = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}u_{ij}$$

dir. Teorem 3.4.10' dan

$$\begin{aligned}
X\Big(\sum_{i=1}^{n} q_i t_i,\cdot\Big) &= X\Big(\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} u_{ij}\Big) \\
&\leq \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} X(u_{ij},\cdot) - \frac{C(\cdot)}{l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}\Big(u_{ij} - \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} u_{ij}\Big)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} q_i X(t_i,\cdot) - C(\cdot)\sum_{i=1}^{n} q_i\Big(t_i - \sum_{i=1}^{n} q_i t_i\Big)^2
\end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki teoreme göre aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.4.3 I bir açık aralık olsun. Bir $X : I\times\Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecinin $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü Jensen-konveks stokastik süreç olması için gerek ve yeter şart her $u, v \in I$ ve $q \in \mathbb{Q}\cap(0,1)$ için

$$X(qu + (1-q)v,\cdot) \leq qX(u,\cdot) + (1-q)X(v,\cdot) - C(\cdot)q(1-q)(u-v)^2 \tag{3.4.15}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [12].

Şimdi güçlü konveks stokastik süreçler için Jensen integral eşitsizliğinin bir benzerini ispatlayalım.

$[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\wedge$ Lebesque ölçülebilir kümlerin bir sigma cebiri ve $\mu = \frac{1}{b-a}\lambda$ bir olasılık ölçüsü ($\mu([a, b]) = 1$) olmak üzere $([a, b], \wedge, \mu)$ bir olasılık ölçü uzayı olsun. Lebesgue ölçüsünü λ ile gösterelim.

Teorem 3.4.12 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$, $C(\cdot)$ modülüne göre bir güçlü konveks stokastik süreç , $\varphi : [a, b] \to I$ fonksiyonu μ ölçüsüne göre karesi integrallenebilir bir fonsksiyon olsun. Bu takdirde $m = \int_a^b \varphi(t)d\mu$ olmak üzere

$$X(m,\cdot) \leq \int_a^b X(\varphi(t),\cdot)d\mu - C(\cdot)\int_a^b (\varphi(t) - m)^2 d\mu \tag{3.4.16}$$

eşitsizliği geçerlidir [12].

İspat. X güçlü konveks olduğu için aynı zamanda konvekstir. Sonuç 3.4.1' den $t_0 \in I^\circ$ noktasında X' i destekleyen bir $H(t,\cdot) = C(\cdot)(t-t_0)^2 + A(\cdot)(t-t_0) + X(t_0,\cdot)$ stokastik süreci vardır. Bu her $t_0 \in I^\circ$ için

$$X(\varphi(t),\cdot) \geq C(\cdot)(\varphi(t)-t_0)^2 + A(\cdot)(\varphi(t)-t_0) + X(t_0,\cdot) \tag{3.4.17}$$

eşitsizliğinin sağlandığı anlamına gelir. Burada $A : \Omega \to \mathbb{R}$ bir rastgele değişkendir. Ortalama-değer teoreminden $m = \int_a^b \varphi(t)d\mu \in I$ dır. (3.4.17) eşitsizliğini m için yazarsak

$$X(\varphi(t),\cdot) \geq C(\cdot)(\varphi(t)-m)^2 + A(\cdot)(\varphi(t)-m) + X(m,\cdot)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin μ ölçüsüne göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_a^b X(\varphi(t),\cdot)d\mu &\geq C(\cdot)\int_a^b (\varphi(t)-m)^2 d\mu + A(\cdot)\int_a^b (\varphi(t)-m)d\mu + X(m,\cdot)\int_a^b d\mu \\
&= C(\cdot)\int_a^b (\varphi(t)-m)^2 d\mu + A(\cdot)\Big[\int_a^b \varphi(t)d\mu - m\int_a^b d\mu\Big] \\
&\quad + X(m,\cdot)\int_a^b d\mu \\
&= C(\cdot)\int_a^b (\varphi(t)-m)^2 d\mu + A(\cdot)\big[m - m\mu[a,b]\big] + X(m,\cdot)\mu[a,b]
\end{aligned}$$

elde edilir. μ olasılık ölçüsüne göre

$$\int_a^b X(\varphi(t),\cdot)d\mu \geq C(\cdot)\int_a^b (\varphi(t)-m)^2 d\mu + X(m,\cdot)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

3.4.2 Güçlü Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard ve Fejer Eşitsizlikleri

Bu kısımda güçlü konveks stokastik süreçler için iyi bilinen Fejer ve Hermite-Hadamard eşitsizliklerinin benzerlerini verilecektir. Rastgele olmayan durumda bu gerçekler [1] ve [35] ' da verilmiştir.

Her $t_0 \in I$ için

$$\lim_{t \to t_0} E[(X(t) - X(t_0)]^2) = 0$$

sağlanıyorsa $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine $[a,b]$ aralığında ortalama-kare süreklidir denildiğini hatırlatalım. Bu kısımda ortalama-kare integral kavramını kullanacağız. Öncelikle aşağıdaki teknik lemmayı verelim. Ortalama-kare integralin temel özelliklerinden kolaylıkla gösterilebileceğinden ispatı burada vermeyeceğiz.

Lemma 3.4.8 $G : I \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ stokastik süreci tüm $t \in [a,b]$ için $G(a+b-t) = G(t)$ ve

$$\int_a^b G(t,\cdot)dt = J(\cdot)$$

olacak şekilde bir ortalama-kare integrallenebilir süreç olsun. Burada $J:\Omega\to\mathbb{R}$ bir birim rastgele değişkendir. Bu takdirde

$$\int_a^b tG(t,\cdot)dt = \frac{a+b}{2}J(\cdot) \qquad (3.4.18)$$

dır [12].

Güçlü konveks stokastik süreçler için Fejer eşitsizliğinin bir benzeri için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.4.13 $X:[a,b]\times\Omega\to\mathbb{R}$ stokastik süreci $[a,b]$ aralığında ortalama-kare sürekli olan $C(\cdot)$ modülüne göre bir güçlü konveks stokastik süreç olsun. $G:[a,b]\times\Omega\to\mathbb{R}_+$ ortalama-kare integrallenebilir bir stokatik süreç olsun öyleki her $t\in[a,b]$ için

$$G(a+b-t,\cdot)=G(t,\cdot)$$

ve

$$\int_a^b G(t,\cdot)dt = J(\cdot)$$

olsun. Burada $J:\Omega\to\mathbb{R}$ birim rastgele değişkendir. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [12].

$$\begin{aligned} X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)+C(\cdot)\left[\int_a^b t^2G(t,\cdot)dt-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right] &\le \int_a^b X(t,\cdot)G(t,\cdot)dt \le \\ \frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}-C(\cdot)\left[\frac{a^2+b^2}{2}-\int_a^b t^2G(t,\cdot)dt\right] \qquad (3.4.19) \end{aligned}$$

İspat. (3.4.19)' un sol tarafını ispatlamak için $s=\dfrac{a+b}{2}$ ve s' de X' i destekleyen $H(t,\cdot)=C(\cdot)(t-s)^2+A(\cdot)(t-s)+X(s,\cdot)$ formunda bir süreci gözönüne alalım (Sonuç 3.4.1' e bakılabilir). Ortalama-kare integralin temel özelliklerinden

$$\begin{aligned} \int_a^b X(t,\cdot)G(t,\cdot)dt &\ge \int_a^b H(t,\cdot)G(t,\cdot)dt \\ &= C(\cdot)\int_a^b t^2G(t,\cdot)dt+(-2C(\cdot)s+A(\cdot))\int_a^b tG(t,\cdot)dt \\ &\quad +\big(C(\cdot)s^2-A(\cdot)s+X(s,\cdot)\big)\int_a^b G(t,\cdot)dt \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 3.4.8, ortalama-kare integralin temel özellikleri ve G hakkındaki varsayımdan

$$\begin{aligned}\int_a^b X(t,\cdot)G(t,\cdot)dt &\geq C(\cdot)\int_a^b t^2G(t,\cdot)dt - C(\cdot)s^2 + X(s,\cdot)\\ &= X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) + C(\cdot)\left[\int_a^b t^2G(t,\cdot)dt - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.4.19)' un sağ tarafını ispatlamak için $t = \frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b$ konveks kombinasyonu için (3.4.1) eşitsizliğini kullanalım. X' in güçlü konveksliği ve ortalama-kare integralin temel özelliğinden

$$\begin{aligned}\int_a^b X(t,\cdot)G(t,\cdot)dt &= \int_a^b X(\frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b,\cdot)G(t,\cdot)dt\\ &\leq \int_a^b \left[\frac{b-t}{b-a}X(a,\cdot) + \frac{t-a}{b-a}X(b,\cdot) - C(\cdot)\frac{(b-t)(t-a)}{(b-a)^2})(b-a)^2\right]\\ &\quad G(t,\cdot)dt\\ &= \int_a^b \left[\frac{bX(a,\cdot)-aX(b,\cdot)}{b-a} + \frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a}t - C(\cdot)((a+b)t\right.\\ &\quad \left.-ab-t^2)\right]G(t,\cdot)dt\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}\int_a^b X(t,\cdot)G(t,\cdot)dt &\leq \frac{bX(a,\cdot)-aX(b,\cdot)}{b-a} + \frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a}\cdot\frac{a+b}{2}\\ &\quad -C(\cdot)\left[\frac{(a+b)^2}{2} - ab - \int_a^b t^2G(t,\cdot)dt\right]\\ &= \frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2} - C(\cdot)\left[\frac{a^2+b^2}{2} - \int_a^b t^2G(t,\cdot)dt\right]\end{aligned}$$

yazılabilir.

Eğer (3.4.19) eşitsizliğinde $C(\cdot)=0$ alırsak bu takdirde konveks stokastik süreçler için Fejer eşitsizliği elde edilir.

$$X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) \leq \int_a^b X(t,\cdot)G(t,\cdot)dt \leq \frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2} \tag{3.4.20}$$

$X(t,\cdot) = t^2J(\cdot)$ süreci için (3.4.20) eşitsizliğini kullanarak

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \int_a^b t^2G(t,\cdot)dt \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikten, eşitsizlik (3.4.19)' daki

$$\int_a^b t^2 G(t,\cdot)dt - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

ve

$$\frac{a^2+b^2}{2} - \int_a^b t^2 G(t,\cdot)dt$$

terimleri negatif olamaz. Sonuç olarak (3.4.19) eşitsizliği (3.4.20) eşitsizliğinden daha güçlüdür. Ayrıca (3.4.19) Fejer eşitsizliğinin Teorem 3.4.6'da ispatlanan Hermite-Hadamard eşitsizliğinin genel durumu olduğuna dikkat edelim. Gerçekten $G(t,\cdot) = \frac{1}{v-u}$ için (3.4.19) eşitsizliği aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\begin{aligned} X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) + C(\cdot)\frac{(v-u)^2}{12} &\le \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt \\ &\le \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2} - C(\cdot)\frac{(u-v)^2}{6} \end{aligned} \tag{3.4.21}$$

Aşağıdaki sonuç güçlü konveks stokastik süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin tersininde sağlandığını gösterir.

Teorem 3.4.14 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci I aralığında ortalama-kare sürekli bir süreç olsun ve X süreci (3.4.21) eşitsizliğinin sağ ve sol tarafını sağlasın. Bu takdirde X güçlü konvekstir [12].

İspat. İlk olarak (3.4.21) eşitsizliğinin sol tarafının sağlanması durumda teoremi ispatlayacağız. $Y : I\times\Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecini $Y(t,\cdot) = X(t,\cdot) - C(\cdot)t^2$ ile tanımlayalım. Burada $C : \Omega \to \mathbb{R}$, (3.4.21) eşitsizliğinde bulunan rastgele değişkendir. (3.4.21) eşitsizliğinin sol tarafı için $X(t,\cdot) = Y(t,\cdot) + C(\cdot)t^2$) ifadesini yerine yazarsak

$$Y\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) + C(\cdot)\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + C(\cdot)\frac{(v-u)^2}{12} \le \frac{1}{v-u}\int_u^v \big(Y(t,\cdot) + C(\cdot)t^2\big)dt \tag{3.4.22}$$

elde edilir. Ortalama-kare integralin temel özelliğinden

$$Y\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) + C(\cdot)\frac{4u^2+4uv+4v^2}{12} \le \frac{1}{v-u}\int_u^v Y(t,\cdot)dt + C(\cdot)\frac{1}{v-u}\frac{v^3-u^3}{3} \tag{3.4.23}$$

elde edilir. (3.4.23) eşitsizliğinin her iki tarafından $C(\cdot)\dfrac{u^2+uv+v^2}{3}$ terimi çıkartılırsa

$$Y\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) \le \frac{1}{v-u}\int_u^v Y(t,\cdot)dt$$

elde edilir. Bu ise Y' nin konveks stokastik süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tafındaki eşitsizliği sağladığı anlamına gelir. Teorem 3.2.2' den Y konvekstir. Lemma

3.4.1' den X stokastik süreci $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü konvekstir. Şimdi (3.4.21) eşitsizliğinin sağ tarafı sağlansın. Daha önce belirtildiği gibi $Y : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecini $Y(t,\cdot) = X(t,\cdot) - C(\cdot)t^2$ ile tanımlayalım. Burada $C : \Omega \to \mathbb{R}$ (3.4.21) eşitsizliğinde bulunan rastgele değişkendir. (3.4.21) eşitsizliğinin sağ tarafı için $X(t,\cdot) = Y(t,\cdot) + C(\cdot)t^2$ ifadesini yerine yazıldığında

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v \big(Y(t,\cdot) + C(\cdot)t^2\big)dt \leq \frac{Y(u,\cdot)+Y(v,\cdot)}{2} + C(\cdot)\frac{u^2+v^2}{2} - C(\cdot)\frac{(u-v)^2}{6} \quad (3.4.24)$$

elde edilir. Ortalama-kare integralin temel özelliğinden

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v Y(t,\cdot)dt + C(\cdot)\frac{1}{v-u}\frac{v^3-u^3}{3} \leq \frac{Y(u,\cdot)+Y(v,\cdot)}{2} + C(\cdot)\frac{2u^2+2uv+2v^2}{6} \quad (3.4.25)$$

elde edilir. (3.4.25) eşitsizliğinin her iki tarafından $C(\cdot)\dfrac{u^2+uv+v^2}{3}$ terimi çıkartılırsa

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v Y(t,\cdot)dt \leq \frac{Y(u,\cdot)+Y(v,\cdot)}{2}$$

elde edilir. Dolayısıyla Y süreci konveks stokastik süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafındaki eşitsizliği sağlar. Teorem 3.2.2' den Y konvekstir. Lemma 3.4.1' den X stokastik süreci $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü konvekstir.

3.5 Log-Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizlikler

Son zamanlarda, log-konveks fonksiyonlar hem matematikte hem de matematiğin optimizasyon teorisi gibi alt dallarında çok ilgi görmektedir. $f : I \subseteq \mathbb{R} \to [0,\infty)$ reel sayıların I aralığında tanımlı bir log-konveks fonksiyon ve $a < b$ olsun. Aşağıdaki eşitsizlik litaratürde log-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx\right] \leq \sqrt{f(a)f(b)} \quad (3.5.1)$$

f konkav ise eşitsizliklerin tersi geçerlidir [44].

Ayrıca [39]' da Drogomir ve Mond log-konveks fonksiyonlar için aşağıdaki Hermite-

Hadamard tipindeki eşitsizliğin geçerli olduğunu ıspatlamışlardır:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(t)dt\right] \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b G\left(f\left(t\right)+fa+b-t\right)dt \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(t\right)dt \\ &\leq L\left(f\left(a\right),f(b)\right) \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

Log-konveks fonksiyonlar ve onların çeşitli özellileriyle ilgili daha fazla bilgi [23, 33, 38, 41] çalışmalarında bulunabilir.

Tanım 3.5.1 Eğer $X\left(t,w\right)$ stokastik süreci $S=\mathbb{R}^d$ de değerler alıyorsa vektör değerli stokastik süreç olarak tanımlanır [32].

Tanım 3.5.2 Eğer $T\subset\mathbb{R}$ kesikli bir küme ise bu takdirde $X\left(t,w\right)$ süreci kesikli zamanlı bir stokastik süreç olarak adlandırılır. Eğer T aralığı $\mathbb{R}^+$ veya $\mathbb{R}$'da bir aralıksa $X\left(t,w\right)$ süreci sürekli zamanlı bir stokastik süreç olarak adlandırılır. Herhangi bir $\omega\in\Omega$ sabiti için $X\left(t,w\right)$, t nin bir fonksiyonu olarakta görülebilir. Buna stokastik süreçin örneklem fonksiyonu da denir. Vektör değerli bir süreç olduğunda ise ona örneklem yörünge veya $\mathbb{R}^d$ de bir eğri denir [32].

Bu kısımda ilgimizi sürekli zamanlı stokastik süreçler üzerine yoğunlaştıracağız.

Tanım 3.5.3 (Ω,A,P) olasılık uzayı ve $T\subset\mathbb{R}$ bir aralık olsun. Eğer her $s,t\in T$ ve $\lambda\in[0,1]$ için

$$X\left(\lambda s+\left(1-\lambda\right)t,\cdot\right)\leq\left[X\left(s,\cdot\right)\right]^{\lambda}\left[X\left(t,\cdot\right)\right]^{1-\lambda} \tag{3.5.3}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $X:T\times\Omega\rightarrow[0,\infty)$stokastik sürecine $log{-}konveks$ stokastik süreç adı verilir. Bu stokastik süreçler sınıfı C_l ile gösterilir [32].

Önerme 3.5.1 Eğer $X:T\times\Omega\rightarrow[0,\infty)$ stokastik süreci log-konveks stokastik süreç ise bu takdirde X konveks stokastik süreçtir. Yani her $\lambda\in[0,1]$ için $C_l\subseteq C$ dir [32].

İspat. İspat, (3.5.3)' den ve aşağıdaki aritmatik-geometrik ortalama eşitsizliğinden kolayca görülebilir. Her $s,t\in T$ ve $\lambda\in[0,1]$ için

$$\left[X\left(s,\cdot\right)\right]^{\lambda}\left[X\left(t,\cdot\right)\right]^{1-\lambda}\leq\lambda X\left(s,\cdot\right)+\left(1-\lambda\right)X\left(t,\cdot\right) \tag{3.5.4}$$

Önerme 3.5.2 $f : T \to [0,\infty)$ ve $X : T \times \Omega \to [0,\infty)$ sırasıyla bir fonksiyon ve bir stokastik süreç olsun. f ve X konveks ve f artansa bu takdirde $f \circ X$ konvekstir [32].

İspat. f ve X konveks ve f artan olduğundan, her $s,t \in T$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
(f \circ X)(\lambda s + (1-\lambda)t, \cdot) &= f(X(\lambda s + (1-\lambda)t, \cdot)) \\
&\leq f(\lambda X(s,\cdot) + (1-\lambda) X(t,\cdot)) \\
&\leq \lambda f(X(s,\cdot)) + (1-\lambda) f(X(t,\cdot)) \\
&= \lambda (f \circ X)(s,\cdot) + (1-\lambda)(f \circ X)(X(t,\cdot))
\end{aligned}$$

yazılabilir.

$X : T \times \Omega \to \mathbb{R}$, $T \times \Omega$ aralığı üzerinde tanımlı bir stokastik süreç ve $u, v \in T$, $u < v$ olmak üzere

$$X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t,\cdot)\, dt \leq \frac{X(u,\cdot) + X(v,\cdot)}{2} \tag{3.5.5}$$

Hermite-Hadamard eşitsizliğini hatırlayalım.

Yukarıdaki eşitsizliği $X : T \times \Omega \to (0,\infty)$ $log-$konveks stokastik sürecine uygularsak

$$\ln\left[X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right)\right] \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v \ln[X(t,\cdot)]\, dt \leq \frac{\ln[X(u,\cdot)] + \ln[X(v,\cdot)]}{2} \tag{3.5.6}$$

veya buna denk olarak

$$X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) \leq \exp\left[\frac{1}{v-u} \int_u^v \ln[X(t,\cdot)]\, dt\right] \leq \sqrt{X(u,\cdot)\, X(v,\cdot)} \tag{3.5.7}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise $log-$konveks stokastik süreçler için Hadamard tipi bir eşitsizliktir.

Negatif olmayan reel sayıların aritmatik ortalamasını $A(u,v)$ ile aynı sayıların geometrik ortalamasını ise $G(u,v)$ ile gösterelim.

Yukarıdaki gösterimleri kullanarak Hadamartın (3.5.5) eşitsizliği

$$X(A(u,v),\cdot) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v A(X(t,\cdot) + X(u+v-t,\cdot))dt \leq A(X(u,\cdot) + X(v,\cdot))$$

şeklinde yazılabilir. Bu

$$\int_u^v X(t,\cdot)\, dt = \int_u^v X(u+v-t,\cdot)\, dt$$

alınarak kolayca görülebilir.

Şimdi ise log-konveks stokastik süreçler ve geometrik ortalama için benzer sonuçları kanıtlayacağız.

Teorem 3.5.1 $X : T \times \Omega \to [0,\infty)$, $T \times \Omega$ üzerinde tanımlı bir $log-$konveks stokastik süreç ve $u, v \in T$, $u < v$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [32].

$$X\left(A(u,v),\cdot\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v G(X\left(t,\cdot\right), X\left(u+v-t,\cdot\right))dt \leq G(X\left(u,\cdot\right), X\left(v,\cdot\right)) \quad (3.5.8)$$

İspat. X log-konveks olduğundan her $\lambda \in [0,1]$ için

$$X\left(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot\right) \leq \left[X\left(u,\cdot\right)\right]^{\lambda}\left[X\left(v,\cdot\right)\right]^{1-\lambda}$$

ve

$$X\left((1-\lambda)u + \lambda v,\cdot\right) \leq \left[X\left(u,\cdot\right)\right]^{1-\lambda}\left[X\left(v,\cdot\right)\right]^{\lambda}$$

eşitsizlikleri yazılabilir.
Yukarıdaki eşitsizlikleri çarpar ve kareköklerini alınırsa;

$$G(X\left(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot\right), X\left((1-\lambda)u + \lambda v,\cdot\right)) \leq G(X\left(u,\cdot\right), X\left(v,\cdot\right))$$

elde edilir. $[0,1]$ aralığında λ üzerinden integral aldığımızda

$$\int_0^1 G(X\left(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot\right), X\left((1-\lambda)u + \lambda v,\cdot\right))d\lambda \leq G(X\left(u,\cdot\right), X\left(v,\cdot\right))$$

olduğu görülür.
Eğer $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere $t := \lambda u + (1-\lambda)v$ değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 G(X\left(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot\right), X\left((1-\lambda)u + \lambda v,\cdot\right))d\lambda \\ = & \frac{1}{v-u}\int_u^v G(X\left(t,\cdot\right), X\left(u+v-t,\cdot\right))dt \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece (3.5.8) deki ikinci eşitsizlik ispatlanmış olur.
Şimdi (3.5.3)' de $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa her $u, v \in T$ için

$$X\left(\frac{s+t}{2},\cdot\right) \leq G(X\left(s,\cdot\right), X\left(t,\cdot\right))$$

olduğu görülür.
Eğer her $\lambda \in [0,1]$ için $s := \lambda u + (1-\lambda)v$, $t := (1-\lambda)u + \lambda v$ seçilirse

$$X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) \leq G(X\left(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot\right), X\left((1-\lambda)u + \lambda v,\cdot\right)) \quad (3.5.9)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliğin $[0,1]$ aralığında λ ya göre integralini alırsak (3.5.8)' deki birinci eşitsizlik ispatlanmış olur.

Sonuç 3.5.1 Yukarıdaki varsayımlara ilaveten $u \geq 0$ ve X süreci $T \times \Omega$ aralığında azalmayan olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir [32].

$$X\left(G(u,v),\cdot\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v G(X\left(t,\cdot\right), X\left(u+v-t,\cdot\right))dt \leq G(X\left(u,\cdot\right), X\left(v,\cdot\right)) \quad (3.5.10)$$

Aşağıdaki sonuç konveks stokastik süreçler için başka bir Hadamard tipi eşitsizlik sunmaktadır.

Sonuç 3.5.2 $X : T \times \Omega \to [0,\infty)$, $T \times \Omega$ aralığında bir konveks stokastik süreç $u, v \in T$ ve $u < v$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) &\leq \ln\left[\frac{1}{v-u}\int_u^v \exp\left[X\left(t,\cdot\right)+X\left(u+v-t,\cdot\right)\right]dt\right] \\ &\leq \frac{X\left(u,\cdot\right)+X\left(v,\cdot\right)}{2} \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

eşitsizliği sağlanır [32].

İspat. $g : T \to (0,\infty)$, $g(t) = \exp(X(t,\cdot))$ fonksiyonunu tanımlayalım. Açıkça görüldüğü üzere bu fonksiyon T aralığında log-konvekstir. Şimdi Teorem 3.5.1 uygulanırsa

$$\exp X(\frac{u+v}{2},\cdot) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v \sqrt{\exp X(t,\cdot)X(u+v-t,\cdot)}dt \leq \sqrt{\exp X(u,\cdot)X(v,\cdot)},$$

elde edilir, ki bu (3.5.11)' i ifade etmektedir.
Aşağıdaki teorem log-konveks stokastik süreçler için ayrıca sağlanır.

Teorem 3.5.2 $X : T \times \Omega \to (0,\infty)$ süreci $T \times \Omega$ aralığında bir log-konveks stokastik süreç ve $u, v \in T$ için $u < v$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) &\leq \exp\left[\frac{1}{v-u}\int_u^v \ln\left[X\left(t,\cdot\right)\right]dt\right] \\ &\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v G\left(X\left(t,\cdot\right), X\left(u+v-t,\cdot\right)\right)dt \\ &\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X\left(t,\cdot\right)dt \\ &\leq L\left(X\left(u,\cdot\right), X\left(v,\cdot\right)\right), \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

Burada eğer $p \neq q$ ise $L(p,q) := \frac{p-q}{\ln p - \ln q}$ ve $L(p,p) := p$ dır [32].

İspat. (3.5.12) deki ilk eşitsizlik daha önce ispatlanmıştı. Şimdi her $t \in [u,v]$ için

$$G\left(X\left(t,\cdot\right)+X\left(u+v-t,\cdot\right)\right) = \exp\left[\ln G\left(X\left(t,\cdot\right)+X\left(u+v-t,\cdot\right)\right)\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin $[u, v]$ aralığında integralini alarak ve $\exp(\cdot)$ konveks eşleştirmesi için iyi bilinen Jensen integral eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v-u} \int_u^v G\left(X\left(t, \cdot\right) + X\left(u+v-t, \cdot\right)\right) dt \qquad (3.5.13) \\ = & \frac{1}{v-u} \int_u^v \exp\left[\ln\left(G\left(X\left(t, \cdot\right) + X\left(u+v-t, \cdot\right)\right)\right)\right] dt \\ \geq & \exp\left[\frac{1}{v-u} \int_u^v \ln\left(G\left(X\left(t, \cdot\right) + X\left(u+v-t, \cdot\right)\right)\right) dt\right] \\ = & \exp\left[\frac{1}{v-u} \int_u^v \frac{\ln X\left(t, \cdot\right) + \ln X\left(u+v-t, \cdot\right)}{2} dt\right] \\ = & \exp\left[\frac{1}{v-u} \int_u^v \ln X\left(t, \cdot\right) dt\right]. \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Açıkça görülmektedir ki

$$\int_u^v \ln X\left(t, \cdot\right) dt = \int_u^v \ln X\left(u+v-t, \cdot\right) dt.$$

dır. Aritmatik ortalama-geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$G\left(X\left(t, \cdot\right), X\left(u+v-t, \cdot\right)\right) \leq \frac{X\left(t, \cdot\right) + X\left(u+v-t, \cdot\right)}{2}, t \in [u, v]$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan integral alınarak

$$\frac{1}{v-u} \int_u^v G\left(X\left(t, \cdot\right), X\left(u+v-t, \cdot\right)\right) dt \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X\left(t, \cdot\right) dt$$

elde edilir ve böylece (3.5.12) ' deki üçüncü eşitsizlik ispatlanmış olur.

Son eşitsizliği ispatlamak için X'in log-konveksliğini kullanarak, her $u, v \in T$ için

$$X\left(\lambda u + (1-\lambda) v, \cdot\right) \leq \left[X\left(u, \cdot\right)\right]^{\lambda} \left[X\left(v, \cdot\right)\right]^{1-\lambda} \qquad (3.5.14)$$

olduğunu gözönüne alalım.

(3.5.14)' de $[0, 1]$ aralığında λ ya göre integral alınırsa

$$\int_0^1 X\left(\lambda u + (1-\lambda) v, \cdot\right) d\lambda \leq \int_0^1 \left[X\left(u, \cdot\right)\right]^{\lambda} \left[X\left(v, \cdot\right)\right]^{1-\lambda} d\lambda.$$

elde edilir. Buradan da

$$\int_0^1 X\left(\lambda u + (1-\lambda) v, \cdot\right) d\lambda = \frac{1}{v-u} \int_u^v X\left(t, \cdot\right) dt$$

ve

$$\int_0^1 \left[X\left(u, \cdot\right)\right]^{\lambda} \left[X\left(v, \cdot\right)\right]^{1-\lambda} d\lambda = L\left[X\left(u, \cdot\right), X\left(v, \cdot\right)\right],$$

olduğu için teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 3.5.3 $X : T \times \Omega \to \mathbb{R}$, $T \times \Omega$ üzerinde bir konveks stokastik süreç ve $u, v \in T$ için $u < v$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\exp\left[X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right)\right] &\leq \exp\left[\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)\,dt\right] \qquad (3.5.15)\\
&\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v \exp\left[\frac{X(t,\cdot)+X(u+v-t,\cdot)}{2}\right]dt\\
&\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v \exp\left[X(t,\cdot)\right]dt\\
&\leq E\left(X(u,\cdot), X(v,\cdot)\right),
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada E üstel ortalamadır, başka bir ifadeyle

$$p \neq q \text{ için } E(p,q) := \frac{\exp p - \exp q}{p-q} \text{ ve } E(p,p) = p.$$

dır [32].

Hatırlatma 3.5.1

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{1}{v-u}\int_u^v \ln\left[X(t,\cdot)\right]dt\right) &\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v G\left(X(t,\cdot), X(u+v-t,\cdot)\right)dt\\
&\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)\,dt
\end{aligned}$$

eşitsizliğinin her bir kesin pozitif ve integrallenebilir $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreçi için sağlandığını ve

$$\begin{aligned}
\exp\left[\frac{1}{v-u}\int_u^v \ln X(t,\cdot)\,dt\right] &\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v \exp\left(\frac{X(t,\cdot)+X(u+v-t,\cdot)}{2}\right)dt\\
&\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v \exp X(t,\cdot)\,dt
\end{aligned}$$

eşitsizliğinin $[u, v]$' de integrallenebilir her $X : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreçi için sağlandığını belirtelim [32].

Yukarıdaki eşitsizlikleri göz önünde bulundurursak $[u, v]$ de integrallenebilir her $X : T \times \Omega \to (0, \infty)$ stokastik süreci için aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{1}{v-u}\int_u^v \ln X(t,\cdot)\,dt\right) &\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v G\left(X(t,\cdot), X(u+v-t,\cdot)\right)dt\\
&\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)\,dt\\
&\leq \ln\left[\frac{1}{v-u}\int_u^v \exp A\left(X(t,\cdot), X(u+v-t,\cdot)\right)\right]dt\\
&\leq \ln\left[\frac{1}{v-u}\int_u^v \exp X(t,\cdot)\,dt\right]
\end{aligned}$$

3.6 Güçlü log-konveks stokastik süreçler için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler

Teorem 3.6.1 $X : T \times \Omega \to (0,\infty)$ bir log-konveks stokastik süreç ve $u, v \in T$, $u < v$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$
\begin{aligned}
X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) &\leq \exp\left[\frac{1}{v-u}\int_u^v \ln\left[X\left(t,\cdot\right)\right]dt\right] \\
&\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v G\left(X\left(t,\cdot\right), X\left(u+v-t,\cdot\right)\right)dt \\
&\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X\left(t,\cdot\right)dt \\
&\leq L\left(X\left(u,\cdot\right), X\left(v,\cdot\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.6.1}
$$

Burada $L(p,q)$, p ve q sayılarının logaritmik ortalamasıdır. Yani $L(p,p) = p$ ve $p \neq q$ ise

$$
L(p,q) = \frac{p-q}{\ln p - \ln q}
$$

dır [31].

Tanım 3.6.1 $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ bir olasılık uzayı ve $T \subset \mathbb{R}$ bir aralık olsun. Eğer her $u, v \in T$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$
X\left(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot\right) \leq \left[X\left(u,\cdot\right)\right]^{\lambda}\left[X\left(v,\cdot\right)\right]^{1-\lambda} - c\lambda(1-\lambda)(v-u)^2 \tag{3.6.2}
$$

eşitsizliği sağlanırsa $X : T \times \Omega \to [0,\infty)$ stokastik sürecine $c > 0$ modülüne göre güçlü log-konvekstir denir [31].

Teorem 3.6.2 Eğer $X : T \times \Omega \to (0,\infty)$ stokastik süreci $c > 0$ modülüne göre güçlü $log-$konveks ve $T \times \Omega$ integrallenebilir ise her $u, v \in I$ ve $u < v$ için

$$
\begin{aligned}
& X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) + c\frac{(v-u)^2}{12} \\
\leq\ & \frac{1}{v-u}\int_u^v G\left(X\left(t,\cdot\right), X\left(u+v-t,\cdot\right)\right)dt \\
\leq\ & \frac{1}{v-u}\int_u^v X\left(t,\cdot\right)dt \\
\leq\ & L\left(X(u,\cdot), X(v,\cdot)\right) - c\frac{(v-u)^2}{6} \\
\leq\ & A(X(u,\cdot), X(v,\cdot)) - c\frac{(v-u)^2}{6}
\end{aligned} \tag{3.6.3}
$$

eşitsizliği sağlanır [31].

İspat. (3.6.2) ve aritmatik-geometrik ortalama tanımından

$$X\left(\alpha s+(1-\alpha)z,\cdot\right) \leq \left[X(s,\cdot)\right]^{\alpha}\left[X(z,\cdot)\right]^{1-\alpha}-c\alpha(1-\alpha)(z-s)^2 \leq \alpha X(s,\cdot)+(1-\alpha)X(z,\cdot)-c\alpha(1-\alpha)(z-s)^2 \tag{3.6.4}$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.6.4) eşitsizliğinde $\alpha=\frac{1}{2}$ alınırsa

$$X\left(\frac{s+z}{2},\cdot\right) \leq \sqrt{X(s,\cdot)X(z,\cdot)}-c\frac{(z-s)^2}{4} \leq \frac{X(s,\cdot)+X(z,\cdot)}{2}-c\frac{(z-s)^2}{4}. \tag{3.6.5}$$

yani $s=\lambda u+(1-\lambda)v,\ z=(1-\lambda)u+\lambda v$, olmak üzere

$$\begin{aligned} X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) &\leq \sqrt{X(\lambda u+(1-\lambda)v,\cdot)X((1-\lambda)u+\lambda v,\cdot)} \\ &\quad -c\frac{(v-u)^2(1-2\lambda)^2}{4} \\ &\leq \frac{X(\lambda u+(1-\lambda)v,\cdot)+X((1-\lambda)u+\lambda v,\cdot)}{2}-c\frac{(v-u)^2(1-2\lambda)^2}{4}. \end{aligned} \tag{3.6.6}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.6.6) eşitsizliğinden $(0,1)$ aralığı üzerinde λ ya göre integral alınırsa ve

$$\int_0^1 X(\lambda u+(1-\lambda)v,\cdot)\,d\lambda=\int_0^1 X((1-\lambda)u+\lambda v,\cdot)\,d\lambda$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) &\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v G\left(X(t,\cdot),X(u+v-t,\cdot)\right)dt-c\frac{(v-u)^2}{12} \\ &\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v A\left(X(t,\cdot),X(u+v-t,\cdot)\right)dt-c\frac{(v-u)^2}{12}. \end{aligned} \tag{3.6.7}$$

eşitsizliği yazılır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} & X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right)+c\frac{(v-u)^2}{12} \\ \leq\ & \frac{1}{v-u}\int_u^v G\left(X(t,\cdot),X(u+v-t,\cdot)\right)dt \\ \leq\ & \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)\,dt. \end{aligned} \tag{3.6.8}$$

dir. X süreci $T\times\Omega$ üzerinde güçlü $log-$konveks olduğudan $s=u$ ve $z=v$ için

$$X\left(\lambda u+(1-\lambda)v,\cdot\right) \leq \left[X(u,\cdot)\right]^{\lambda}\left[X(v,\cdot)\right]^{1-\lambda}-c\lambda(1-\lambda)(v-u)^2 \leq \lambda X(u,\cdot)+(1-\lambda)X(v,\cdot)-c\lambda(1-\lambda)(v-u)^2 \tag{3.6.9}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $(0,1)$ aralığında λ ya göre (3.6.9) eşitsizliğinin integrali alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)\,dt &\leq X(v,\cdot)\int_0^1\left[\frac{X(u,\cdot)}{X(v,\cdot)}\right]^\lambda d\lambda - c(v-u)^2\int_0^1 \lambda(1-\lambda)d\lambda \\ &\leq X(u,\cdot)\int_0^1 \lambda d\lambda + X(v,\cdot)\int_0^1 (1-\lambda)\,d\lambda \\ &\quad -c(v-u)^2\int_0^1 \lambda(1-\lambda)d\lambda\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)\,dt &\leq L\left(X(u,\cdot),X(v,\cdot)\right) - c\frac{(v-u)^2}{6} \\ &\leq A(X(u,\cdot),X(v,\cdot)) - c\frac{(v-u)^2}{6}\end{aligned} \tag{3.6.10}$$

yazılabilir. (3.6.8) ve (3.6.10)' dan teorem ispatlanır.

Teorem 3.6.3 Eğer $X : T\times\Omega \to (0,\infty)$ süreci $c>0$ modülüne göre güçlü $log-$konveks ve $T\times\Omega$ üzerinde integrallenebilir ise her $u,v\in I$ ve $u<v$ için

$$\begin{aligned}&\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)\,X(u+v-t,\cdot)\,dt \qquad (3.6.11)\\ \leq\; & X(u,\cdot)\,X(v,\cdot) + \frac{c^2(v-u)^4}{30} \\ & -\frac{4c(v-u)^2}{\ln[X(u,\cdot - X(v,\cdot))]^2}\left[A(X(u,\cdot),X(v,\cdot)) + L\left(X(u,\cdot),X(v,\cdot)\right)\right] \\ \leq\; & \frac{2\left[A(X(u,\cdot),X(v,\cdot))\right]^2 + \left[G(X(u,\cdot),X(v,\cdot)\right]^2}{3} \\ & -\frac{cA(X(u,\cdot),X(v,\cdot))(v-u)^2}{3} + \frac{c^2(v-u)^4}{30}\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır [31].

İspat. X süreci $c>0$ modülüne göre güçlü $log-$konveks stokastik süreç olduğundan her $\lambda\in(0,1)$ için

$$\begin{aligned}X(\lambda u+(1-\lambda)v,\cdot) &\leq [X(u,\cdot)]^\lambda\,[X(v,\cdot)]^{1-\lambda} - c\lambda(1-\lambda)(v-u)^2 \\ &\leq \lambda X(u,\cdot) + (1-\lambda)\,X(v,\cdot) - c\lambda(1-\lambda)(v-u)^2\end{aligned} \tag{3.6.12}$$

ve

$$\begin{aligned}X((1-\lambda)u+\lambda v,\cdot) &\leq [X(u,\cdot)]^{1-\lambda}\,[X(v,\cdot)]^{\lambda} - c\lambda(1-\lambda)(v-u)^2 \\ &\leq (1-\lambda)\,X(u,\cdot) + \lambda X(v,\cdot) - c\lambda(1-\lambda)(v-u)^2\end{aligned} \tag{3.6.13}$$

yazılabilir. (3.6.12) eşitsizliğinin her iki tarafını (3.6.13) ile çarparak

$$\begin{aligned}
& X(\lambda u+(1-\lambda)v,\cdot)\,X((1-\lambda)u+\lambda v,\cdot) \qquad (3.6.14)\\
\leq\ & X(u,\cdot)\,X(v,\cdot)+c^2\lambda^2(1-\lambda)^2(v-u)^4\\
& -c\lambda(1-\lambda)(v-u)^2\left(X(v,\cdot)\left[\frac{X(u,\cdot)}{X(v,\cdot)}\right]^{\lambda}+X(u,\cdot)\left[\frac{X(v,\cdot)}{X(u,\cdot)}\right]^{\lambda}\right)\\
\leq\ & \lambda(1-\lambda)\left([X(u,\cdot)]^2+[X(v,\cdot)]^2\right)+[\lambda^2+(1-\lambda)^2]X(u,\cdot)\,X(v,\cdot)\\
& -c(v-u)^2\lambda(1-\lambda)\,[X(u,\cdot)+X(v,\cdot)]+c^2\lambda^2(1-\lambda)^2(v-u)^4
\end{aligned}$$

olduğu görülür. (3.6.14) eşitsizliğinin $(0,1)$ aralığında λ ya göre integral alınıra

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 X(\lambda u+(1-\lambda)v,\cdot)\,X((1-\lambda)u+\lambda v,\cdot)\,d\lambda \qquad (3.6.15)\\
\leq\ & \int_0^1 X(u,\cdot)\,X(v,\cdot)\,d\lambda+c^2(v-u)^4\int_0^1\lambda^2(1-\lambda)^2d\lambda\\
& -c(v-u)^2X(v,\cdot)\int_0^1\lambda(1-\lambda)\left[\frac{X(u,\cdot)}{X(v,\cdot)}\right]^{\lambda}d\lambda\\
& -c(v-u)^2X(u,\cdot)\int_0^1\lambda(1-\lambda)\left[\frac{X(v,\cdot)}{X(u,\cdot)}\right]^{\lambda}d\lambda\\
\leq\ & \left([X(u,\cdot)]^2+[X(v,\cdot)]^2\right)\int_0^1\lambda(1-\lambda)d\lambda+X(u,\cdot)\,X(v,\cdot)\int_0^1\lambda^2+(1-\lambda)^2d\lambda\\
& -c(v-u)^2\,[X(u,\cdot)+X(v,\cdot)]\int_0^1\lambda(1-\lambda)d\lambda+c^2(v-u)^4\int_0^1\lambda^2(1-\lambda)^2d\lambda
\end{aligned}$$

elde edilir. I_1 ve I_2 integralleri için kısmi integrasyon uygulanarak

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1\lambda(1-\lambda)\left[\frac{X(u,\cdot)}{X(v,\cdot)}\right]^{\lambda}d\lambda \qquad (3.6.16)\\
&= \lambda(1-\lambda)\frac{1}{\ln\left[\frac{X(u,\cdot)}{X(v,\cdot)}\right]}\left[\frac{X(u,\cdot)}{X(v,\cdot)}\right]^{\lambda}\Bigg|_0^1-\frac{1}{\ln\left[\frac{X(u,\cdot)}{X(v,\cdot)}\right]}\int_0^1(1-2\lambda)\left[\frac{X(u,\cdot)}{X(v,\cdot)}\right]^{\lambda}d\lambda\\
&= -\frac{1}{\ln\left[\frac{X(u,\cdot)}{X(v,\cdot)}\right]}\left[(1-2\lambda)\frac{1}{\ln\left[\frac{X(u,\cdot)}{X(v,\cdot)}\right]}\left[\frac{X(u,\cdot)}{X(v,\cdot)}\right]^{\lambda}\Bigg|_0^1+\frac{2}{\ln\left[\frac{X(u,\cdot)}{X(v,\cdot)}\right]}\int_0^1\left[\frac{X(u,\cdot)}{X(v,\cdot)}\right]^{\lambda}d\lambda\right]\\
&= \frac{1}{X(v,\cdot)}\frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{[\ln X(u,\cdot)-\ln X(v,\cdot)]^2}+\frac{2X(u,\cdot)-2X(v,\cdot)}{[\ln X(u,\cdot)-\ln X(v,\cdot)]^2}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1\lambda(1-\lambda)\left[\frac{X(v,\cdot)}{X(u,\cdot)}\right]^{\lambda}d\lambda \qquad (3.6.17)\\
&= \frac{1}{X(u,\cdot)}\frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{[\ln X(u,\cdot)-\ln X(v,\cdot)]^2}+\frac{2X(v,\cdot)-2X(u,\cdot)}{[\ln X(u,\cdot)-\ln X(v,\cdot)]^2}.
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned}
&\left([X(u,\cdot)]^2+[X(v,\cdot)]^2\right)\int_0^1\lambda(1-\lambda)d\lambda+X(u,\cdot)X(v,\cdot)\int_0^1\lambda^2+(1-\lambda)^2 \qquad (3.6.18)\\
&d\lambda-c(v-u)^2\left[X(u,\cdot)+X(v,\cdot)\right]\int_0^1\lambda(1-\lambda)d\lambda+c^2(v-u)^4\int_0^1\lambda^2(1-\lambda)^2d\lambda\\
=\ &\frac{[X(u,\cdot)]^2+[X(v,\cdot)]^2}{6}+\frac{2X(u,\cdot)X(v,\cdot)}{3}\\
&-\frac{c(v-u)^2\left[X(u,\cdot)+X(v,\cdot)\right]}{6}+\frac{c^2(v-u)^4}{30}\\
=\ &\frac{2\left[A(X(u,\cdot),X(v,\cdot))\right]^2+\left[G(X(u,\cdot),X(v,\cdot)\right]^2}{3}\\
&-\frac{cA(X(u,\cdot),X(v,\cdot))(v-u)^2}{3}+\frac{c^2(v-u)^4}{30}
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. (3.6.16) , (3.6.17) ve (3.6.18) yerine yazılır ve $t:=\lambda u+(1-\lambda)v,\ \lambda\in(0,1)$ değişken değişimi yazpılırsa (3.6.11)' daki istenilen eşitsizlik elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

3.7 Birinci Anlamda $s-$Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizlikler

Bu kısım boyunca $I\subset\mathbb{R}_+$ bir aralık olsun. Şimdi birinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerle ilgili Dargomir ve Fitzpatrick [39] tarafından kanıtlanmış bazı teoremleri verelim.

Teorem 3.7.1 $f\in K_s^1$ olsun. Bu takdirde $u,v\in I,\ \alpha,\beta\geq 0$ ve $\alpha^s+\beta^s\leq 1$ için $f(\alpha u+\beta v)\leq\alpha^s f(u)+\beta^s f(v)$ eşitsizliği sağlanması için gerek ve yeter şart $f(0)\leq 0$ olmasıdır [39] .

Teorem 3.7.2 $0<s_1\leq s_2\leq 1$ olsun. Eğer $K\in K_{s_2}^1$ ve $f(0)\leq 0$ ise $f\in K_{s_1}^1$ dır [39] .

Teorem 3.7.3 $f:I\to\mathbb{R}$, $s\in(0,1)$ için birinci anlamda $s-$konveks fonksiyon olsun. Eğer $a,b\in I$ ve $a<b$, ise

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

eşitsizliği geçerlidir [39] .

Teorem 3.7.4 $f:I\to\mathbb{R}$, $s\in(0,1)$ için birinci anlamda $s-$konveks fonksiyon olsun. O halde

$$\int_0^1 f\left(ta+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}b\right)\Psi(t)\,dt\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\Psi(t) := \frac{1}{2}\left[1+(1-t^s)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}\right]$, $t \in [0,1]$ dır [39] .

Teorem 3.7.5 $f : I \to \mathbb{R}$, $s \in (0,1)$ için birinci anlamda $s-$konveks fonksiyon olsun. O halde

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{2}{s}-1}}\right) &\leq \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right)\left[t+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}\right]dt \qquad (3.7.1) \\ &\leq \int_0^1 f\left(ta+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}b\right)\Psi(t)\,dt \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\Psi(t) := \frac{1}{2}\left[1+(1-t^s)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}\right]$, $t \in [0,1]$ dir [39].

Teorem 3.7.6 $f : I \to \mathbb{R}$, $s \in (0,1)$ için birinci anlamda $s-$konveks fonksiyon olsun. O halde

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{2}{s}-1}}\right) &\leq \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right)\left[t^{\frac{1}{s}}+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}\right]dt \\ &\leq \int_0^1 f\left(t^{\frac{1}{s}}a+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}b\right)dt \qquad (3.7.2) \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [39].

Teorem 3.7.7 $f : I \to \mathbb{R}^+$, $s \in (0,1)$ için birinci anlamda $s-$konveks fonksiyon olsun. Eğer $0 < a < b$ ve

$$\int_a^\infty x^{\frac{s+1}{s-1}} f(x)\,dx$$

integrali sonlu ise

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &\leq \frac{s}{1-s}\left[\left[a^{\frac{2s}{1-s}}\int_a^\infty x^{\frac{s+1}{s-1}} f(x)\,dx \right.\right. \qquad (3.7.3) \\ &\left.\left. +b^{\frac{2s}{1-s}}\int_b^\infty x^{\frac{s+1}{s-1}} f(x)\,dx\right]\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [39].

Teorem 3.7.8 $0 < s < 1$ olsun. Eğer $f \in K_s^1$ ise f fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında azalmayandır ve $\lim\limits_{u\to 0^+} f(u) \leq f(0)$ dır [21] .

$s-$konveks fonksiyonlarla ilgili bahsettiğimiz sonuçlar [42]' de bulunabilir.

Bu kısımda $s-$konveks fonksiyonlar için yukarıdaki çalışmalarda verilen kavramları $s-$konveks stokastik süreçlere aktaracağız. Bununla ilgili olarak birinci anlamda $s-$konveks stokastik süreç tanımını verip bu süreçler için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri elde edeceğiz.

Tanım 3.7.1 (Birinci Anlamda $s-$Konveks Stokastik Süreç) $0 < s \leq 1$ olsun. Eğer her $u, v \geq 0$ ve $\alpha^s + \beta^s = 1$ için

$$X(\alpha u + \beta v, \cdot) \leq \alpha^s X(u, \cdot) + \beta^s X(v, \cdot)$$

eşitsizliği geçerliyse $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine birinci anlamda $s-$konveks stokastik süreç adı verilir. Bu tip stokastik süreçler sınıfını C_s^1 ile göstereceğiz [49].

Hatırlatma 3.7.1 Kolaylıkla görülmektedir ki $s = 1$ için birinci anlamda $s-$konvekslik Tanım 3.2.1 de verilen stokastik süreçlerdeki genel konveksliğe indirgenir [49].

Hatırlatma 3.7.2 Kolayca görülmektedir ki $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ için birinci anlamda $s-$kovekslik Tanım 3.3.1 deki Jensen-konveksliğe indirgenir [49].

Teorem 3.7.9 $0 < s < 1$ olsun. Eğer $X \in C_s^1$ ise X süreci $I \times \Omega$ aralığında azalmayandır ve $P - \lim\limits_{t \to 0} X(t, \cdot) \leq X(0, \cdot)$ dır [49].

İspat. $\alpha \in [0,1], u > 0$ ve s-konveks stokastik süreçler yardımıyla

$$X\left((\alpha^{\frac{1}{s}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{s}})u, \cdot\right) \leq \alpha X(u, \cdot) + (1-\alpha) X(u, \cdot) = X(u, \cdot).$$

yazılabilir. $h(\alpha) = \alpha^{\frac{1}{s}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{s}}$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli , $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ aralığında azalan, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ aralığında artan ve $h([0,1]) = \left[h\left(\frac{1}{2}\right), h(1)\right] = \left[2^{1-\frac{1}{s}}, 1\right]$ dır. Bu ise her $u > 0$, $t \in \left[2^{1-\frac{1}{s}}, 1\right]$ için

$$X(tu, \cdot) \leq X(u, \cdot) \tag{3.7.4}$$

olduğunu gösterir. Eğer $t \in \left[2^{1-\frac{1}{s}}, 1\right]$ ise $t^{\frac{1}{2}} \in \left[2^{1-\frac{1}{s}}, 1\right]$ olup (3.7.4)' deki eşitsizlik her $u > 0$ için sağlandığından her $u > 0$ için

$$X(tu, \cdot) = X\left(t^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{1}{2}}u), \cdot\right) \leq X(t^{\frac{1}{2}}u, \cdot) \leq X(u, \cdot)$$

eşitsizliği elde edilir. Tümevarımla her $u > 0$, $t \in (0,1]$ için

$$X(tu, \cdot) \leq X(u, \cdot) \tag{3.7.5}$$

olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak $0 < u \leq v$ alarak ve (3.7.4)'ü uygulayarak

$$X(u, \cdot) = X\left(\frac{u}{v}v, \cdot\right) \leq X(v, \cdot),$$

elde edilir ki bu da X stokastik sürecinin I aralığında azalmayan olduğu anlamına gelir. İkinci kısım şu şekilde ispatlanabilir. $u > 0$ ve s-konveks stokastik süreçler yardımıyla

$$X(\alpha u, \cdot) = X(\alpha u + \beta 0, \cdot) \leq \alpha^s X(u, \cdot) + \beta^s X(0, \cdot)$$

eşitsizliği yazılabilir. $u \to 0^+$ için eşitsizliğin her iki tarafında limit alınırsa

$$\begin{aligned} P - \lim_{u\to 0^+} X(u,\cdot) &= P - \lim_{u\to 0^+} X(\alpha u,\cdot) \\ &\leq \alpha^s P - \lim_{u\to 0^+} X(u,\cdot) + \beta^s P - \lim_{u\to 0^+} X(0,\cdot) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$(1-\alpha^s)\, P - \lim_{u\to 0^+} X(u,\cdot) \leq \beta^s P - \lim_{u\to 0^+} X(0,\cdot)$$

olduğu ve dolayısıyla

$$P - \lim_{u\to 0^+} X(u,\cdot) \leq X(0,\cdot).$$

olduğu görülür ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.7.10 $X \in C_s^1$ olsun. $u, v \in I$, $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta \leq 1$ için $X(\alpha u + \beta v, \cdot) \leq \alpha^s X(u,\cdot) + \beta^s X(v,\cdot)$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $X(0,\cdot) \leq 0$ olmasıdır [49].

İspat. $u = v = 0$ ve $\alpha = \beta = 0$ alınırsa $X(0,\cdot) \leq 0$ olduğu açıktır. $u, v \in I$, $\alpha, \beta \geq 0$ ve $0 < \gamma = \alpha^s + \beta^s < 1$ olsun. $a = \alpha\gamma^{-\frac{1}{s}}$ ve $b = \beta\gamma^{-\frac{1}{s}}$ alalım. Bu takdirde $a^s + b^s = \frac{\alpha^s}{\gamma} + \frac{\beta^s}{\gamma} = 1$ olup

$$\begin{aligned} X(\alpha u + \beta v,\cdot) &= X\left(a\gamma^{\frac{1}{\alpha}} u + b\gamma^{\frac{1}{\alpha}} v, \cdot\right) \leq a^s X\left(\gamma^{\frac{1}{\alpha}} u, \cdot\right) + b^s X\left(\gamma^{\frac{1}{\alpha}} v, \cdot\right) \\ &= a^s X\left(\gamma^{\frac{1}{\alpha}} u + (1-\gamma)^{\frac{1}{s}} 0, \cdot\right) + b^s X\left(\gamma^{\frac{1}{\alpha}} v + (1-\gamma)^{\frac{1}{s}} 0, \cdot\right) \\ &\leq a^s \gamma X(u,\cdot) + b^s \gamma X(v,\cdot) + (1-\gamma)(a^s + b^s) X(0,\cdot) \\ &= a^s \gamma X(u,\cdot) + b^s \gamma X(v,\cdot) + (1-\gamma) X(0,\cdot) \\ &\leq \alpha^s X(u,\cdot) + \beta^s X(v,\cdot), \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.7.11 $0 < s_1 \leq s_2 \leq 1$ olsun. Eğer $X \in C_{s_2}^1$ ve $X(0,\cdot) \leq 0$ ise $X \in C_{s_1}^1$ dır [49].

İspat. Farz edelim ki $X \in C_{s_2}^1$, $u, v \in I$, $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha^{s_1} + \beta^{s_1} = 1$ olsun. Bu takdirde $0 < \alpha^{s_2} + \beta^{s_2} \leq \alpha^{s_1} + \beta^{s_1} = 1$ ve Teorem 3.7.10 gözönünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} X(\alpha u + \beta v,\cdot) &\leq \alpha^{s_2} X(u,\cdot) + \beta^{s_2} X(v,\cdot) \\ &\leq \alpha^{s_1} X(u,\cdot) + \beta^{s_1} X(v,\cdot) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da $X \in C_{s_1}^1$ olması anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi daha sonra kullanacağımız kullanışlı bir özelliği sunalım.

Önerme 3.7.1 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ integrallenebilir bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde

$$\int_0^1 X(tu + (1-t)v, \cdot)\, dt = \int_0^1 X((1-t)u + tv, \cdot)\, dt. \qquad (3.7.6)$$

eşitliği geçerlidir [49].

İspat. $t^* = tu + (1-t)v$, $t \in [0,1]$ olsun. Bu takdirde $dt^* = (u-v)\, dt$ olup

$$\int_0^1 X(tu + (1-t)v, \cdot)\, dt = \frac{1}{u-v}\int_v^u X(t^*, \cdot)\, dt^* = \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t^*, \cdot)\, dt^*.$$

elde edilir. Benzer şekilde $k^* = (1-t)u + tv, t \in [0,1]$ olsun. Bu takdirde $dk^* = (u-v)\, dt$ olup

$$\int_0^1 X((1-t)u + tv, \cdot)\, dt = \frac{1}{v-u}\int_u^v X(k^*, \cdot)\, dk^*$$

elde edilir. Böylece eşitsizlik ispatlanmış olur.

Şimdi birinci anlamda s-konveks stokastik süreçler için bazı Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri vereceğiz.

Teorem 3.7.12 $s \in (0,1)$ için $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci birinci anlamda $s-$konveks olsun. Eğer $u, v \in I$ ve $u < v$ ise bu takdirde

$$X\left(\frac{u+v}{2^{\frac{1}{s}}}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t, \cdot)\, dt \qquad (3.7.7)$$

eşitsizliği geçerlidir [49].

İspat. Eğer birinci anlamdaki $s-$konveks stokastik süreçlerin tanımında $\alpha = \frac{1}{2^{\frac{1}{s}}}$, $\beta = \frac{1}{2^{\frac{1}{s}}}$ alınırsa $\alpha^s + \beta^s = 1$ ve her $a, b \in I$ için

$$X\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}, \cdot\right) \leq \frac{X(a, \cdot) + X(b, \cdot)}{2}.$$

olduğu görülür. Eğer $a = tu + (1-t)v$, $b = (1-t)u + tv, t \in [0,1]$ alınırsa

$$X\left(\frac{u+v}{2^{\frac{1}{s}}}, \cdot\right) \leq \frac{X(tu + (1-t)v, \cdot) + X((1-t)u + tv, \cdot)}{2}$$

elde edilir. Öte yandan X, $[0, \infty)$ aralığında azalmayan olduğundan $(0,1)$ aralığında integrallenebilirdir. Yukaridaki eşitsizlikte t' ye göre integral alınır ve Önerme 3.7.1' deki eşitsizlik gözönünde bulundurulursa (3.7.7) eşitsizliği ispatlanmış olur.

Teorem 3.7.13 $s \in (0,1)$ olmak üzere $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci birinci anlamda $s-$konveks olsun. Bu takdirde

$$\int_0^1 X\left(tu + (1-t^s)^{\frac{1}{s}} v, \cdot\right) \Psi(t)\, dt \leq \frac{X(u,\cdot) + X(v,\cdot)}{2} \tag{3.7.8}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\Psi(t) := \frac{1}{2}\left[1 + (1-t^s)^{\frac{1}{s}-1} t^{s-1}\right]$, $t \in [0,1]$ dır [49].

İspat. Eğer birinci anlamda $s-$konveks stokastik süreçlerin tanımında $\alpha = t$, $\beta = (1-t^s)^{\frac{1}{s}}$, $t \in [0,1]$ alınırsa her $t \in [0,1]$ için $\alpha^s + \beta^s = 1$ elde edilir ve böylece her $t \in [0,1]$ için

$$X\left(tu + (1-t^s)^{\frac{1}{s}} v, \cdot\right) \leq t^s X(u,\cdot) + (1-t^s) X(v,\cdot)$$

olduğu görülür. Benzer şekilde her $t \in [0,1]$ için

$$X\left((1-t^s)^{\frac{1}{s}} u + tv, \cdot\right) \leq (1-t^s) X(u,\cdot) + t^s X(v,\cdot)$$

olduğu gösterilebilir. Eğer yukarıdaki iki eşitsizliği taraf tarafa toplarsak her $t \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2}\left[X\left(tu + (1-t^s)^{\frac{1}{s}} v, \cdot\right) dt + X\left((1-t^s)^{\frac{1}{s}} u + tv, \cdot\right) dt\right] \leq \frac{X(u,\cdot) + X(v,\cdot)}{2}$$

elde ederiz. Bu durumda bu eşitsizliğin $[0,1]$ aralığında t' ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[\int_0^1 X\left(tu + (1-t^s)^{\frac{1}{s}} v, \cdot\right) dt + \int_0^1 X\left((1-t^s)^{\frac{1}{s}} u + tv, \cdot\right) dt\right] \\ \leq\ &\frac{X(u,\cdot) + X(v,\cdot)}{2} \end{aligned} \tag{3.7.9}$$

elde edilir. $t \in [0,1]$ için $k := (1-t^s)^{\frac{1}{s}}$ alalım. Bu durumda $t = (1-k^s)^{\frac{1}{s}}$ ve $dt = -(1-k^s)^{\frac{1}{s}-1} k^{s-1} dk$, $k \in (0,1]$ olacağından

$$\begin{aligned} \int_0^1 X\left((1-t^s)^{\frac{1}{s}} u + tv, \cdot\right) dt &= -\int_1^0 X\left(ku + (1-k^s)^{\frac{1}{s}} v, \cdot\right) (1-k^s)^{\frac{1}{s}-1} k^{s-1} dk \\ &= \int_0^1 X\left(ku + (1-k^s)^{\frac{1}{s}} v, \cdot\right) (1-k^s)^{\frac{1}{s}-1} k^{s-1} dk \\ &= \int_0^1 X\left(tu + (1-t^s)^{\frac{1}{s}} v, \cdot\right) (1-t^s)^{\frac{1}{s}-1} t^{s-1} dt \end{aligned}$$

elde edilir. (3.7.9)' daki eşitsizliği kullanarak

$$\int_0^1 X\left(tu + (1-t^s)^{\frac{1}{s}} v, \cdot\right) \left[\frac{1 + (1-t^s)^{\frac{1}{s}-1} t^{s-1}}{2}\right] dt \leq \frac{X(u,\cdot) + X(v,\cdot)}{2}$$

olduğu görülür ve teorem kanıtlanmış olur.

Teorem 3.7.14 $s \in (0,1)$ olmak üzere $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci birinci anlamda $s-$konveks olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} X\left(\frac{u+v}{2^{\frac{2}{s}-1}},\cdot\right) &\leq \int_0^1 X\left(\frac{u+v}{2^{\frac{1}{s}}},\cdot\right)\left[t+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}\right]dt \\ &\leq \int_0^1 X\left(tu+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}v,\cdot\right)\Psi(t)\,dt \end{aligned} \tag{3.7.10}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada Ψ, Teorem 3.7.13' de tanımlandığı gibidir [49].

İspat. $\frac{1}{s} > 1$ olduğundan $g : I \to \mathbb{R}$, $g(t) = t^{\frac{1}{s}}$ konveks fonksiyonunu gözönüne alabiliriz. Bu takdirde

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{t^s+(1-t^s)}{2}\right) \leq \frac{g(t^s)+g(1-t^s)}{2}$$

olur ki buradan da

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{s}}} \leq \frac{t+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}}{2}$$

ve

$$\frac{u+v}{2^{\frac{1}{s}}}\frac{1}{2^{\frac{1}{s}}} \leq \frac{t+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}}{2}\frac{u+v}{2^{\frac{1}{s}}}$$

ve dolayısıyla

$$\frac{u+v}{2^{\frac{2}{s}-1}} \leq \frac{u+v}{2^{\frac{1}{s}}}\left[t+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}\right]$$

elde edilir. X stokastik süreci I aralığında azalmayan olduğundan her t$\in [0,1]$ için

$$X\left(\frac{u+v}{2^{\frac{2}{s}-1}},\cdot\right) \leq X\left(\frac{u+v}{2^{\frac{1}{s}}}\left[t+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}\right],\cdot\right)$$

yazılabilir. Eğer bu eşitsizliğin $[0,1]$ aralığında t' ye göre integralini alırsak (3.7.10)' daki ilk eşitsizliği elde etmiş oluruz.

X birinci anlamda $s-$konveks stokastik süreç olduğundan her $a,b \in I$ için

$$X\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}},\cdot\right) \leq \frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Şimdi $a = tu+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}v$, $b = (1-t^s)^{\frac{1}{s}}u+tv$, $t \in [0,1]$ alalım. Bu takdirde her $a,b \in I$ için

$$X(\frac{u+v}{2^{\frac{1}{s}}}\left[t+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}\right],\cdot) \leq \frac{1}{2}\left[X\left(tu+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}v,\cdot\right)+X\left(tu+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}v,\cdot\right)\right]$$

eşitsizliği yazılabilir. Eğer bu eşitsizliğin $[0,1]$ aralığında t ye integralini alırsak ve Teorem 3.7.13' in ispatında kullandığımız değişken değiştirmesini göz önünde bulundurulursa (3.7.10)' daki istenen eşitsizlik elde edilir.

Teorem 3.7.15 $s \in (0,1)$ için $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci birinci anlamda $s-$konveks stokastik süreç olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} X\left(\frac{u+v}{2^{\frac{2}{s}-1}},\cdot\right) &\leq \int_0^1 X\left(\frac{u+v}{2^{\frac{1}{s}}},\cdot\right)\left[t^{\frac{1}{s}}+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}\right]dt \\ &\leq \int_0^1 X\left(t^{\frac{1}{s}}u+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}v,\cdot\right)dt \\ &\leq \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2} \end{aligned} \tag{3.7.11}$$

eşitsizliği sağlanır [49].

İspat. $\frac{1}{s} > 1$ olduğundan $s \in (0,1)$ için $g : I \to \mathbb{R}$, $g(t) = t^{\frac{1}{s}}$ konveks fonksiyonu vardır. Buradan

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{t+(1-t)}{2}\right) \leq \frac{g(t)+g(1-t)}{2}$$

olur ki bu her $t \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{s}}} \leq \frac{t^{\frac{1}{s}}+(1-t)^{\frac{1}{s}}}{2}$$

ve

$$\frac{u+v}{2^{\frac{2}{s}-1}} \leq \frac{u+v}{2^{\frac{1}{s}}}\left[t^{\frac{1}{s}}+(1-t)^{\frac{1}{s}}\right]$$

olduğunu gösterir. X stokastik süreci I aralığında azalmayan olduğundan her $t \in [0,1]$ için

$$X\left(\frac{u+v}{2^{\frac{2}{s}-1}},\cdot\right) \leq X\left(\frac{u+v}{2^{\frac{1}{s}}}\left[t^{\frac{1}{s}}+(1-t)^{\frac{1}{s}}\right],\cdot\right)$$

elde edilir. Eğer bu eşitsizliğin $[0,1]$ aralığında t' ye integrali alınırsa (3.7.11)' deki ilk eşitsizliği elde etmiş oluruz. X birinci anlamda $s-$konveks stokastik süreç olduğundan her $t \in [0,1]$ için

$$X\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\left[t^s+(1-t)^{\frac{1}{s}}\right],\cdot\right) \leq \frac{1}{2}\left[X\left(t^{\frac{1}{s}}u+(1-t)^{\frac{1}{s}}v,\cdot\right)+X\left((1-t)^{\frac{1}{s}}u+t^{\frac{1}{s}}v,\cdot\right)\right]$$

yazılabilir. Eğer bu eşitsizliğin $[0,1]$ aralığında t' ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^1 X\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\left[t^s+(1-t)^{\frac{1}{s}}\right],\cdot\right)dt &\leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 X\left(t^{\frac{1}{s}}u+(1-t)^{\frac{1}{s}}v,\cdot\right)dt\right. \\ &\quad \left.+\int_0^1 X\left((1-t)^{\frac{1}{s}}u+t^{\frac{1}{s}}v,\cdot\right)dt\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi $k = 1-t, t \in [0,1]$ değişken değişimi yazpılırsa

$$\begin{aligned} \int_0^1 X\left((1-t)^{\frac{1}{s}}u+t^{\frac{1}{s}}v,\cdot\right)dt &= -\int_1^0 X\left(k^{\frac{1}{s}}u+(1-k)^{\frac{1}{s}}v,\cdot\right)dk \\ &= \int_0^1 X\left(k^{\frac{1}{s}}u+(1-k)^{\frac{1}{s}}v,\cdot\right)dk \\ &= \int_0^1 X\left(t^{\frac{1}{s}}u+(1-t)^{\frac{1}{s}}v,\cdot\right)dt \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir ve böylece (3.7.11)' daki ikinci eşitsizlik ispatlanmış olur. Öte yandan X' in I' da $s-$konveksliğini kullanarak her $t \in [0,1]$ için

$$X\left(t^{\frac{1}{s}}u+(1-t)^{\frac{1}{s}}v,\cdot\right) \leq tX(u,\cdot)+(1-t)X(v,\cdot)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eğer bu eşitsizliğin $[0,1]$ aralığında t' ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}\int_0^1 X\left(t^{\frac{1}{s}}u+(1-t)^{\frac{1}{s}}v,\cdot\right)dt &\leq X(u,\cdot)\int_0^1 tdt+X(v,\cdot)\int_0^1(1-t)\,dt \\ &= \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2}\end{aligned}$$

olduğu görülür ve böylece (3.7.11)' deki son eşitsizlik ispatlanmış olur.

Teorem 3.7.16 $s \in (0,1)$ için $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ stokastik süreci birinci anlamda $s-$konveks olsun. Eğer $0<a<b$ ve

$$\int_u^\infty t^{\frac{s+1}{s-1}}X(t,\cdot)\,dt$$

integrali sonlu ise bu takdirde

$$\begin{aligned}\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)\,dt &\leq \frac{s}{1-s}\left[u^{\frac{2s}{1-s}}\int_u^\infty t^{\frac{s+1}{s-1}}X(t,\cdot)\,dt\right. \\ &\quad\left.+v^{\frac{2s}{1-s}}\int_v^\infty t^{\frac{s+1}{s-1}}X(t,\cdot)\,dt\right]\end{aligned} \tag{3.7.12}$$

eşitsizliği geçerlidir [49].

İspat. X stokastik süreci birinci anlamda $s-$konveks olduğundan her $\alpha \in [0,1]$ ve $z,y \in I$ için

$$X\left(\alpha^{\frac{1}{s}}z+(1-\alpha)^{\frac{1}{s}}y,\cdot\right) \leq \alpha X(z,\cdot)+(1-\alpha)X(y,\cdot)$$

eşitsizliği yazılabilir. $z=\alpha^{1-\frac{1}{s}}u$, $\alpha \in (0,1]$ ve $y=(1-\alpha)^{1-\frac{1}{s}}v$, $\alpha \in [0,1)$ olsun. Bu takdirde her $\alpha \in (0,1)$ için

$$X(\alpha u+(1-\alpha)v,\cdot) \leq \alpha X\left(\alpha^{1-\frac{1}{s}}u,\cdot\right)+(1-\alpha)X\left((1-\alpha)^{1-\frac{1}{s}}v,\cdot\right) \tag{3.7.13}$$

eşitsizliği geçerlidir.

$\theta=1-\alpha$, $\alpha \in [0,1)$ değişken değişimi yapılırsa

$$\int_0^1(1-\alpha)X\left((1-\alpha)^{1-\frac{1}{s}}v,\cdot\right)d\alpha$$

integralinin

$$\int_0^1 \theta X\left(\theta^{1-\frac{1}{s}}v,\cdot\right)d\theta.$$

integraline dönüştüğünü gözlemleriz. Şimdi ise $\int_0^1 \alpha X\left(\alpha^{1-\frac{1}{s}}u,\cdot\right)d\alpha$ integralinin de sonlu olduğunu gösterelim. Eğer $t=\alpha^{1-\frac{1}{s}}u$, $\alpha\in(0,1]$ alınırsa

$$\alpha=\left(\frac{t}{u}\right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{s}}}=\left(\frac{t}{u}\right)^{\frac{s}{s-1}}=\frac{t^{\frac{s}{s-1}}}{u^{\frac{s}{s-1}}}$$

ve

$$d\alpha=\frac{s}{s-1}\frac{1}{u^{\frac{s}{s-1}}}t^{\frac{1}{s-1}}dt$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\int_0^1 \alpha X\left(\alpha^{1-\frac{1}{s}}u,\cdot\right)d\alpha &= \int_\infty^u \frac{t^{\frac{s}{s-1}}}{u^{\frac{s}{s-1}}}\frac{s}{s-1}\frac{t^{\frac{1}{s-1}}}{u^{\frac{s}{s-1}}}X(t,\cdot)\,dt\\ &= \frac{s}{s-1}u^{\frac{2s}{1-s}}\int_u^\infty t^{\frac{s+1}{s-1}}X(t,\cdot)\,dt<\infty\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Benzer şekilde

$$\int_0^1 \theta X\left(\theta^{1-\frac{1}{s}}v,\cdot\right)d\theta=\frac{s}{s-1}v^{\frac{2s}{1-s}}\int_u^\infty t^{\frac{s+1}{s-1}}X(t,\cdot)\,dt<\infty$$

elde edilir. Eğer (3.7.13)' deki eşitsizlikte $(0,1)$ aralığında α' ya göre integral alınırsa

$$\int_0^1 X(\alpha u+(1-\alpha)v,\cdot)\,d\alpha=\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)\,dt$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}\int_0^1 \alpha X\left(\alpha^{1-\frac{1}{s}}u,\cdot\right)d\alpha &= \frac{s}{s-1}u^{\frac{2s}{1-s}}\int_u^\infty t^{\frac{s+1}{s-1}}X(t,\cdot)\,dt\\ \int_0^1 (1-\alpha)X\left((1-\alpha)^{1-\frac{1}{s}}v,\cdot\right) &= \frac{s}{s-1}v^{\frac{2s}{1-s}}\int_u^\infty t^{\frac{s+1}{s-1}}X(t,\cdot)\,dt\end{aligned}$$

olduğu görülür ve buradan da (3.7.12) elde edilmiş olur.

3.8 İkinci Anlamda $s-$Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizlikler

Şimdi ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerle ilgili Dargomir ve Fitzpatrick [38] tarafından kanıtlanmış bazı özellikleri verelim.

Önerme 3.8.1 Eğer $f\in K_s^2$ ise bu takdirde f fonksiyonu $[0,\infty)$ üzerinde negatif olmayandır [21].

Teorem 3.8.1 $f\in K_s^2$ olsun. Bu takdirde her $u,v\in\mathbb{R}_+$, $\alpha,\beta\geq 0$ ve $\alpha+\beta\leq 1$ için (2.1.8) eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $f(0)=0$ olmasıdır [21].

Teorem 3.8.2 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyon, $s\in(0,1)$ ve $a,b\in\mathbb{R}^+$, $a<b$ olduğunu farz edelim. Eğer $f\in L_1[a,b]$ ise

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{s+1} \tag{3.8.1}$$

eşitsizliği geçerlidir [40].

Teorem 3.8.3 [21] f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Lebesque integrallenebilir ve

$$H(t):=\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)dx$$

olsun. Eğer $f:I\subseteq\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I da $s\in(0,1]$ olmak üzere ikinci anlamda s-konveks ise bu takdirde $[a,b]\subseteq I,\ a<b$ olmak üzere

(i) H , $[0,1]$ üzerinde ikinci anlamda $s-$konvekstir.

(ii) Her $t\in[0,1]$ için

$$H(t)\geq 2^{s-1}f(\frac{a+b}{2})$$

eşitsizliği sağlanır.

(iii) $t\in[0,1]$ olmak üzere

$$H(t)\leq\min\{H_1(t),H_2(t)\},t\in[0,1]$$

eşitsizliğ sağlanır. Burada

$$H_1(t)=t^s\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx+(1-t)^s f\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)$$

$$H_2(t)=\frac{X(tx+(1-t)\frac{a+b}{2},\cdot)+X(tb+(1-t)\frac{a+b}{2},\cdot)}{s+1}$$

dır.

(iv) Eğer $\hat{H}(t,\cdot):=\max\{H_1(t),H_2(t)\}$, $t\in[0,1]$ ise bu takdirde

$$\hat{H}(t)\leq t^s\frac{f(a)+f(b)}{s+1}+(1-t)^s\frac{2}{s+1}f\left(\frac{a+b}{2}\right),t\in[0,1]$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.8.4 $f:I\subseteq\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde ikinci anlamda $s-$konveks, $s\in(0,1]$, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Bu takdirde

(i) Her $s \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için

$$F(s+\frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}-s)$$

ve her $t \in [0,1]$ için

$$F(t) = F(1-t)$$

dır.

(ii) F fonksiyonu $[0,1]$ aralığında ikinci anlamda $s-$konveksdir.

(iii) $t \ \in [0,1]$ olmak üzere

$$2^{1-s}F(t) \geq F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dxdy,$$

eşitsizliği sağlanır.

(iv) Her $t \in [0,1]$ için

$$F(t) \geq 2^{s-1}H(t) \geq 4^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

dir.

(v) Her $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} F(t) \ \ &\leq \ \ \min\{[t^s+(1-t)^s]\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \\ &\frac{f(a)+f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)+f(b)}{(s+1)^2}\} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır [21].

Tanım 3.8.1 (İkinci Anlamda $s-$Konveks Stokastik Süreç) Eğer her $u, v \geq 0$ ve $s \in (0,1]$ sayıları için

$$X(\lambda u+(1-\lambda)v,\cdot) \leq \lambda^s X(u,\cdot)+(1-\lambda)^s X(v,\cdot)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $X : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci ikinci anlamda $s-$konveks olarak adlandırılır. Burada $I \subset \mathbb{R}$ bir aralıktır. Bu tip stokastik süreçler sınıfı C_s^2 ile gösterilir [18].

Hatırlatma 3.8.1 Kolaylıkla görülmektedir ki $s = 1$ için ikinci anlamda $s-$konvekslik Tanım 3.2.1 de verilen stokastik süreçlerdeki genel konveksliğe indirgenir [18].

Önerme 3.8.2 Her $\lambda \in [0,1]$ için $C \subseteq C_s^2$ dir [18].

İspat. Önermeyi ispatlamak için $X \in C$ ve $u, v \in I$, $s \in (0,1]$ keyfi alalım, X süreci $[0,1]$ üzerinde konveks stokastik süreç ve $\lambda \leq \lambda^s$ olduğundan

$$\begin{aligned} X(\lambda u + (1-\lambda)v, \cdot) &\leq \lambda X(u, \cdot) + (1-\lambda) X(v, \cdot) \\ &\leq \lambda^s X(u, \cdot) + (1-\lambda)^s X(v, \cdot) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu takdirde $X \in C_s^2$ dir.

Önerme 3.8.3 Her $\lambda \in (0,1)$ için $C_{\frac{1}{2}} \subseteq C_s^2$ dir [18].

İspat. Özelliği ispatlamak için $X \in C$ ve $u, v \in I$, $s \in (0,1]$ keyfi alalım. X süreci Jensen-konveks stokastik süreç ve ve $\lambda \leq \lambda^s$ olduğundan

$$\begin{aligned} X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) &\leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2} \\ &\leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2^s} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu takdirde $X \in C_s^2$ dir.

Önerme 3.8.4 Her $\lambda \in (0,1)$ için $C \subset C_\lambda \subset C_{\frac{1}{2}} \subset C_s^2$ dır [18].

İspat. [4, Önerme 3] ve Önerme 3.8.3' den dolayı ispat açıktır.

Önerme 3.8.5 Eğer $X \in C_s^2$ ise bu takdirde X süreci I üzerinde negatif olmayandır [18].

İspat. $u \in I, s \in (0,1]$ olmak üzere

$$X(u, \cdot) = X\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u, \cdot\right) \leq \frac{X(u, \cdot)}{2^s} + \frac{X(u, \cdot)}{2^s} = 2^{1-s} X(u, \cdot)$$

yazılabilir. Dolayısıyla, $(2^{1-s} - 1) X(u, \cdot) \geq 0$ ve buradan da $X(u, \cdot) \geq 0$ olduğu görülür.

Teorem 3.8.5 $X \in C_s^2$ olsun. Bu takdirde her $u, v \in I$, $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta \leq 1$ için $X(\alpha u + \beta v, \cdot) \leq \alpha^s X(u, \cdot) + \beta^s X(v, \cdot)$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $X(0, \cdot) = 0$ olmasıdır [18].

İspat. $u = v = \alpha = \beta = 0$ alındığında $X(0, \cdot) \leq 0$ elde edilir ve $X(0, \cdot) \geq 0$ olduğu ise Önerme 3.8.5' den görülür. Böylece $X(0, \cdot) = 0$ elde edilir. Öte yandan $u, v \in I$ ve

$\alpha, \beta \geq 0$ ve $0 < \gamma = \alpha+\beta \leq 1$ olsun. $a = \frac{\alpha}{\gamma}$ ve $b = \frac{\beta}{\gamma}$ alalım. Bu takdirde $a+b = \frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma} = 1$ olup

$$\begin{aligned} X(\alpha u+\beta v, \cdot) &= X(a\gamma u + b\gamma v, \cdot) \leq a^s X(\gamma u, \cdot) + b^s X(\gamma v, \cdot) \\ &= a^s X(\gamma u + (1-\gamma)0, \cdot) + b^s X(\gamma v + (1-\gamma)0, \cdot) \\ &\leq a^s\gamma^s X(u, \cdot) + b^s\gamma^s X(v, \cdot) + (1-\gamma)^s(a^s+b^s) X(0, \cdot) \\ &= a^s\gamma^s X(u, \cdot) + b^s\gamma^s X(v, \cdot) \\ &\leq \alpha^s X(u, \cdot) + \beta^s X(v, \cdot) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanmış olur.

Önerme 3.8.6 $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olmak üzere $(0,1) \times \Omega$ aralığının her noktasında integrallenebilir olsun. Bu takdirde

$$\int_0^1 X(tu+(1-t)v, \cdot)\, dt = \int_0^1 X((1-t)u+tv, \cdot)\, dt \tag{3.8.2}$$

eşitliği geçerlidir [18].

İspat. $t^* = tu + (1-t)v$, $t \in [0,1]$ alalım. Bu durumda $dt^* = (u-v)\, dt$ olup

$$\int_0^1 X(tu+(1-t)v, \cdot)\, dt = \frac{1}{u-v}\int_v^u X(t^*, \cdot)\, dt^* = \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t^*, \cdot)\, dt^*.$$

eşitliği yazılabiilir. Benzer şekilde $t \in [0,1]$ için $k^* = ((1-t)u+tv, \cdot)$ alınırsa $dk^* = (u-v)\, dt$ olup

$$\int_0^1 X((1-t)u+tv, \cdot)\, dt = \frac{1}{v-u}\int_u^v X(k^*, \cdot)\, dk^*$$

olduğu görülür. Böylece eşitlik ispatlanmış olur.

Aşağıdaki eşitsizlik ikinci anlamda $s-$konveks stokastik süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılır.

Teorem 3.8.6 Eğer $X : I\times\Omega \to \mathbb{R}^+$ ikinci anlamda $s-$konveks stokastik süreç, $s \in (0,1)$ ve $u, v \in I$ ise

$$2^{s-1}X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t, \cdot)\, dt \leq \frac{X(u, \cdot)+X(v, \cdot)}{s+1} \tag{3.8.3}$$

eşitsizliği gerçeklenir [18].

İspat. X stokastik süreci ikinci anlamda $s-$konveks olduğundan her $t \in [0,1]$ için

$$X(\alpha u + (1-\alpha)v, \cdot) \leq \alpha^s X(u, \cdot) + (1-\alpha)^s X(v, \cdot)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan $[0,1]$ üzerinde α' ya göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}\int_0^1 X(\alpha u+(1-\alpha)v,\cdot)\,d\alpha &\leq \int_0^1 \alpha^s X(u,\cdot)\,d\alpha+\int_0^1(1-\alpha)^s X(v,\cdot)\,d\alpha\\ &= X(u,\cdot)\int_0^1\alpha^s dt+X(v,\cdot)\int_0^1(1-\alpha)^s d\alpha\\ &= \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{s+1}\end{aligned}$$

elde edilir. $t=\alpha u+(1-\alpha)v$ değişken değişimi yapılarak

$$\int_0^1 X(\alpha u+(1-\alpha)v,\cdot)\,dt=\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)\,dt,$$

olduğu görülür. Böylece (3.8.3)' deki ikinci eşitsizlik ispatlanmış olur. (3.8.3)' deki ilk eşitsizliğin ispatlamak için her $a,b\in I$ için

$$X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\leq\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2^s} \tag{3.8.4}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Şimdi, $a=tu+(1-t)v$, $b=(1-t)u+tv$ ve $t\in[0,1]$ olsun. Bu takdirde (3.8.4)' den her $t\in[0,1]$ için

$$X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right)\leq\frac{X(tu+(1-t)v,\cdot)+X((1-t)u+tv,\cdot)}{2^s}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinde integralini alır ve Önerme (3.8.6)' daki eşitsizlik dikkate alınarak, (3.8.3) eşitsizliğinin birinci kısmı elde edilir.
Bu sürecin bazı özellikerini aşağıdaki gibi verebiliriz.

Teorem 3.8.7 X bir stokastik süreç olmak üzere $H(t,\cdot):[0,1]\times\Omega\to\mathbb{R}_+$ sürecini göz önünen alalım.

$$H(\alpha,\cdot):=\frac{1}{v-u}\int_u^v X(\alpha t+(1-\alpha)\frac{u+v}{2},\cdot)dt$$

olsun. $s\in(0,1]$ olmak üzere $X:I\times\Omega\to\mathbb{R}_+$ stokastik süreci $I\times\Omega$ üzerinde ikinci anlamda $s-$konveks ise bu takdirde

(i) H süreci de ikinci anlamda $s-$konveks stokastik süreçtir.

(ii)

$$H(t,\cdot)\geq 2^{s-1}X(\frac{u+v}{2},\cdot) \tag{3.8.5}$$

eşitsizliği sağlanır.

(iii) $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$H(t,\cdot) \leq \min\{H_1(t.\cdot), H_2(t,\cdot)\} \tag{3.8.6}$$

dir, burada

$$H_1(t,\cdot) = t^s \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t,\cdot)\,dt + (1-t)^s X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right)$$

$$H_2(\alpha,\cdot) = \frac{X(\alpha u + (1-\alpha)\frac{u+v}{2},\cdot) + X(\alpha v + (1-\alpha)\frac{u+v}{2},\cdot)}{s+1}$$

dır.

(iv) Eğer $\hat{H}(t,\cdot) := \max\{H_1(t,\cdot), H_2(t,\cdot)\}$, $t \in [0,1]$ ise

$$\hat{H}(t,\cdot) \leq t^s \frac{X(u,\cdot) + X(v,\cdot)}{s+1} + (1-t)^s \frac{2}{s+1} X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right), \ t \in [0,1] \tag{3.8.7}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

İspat.

(i) $t_1, t_2 \in [0,1]$ ve $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
H(\alpha x + \beta y,\cdot) &= \frac{1}{v-u} \int_u^v X((\alpha x + \beta y)\,t + [1-(\alpha x + \beta y)]\,\frac{u+v}{2},\cdot)dt \\
&= \frac{1}{v-u} \int_u^v X\Bigg(\alpha\left[xt + (1-x)\,\frac{u+v}{2}\right] \\
&\quad +\beta\left[yt + (1-y)\,\frac{u+v}{2}\right],\cdot\Bigg)dt \\
&\leq \frac{1}{v-u} \int_u^v \Bigg[\alpha^s X\left(xt + (1-x)\,\frac{u+v}{2},\cdot\right) \\
&\quad +\beta^s X\left(yt + (1-y)\,\frac{u+v}{2},\cdot\right)\Bigg]dt \\
&= \alpha^s H(x,\cdot) + \beta^s H(y,\cdot)
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu ise H stokastik sürecinin ikinci anlamda $s-$konveks olduğunu gösterir.

(ii) $t \in (0,1]$ olduğunu farz edelim. $\theta = \alpha t + (1-\alpha)\dfrac{u+v}{2}$ basit değişken değişimi yapılırsa

$$H(t,\cdot) = \frac{1}{\alpha(v-u)} \int_{\alpha u + (1-\alpha)\frac{u+v}{2}}^{\alpha v + (1-\alpha)\frac{u+v}{2}} X(\theta,\cdot)\,d\theta = \frac{1}{p-q} \int_q^p X(\theta,\cdot)\,d\theta$$

elde edilir. Burada $p = \alpha v + (1-\alpha)\dfrac{u+v}{2}$ ve $q = \alpha u + (1-\alpha)\dfrac{u+v}{2}$ dır.

İkinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı uygulanırsa

$$\frac{1}{p-q}\int_q^p X(\theta,\cdot)\,d\theta \geq 2^{s-1}X\left(\frac{p+q}{2},\cdot\right) = 2^{s-1}X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right)$$

elde edilir ve böylece (3.8.5) eşitsizliği elde edilmiş olur.

(iii) İkinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı uygulanırsa her $t\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{p-q}\int_q^p X(\theta,\cdot)\,d\theta &\leq \frac{X(p,\cdot)+X(q,\cdot)}{s+1}\\ &= \frac{X\left(\alpha u+(1-\alpha)\frac{u+v}{2},\cdot\right)+X\left(\alpha v+(1-\alpha)\frac{u+v}{2},\cdot\right)}{s+1}\\ &= H_2(\alpha,\cdot)\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $\alpha=0$ olduğu dikkate alınırsa

$$X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) = H(0,\cdot) \leq H_2(0,\cdot) = \frac{2}{s+1}X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right)$$

eşitsizliği veya buna denk olarak

$$(s-1)\,X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) \leq 0$$

eşitsizliği yazılabilir. Öte yandan $s\in(0,1]$ için $X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right)\geq 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece her $t\in[0,1]$ ve $t\in I$ için

$$X\left(\alpha t+(1-\alpha)\frac{u+v}{2},\cdot\right) \leq \alpha^s X(t,\cdot)+(1-\alpha)^s X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right)$$

olduğu aşikardır. Bu eşitsizliğin $[a,b]$ aralığında integrali alınırsa (3.8.6) elde edilir.

(iv) Her $t\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned}H_2(t,\cdot) &\leq \frac{\alpha^s X(u,\cdot)+(1-\alpha)^s X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right)+\alpha^s X(v,\cdot)+(1-\alpha)^s X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right)}{s+1}\\ &= \alpha^s\frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{s+1}+(1-\alpha)^s\frac{2}{s+1}X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)\,dt \leq \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{s+1} \tag{3.8.8}$$

olduğunu biliyoruz ve buradan

$$(1-\alpha)^s X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) \leq (1-\alpha)^s\frac{2}{s+!}X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right), t\in[0,1]$$

olur ki bu da bize

$$H_1(t,\cdot) \leq \alpha^s\frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{s+1}+(1-\alpha)^s\frac{2}{s+1}X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right)$$

olduğunu gösterir ve böylece teorem ispatlanmış olur.

Şimdi X stokastik sürecinin $[u,v]\times\Omega$ üzerinde integrallenebilir ve ikinci anlamda $s-$konveks olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$F(\alpha,\cdot):=\frac{1}{(v-u)^2}\int_u^v\int_u^v X\left(\alpha s+(1-\alpha)t,\cdot\right)dsdt,\alpha\in[0,1]$$

stokastik sürecini gözönüne alalım.
Aşağıdaki teorem bu stokastik sürecin başlıca özelliklerini içermektedir.

Teorem 3.8.8 $s\in(0,1]$ olmak üzere $X:I\times\Omega\to\mathbb{R}_+$ ikinci anlamda $s-$konveks ve $I\times\Omega$, üzerinde integrallenebilir bir stokastik süreç, $u,v\in I$ ve $u<v$ olsun. Bu takdirde

(i) Her $s\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ için

$$F(s+\frac{1}{2},\cdot)=F(\frac{1}{2}-s,\cdot)$$

ve her $\alpha\in[0,1]$ için

$$F(\alpha,\cdot)=F(1-\alpha,\cdot)$$

dir.

(ii) F, $[0,1]\times\Omega$ üzerinde ikinci anlamda $s-$konveks stokastik süreç olur.

(iii) $\alpha\in[0,1]$ olmak üzere

$$2^{1-s}F(\alpha,\cdot)\geq F(\frac{1}{2},\cdot)=\frac{1}{(v-u)^2}\int_u^v\int_u^v X\left(\frac{s+t}{2},\cdot\right)dsdt \tag{3.8.9}$$

eşitsizliği sağlanır.

(iv) Her $\alpha\in[0,1]$ için

$$F(\alpha,\cdot)\geq 2^{s-1}H(\alpha,\cdot)\geq 4^{s-1}X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) \tag{3.8.10}$$

eşitsizliği sağlanır.

(v) Her $\alpha\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned}F\left(\alpha,\cdot\right)\ &\leq\ \min\left\{\left[\alpha^s+(1-\alpha)^s\right]\frac{1}{v-u}\int_u^v X\left(s,\cdot\right)ds,\right.\\ &\left.\frac{X\left(u,\cdot\right)+X\left(\alpha u+(1-\alpha)v,\cdot\right)+X\left((1-\alpha)u+\alpha v,\cdot\right)+X\left(v,\cdot\right)}{(s+1)^2}\right\}\end{aligned} \tag{3.8.11}$$

eşitsizliği sağlanır [18]. Burada

$$F(\alpha,\cdot):=\frac{1}{(v-u)}\int_u^v\left[\frac{1}{(v-u)}\int_u^v X\left(\alpha s+(1-\alpha)t,\cdot\right)ds\right]dt$$

dir.

İspat.

(i) İntegrallenebirlik özelliğinden ispat açıktır.

(ii)

$$\begin{aligned} F(\alpha x+\beta y,\cdot) &= \frac{1}{(v-u)^2}\int_u^v\int_u^v X\left((\alpha x+\beta y)\,s+(1-(\alpha x+\beta y))\,t,\cdot\right)dsdt \\ &= \frac{1}{(v-u)^2}\int_u^v\int_u^v X\left(\alpha(xs+(1-x)\,t,\cdot)+\beta(ys+(1-y)\,t,\cdot\right)dsdt \\ &\leq \frac{1}{(v-u)^2}\int_u^v\int_u^v \left[\alpha^s X(xs+(1-x)\,t,\cdot)+\beta^s X(ys+(1-y)\,t,\cdot)\right] \\ &\quad dsdt \\ &= \alpha^s F(x,\cdot)+\beta^s F(y,\cdot) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

(iii) X, $I\times\Omega$ üzerinde ikinci anlamda $s-$konveks olduğundan her $t\in[0,1]$ ve $u,v\in[a,b]$ için

$$X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right)\leq\frac{X\left(tu+(1-t)v,\cdot\right)+X\left((1-t)u+tv,\cdot\right)}{2^s}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin $[a,b]^2$ üzerinde iki katlı integrali alınırsa

$$\begin{aligned} &\int_a^b\int_a^b X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right)dudv \qquad (3.8.12) \\ \leq\ &\frac{1}{2^s}\left[\int_a^b\int_a^b X\left(tu+(1-t)v,\cdot\right)dudv+\int_a^b\int_a^b X\left((1-t)u+tv,\cdot\right)dudv\right] \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$\int_a^b\int_a^b X\left(tu+(1-t)v,\cdot\right)dudv=\int_a^b\int_a^b X\left((1-t)u+tv,\cdot\right)dudv, \qquad (3.8.13)$$

olduğundan (3.8.12) ve (3.8.13) eşitsizlikleri istenen (3.8.9) sonucunu verir.

(iv) İlk olarak,

$$F(\alpha,\cdot):=\frac{1}{(v-u)}\int_u^v\left[\frac{1}{(v-u)}\int_u^v X\left(\alpha s+(1-\alpha)\,t,\cdot\right)ds\right]dt$$

olduğunu gözönüne alalım.

Şimdi, $[u,v]$'deki y sabiti için

$$H_t\left(\alpha,\cdot\right):=\frac{1}{v-u}\int_u^v X\left(\alpha s+(1-\alpha)t,\cdot\right)ds$$

ile verilen $H_t : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecini gözönüne alalım. Bu durumda Teorem 3.8.3' ün ispatında gösterildiği gibi $\alpha \in [0,1]$ için $p = \alpha v + (1-\alpha)t$, $q = \alpha u + (1-\alpha)s$ olmak üzere

$$H_t(\alpha, \cdot) := \frac{1}{p-q} \int_q^p X(\theta, \cdot)\, d\theta$$

eşitsizliğini elde ederiz. İkinci anlamda konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini uygularsak her $\alpha \in (0,1)$ ve $t \in [u,v]$ için

$$\frac{1}{p-q} \int_q^p X(\theta, \cdot)\, d\theta \geq 2^{s-1} X\left(\frac{p+q}{2}, \cdot\right) = 2^{s-1} X\left(\alpha \frac{u+v}{2} + (1-\alpha)t, \cdot\right)$$

eşitsizliği elde edilir. $[u,v]$ üzerinde t ye göre integral alırsak $\alpha \in (0,1)$ için

$$F(\alpha, \cdot) \geq 2^{s-1} H((1-\alpha), \cdot)$$

olduğunu kolayca anlarız. $F(\alpha, \cdot) = F(1-\alpha, \cdot)$ ve (3.8.5) eşitsizliğini kullanarak, $\alpha \in (0,1)$ için (3.8.10) eşitsizliği ispatlanır. Eğer $t = 0$ veya $t = 1$ ise bu takdirde istenilen eşitsizlik sağlanır.

(v) İkinci anlamda $s-$konveksliğin tanımından her $u, v \in [a,b]$, $\alpha \in [0,1]$ için

$$X(\alpha u + (1-\alpha)v, \cdot) \leq \alpha^s X(u, \cdot) + (1-\alpha)^s X(v, \cdot)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin $[u,v]^2$ üzerinde iki katlı integralini alırsak, (3.8.11) eşitsizliğinin birinci kısmını elde edilmiş olur.

Şimdi Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ikinci tarafından $p = \alpha v + (1-\alpha)t$, $q = \alpha u + (1-\alpha)s, \alpha \in [0,1]$ olmak üzere

$$H_t(\alpha, \cdot) := \frac{1}{p-q} \int_q^p X(\theta, \cdot)\, d\theta \leq \frac{X(\alpha v + (1-\alpha)t, \cdot) + X(\alpha u + (1-\alpha)s, \cdot)}{s+1},$$

eşitsizliğini gözönüne alalım. Bu eşitsizliğin $[u,v]$ üzerinde t ye göre integralini alırsak

$$\begin{aligned} & F(\alpha, \cdot) \\ \leq\ & \frac{1}{s+1}\left[\frac{1}{v-u}\int_u^v X(\alpha v + (1-\alpha)t, \cdot)dt + \frac{1}{v-u}\int_u^v X(\alpha u + (1-\alpha)s, \cdot)ds\right] \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Buradan basit bir hesaplamayla

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v-u}\int_u^v X(\alpha v + (1-\alpha)t, \cdot)dt \\ =\ & \frac{1}{r-1}\int_l^r X(\theta, \cdot)\, d\theta \leq \frac{X(r, \cdot) + X(l, \cdot)}{s+1} \\ =\ & \frac{X(u, \cdot) + X(\alpha v + (1-\alpha)u, \cdot)}{s+1},\ \alpha \in (0,1), \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir, burada $r = v$, $l = \alpha v + (1-\alpha)\, u, \alpha \in (0,1)$ dır. Benzer şekilde,

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v X(\alpha u + (1-\alpha)\, t, \cdot)dt \leq \frac{X(u,\cdot) + X(\alpha u + (1-\alpha)\, v, \cdot)}{s+1},\ \alpha \in (0,1)\,,$$

yazılabilir ki bu da (3.8.11)' deki ikinci eşitsizlği verir.

Eğer $t = 0$ veya $t = 1$ ise bu eşitsizlik ayrıca sağlanır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde konveks fonksiyolar için eşitsizliklerden yola çıkarak aynı eşitsizliklerin stokastik süreçler için de sağlandığına yer verilmiştir. Ayrıca konveks stokastik süreçler, Jensen-konveks, güçlü konveks, Log-konveks, güçlü log-konveks, birinci ve ikinci anlamda s-konveks stokastik süreçler için Hermite-Hadamard, Jensen, Fejer tipi eşitsizliklerinin sağlandığına yer verilmiştir. Bu çalışmada elde edilen sonuçlardan yola çıkarak koordinatlarda konveks, (α, m)-konveks, Quasi-konveks, $h-$konveks fonsksiyonlar için sağlanan eşitsizliklerin stokastik süreçler için de sağlanıp sağlanmadığı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] A. Azocar , J. Gimenez , K. Nikodem , J.L. Sanchez, *On strongly midconvex funtions*, Opuscula Math., 31(1) (2011), 15-26.

[2] A.G. Azpeitia, *Convex functions and the Hadamard inequality*, Rev. Colombiana Mat., 28 (1994), 7-12.

[3] A. Skowronski, *On some Properties of j-convex stochastic processes*, Aequationes Math., 44 (1992), 249-258.

[4] A. Skowronski, *On wright-convex stochastic processes*, Annales Mathematicae Silesianne, 9 (1995), 29-32.

[5] A.W. Roberts and D.E. Varberg, *Convex Functions,* Academic Press, New York, (1973).

[6] B.G. Pachpatte, *A note on integral inequalities involving two log-convex functions*, Math. Ineq. Appl., 7 (4) (2004), 511–515.

[7] C.P. Niculescu, L.E. Persson, *Convex Functions and Their Applications*, Springer, Berlin, (2005).

[8] C.P. Niculescu and L.E. Persson, *Convex Functions and Their Applications*, A Contemporary Approach, Springer Science Business Media Inc., (2006).

[9] D. Kotrys, *Hermite-Hadamart inequality for convex stochastic processes*, Aequationes Mathematicae, 83 (2012), 143-151.

[10] D. Kotrys, *Remarks on strongly convex stochastic processes*, Aequationes Math., 86 (2012), 91-98.

[11] D. Kotrys, *Some characterizations of strongly convex stochastic processes*, Mathematica Aeterna, 4(8) (2014), 855-861.

[12] D. Kotrys, *Remarks on Jensen, Hermite-Hadamard and Fejer inequalities for strongly convex stochastic processes*, Mathematica Aeterna, 5(1) (2015), 95-104.

[13] D.S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin (1970).

[14] D.S. Mitrinović, J.E. Pećarić and A.M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1993).

[15] E.F. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, (1961).

[16] E. Kadıoğlu, M. Kamali, *Genel Matematik*, ISBN 978-975-8151-57-8 (2013).

[17] E. Set, *Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri*, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, (2010).

[18] E. Set, M. Tomar and S. Maden, *Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex stochastic processes in the second sense*, Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 2(6) (2014), 202-207.

[19] E. Set, M.Zeki Sarıkaya and M. Tomar, *Hermite-Hadamard type inequalities for co-ordinates convex stochastic processes, Mathematica Aeterna*, 5(2) (2015), 363-382.

[20] G. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, 2nd Ed., Cambridge University Press, (1952).

[21] H. Hudzik and L. Maligranda, *Some remarks on s-convex functions*, Aequationes Mathematicae, 48 (1994), 100-111.

[22] J.J. Shynk, Probability, Random Variables, and Random Processes: Theory and Signal Processing Applications, Wiley, (2013).

[23] J. Pećarić, F. Proschan and Y.L. Tong, *Convex Functions*, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc., (1992).

[24] J. Pećarić, *Convex Funtions: Inequalities*, (1987).

[25] K. Nikodem, *On convex stochastic processes*, Aequationes Mathematicae, 20 (1980), 184-197.

[26] K. Nikodem, *Wypukle i kwadratowe procesy stochastyczne*, Thesis, Silesian University, Katowice, (doctoral dissertation), (1980).

[27] K. Sobczyk, *Stochastic differential equations with applications to physics and engineering*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1991).

[28] M. Bayraktar, *Fonksiyonel Analiz*, ISBN 975-442-035-1 (2000).

[29] M.E. Özdemir, *A theorem on mappings with bounded derivatives with applications to quadrature rules and means*, Appl. Math. Lett., 13 (2000), 19–25.

[30] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Funtional Equations and Inequalities, Cauchy's Equation and Jensen's Inequality*, PWN-Uniwersytet Slaski, Warszawa-Krakow-Katowice, (1985).

[31] M. Tomar, E. Set, N. O. Bekar, *On Hermite-Hadamard type inequalities for strongly-log convex stochastic processes*, Journal of Global Engineering Studies, 1 (2014), 53-62.

[32] M. Tomar, E. Set and S. Maden, *Hermite-Hadamard type inequalities for log-convex stochastic processes*, New Theory, 2 (2015), 23-32.

[33] M. Tunç, *Some integral inequalities for logarithmically convex functions*, Journal of the Egyptian Mathematical Society, 22 (2014), 177-181.

[34] N. Kuhn, *A note on t-convex functions*, In: General inequalities 4. International Schriftenreihe Numerical Mathematics, Birkhauser, Basel, 71 (1984), 269-276.

[35] N. Merentes, K. Nikodem, *Remarks on strongly convex functions*, Aequat. Math., 80 (2010), 193-199.

[36] R.A. Adams and C. Essex, *Calculus A Complete Course, Pearson Canada Inc.*, Toronto, Ontario (2010).

[37] R.B. Manfrino, R.V. Delgado, J.A.G. Ortega, *Inequalities a Mathematical Olympiad Approach*, Birkhauser, (2009).

[38] S.S. Dragomir and B. Mond, *Integral inequalities of Hadamard's type for log-convex functions*, Demonstratio Math., 31 (2) (1998), 354-364.

[39] S.S. Dragomir and S. Fitzpatrick, *The Hadamard's inequality for s-convex functions in the first sense*, Demonstratio Math., 31 (3) (1998), 633-642.

[40] S.S. Dragomir and S. Fitzpatrick, *The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense*, Demonstratio Math., 32 (4) (1999), 687-696.

[41] S.S. Dragomir, *Refinements of the Hermite-Hadamard integral inequality for log-convex functions*, The Australian Math. Soc. Gazette, 28.3 (2001), 129-133.

[42] S.S. Dragomir and C.E.M. Pearce, *Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications*, RGMIA, Monographs, Victoria University, (2000).

[43] S.S. Dragomir and C.E.M. Pearce, *Quasi-convex functions and Hadamard's inequality*, Bull. Austral. Math. Soc., 57 (1998), 377-385.

[44] S.S. Dragomir, *Two functions in connection to Hadamard's inequalities*, J. Math. Anal. Appl., 167 (1992), 49–56.

[45] S.S. Dragomir, *Some remarks on Hadamard's inequalities for convex functions*, Extracta Math. 9 (2) (1994), 88–94.

[46] S.S. Dragomir, *Refinements of the Hermite–Hadamard integral inequality for log-convex functions*, RGMIA Res. Rep. Collect, 3 (4) (2000), 527–533.

[47] S.S. Dragomir, J.E. Pećarić, J. Sandor, *A note on the Jensen–Hadamard inequality*, Anal. Num. Theor. Approx., 19 (1990), 29–34.

[48] S. Maden, *Olasılığa Giriş*, ISBN 975-02-0174-4 (2006).

[49] S. Maden, M. Tomar and E. Set, *Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex stochastic processes in the first sense*, Pure and Applied Mathematics Letters, (2015), 1-7.

[50] U.S. Kırmacı, M.E. Özdemir, *Some inequalities for mappings whose derivatives are bounded and applications to specials means of real numbers*, Appl. Math. Lett., 17 (2004), 641–645.

[51] W. Orlicz, *A note on modular spaces I*, Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phsy., 9 (1961), 157-162.

[52] W.W. Breckner, *Stetigkeitsaussagen für eine klasse verallgemeinerter konvexer*, (1978).

[53] Zs. Pales, *Nonconvex functions and separation by power means*, Math. Inequel. Appl., 3 (2000), 169-176.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	Fatih YETGİN
Doğum Yeri	:	Sivas
Doğum Tarihi	:	10.08.1993
Medeni Hali	:	Bekar
Bildiği Yabancı Dil	:	İngilizce
İletişim Bilgileri	:	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, fatihyetgin@windowslive.com
Lise	:	Turhal Atatürk Lisesi, 2010
Lisans	:	Ordu Üniversitesi Fen-Ed. Fak. Matematik Böl.-2014
Yüksek Lisans	:	Ordu Üniversitesi 2016