T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT UZAYINDA OPERATÖR (h,m)- KONVEKS FONKSİYONLAR

DİLAN YARDİMCİEL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2017

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Dilan YARDİMCİEL tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL danışmanlığında yürütülen "Hilbert Uzayında Operatör (h,m)-Konveks Fonksiyonlar" adlı bu tez, jürimiz tarafından 06/09/2017 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

Başkan	:	Doç. Dr. İmdat İŞCAN Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Erhan SET Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

08 / 09 / 2017 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 14 / 09/ 2017 tarih ve 2017 / 405 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

Enstitü Müdürü
Yrd. Doç. Dr. Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Dilan YARDİMCİEL

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

HİLBERT UZAYINDA OPERATÖR (h,m)- KONVEKS FONKSİYONLAR

Dilan YARDİMCİEL

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2017
Yüksek Lisans Tezi, 35s.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

Bu tez çalısması hem Lineer Operatörler Teorisini hem de Matematiksel Eşitsizlikleri bir araya getirmiştir. Yani Hilbert uzayında sınırlı özeşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ve operatör (h,m)-konveks fonksiyonlar sınıfı incelenmiştir. Elde edilen yeni tanım, teoremler ve sonuçlar bu alandaki matematik literatürüne katkı sağlamıştır.

Anahtar Kelimeler: Hilbert uzayı, Özeşlenik operatör, Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizlikler, Operatör (h,m)-konveks fonksiyon.

ABSTRACT

OPERATOR (h,m)-CONVEX FUNCTIONS IN HILBERT SPACE

Dilan YARDİMCİEL

Ordu University
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2017

MSc. Thesis, 35p.

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

The dissertation is combinad with use by both Linear Operator Theory and Mathematical Inequalities. Namely, it is investigated Hermite-Hadamard Type Inequalities for continuous of bounded selfadjoint operators and operator (h,m)-convex functions on Hilbert space. The new definition, theorems and corollaries obtained contribute to the mathematical literature in this field.

Key Words: Hilbert space, Selfadjoint operator, Hermite-Hadamard Type inequalities, Operator (h,m)-convex function.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tez çalışmam boyunca her türlü bilgi ve deneyimleriyle danışmanlığımı yürüten ve ayrıca maddi manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, insani ve ahlak değerleri ile de örnek edindiğim değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL' a sonsuz teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca gösterdikleri maddi manevi destekleri ve fedakârlıkları için Anne, Baba ve Kardeşlerime en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca Ordu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğüne **BY-1703** numarası ile yüksek lisans tez proje desteği verdiğinden dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

$L[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar kümesi
f'	: f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
I	: $\mathbb{R}$ de bir aralık
I^0	: I' nın içi
$< .,. >$	: İç çarpım fonksiyonu
$(X, < .,. >)$	: İç çarpım uzayı
H	: Hilbert uzayı
$L(X)$	: X vektör uzayından X'e tanımlı lineer operatörlerin kümesi
$B(H)$	: H'dan H'ya sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$B(H)^+$	: H'dan H'ya sınırlı pozitif lineer operatörlerin kümesi
K	: $B(H)^+$ 'nın konveks alt kümesi
$\rho(A)$	: A operatörünün rezolventası
$\sigma(A), Sp(A)$	: A operatörünün spektrumu

1. GİRİŞ

Eşitsizlik Teorisi'nin temellerini 18. ve 19. yüzyıllarda K. F. Gauss (1775-1855), A. L.Cauchy (1785-1857) ve P. L.Chebyshev (1821-1894) gibi matematikçiler atmışlardır. Fakat modern anlamda "Eşitsizlik Teorisi" alanında yapılan ilk çalışma 1934 yılında G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Polya tarafından yazılan "Inequalities" isimli kitabıdır. Bu çalışmayı 1961 yılında E. F. Beckenbach ve R. Bellman'ın yine aynı ismi taşıyan "Inequalities" adlı kitabı takip eder. Daha sonra 1965 yılında J. Szarski'nin "Differantial Inequalities", 1991 yılında Mitrinović ve ark. "Inequalities Involving Functions and Their Derivatives", 1963 yılında yine Mitrinović ve ark.'ın "Classical and New Inequalities in Analysis" isimli kitabını söyleyebiliriz. Bunların dışında matematiksel eşitsizlikler literatürüne bakıldığında S. S. Dragomir, R. P. Agarwal, G. V. Milovanovic, C. P. Niculescu, C. E. M. Pearce, J. E. Pećarić, A. M. Fink, M. E. Özdemir, M. Z. Sarıkaya, İ. İşcan, E. Set, A. O.Akdemir v.b yazarların da bir çok makalelerini bulabilirsiniz.

Konvekslik kavramının ortaya çıkışı Arşimet'in, çemberin içine ve etrafına çizdiği düzgün çokgenler yardımıyla yaptığı "π" sayısı hesabına kadar dayanır. Bu çalışmaları sırasında Arşimet, herhangi bir konveks şeklin çevresinin, etrafına çizilen bütün diğer konveks şekillerin çevresinden daha küçük olduğunu fark etmiştir. Böylece konvekslik kavramı konveks şekiller etrafında gelişmiştir. Euler ve Descartes konveks çokgenler ile ilgili formüller üzerinde çalışmıştır. Daha sonra 1841'de Cauchy, konvekslik hakkında bazı özellikler vermiştir. Konveksliğin modern tanımı eşitsizlik tanımını içerdiğinden konveksliğin eşitsizliklerle birlikte çalışılması da doğal bir sonuçtur.

Konveks fonksiyonların tarihi eskiye dayanmakla birlikte 19. yüzyılın sonları olarak gösterilebilir. 1893'de Hadamard'ın çalışmasında açıkça belirtilmese de bu türden fonksiyonların temellerinden bahsedilmektedir. Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları gösteren sonuçlara rastlanılmasına rağmen, konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J. L. W. V. Jensen tarafından çalışılmıştır. Jensen'in bu çalışmalarından itibaren Konveks Fonksiyonlar Teorisi hızlı bir gelişme göstermiştir. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak 1987 yılında Pećarić tarafından yazılan "Convex Functions: Inequalities" isimli kitaptır. Ayrıca 1973 yılında A. W. Roberts ve B. E. Vorberg "Convex Functions", 1992 yılında . Pećarić, ve ark. "Convex Functions, Partial Ordering and Statistical Applications", 2006 yılında C. Niculescu ve L. E. Persson "Convex Functions and Their Applications, A Contempoarary Approach" gibi eserler konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizlikle ilgili yapılan çalışmalardır.

Lineer Operatörler Teorisi ile Matematiksel Eşitsizlikler Teorisini bir araya getiren bu tez çalışma için literatüre bakmak gerekirse;

M. E. Özdemir, A. O. Akdemir ve E. Set tarafından 2011 yılında yapılan [1] çalışması, bu tez'e ilham vermiştir. Bu çalışmada klasik anlamda yeni bir sınıf olan (h,m)-konveks fonksiyonlar sınıfı ve bu sınıfın bazı özellikleri verilmiştir. Bu çalışma 2016 yılında [2] basılmıştır. M. Matloka ise 2013 yılındaki [3] çalışması ile bu sınıfı aynı şekilde tekrardan tanımlamıştır.

Dragomir [2011], Hilbert uzayında özeşlenik operatörlerin operatör konveks fonksiyonları için Hermite-Hadamard Tipli eşitsizlikler elde etmiş ve özel durumlar için uygulamalar yapmıştır.

E. Ünlüyol, S. Salaş ve Y. Erdaş ise [5-16] çalışmalarında ise, Hilbert uzayında operatör p-konveks, h-konveks, m-konveks, (α, m)-konveks fonksiyonlar sınıfını tanıtıp, bazı özelliklerini elde etmişlerdir.

Taghavi ve ark.[17] çalışmasında operatör h-konveks fonksiyonların diğer bazı özelliklerini verip, pozitif lineer operatörler için singüler ve iz değerinde yeni eşitsizlikler elde etmişlerdir.

Cortez ve ark. [18] Hilbert uzayında operatör h-konveks fonksiyonlar için bazı yeni Jensen ve Hermite-Hadamard Tipi eşitsizlikler elde etmişlerdir.

Yukarıda bu alanada yapılan literatüre bakıldığında "Hilbert uzayında operatör (h, m)-konveks fonksiyonlar sınıfı" nın çalışılmadığı görülmüş olup, bu tez çalışması matematiğin bu alandaki açığı kapatması düşünülerek hazırlanmıştır. Yani, bu tez de ilk defa Hilbert uzayında operatör (h, m)-konveks fonksiyon sınıfı tanıtılmış ve Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler yardımıyla bazı özellikleri elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.0.1 (**Lineer Uzay**) L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+ : L \times L \to L$ ve $. : F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A) L $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.
G2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$dir.
G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.
G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.
G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ omak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha x \in L$ dir.
L2. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.
L3. $(\alpha + \beta)x = \alpha.x + \beta.x$ dir.
L4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta.x)$ dir.
L5. $1.x = x$ dir. (Burada 1, F nin birim elemanıdır). $F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye karmaşık (kompleks) lineer uzay adı verilir.

Tanım 2.0.2 Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

Tanım 2.0.3 F bir cisim, V ve W, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T : V \to W$ dönüşümü,
a) $T(u + v) = T(u) + T(v)$
b) $T(cu) = cT(u)$
şartlarını sağlıyorsa T ye V üzerinde bir lineer dönüşüm denir .

Tanım 2.0.4 (**Konveks Küme**): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \ \ 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise B kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğindeki x ve y nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1-\alpha$ yerine $\alpha+\beta=1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz.

Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir.

Tanım 2.0.5 (**h-Konveks Fonksiyon**): $h \not\equiv 0$ ve $h : J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$, $\alpha \in (0,1)$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y)$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna h-konveks fonksiyon denir. Burada I ve J, $\mathbb{R}$ de iki aralık, $(0,1) \subseteq J$ dir.

Tanım 2.0.6 (**m-Konveks Fonksiyon**): $f : [0,b] \to \mathbb{R}$, $b > 0$ fonksiyonu, eğer her $x, y \in [0,b]$, $t \in [0,1]$ ve $m \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa bu fonksiyona m-konveks fonksiyon denir.

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y)$$

Tanım 2.0.7 (**(h,m)-Konveks Fonksiyon**): $h : J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in [0,b]$, $m \in [0,1]$ ve $\alpha \in (0,1)$ için,

$$f(\alpha x + m(1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + mh(1-\alpha)f(y)$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna (h,m)-konveks fonksiyon denir. Burada I ve J, $\mathbb{R}$ de iki aralık, $(0,1) \subseteq J$ dir.

Tanım 2.0.8 (**Konveks Fonksiyon**): I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \quad \leq \quad \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \tag{2.0.1}$$

eşitsizliğini sağlayan, f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer (2.0.1) eşitsizliği $x \neq y$ ve $\alpha \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir.

Teorem 2.0.1 f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise

a) $f, (a,b)$ aralığında süreklidir ve

b) $f, [a,b]$ aralığında sınırlıdır.

Teorem 2.0.2 (**Hermite-Hadamard Eşitsizliği**): I, $\mathbb{R}$ de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu taktirde,

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \quad \leq \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliğine literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği denir.

Tanım 2.0.9 (**İç-çarpım uzayı**): X, $F(\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $(.,.) : X \times X \to F$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise " $(.,.)$" dönüşümüne X üzerinde bir iç-çarpım, $(X, (.,.))$ ikilisine de "iç-çarpım" uzayı denir.

1. $\forall x \in X$ için $(x, x) \geq 0$ ve $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$;
2. $\forall x, y \in X$ için $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
3. $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;
4. $\forall x, y, z \in X$ için $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

Tanım 2.0.10 (**Norm**): $(X, (.,.))$ bir iç çarpım uzayı olsun. Bir $x \in X$ vektör normu

$$\| x \|= (x, x)^{\frac{1}{2}} \tag{2.0.2}$$

şeklinde tanımlanan reel sayıya denir.

Tanım 2.0.11 (**Hilbert Uzayı**): $(X, <.,.>)$ bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer bu iç-çarpım uzayı (2.0.2) normuna göre tam ise, yani $(X, <.,.>)$ iç-çarpım uzayı içindeki her Cauchy Dizisi (2.0.2) norma göre yakınsak ise bu iç çarpıma bir "Hilbert Uzayı" denir.

Not 2.0.1 $F = \mathbb{R}$ olması halinde 2. özellik $(x, y) = (y, x)$ olur. İç-çarpım tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu kolayca görebiliriz.

1. $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, y) + \beta(y, z)$,
2. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \in F$ için $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$;
3. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(y, z)$

Tanım 2.0.12 (**Birim Operatör**): $A : X \to X$ operatörü verilsin. Eğer her $x \in X$ için $Ax = x$ ise A operatörüne birim(özdeşlik) operatör denir. I, E ve I_X sembollerinden biriyle gösterilir.

Tanım 2.0.13 (**Sınırlı Operatör**): X ve Y iki normlu uzay olsun. A ise tanım kümesi $D(A) \subset X$ ve görüntü kümesi $R(A) \subset Y$ olan bir operatör olsun. Eğer A operatörü $D(A)$ 'nın X' de sınırlı her kümesi $R(A)$'nın Y de sınırlı bir kümesine karşılık getiriyorsa A' ya "sınırlı bir operatör" denir. Başka bir deyişle

$$\| Ax \|_Y \leq c \| x \|_X, \text{ her } x \in D(A)$$

olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa, A'ya "sınırlı bir operatör"denir.

Tanım 2.0.14 (**Lineer Operatör**): X ve Y aynı F cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A : X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer $D(A)$, X' in bir alt uzayı ve

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \ \forall x, y \in D(A) \ ve \ \forall \alpha, \beta \in F$$

ise A'ya "lineer operatör"denir.

Tanım 2.0.15 (**Eşlenik ve Öz-eşlenik Operatör**): A, H Hilbert uzayında sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer her $f, g \in D(A) \subset H$ için

$$(Af, g) = (f, A^*g)$$

sağlanıyorsa A^* a A'nın "eşlenik operatörü"denir.

Eğer $D(A) = D(A^*)$ ve $A = A^*$ ise bu A' ya özeşlenik operatör denir.

Tanım 2.0.16 (**Rezolventa**): H bir Hilbert uzayı ve $A : D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör olsun

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E)^{-1} \in L(X)\}$$

kümesine A operatörünün "regüler değerler kümesi" veya "rezolvent kümesi" denir.

$\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda; A) = (A - \lambda E)^{-1}$ operatorüne A operatorünün "rezolventası" veya "çözücü operatörü" adı verilir.

Tanım 2.0.17 (**Spektrum**): H bir Hilbert uzayı olsun.

$$Sp(A) = \sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

kümesine A operatörünün "spektrumu " denir. A operatörünün spektrum kümesi "$\sigma(A)$" veya "$Sp(A)$" ile göstereceğiz.

Tanım 2.0.18 A, $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı üzerinde keyfi bir özeşlenik lineer operatör olsun. $C\big(Sp(A)\big)$, A operatörünün spektrumu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesini göstersin. Gelfand dönüşümü yardımıyla aşağıdaki özellikleri yazılan Φ ile $C\big(Sp(A)\big)$ kümesi arasında bir $*$-izometrik izomorfizim vardır. Ayrıca H üzerinde 1_H birim operatörü ve A operatörü tarafından üretilen bir $C^*(A)$ cebiri vardır. Keyfi $f, g \in C\big(Sp(A)\big)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

1. $\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g)$;
2. $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ ve $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$;
3. $\|\Phi(f)\| := \|f\| := \sup_{t \in Sp(A)} |f(t)|$;
4. $\Phi(f_0) = 1_H$ ve $\Phi(f_1) = A$ burada $f_0(t) = 1$ ve $f_1(t) = t$ için $t \in Sp(A)$.

Şimdi bir operatörün, bir fonksiyon altındaki görüntüsünün ne anlama geldiğini ifade edelim.

Tanım 2.0.19 A, $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı üzerinde keyfi bir özeşlenik lineer operatör olsun. $C\big(Sp(A)\big)$, A operatörünün spektrumu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesini ve Φ de Tanım (2.0.18) deki fonksiyon olsun. Bu durumda her $f \in C\big(Sp(A)\big)$ için

$$f(A) := \Phi(f)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye keyfi bir A özeşlenik operatörünün sürekli fonksiyonel hesabı denir.

Tanım 2.0.20 (**Operatörlerde Sıralama**): A ve B, H Hilbert uzayı üzerinde iki özeşlenik operatör olsun. Her $x \in H$

1. $A \leq B \Leftrightarrow \langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle$,
2. $A \geq 0$ ise A operatörüne pozitiftir denir.

Not 2.0.2 Eğer A özeşlenik bir operatör ve f de $Sp(A)$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon ise, bu durumda $t \in Sp(A)$ için $f(t) \geq 0$ dır. Buradan $f(A) \geq 0$, yani $f(A)$ H Hilbert uzayı üzerinde pozitif bir operatördür. İlaveten eğer f ve g, $Sp(A)$ üzerinde iki fonksiyon ise aşağıdaki önemli özellik sağlanır. Her $t \in Sp(A)$ için

$$f(t) \geq g(t) \text{ dir. Buradan } f(A) \geq g(A)$$

Teorem 2.0.3 A, H Hilbert uzayı üzerinde sınırlı özeşlenik bir operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

$$m := \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle = \max\{\alpha \in \mathbb{R} | \alpha E \leq A\};$$

$$M := \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle = \min\{\alpha \in \mathbb{R} | A \leq \alpha E\};$$

ve

$$\|A\| = \max\{\|m\|, \|M\|\}$$

ayrıca $m, M \in Sp(A)$ ve $Sp(A) \subset [m, M]$ dir.

Not 2.0.1 $A, B \in K$ için $[A, B] := \{(1-t)A + tB : A, B \in K,\ t \in [0,1]\}$.

Tanım 2.0.21 (**Operatör Konveks**):[4] A ve B, spektrumları $I \subset \mathbb{R}$ da olan keyfi özeşlenik operatörler ve $\lambda \in [0,1]$ olsun. Bu durumda,

$$f((1-\lambda)A + \lambda B) \leq (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B)$$

eşitsizliğini sağlayan, I aralığı üzerinde tanımlı, reel değerli sürekli fonksiyona operatör konveks denir.

Tanım 2.0.22 (**Operatör h-Konveks Fonksiyon**):[7] I, J $\mathbb{R}$' de iki aralık ve K da $B(H)^+$'ın bir alt kümesi olsun. Bu durumda, sürekli olan bir $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in [0,1]$ için

$$f(tA + (1-t)B) \quad \leq \quad h(t)f(A) + h(1-t)f(B)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f'ye operatör h-konveks fonksiyon denir. Burada $A, B \in K$ spektrumları I' da olan pozitif operatörler ve $h : J \subseteq \mathbb{R}, h \not\equiv 0$ ise negatif olmayan bir fonksiyondur. Bundan sonra biz bu operatör sınıfını ES_hO sembolü ile göstereceğiz.

Tanım 2.0.23 (**Operatör m-Konveks Fonksiyon**):[6] I, $\mathbb{R}$ de bir aralık ve K da $B(H)^+$'nın konveks bir alt kümesi olsun. Her $m, t \in [0,1]$ ve spekturumu I da olan her pozitif A, B operatörü için $f : I \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(tA + m(1-t)B) \leq tf(A) + m(1-t)f(B)$$

eşitsizliğini sağlanıyorsa bu fonksiyona operatör m-konveks fonksiyon denir.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

3.1 Hilbert Uzayında Operatör (h,m)-Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Tanım 3.1.1 $h : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu Spektrumları $[0,b]$ aralığında olan $A, B \in K$ pozitif operatörleri ve $m \in [0,1]$, $\alpha \in (0,1)$ için

$$f(\alpha A + m(1-\alpha)B) \leq h(\alpha)f(A) + mh(1-\alpha)f(B) \tag{3.1.1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu durumda ise f'ye bir operatör (h,m)-konveks fonksiyon denir. Eğer yukarıdaki eşitsizlik ters çevrilir ise bu durumda f'ye operatör (h,m)-konkav fonksiyon denir.

Not 3.1.1 Bundan sonra bu operatör fonksiyon sınıfını $ESD_{(h,m)}O$ ile gösterilecektir.

Teorem 3.1.1 $f : [A,B] \subset [0,\infty) \to (0,\infty)$ $[A,B]$ aralığı üzerinde bir operatör (h,m)-konveks fonksiyonu ve $A < mB$ olsun. Bu durumda
$h : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir negatif olmayan fonksiyon, $m \in (0,1]$ için

$$\frac{1}{mB-A}\int_A^{mB} f(x)dx \leq (f(A)+mf(B))\int_0^1 h(t)dt \tag{3.1.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $x \in H$, $\parallel x \parallel = 1$ ve $t \in [0,1]$ için , $\langle Ax, x\rangle \in Sp(A) \subseteq [A,B]$ ve $\langle Bx, x\rangle \in Sp(B) \subseteq [A,B]$ olduğundan dolayı

$$\langle((1-t)A + tmB)x, x\rangle = (1-t)\langle Ax, x\rangle + tm\langle Bx, x\rangle \in [A,B], \tag{3.1.3}$$

yazabiliriz. f-nin sürekliliği ve 3.1.3 eşitliğinden

$$\int_0^1 f\big(tA + m(1-t)B\big)dt$$

integrali vardır. İddiaya göre f bir operatör (h,m)-konveks fonksiyon ve $h > 0$, her $t \in [0,1]$ ve $m \in (0,1]$ için

$$f(tA + m(1-t)B) \leq h(t)f(A) + mh(1-t)f(B)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned}\frac{1}{(mB-A)}\int_A^{mB} f(x)dx &= \int_0^1 f(tA+m(1-t)B)dt \\ &\le \int_0^1 \Big(h(t)f(A)+mh(1-t)f(B)\Big)dt\end{aligned}$$

eşitsizliği olduğu kolayca görülebilir.

Minkowski eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Big(h(t)f(A)+mh(1-t)f(B)\Big)dt &\le \Big(\int_0^1 h(t)f(A)dt\Big)+\Big(\int_0^1 mh(1-t)f(B)dt\Big) \\ &= [f(A)+mf(B)]\int_0^1 h(t)dt\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Sonuç olarak verilen iddiaya göre

$$\frac{1}{(mB-A)}\int_A^{mB} f(x)dx \le [f(A)+mf(B)]\int_0^1 h(t)dt$$

eşitsizliği elde edilip ispat tamamlanır.

Not 3.1.2 (3.1.2) eşitsizliğinde $m=1$ ve $h(t)=t$ olarak seçilirse,

$$\frac{1}{B-A}\int_A^{B} f(x)dx \le \Big(\frac{f(A)+f(B)}{2}\Big)$$

olup, bu ise bize operatör konveks fonksyonu için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafını verir.

Not 3.1.3 (3.1.2) de $m=1$ ve $h(t)=t^s$ $s\in[0,1]$ alınırsa [21] deki teorem (2.6) daki , ikinci anlamda operatör s-konveks fonksiyonunun sağ tarafı elde edilir.

Teorem 3.1.2 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $m\in(0,1]$ ve $t\in[0,1]$ aralığı için bir operatör (h,m)-konveks fonksiyonu olsun. Eğer $0\le A<mB<\infty$ ve $f\in L[A,mB]$ ise bu durumda

$$f\Big(\frac{A+mB}{2}\Big) \le h\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big[\frac{f(A)+mf(B)+m[f\big(\frac{A}{m}\big)+f(B)]}{2}\Big] \tag{3.1.4}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $x\in H$, $\| x \|=1$ ve $t\in[0,1]$ için , $\big\langle Ax,x\big\rangle\in Sp(A)\subseteq[A,B]$ ve $\big\langle Bx,x\big\rangle\in Sp(B)\subseteq[A,B]$ olduğundan dolayı

$$\big\langle((1-t)A+tmB)x,x\big\rangle=(1-t)\big\langle Ax,x\big\rangle+tm\big\langle Bx,x\big\rangle\in[A,B], \tag{3.1.5}$$

yazabiliriz.

f'nin sürekliliği ve (3.1.5) eşitliğinden

$$\int_0^1 f\big(tA+m(1-t)B\big)dt$$

integrali vardır. f bir operatör (h,m)-konveks fonksiyon olduğundan ve $h>0$, $m\in(0,1]$ ve $t\in[0,1]$ olduğu için

$$f(tA+m(1-t)B)\le h(t)f(A)+mh(1-t)f(B)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Operatör (h,m)-konveks tanımından $X,Y\in[0,\infty)$ ve $t=\frac{1}{2}$ için

$$f\left(\frac{X+Y}{2}\right)\le h\left(\frac{1}{2}\right)f\left(X\right)+mh\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{Y}{m}\right)$$

olup, özel olarak $X=tA+m(1-t)B$ ve $Y=(1-t)A+mtB$, seçilirse her $t\in[0,1]$ aralığı için

$$f\left(\frac{A+mB}{2}\right)\le h\left(\frac{1}{2}\right)f\left(tA+m(1-t)B\right)+mh\left(\frac{1}{2}\right)f\Big((1-t)\frac{A}{m}+tB\Big) \quad (3.1.6)$$

elde ederiz. Bu durumda $[0,1]$ aralığı üzerinde t' ye göre her iki tarafın integrali alınırsa

$$f\Big(\frac{A+mB}{2}\Big)\le h\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 f\left(tA+m(1-t)B\right)dt+mh\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 f\left((1-t)\frac{A}{m}+tB\right)dt$$

eşitsizliği bulunur.

$$\int_0^1 f(tA+m(1-t)B)dt=\frac{1}{A-mB}\int_{mB}^{A} f(x)dx$$

ve

$$\int_0^1 f\left((1-t)\frac{A}{m}+tB\right)dt=\frac{m}{mB-A}\int_{\frac{A}{m}}^{B} f(x)dx$$

integral eşitliklerini ve (3.1.6) eşitsizliğini kullanarak (3.1.8) eşitsizliğinin birinci kısmını elde ederiz. f'nin operatör (h,m)-konveksliğinden

$$h\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big[f(tA+m(1-t)B)+mh\Big(\frac{1}{2}\Big)f\Big((1-t)\frac{A}{m}+tB\Big)\Big]$$

$$\le h\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big[tf(A)+m(1-t)f(B)+m(1-t)f\Big(\frac{A}{m}\Big)+tf(B)\Big] \quad (3.1.7)$$

Bu eşitsizliğin her iki tarafını $[0,1]$ aralığı üzerinde t' ye göre intagral alınırsa

$$f\Big(\frac{A+mB}{2}\Big)\ \le\ h\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big[\frac{f(A)+mf(B)+m[f\left(\frac{A}{m}\right)+f(B)]}{2}\Big] \quad (3.1.8)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.3 $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $m \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ aralığı için bir operatör (h,m)-konveks fonksiyonu olsun. Eğer $0 \leq A < B < \infty$ ve $f \in L[mA, B]$, ise bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m+1}\left[\frac{1}{mB-A}\int_{A}^{mB} f(x)dx + \frac{1}{B-mA}\int_{mA}^{B} f(x)dx\right] \\ \leq\ & \frac{f(A)+f(B)}{2}\left[\int_0^1 h(t)dt + \int_0^1 h(1-t)dt\right] \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

İspat. Operatör (h,m)-konveks fonksiyon tanımından ve her $t \in [0,1]$ için

$$f(tA + m(1-t)B) \leq h(t)f(A) + mh(1-t)f(B)$$

$$f((1-t)A + mtB) \leq h(1-t)f(A) + mh(t)f(B)$$

$$f(tB + m(1-t)A) \leq h(t)f(B) + mh(1-t)f(A)$$

ve

$$f((1-t)B + mtA) \leq h(1-t)f(B) + mh(t)f(A)$$

yazılabilir. Sırasıyla t' ye göre $[0,1]$ aralığı üzerinde integraller alınırsa;

$$\begin{aligned} &\int_0^1 f(tA + m(1-t)B)dt + \int_0^1 f((1-t)A + mtB)dt \\ &+ \int_0^1 f(tB + m(1-t)A)dt + \int_0^1 f((1-t)B + mtA)dt \\ \leq\ & f((A) + f(B))(m+1)\Big[\int_0^1 h(t)dt + \int_0^1 h(1-t)dt\Big] \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

elde edilir.

$$\int_0^1 f(tA + m(1-t)B)dt = \int_0^1 f((1-t)A + mtB)dt = \frac{1}{mB-A}\int_A^{mB} f(x)dx$$

ve

$$\int_0^1 f((1-t)B + mtA)dt = \int_0^1 f(tB + m(1-t)A)dt = \frac{1}{B-mA}\int_{mA}^{B} f(x)dx$$

(3.1.7) de eşitsizlik kullanılarak sonucu elde edilir.

Sonuç 3.1.1 (3.1.9) de $h(t) = 1$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\frac{1}{m+1}\left[\frac{1}{mB-A}\int_A^{mB} f(x)dx + \frac{1}{B-mA}\int_{mA}^{B} f(x)dx\right] \leq f(A) + f(B)$$

Not 3.1.4 (3.1.9) de $m = 1$ alınırsa [17] teorem [2.4] de eşitsizliğin sağ tarafı elde edilir.

Not 3.1.5 (3.1.9) de $m = 1$ ve $h(t) = t$ alınırsa (3.1.9) eşitsizliğin sağ tarafı elde edilir.

Not 3.1.6 (3.1.9), $m = 1$ ve $h(t) = t^s$ alınırsa [21] deki Teorem (2.6)'nın sağ tarafı elde edilir.

Teorem 3.1.4 $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, ve f, g sırasıyla operatör (h_1, m)-konveks, (h_2, m)-konveks fonksiyon ve $A, B \in K$ olsun. $fg \in L([A, mB])$ ve $h_1 h_2 \in L([0, 1])$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{1}{mB - A} \int_A^{mB} f(x)g(x)dx \\ \leq \; & [f(A) + g(A) + m^2 f(B)g(B)] \int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt \\ & + m[f(A)g(B) + f(B)g(A)] \int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Teoremde verilen şartlar kullanılarak;

$$\begin{aligned} & (fg)(tA + m(1-t)B) \\ \leq \; & [h_1(t)f(A) + mh_1(1-t)f(B)][h_2(t)g(A) + mh(1-t)g(B))] \\ = \; & h_1(t)h_2(t)f(A)g(A) + m^2 h_1(1-t)h_2(1-t)f(B)g(B) \\ & + mh_1(t)h_2(1-t)f(A)g(B) + mh_1(1-t)h_2(t)f(B)g(A) \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizliğinin her iki tarafı $[0, 1]$ aralığı üzerinde t' ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^1 (fg)(tA + m(1-t)B)dt \; \leq \; & [f(A)g(A) + m^2 f(B)g(B)] \int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt \\ & + m[f(A)g(B) + f(B)g(A)] \int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\int_0^1 (fg)(tA + m(1-t)B)dt = \frac{1}{mB - A} \int_A^{mB} f(x)g(x)dx$$

olduğu yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.5 $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ f bir operatör (h_1, m_1)- konveks, g bir operatör (h_2, m_2)-konveks fonksiyon ve $A, B \in K$ olsun. $fg \in L([A, B])$ ve $h_1 h_2 \in L([0, 1])$ olduğu durumlarda aşağıdaki eşitsizlik doğrudur;

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{mB-A}\int_A^{mB} f(x)g(x)dx \\
\leq\ & min\left\{ M_1\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt + M_2\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt \right. \\
&\left. \text{x}M_3\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt + M_4\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt \right\}
\end{aligned}$$

Burada,

$$\begin{aligned}
M_1 &= f(A)g(A) + m_1m_2 f\left(\frac{B}{m_1}\right)g\left(\frac{B}{m_2}\right), \\
M_2 &= m_2 f(A)g\left(\frac{B}{m_2}\right) + m_1m_2 f\left(\frac{B}{m_1}\right)g(A), \\
M_3 &= m_1m_2 f\left(\frac{A}{m_1}\right)g\left(\frac{A}{m_2}\right) + f(B)g(B), \\
M_4 &= m_1 f\left(\frac{A}{m_1}\right)g(B) + m_2 f(B)g\left(\frac{A}{m_2}\right)
\end{aligned}$$

dır.

İspat. Teoremde verilen şartlara göre f ve g sırasıyla operatör (h_1, m)-konveks ve operatör (h_2, m)-konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
& f(tA+(1-t)B)g(tA+(1-t)B) \\
=\ & f\left(tA + m_1(1-t)\frac{B}{m_1}\right)g\left(tA + m_2(1-t)\frac{B}{m_2}\right) \\
\leq\ & \left[h_1 f(A) + m_1h_1(1-t)f\frac{B}{m_1}\right]\left[h_2 g(A) + m_2h_2(1-t)g\frac{B}{m_2}\right] \\
=\ & h_1(t)f(A)h_2(t)g(A) + m_1m_2h_1(1-t)h_2(1-t)f\left(\frac{B}{m_1}\right)g\left(\frac{B}{m_2}\right) \\
& + m_2h_1(t)f(A)h_2(1-t)g\left(\frac{B}{m_2}\right) + m_1h_1(1-t)f\left(\frac{B}{m_1}\right)h_2(t)g(A)
\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $[0, 1]$ aralığı üzerinde t'ye göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 f(tA+(1-t)B)g(tA+(1-t)B)dt = \frac{1}{B-A}\int_A^B f(x)g(x)dx \\
\leq\ & \left[f(A)g(A) + m_1m_2 f\left(\frac{B}{m_1}\right)g\left(\frac{B}{m_2}\right)\right]\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt \\
& + \left[m_2 f(A)g\left(\frac{B}{m_2}\right) + m_1 f\left(\frac{B}{m_1}\right)g(A)\right]\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{B-A}\int_A^B f(x)g(x) \leq\ & \left[m_1m_2 f\left(\frac{A}{m_1}\right)g\left(\frac{A}{m_2}\right) + f(B)g(B)\right]\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt \\
& + \left[m_1 f\left(\frac{A}{m_1}\right)g(B) + m_2 f(B)g\left(\frac{A}{m_2}\right)\right]\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.6 $f : [0,\infty) \subset I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $0 \leq A < B < \infty$ olacak şekilde I üzerinde $f' \in L([A,B])$ diferansiyellenebilir olsun. Eğer $|f'|^q$, bazı $m \in (0,1]$ ve $q \in [1,\infty)$ sabitleri için $[A,B]$, $A,B \in K$ aralığı üzerinde bir operatör (h,m)- konveks ise bu durumda aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(A)+f(B)}{2} - \frac{1}{B-A}\int_A^B f(x)dx\right| \\
\leq\ & \frac{B-A}{2}\left[\int_{\frac{1}{2}}^1 h(1-t)(2t-1)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)(2t-1)dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
& min\left\{\left(\left|f'(A)\right|^q + m\left|f'\left(\frac{B}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \left(m\left|f'\left(\frac{A}{m}\right)\right|^q + \left|f'\left(\frac{B}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f fonksiyonu $f' \in L([A,B])$ şartını sağlayan diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğu için

$$\frac{f(A)+f(B)}{2} - \frac{1}{B-A}\int_A^B f(x)dx = \frac{B-A}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(tA+(1-t)B)dt$$

eşitsizliği yazılabilir. İlk olarak $q = 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\left|\frac{f(A)+f(B)}{2} - \frac{1}{B-A}\int_A^B f(x)dx\right| = \frac{B-A}{2}\int_0^1 |(1-2t)||f'(tA+(1-t)B)|dt$$

yazılan eşitliği doğrudur. $q = 1$ olduğundan ve $|f'|$ $[A,B]$ üzerinde operatör (h,m)-konveks olduğu için

$$|f'(tA+(1-t)B)| = \left|f'(tA+m(1-t)\frac{B}{m}\right| \leq h(t)|f'(A)| + mh(1-t)\left|f'\left(\frac{B}{m}\right)\right|,$$

yazılır. Ayrıca

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)h(1-t)dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)(2t-1)dt$$

ve

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)h(t) = \int_{\frac{1}{2}}^1 h(1-t)(2t-1)dt$$

eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(A)+f(B)}{2}-\frac{1}{B-A}\int_A^B f(x)dx\right| \\
\leq\ & \frac{B-A}{2}\int_0^1 |1-2t|\left[h(t)|f'(A)|+mh(1-t)\left|f'\left(\frac{B}{m}\right)\right|\right]dt \\
\leq\ & \frac{B-A}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} |1-2t|\left[h(t)|f'(A)|+mh(1-t)\left|f'\left(\frac{B}{m}\right)\right|\right]dt\right. \\
& \left.+\int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)\left[h(t)|f'(A)|+mh(1-t)\left|f'\left(\frac{B}{m}\right)\right|\right]\right]dt \\
=\ & \frac{B-A}{2}\left[\left(|f'(A)|+m\left|f'\left(\frac{B}{m}\right)\right|\right)\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 h(1-t)(2t-1)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)(2t-1)dt,\right)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde işlemler yapılarak;

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(A)+f(B)}{2}-\frac{1}{B-A}\int_A^B f(x)dx\right| \\
=\ & \frac{B-A}{2}\left[m\left|f'\left(\frac{A}{m}\right)+|f'(B)|\right]\left[\int_{\frac{1}{2}}^1 h(1-t)(2t-1)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)(2t-1)dt\right.\right.
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $q=1$ için ispatı tamamlar. Şimdi $q>1$ olduğunu kabul edelim. Teoremin iddasına göre $|f'|^q$ $[A,B]$ üzerinde operatör (h,m)- konveks olduğu için

$$|f'(tA+(1-t)B)|^q \leq h(t)|f'(B)|^q+mh(1-t)\left|f'\left(\frac{B}{m}\right)\right|^q$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buradan Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(A)+f(B)}{2}-\frac{1}{B-A}\int_A^B f(x)dx\right| \\
=\ & \frac{B-A}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^1 |1-2t|\left|f'(tA+m(1-t)\frac{B}{m}\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \frac{B-A}{2}\left(\left[\int_{\frac{1}{2}}^1 h(1-t)(2t-1)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)(2t-1)dt\right]\left[|f'(A)|^q+\left|f'\left(\frac{B}{m}\right)\right|^q\right]\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(A)+f(B)}{2}-\frac{1}{B-A}\int_A^B f(x)dx\right| \\
\leq\ & \frac{B-A}{2}\left[\int_{\frac{1}{2}}^1 h(1-t)(2t-1)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)(2t-1)dt\right]^{\frac{1}{q}}\left[m\left|f'\left(\frac{A}{m}\right)^q+|f'(B)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.7 $f:[0,\infty)\subset I\to\mathbb{R},\ I$ üzerinde $f'\in L([A,B])$ olacak şekilde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Burada $0\le A<B<\infty$'dur. Eğer $|f'|^q$ bazı $m\in(0,1]$ ve $q\in[1,\infty)$ sabitleri için $[A,B],\ \ A,B\in K$ aralığı üzerinde bir operatör (h,m)- konveks ise

$$\begin{aligned}\left|f\left(\frac{A+B}{2}\right)-\frac{1}{B-A}\int_A^B f(x)dx\right| \ &\le\ (B-A)\left(\int_0^{\frac{1}{2}} th(t)dt+\int_0^{\frac{1}{2}} th(1-t)dt\right)\\ &\quad \text{x}\ min\left\{|f'(A)|+m\left|f'\left(\frac{B}{m}\right)\right|;m\left|f'\left(\frac{A}{m}\right)\right|+|f'(B)|\right\}\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Verilen iddaya göre aşağıdaki hesaplamaların doğru olduğu kolayca görülür.

$$\begin{aligned}&\left|f\left(\frac{A+B}{2}\right)-\frac{1}{B-A}\int_A^B f(x)dx\right|\\ \le\ &\frac{1}{B-A}\left[\int_A^{\frac{A+B}{2}}(x-A)|f'(x)|dx+\int_{\frac{A+B}{2}}^{B}(B-x)|f'(x)|dx\right]\\ =\ &(B-A)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t|f'(tA+(1-t)B)|dt+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)|f'(tA+(1-t)B)|dt\right]\\ \le\ &\left[(B-A)\int_0^{\frac{1}{2}} t\left(h(t)|f'(A)|+mh(1-t)\left|f'\left(\frac{B}{m}\right)\right|\right)dt\right.\\ +\ &\left.\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)(h(t)|f'(A)|+mh(1-t)\left|f'\left(\frac{B}{m}\right)\right|dt\right]\\ =\ &(B-A)(|f'(A)|+m\left|f'\left(\frac{B}{m}\right)\right|\left(\int_0^{\frac{1}{2}} th(t)dt+\int_0^{\frac{1}{2}} th(1-t)dt\right)\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}&\left|f\left(\frac{A+B}{2}\right)-\frac{1}{B-A}\int_A^B f(x)dx\right|\\ \le\ &(B-A)\left(m\left|f'\left(\frac{A}{m}\right)\right|+m|f'(B)|\right)\left(\int_0^{\frac{1}{2}} th(t)dt+\int_0^{\frac{1}{2}} th(1-t)dt\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 3.1.1 [3] I, $\mathbb{R}$' de bir aralık, $f:I\to\mathbb{R}$, I°'de diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Spektrumları I'da olan $A,B\in K$, pozitif operatörler, $m\in[0,1)$ ve $A<mB$ şartları sağlansın. Bu durumda $f'\in L([A,mB])$ olmak üzere

$$\frac{f(A)+f(mB)}{2}-\frac{1}{mB-A}\int_A^{mB} f(x)dx=\frac{mB-A}{2}\int_0^1(1-2t)f'(tA+m(1-t)B)dt$$

eşitliği geçerlidir.

Lemma 3.1.2 [3] I, $\mathbb{R}$' de bir aralık, $f: I \to \mathbb{R}$, I°'de diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Spektrumları I'da olan $A, B \in K$, $m \in [0,1)$ ve $A < mB$ şartları sağlansın. Bu durumda $f' \in L'([A, mB])$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{1}{mB-A}\int_A^{mB} f(x)dx - f\left(\frac{A+mB}{2}\right) \\ = \;& (mB-A)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(tA+m(1-t)B)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)f'(tA+m(1-t)B)dt\right] \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 3.1.8 $f: I \to \mathbb{R}$, $f' \in L([A,B])$ I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $A, B \in I$ $m \in (0,1]$ ve $A < mB$ için $|f'|^q$ operatör (h,m)- konveks fonksiyonu ise bu takdirde

$$\begin{aligned} & \left|\frac{f(A)+f(mB)}{2} - \frac{1}{mB-A}\int_A^{mB} f(x)dx\right| \\ \leq \;& \frac{mB-A}{2}\left[|f'(A)| + m|f'(B)|\right]\left[\int_{\frac{1}{2}}^1 h(1-t)(2t-1)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)(2t-1)dt\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Teoremde verilen şartlar ve Lemma 3.1.1 kullanılarak;

$$\begin{aligned} & \left|\frac{f(A)+f(mB)}{2} - \frac{1}{mB-A}\int_A^{mB} f(x)dx\right| \\ \leq \;& \frac{mB-A}{2}\int_0^1 |1-2t|\left(h(t)|f'(A)| + mh(1-t)|f'(B)|\right)dt \\ = \;& \frac{mB-A}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} |1-2t|h(t)|f'(A)| + mh(1-t)\left(|f'(B)|\right)\right] \\ + \;& \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)\left(h(t)|f'(A)| + mh(1-t)|f'(B)|\right) \\ = \;& \frac{mB-A}{2}\left[|f'(A)|\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)h(t)dt + m|f'(B)|\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)h(1-t)dt\right. \\ + \;& \left.|f'(A)|\int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)h(t)dt + m|f'(B)|\int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)h(1-t)dt\right] \\ = \;& \frac{mB-A}{2}\left[|f'(A)|\int_{\frac{1}{2}}^1 h(1-t)(2t-1)dt + m|f'(B)|\int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)(2t-1)dt\right. \\ + \;& \left.|f'(A)|\int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)(2t-1)dt + m|f'(B)|\int_{\frac{1}{2}}^1 h(1-t)(2t-1)dt\right] \\ = \;& \frac{mB-A}{2}\left[|f'(A)| + m|f'(B)|\right]\left[\int_{\frac{1}{2}}^1 h(1-t)(2t-1)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)(2t-1)dt\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.9 $f : I \to \mathbb{R}$, $f' \in L([A,B])$ I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $A, B \in I$ $m \in (0,1]$ ve $A < mB$ için $|f'|^q$ operatör (h,m)- konveks fonksiyonu ise bu taktirde

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{mB-A}\int_A^{mB} f(x)dx - f\left(\frac{A+mB}{2}\right)\right| \\
\leq\; & (mB-A)\left[|f'(A)| + m|f'(B)|\right]\left[\int_0^{\frac{1}{2}} th(t)dt + \int_0^{\frac{1}{2}} th(1-t)dt\right]
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Teoremde verilen şartlar ve Lemma 3.1.2 kullanılarak;

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{mB-A}\int_A^{mB} f(x)dx - f\left(\frac{A+mB}{2}\right)\right| \\
\leq\; & (mB-A)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} |t||f'(tA+m(1-t)B)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} |t-1||f'(tA+m(1-t)B)|dt\right] \\
\leq\; & (mB-A)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} |t|\left(h(t)|f'(A)| + mh(1-t)|f'(B)|\right)dt\right. \\
+\; & \left.\int_{\frac{1}{2}}^{1} |t-1|\left(h(t)|f'(A)| + mh(1-t)|f'(B)|\right)dt\right] \\
=\; & (mB-A)\left[|f'(A)|\int_0^{\frac{1}{2}} th(t)dt + m|f'(B)|\int_0^{\frac{1}{2}} th(1-t)dt\right. \\
+\; & \left.|f'(A)|\int_0^{\frac{1}{2}} th(1-t)dt + m|f'(B)|\int_0^{\frac{1}{2}} th(t)dt\right] \\
=\; & (mB-A)\left[|f'(A)| + m|f'(B)|\right]\left[\int_0^{\frac{1}{2}} th(t)dt + \int_0^{\frac{1}{2}} th(1-t)dt\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışması, Sınırlı Lineer Operatörler Teorisi ile Matematiksel Eşitsizlikler Teorisi'ni bir araya getirmiştir. "Hilbert Uzayında Operatör (h, m)-Konveks Fonksiyonlar" konusu matematik literatüründe ilk defa burada çalışılmıştır. Elde edilen bulgulardan ikisi [19-20] uluslararası sempozyumda sözlü olarak sunulmuştur, ikisi de uluslararası saygın dergilerde basılmak üzere gönderilmiştir. Dolayısıyla bu tez'in üçüncü bölümünün tamamı orijinal bir çalışmadır. Yapılan bu çalışmalar elbette yeterli değildir. Fakat çalışma yapmak isteyen diğer araştırmacılarada önemli bir kaynak olacağını düşünüyoruz.

KAYNAKLAR

[1] Özdemir, M.E., Akdemir A.O., Set E. 2011. On (h,m)-Convexity and Hadamard-Type Inequalities. http:arxiv.org/obs/1103.6163.

[2] Özdemir, M.E., Akdemir A.O., Set E. 2016. On (h,m)-Convexity and Hadamard-Type Inequalitiel Tronsylvanian. Journal of Math. and Mech. (TJMM), 8(1): 51-58.

[3] Matloka, M., 2013. On some integral inequalities for (h, m)-convex functions. Mathematical Economics, No:9(16): 55-70.

[4] Dragomir, S. S., 2011. The Hermite-Hadamard type inequalities for operator convex functions. Appl. Math. Comput., 218(3): 766-772,

[5] Salaş, S., Unluyol, E., Erdaş, Y. 2015. The Hermite-Hadamard type inequalities for operator p-convex functions in Hilbert Space. Journal of New Theory, 4: 74-79.

[6] Erdaş, Y., Unluyol, E., Salaş, S. 2015. The Hermite-Hadamard type inequalities for operator m-convex functions in Hilbert Space. Journal of New Theory, 5: 80-91.

[7] Unluyol, E., Salaş, S., Erdaş, Y. 2015. The Hermite-Hadamard type inequalities for operator h-convex functions in Inner Product Space. International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling, ICAAMM, 8-12 June, Yildiz Tecnical University Istanbul, Turkey, 364.

[8] Unluyol, E., Erdaş, Y., Salaş S. 2015. The Hermite-Hadamard type inequalities for operator (α, m)-convex functions in Inner Product Space. International Conference on Applied Analysis And Mathematical Modeling (ICAAMM), 8-12 June, Yildiz Tecnical University Istanbul, Turkey, 107.

[9] Salaş, S., Unluyol, E., Erdaş, Y. 2015. Some New Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications for Godunova-Levin Operator Convex Functions in Hilbert Space. International Conference on Advancement in Mathematical Sciences, 05-07 November, Porto Bello Hotel Resort, Spa, Antalya, Turkey, 224.

[10] Unluyol, E., Salaş, S., Erdaş, Y. 2015. Some New Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications for two operator ES_hO-Convex Functions in Hilbert Space. International Conference on Advancement in Mathematical Sciences, 05-07 November, Porto Bello Hotel Resort, Spa, Antalya, Turkey, 190.

[11] Unluyol E., Erdaş Y., Salaş S. 2015. Some New Hermite-Hadamard type inequalities and Applications for two operator (α, m)-convex functions in Hilbert Space. International Conference on Advancement in Mathematical Sciences, 05-07 November, Porto Bello Hotel Resort, Spa, Antalya, Turkey, 104.

[12] Erdaş Y., Unluyol E., Salaş S. 2015. Operatör (α, m)-konveks Fonksiyonlar Sınıfı. Mini Matematik İstatistik Sempozyumu, 17 Aralık, Ordu Üniversitesi, Ordu, Türkiye, 8.

[13] Salaş S., Unluyol E., Erdaş Y. 2015. Yeni bir operatör konveks sınıfı ES_hO. Mini Matematik İstatistik Sempozyumu, 17 Aralık, Ordu Üniversitesi, Ordu, Türkiye, 9.

[14] Unluyol E., 2016. Jensen's Inequality with Operatör $s-$convexity (or Breckner $s-$convexity). in Hilbert Space and Some its Applications, 2^{nd} International Conference on Analysis and Its Applications (ICAA) 12-15 July Kırşehir, Turkey, 101.

[15] Salaş, S., Unluyol, E., Erdaş, Y. 2016. The Hermite-Hadamard type inequalities for operator Godunuva-Levin class of functions in Hilbert Space. Ordu Univ. J. Sci. Tech., 6(1): 150-160.

[16] Unluyol E., Erdaş, Y. 2017. Hermite-Hadamard type inequalities for Functions whose second derivatives absolute values are operator quasi-convex. International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME), Yildiz Tecnical University, 10-12 May, Istanbul, Turkey, 147.

[17] Taghavi A., Darvish V., Nazari H.M., Dragomir, S.S. 2015. Some inequalities with the Hermite-Hadamard type inequalities for operator h-convex functions. Research Group in Mathematical Inequalities and Applications (RGMIA) 8(22).

[18] Cortez M.V., Hernóndez J.E.H., Azócar L.A. 2017. Some new generalized Jensen and Hermite-Hadamard inequalities for operator $h-$convex functions. Appl. Math. Inf. Sci., 11(2): 1-10.

[19] S. Salaş, Unluyol E., Yardimciel D. 2016. Operator $(h, m)-$convexity in Hilbert Space and Some Hermite-Hadamard Type inequalities. International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences (ICANAS), 21-23 April Antalya, Turkey, 184.

[20] Yardimciel D., Unluyol E. 2017. Some Integral Inequalities for $(h, m)-$convex functions in Hilbert Space. International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME), Yildiz Tecnical University, 10-12 May, Istanbul, Turkey, 283.

[21] Ghazanfari A. G., 2014. The Hermite-Hadamard type inequalities for operator s-convex functions. Journal of Advanced Research in Pure Mathematics, 6(3): 52-61.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	Dilan YARDİMCİEL
Doğum Yeri	:	KARS
Doğum Tarihi	:	03.01.1993
Medeni Hali	:	Bekar
Bildiği Yabancı Dil	:	İngilizce
İletişim Bilgileri	:	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, dilanyardimciel@gmail.com
Lise	:	Cumhuriyet Lisesi, 2011
Lisans	:	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 2011