T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT UZAYINDA GRÜSS TİPLİ EŞİTSİZLİKLER İÇİN OPERATÖR KONVEKS FONKSİYONLAR

ŞÜKRAN ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2017

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Şükran ŞAHİN tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL danışmanlığında yürütülen "Hilbert Uzayında Grüss Tipli Eşitsizlikler için Operatör Konveks Fonksiyonlar" adlı bu tez, jürimiz tarafından 06 / 02 / 2017 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman	:	Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL	
Başkan	:	Yrd. Doç. Dr. Selim NUMAN Bil. ve Öğrt. Tek. Eği., Giresun Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Mehmet KORKMAZ Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun .03/02/2017. tarih ve .2017/7.6. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

27/02/2017

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Kürşat KORKMAZ

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza

Şükran ŞAHİN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

HİLBERT UZAYINDA GRÜSS TİPLİ EŞİTSİZLİKLER İÇİN OPERATÖR KONVEKS FONKSİYONLAR

Şükran ŞAHİN

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2017
Yüksek Lisans Tezi, 73s.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

Bu tez çalışması, 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, giriş ve literatür taraması, ikinci bölümde temel kavramlar anlatılmaktadır. Üçüncü bölümde literatürde var olan, Hilbert uzayında özeşlenik operatörlerin konveks ve operatör konveks fonksiyonlar için Grüss tipli eşitsizlikler konusu ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Dördüncü bölümde sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hilbert uzayı, özeşlenik operatör, konveks ve operatör konveks fonksiyonlar, Grüss tipli eşitsizlikler.

ABSTRACT

OPERATOR CONVEX FUNCTIONS FOR GRUSS TYPE INEQUALITIES IN HILBERT SPACES

Şükran ŞAHİN

University of Ordu
Institute of Sciences
Department of Mathematics, 2017
MSc. Thesis, 73p.

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

This thesis is consist of four chapters. In the first chapter, it is mentioned about the object of the thesis and previous studies in this area. In these cond chapter, basic definitions and theorems that were used in thesis are given. In the third chapter, it is comprehensive explained of Gruss type inequalities for convex and operator convex functıons of selfadjoint operators in Hilbert spaces. In the fourth chapter, it is given some results and propositions.

Keywords: Hilbert space, selfadjoint operator, convex and operator convex functions, Grüss type inequalities.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL' a;

Başta tez jüri üyelerim olmak üzere, Ordu Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarıma;

Bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

		Sayfa
TEZ BİLDİRİMİ……………………………………………………………......		I
ÖZET……..…………………………………………………………………		II
ABSTRACT…………………………………………………………………...		III
TEŞEKKÜR……...……………………………………………………………		IV
İÇİNDEKİLER…………………………………………………………......		V
1.	**GİRİŞ**…………………...…………………………………............	1
2.	**GENEL BİLGİLER**……………..……………………………..……..	4
3.	**YAPILAN ÇALIŞMALAR**………………………………………..…	8
3.1.	Hilbert Uzaylarında Özeşelenik Operatörlerin Fonksiyonları…………	8
3.2.	Sınırlı Özeşlenik Operatörler…………………………….....…….....	8
3.2.1.	Operatörlerde Sıralama ……………….................……………………	8
3.3.	Özeşlenik Operatörlerin Sürekli Fonksiyonları……..…………………	11
3.3.1.	Bir Sınırlı Operatörlerde Polinomlar……………………....…………..	11
3.3.2.	Özeşlenik Operatörlerin Sürekli Fonksiyonları ….……………………	12
3.4.	Özeşlenik Operatörlerin Basamak Fonksiyonları …..………………..	15
3.5.	Özeşlenik Operatörlerin Spektral Ayrılışı……………………………..	17
3.5.1.	Operatör Monoton Ve Operatör Konveks Fonksiyonlar…...…………..	21
3.6.	Cebysev’in Eşitsizliği………………………………………………….	22
3.6.1.	Reel Sayıları İçin Cebysev’in Eşitsizliği……………………………….	22
3.6.2.	Bir Operatör İçin Cebysev Eşitsizliğinin Bir Versiyonu……………….	23
3.6.3.	Bir Operatör İle İlgili Sonuçlar………………………………………	25
3.7.	Grüss Eşitsizliği……………………………………………………...	27
3.7.1.	Bazı Elementer Grüss Tipli Eşitsizlikler……………………………….	27
3.7.2.	Bir Operatör İçin Grüss Tipinin Bir Eşitsizliği………………………...	28
3.8.	Çeşitli Grüss Tipli Eşitsizlik …………………………………………...	30
3.8.1.	Bazı Vektörel Grüss Tipli Eşitsizlikler…………………………………	30
3.8.2.	Bir Operatör İçin Bazı Grüss Tipli Eşitsizlikler………………………..	31

3.9. Cebysev Fonksiyoneli İçin Çeşitli Eşitsizlikler……………………….. 35
3.9.1. Bazı İlgili Sonuçların Ayrıştırılması………………………………….. 35
3.10. Lipschitzian Fonksiyonlar Cebysev Fonksiyonları İçin Sınırları……… 40
3.10.1. Lipschitzian Fonksiyonların Durumu………………………………….. 40
3.10.2. (φ,Φ)- Lipschitzian Fonksiyonların Durumu………………………… 44
3.11. Kuazi-Grüss Tipli Eşitsizlikler………………………………………… 45
3.11.1. Vektör Eşitsizlikler…………………………………………………….. 46
3.11.2. Grüss Tipli Eşitsizlik İçin Uygulamalar……………………………….. 52
3.12. İki Operatörlü Grüss Tipli Eşitsizlikleri……………………………….. 55
3.12.1. Bazı Sonuçlar…………………………………………………………. 55
3.12.2. Sınırlı Varyasyonlu f İçin Sınırlar…………………………………….... 57
3.12.3. f Lipschitzian İçin Sınırlar…………………………………………….. 64
3.12.4. Monotonik Azalmayan f İçin Sınırlar ……………………………….. 68
4. SONUÇ ve ÖNERİLER ……………………………………………. 70
5. KAYNAKLAR ………………………………………………………. 71
ÖZGEÇMİŞ …………………………………………………………… 73

1. GİRİŞ

Eşitsizlik Teorisi'nin temellerini XVIII. ve XIX. yüzyıllarda Gauss (1775-1855), Cauchy (1785-1857) ve Chebyshev (1821-1894) gibi matematikçiler atmışlardır. Fakat modern anlamda "Eşitsizlik Teorisi" alanında yapılan ilk çalışma Hardy (1934) Littlewood ve Polya tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır. Bu çalışmayı 1961 yılında E. F. Beckenbach ve R. Bellman'ın yine aynı ismi taşıyan "Inequalities" kitabı takip eder. Daha sonra 1965 yılında J. Szarski'nin "Differantial Inequalities", 1991 yılında Mitrinovic ve ark."Inequalities Involving Functions and Their Derivatives", 1963 yılında yine Mitrinovic ve ark.'ın "Classicaland New Inequalities in Analysis" isimli kitapları izler. Bunların dışında S. S. Dragomir, R. P. Agarwal, G. V. Milovanovic, C. P. Niculescu, C. E. M. Pearce, J. E. Pecaric, A. M. Fink, M. E. Özdemir, M. Z. Sarıkaya, E. Set, İ. İşcan, A. O. Akdemir, M. Tunç gibi bilim insanlarının da birçok çalışması literatürde mevcut.

Konvekslik kavramının ortaya çıkışı Archimedes' in, çemberin içine ve etrafına çizdiği düzgün çokgenler yardımıyla yaptığı 'pi' sayısı hesabına kadar dayanır. Bu çalışmaları sırasında Archimedes, herhangi bir konveks şeklin çevresinin, etrafına çizilen bütün diğer konveks şekillerin çevresinden daha küçük olduğunu fark etmiştir. Böylece konvekslik kavramı konveks şekiller etrafında gelişmiştir. Euler ve Descartes konveks çokgenler ile ilgili formüller üzerinde çalışmıştır. Daha sonra 1841'de Cauchy, konvekslik hakkında bazı özellikler vermiştir. Konveksliğin modern tanımı eşitsizlik tanımı içerdiğinden konveksliğin eşitsizliklerle birlikte çalışılması da doğal bir sonuç olmuştur.

Konveks fonksiyonların tarihi çok eskiye dayanmakla birlikte XIX. yüzyılın sonları olarak gösterilebilir. 1893'de Hadamard'ın çalışmasında açıkça belirtilmese de bu türden fonksiyonların temellerinden bahsedilmektedir. Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları ima eden sonuçlara rastlanılmasına rağmen, konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J. L. W. V. Jensen tarafından çalışılmıştır. Jensen' in bu, çalışmalarından itibaren Konveks Fonksiyonlar Teorisi hızlı bir gelişme göstermiştir. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak 1987 yılında Pecaric tarafından yazılan "Convex Functions: Inequalities" isimli kitaptır. Ayrıca 1973 yılında A. W. Roberts ve B. E. Vorberg

"Convex Functions", 1992 yılında Pecaric ve ark. "Convex Functions, Partial Ordering and Statistical Applications", 2006 yılında C. Niculescu ve L. E. Persson "Convex Functions and Their Applications, A Contempoarary Approach" gibi eserler konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizlikle ilgili yapılan çalışmalardır. Bu çalışmaların bir kısmını integral eşitsizlikleri oluşturmaktadır.

Niculescu ve Persson'a göre konveksliğin teorik ve uygulamalı matematik alanlarında geniş yer bulmasının iki önemli sebebi vardır:

1) Sınır değerlerinin birinde bir maksimum değeri vardır,
2) Her yerel minimum aynı zamanda global minimumdur. Ayrıca kesin konveks bir fonksiyonunun en fazla bir minumumu vardır.

1978 yılında R. Bellman, Almanya' da düzenlenen "Second International Conference on General Inequalities" isimli konferansta: "Neden Matematiksel Eşitsizlikler?" diye sorulan soruya şu cevabı vermiştir:

Eşitsizlik çalışmak için üç neden vardır. Bunlar:

1) Pratik Nedenler,
2) Teorik Nedenler,
3) Estetik Nedenlerdir.

Pratik nedenler açısından bakıldığında, birçok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak karşımıza çıkmaktadır. Klasik Eşitsizlikler de bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik nedenler açısından bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturabilir. Örneğin, negatif olmayan bir niceliğin ne zaman bir diğerini kapsadığı sorulabilir ve bu basit soru ile Pozitif Operatörler Teorisi ve Diferansiyel Eşitsizlikler Teorisi kurulur. Son olarak estetik nedenler açısından bakıldığından genelde resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir.

Biz bu çalışmada Eşitsizlik Teorisi'nin önemli bir kolu olan Grüss Tipli Eşitsizliklerin, Hilbert uzayında sınırlı, öz-eşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için elde edilen bazı özel eşitsizliklerini inceleyeceğiz. Bu incelemeler sayesinde Lineer Operatörler Teorisi ile Matematiksel Eşitsizliklerin çeşitli alanlarında çalışma yapmak ve kendi alanlarında uygulamak isteyen araştırmacılara yardımcı olacaktır.

Bu alanda yapılan önemli çalışmalardan bir tanesi 2011 yılında S. S. Dragomir tarafından yapılmıştır. Ayrıca Bauschke ve Combetles tarafından "Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces", Dragomir tarafından "Operator Inequalities of Ostrowski and Trapezoidal Type" ve bu teze temel kaynak olan "Operator Inequalities of the Jensen, Cebysev and Grüss Type" adlı kitaplar mevcuttur. Ayrıca literatürde Dragomir, Ghazanfari, Unluyol, Salaş, Erdaş ve daha birçok yazar bu alanda çalışmaktadır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Tanım (Lineer Uzay): L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. +:LxL→ L ve .:FxL→ L işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde bir lineer uzay(vektör uzayı) denir.

A) L,’’+’’ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1.Her x,y∈ L için x+y∈ $L\ dir.$

G2.Her x,y,z∈ $L\ için$ x(y+z)=(x+y)+z dir.

G3.Her x∈ L için x+$\theta = \theta + x = 0\ olacak\ şekilde\ \theta \in L$ vardır.

G4.Her x∈ L için x+y=y+x dir.

B)x,y∈ L ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha x \in L$ dir.

L2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ dir.

L3.($\alpha + \beta)\, x = \ \alpha x + \ \beta x\ dir.$

L4.($\alpha\beta)\, x = \alpha(\beta x)$ dir.

L5.1$x = x\ dir$. (Burada 1,F nin birim elemanıdır.)

$F = \mathbb{R}$ise L ye lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye karmaşık lineer uzay adı verilir.

2.2. Tanım: Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

2.3. Tanım: F bir cisim ve V ve W, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$vec $\in F$ olmak üzere T:V→ W dönüşümü,

$a)T(u + v) = T(u) + T(v)$

$b)T(cu) = cT(u)$şartlarını sağlıyorsa $T\ ye\ V$ üzerinde lineer dönüşüm denir.

2.4. Tanım: L bir lineer uzay $A \subset L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \qquad 0 \le \alpha \le 1\} \subset A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğindeki $x\ ve\ y$ nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki$\alpha, 1 - \alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları $x\ ve\ y$ olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir.

2.5. Tanım (Konveks fonksiyon): $I, \mathbb{R}\ de$ bir aralık ve f:$I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I\ ve\ \alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \le \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \qquad (1.1)$$

$şartını\ sağlayan,\ f$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

2.6. Teorem: f fonksiyonu [a,b] aralığında konveks ise

a)$f, (a, b)$ aralığında süreklidir ve

b)$f, [a, b]$ aralığında sınırlıdır.

2.7. Tanım (İç-çarpım uzayı): $F(\mathbb{R}\ veya\ \mathbb{C})$ olmak üzere, X bir vektör uzayı olsun. $<.,.>: XxX \to F$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise ‘’$<.,.>$’’ dönüşümüne X üzerinde bir iç-çarpım, (X, $<.,.>$) ikilisine de iç-çarpım uzayı denir:

1.$\forall x \in X\ için < x, x > \geq 0\ ve < x, x \geq 0 \Leftrightarrow x = 0_x$;
2.$\forall x, y \in X\ için < x, y > = <y,x>$;
3.$\forall x, y \in X\ ve\ \alpha \in F\ için < \alpha x, y > = \alpha < x, y >$
4. $\forall x, y, z \in X\ için < x + y, z > = < x, y > + < y, z >$.

2.8. Not: $F = \mathbb{R}$ olması halinde 2. Özellik $<x,y>=<y,x>$ olur. İç-çarpım tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu kolayca görebiliriz.

1. $\forall x, y, z \in X\ ve\ \forall \alpha, \beta \in F\ için < \alpha x + \beta y, z > = \alpha < x, y > + \beta < y, z >$,
2. $\forall x, y \in X\ ve\ \alpha \in F\ için < x, \alpha y > = \alpha < x, y >$,
3. $\forall x, y \in X$ve$\forall \alpha, \beta \in F\ için < x, \alpha y + \beta z > = \alpha < x, y > + \beta < y, z. >$.

2.9. Tanım (Norm): (X,$<.,.>$) bir iç çarpım uzayı olsun. Bir $x \in X\ vektör$ normu

$$\| x \| = < x, x >^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanan reel sayıya denir.

2.10. Tanım (Hilbert uzayı): (X, $<.,.>$) bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer bu iç-çarpım uzayı yukarıdaki norma göre tam ise, yani (X, $<.,.>$) bir iç çarpım uzayı içindeki her Cauchydizisibu norma göre yakınsak ise bu iç çarpıma bir ‘’Hilbert Uzayı’’ denir.

2.11. Tanım(Birim Operatör:) $A: X \to X$ operatörü verilsin. Eğer her $x \in X$ için $Ax = x$ ise A operatörüne birim(özdeşlik) operatör denir. $I,\ E\ ve\ I_X$ sembollerinden biriyle gösterilir.

2.12. Tanım (Sınırlı Operatör:) X ve Y iki normlu uzay olsun. A ise tanım kümesi $D(A) \subset X$ ve görüntü kümesi $R(A) \subset Y$ olan bir operatör olsun. Eğer A operatörü $D(A)$nın X’de sınırlı her kümesine $R(A)nın$ Y de sınırlı bir kümesini karşılık getiriyorsa A’ya ‘’sınırlı operatör’’ denir. Başka bir deyişle

$\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$, $her\ \ x \in D(A)$ olacak şekilde bir sabit c>0 sayısı varsa A'ya ''sınırlı operatör'' denir.

2.13. Tanım(Lineer Uzay:) X ve Y aynı F cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A: X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer D(A), X'in bir alt uzayı ve

$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \forall x, y \in D(A) ve\ \forall \alpha, \beta \in F$ise A'ya ''Lineer operatör'' denir.

2.14. Tanım (Eşlenik ve Özeşlenik Operatör:) A, H Hilbert uzayında sınırlı bir operatör olsun. Eğer her $f, g \in D(A) \subset H$ için;

$< Af, g >=< f, A^*g >$ sağlanıyorsa $A^*\ a\ A'nın$ ''eşlenik operatörü'' denir.

$Eğer\ D(A) = D(A^*)$ ve A=A^* ise bu A'ya özeşlenik operatör denir.

2.15. Tanım(Rezolventa:) H bir Hilbert uzayı ve $A: D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör olsun.

$\rho(A) := \{\lambda \in C: (A - \lambda E)^{-1} \in L(H)\}$ kümesine A operatörünün ''regüler değerler kümesi'' veya ''rezolvent kümesi'' denir.

$\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda; A) = (A - \lambda E)^{-1}$ operatörüne A operatörünün ''rezolventası'' veya ''çözücü operatörü'' adı verilir.

2.16. Tanım(Spektrum:) H bir hilbertızayı olsun.

$Sp(A) = \sigma(A) := C \setminus \rho(A)$ kümesine A operatörünün ''spektrumu'' denir. A operatörünün spektrum kümesi $''\sigma(A)''$ ve $''Sp(A)''$ile göstereceğiz.

2.17. Tanım(Operatörlerde Sıralama:) A ve B, H Hilbert uzayı üzerinde iki özeşlenik operatör olsun.

1. $A \leq B \Leftrightarrow < Ax, x > \leq < Bx, x >\ \ \forall x \in H;$

2. $A \geq 0$ ise A operatörüne pozitiftir denir.

2.18. Not: Eğer A özeşlenik operatör ve f de $Sp(A)$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon ise, bu durumda $t \in Sp(A) için\ f(t) \geq 0$dır. Buradan f(A)≥ $0, yani\ f(A)\ H$ Hilbert uzayı üzerinde pozitif bir operatördür. İlaveten eğer f ve g, $Sp(A)$ üzerinde iki fonksiyon ise aşağıdaki önemli özelliği sağlanır. Her $t \in Sp(A)\ için\ f(t) \geq g(t)$ dir. Buradan $f(A) \geq g(A)$ sağlanır.

2.19. Teorem: A, H Hilbert uzayı üzerinde sınırlı özeşlenik bir operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

m:=$inf_{\|x\|=1} < Ax, x >= \max\{\alpha \in R: \alpha E \leq A\}$;

M:=$sup_{\|x\|=1} < Ax, x >= \min\{\alpha \in R: A \leq \alpha E\}$;

ve

$$\|A\| = \max\{\|m\|, \|M\|\}.$$

Ayrıca m,M∈ $Sp(A) ve\ Sp(A) \subset [m, M]$.

2.20. Tanım(Operatör Konveks:) $A\ ve\ B$, spektrumları $I \subset \mathbb{R}$ da olan keyfi özeşlenik operatörler ve $\lambda \in [0,1]$ $olsun$. Bu durumda,

$$f\big((1-\lambda)A + \lambda B\big) \leq (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B)$$

eşitsizliğini sağlayan, I aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyona operatör konveks denir.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

3.1. Hilbert Uzayları Üzerinde Özeşlenik Operatörlerin Fonksiyonları

Bu kısımda kompleks Hilbert uzayları üzerinde sınırlı özeşlenik operatörlerle ilgili bazı temel bilgileri vereceğiz. Burada tüm operatörleri sınırlı olarak kabul edeceğiz. Dolayısıyla bundan sürekli bahsetmeyeceğiz, fakat üstü kapalı bir şekilde bunu anlayacağız.

Pozitif özeşlenik operatörler için genelleştirilmiş Schwarz eşitsizliği ayrıca bu sınıf operatörlerin spektrumları için bazı sonuçlar verildi. Bu durumda bir lineer operatörler de polinomlar için temel sonuçlar, bir özeşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları ve özeşlenik fonksiyonların basamak fonksiyonları ifade edildi. Bu sonuçları kullanarak, bu tezin merkezinde önemli bir rol oynayacak olan özeşlenik operatörlerin spektral ayrılışını (Spektral Gösterim Teoremi) da vereceğiz. Bu sonuç monotonik ya da mutlak sürekli, Lipschitzian, sınırlı varyasyonlu özeşlenik sürekli fonksiyonları için bazı eşitsizlikler vereceğiz.

3.2. Sınırlı Özeşlenik Operatörler

3.2.1. Operatörlerde Sıralama

$(H;\langle .,. \rangle)$ $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir Hilbert uzayı olsun. H üzerinde tanımlanan bir sınırlı lineer A operatörün özeşlenik olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in H$ için $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$ olmasıdır.

Başka bir ifade ile

$$A = A^* \Leftrightarrow \forall x \in H \text{ için } \langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R},\ A \text{ bir sınırlı lineer operatördür.}$$

Eğer A özeşlenik ise, o zaman

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Ax, y \rangle|. \tag{3.1}$$

yazabiliriz.

Bundan sonraki tüm operatörler tüm H Hilbert uzayı üzerinde tanımlı sınırlı operatörler olarak kabul edeceğiz. Ayrıca H üzerinde tanımlanan tüm sınırlı lineer operatörlerin Banach cebirini $B(H)$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.1. A ve B, H üzerinde bir özeşlenik operatör olsun. Eğer her $x \in H$ için $\langle Ax, x \rangle \le \langle Bx, x \rangle$ ise ,o zaman $A \le B$ ya da $B \ge A$ dır. Özel olarak eğer $A \ge 0$ ise A pozitif de denir.

Her $A \in B(H)$ operatörü için AA^* ve A^*A işlemleri H üzerinde pozitif özeşlenik operatörlerdir. AA^* ve A^*A operatörleri birbiri ile kıyaslanamaz.

Aşağıdaki teorem operatörlerde sıralamanın katılımı ile ilgilidir.

Teorem 3.2. $A, B, C \in B(H)$ özeşlenik operatörler ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. O halde

1. $A \le A$
2. Eğer $A \le B$ ve $B \le C$ ise, o zaman $A \le C$;
3. $A \le B$ ve $B \le A$ ise o zaman $A = B$;
4. $A \le B$ ve $\alpha \ge 0$ ise o zaman
$$A + C \le B + C, \alpha A \le \alpha B, -A \ge -B;$$
5. Eğer $\alpha \le \beta$ ise, o zaman $\alpha A \le \beta A$ dır.

A pozitif özeşlenik operatörler için Schwarz eşitsizliğinden genelleştirmesi, her $x, y \in H$ için

$$\left|\langle Ax, y\rangle\right|^2 \le \langle Ax, x\rangle\langle Ay, y\rangle \tag{3.2}$$

Yazabiliriz.

Teorem 3.3. A, H üzerinde bir pozitif özeşlenik operatör olsun. O halde her $x \in H$ için

$$\|Ax\|^2 \le \|A\|\langle Ax, x\rangle \tag{3.3}$$

Teorem 3.4. $A_n, B \in B(H)$ $n \ge 1$ için

$$A_1 \le A_2 \le \ldots \le A_n \le \ldots \le B.$$

Özelliği ile özeşlenik operatör olsun. O zaman her $n \ge 1$ için

$$A_n \le A \le B$$

Olacak şekilde H üzerinde tanımlı bir sınırlı özeşlenik A operatörü vardır. Ayrıca her $x \in H$ için

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$$

Dir.

Eğer $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi alttan sınırlı ve azalan ise benzer teoremi verebiliriz.

$$\|A_m x - A_n x\| \le \|A_m - A_n\|\|x\|$$

Eşitsizliğinden, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin A 'ya düzgün yakınsaması, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ nın A 'ya düzgün yakınsamasını gösterir. Ancak nu iddianın tersi yanlıştır.

Ayrıca $B(H)$ 'da her $x, y \in H$ için

$$\lim_{n\to\infty} \langle A_n x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle \Leftrightarrow (w)\lim_{n\to\infty} A_n = A$$

Şeklinde zayıf yakınsamayı da tanımlayabiliriz.

Tanım 3.5. Eğer her $x \in H$ için $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax$ ise, o zaman $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B(H)$, $A \in B(H)$ operatörü güçlü yakınsaktır. Bu da $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin güçlü limiti olarak adlandırılır. Ve $(s)\lim_{n\to\infty} A_n = A,$ ile gösterilir.

Normda yakınsama yani $\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$ güçlü yakınsaklığın karşıtı

olarak "düzgün yakınsama" olarak adlandırılacak. Normda yakınsama $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ ile gösterilir. Her $n, m \in \mathbb{N}$ ve $x \in H$ için

Teorem 3.6. A, H üzerinde sınırlı bir özeşlenik operatör olsun. O zaman

$$\alpha_1 := \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle = \max \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \mathrm{I} \le A \};$$

$$\alpha_2 := \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle = \min \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid A \le \alpha \mathrm{I} \};$$

Ve

$$\|A\| = \max \{ |\alpha_1|, |\alpha_2| \}.$$

İlaveten, eğer $Sp(A)$ ile A'nın spektrumunu gösterirsek, o zaman $\alpha_1, \alpha_2 \in Sp(A)$ ve $Sp(A) \subset [\alpha_1, \alpha_2]$. dir.

Sonuç 3.7. Eğer A, α_1, α_2 yukarıdaki şartlara sahipse, o zaman kesinlikle

$$\alpha_1 = \min \{ \lambda | \lambda \in Sp(A) \} =: \min Sp(A);$$

$$\alpha_2 = \max \{ \lambda | \lambda \in Sp(A) \} =: \max Sp(A);$$

$$\|A\| = \max \{ |\lambda| \lambda \in Sp(A) \}.$$

doğrudur.

Ayrıca

1. A'nın pozitif olması için gerekli ve yeterli koşul $\alpha_1 \ge 0$ olması;
2. A'nın pozitif ve terslenebilmesi için gerekli ve yeterli şart $\alpha_1 > 0$ olması;
3. Eğer $\alpha_1 \ge 0$ ise o zaman A^{-1} bir pozitif özeşlenik operatör ve $\min Sp(A^{-1}) = \alpha_2^{-1}, \max Sp(A^{-1}) = \alpha_1^{-1}$ dir.

3.3. Özeşlenik Operatörlerin Sürekli Fonksiyonları

3.3.1. Bir Sınırlı Operatörlerde Polinomlar

$\alpha, \psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ iki fonksiyon için, toplama, skalerle çarpım ve bu fonksiyonların çarpımı

$$(\alpha+\psi)(s) := \alpha(s)+\psi(s)$$

$$(\lambda\varphi)(s) := \lambda\varphi(s),$$

$$(\varphi\psi)(s) := \alpha(s)\psi(s)$$

Şeklinde tanımlanan $\bar{\varphi}(s)$ ile $\alpha(s)$ 'nin kompleks eşleniğini göstereceğiz.

Fonksiyonların bir sınıfı olarak kompleks sabitlerle bir değişkenli tüm polinomların cebirini P, yani

$$P := \left\{ \alpha(s) := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k s^k \,\middle|\, n \geq 0, \alpha_k \in \mathbb{C}, 0 \leq k \leq n \right\}.$$

Olarak alalım.

Teorem 3.8.

$A \in B(H)$ ve $\alpha(s) := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k s^k \in P$ için $\alpha(A) := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k \in B(H)\left(A^0 = 1\right)$ ve $\bar{\alpha}(A) := \sum_{k=0}^{n} \bar{\alpha}_k \left(A^*\right)^k \in B(H)$. şeklinde tanımlayalım. O zaman

$\varphi(s) \to \varphi(A)$ dönüşümü

(a) $(\varphi+\psi)(A) = \varphi(A)+\psi(A)$;

(b) $(\lambda\varphi)(A) = \lambda\varphi(A)$;

(c) $(\varphi\psi)(A) = \varphi(A)\psi(A)$;

(d) $\left[\varphi(A)\right]^* = \bar{\varphi}(A)$.

Özelliklerine sahiptir.

$\varphi(A)\psi(A) = \psi(A)\varphi(A)$ ve $\varphi(s) = \alpha_0$ sabit polinomu operatör içinde bir dönüşümdür.

Bir U cebirinden U cebirine yani $a \to a'$ dönüşümü

(a) $(a+b)' = a'+b'$;

(b) $(\lambda\varphi)' = \lambda a'$;

(c) $(ab)' = a'b'$.

Şartlarını sağlarsa buna bir homomorfizm denir.

Bu terminolojiyle, keyfi $\varphi(s)$ polinomuyla $\varphi(A)$ operatör dönüşümü teroem1.8 iddiasına göre $B(H)$ içinde P ’nin bir homomorfizimidir. İlaveten d özelliğini sağlar.

Aşağıdaki teorem $\varphi(A)$ operatörünün spektrumu ve A nın spektrumu arasındaki bağlantıyı verir.

Teorem 3.9. Eğer $A \in B(H)$, ve $\varphi \in P$ ise o zaman $Sp(\varphi(A)) = \varphi(Sp(A))$. dır.

Sonuç 3.10. Eğer $A \in B(H)$, öz eşlenik ve $\varphi(s) \in P$ polinomu reel katsayıya sabit ise, o zaman $\varphi(A)$ öz eşlenik ve

$$\|\varphi(A)\| = \max\{|\varphi(\lambda)|, \lambda \in Sp(A)\}. \tag{3.4}$$

Sonuç 3.11. Eğer $A \in B(H)$ ve $\varphi \in P$ ise, o zaman

1. $\varphi(A)$ ’nın terslenebilir olması için gerek ve yeterli koşul her $\lambda \in Sp(A)$ için $\varphi(\lambda) \neq 0$ olmasıdır;
2. Eğer $\varphi(A)$ terslenebilir ise, o zaman $Sp\left(\varphi(A)^{-1}\right) = \left\{\varphi(\lambda)^{-1}, \lambda \in Sp(A)\right\}$ dır.

3.3.2 Özeşlenik Operatörlerin Sürekli Fonksiyonları

Kabul edelim ki A, H Hilbert uzayında bir sınırlı öz eşlenik operatör olsun. Eğer φ, □ üzerinde tanımlanan herhangi bir fonksiyon ise, o zaman

$$\|\varphi\|_A = \sup\{|\varphi(\lambda)|, \lambda \in Sp(A)\}.$$

yazabiliriz.

Eğer φ sürekli ise, özel olarak φ polinomu ise, o zaman supremumu gerçekten kompakt olan $Sp(A)$ da bazı noktalar olarak kabul edebiliriz. Bu yüzden bu supremumu bir maksimum olarak yazabilir ve (3.4) $\|\varphi(A)\| = \|\varphi\|_A$ şeklinde yazılabilir.

□ üzerinde tanımlanan tüm sürekli kompleks değerli fonksiyonların $C(□)$ cebirini göz önüne alalım. Sürekli fonksiyonel hesapları için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.12. Eğer A, H Hilbert uzayında bir sınırlı özeşlenik operatör ve $\varphi \in C(□)$, ise bu takdirde $\lim_{n\to\infty} \|\varphi - \varphi_n\|_A = 0$, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P$ dizisi ile bir tek $\varphi(A) \leq B(H)$ operatörü vardır, bu durumda $\varphi(A) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(A)$ dır. $\varphi \to \varphi(A)$ dönüşümü $\|\varphi(A)\| \leq 2\|\varphi\|_A$ .ve $\|\varphi(A)\|^* = \overline{\varphi}(A)$ ek özellikleri ile $B(H)$ içinde $C(□)$

cebirinin bir homomorfizimidir. İlaveten, $\varphi(A)$ normal operatördür yani $\left[\varphi(A)\right]^{*}\varphi(A)=\varphi(A)\left[\varphi(A)\right]^{*}$ dır. Eğer φ reel değerli ise o zaman $\varphi(A)$ öz eşleniktir.

Örnek olarak, eğer $A\in B(H)$ özeşlenik ve $\varphi(s)=e^{is}, s\in\mathbb{R}$ ise bu durumda

$$e^{iA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(iA)^{k}.$$

İlaveten e^{iA} üniter bir operatör ve onun tersi de

$$\left(e^{iA}\right)^{*}=e^{-iA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-iA)^{k}.$$

Operatördür.

Şimdi, eğer $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}, A\in B(H)$ özeşlenik ve $\varphi(s)=\dfrac{1}{s-\lambda}\in C(\mathbb{R})$, ise o zaman $\varphi(A)=(A-\lambda I)^{-1}$.

Eğer $A\in B(H)$ özeşlenik operatör ve $\varphi,\psi\in C(\mathbb{R})$ verilen iki fonksiyon ise o zaman $\varphi(A)\psi(A)=\psi(A)\varphi(A)$ özelliğini verebiliriz. Bu özelliği bir diğer operatör için aşağıdaki teoreme genişletebiliriz. Örnek için [2,p.235]:

Teorem 3.13. Kabul edelim ki $A\in B(H)$ ve $\varphi\in C(\mathbb{R})$ fonksiyonu verilsin. Eğer $B\in B(H), AB=BA$ şartını sağlayan bir operatör ise bu durumda $\varphi(A)B=B\varphi(A)$ dır.

Aşağıdaki teorem, sürekli fonksiyonların durumunda Teorem 2.9 genişlemesidir. Örnek için 2,p.235]:

Teorem 3.14. Eğer A, H Hilbert uzayı üzerinde sınırlı özeşlenik bir operatör ve φ sürekli ise, o zaman $Sp(\varphi(A))=\varphi(Sp(A))$dır.

Bu teoremin aşağıdaki sonuçlarını verelim.

Sonuç 3.15. Yukarıdaki teoremin şartlarıyla

(a) $\varphi(A)$ özeşlenik olması için gerekli ve yeterli koşul her $\lambda\in Sp(A)$ için $\varphi(\lambda)\in\mathbb{R}$ olmasıdır.

(b) $\varphi(A)$ operatörünün üniter olması için gerekli ve yeterli koşul her $\lambda \in Sp(A)$ için $|\varphi(\lambda)| = 1$ olmasıdır.

(c) $\varphi(A)$ operatörünün terslenebilir olması gerekli ve yeterli koşul $\lambda \in Sp(A)$ için $\varphi(\lambda) \neq 0$ olmasıdır.

(d) Eğer $\varphi(A)$ özeşlenik ise, o zaman $\|\varphi(A)\| = \|\varphi\|_A$ dır.

Özeşlenik operatörlerin fonksiyonlarında eşitliklerini geliştirmek için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.16. A, H Hilbert uzayında bir sınırlı bir özeşlenik operatör olsun. $B(H)$ içinde $C(\mathbb{R})$ nın $\varphi \to \varphi(A)$ homomorfizmi sıralamayı korur yani eğer $\varphi, \psi \in C(\mathbb{R})$, $Sp(A)$ üzerinde bir reel değerli ve $\lambda \in Sp(A)$ için, $\varphi(A) \geq \psi(\lambda)$ ise o zaman $B(H)$ ın operatör sıralamasında

$$\varphi(A) \geq \psi(A) \tag{P}$$

H üzerinde bir pozitif sınırlı özeşlenik operatörün karekökünü aşağıda tanımlayacağız.

Teorem 3.17. Eğer $A \in B(H)$ operatörü pozitif ve özeşlenik ise, o zaman $B^2 = A$ olacak şekilde,

$B := \sqrt{A} \in B(H)$ şeklinde bir tek pozitif özeşlenik operatör vardır. Eğer A terslenebilir ise, o zaman B de terslenebilirdir.

Eğer $A \in B(H)$ ise, o zaman A^*A operatörü özeşlenik ve pozitiftir. $|A| := \sqrt{A^*A}$ operatöre mutlak değerli denir.

Teorem 3.18. H üzerinde, her A sınırlı lineer operatör için, $B = |A| \in B(H)$ bir pozitif öz eşlenik operatörü, $\Re_C = C(D_C) = \overline{A(H)}$ görüntü kümesi ve $D_C = \overline{B(H)}$ tanım kümesi ile bir izometrik bir C operatörü vardır. Öyle ki $A = CB$ dir.

Sonuç 3.19. Eğer $A \in B(H)$ operatörü normal ise, o zaman $B = |A| \in B(H)$ pozitif öz eşlenik operatör ve $A = BC = CB.$ olacak şekilde bir üniter operatörü vardır. Dahası, eğer A terslenebilir ise, o zaman B ve C bu şartlar altında tek bir şekilde tanımlanır.

Sonuç 3.20. Şimdi kabul edelim ki $B \in B(H)$ için $A = CB$ bir pozitif özeşlenik operatör ve C bir izometrik bir operatör olsun. O zaman

(a) $B = \sqrt{A^* A}$ dır. Sonuç olarak B gerekli şartlarla tek bir şekilde tanımlanır.

(b) C nin gerekli koşullar altında tek bir şekilde tanımlanması için gerekli ve yeterli koşul, A nın birebir olmasıdır.

3.4 Özeşlenik Operatörlerin Basamak Fonksiyonları

A, H Hilbert uzayında bir sınırlı öz eşlenik operatör olsun. Şimdi reel değerli fonksiyonlara kısıtlanmış, $B(H)$ içinde $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan sürekli fonksiyonların $C(\mathbb{R})$ cebirinin $\varphi \to \varphi(A)$ homomorfizminde sıra korumayı genişletmek için daha geniş bir tanım kümesine ihtiyacımız vardır. Yani $\varphi_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_\lambda(s) := \begin{cases} 1, & -\infty < s \le \lambda \\ 0, & \lambda < s < +\infty \end{cases}$$

Şeklinde tanımlanan adım fonksiyonları içeren fonksiyonların bir cebirine ihtiyacımız vardır.

$\overline{\varphi}_\lambda(s) = \varphi_\lambda(s)$ ve $\varphi_\lambda^2(s) = \varphi_\lambda(s)$ ile $[\varphi_\lambda(A)]^* = \varphi_\lambda(A)$ ve $[\varphi_\lambda(A)]^2 = \varphi_\lambda(A)$ göstereceğiz, yani $\varphi_\lambda(A)$ o zaman bir projeksiyon olacaktır. Ancak, $\varphi_\lambda(A)$ fonksiyonu, her λ içeren aralık üzerinde, sürekli fonksiyonlarla düzgün yaklaşmadığı için genel olarak, bir $\varphi_\lambda(A)$ operatörünü $\varphi_{\lambda,n} \in C(\mathbb{R})$ olan $\varphi_{\lambda,n}(A)$ operatörünü bir düzgün limiti olarak tanımlananın bir yolu yoktur.

Operatörlerin düzgün bir limiti $\varphi_\lambda(A)$ operatörünü tanımlamak için operatörlerin güçlü limit kavramını anlamamızı sağlayacaktır. Bunu yapabilmek için φ_λ fonksiyonu

$$\varphi_\lambda(s) := \begin{cases} 1, & -\infty < s \le \lambda \\ 1 - n(s-\lambda), & \lambda \le s \le \lambda + 1/n \\ 0, & \lambda < s < +\infty \end{cases}$$

Şeklinde tanımlanan $\varphi_{\lambda,n}$ reel değerli sürekli fonksiyonların bir azalan dizisinin noktasal bir limiti olarak elde edildiğini gözlemleriz.

Teorem 3.4 de $\varphi_{\lambda,n}(A)$ da karşılık gelen öz eşlenik operatörü azalmayan ve $B(H)$ nın sıralama operatöründe alttan sıfırla sınırlıdır. Bu yüzden o H üzerinde $\varphi_{\lambda}(A)$ bazı sınırlı öz eşlenik operatörleri için güçlü bir şekilde yakınsar.

Yukarıdaki ifadeyi göstermek için, aşağıdaki tanımı vermemiz gerekir.

Tanım 3.21. φ, $\mathbb{R}$ üzerinde reel değerli bir fonksiyonu eğer $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli reel değerli fonksiyonların artmayan bir dizisinin noktasal limiti ise o zaman üstten yarı – süreklidir denir.

φ, $\mathbb{R}$ üzerinde bir reel değerli fonksiyonun üstten yarı sürekli olması için gerekli ve yeterli ve yeterli koşul her $s_0 \in \mathbb{R}$, her $\varepsilon > 0$ için

$$\varphi(s) < \varphi(s_0) + \varepsilon, \text{ her } s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$$

Şartını sağlayan bir $\delta > 0$ sayısının var olmasıdır.

Şimdi $\varphi(A)$ operatörünü aşağıdaki gibi göstereceğiz.

Teorem 3.22. *A, H* Hilbert uzayı üzerinde sınırlı bir özeşlenik operatör ve φ, $\mathbb{R}$ üzerinde üstten yarı sürekli negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $C(\mathbb{R})$ de negatif olmayan fonksiyonların keyfi bir artmayan dizisi olmak üzere φ nin $Sp(A)$ üzerinde noktasal yakınsayacak şekilde bir tek pozitif özeşlenik $\varphi(A)$ operatörü vardır.

Eğer φ sürekli ise, o zaman üstteki teoremle tanımlanan bir tanımla teorem 3.12 deki operatör tanımı çakışır.

Teorem 3.23. $A \in B(H)$ özeşlenik, φ ve ψ, $\mathbb{R}$ üzerinde negatif olmayan üstten sürekli fonksiyonlar, $\alpha > 0$ olarak verilsin. O halde $\varphi + \psi, \alpha\varphi$ ve $\varphi\psi$ negatif olmayan üstten yarı sürekli ve $(\varphi + \psi)(A) = \varphi(A) + \psi(A), (\alpha\varphi)(A) = \alpha\varphi(A)$ ve $(\varphi\psi)(A) = \varphi(A)\psi(A)$ dır. İlaveten, her $s \in Sp(A)$ için $\varphi(s) \le \psi(s)$ ise o zaman $\varphi(A) \le \psi(A)$ dır. φ_1, φ_2 negatif olmayan ve $\mathbb{R}$ üzerinde üstten yarı sürekli fonksiyonlar olmak üzere, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ tüm fonksiyonların kümesi olarak $\Re(\mathbb{R})$

cebirini tanımlayarak negatif olmayan üstten yarı sürekli fonksiyonların sınıfını genişletelim. Ayrıca $\Re(\mathbb{R})$ noktasal toplam, skalerle çarpım çarpımla bir cebirdir. $\Re(\mathbb{R})$ ifadesi ile $\varphi(A)$ operatörleri fonksiyonları ile ilgili teoremi aşağıda vereceğiz.

Teorem 3.24: $A \in B(H)$ özeşlenik ve $\varphi \in \Re(\mathbb{R})$ olsun. O halde bir tek $\varphi(A) \in B(H)$ özeşlenik operatörü vardır. Öyle ki eğer φ_1, φ_2 negatif olmayan ve $\mathbb{R}$ üzerinde yarı sürekli fonksiyonları için $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ise, o zaman $\varphi(A) = \varphi_1(A) - \varphi_2(A)$ dır. $\varphi \to \varphi(A)$ dönüşümü, eğer $\varphi, \psi \in \Re(\mathbb{R})$ her $s \in Sp(A)$ için $\varphi(s) \le \psi(s)$ özelliğine sahipse, o zaman $\varphi(A) \le \psi(A)$ dır. Şartını sağlarsa $B(H)$ içinde $\mathbb{R}$ üzerinde bir homomorfizimidir. İlaveten eğer $B \in B(H)$, $AB = BA$ değişkenlik durumu sağlarsa, o zaman $\varphi(A)B = B\varphi(A)$ dır.

3.5. Özeşlenik Operatörlerin Spektral Ayrılışı

$A \in B(H)$ özeşlenik ve φ_λ, her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\varphi_\lambda(s) := \begin{cases} 1, & -\infty < s \le \lambda \\ 0, & \lambda < s < +\infty \end{cases}$$

olarak tanımlansın. O zaman her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$E_\lambda := \varphi_\lambda(A) \tag{3.5}$$

operatörü bir projeksiyondur. Bu projeksiyonun özellikleri, Hilbert uzayında sınırlı özeşlenik operatörlerin spektral ayrılışı ile ilgili aşağıdaki temel teoremi vereceğiz.

Teorem 3.25 (Spektral Gösterim Teoremi)

A, H Hilbert uzayı üzerinde bir sınırlı özeşlenik operatör

$$m = \min\{\lambda | \lambda \in Sp(A)\} =: \min Sp(A)$$

ve

$$M = \max\{\lambda | \lambda \in Sp(A)\} =: \max Sp(A)$$

olsun. O halde

(a) $\lambda \le \lambda'$ için $E_\lambda \le E_{\lambda'}$ 'i

(b) $\quad E_{m-0} = 0,\ E_M = I$ ve $\lambda \in \mathbb{R} \quad E_{\lambda+0} = E_\lambda$

(c) $$A = \int_{m-0}^{M} \lambda dE_\lambda . \tag{3.6}$$

şartları altında, A'nın spektral ailesi olarak adlandırılan $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ projeksiyonların bir ailesi vardır.

Daha genel bir şekilde , $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı her φ sürekli fonksiyonu ve her $\varepsilon > 0$ için, $\delta > 0$ vardır. Öyle ki

$$\left\| \varphi(A) - \sum_{k=1}^{n} \varphi(\lambda'_k)\left[E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}\right] \right\| \le \varepsilon \tag{3.7}$$

şartıyla

$$\begin{cases} \lambda_0 < m = \lambda_1 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = M , \\ \lambda_k - \lambda_{k-1} \le \delta \;\; ise \;\; 1 \le k \le n, \\ \lambda_{k'} \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k] \;\; ise 1 \le k \le n, \end{cases} \tag{3.8}$$

dir. Bu da şu anlama gelir;

$$\varphi(A) = \int_{m-0}^{M} \varphi(\lambda)\, dE_\lambda , \tag{3.9}$$

İntegrali, Riemann-Stieltjes integralidir.

Sonuç 3.26. A için yukarıdaki teoremin şartlarıyla ve E_λ , φ için

Her $x \in H$

$$\varphi(A)x = \int_{m-0}^{M} \varphi(\lambda) dE_\lambda x \tag{3.10}$$

ve her $x, y \in H$

$$\langle \varphi(A)x, y \rangle = \int_{m-0}^{M} \varphi(\lambda) d \langle E_\lambda x, y \rangle \tag{3.11}$$

Gösterimlerini yazabiliriz. Özel olarak her $x \in H$ için

$$\langle \varphi(A)x, x \rangle = \int_{m-0}^{M} \varphi(\lambda) d \langle E_\lambda x, x \rangle \tag{3.12}$$

Eşitliğini yazabiliriz.

İlaveten, her $x \in H$ için

$$\|\varphi(A)x\|^2 = \int_{m-0}^{M} \left|\varphi(\lambda)^2 \, d\|E_\lambda x\|^2\right| \tag{3.13}$$

Teorem 3.27. A, H Hilbert uzayında sınırlı bir özeşlenik operatör ve $m = \min Sp(A)$, $M = \max Sp(A)$ olsun. Eğer $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ (a),(b) ve (c) yukarıdaki teoremin şartları altında projeksiyonların bir ailesi ise, o zaman her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $F_\lambda = E_\lambda$ dır. Burada E_λ (2.5) tarafından tanımlandı

Yukarıdaki iki teoremde $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ spektral ailesi tek bir şekilde tanımlanır ve sınırlı özeşlenik A operatörü tarafından da tek bir şekilde tanımlanabilir. Aynı zamanda spektral aile A operatörünün özelliklerini direkt yolla yansıtır.

Teorem 3.28. $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, sınırlı özeşlenik A operatörünün spektral ailesi olsun. Eğer B, H üzerinde bir sınırlı lineer operatör ise, o zaman tüm $\lambda \in \mathbb{R}$ için $E_\lambda B = BE_\lambda$ olması için gerekli ve yeterli koşul $AB = BA$ olmasıdır. Özel olarak, her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $E_\lambda A = AE_\lambda$ dır.

Teorem 3.29. $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, bir sınırlı özeşlenik A operatörünün spektral ailesi ve $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman

(a) μ, A'nın bir regüler değeridir. Yani $A - \mu I$ terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $E_{\mu-\theta} = E_{\mu+\theta}$ olacak şekilde bir $\theta > 0$ var olmasıdır.

(b) $\mu \in Sp(A)$ olması için gerek ve yeter koşul her $\theta > 0$ için $E_{\mu-\theta} < E_{\mu+\theta}$ olmasıdır.

(c) μ, A'nın bir öz değeri olması için gerek ve yeter koşul $E_{\mu-\theta} < E_\mu$ olmasıdır.

Aşağıdaki teorem Hilbert uzaylarında, sınırlı özeşlenik operatörler için eşitsizlikler ile ilgili önemli bir rol oynayacaktır.

Teorem 3.30. (Total Varyasyonlu Schwarz Eşitsizliği) $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, sınırlı özeşlenik A operatörünün spektral ailesi $m = \min Sp(A)$ ve $M = \max Sp(A)$ olsun. O zaman her $x, y \in H$ için $\lambda \to \langle E_\lambda x, y\rangle$ fonksiyonu sınırlı varyasyonlu ve

$$\bigvee_{m-0}^{M}\left(\langle E.x,y\rangle\right)\leq\|x\|\|y\|. \qquad (TVSI)$$

eşitliğini yazabiliriz.

İspat. Eğer P , H üzerinde bir negatif olmayan özeşlenik operatör ise, yani her $x\in H$ için $\langle Px,x\rangle\geq 0$ ise o zaman her $x,y\in H$ için aşağıdaki

$$\left|\langle Px,x\rangle\right|^{2}\leq\langle Px,x\rangle\langle Py,y\rangle \qquad (3.14)$$

eşitsizliği, Schwarz eşitsizliğinin bir genelleştirmesidir.

Şimdi, eğer $d:m-s=t_0<t_1<...<t_{n-1}<t_n=M$, $s>0$ için $[m-s,M]$ aralığının da keyfi parçalanışı ise o zaman (1.14) ..den negatif olmayan operatörler için

$$\begin{aligned}\bigvee_{m-s}^{M}\left(\langle E.x,y\rangle\right)&=\sup_{d}\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\left|\left\langle\left(E_{t_i+1}-E_{t_i}\right)x,y\right\rangle\right|\right\}\\&\leq\sup_{d}\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\left[\left\langle\left(E_{t_i+1}-E_{t_i}\right)x,x\right\rangle^{1/2}\left\langle\left(E_{t_i+1}-E_{t_i}\right)y,y\right\rangle^{1/2}\right]\right\}\\&:=I \qquad (3.15)\end{aligned}$$

Schwarz eşitsizliğini yazabiliriz.

Reel sayıların dizileri için Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz eşitsizliğinden ayrıca her $x,y\in H$

$$\begin{aligned}I&\leq\sup\left\{\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left\langle\left(E_{t_i+1}-E_{t_i}\right)x,x\right\rangle\right]^{1/2}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left\langle\left(E_{t_i+1}-E_{t_i}\right)y,y\right\rangle\right]^{1/2}\right\}\\&\leq\sup_{d}\left\{\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left\langle\left(E_{t_i+1}-E_{t_i}\right)x,x\right\rangle\right]^{1/2}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left\langle\left(E_{t_i+1}-E_{t_i}\right)y,y\right\rangle\right]^{1/2}\right\}\\&=\left[\bigvee_{m-s}^{M}\left(\langle E.x,x\rangle\right)\right]^{1/2}\left[\bigvee_{m-s}^{M}\left(\langle E.y,y\rangle\right)\right]^{1/2}\end{aligned} \qquad (3.16)$$

Eşitsizliğini yazabiliriz.

(3.15) ve (3.16) ve $s\to 0$ kullanılarak istenilen $(TVSI)$ sonucunu elde etmiş oluruz.

3.5.1 Operatör Monoton ve Operatör Konveks Fonksiyonlar

Eğer A ve B, $A \leq B$ ve $Sp(A), Sp(B) \subset I$ ile sınırlı özeşlenik operatör ise o zaman $f(A) \leq f(B)$ dir. Yani, operatörlerde sıralama ile monoton ise o zaman bir I aralığı üzerinde tanımlanan f reel değerli sürekli fonksiyonu operatör monotondur.

Eğer her A, B, $Sp(A), Sp(B) \subset I$ ile sınırlı özeşlenik operatörler her $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left[(1-\lambda)A + \lambda B\right] \leq (\geq)(1-\lambda) f(A) + \lambda f(B) \tag{3.17}$$

İse, o zaman fonksiyona operatör konveks(operatör konkav) denir

Örnek 3.31

1- $f(t) = \alpha + \beta t$ afin fonksiyonu her $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\beta \geq 0$ için her aralık üzerinde operatör monotondur. O her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için operatör konvekstir.

2- Eğer f, g operatör monoton ve $\alpha, \beta \geq 0$ ise, o zaman $\alpha f + \beta g$ lineer kombinasyonu ayrıca operatör monotondur. Eğer f_n fonksiyonları operatör monoton ve $n \to \infty$ $f_n(t) \to f(t)$ ise o zaman f ayrıca operatör monotondur.

3- $f(t) = t^2$ fonksiyonu her aralık üzerinde operatör konvekstir, ancak $[0, \infty)$ aralığı üzerinde monoton azalmayan olmasına rağmen bu aralık üzerinde monoton operatör monoton değildir.

4- $f(t) = t^3$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığı üzerinde konveks fonksiyon olmasına rağmen bu aralık üzerinde operatör konveks değildir.

5- $f(t) = \frac{1}{t}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığı üzerinde operatör konvekstir ve $f(t) = -\frac{1}{t}$, $(0, \infty)$ aralığı üzerinde operatör monotondur.

6- $f(t) = \ln t$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığı üzerinde operatör monoton operatör konkavdır.

7- $f(t) = -t \ln t$ entropy fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığı üzerinde operatör konkavdır.

8- $f(t) = e^t$ üstel fonksiyonu $\mathbb{R}$ nin her aralığı üzerinde ne operatör konveks ne de operatör monotondur.

3.6. Cebysev'in Eşitsizliği

3.6.1. Reel Sayılar için Cebysev'in Eşitsizliği

$a,b\in\mathbb{R}^n$ ve $P_n:=\sum_{i=1}^{n}p_i>0,\;\; p=(p_1,...p_n)$ negatif olmayan bir dizi olarak alalım. O halde ağırlıklı Cebysev'in fonksiyonelini

$$T_n\left(p;a,b\right):=\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n}p_ia_ib_i-\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n}p_ia_i.\sum_{i=1}^{n}p_ib_i \tag{3.18}$$

Şeklinde tanımlanır.

1882-1883 yıllarında, eğer ve a ve b monotonik ise, o zaman

$$T_n\left(p;a,b\right)\geq(\leq)0. \tag{3.19}$$

Eşitsizliğini Cebysev'in ispatladı.

(3.19) eşitsizliği Hordy, Litlewood ve Polya'nın kitabında bahsedilmiştir. Ayrıca keyfi $i,j\in\{1,...n\}$ için

$$\left(a_i-a_j\right)\left(b_i-b_j\right)\geq(\leq)0 \tag{3.20}$$

Şartını sağlayan a,b synchronous (asynchronous) dizisinin genel durumu için de (3.19) eşitsizliğinin sağlandığını görebiliriz.

1951 yılında M.Biernach tarafından Synhronicityin bir bağlantı şartı aşağıdaki şekilde ispat edilmiştir. Yani; eğer $k=1,...n-1, P_k:=\sum_{i=1}^{k}p_i$ için

$$\frac{1}{P_k}\sum_{i=1}^{k}p_ia_i\leq(\geq)\frac{1}{P_{k+1}}\sum_{i=1}^{k+1}p_ia_i,\quad k\in\{1,2...,n-1\} \tag{3.21}$$

ve

$$\frac{1}{P_k}\sum_{i=1}^{k}p_ib_i\leq(\geq)\frac{1}{P_{k+1}}\sum_{i=1}^{k+1}p_ib_i \tag{3.22}$$

Şartlarını sağlayan a,b aynı yönlü monotonları için "$\geq$" eşitsizliği altında (3.19) sağlanır. Benzer şekilde, zıt yönlü a,b monotonları için ise "$\leq$" eşitsizliği altında (3.19) sağlanır.

Eğer p'nin bileşenleri için negatif olmayanların durumuna indirgemek istiyorsak bu durumda 1991 yılında Mitrinovic ve Pecoric tarafından elde edilen aşağıdaki eşitsizliği kullanabiliriz.

Yani eğer her bir $i \in \{1,...n-1\}$ için $0 \le p_i \le p_n$ bu durumda a ve b aynı monotonlu diziler için

$$T_n(p\,;a,b) \ge 0\,, \tag{3.23}$$

Eşitsizliği doğrudur. Fakat eğer, zıt durumdaki a ve b monoton dizileri için (3.23) işaretinin eşitsizliği tersine döner.

3.6.2. Bir Operatör İçin Cebysev Eşitsizliğinin Bir Versiyonu

Bu kısmın esas amacı farklı durumlarda Cebysev eşitsizliği için Operatör durumunu incelemektir.

Eğer her $t,s \in [a,b]$ için

$$\left(f(t)-f(s)\right)\left(g(t)-g(s)\right) \ge (\le) 0$$

Şartı sağlanıyorsa $f,g:[a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde synchronous (asynchronous) fonksiyon olduğunu biliyoruz.

Eğer f,g monotonik ve $[a,b]$ aralığı üzerinde aynı monocity ise, o zaman f,g $[a,b]$ üzerinde synchronous olduğu açıktır. Ayrıca eğer zıt monocity ise f,g $[a,b]$ üzerinde asynchronoustur.

Bir iç çarpım uzayında vektörlerin synchronous(synchronous) için ayrık Cebysev eşitsizliğinin bazı gelişmelerini literatürde bulabiliriz.

Aşağıdaki teorem öz eşlenik operatörlerin fonksiyonları için Cebysev tipli bir eşitsizliği göstermektedir.

Teorem 3.32 A, $m < M$ bazı reel sayılar için

$Sp(A) \subseteq [m,M]$ ile öz eşlenik operatör olsun. Eğer $f,g:[m,M] \to \mathbb{R}$ $[m,M]$ üzerinde sürekli ve synchronous(asynchronous) ise, o zaman her $x \in H$, $\|x\| = 1$ için

$$\left\langle f(A)g(A)x,x\right\rangle \geq (\leq)\left\langle f(A)x,x\right\rangle.\left\langle g(A)x,x\right\rangle \tag{3.24}$$

Eşitsizliği doğrudur.

İspat. Biz burada sadece synchronous fonksiyon durumunu inceleyeceğiz. Bu durumda, her $t,s\in[a,b]$ için

$$f(t)g(t)+f(s)g(s)\geq f(t)g(s)+f(s)g(t) \tag{3.25}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Eğer (3.25) eşitsizliği için (P) özelliği uygular ve $s\in[a,b]$ sabitlersek, o zaman her $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$\left\langle \left(f(A)g(A)+f(s)g(s)1_H\right)x,x\right\rangle \geq \left\langle \left(g(s)f(A)+f(s)g(A)\right)x,x\right\rangle$$

Yazabiliriz ve ayrıca her $s\in[a,b]$ için

$$\left\langle f(A)g(A)x,x\right\rangle + f(s)g(s)\geq g(s)\left\langle f(A)x,x\right\rangle + f(s)\left\langle g(A)x,x\right\rangle \tag{3.26}$$

Denk olduğu açıktır.

Şimdi, eğer (3.26) eşitsizliği için (P) özelliğini tekrar uygularsak, o zaman her $y\in H$, $\|y\|=1$ için,

$$\left\langle \left(f(A)g(A)x,x\right)1_H + f(A)g(A)y,y\right\rangle \geq \left\langle \left(f(A)x,x\right)g(A)+\left\langle g(A)x,x\right\rangle f(A)y,y\right\rangle$$

Yazabiliriz ve ayrıca her $x,y\in H$, $\|x\|=\|y\|=1$ için

$$\left\langle \left(f(A)g(A)x,x\right)+\left\langle f(A)g(A)y,y\right\rangle\right\rangle \geq$$
$$\left\langle \left(f(A)x,x\right)g(A)y,y\right\rangle + \left\langle f(A)y,y\right\rangle g(A)x,x\right\rangle \tag{3.27}$$

Denk olduğu açıktır.

Son olarak, (3.27) da $y=x$ alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Bazı özel durumlar uygulamalar için ilginçlik göstermektedir. Bunların ilkinde güç fonksiyonlarını ele alalım.

Sonuç 3.33. Biz yukarıdaki teoremin ispatından biliyoruz ki, eğer A ve B öz eşlenik operatörler ve $Sp(A),Sp(B)\subseteq[m,M]$ zaman herhangi sürekli synchronous(asynchronous) fonksiyon ve her $x,y\in H$, $\|x\|=\|y\|=1$ için

$$\left\langle f(A)g(A)x,x\right\rangle + \left\langle f(B)g(B)y,y\right\rangle$$
$$\geq (\leq)\left\langle f(A)x,x\right\rangle\left\langle g(B)y,y\right\rangle + \left\langle f(B)y,y\right\rangle\left\langle g(A)x,x\right\rangle \tag{3.28}$$

Yazabiliriz. Bu da genel bir sonuçtur.

Eğer $f:[m,M]\to(0,\infty)$ sürekli ise, o zaman f^p, f^q fonksiyonları $p,q<0$ ya da $p,q>0$ olduğu durumda synchronous ve $p<0, q>0$ ya da $p>0, q<0$ olduğu durumda asynchronoustur. Bu durumda eğer A ve B pozitif tanımlı operatörler ise, o zaman her $x,y\in H$, $\|x\|=\|y\|=1$ için

$$\begin{aligned}&\left\langle f^{p+q}(A)x,x\right\rangle+\left\langle f^{p+q}(B)y,y\right\rangle\\&\geq\left\langle f^{p}(A)x,x\right\rangle\left\langle f^{q}(B)y,y\right\rangle+\left\langle f^{p}(B)y,y\right\rangle\left\langle f^{q}(A)x,x\right\rangle\end{aligned}\tag{3.29}$$

Eşitsizliğini yazabiliriz. Burada $p,q>0$ ya da $p,q<0$ dır.

Eğer $p>0, q<0$ ya da $p<0, q>0$ ise, o zaman (3.29) eşitsizliğinin tersi de sağlanır.

Özel olarak, $\|p\|=\|q\|=1$ ve $f(t)=1$ için, (3.29) eşitsizliğinden her $x,y\in H$, $\|x\|=\|y\|=1$ için

$$\left\langle A^2x,x\right\rangle+\left\langle B^2y,y\right\rangle\geq 2.\langle Ax,x\rangle\langle By,y\rangle\tag{3.30}$$

Eşitsizliğini yazabiliriz.

Ayrıca $p=1$ ve $q=-1$ için (3.12) eşitsizliğinden her $x,y\in H$ $\|x\|=\|y\|=1$ için

$$\langle Ax,x\rangle\left\langle B^{-1}y,y\right\rangle+\langle By,y\rangle\left\langle A^{-1}x,x\right\rangle\leq 2\tag{3.31}$$

Eşitsizliğini yazabiliriz.

2.6.3. Bir Operatör İçin İlgili Sonuçlar

Teorem 3.34 (Dragomir, 2008) A, $m<M$ bazı reel sayılar için $Sp(A)\subseteq[m,M]$ bir öz eşlenik operatör olsun. Eğer $f,g:[m,M]\to\mathbb{R}$ sürekli ve $[m,M]$ üzerinde synchronous ise, o zaman her $x\in H$, $\|x\|=1$

$$\begin{aligned}&\left\langle f(A)g(A)x,x\right\rangle-\left\langle f(A)x,x\right\rangle.\left\langle g(A)x,x\right\rangle\\&\geq\left[\left\langle f(A)x,x\right\rangle-f(\langle Ax,x\rangle)\right].\left[g(\langle Ax,x\rangle)-\left\langle g(A)x,x\right\rangle\right]\end{aligned}\tag{3.32}$$

Eşitsizliğini yazabiliriz.

Eğer f,g asynchronous ise, o zaman her $x\in H$ $\|x\|=1$ için

$$\left\langle f(A)x,x\right\rangle.\left\langle g(A)x,x\right\rangle-\left\langle f(A)g(A)x,x\right\rangle$$

$$\geq\left[\left\langle f(A)x,x\right\rangle-f\left(\left\langle Ax,x\right\rangle\right)\right].\left[\left\langle g(A)x,x\right\rangle-g\left(\left\langle Ax,x\right\rangle\right)\right] \qquad (3.33)$$

Eşitsizliğini yazabiliriz.

İspat. f,g Synchronous ve her $x\in H, \|x\|=1$ için $m\leq\left\langle Ax,x\right\rangle\leq M$ olduğundan; bu durumda her $t\in[a,b]$ ve $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$\left[f(t)-f\left(\left\langle Ax,x\right\rangle\right)\right]\left[g(t)-g\left(\left\langle Ax,x\right\rangle\right)\right]\geq \qquad (3.34)$$

(3.34) eşitsizliği için (P) özelliğini kullanırsak, keyfi B $Sp(B)\subseteq[m,M]$ olan sınırlı bir lineer operatör ve $y\in H$, $\|x\|=1$ için

$$\left\langle\left[f(B)-f\left(\left\langle Ax,x\right\rangle\right)\right]\left[g(B)-g\left(\left\langle Ax,x\right\rangle\right)\right]y,y\right\rangle\geq 0 \qquad (3.35)$$

Eşitsizliğini yazabiliriz.

$$\left\langle\left[f(B)-f\left(\left\langle Ax,x\right\rangle\right)\right]\left[g(B)-g\left(\left\langle Ax,x\right\rangle\right)\right]y,y\right\rangle$$

$$=\left\langle f(B)g(B)y,y\right\rangle+f\left(\left\langle Ax,x\right\rangle\right)\left\langle g\left(\left\langle Ax,x\right\rangle\right)\right\rangle$$

$$-\left\langle f(B)y,y\right\rangle g\left(\left\langle Ax,x\right\rangle\right)-f\left(\left\langle Ax,x\right\rangle\right)\left\langle g(B)y,y\right\rangle \qquad (3.36)$$

olup o zaman (3.35) den

$$\left\langle f(B)g(B)y,y\right\rangle+f\left(\left\langle Ax,x\right\rangle\right)g\left(\left\langle Ax,x\right\rangle\right)$$

$$\geq\left\langle f(B)y,y\right\rangle g\left(\left\langle Ax,x\right\rangle\right)+f\left(\left\langle Ax,x\right\rangle\right)\left\langle g(B)y,y\right\rangle$$

Dir. O halde her $x,y\in H$, $\|x\|=\|y\|=1$ için

$$\left\langle f(B)g(B)y,y\right\rangle-\left\langle f(A)y,y\right\rangle.\left\langle g(A)y,y\right\rangle$$

$$\geq\left[\left\langle f(B)y,y\right\rangle-f\left(\left\langle Ax,x\right\rangle\right)\right].\left[g\left(\left\langle Ax,x\right\rangle\right)-\left\langle g(B)y,y\right\rangle\right] \qquad (3.37)$$

Denk olduğu açıktır.

Şimdi, eğer (3.20) de $B=A$ ve $y=x$ seçilirse, o zaman istenilen (3.32) elde edilir.

Sonuç 3.35 $A, m<M$ bazı reel sayılar için $Sp(A)\subseteq[m,M]$ bir öz eşlenik operatör olsun. Eğer $f,g:[m,M]\to\mathbb{R}$ sürekli synchronous ve $[m,M]$ üzerinde konkavken, diğeri konveks ise, o zaman her $x\in H, \|x\|=1$ için

$$\langle f(A)g(A)x,x\rangle - \langle f(A)x,x\rangle.\langle g(A)x,x\rangle$$
$$\geq \left[\langle f(A)x,x\rangle - f\left(\langle Ax,x\rangle\right)\right].\left[g\left(\langle Ax,x\rangle\right) - \langle g(A)x,x\rangle\right] \geq 0 \qquad (3.38)$$

Eşitsizliği doğrudur.

Eğer f, g asynchronous ve $[m,M]$ üzerinde ya onların her ikisi konveks ya da onların ikisi konkav ise, o zaman her $x \in H$, $\|x\| = 1$ için

$$\langle f(A)x,x\rangle.\langle g(A)x,x\rangle - \langle f(A)g(A)x,x\rangle$$
$$\geq \left[\langle f(A)x,x\rangle - f\left(\langle Ax,x\rangle\right)\right].\left[\langle g(A)x,x\rangle - g\left(\langle Ax,x\rangle\right)\right] \geq 0 \qquad (3.39)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. İkinci eşitsizlik Mond ve Pecoric ya da konveks (konkav) ve A, $m < M$ bazı reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m,M]$ bir ö eşlenik bir operatör alırsak

$$\left(h(A)x,x\right) \geq (\leq) h\left(\langle AX,x\rangle\right) \qquad \text{(MP)}$$

yazabiliriz.

3.7. Grüss Eşitsizliği

3.7.1. Bazı Elementer Grüss Tipli Eşitsizlikler

1935 yılında G.Grüss aşağıdaki şekilde integrallerin çarpımı açısından çarpımın integral yaklaşımını veren eşitsizliği ispat etmiştir.

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{1}{4}(\Phi-\phi)(\Gamma-\gamma) \qquad (3.40)$$

Burada $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir ayrıca her $x \in [a,b]$ ve $\phi, \Phi, \Upsilon, \Gamma$ verilen reel sabitler olmak üzere,

$$\phi \leq f(x) \leq \Phi, \qquad \gamma \leq g(x) \leq \Gamma \qquad (3.41)$$

Şartlarını sağlar. İlaveten buradaki $\frac{1}{4}$ sabiti bulunabilecek en küçük sabittir. Yani bundan daha küçük bir sabit kabul edilemez.

Aşağıdaki şekilde Grüss'ün eşitsizliğini farklı bir versiyonu vardır.

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i.\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i\right|$$

$$\leq\frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right]\left(1-\frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right]\right)(R-r)(S-s) \tag{3.42}$$

Yukarıdaki eşitsizlikte $a,b\in\mathbb{R}^n$, $r\leq a_i\leq R$ ve $s\leq b_i\leq S$, $i=1,....n$' dir. Ayrıca $[x]$, $x\in\mathbb{R}$ 'in tam kısmını gösterir.

3.7.2. Bir Operatör İçin Grüss Tipinin Bir Eşitsizliği

Teorem 3.36 (Dragamir,2008) A, Hilbert uzayı (H;<,>) üzerinde bir özeşlenik operatör ve $m<M$ için $Sp(A)\subseteq[m,M]$ olduğunu kabul edelim.

Eğer f ve g ,$[m,M]$ sürekli,

$\gamma:=\min_{t\in[m,M]}f(t)$, $\Gamma:=\max_{t\in[m,M]}f(t)$ ve her $x,y\in H$, $\|x\|=\|y\|=1$ ise, bu durumda

$$\left|\langle f(A)g(A)y,y\rangle-\langle f(A)y,y\rangle.\langle g(A)x,x\rangle-\frac{\gamma+\Gamma}{2}[\langle g(A)y,y\rangle-\langle g(A)x,x\rangle]\right|$$

$$\leq\frac{1}{2}.(\Gamma-\gamma)[\|g(A)y\|^2+\langle g(A)x,x\rangle^2-2\langle g(A)x,x\rangle\langle g(A)y,y\rangle]^{1/2} \tag{3.43}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. Her şeyden önce, her $\lambda\in\mathbb{R}$ ve $x,y\in H$, $\|x\|=\|y\|=1$ için aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\left\langle\left(f(A)-\lambda.1_H\right)\left(g(A)-\langle g(A)x,x\rangle 1_H\right)y,y\right\rangle$$

$$=\langle f(A)g(A)y,y\rangle-\lambda\left[\langle g(A)y,y\rangle-\langle g(A)x,x\rangle\right]-\langle g(A)x,x\rangle\langle f(A)y,y\rangle \tag{3.44}$$

Buradan, (3.44) ün modülü alınılırsa,

$$\left|\langle f(A)g(A)y,y\rangle-\lambda.\left[\langle g(A)y,y\rangle-\langle g(A)x,x\rangle\right]\right.$$

$$\left.-\langle g(A)x,x\rangle\langle f(A)y,y\rangle\right|$$

$$=\left|\left\langle\left(g(A)-\langle g(A)x,x\rangle.1_H\right)y,\left(f(A)-\lambda.1_H\right)y\right\rangle\right|$$

$$\leq \left\| g(A)y - \left\langle g(A)x,x \right\rangle y \right\| \left\| f(A)y - \lambda y \right\|$$

$$\left[\left\| g(A)y \right\|^2 + \left\langle g(A)x,x \right\rangle^2 - 2\left\langle g(A)x,x \right\rangle \left\langle g(A)y,y \right\rangle \right]^{1/2}$$

$$\times \left\| f(A)y - \lambda y \right\|$$

$$\leq \left[\left\| g(A)y \right\|^2 + \left\langle g(A)x,x \right\rangle^2 - 2\left\langle g(A)x,x \right\rangle \left\langle g(A)y,y \right\rangle \right]^{1/2}$$

$$\times \left\| f(A) - \lambda .1_H \right\| \tag{3.45}$$

elde edilir. Burada her $x, y \in H, \|x\| = \|y\| = 1$

Şimdi, $\gamma := \min_{t\in[m,M]} f(t)$ ve $\Gamma := \max_{t\in[m,M]} f(t)$ olduğundan o zaman her $y \in H$, $\|y\| = 1$ için (P) özelliğinden

$$\gamma \leq \left\langle f(A)y,y \right\rangle \leq \Gamma$$

ve buna denk olan

$$\left| \left\langle f(A)y,y \right\rangle - \frac{\gamma + \Gamma}{2} \|y\|^2 \right| \leq \frac{1}{2}(\Gamma - \gamma)$$

ya da

$$\left| \left\langle \left(f(A) - \frac{\gamma + \Gamma}{2} 1_H \right) y,y \right\rangle \right| \leq \frac{1}{2}(\Gamma - \gamma)$$

eşitsizlikleri doğrudur. Daha sonra bu eşitsizliğin supremumunu alır ve $\lambda = \frac{\gamma + \Gamma}{2}$ için (3.44) eşitliğinde yerine yazarsak istenilen (3.45) sonucunu elde ederiz.

Yukarıdaki teoremi kullanarak aşağıdaki sonucu elde edebiliriz.

Sonuç 3.37 Teorem 3.36'in şartları altında her $x \in H$, $\|x\| = 1$, $f := \min_{t\in[m,M]} g(t)$ ve □$:= \max_{t\in[m,M]} g(t)$ için

$$\left| \left\langle f(A)g(A)x,x \right\rangle - \left\langle f(A)x,x \right\rangle . \left\langle g(A)x,x \right\rangle \right|$$

$$\leq \frac{1}{2}.(\Gamma - \gamma)\left[\left\| g(A)x \right\|^2 - \left\langle g(A)x,x \right\rangle^2 \right]^{1/2} \left(\leq \frac{1}{4}(\Gamma - \gamma)(\Delta - \delta) \right) \tag{3.46}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (3.43) eşitsizliğinde $y = x$ yazılırsa (3.46)'un ilk eşitsizliği elde edilir. Şimdi, eğer (3.46)'nın ilk eşitsizliğinde $f = g$ yazarsak

$$0 \le \|g(A)x\|^2 - \langle g(A)x, x\rangle^2 = \langle g^2(A)x, x\rangle - \langle g(A)x, x\rangle^2$$
$$\le \frac{1}{2}(\Delta - \delta)\left[\|g(A)\|^2 - \langle g(A)x, x\rangle^2\right]^{1/2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan her $x \in H$, $\|x\| = 1$ için

$$\left[\|g(A)x\|^2 - \langle g(A)x, x\rangle^2\right]^{1/2} \le \frac{1}{2}(\Delta - \delta)$$

doğrudur. Böylece (3.46)'nın ispatı tamamlanır.

3.8. Çeşitli Grüss Tipli Eşitsizlikler

3.8.1. Bazı Vektörel Grüss Tipli Eşitsizlikler

Lemma 3.38. $(H, \langle .,. \rangle)$ K = □ veya K cismi üzerinde bir iç çarpım uzayı, $u, v, e \in H$, $\|e\| = 1$ ve $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ için

$$\operatorname{Re}\langle \beta e - u, u - \alpha e\rangle \ge 0 \qquad \operatorname{Re}\langle \delta e - v, v - \gamma e\rangle \ge 0 \tag{3.47}$$

Ya da denk olarak

$$\left\| u - \frac{\alpha + \beta}{2} e \right\| \le \frac{1}{2}|\beta - \alpha| \qquad \left\| v - \frac{\gamma + \delta}{2} e \right\| \le \frac{1}{2}|\delta - \gamma|. \tag{3.48}$$

İse, bu durumda

$$|\langle u, v\rangle - \langle u, e\rangle\langle e, v\rangle|$$
$$\le \frac{1}{4}.|\beta - \alpha||\delta - \gamma|$$
$$- \begin{cases} \left[\operatorname{Re}\langle \beta e - u, u - \alpha e\rangle \ \operatorname{Re}\langle \delta e - v, v - \gamma e\rangle\right]^{\frac{1}{2}} \\ \left|\langle u, e\rangle - \dfrac{\alpha + \beta}{2}\right| \ \left|\langle v, e\rangle - \dfrac{\gamma + \delta}{2}\right| \end{cases} \tag{3.49}$$

Lemma 3.39. Lemma 3.38'in iddiası ve eğer $\operatorname{Re}(\beta\overline{\alpha}) > 0$, $\operatorname{Re}(\delta\overline{\gamma}) > 0$ ise o zaman

$$|\langle u, v\rangle - \langle u, v\rangle\langle e, v\rangle|$$

$$
\leq \begin{cases} \dfrac{1}{4}.\dfrac{|\beta-\alpha|\ |\delta-\gamma|}{\left[\operatorname{Re}\left(\beta\overline{\alpha}\right)\operatorname{Re}\left(\delta\overline{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\quad\right]^{\frac{1}{2}}}\left|\langle u,e\rangle\ \langle e,v\rangle\right|, \\ \left[\left(|\alpha+\beta|-2\left[\operatorname{Re}\ \left(\beta\overline{\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right)\ (|\delta+\gamma|)-2\ \left[\operatorname{Re} v\left(\delta\overline{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} \\ \times\left[\left|\langle u,e\rangle\right|\ \langle e,v\rangle\right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{3.50}
$$

eşitsizliği doğrudur.

Son olarak, diğer bir Grüss tipli eşitsizlik Drogamir [24] tarafından elde edilmiştir.

Lemma 3.40. (Drogamir, 2004) Lemma 3.38' in iddiası ve eğer $\beta \neq -\alpha$, $\delta \neq -\gamma$ ise o zaman

$$
\begin{aligned} &\left|\langle u,v\rangle-\langle u,e\rangle\langle e,v\rangle\right| \\ &\leq \frac{1}{4}.\frac{|\beta-\alpha||\delta-\gamma|}{\left[|\beta+\alpha||\alpha+\gamma|\right]^{\frac{1}{2}}}\left[\left(\|u\|+|\langle u,e\rangle|\right)\left(\|v\|+|\langle v,e\rangle|\right)\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.51}
$$

eşitsizliği doğrudur.

3.8.2. Bir Operatör İçin Bazı Grüss Tipli Eşitsizlikler

Bu kısımdaki teoremler bir özeşlenik operatörün iki fonksiyonu için bazı yeni Grüss tipli eşitsizlikler içermektedir.

Teorem 3.41. (Drogamir 2008) $A\ \left(H;\langle .,.\rangle\right)$Hilbert uzayı üzerinde bir öz eşlenik operatör ve $m<M$ için $Sp(A)\subseteq[m,M]$ olsun. Eğer f ve g $[m,M]$ üzerinde sürekli, $\gamma:=\min_{[m,M]} f(t)\ \Gamma:=\max_{t\in[m,M]} f(t)$, $\delta:=\min_{t\in[m,M]} g(t)$ ve $\Delta:=\max_{t\in[m,M]} g(t)$ ise, o zaman her $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$\left|\langle f(A)g(A)x,x\rangle-\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\right| \leq \frac{1}{4}(\Gamma-\gamma)(\Delta-\delta)$$

$$-\begin{cases} \left[\langle \Gamma x-f(A)x, f(A)x-\gamma x\rangle\langle \Delta x-g(A)x, g(A)x-\delta x\rangle\right]^{\frac{1}{2}} \\ \left|\langle f(Ax,x)\rangle-\frac{\Gamma+\gamma}{2}\right|\left|\langle g(A)x,x\rangle-\frac{\Delta+\delta}{2}\right| \end{cases} \tag{3.52}$$

eşitsizliği doğrudur. İlaveten, eğer γ ve δ pozitif, ise o zaman biz

$$\left|\langle f(A)g(A)x,x\rangle-\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\right|$$

$$\leq \begin{cases} \frac{1}{4}.\frac{(\Gamma-\gamma)(\Delta-\delta)}{\sqrt{\Gamma\gamma\Delta\delta}}\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle, & \frac{1}{2} \\ \left(\sqrt{\Gamma}-\sqrt{\gamma}\right)\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}\right)\left[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\right] \end{cases} \tag{3.53}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Ayrıca $\Gamma+\gamma$, $\Delta+\delta\neq 0$ ve her $x\in H$ $\|x\|=1$ için

$$\left|\langle f(A)g(A)x,x\rangle-\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\right|$$

$$\leq \frac{1}{4}.\frac{(\Gamma-\gamma)(\Delta-\delta)}{\left[|\Gamma+\gamma||\Delta+\delta|\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\times\left[\left(\|f(A)x\|+\left|\langle f(A)x,x\rangle\right|\right)\left(\|g(A)x\|+\left|\langle g(A)x,x\rangle\right|\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.54}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat.

$\gamma:=\min_{t\in[m,M]} f(t)$, $\Gamma:=\max_{t\in[m,M]} f(t)$ $\delta:=\min_{t\in[m,M]} g(t)$ ve $\Delta:=\max_{t\in[m,M]} g(t)$ olduğu için, (P) özelliğinden

$$\gamma.1_H\leq f(A)\leq\Gamma.1_H \text{ ve } \delta.1_H\leq g(A)\leq\Delta.1_H$$

Yazabiliriz. Burada ki sıralama operatörü anlamındaki sıralamadır. Yukarıdaki eşitsizlikten

$$\langle[f(A)-\gamma.1][\Gamma.1_H-f(A)]x,x\rangle\geq 0$$

$$[\Delta.1_H-g(A)][g(A)-\delta.1_H]\geq 0 \tag{3.55}$$

elde ederiz.

Daha sonra (3.55) den ve her $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$\langle [f(A)-\gamma.1][\Gamma.1_H - f(A)]x, x\rangle \geq 0$$

ve

$$\langle [\Delta.1_H - g(A)][g(A)-\delta.1_H]x, x\rangle \geq 0$$

yazabiliriz.

Operatörler özeşlenik olduğundan her $x \in H, \|x\| = 1$ yukarıdaki eşitsizliklere denk olan,

$$\langle \Gamma x - f(A)x, f(A)x - \gamma x\rangle \geq 0$$

$$\langle \Delta x - g(A)x, g(A)x - \delta x\rangle \geq 0 \tag{3.56}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Şimdi, eğer Lemma 3.38 $u = f(A)x, v = g(A)x, e = x$ teoremin ifadesinde tanımlanan $\Gamma, \gamma, \Delta, \delta$ skalerleri alınarak uygulanırsa, bu durumda her $x \in H$ ve $\|x\| = 1$ için

$$\left|\langle f(A)x, g(A)x\rangle - \langle f(A)x, x\rangle\langle x, g(A)x\rangle\right|$$

$$\leq \frac{1}{4}.(\Gamma-\gamma)(\Delta-\delta)$$

$$-\begin{cases} \left[\operatorname{Re}\langle \Gamma x - f(A)x, f(A)x - \gamma x\rangle \operatorname{Re}\langle \Delta x - g(A)x, g(A)x - \delta x\rangle\right]^{\frac{1}{2}} \\ \left|\langle f(A)x, x\rangle - \frac{\Gamma+\gamma}{2}\right|\left|\langle g(A)x, x\rangle - \frac{\Delta+\delta}{2}\right| \end{cases} \tag{3.57}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

(3.53) ve (3.54) eşitsizliklerini sırasıyla lemma 3.39 ve 3.40 dan elde ettik.

Sonuç 3.42. (3.53)' ün ilk eşitsizliği, her $x \in H, \|x\| = 1$ için daha kullanışlı olarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\left|\frac{\langle f(A)g(A)x, x\rangle}{\langle f(A)x, x\rangle\langle g(A)x, x\rangle} - 1\right| \leq \frac{1}{4}.\frac{(\Gamma-\gamma)(\Delta-\delta)}{\sqrt{\Gamma\gamma\Delta\delta}} \tag{3.58}$$

Benzer şekilde ikinci eşitsizliği de

$$\left|\frac{\langle f(A)g(A)x,x\rangle}{\left[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\right]^{\frac{1}{2}}}-\left[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\right]^{\frac{1}{2}}\right|$$
$$\leq\left(\sqrt{\Gamma}-\sqrt{\gamma}\right)\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}\right) \tag{3.59}$$

şeklinde yazabiliriz.

Eğer $f,g,[m,M]$ üzerinde synchronous (asynchronous) fonksiyon, yani her $t,s\in[m,M]$ için

$$\left[f(t)-f(s)\right]\left[g(t)-g(s)\right](\geq)\leq 0$$

ise bu durumda her $x\in H,\|x\|=1$ $f,g,[m,M]$ üzerinde sürekli ve A da $Sp(A)\subseteq[m,M]$ üzerinde bir öz eşlenik operatör ise

$$\langle f(A)g(A)x,x\rangle\geq(\leq)\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle \tag{3.60}$$

(3.58) ve (3.59)'dan

$$0\leq\frac{\langle f(A)g(A)x,x\rangle}{\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle}-1\leq\frac{1}{4}.\frac{(\Gamma-\gamma)(\Delta-\delta)}{\sqrt{\Gamma\gamma\Delta\delta}} \tag{3.61}$$

ve

$$0\leq\frac{\langle f(A)g(A)x,x\rangle}{\left[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\right]^{1/2}}-\left[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\right]^{1/2}$$
$$\leq\left(\sqrt{\Gamma}-\sqrt{\gamma}\right)\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}\right) \tag{3.62}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Eğer f,g asynchronous fonksiyon ise, bu durumda

$$0\leq 1-\frac{\langle f(A)g(A)x,x\rangle}{\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle}\leq\frac{1}{4}.\frac{(\Gamma-\gamma)(\Delta-\delta)}{\sqrt{\Gamma\gamma\Delta\delta}} \tag{3.63}$$

ve

$$0\leq\left[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\right]^{1/2}-\frac{\langle f(A)g(A)x,x\rangle}{\left[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\right]^{1/2}}$$

$$\leq \left(\sqrt{\Gamma}-\sqrt{\gamma}\right)\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}\right) \tag{3.64}$$

eşitsizlikleri her $x \in H, \|x\|=1$ için doğrudur.

3.9. Cebysev Fonksiyoneli İçin Çeşitli Eşitsizlikler

3.9.1. Bazı İlgili Sonuçlar ve Bir Ayrıştırılması

Teorem 3.43 A, $m<M$ bazı reel sayıları için $Sp(A) \subseteq [m,M]$ bir öz eşlenik operatör olsun. Eğer $f,g:[m,M] \to \mathbb{R}$,

$\delta := \min_{t\in[m,M]} g(t)$ ve $\Delta := \max_{t\in[m,M]} g(t)$ ile sürekli ise, o zaman her $x \in H, \|x\|=1$ için,

$$|C(f,g;A;x)| \leq \frac{1}{2}(\Delta-\delta)\left\langle \left| f(A) - \langle f(A)x,x\rangle .1_H \right| x,x \right\rangle$$

$$\leq \frac{1}{2}(\Delta-\delta) C^{1/2}(f,f;A;x) \tag{3.65}$$

Eşitsizliği doğrudur.

İspat. $\delta := \min_{t\in[m,M]} g(t)$ ve $\Delta := \max_{t\in[m,M]} g(t)$ olduğundan, her $t\in[m,M]$ her $x \in H, \|x\|=1$ için,

$$\left| g(t) - \frac{\Delta+\delta}{2} \right| \leq \frac{1}{2}(\Delta-\delta) \tag{3.66}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Eğer $\left| f(t) - \langle f(A)x,x\rangle \right|$ ile (3.49) eşitsizliğini toplarsak, her $t\in[m,M]$ her $x \in H$, $\|x\|=1$ için,

$$\left| f(t)g(t) - \langle f(A)x,x\rangle g(t) - \frac{\Delta+\delta}{2} f(t) + \frac{\Delta+\delta}{2}\langle f(A)x,x\rangle \right|$$

$$\leq \frac{1}{2}(\Delta-\delta)\left| f(t) - \langle f(A)x,x\rangle \right| \tag{3.67}$$

elde ederiz. Şimdi, eğer (4.50) eşitsizliği için (P) özelliğini uygular ve $Sp(B) \subset [m,M]$ ile B özeşlenik bir operatör ise, o zaman her $x \in H, \|x\|=1$ için,

$$\langle f(B)g(B)y,y\rangle - \langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)y,y\rangle$$

$$-\frac{\Delta+\delta}{2}\langle f(B)y,y\rangle+\frac{\Delta+\delta}{2}\langle f(A)x,x\rangle\Big|$$

$$\leq\frac{1}{2}(\Delta-\delta)\left\langle\left|f(B)-\langle f(A)x,x\rangle.1_H\right|y,y\right\rangle \tag{3.68}$$

Eşitsizliğini elde ederiz.

Eğer (3.68)'de $y=x$ ve $B=A$ seçersek, o halde (3.65)'in ilk eşitsizliğini göstermiş oluruz. Şimdi, H ' ta Schwarz eşitsizliğini uygularsak, her $x\in H$, $\|x\|=1$ için,

$$\begin{aligned}\left\langle\left|f(A)-\langle f(A)x,x\rangle.1_H\right|x,x\right\rangle &\leq\left\|\,\left|f(A)-\langle f(A)x,x\rangle.1_H\right|x\right\| \\ &=\left\|f(A)x-\langle f(A)x,x\rangle.x\right\| \\ &=\left[\left\|f(A)x\right\|^2-\langle f(A)x,x\rangle^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &=C^{1/2}(f,f;A;x)\end{aligned}$$

Yazabiliriz ve böylece (3.65)'in ikinci kısmını da ispatlamış oluruz.

U , $m<M$ bazı reel sayılar için $[m,M]$ Aralığında $Sp(U)$ Spektrumlu Hilbert uzayı $(H,\langle.,.\rangle)$ üzerinde bir özeşlenik operatör $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ onun spectrol ailesi olsun. O halde $f:[m,M]\to\mathbb{C}$ herhangi sürekli fonksiyon için, literatürde iyi bilinen Riemann-Stieltjes integrali açısından $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$\langle f(U)x,x\rangle=\int_{m-0}^{M}f(\lambda)d\left(\langle E_\lambda x,x\rangle\right) \tag{3.69}$$

Eşitsizliğini yazabiliriz. $g_x(\lambda):=\langle E_\lambda x,x\rangle$ fonksiyonu $[m,M]$ üzerinde azalmayan monotonik ve her $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$g_x(m-0)=0 \text{ ve } g_x(M)=1 \tag{3.70}$$

yazabiliriz.

Teorem 3.44. (Drogamir, 2008) A ve B $m<M$ bazı reel sayılar için $Sp(A)$, $Sp(B)\subseteq[m,M]$ ile öz eşlenik operatör olsun. Eğer $f:[m,M]\to\mathbb{C}$ L-r-Hölder ise, yani verilmiş bir $r\in(0,1]$ ve $L>0$ ve her $s,t\in[m,M]$ için

$$\left| f(s) - f(t) \right| \le L \left| s - t \right|^r$$

Sağlanıyorsa bu durumda keyfi $s \in [m, M]$ ve her $x \in H$, $\|x\| = 1$ için

$$\left| f(s) - \langle f(A)x, x \rangle \right| \le L \left[\frac{1}{2}(M - m) + \left| s - \frac{m+M}{2} \right| \right]^r$$

(3.71)

Özeşlenik operatörlerin Ostrowski eşitsizliğini elde ederiz

Dahası her $x, y \in H$, $\|x\| = \|y\| = 1$

$$\left| \langle f(B)y, y \rangle - \langle f(A)x, x \rangle \right| \le \left\langle \left| f(B) - \langle f(A)x, x \rangle .1_H \right| y, y \right\rangle$$

$$\le L \left[\frac{1}{2}(M - m) + \left\langle \left| B - \frac{m+M}{2}.1_H \right| y, y \right\rangle \right]^r \qquad (3.72)$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

İspat. Her $s \in [a, b]$ için

$$\left| f(s)[u(b) - u(a)] - \int_a^b f(t)\, du(t) \right|$$

$$\le L \left[\frac{1}{2}(b - a) + \left| s - \frac{a+b}{2} \right| \right]^r \bigvee_a^b (u) \qquad (3.73)$$

Kullanırsak, burada f, $[a, b]$ üzerinde r-L-Hölder tipli, u, $[a, b]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu ve $\bigvee_a^b(u)$ da, $[a, b]$ üzerinde total varyasyonu gösterir.

Şimdi, her $x \in H$, $\|x\| = 1$ $u(\lambda) = g_x(\lambda) := \langle E_\lambda x, x \rangle$ için bu eşitsizliğe uygularsak

$$\left| f(s) - \int_{m-0}^{M} f(\lambda)\, d\left(\langle E_\lambda x, x \rangle \right) \right| \le \left[\frac{1}{2}(M - m) + \left| s - \frac{m+M}{2} \right| \right]^r \bigvee_{m-0}^{M} (g_x) \qquad (3.74)$$

Eşitsizliğini elde ederiz. O halde (3.69) ve (3.70) den (3.71)'e denktir. (3.71) eşitsizliği için (P) özelliğini uygularsak, her $x, y \in H$, $\|x\| = \|y\| = 1$ ve B operatörü için

$$\left\langle \left| f(B) - \langle f(A)x, x \rangle .1_H \right| y, y \right\rangle$$

$$\le L \left\langle \left[\frac{1}{2}(M - m) + \left| B - \frac{m+M}{2}.1_H \right| \right]^r y, y \right\rangle$$

$$\leq L\left\langle \left[\frac{1}{2}(M-m) + \left| B - \frac{m+M}{2}.1_H \right| \right] y, y \right\rangle^r$$

$$= L\left[\frac{1}{2}(M-m) + \left\langle \left| B - \frac{m+M}{2}.1_H \right| y, y \right\rangle \right]^r$$

yazabiliriz. Böylece (4.55) de ikinci eşitsizliği elde etmiş oluruz.

Dahası, öz eşlenik operatörün konveks fonksiyonu için Jensen eşitsizliği modülünü uygularsak, her $x \in H$, $\|x\| = 1$

$$\left| \langle h(A)x, x \rangle \right| \leq \langle |h(A)| x, x \rangle \tag{M}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada h , $[m, M]$ üzerinde sürekli fonksiyondur. Şimdi eğer (M) eşitsizliğini uygularsak, o zaman

$$\left| \left\langle \left[f(B) - \langle f(A)x, x \rangle .1_H \right] y, y \right\rangle \right| \leq \left\langle \left| f(B) - \langle f(A)x, x \rangle .1_H \right| y, y \right\rangle$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu (3.72)'in ilk kısmını gösterir ve böylece ispat tamamlanmış olur. Sonuç olarak, f , A ve B için yukarıdaki şartlarda biz,

$$\left| f\left(\frac{m+M}{2} \right) - \langle f(A)x, x \rangle \right| \leq \frac{1}{2^r} L(M-m)^r \tag{3.75}$$

ve

$$\left| f\left(\langle Ax, x \rangle - \langle f(A)x, x \rangle \right) \right|$$

$$\leq L\left[\frac{1}{2}(M-m) + \left| \langle Ax, x \rangle - \frac{m+M}{2} \right| \right]^r \tag{3.76}$$

yazabiliriz. Burada her $x \in H$ ve $\|x\| = 1$'dir.

Ayrıca her $x, y \in H$, $\|x\| = \|y\| = 1$ için,

$$\left| \langle f(A)y, y \rangle - \langle f(A)x, x \rangle \right|$$

$$\leq \left\langle \left| f(A) - \langle f(A)x, x \rangle .1_H \right| y, y \right\rangle$$

$$\leq L\left[\frac{1}{2}(M-m) + \left\langle \left| A - \frac{m+M}{2}.1_H \right| y, y \right\rangle \right]^r \tag{3.77}$$

eşitsizliğini

$$\left|\left\langle\left[f(B)-f(A)x,x\right]\right\rangle\right| \le \left\langle\left|f(B)-\langle f(A)x,x\rangle .1_H\right|x,x\right\rangle$$

$$\le L\left[\frac{1}{2}(M-m)+\left\langle\left|B-\frac{m+M}{2}.1_H\right|x,x\right\rangle\right]^r \tag{3.78}$$

ve daha özel olarak

$$\left\langle\left|f(A)-\langle f(A)x,x\rangle .1_H\right|x,x\right\rangle$$

$$\le L\left[\frac{1}{2}(M-m)+\left\langle\left|A-\frac{m+M}{2}.1_H\right|x,x\right\rangle\right] \tag{3.79}$$

(4.62)

eşitlikleri de yazabiliriz. Aynı zamanda

$$\left\|f(B)-f(A)\right\| \le L\left[\frac{1}{2}(M-m)+\left\|B-\frac{m+M}{2}.1_H\right\|\right] \tag{3.80}$$

Norm eşitsizliğini de elde ederiz. Aşağıdaki sonuç teorem kullanışlı uygulamasıdır.

Sonuç 3.45. A ve B, $m<M$ bazı reel sayılar için $Sp(A)$, $Sp(B)\subseteq[m,M]$ ile özeşlenik operatörler olsun. Eğer $f:[m,M]\to\mathbb{R}$ mutlak sürekli ise, o zaman her $s\in[m,M]$ ve her $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$\left|f(s)-\langle f(A)x,x\rangle\right|$$

$$\le \begin{cases} \left[\frac{1}{2}(M-m)+\left|s-\frac{m+M}{2}\right|\right]\left\|f'\right\|_{\infty,[m,M]} & eğer \quad f'\in L_\infty[m,M]; \\ \left[\frac{1}{2}(M-m)+\left|s-\frac{m+M}{2}\right|\right]^{1/q}\left\|f'\right\|_{p,[m,M]} & \begin{matrix} eğer & f'\in L_p[m,M], \\ p,q>1, & \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \end{matrix} \end{cases}$$

(3.81)

şeklindeki özeşlenik operatörler için Ostrowski tipli eşitsizliği yazabiliriz. Burada $\|\cdot\|_{p,[m,M]}$ Lebesque normları yani

$$\|h\|_{\infty,[m,M]} : ess \sup_{t\in[m,M]} \|h(t)\|$$

ve

$$\|h\|_{p,[m,M]} : \left(\int_m^M |h(t)|^p\right)^{1/p}, \quad p\ge 1.$$

dir. Dahası her $x, y \in H$, $\|x\| = \|y\| = 1$ için,

$$\left| \langle f(B)y, y\rangle - \langle f(A)x, x\rangle \right| \le \left\langle \left| f(B) - \langle f(A)x, x\rangle .1_H \right| y, y \right\rangle$$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{M-m}{2} + \left\langle \left| B - \dfrac{m+M}{2}.1_H \right| y, y \right\rangle \right] \left\| f' \right\|_{\infty,[m,M]} & eğer \ f' \in L_\infty[m,M] \\ \left[\dfrac{M-m}{2} + \left\langle \left| B - \dfrac{m+M}{2}.1_H \right| y, y \right\rangle \right]^{1/q} \left\| f' \right\|_{p,[m,M]} & \begin{matrix} eğer \ \ f' \in L_p[m,M] \\ p,q>1, \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \end{matrix} \end{cases}, \qquad (3.82)$$

yazabiliriz. Şimdi, teorem kullanarak uygulamalarda daha kullanışlı olabilen Cebysev fonksiyoneli içi aşağıdaki üst sınırı vereceğiz.

Sonuç 3.46. A, $m < M$ bazı reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ ile bir özeşlenik operatör olsun. Eğer $g : [m, M] \to \mathbb{R}$ $\Delta := \max_{t\in[m,M]} g(t)$ ve $\delta := \min_{t\in[m,M]} g(t)$ ile sürekli ise bu durumda her $x \in H$, $\|x\| = 1$ için

$$\left| C(f, g; A; x) \right| \le \frac{1}{2}(\Delta - \delta) L \left[\frac{1}{2}(M-m) + \left\langle \left| A - \frac{m+M}{2}.1_H \right| x, x \right\rangle \right]^r \qquad (3.83)$$

şeklinde, keyfi $f : [m, M] \to \mathbb{R}$ r-L-Hölder tipli eşitsizliği elde ederiz.

Sonuç 3.47. g ve A için yukarıdaki sonucun iddiasıyla ve eğer f, $[m, M]$ üzerinde mutlak sürekli ise, her $x \in H$, $\|x\| = 1$ için

$$\left| C(f, g; A; x) \right| \le \frac{1}{2}(\Delta - \delta)$$

$$\times \begin{cases} \left[\dfrac{1}{2}(M-m) + \left\langle \left| A - \dfrac{m+M}{2}.1_H \right| x, x \right\rangle \right] \left\| f' \right\|_{\infty,[m,M]} & eğer \ f' \in L_\infty[m,M]; \\ \left[\dfrac{1}{2}(M-m) + \left\langle \left| A - \dfrac{m+M}{2}.1_H \right| x, x \right\rangle \right]^{1/q} \left\| f' \right\|_{p,[m,M]} & \begin{matrix} eğer \ \ f \in L_\infty[m,M], \\ p,q|>1, \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \end{matrix} \end{cases} \qquad (3.84)$$

yazabiliriz.

3.10. Lipschitzian Fonksiyonlarının Cebysev Fonksiyonları için Sınırları

3.10.1. Lipschitzian Fonksiyonların Durumu

Teorem 3. 48. A, $m<M$ bazı reel sayılar için $Sp(A)\subseteq[m,M]$ ile özeşlenik operatör olsun. Eğer $f:[m,M]\to\mathbb{C}$ $L>0$ sabiti ile Lipschitzian ve $g:[m,M]\to\mathbb{R}$, $f:[m,M]\to\mathbb{C}$ $L>0$ sabiti ile Lipschitzian ve $g:[m,M]\to\mathbb{R}$ $\Delta:=\max_{t\in[m,M]}g(t)$ ve $\delta:=\max_{t\in[m,M]}g(t)$ ile sürekli ise, o zaman her $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$|C(f,g;A;x)|\le\frac{1}{2}(\Delta-\delta)L\langle l_{A,x}(A)x,x\rangle\le(\Delta-\delta)LC(e,e;A;x)\tag{3.85}$$

yazabiliriz.

$$l_{A,x}(t):=\langle|t.1_H-A|x,x\rangle$$

$[m,M]$ üzerinde sürekli fonksiyon, $e(t)=t$ ve

$$C(e,e;A;x)=\|Ax\|^2-\langle Ax,x\rangle^2(\ge 0)\tag{3.86}$$

dir.

İspat. İlk olarak, modüller için uygulanan öz eşlenik operatörlerin konveks fonksiyonları için jensen eşitsizliğini, yani, her $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$|\langle h(A)x,x\rangle|\le\langle|h(A)|x,x\rangle\tag{M}$$

Yazabiliriz burada h, $[m,M]$ üzerinde sürekli fonksiyondur.

f, $L>0$ sabiti ile Lipschitzian olduğundan, o halde her $t,s\in[m,M]$ için

$$|f(t)-f(s)|\le L|t-s|.\tag{3.87}$$

yazabiliriz.

Şimdi eğer $t\in[m,M]$ sabitler (3.70) eşitsizliği için (P) özelliği kullanır ve A bir operatör her $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$\langle|f(t).1_H-f(A)|x,x\rangle\le L\langle|t.1_H-A|x,x\rangle\tag{3.88}$$

yazabiliriz. (M) özelliğini kullanırsak

$$|f(t)-\langle f(A)x,x\rangle|=|\langle f(t).1_H-f(A)x,x\rangle|\le\langle|f(t).1_H-f(A)|x,x\rangle$$

yazabiliriz. (3.88) ile beraber her $t\in[m,M]$ ve her $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$|f(t)-\langle f(A)x,x\rangle|\le Ll_{A,x}(t)\tag{3.89}$$

yazabiliriz.

$\delta := \min_{t\in[m,M]} g(t)$ ve $\Delta := \max_{t\in[m,M]} g(t)$ olduğundan her $t \in [m,M]$ ve her $x \in H$, $\|x\| = 1$ için

$$\left| g(t) - \frac{\Delta+\delta}{2} \right| \le \frac{1}{2}(\Delta - \delta) \tag{3.90}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Eğer (3.89) ile (3.90) eşitsizliğini toplarsak her $t \in [m,M]$ ve her $x \in H$, $\|x\| = 1$ için

$$\begin{aligned}
&\left| f(t)g(t) - \langle f(A)x,x\rangle g(t) - \frac{\Delta+\delta}{2} f(t) + \frac{\Delta+\delta}{2}\langle f(A)x,x\rangle \right| \\
&\le \frac{1}{2}(\Delta-\delta) L l_{A,x}(t) = \frac{1}{2}(\Delta-\delta) L \left\langle |t.1_H - A| x,x \right\rangle \\
&\le \frac{1}{2}(\Delta-\delta) L \left\langle |t.1_H - A|^2 x,x \right\rangle^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}(\Delta-\delta) L \left(\left\langle A^2x,x \right\rangle - 2\langle Ax,x\rangle t + t^2 \right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Şimdi, eğer (4.74) eşitsizliği için (P) eşitsizliğini uygular ve B, $Sp(B) \subset [m,M]$ ile özeşlenik operatör ise, o zaman her $x, y \in H$, $\|x\| = \|y\| = 1$ için

$$\begin{aligned}
&\langle f(B)g(B)y,y\rangle - \langle f(A)x,x\rangle \langle g(B)y,y\rangle \\
&- \frac{\Delta+\delta}{2}\langle f(B)y,y\rangle + \frac{\Delta+\delta}{2}\langle f(A)x,x\rangle \\
&\le \frac{1}{2}(\Delta-\delta) L \left\langle l_{A,x}(B)y,y \right\rangle \\
&\le \frac{1}{2}(\Delta-\delta) L \left\langle \left(\left\langle A^2x,x \right\rangle 1_H - 2\langle Ax,x\rangle B + B^2 \right)^{1/2} y,y \right\rangle \\
&\le \frac{1}{2}(\Delta-\delta) L \left(\left\langle A^2x,x \right\rangle - 2\langle Ax,x\rangle \langle By,y\rangle + \left\langle B^2y,y \right\rangle \right)
\end{aligned} \tag{3.92}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Son olarak eğer (3.92) de $y = x$ ve $B = A$ seçersek, o zaman ispatı tamamlamış oluruz. İki fonksiyonlar Lipschitzian aşağıdaki teoremi de ifade edebiliriz.

Teorem 3.49. A, $m<M$ bazı reel sayılar için $Sp(A)\subseteq[m,M]$ ile özeşlenik operatör olsun. Eğer $f,g:[m,M]\to\mathbb{R}$ $L,K>0$ sabitleri ile Lipschitzian ise, o zaman her $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$|C(f,g;A;x)|\leq LKC(e,e;A;x) \tag{3.93}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. $f,g:[m,M]\to\mathbb{R}$ Lipschitzian olduğundan, o halde her $t,s\in[m,M]$ için

$$|f(t)-f(s)|\leq L|t-s| \text{ ve } |g(t)-g(s)|\leq K|t-s|$$

Eşitsizliğini her $t,s\in[m,M]$ için de

$$|f(t)g(t)-f(t)g(s)-f(s)g(t)+f(s)g(s)|\leq KL(t^2-2ts+s^2)$$

Eşitsizliğini yazabiliriz.

Şimdi, $t\in[m,M]$ sabitler ve eğer A operatörü için (P) VE (M) özelliğini uygularsak, her $x\in H$, $\|x\|=1$ için sırasıyla

$$\begin{aligned}
&|f(t)g(t)-\langle g(A)x,x\rangle f(t)-\langle f(A)x,x\rangle g(t)+\langle f(A)g(A)x,x\rangle|\\
&\quad=|\langle[f(t)g(t).1_H-f(t)g(A)-f(A)g(t)+f(A)g(A)]x,x\rangle|\\
&\quad\leq\langle|f(t)g(t).1_H-f(t)g(A)-f(A)g(t)+f(A)g(A)|x,x\rangle\\
&\quad\leq KL\langle(t^2 1_H-2tA+A^2)x,x\rangle=KL(t^2-2t\langle Ax,x\rangle+\langle A^2x,x\rangle)
\end{aligned} \tag{3.94}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz.

(3.94) eşitsizliği ve $Sp(B)\subset[m,M]$ ile diğer B özeşlenik operatör için

$$\begin{aligned}
&|\langle f(B)g(B)y,y\rangle-\langle g(A)x,x\rangle\langle f(B)y,y\rangle\\
&-\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)y,y\rangle+\langle f(A)g(A)x,x\rangle|\\
&\leq KL\langle(B^2-2\langle Ax,x\rangle B+\langle A^2x,x\rangle 1_H)y,y\rangle\\
&=KL(\langle B^2y,y\rangle-2\langle Ax,x\rangle\langle By,y\rangle+\langle A^2x,x\rangle)
\end{aligned} \tag{3.95}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada $x,y\in H$ $\|x\|=\|y\|=1$dir. Bu ise istenilen eşitsizliğin sağ tarafıdır. Son olarak (3.78)'de $B=A$ ve $y=x$ yazarsak, istenen (3.76) eşitsizliğini elde etmiş oluruz.

3.10.2. (φ,Φ)-Lipschitzian Fonksiyonlarının Durumu

Lemma $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ ve $\Phi>\varphi$ ile $\varphi,\Phi\in\mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $e(t)=t,\ t\in[a,b]$ için $u-\frac{\varphi+\Phi}{2}.e$ fonksiyonu $\frac{1}{2}(\Phi-\varphi)$ Lipschitzian;

(ii) Her $t,s\in[a,b]$, $t\neq s$ için

$$\varphi\leq\frac{u(t)-u(s)}{t-s}\leq\Phi; \tag{3.96}$$

(iii) Her $t,s\in[a,b]$, $t>s$ için

$$\varphi(t-s)\leq u(t)-u(s)\leq\Phi(t-s) \tag{3.97}$$

Tanım 3.50. $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (i)-(iii) denklik durumlarından birini sağlıyorsa o halde u'ya $[a,b]$ üzerinde (φ,Φ)-Lipschitzian fonksiyonu denir.

Langrage 'nin ortalama değer teoremini kullanarak, (φ,Φ)-Lipschitzian fonksiyonlarını pratik örnekleri için aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 3.51. $u:[a,b]\to\mathbb{R}$,$[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b)üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Eğer

$$-\infty<\gamma:=\inf_{t\in(a,b)}u'(t) \qquad \sup_{t\in(a,b)}u'(t)=:\Gamma<\infty, \tag{3.98}$$

İse o zaman u , $[a,b]$ üzerinde (γ,Γ)-Lipschitziandır.

Teorem 3.52. (Dragomir, 2008]) A , $m<M$ bazı reel sayılar için $Sp(A)\subseteq[m,M]$ile özeşlenik bir operatör olsun. Eğer $f:[m,M]\to\mathbb{R}$ $[a,b]$ üzerinde (φ,Φ)-Lipschitzian ve $g:[m,M]\to\mathbb{R}$ $\delta:=\min_{t\in[m,M]}g(t)$ ise o zaman $\Delta:=\max_{t\in[m,M]}g(t)$ her $x\in H$,$\|x\|=1$ için

$$\left|C(f,g;A;x)-\frac{\varphi+\Phi}{2}C(e,g;A;x)\right|$$

$$\leq\frac{1}{4}(\Delta-\delta)(\Phi-\varphi)\langle l_{A,x}(A)x,x\rangle$$

$$\leq \frac{1}{2}(\Delta-\delta)(\Phi-\varphi)C(e,e;A;x) \tag{3.99}$$

Eşitsizliği doğrudur. Bu teoremin ispatı Teorem 4.18 da $f-\dfrac{\varphi+\Phi}{2}.e$ fonksiyonu $\dfrac{1}{2}(\Phi-\varphi)-$Lipschitzianı uygulanarak elde edilir.

Teorem 3.53. A, $m<M$ bazı reel sayılar için $Sp(A)\subseteq[m,M]$ ile bir özeşlenik operatör ve $f,g:[m,M]\to\mathbb{R}$ olsun. Eğer f, $[a,b]$ üzerinde (φ,Φ)-Lipschitzian ve g de $[a,b]$ üzerinde (ψ,Ψ)-Lipschitzian ise, o zaman her $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$\Bigg|C(f,g;A;x)-\frac{\Phi+\varphi}{2}C(e,g;A;x)$$

$$-\frac{\Psi+\psi}{2}C(f,e;A;x)+\frac{\Phi+\varphi}{2}.\frac{\Psi+\psi}{2}C(e,e;A;x)\Bigg|$$

$$\leq \frac{1}{4}(\Phi-\varphi)(\Psi-\psi)C(e,e;A;x) \tag{3.100}$$

şitsizliği doğrudur.

3.11. Kuazi-Grüss Tipli Eşitsizlikler

Teorem 3.54 $(H,\langle .,.\rangle)$, $\mathrm{K}(\mathrm{K}=\mathbb{R},\mathbb{C})$ üzerinde bir iç çarpım uzayı ve $e\in H$, $\|e\|=1$ olsun. Eğer $\varphi,\gamma,\Phi,\Gamma$ reel ya da kompleks sayılar ve x,y H 'da

$$\mathrm{Re}\langle \Phi e-x,x-\varphi e\rangle\geq 0 \text{ ve } \mathrm{Re}\langle \Gamma e-y,y-ye\rangle\geq 0 \tag{3.101}$$

şartını sağlayan vektörler ise

$$\left|\langle x,y\rangle-\langle x,e\rangle\langle e,y\rangle\right|\leq\frac{1}{4}|\Phi-\varphi|.|\Gamma-\gamma|. \tag{3.102}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $\dfrac{1}{4}$ sabiti seçilebilecek en iyi sabittir.

U, $m<M$ bazı reel sayılar için $[m,M]$ aralığını içeren $Sp(u)$ spekturum ile *kompleks* $(H,\langle .,.\rangle)$ Hilbert uzayı üzerinde bir özeşlenik operatör ve $\{E_\lambda\}_\lambda$ onun spectrol ailesi olsun. O zaman her sürekli $f:[m,M]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için Riemann-Stieltjes integrali açısından spectral gösterim teoremi

$$f(U)=\int_{m-0}^{M} f(\lambda)\, dE_{\lambda,} \tag{3.103}$$

Yazabiliriz. Her $x,y\in H$ için vektörler açısından da

$$\langle f(U)x,y\rangle = \int_{m-0}^{M} f(\lambda)\, d\langle E_\lambda x,y\rangle \tag{3.104}$$

eşitliğini yazabiliriz.

$g_{x,y}(\lambda) := \langle E_\lambda x,y\rangle$ $[m,M]$ aralığı üzerinde sınırlı varyasyon ve her $x,y\in H$ için

$$g_{x,y}(m-0)=0 \text{ ve } g_{x,y}(M)=\langle x,y\rangle$$

Dir. Ayrıca $g_x(\lambda) := \langle E_\lambda x,x\rangle$, $[m,M]$ üzerinde sağdan sürekli ve monotonik azalmayandır.

3.11.1 Vektör Eşitsizlikler

Bu bölümde, $A:H\to H$ bir öz eşeşlenik operatör ve $x,y\in H$, $\|x\|=1$ için

$$\langle f(A)x,y\rangle - \langle x,y\rangle\langle f(A)x,x\rangle$$

ifadesini sürekli fonksiyonlar üzerinde farklı iddialar altında farkın büyüklüğü için çeşitli sınırlar elde edilecektir.

Teorem 3.54. A, $m<M$ bazı reel sayılar için, $Sp(A)\subseteq[m,M]$ spektrumu ile H Hilbert uzayında bir özeşlenik operatör ve $\{E_\lambda\}_\lambda$ onun spektral ailesi olsun. Kabul edelim ki her $x,y\in H$, $\|x\|=1$ için ya

$$\operatorname{Re}\langle \Gamma x-y, y-\gamma x\rangle \ge 0 \tag{3.105}$$

ya da denk olan

$$\left\| y-\frac{\gamma+\Gamma}{2}x \right\| \le \frac{1}{2}|\Gamma-\gamma|$$

Eşitsizliklerini sağlayan $\gamma,\Gamma\in\mathbb{C}$ sayıları vardır.

1. Eğer $f:[m,M]\to\mathbb{C}$, $[m,M]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu sürekli bir fonksiyon ise, o zaman

$$\left|\langle f(A)x,y\rangle - \langle x,y\rangle\langle f(A)x,x\rangle\right|$$
$$\le \max_{\lambda\in[m,M]}\left|\langle E_\lambda x,y\rangle - \langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,y\rangle\right| \bigvee_m^M (f)$$

$$\leq \max_{\lambda\in[m,M]}\left(\langle E_\lambda x,x\rangle-\langle(1_H-E_\lambda)x,x\rangle\right)^{1/2}\left(\|y\|^2-|\langle y,x\rangle|^2\right)^{1/2}\bigvee_m^M(f)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\|y\|^2-|\langle y,x\rangle|^2\right)^{1/2}\bigvee_m^M(f)\leq\frac{1}{4}|\Gamma-\gamma|\bigvee_m^M(f).$$

(3.106)

2. Eğer $f:[m,M]\to\mathbb{C}$, $[m,M]$ üzerinde $L>0$ sabiti ile Lipschitzian fonksiyon ise o halde

$$\left|\langle f(A)x,y\rangle-\langle x,y\rangle\langle f(A)x,x\rangle\right|$$

$$\leq L\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x,y\rangle-\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,y\rangle\right|d\lambda$$

$$\leq L\left(\|y\|^2-|\langle y,x\rangle|^2\right)^{1/2}\int_{m-0}^{M}\left(\langle E_\lambda x,x\rangle\langle(\langle 1_H-E_\lambda\rangle)x,x\rangle\right)^{1/2}d\lambda$$

$$\leq L\left(\|y\|^2-|\langle y,x\rangle|^2\right)^{1/2}\langle(M1_H-A)x,x\rangle^{1/2}\langle(A-m1_H)x,x\rangle^{1/2}$$

$$\leq\frac{1}{2}(M-m)L\left(\|y\|-|\langle y,x\rangle|^2\right)^{1/2}\leq\frac{1}{4}|\Gamma-\gamma|(M-m)L.$$

(3.107)

eşitsizliği yazabiliriz.

3. Eğer $f:[m,M]\to\mathbb{R}$, $[m,M]$ üzerinde monotonik azalmayan sürekli bir fonksiyon ise, o zaman

$$\left|\langle f(A)x,y\rangle-\langle x,y\rangle\langle f(A)x,x\rangle\right|$$

$$\leq\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x,y\rangle-\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,y\rangle\right|df(\lambda)$$

$$\leq\left(\|y\|^2-\left|\langle y,x\rangle^2\right|\right)^{1/2}\int_{m-0}^{M}\left(\langle E_\lambda x,x\rangle\langle(1_H-E_\lambda)x,x\rangle\right)^{1/2}df(\lambda)$$

$$\leq\left(\|y\|^2-|\langle y,x\rangle|^2\right)^{1/2}$$

$$\times\langle(f(M)1_H-f(A))x,x\rangle^{1/2}\langle(f(A)-f(m)1_H)x,x\rangle^{1/2}$$

$$\leq\frac{1}{2}[f(M)-f(m)]\left(\|y\|^2-|\langle y,x\rangle|^2\right)^{1/2}\leq\frac{1}{4}|\Gamma-\gamma|[f(M)-f(m)].$$

(3.108)

Eşitsizliğini yazabiliriz.

İspat. İlk olarak, H da Schwarz eşitsizliğinden her $u,v,e\in H$ $\|e\|=1$ için,

$$\left|\langle u,v\rangle-\langle u,e\rangle\langle e,v\rangle\right|\leq\left(\|u\|^{2}-\left|\langle u,e\rangle\right|^{2}\right)^{1/2}\left(\|v\|^{2}-\left|\langle v,e\rangle\right|^{2}\right)^{1/2} \tag{3.109}$$

yazabiliriz.

Şimdi (3.107) kullanarak, her $\lambda\in[m,M]$ için

$$\left|\langle E_{\lambda}x,y\rangle-\langle E_{\lambda}x,x\rangle\langle x,y\rangle\right|\leq\left(\|E_{\lambda}x\|^{2}-\left|\langle E_{\lambda}x,x\rangle\right|^{2}\right)^{1/2}\left(\|y\|^{2}-\left|\langle y,x\rangle\right|^{2}\right)^{1/2} \tag{3.110}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. E_{λ} lar projeksiyon ve $E_{\lambda}\geq 0$ olduğundan, her $x\in H$, $\|x\|=1$ ve $\lambda\in[m,M]$ için

$$\|E_{\lambda}x\|^{2}-\left|\langle E_{\lambda}x,x\rangle\right|^{2}=\langle E_{\lambda}x,x\rangle-\langle E_{\lambda}x,x\rangle^{2}=\langle E_{\lambda}x,x\rangle\langle(1_{H}-E_{\lambda})x,x\rangle\leq\frac{1}{4} \tag{3.111}$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca, Dragomir ’in elde ettiği iç çarpım uzaylarında Grüss tipli eşitsizliği kullanarak

$$\left(\|y\|^{2}-\left|\langle y,x\rangle\right|^{2}\right)\leq\frac{1}{2}\left|\Gamma-\gamma\right|. \tag{3.112}$$

yazabiliriz.

(3.110) ve (3.112)’deki bağıntıları birleştirerek, her $\lambda\in[m,M]$ için

$$\begin{aligned}\left|\langle E_{\lambda}x,y\rangle-\langle E_{\lambda}x,x\rangle\langle x,y\rangle\right|&\leq\left(\langle E_{\lambda}x,x\rangle\langle(1_{H}-E_{\lambda})x,x\rangle\right)^{1/2}\left(\|y\|^{2}-\left|\langle y,x\rangle\right|^{2}\right)^{1/2}\\&\leq\frac{1}{2}\left(\|y\|^{2}-\left|\langle y,x\rangle\right|^{2}\right)^{1/2}\leq\frac{1}{4}\left|\Gamma-\gamma\right|\end{aligned} \tag{3.113}$$

yazabiliriz. Eğer $p:[a,b]\to\square$ sürekli bir fonksiyon, $v:[a,b]\to\square$ sınırlı varyasyonlu bir fonksiyon ise bu durumda $\int_{a}^{b}p(t)dv(t)$ Riemann-Stieltjes integrali vardır ve aşağıdaki

$$\left|\int_{a}^{b}p(t)\,dv(t)\right|\leq\max_{t\in[a,b]}\left|p(t)\right|\bigvee_{a}^{b}(v), \tag{3.114}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $\bigvee_{a}^{b}(v)$, $[a,b]$ üzerinde v ’nin total varyasyonunu gösterir.

Riemann-Stieltjes integralinin bu özelliğini kullanarak

$$\left|\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_{\lambda}x,y\rangle-\langle E_{\lambda}x,x\rangle\langle x,y\rangle\right]df(\lambda)\right|$$

$$\leq\max_{\lambda\in[m,M]}\left|\langle E_{\lambda}x,y\rangle-\langle E_{\lambda}x,x\rangle\langle x,y\rangle\right|\bigvee_{m}^{M}(f)$$

$$\max_{\lambda\in[m,M]}\left(\langle E_\lambda x,x\rangle\langle(1_H-E_\lambda)x,x\rangle\right)^{1/2}\left(\|y\|^2-|\langle y,x\rangle|^2\right)^{1/2}\bigvee_m^M(f)$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\|y\|^2-|\langle y,x\rangle|^2\right)^{1/2}\bigvee_m^M(f)\leq\frac{1}{4}|\Gamma-\gamma|\bigvee_m^M(f) \qquad (3.115)$$

yazabiliriz. Burada x ve y teoremin şartlarındandır. Şimdi Riemann-Stieltjes integralinde kısmi integrasyonu ve spektral gösterim teoremini kullanarak

$$\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_\lambda x,y\rangle-\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,y\rangle\right]d\,f(\lambda)$$

$$=\left[\langle E_\lambda x,y\rangle-\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,y\rangle\right]f(\lambda)\Big|_{m-0}^{M}$$

$$-\int_{m-0}^{M}f(\lambda)d\left[\langle E_\lambda x,y\rangle-\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,y\rangle\right]$$

$$=\langle x,y\rangle\int_{m-0}^{M}f(\lambda)d\langle E_\lambda x,x\rangle-\int_{m-0}^{M}f(\lambda)d\langle E_\lambda x,y\rangle$$

$$=\langle x,y\rangle\langle f(A)x,x\rangle-\langle f(A)x,y\rangle \qquad (3.116)$$

yazabiliriz. Böylece (3.115) ile beraber istenilen (3.116) elde edilir. Şimdi, eğer $p:[a,b]\to\mathbb{C}$ bir Riemann integrallenebilir fonksiyon ve $v:[a,b]\to\mathbb{C}$ $L>0$ sabiti ile Lipschitzian ise, yani her $t,s\in[a,b]$ için

$$|f(s)-f(t)|\leq L|s-t|$$

ise, o zaman $\int_a^b p(t)dv(t)$ Riemann-Stieltjes integrali vardır ve aşağıdaki

$$\left|\int_a^b p(t)dv(t)\right|\leq L\int_a^b|p(t)|dt.$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi, Riemann-Stieltjes integralinin bu özelliği uygulayarak (3.113)'den

$$\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_\lambda x,y\rangle-\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,y\rangle\right]df(\lambda)\leq L\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x,y\rangle-\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,y\rangle\right|d\lambda$$

$$\leq L\left(\|y\|^2-|\langle y,x\rangle|^2\right)^{1/2}\int_{m-0}^{M}\left(\langle E_\lambda x,x\rangle\langle(1_H-E_\lambda)x,x\rangle\right)^{1/2}d\lambda. \qquad (3.117)$$

Eğer Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz integral eşitsizliğini ve spektral gösterim teoremini uygularsak, sırasıyla

$$\int_{m-0}^{M}\left(\langle E_\lambda x,x\rangle\langle(1_H-E_\lambda)x,x\rangle\right)^{1/2}d\lambda$$

$$\leq \left[\int_{m-0}^{M} \langle E_\lambda x, x\rangle d\lambda\right]^{1/2} \left[\int_{m-0}^{M} \langle (1_H - E_\lambda) x, x\rangle d\lambda\right]^{1/2}$$

$$= \left[\langle E_\lambda x, x\rangle \lambda\Big|_{m-0}^{M} - \int_{m-0}^{M} \lambda d\langle E_\lambda x, x\rangle\right]^{1/2}$$

$$\times \left[\langle (1_H - E_\lambda) x, x\rangle \lambda\Big|_{m-0}^{M} - \int_{m-0}^{M} \lambda d\langle (1_H - E_\lambda) x, x\rangle\right]$$

$$= \langle (M1_H - A) x, x\rangle^{1/2} \langle (A - m1_H) x, x\rangle^{1/2}.$$

(3.118)

yazabiliriz.

(3.116), (3.117) ve (3.118) kullanarak (3.107)'nın ilk üç eşitsizliğini göstermiş oluruz. Dördüncü eşitsizliği

$$\langle (M1_H - A) x, x\rangle \langle (A - m1_H) x, x\rangle$$

$$\leq \frac{1}{4}\left[\langle (M1_H - A) x, x\rangle + \langle (A - m1_H) x, x\rangle\right]^2 = \frac{1}{4}(M-m)^2.$$

var olan eşitsizliğinden elde etmiş oluruz. (3.112)'den son kısım gösterilmiş olur. Dahası, Riemann-Stieltjess integralin teorisinden, literatürde iyi bilinen eğer $p:[a,b]\to\mathbb{C}$ sınırlı varyasyonlu ve $v:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli ve monotonik azalmayan ise, o zaman $\int_a^b p(t)dv(t)$ ve $\int_a^b |p(t)|dv(t)$ Riemann-Stieltjess integralleri vardır ve

$$\left|\int_a^b p(t)\,dv(t)\right| \leq \int_a^b |p(t)|\,dv(t). \tag{3.119}$$

(3.113) eşitsizliğini ve bu özelliği kullanarak sırasıyla

$$\left|\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_\lambda x, y\rangle - \langle E_\lambda x, x\rangle\langle x, y\rangle\right] df(\lambda)\right|$$

$$\leq \int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x, y\rangle - \langle E_\lambda x, x\rangle\langle x, y\rangle\right| df(\lambda)$$

$$\leq \left(\|y\|^2 - |\langle y, x\rangle|^2\right)^{1/2} \int_{m-0}^{M}\left(\langle E_\lambda x, x\rangle\langle (1_H - E_\lambda) x, x\rangle\right)^{1/2} df(\lambda).$$

(3.120)

elde ederiz. Monotonik integratör ile Riemann-Stieltjes integrali için Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz integrali eşitsizliğini ve spectrol gösterim teoremini uygulayarak

$$\int_{m-0}^{M}\left(\left\langle E_\lambda x,x\right\rangle\left\langle\left(1_H-E_\lambda\right)x,x\right\rangle\right)^{1/2}df\left(\lambda\right)$$

$$\leq\left[\int_{m-0}^{M}\left\langle E_\lambda x,x\right\rangle df\left(\lambda\right)\right]^{1/2}\left[\int_{m-0}^{M}\left\langle\left(1_H-E_\lambda\right)x,x\right\rangle df\left(\lambda\right)\right]^{1/2}$$

$$=\left[\left\langle E_\lambda x,x\right\rangle f\left(\lambda\right)\Big|_{m-0}^{M}-\int_{m-0}^{M}f\left(\lambda\right)d\left\langle E_\lambda x,x\right\rangle\right]^{1/2}$$

$$\times\left[\left\langle\left(1_H-E_\lambda\right)x,x\right\rangle f\left(\lambda\right)\Big|_{m-0}^{M}-\int_{m-0}^{M}f\left(\lambda\right)d\left\langle\left(1_H-E_\lambda\right)x,x\right\rangle\right]^{1/2}$$

$$=\left\langle\left(f\left(M\right)1_H-f\left(A\right)\right)x,x\right\rangle^{1/2}\left\langle\left(f\left(A\right)-f\left(m\right)1_H\right)x,x\right\rangle^{1/2}$$

$$\leq\frac{1}{2}\left[f\left(M\right)-f\left(m\right)\right]$$

(3.121)

yazabiliriz ve ispat tamamlanmış oluruz.

Sonuç 3. 55. Eğer x,y üzerindeki şartları düşünürsek, (3.106) ve (3.107) eşitsizliklerinden özel fonksiyonlar için kolay uygulanan aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

1) Eğer $f:\left[m,M\right]\rightarrow\mathbb{C}$,$\left[m,M\right]$üzerinde sınırlı varyasyonlu sürekli fonksiyon ise o zaman her $x,y\in H$, $x\neq 0$ için

$$\left|\left\langle f\left(A\right)x,y\right\rangle\left\|x\right\|^2-\left\langle x,y\right\rangle\left\langle f\left(A\right)x,x\right\rangle\right|$$

$$\leq\frac{1}{2}\left\|x\right\|^2\left(\left\|y\right\|^2\left\|x\right\|^2-\left|\left\langle y,x\right\rangle\right|^2\right)^{1/2}\bigvee_m^M\left(f\right)$$

(3.122)

eşitsizliğini elde ederiz.

2) Eğer $f:\left[m,M\right]\rightarrow\mathbb{C}$,$\left[m,M\right]$üzerinde $L>0$ ile bir Lipschitzian fonksiyon ise her $x,y\in H$, $x\neq 0$ için

$$\left|\left\langle f\left(A\right)x,y\right\rangle\left\|x\right\|^2-\left\langle x,y\right\rangle\left\langle f\left(A\right)x,x\right\rangle\right|\leq L\left(\left\|y\right\|^2\left\|x\right\|^2-\left|\left\langle y,x\right\rangle\right|^2\right)^{1/2}$$

$$\times\left[\left\langle\left(M1_H-A\right)x,x\right\rangle\left\langle\left(A-m1_H\right)x,x\right\rangle\right]^{1/2}\leq\frac{1}{2}\left(M-m\right)L\left\|x\right\|^2\left(\left\|y\right\|^2\left\|x\right\|^2-\left|\left\langle y,x\right\rangle\right|^2\right)^{1/2}$$

(3.123)

eşitsizliği doğrudur.

3) Eğer $f:[m,M]\to\mathbb{R}$, $[m,M]$ üzerinde monotonik azalmayan sürekli bir fonksiyon ise o zaman her $x,y\in H$, $x\neq 0$ için

$$\left|\langle f(A)x,y\rangle\|x\|^2-\langle x,y\rangle\langle f(A)x,x\rangle\right|\le\left(\|y\|^2\|x\|^2-|\langle y,x\rangle|^2\right)^{1/2}$$

$$\times\left[\langle (f(M)1_H-f(A))x,x\rangle\langle (f(A)-f(m)1_H)x,x\rangle\right]^{1/2}$$

$$\le\frac{1}{2}\left[f(M)-f(m)\right]\|x\|^2\left(\|y\|^2\|x\|^2-|\langle y,x\rangle|^2\right)^{1/2}$$

(3.124)

Sonuç 3. 56. Teorem 3.54 varsayımlarıyla ve eğer $f:[m,M]\to\mathbb{R}$, bir (φ,Φ)-Lipshitzian fonksiyon ise, o zaman

$$\left|\langle f(A)x,y\rangle-\langle x,y\rangle\langle f(A)x,x\rangle\right|$$

$$\le\frac{1}{2}(\Phi-\varphi)\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x,y\rangle-\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,y\rangle\right|d\lambda$$

$$\le\frac{1}{2}(\Phi-\varphi)\left(\|y\|^2-|\langle y,x\rangle|^2\right)^{1/2}\int_{m-0}^{M}\left(\langle E_\lambda x,x\rangle\langle (1_H-E_\lambda)x,x\rangle\right)^{1/2}d\lambda$$

$$\le\frac{1}{2}(\Phi-\varphi)\left(\|y\|^2-|\langle y,x\rangle|^2\right)^{1/2}$$

$$\times\langle (M1_H-A)x,x\rangle^{1/2}\langle (A-m1_H)x,x\rangle^{1/2}$$

$$\le\frac{1}{4}(M-m)(\Phi-\varphi)\left(\|y\|^2-|\langle y,x\rangle|^2\right)^{1/2}$$

$$\le\frac{1}{8}|\Gamma-\gamma|(M-m)(\Phi-\varphi).\qquad(3.125)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Teorem 3.54' ün ispatını, eşitsizliğin birinci teoreminde gerekli hesaplamaları yaparak $\frac{1}{2}(\Phi-\varphi)$-Lipschitzian fonksiyonu $f-\frac{\Phi+\varphi}{2}.e$ için teoremin ikinci kısmına uygulayarak elde ederiz.

3.11.2 Grüss Tipli Eşitsizlik İçin Uygulamalar

Aşağıdaki önerme iki öz eş eşlenik operatörlerin iki fonksiyonları için bazı Grüss tipli eşitsizlikleri vereceğiz.

Önerme 3.57. (Dragomir, 2010) A,B, $m<M$ bazı reel sayılar için $Sp(A)$, $Sp(B)\subseteq[m,M]$ spektrumuna sahip, H Hilbert uzayında iki özeşlenik operatör ve $\{E_\lambda\}_\lambda$ ise A'nın spektral ailesi olsun. Kabul edelim ki $g:[m,M]\to\mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon ve $n:=\min_{t\in[m,M]} g(t)$ ve $N:=\max_{t\in[m,M]} g(t)$ göstersin

1- Eğer $f:[m,M]\to\mathbb{C}$, $[m,M]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu bir sürekli fonksiyon ise o zaman her $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$\left|\langle f(A)x,g(B)x\rangle-\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\right|$$

$$\leq \max_{\lambda\in[m,M]}\left|\langle E_\lambda x,g(B)x\rangle-\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,g(B)x\rangle\right|\bigvee_m^M(f)$$

$$\leq \max_{\lambda\in[m,M]}\left(\langle E_\lambda x,x\rangle\langle(1_H-E_\lambda)x,x\rangle\right)^{1/2}$$

$$\times\left(\|g(B)x\|^2-|\langle g(B)x,x\rangle|^2\right)^{1/2}\bigvee_m^M(f)$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\|g(B)x\|^2-|\langle g(B)x,x\rangle|^2\right)^{1/2}\bigvee_m^M(f)\leq\frac{1}{4}(N-n)\bigvee_m^M(f) \qquad (3.126)$$

eşitsizliği doğrudur.

2- Eğer $f:[m,M]\to\mathbb{C}$, $[m,M]$ üzerinde $L>0$ sabiti ile Lipschitzian fonksiyon ise, o zaman her $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$\left|\langle f(A)x,g(B)x\rangle-\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\right|$$

$$\leq L\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x,g(B)x\rangle-\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,g(B)x\rangle\right|d\lambda$$

$$\leq L\left(\|g(B)x\|^2-|\langle g(B)x,x\rangle|^2\right)^{1/2}$$

$$\times\int_{m-0}^{M}\left(\langle E_\lambda x,x\rangle\langle(1_H-E_\lambda)x,x\rangle\right)^{1/2}d\lambda$$

$$\leq L\left(\|g(B)x\|^2-|\langle g(B)x,x\rangle|^2\right)^{1/2}$$

$$\times\langle(M1_H-A)x,x\rangle^{1/2}\langle(A-m1_H)x,x\rangle^{1/2}$$

$$\leq\frac{1}{2}(M-m)L\left(\|g(B)x\|^2-|\langle g(B)x,x\rangle|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{4}(N-n)(M-m)L \tag{3.127}$$

eşitsizliği doğrudur.

3- Eğer $f:[m,M]\to\mathbb{R}$, $[m,M]$ üzerinde bir monotonik azalamayan sürekli fonksiyon ise, o zaman her $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$\left|\langle f(A)x, g(B)x\rangle - \langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\right|$$

$$\leq \int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x, g(B)x\rangle - \langle E_\lambda x,x\rangle\langle x, g(B)x\rangle\right| df(\lambda)$$

$$\leq \left(\|g(B)x\|^2 - |\langle g(B)x,x\rangle|^2\right)^{1/2}$$

$$\times\int_{m-0}^{M}\left(\langle E_\lambda x,x\rangle\langle (1_H - E_\lambda)x,x\rangle\right)^{1/2} df(\lambda)$$

$$\leq \left(\|g(B)x\|^2 - |\langle g(B)x,x\rangle|^2\right)^{1/2}$$

$$\times\langle (f(M)1_H - f(A))x,x\rangle^{1/2}\langle (f(A)-f(m)1_H)x,x\rangle^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{2}[f(M)-f(m)]\left(\|g(B)x\|^2 - |\langle g(B)x,x\rangle|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{4}(N-n)[f(M)-f(m)] \tag{3.128}$$

eşitsizliği doğrudur.

Sonuç 3.58. Eğer f fonksiyonunu reel değerli ve $[m,M]$ üzerinde (φ,Φ)-Lipschitzian fonksiyon alırsak, o zaman (3.127) eşitsizliğini her $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$\left|\langle f(A)x, g(B)x\rangle - \langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}(\Phi-\varphi)\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x, g(B)x\rangle - \langle E_\lambda x,x\rangle\langle x, g(B)x\rangle\right| d\lambda$$

$$\leq \frac{1}{2}(\Phi-\varphi)\left(\|g(B)x\|^2 - |\langle g(B)x,x\rangle|^2\right)^{1/2}$$

$$\times\int_{m-0}^{M}\left(\langle E_\lambda x,x\rangle\langle (1_H - E_\lambda)x,x\rangle\right)^{1/2} d\lambda$$

$$\leq \frac{1}{2}(\Phi-\varphi)\left(\|g(B)x\|^2 - |\langle g(B)x,x\rangle|^2\right)^{1/2}$$

$$\times\langle (M1_H - A)x,x\rangle^{1/2}\langle (A-m1_H)x,x\rangle^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{4}(M-m)(\Phi-\varphi)\left(\|g(B)x\|^2-|\langle g(B)x,x\rangle|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{8}(N-n)(M-m)(\Phi-\varphi) \tag{3.129}$$

şeklinde yazabiliriz

3.12.İki Operatörlü Grüss Tipli Eşitsizlikler

3.12.1. Bazı Sonuçlar

Bu kısımda, sınırlı varyasyonlu, Lipschitzian fonksiyonlar veya monoton ve sürekli fonksiyonların sürekli fonksiyonlarını içeren farklı fonksiyon seçimleri için çeşitleri sınırları için elde etmede anahtar bir rol oynayacak olan bir teorem vereceğiz.

Teorem 3.59. (Drogamir, 2010) A,B, $m<M$ bazı reel sayıları için $Sp(A)$, $Sp(B)\subseteq[m,M]$ spektrumu ile H Hilbert uzayında iki özeşlenik operatör ve $\{E_\lambda\}_\lambda$, A'nın spektral ailesi $\{F_\mu\}_\mu$, B'nin spektral ailesi olsun. Eğer $f,g:[m,M]\to\mathbb{C}$ sürekli ise, o zaman her $x\in H$ $\|x\|=1$

$$\langle f(A)x,g(B)x\rangle-\langle f(A)x,x\rangle\langle x,g(B)x\rangle$$

$$=\int_{m-0}^{M}\left(\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,F_\mu x\rangle-\langle E_\lambda x,F_\mu x\rangle\right]d\left(g(\mu)\right)\right)d\left(f(\lambda)\right) \tag{3.130}$$

gösterimini yazabiliriz.

İspat. Riemann-Stieltjes integralinde kısmi integrasyon ve gösterim teoremini uygularsak, her $x,y\in H$ ve $\|x\|=\|y\|=1$

$$\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_\lambda x,y\rangle-\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,y\rangle\right]df(\lambda)$$

$$\left[\langle E_\lambda x,y\rangle-\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,y\rangle\right]f(\lambda)\Big|_{m-0}^{M}$$

$$-\int_{m-0}^{M}f(\lambda)d\left[\langle E_\lambda x,y\rangle-\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,y\rangle\right]$$

$$=\langle x,y\rangle\int_{m-0}^{M}f(\lambda)d\langle E_\lambda x,x\rangle-\int_{m-0}^{M}f(\lambda)d\langle E_\lambda x,y\rangle$$

$$\langle x,y\rangle\langle f(A)x,x\rangle-\langle f(A)x,y\rangle \tag{3.131}$$

yazabiliriz. Şimdi eğer (3.131)'de $y=g(B)x$ seçersek, her $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$\int_{m-0}^{M}\left[\left\langle E_{\lambda}x, g(B)x\right\rangle - \left\langle E_{\lambda}x, x\right\rangle\left\langle x, g(B)x\right\rangle\right]df(\lambda)$$

$$\left\langle x, g(B)x\right\rangle\left\langle f(A)x, x\right\rangle - \left\langle f(A)x, g(B)x\right\rangle \tag{3.132}$$

elde ederiz. B için spektral gösterim teoremini kullanırsak, her $\lambda\in[m,M]$ her $x\in H$,$\|x\|=1$

$$\left\langle E_{\lambda}x, g(B)x\right\rangle - \left\langle E_{\lambda}x, x\right\rangle\left\langle x, g(B)x\right\rangle$$

$$=\left\langle E_{\lambda}x, \int_{m-0}^{M} g(\mu)\,dF_{\mu}x\right\rangle - \left\langle E_{\lambda}x, x\right\rangle\left\langle x, \int_{m-0}^{M} g(\mu)\,dF_{\mu}x\right\rangle$$

$$=\int_{m-0}^{M} g(\mu)\,d\left(\left\langle E_{\lambda}x, F_{\mu}x\right\rangle\right) - \left\langle E_{\lambda}x, x\right\rangle\int_{m-0}^{M} g(\mu)\,d\left(\left\langle x, F_{\mu}x\right\rangle\right) \tag{3.133}$$

Riemann –Stieltjes integralinde kısmi integrasyon olarak

$$\int_{m-0}^{M} g(\mu)\,d\left(\left\langle E_{\lambda}x, F_{\mu}x\right\rangle\right)$$

$$= g(\mu)\left\langle E_{\lambda}x, F_{\mu}x\right\rangle\Big]_{m-0}^{M} - \int_{m-0}^{M}\left\langle E_{\lambda}x, F_{\mu}x\right\rangle dg(\mu)$$

$$= g(M)\left\langle E_{\lambda}x, x\right\rangle - \int_{m-0}^{M}\left\langle E_{\lambda}x, F_{\mu}x\right\rangle d\left(g(\mu)\right)$$

ve

$$\int_{m-0}^{M} g(\mu)\,d\left(\left\langle x, F_{\mu}x\right\rangle\right) = g(\mu)\left\langle x, F_{\mu}x\right\rangle\Big]_{m-0}^{M} - \int_{m-0}^{M}\left\langle x, F_{\mu}x\right\rangle d\left(g(\mu)\right)$$

$$= g(M) - \int_{m-0}^{M}\left\langle x, F_{\mu}x\right\rangle d\left(g(\mu)\right),$$

yazabiliriz. Böylece her $x\in H$ $\|x\|=1$ ve $\lambda\in[m,M]$ için

$$\int_{m-0}^{M} g(\mu)\,d\left(\left\langle E_{\lambda}x, F_{\mu}x\right\rangle\right) - \left\langle E_{\lambda}x, x\right\rangle\int_{m-0}^{M} g(\mu)\,d\left(\left\langle x, F_{\mu}x\right\rangle\right)$$

$$= g(M)\left\langle E_{\lambda}x, x\right\rangle - \int_{m-0}^{M}\left\langle E_{\lambda}x, F_{\mu}x\right\rangle d\left(g(\mu)\right)$$

$$-\left\langle E_{\lambda}x, x\right\rangle\left(g(M) - \int_{m-0}^{M}\left\langle x, F_{\mu}x\right\rangle d\left(g(\mu)\right)\right)$$

$$=\left\langle E_{\lambda}x, x\right\rangle\int_{m-0}^{M}\left\langle x, F_{\mu}x\right\rangle d\left(g(\mu)\right) - \int_{m-0}^{M}\left\langle E_{\lambda}x, F_{\mu}x\right\rangle d\left(g(\mu)\right)$$

$$=\int_{m-0}^{M}\left[\left\langle E_{\lambda}x, x\right\rangle\left\langle x, F_{\mu}x\right\rangle - \left\langle E_{\lambda}x, F_{\mu}x\right\rangle\right]d\left(g(\mu)\right) \tag{3.134}$$

elde ederiz.

(3.132)- (3.134) kullanarak istenilen (3.129)'u elde etmiş oluruz.

Sonuç 3. 60 Özel olarak, eğer $B=A$ alırsak o zaman (3.113)'ten, her $x\in H$ $\|x\|=1$ için

$$\langle f(A)x, g(A)x\rangle - \langle f(A)x, x\rangle\langle x, g(A)x\rangle$$
$$= \int_{m-0}^{M}\left(\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_\lambda x, x\rangle\langle x, E_\mu x\rangle - \langle E_\lambda x, E_\mu x\rangle\right] d(g(\mu))\right) d(f(\lambda))$$
(3.135)

yazabiliriz. Burada $g = f$ için $f(A)$ özeşlenik operatörlerin varyansları için gösterim sonucu üretir ve her $x \in H$ $\|x\| = 1$ için

$$\|f(A)x\|^2 - \langle f(A)x, x\rangle^2$$
$$= \int_{m-0}^{M}\left(\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_\lambda x, x\rangle\langle x, E_\mu x\rangle - \langle E_\lambda x, E_\mu x\rangle d(f(\mu))\right]\right) d(f(\lambda)) \qquad (3.136)$$

3.12.2. Sınırlı Varyasyonlu f İçin Sınırlar

Bu kısımda aşağıdaki teoremde, fonksiyonların biri sınırlı varyasyonlu olduğunda birinci Vektörel Grüss Tipli eşitsizliğin durumunu ifade edeceğiz.

Teorem 3.61. A, B, $m < M$ bazı reel sayılar için $Sp(A), Sp(B) \subseteq [m, M]$ spektrumlarıyla H Hilbert uzayında iki özeşlenik operatör ve $\{E_\lambda\}_\lambda$ A'nın spektral ailesi $\{F_\mu\}_\mu$ B'nin spektral ailesi olsun. Ayrıca $f : [m, M] \to \mathbb{C}$ sürekli ve $[m, M]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu olduğunu kabul edelim.

1. Eğer $g : [m, M] \to \mathbb{C}$ sürekli $[m, M]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu ise, o zaman her $x \in H$, $\|x\| = 1$ için

$$\left|\langle f(A)x, g(B)x\rangle - \langle f(A)x, x\rangle\langle x, g(B)x\rangle\right|$$
$$\leq \max_{(\lambda,\mu)\in[m,M]^2}\left|\langle E_\lambda x, x\rangle\langle x, F_\mu x\rangle - \langle E_\lambda x, F_\mu x\rangle\right| \bigvee_m^M \bigvee_m^M (f)$$
$$\leq \max_{\lambda\in[m,M]}\left[\langle E_\lambda x, x\rangle\langle (1_H - E_\lambda)x, x\rangle\right]^{1/2}$$
$$\times \max_{\mu\in[m,M]}\left[\langle F_\mu x, x\rangle\langle (1_H - F_\mu)x, x\rangle\right]^{1/2} \bigvee_m^M (g) \bigvee_m^M (f)$$
$$\leq \frac{1}{4}\bigvee_m^M (g)\bigvee_m^M (f)$$
(3.137)

eşitsizliğini yazabiliriz.

2. Eğer $g:[m,M]\to\mathbb{R}$, $[m,M]$ üzerinde $K>0$ sabiti ile Lipschitzian ise o zaman $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$\left|\langle f(A)x,g(B)x\rangle-\langle f(A)x,x\rangle\langle x,g(B)x\rangle\right|$$

$$\leq K\max_{\lambda\in[m,M]}\left[\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,F_\mu x\rangle-\langle E_\lambda x,F_\mu x\rangle\right|d\mu\right]\bigvee_m^M(f)$$

$$\leq K\bigvee_m^M(f)\max_{\lambda\in[m,M]}\left[\langle E_\lambda x,x\rangle\langle(1_H-F_\mu)x,x\rangle\right]^{1/2}$$

$$\times\int_{m-0}^{M}\left[\langle F_\mu x,x\rangle\langle(1_H-F_\mu)x,x\rangle\right]^{1/2}d\mu$$

$$\leq\frac{1}{2}K\bigvee_m^M(f)\langle(M1_H-B)x,x\rangle^{1/2}\langle(B-m1_H)x,x\rangle^{1/2}$$

$$\leq\frac{1}{4}K(M-m)\bigvee_m^M(f)\tag{3.138}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

3. Eğer $g:[m,M]\to\mathbb{R}$ sürekli ve $[m,M]$ üzerinde monotonik azalmayan ise, o zaman $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$\left|\langle f(A)x,g(B)x\rangle-\langle f(A)x,x\rangle\langle x,g(B)x\rangle\right|$$

$$\leq\max_{\lambda\in[m,M]}\left[\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,F_\mu x\rangle-\langle E_\lambda x,F_\mu x\rangle\right|dg(\mu)\right]\bigvee_m^M(f)$$

$$\leq\bigvee_m^M(f)\max_{\lambda\in[m,M]}\left[\langle E_\lambda x,x\rangle\langle(1_H-E_\lambda)x,x\rangle\right]^{1/2}$$

$$\times\int_{m-0}^{M}\left[\langle F_\mu x,x\rangle\langle(1_H-F_\mu)x,x\rangle\right]^{1/2}dg(\mu)$$

$$\leq\frac{1}{2}\bigvee_m^M(f)\langle(g(M)1_H-g(B))x,x\rangle^{1/2}\langle(g(B)-g(m)1_H)x,x\rangle^{1/2}$$

$$\leq\frac{1}{4}[g(M)-g(m)]\bigvee_m^M\tag{3.139}$$

İspat. 1. Eğer $p:[a,b]\to\mathbb{C}$ sürekli fonksiyon, $v:[a,b]\to\mathbb{C}$ sınırlı varyasyonlu ise, o zaman $\int_a^b p(t)dv(t)$ Riemann-Stieltjes integrali vardır ve

$$\left|\int_a^b p(t)dv(t)\right|\leq\max_{t\in[a,b]}|p(t)|\bigvee_a^b(v),\tag{3.140}$$

Burada $\bigvee_a^b(v)$, $[a,b]$ üzerinde v'nin total varyasyonunu gösterir. Şimdi (3.140) özelliği ve (3.130) eşitsizliğini kullanarak, her $x\in[m,M]$

$$\left|\langle f(A)x,g(B)x\rangle-\langle f(A)x,x\rangle\langle x,g(B)x\rangle\right|$$

$$\leq \max_{\lambda\in[m,M]}\left|\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,F_\mu x\rangle-\langle E_\lambda x,F_\mu x\rangle\right]d\left(g(\mu)\right)\right|\bigvee_m^M(f) \quad (3.141)$$

elde ederiz. (3.140) eşitsizliğinde aynı sınırı üzerinde her $x\in[m,M]$ için

$$\max_{\lambda\in[m,M]}\left|\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,F_\mu x\rangle-\langle E_\lambda x,F_\mu x\rangle\right]d\left(g(\mu)\right)\right|$$

$$\leq \max_{\lambda\in[m,M]}\left[\max_{\mu\in[m,M]}\left|\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,F_\mu x\rangle-\langle E_\lambda x,F_\mu x\rangle\right|\right]\bigvee_m^M(f)$$

$$=\max_{(\lambda,\mu)\in[m,M]^2}\left|\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,F_\mu x\rangle-\langle E_\lambda x,F_\mu x\rangle\right|\bigvee_m^M(f) \quad (3.142)$$

(3.141) ve (3.142)'i kullanarak (3.137)'nin ilk kısmını göstermiş oluruz. Dahası H 'da Schwarz eşitsizliğinden her $u,v,e\in H$ $\|e\|=1$ için,

$$\left|\langle u,v\rangle-\langle u,e\rangle\langle e,v\rangle\right|\leq\left(\|u\|^2-\left|\langle u,e\rangle\right|^2\right)^{1/2}\left(\|v\|^2-\left|\langle v,e\rangle\right|^2\right)^{1/2}. \quad (3.143)$$

yazabiliriz. Aslında, eğer $u-\langle u,e\rangle e$ ve $v-\langle v,e\rangle e$ vektörleri için Schwarz'ın eşitsizliğini yazarsak,

$$\left|\langle u-\langle u,e\rangle e, v-\langle v,e\rangle e\rangle\right|\leq\left\|u-\langle u,e\rangle e\right\|\left\|v-\langle v,e\rangle e\right\|$$

hesaplamaları yapabiliriz. Bu da (3.142) ile denktir.

Şimdi, (3.143) kullanarak her $\lambda,\mu\in[m,M]$

$$\left|\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,F_\mu x\rangle-\langle E_\lambda x,F_\mu x\rangle\right|\leq\left(\|E_\lambda x\|^2-\left|\langle E_\lambda x,x\rangle\right|^2\right)\left(\|F_\mu x\|^2-\left|\langle F_\mu x,x\rangle\right|^2\right)^{1/2} \quad (3.144)$$

E_λ ve F_μ prejoksiyon ve $E_\lambda, F_\mu\geq 0$ olduğundan o zaman $\lambda,\mu\in[m,M]$ ve $x\in H,\|x\|=1$ için

$$\|E_\lambda x\|^2-\left|\langle E_\lambda x,x\rangle\right|^2=\langle E_\lambda x,x\rangle-\langle E_\lambda x,x\rangle^2=\langle E_\lambda x,x\rangle\langle(1_H-E_\lambda)x,x\rangle\leq\frac{1}{4} \quad (3.145)$$

ve

$$\|F_\mu x\|^2 - \left|\langle F_\mu x, x\rangle\right|^2 = \langle F_\mu x, x\rangle \left\langle (1_H - F_\mu) x, x\right\rangle \le \frac{1}{4} \tag{3.146}$$

Şimdi (3.144)-(3.146) kullanırsak , (3.137)'nin ikinci kısmını elde etmiş oluruz.

2. Eğer $p:[a,b]\to\mathbb{C}$ Riemann integrallebilir fonksiyon ve $v:[a,b]\to\mathbb{C}$, $L>0$ sabiti ile Lipschitzian ise, yani her $t,s\in[a,b]$ için

$$|f(s)-f(t)|\le L|s-t|$$

İse o zaman $\int_a^b p(t)\,dv(t)$ Riemann-Stieltjes integrali vardır ve

$$\left|\int_a^b p(t)\,dv(t)\right| \le L\int_a^b |p(t)|\,dt. \tag{3.147}$$

Eğer (3.147)'i kullanırsak, o zaman g , $K>0$ sabiti ile Lipschitzian olduğunda, her $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$\begin{aligned}
&\max_{\lambda\in[m,M]}\left|\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_\lambda x, x\rangle\langle x, F_\mu x\rangle - \langle E_\lambda x, F_\mu x\rangle\right] d\left(g(\mu)\right)\right| \\
&\le K \max_{\lambda\in[m,M]}\left[\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x, x\rangle\langle x, F_\mu x\rangle - \langle E_\lambda x, F_\mu x\rangle\right| d\mu\right]
\end{aligned} \tag{3.148}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Böylece (3.138)'in ilk kısmı ispatlanmış olur. Dahası, (4.127)-(4.129)' dan, her $x\in H$, $\|x\|=1$ için ayrıca

$$\begin{aligned}
&\max_{\lambda\in[m,M]}\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x, x\rangle\langle x, F_\mu x\rangle - \langle E_\lambda x, F_\mu x\rangle\right| d\mu \\
&\le \max_{\lambda\in[m,M]}\left[\langle E_\lambda x, x\rangle\left\langle (1_H - E_\lambda)x, x\right\rangle\right]^{1/2} \times\int_{m-0}^{M}\left[\langle F_\mu x, x\rangle\left\langle (1_H - F_\mu)x, x\right\rangle\right]^{1/2} d\mu
\end{aligned} \tag{3.149}$$

Eğer Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz integral eşitsizliğini ve spektral gösterim teoremini uygularsak o zaman

$x\in H$, $\|x\|=1$ için sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\int_{m-0}^{M}\left(\langle F_\mu x, x\rangle\left\langle (1_H - F_\mu)x, x\right\rangle\right)^{1/2} d\mu \\
&\le\left[\int_{m-0}^{M}\langle F_\mu x, x\rangle\, d\mu\right]^{1/2}\left[\int_{m-0}^{M}\left\langle (1_H - F_\mu)x, x\right\rangle\right]^{1/2} \\
&=\left[\langle F_\mu x, x\rangle\,\mu\Big|_{m-0}^{M} - \int_{m-0}^{M}\mu\, d\langle F_\mu x, x\rangle\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\times\left[\left\langle\left(1_H - F_\mu\right)x, x\right\rangle \mu\Big|_{m-0}^{M} - \int_{m-0}^{M} \mu d\left\langle\left(1_H - F_\mu\right)x, x\right\rangle\right]$$

$$= \left\langle\left(M1_H - B\right)x, x\right\rangle^{1/2}\left\langle\left(B - m1_H\right)x, x\right\rangle^{1/2} \tag{3.150}$$

Böylece (3.148)-(3.150) den, (3.138)'in ikinci kısmını göstermiş oluruz.

$$\alpha\beta \le \frac{1}{4}\left(\alpha + \beta\right)^2, \alpha\beta \ge 0 \tag{3.151}$$

Temel eşitsizliğinde $\alpha = \left\langle\left(M1_H - B\right)x, x\right\rangle$ ve $\beta = \left\langle\left(B - m1_H\right)x, x\right\rangle$ seçerek (3.121)'in son kısmını ispatlamış oluruz

3. Riemann-Stieltjes integralinin teorisinden ayrıca, eğer $p:[a,b] \to \mathbb{C}$ sınırlı varyasyonlu ve $v:[a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve monotonik azalmayan ise, o zaman $\int_a^b p(t)dv(t)$ ve $\int_a^b |p(t)|dv(t)$ Riemann-Stieltjes integralleri vardır ve

$$\left|\int_a^b p(t)\,dv(t)\right| \le \int_a^b |p(t)|\,dv(t). \tag{3.152}$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi eğer g, $[m, M]$ üzerinde monotonik azalmayan ise, o zaman (3.152)'den her $x \in H, \|x\| = 1$ için

$$\max_{\lambda\in[m,M]}\left|\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_\lambda x, x\rangle\langle x, F_\mu x\rangle - \langle E_\lambda x, F_\mu x\rangle\right]d\left(g(\mu)\right)\right|$$

$$\le \max_{\lambda\in[m,M]}\left[\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x, x\rangle\langle x, F_\mu x\rangle - \langle E_\lambda x, F_\mu x\rangle\right|dg(\mu)\right] \tag{3.153}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Dahası (3.144)-(3.146)'dan her $x \in H, \|x\| = 1$ için

$$\max_{\lambda\in[m,M]}\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x, x\rangle\langle x, F_\mu x\rangle - \langle E_\lambda x, F_\mu x\rangle\right|dg(\mu)$$

$$\le \max_{\lambda\in[m,M]}\left[\langle E_\lambda x, x\rangle\left\langle\left(1_H - E_\lambda\right)x, x\right\rangle\right]^{1/2}$$

$$\times\int_{m-0}^{M}\left[\langle F_\mu x, x\rangle\left\langle\left(1_H - F_\mu\right)x, x\right\rangle\right]^{1/2} dg(\mu) \tag{3.154}$$

Böylece (3.139)'un ilk kısmı ispatlanmış olur. Eğer monotonik azalmayan integrallerle Riemann-Stieltjes integral için Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz integral eşitsizliğini ve spektral gösterim teoremini kullanırsak, o zaman her $x \in H$ $\|x\| = 1$ için sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\int_{m-0}^{M} \left(\langle F_\mu x, x \rangle \langle (1_H - F_\mu) x, x \rangle \right)^{1/2} dg(\mu) \\
&\leq \left[\int_{m-0}^{M} \langle F_\mu x, x \rangle dg(\mu) \right]^{1/2} \left[\int_{m-0}^{M} \langle (1_H - F_\mu) x, x \rangle dg(\mu) \right]^{1/2} \\
&= \left[\langle F_\mu x, x \rangle g(\mu) \Big|_{m-0}^{M} - \int_{m-0}^{M} g(\mu) d \langle F_\mu x, x \rangle \right]^{1/2} \\
&\times \left[\langle (1_H - F_\mu) x, x \rangle g(\mu) \Big|_{m-0}^{M} - \int_{m-0}^{M} g(\mu) \langle (1_H - F_\lambda) x, x \rangle \right]^{1/2} \\
&= \langle (g(M) 1_H - g(B)) x, x \rangle^{1/2} \langle (g(B) - g(m) 1_H) x, x \rangle^{1/2} \quad (3.155)
\end{aligned}$$

şitsizliğini yazabiliriz. (3.155)'i kullanarak (3.139)'un son kısmı da ispatlanmış olur.

Sonuç 3.62. A, $m < M$ bazı reel sayıları için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ spektrumuyla H Hilbert uzayında bir özeşlenik operatör ve $\{E_\lambda\}_\lambda$ A'nın spektral ailesi olsun. Ayrıca $f : [m, M] \to \mathbb{R}$ sürekli $[m, M]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu kabul edelim.

1. Eğer $g : [m, M] \to \mathbb{R}$ sürekli $[m, M]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu ise, o zaman her $x \in H$ $\|x\| = 1$ için

$$\begin{aligned}
&\left| \langle f(A) x, g(A) x \rangle - \langle f(A) x, x \rangle \langle x, g(A) x \rangle \right| \\
&\leq \max_{(\lambda, \mu) \in [m, M]^2} \left| \langle E_\lambda x, x \rangle \langle x, E_\mu x \rangle - \langle E_\lambda x, E_\mu x \rangle \right| \bigvee_m^M (g) \bigvee_m^M (f) \\
&\leq \max_{(\lambda, \mu) \in [m, M]} \left[\langle E_\lambda x, x \rangle \langle (1_H - E_\lambda) x, x \rangle \right] \bigvee_m^M (g) \bigvee_m^M (f) \\
&\leq \frac{1}{4} \bigvee_m^M (g) \bigvee_m^M (f)
\end{aligned} \quad (3.156)$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

2. Eğer $g : [m, M] \to \mathbb{R}$, $[m, M]$ Üzerinde $K > 0$ sabiti ile Lipschitzian ise o zaman her $x \in H$, $\|x\| = 1$

$$\left|\langle f(A)x, g(A)x\rangle - \langle f(A)x, x\rangle\langle x, g(A)x\rangle\right|$$

$$\leq K \max_{\lambda\in[m,M]}\left[\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x, x\rangle\langle x, E_\mu x\rangle - \langle E_\lambda x, E_\mu x\rangle\right| d\mu\right]\bigvee_m^M(f)$$

$$\leq K\bigvee_m^M(f)\max_{\lambda\in[m,M]}\left[\langle E_\lambda x, x\rangle\langle(1_H - E_\lambda)x, x\rangle\right]^{1/2}$$

$$\times\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_\mu x, x\rangle\langle(1_H - E_\mu)x, x\rangle\right]^{1/2} d\mu$$

$$\leq \frac{1}{2}K\bigvee_m^M(f)\langle(M1_H - A)x, x\rangle^{1/2}\langle(A - m1_H)x, x\rangle^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{4}K(M-m)\bigvee_m^M(f) \tag{3.157}$$

3. Eğer $g:[m,M]\to\mathbb{R}$ sürekli ve $[m,M]$ üzerinde monotonik azalmayan ise, o zaman her $x\in H$, $\|x\|=1$ için

$$\left|\langle f(A)x, g(A)x\rangle - \langle f(A)x, x\rangle\langle x, g(A)x\rangle\right|$$

$$\leq \max_{\lambda\in[m,M]}\left[\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x, x\rangle\langle x, E_\mu x\rangle - \langle E_\lambda x, E_\mu x\rangle\right| dg(\mu)\right]\bigvee_m^M(f)$$

$$\leq \bigvee_m^M(f)\max_{\lambda\in[m,M]}\left[\langle E_\lambda x, x\rangle\langle(1_H - E_\lambda)x, x\rangle\right]^{1/2}$$

$$\times\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_\mu x, x\rangle\langle(1_H - E_\mu)x, x\rangle\right]^{1/2} dg(\mu)$$

$$\leq \frac{1}{2}\bigvee_m^M(f)\langle(g(M)1_H - g(A))x, x\rangle^{1/2}\langle(g(A) - g(m)1_H)x, x\rangle^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{4}\left[g(M) - g(m)\right]\bigvee_m^M(f)$$

(3.158)

Sonuç 3.63. A, $m<M$ bazı reel sayılar için $Sp(A)\subseteq[m,M]$ spektrumu ile H Hilbert uzayında bir özeşlenik operatör ve $\{E_\lambda\}_\lambda$ A'nın spektral ailesi $f:[m,M]\to\mathbb{C}$ sürekli ve $[m,M]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu şartları altında $f(A)$'nın değişkenleri için, her $x\in H, \|x\|=1$ için

$$0 \leq \|f(A)x\|^2 - \langle f(A)x, x\rangle^2$$

$$\leq \max_{(\lambda,\mu)\in[m,M]^2}\left|\langle E_\lambda x, x\rangle\langle x, E_\mu x\rangle - \langle E_\lambda x, E_\mu x\rangle\right|\left[\bigvee_m^M(f)\right]^2$$

$$\leq \max_{\lambda\in[m,M]}\left[\langle E_\lambda x,x\rangle\langle(1_H-E_\lambda)x,x\rangle\right]\left[\bigvee_m^M(f)\right]\leq\frac{1}{4}\left[\bigvee_m^M(f)\right]$$

(3.159)

3.12.3. f Lipschitzian İçin Sınırlar

İlk fonksiyon Lipschitzian olduğu durumda aşağıdaki teoremi vereceğiz.

Teorem 3.64. A,B $m<M$ bazı reel sayıları için $Sp(A),Sp(B)\subseteq[m,M]$ spektrumları ile H Hilbert uzayında iki öz eşlenik operatör ve $\{E_\lambda\}_\lambda$ A'nın spektral ailesi ve $\{F_\mu\}_\mu$ B'nin spektral ailesi olsun. Ayrıca $f:[m,M]\to\mathbb{C}$, $[m,M]$ üzerinde $L>0$ sabiti ile Lipschitzian olduğunu kabul edelim.

1. Eğer $f:[m,M]\to\mathbb{C}$,$[m,M]$üzerinde $K>0$ sabiti ile Lipschitzian, o zaman her $x\in H,\|x\|=1$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\langle f(A)x,g(B)x\rangle-\langle f(A)x,x\rangle\langle x,g(B)x\rangle\right|\\
&\leq LK\int_{m-0}^{M}\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,F_\mu x\rangle-\langle E_\lambda x,F_\mu x\rangle\right|d\mu d\lambda\\
&\leq LK\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_\lambda x,x\rangle\langle(1_H-E_\lambda)x,x\rangle\right]^{1/2}d\lambda\\
&\times\int_{m-0}^{M}\left[\langle F_\mu x,x\rangle\langle(1_H-F_\mu)x,x\rangle\right]^{1/2}d\mu\\
&\leq LK\left[\langle(M1_H-A)x,x\rangle\langle(A-m1_H)x,x\rangle\right]^{1/2}\\
&\times\left[\langle(M1_H-B)x,x\rangle\langle(B-m1_H)x,x\rangle\right]^{1/2}\leq\frac{1}{4}LK(M-m)^2
\end{aligned}$$

(3.160)

2. Eğer $g:[m,M]\to\mathbb{C}$ sürekli ve $[m,M]$ üzerinde monotonik azalmayan ise, o zaman her $x\in H,\|x\|=1$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\langle f(A)x,g(B)x\rangle-\langle f(A)x,x\rangle\langle x,g(B)x\rangle\right|\\
&\leq L\int_{m-0}^{M}\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,F_\mu x\rangle-\langle E_\lambda x,F_\mu x\rangle\right|dg(\mu)d\lambda\\
&\leq L\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_\lambda x,x\rangle\langle(1_H-E_\lambda)x,x\rangle\right]^{1/2}d\lambda
\end{aligned}$$

$$\times\int_{m-0}^{M}\left[\langle F_\mu x,x\rangle\langle(1_H-F_\mu)x,x\rangle\right]^{1/2}dg(\mu)$$

$$\leq L\left[\langle(M1_H-A)x,x\rangle\langle(A-m1_H)x,x\rangle\right]^{1/2}$$

$$\times\left[\langle(g(M)1_H-g(B))x,x\rangle\langle(g(B)-g(m)1_H)x,x\rangle\right]^{1/2}$$

$$\leq\frac{1}{4}L(M-m)\left[g(M)-g(m)\right] \tag{3.161}$$

İspat. 1. (3.147) özelliği ve (3.130) eşitsizliğinden her $x\in H,\|x\|=1$ için

$$\left|\langle f(A)x,g(B)x\rangle-\langle f(A)x,x\rangle\langle x,g(B)x\rangle\right|$$

$$\leq L\int_{m-0}^{M}\left|\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,F_\mu x\rangle-\langle E_\lambda x,F_\mu x\rangle\right]d\left(g(\mu)\right)\right|d\lambda \tag{3.162}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

(3.147)'nin aynı özelliğinden, her $x\in H,\|x\|=1$ ve $\lambda\in[m,M]$ için

$$\left|\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,F_\mu\rangle-\langle E_\lambda x,F_\mu x\rangle\right]d\left(g(\mu)\right)\right|$$

$$\leq K\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,F_\mu x\rangle-\langle E_\lambda x,F_\mu x\rangle\right|d\mu \tag{3.163}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Böylece (3.162) ve (3.163)'den, her $x\in H,\|x\|=1$ için

$$\left|\langle f(A)x,g(B)x\rangle-\langle f(A)x,x\rangle\langle x,g(B)x\rangle\right|$$

$$\leq LK\int_{m-0}^{M}\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,F_\mu x\rangle-\langle E_\lambda x,F_\mu x\rangle\right|d\mu d\lambda \tag{3.164}$$

yazabiliriz ki, bu da (3.160)'da ilk eşitsizliğin ispatını gösterir.

(3.144)-(3.146) dan, her $x\in H,\|x\|=1$ ve $\lambda,\mu\in[m,M]$ için

$$\left|\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,F_\mu x\rangle-\langle E_\lambda x,F_\mu x\rangle\right|$$

$$\leq\left[\langle E_\lambda x,x\rangle\langle(1_H-E_\lambda)x,x\rangle\right]^{1/2}\left[\langle F_\mu x,x\rangle\langle(1_H-F_\mu)x,x\rangle\right]^{1/2} \tag{3.165}$$

Eşitsizliğini yazabiliriz. $[m,M]^2$ üzerinde integralini alarak (3.165) eşitsizliği ve Riemann integral için Cauchy-Bunyakowsky-Schwarz integral eşitsizliğini kullanarak,

$$\int_{m-0}^{M}\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,F_\mu x\rangle-\langle E_\lambda x,F_\mu x\rangle\right|d\mu d\lambda$$

$$\leq \int_{m-0}^{M} \left[\langle E_\lambda x, x \rangle \langle (1_H - F_\mu) \rangle \right]^{1/2} d\lambda$$

$$\times \int_{m-0}^{M} \left[\langle F_\mu x, x \rangle \langle (1_H - F_\mu) x, x \rangle \right]^{1/2} d\mu$$

$$\leq \left[\int_{m-0}^{M} \langle E_\lambda x, x \rangle d\lambda \right]^{1/2} \left[\int_{m-0}^{M} \langle (1_H - E_\lambda) x, x \rangle d\lambda \right]^{1/2}$$

$$\times \left[\int_{m-0}^{M} \langle F_\mu x, x \rangle d_\mu \right]^{1/2} \left[\int_{m-0}^{M} \langle (1_H - F_\mu) x, x \rangle d\mu \right]^{1/2} \tag{3.166}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Kısmi integrasyon ve spektral gösterim teoremi kullanarak

$$\int_{m-0}^{M} \langle E_\lambda x, x \rangle d\lambda = \langle E_\lambda x, x \rangle \lambda \Big|_{m-0}^{M} - \int_{m-0}^{M} \lambda d \langle E_\lambda x, x \rangle$$

$$= M - \langle Ax, x \rangle = \langle (M 1_H - A) x, x \rangle,$$

$$\int_{m-0}^{M} \langle (1_H - E_\lambda) x, x \rangle d\lambda = \langle (A - m 1_H) x, x \rangle$$

eşitsizliği yazabiliriz. Böylece (3.160)'ın ikinci kısmı ispatlamış oluruz. (3.151)'den istenilen eşitsizliğin son kısmı elde edilir.

2. (3.152) eşitsizliğini kullanarak,

$$\left| \int_{m-0}^{M} \left[\langle E_\lambda x, x \rangle \langle x, F_\mu x \rangle - \langle E_\lambda x, F_\mu x \rangle \right] d(g(\mu)) \right|$$

$$\leq \int_{m-0}^{M} \left| \left[\langle E_\lambda x, x \rangle \langle x, F_\mu x \rangle - \langle E_\lambda x, F_\mu x \rangle \right] dg(\mu) \right| \tag{3.167}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (3.162) ile beraber, her $x \in H, \|x\| = 1$ için

$$\left| \langle f(A) x, g(B) x \rangle - \langle f(A) x, x \rangle \langle x, g(B) x \rangle \right|$$

$$\leq L \int_{m-0}^{M} \int_{m-0}^{M} \left| \langle E_\lambda x, x \rangle \langle x, F_\mu x \rangle - \langle E_\lambda x, F_\mu x \rangle \right| dg(\mu) d\lambda \tag{3.168}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (3.165)' i kullanarak ve yukarıdaki benzer işlemlerle istenen (3.161) elde etmiş oluruz. Şimdi de bir operatör durumu inceleyeceğiz

Sonuç 3.64 A, $m < M$ bazı reel sayıları için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ spektrum ile H Hilbert uzayında bir özeşlenik operatör ve $\{E_\lambda\}_\lambda$, A'nın spektral ailesi olsun. Ayrıca $f : [m, M] \to \mathbb{C}$, $[m, M]$ üzerinde $L > 0$ sabiti ile Lipschitzian olduğunu kabul edelim.

1. Eğer $g:[m,M]\to\mathbb{C}$, $[m,M]$ üzerinde K sabitleri ile Lipschitzian ise, o zaman her $x\in H,\|x\|=1$ için

$$\left|\langle f(A)x,g(A)x\rangle-\langle f(A)x,x\rangle\langle x,g(A)x\rangle\right|$$
$$\leq LK\int_{m-0}^{M}\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,E_\mu x\rangle-\langle E_\lambda x,E_\mu x\rangle\right|d\mu d\lambda$$
$$\leq LK\left(\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_\lambda x,x\rangle\langle(1_H-E_\lambda)x,x\rangle\right]^{1/2}d\lambda\right)^2$$
$$\leq LK\left[\langle(M1_H-A)x,x\rangle\langle(A-m1_H)x,x\rangle\right]\leq\frac{1}{4}LK(M-m)^2 \tag{3.169}$$

2. Eğer $g:[m,M]\to\mathbb{R}$ sürekli ve $[m,M]$ üzerinde azalmayan monotonik ise, o zaman her $x\in H,\|x\|=1$

$$\left|\langle f(A)x,g(A)x\rangle-\langle f(A)x,x\rangle\langle x,g(A)x\rangle\right|$$
$$\leq L\int_{m-0}^{M}\int_{m-0}^{M}\left|\langle E_\lambda x,x\rangle\langle x,F_\mu x\rangle-\langle E_\lambda x,F_\mu x\rangle\right|dg(\mu)\,d\lambda$$
$$\leq L\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_\lambda x,x\rangle\langle(1_H-E_\lambda)x,x\rangle\right]^{1/2}d\lambda$$
$$\times\int_{m-0}^{M}\left[\langle E_\lambda x,x\rangle\langle(1_H-E_\mu)x,x\rangle\right]^{1/2}dg(\mu)$$
$$\leq L\left[\langle(M1_H-A)x,x\rangle\langle(A-m1_H)x,x\rangle\right]^{1/2}$$
$$\times\left[\langle(g(M)1_H-g(A))x,x\rangle\langle(g(A)-g(m)1_H)x,x\rangle\right]^{1/2}$$
$$\leq\frac{1}{4}L(M-m)\left[g(M)-g(m)\right]$$

(3.170) (4.153)

Sonuç 3.65. A, $m<M$ bazı reel sayıları için $Sp(A)\subseteq[m,M]$ spektrum ile H Hilbert uzayında bir özeşlenik operatör ve $\{E_\lambda\}_\lambda$ A'nın spektral ailesi ve $f:[m,M]\to\mathbb{C}$, $[m,M]$ üzerinde $L>0$ sabiti ile Lipschitzian şartları altında $f(A)$'nın değişkeni için, her $x\in H,\|x\|=1$ için

$$0\leq\|f(A)x\|^2-\langle f(A)x,x\rangle^2$$

$$\leq L^2 \int_{m-0}^{M} \int_{m-0}^{M} \left| \langle E_\lambda x, x \rangle \langle x, E_\mu x \rangle - \langle E_\lambda x, E_\mu x \rangle \right| d\lambda d\mu$$

$$\leq L^2 \left(\int_{m-0}^{M} \left[\langle E_\lambda x, x \rangle \langle (1_H - E_\lambda) x, x \rangle \right]^{1/2} d\lambda \right)^2$$

$$\leq L^2 \left[\langle (M1_H - A) x, x \rangle \langle (A - m1_H) x, x \rangle \right]$$

$$\leq \frac{1}{4} L^2 (M - m) \tag{3.171}$$

3.12.4. Monotonik Azalmayan f için Sınırlar

Son olarak iki monotonik fonksiyonların durumu için aşağıdaki teoremi vereceğiz.

Teorem 3.66. $A, B, m < M$ bazı reel sayıları için $Sp(A), Sp(B) \subseteq [m, M]$ spektrumları ile H Hilbert uzayında iki özeşlenik operatörler, $\{E_\lambda\}_\lambda$ A'nın spektral ailesi ve $\{F_\mu\}_\mu$ B'nin spektral ailesi olsun. Eğer $f, g : [m, M] \to \mathbb{R}$ sürekli ve $[m, M]$ üzerinde monotonik azalmayan ise her $x \in H, \|x\| = 1$

$$\left| \langle f(A) x, g(B) x \rangle - \langle f(A) x, x \rangle \langle x, g(B) x \rangle \right|$$

$$\leq \int_{m-0}^{M} \int_{m-0}^{M} \left| \langle E_\lambda x, x \rangle \langle x, F_\mu x \rangle - \langle E_\lambda x, F_\mu x \rangle \right| dg(\mu) df(\lambda)$$

$$\leq \int_{m-0}^{M} \left[\langle E_\lambda x, x \rangle \langle (1_H - E_\lambda) x, x \rangle \right]^{1/2} df(\lambda)$$

$$\times \int_{m-0}^{M} \left[\langle F_\mu x, x \rangle \langle (1_H - F_\mu) x, x \rangle \right]^{1/2} dg(\mu)$$

$$\leq \left[\langle (f(M) 1_H - f(A)) x, x \rangle \langle (f(A) - f(m) 1_H) x, x \rangle \right]^{1/2}$$

$$\times \left[\langle (g(M) 1_H - g(B)) x, x \rangle \langle (g(B) - g(m) 1_H) x, x \rangle \right]^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{4} \left[f(M) - f(m) \right] \left[g(M) - g(m) \right] \tag{3.172}$$

Özel olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.67. $A, m < M$ bazı reel sayıları için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ spektrumu ile H Hilbert uzayında bir özeşlenik operatör ve $\{E_\lambda\}_\lambda$, A'nın spektral ailesi olsun. Eğer $f, g : [m, M] \to \mathbb{R}$ sürekli ve $[m, M]$ üzerinde monotonik azalmayan ise, her $x \in H, \|x\| = 1$ için

$$\left|\left\langle f(A)x, g(A)x\right\rangle - \left\langle f(A)x, x\right\rangle\left\langle x, g(A)x\right\rangle\right|$$

$$\leq \int_{m-0}^{M}\int_{m-0}^{M}\left|\left\langle E_\lambda x, x\right\rangle\left\langle x, E_\mu x\right\rangle - \left\langle E_\lambda x, E_\mu x\right\rangle\right| dg(\mu)\, df(\lambda)$$

$$\leq \int_{m-0}^{M}\left[\left\langle E_\lambda x, x\right\rangle\left\langle (1_H - E_\lambda)\right\rangle\right]^{1/2} df(\lambda)$$

$$\times\int_{m-0}^{M}\left[\left\langle E_\lambda x, x\right\rangle\left\langle (1_H - E_\lambda)x, x\right\rangle\right]^{1/2} dg(\mu)$$

$$\leq \left[\left\langle\left(f(M)1_H - f(A)x, x\right)\right\rangle\left\langle\left(f(A) - f(m)1_H\right)x, x\right\rangle\right]^{1/2}$$

$$\times\left[\left\langle\left(g(M)1_H - g(A)\right)x, x\right\rangle\left\langle\left(g(A) - g(m)1_H\right)x, x\right\rangle\right]^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{4}\left[f(M) - f(m)\right]\left[g(M) - g(m)\right] \tag{3.173}$$

eşitliğini yazabiliriz. Özel olarak, f monotonik azalmayan fonksiyonların durumunda $f(A)$'nın değişkeni için, her $x \in H$, $\|x\| = 1$ için

$$0 \leq \left\|f(A)x\right\|^2 - \left\langle f(A)x, x\right\rangle^2$$

$$\leq \int_{m-0}^{M}\int_{m-0}^{M}\left|\left\langle E_\lambda x, x\right\rangle\left\langle x, E_\mu x\right\rangle - \left\langle E_\lambda x, E_\mu x\right\rangle\right| df(\mu)\, df(\lambda)$$

$$\leq \left(\int_{m-0}^{M}\left[\left\langle E_\lambda x, x\right\rangle\left\langle (1_H - E_\lambda)x, x\right\rangle\right]^{1/2} df(\lambda)\right)^2$$

$$\leq \left[\left\langle\left(f(M)1_H - f(A)\right)x, x\right\rangle\left\langle\left(f(A) - f(m)1_H\right)x, x\right\rangle\right]$$

$$\leq \frac{1}{4}\left[f(M) - f(m)\right]^2 \tag{3.174}$$

eşitliğini yazabiliriz.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Eşitsizlik Teorisi ile Sınırlı Lineer Operatörler Teorisi birleştirilmiş. Literatürde iyi şekilde bilinen reel anlamdaki Grüss Eşitsizliğinin, sınırlı, lineer operatörlere taşınması ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bunu yaparken, Dragomir' in 2012 yılında yayımladığı "Operator Inequality of the Jensen, Cebysev and Grüss Type" adlı eseri temel kaynak olarak kullanılmıştır. Bu kitaptaki tanım ve teoremler ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Eşitsizlik ve Operatör Teorisi alanında çalışmak isteyen genç bilim insanlarına Türkçe bir kaynak olacaktır.

KAYNAKLAR

Anastassiou, G.A. 2007a. Grüss type inequalities for the Stieltjes integral, Nonlinear Functional Analysis and Applications 12, no, 4, 583-593.

Anastassiou, G.A. 2007b. Chebyshev-Grüss type and comparison of integral means inequalities fort je Stieltjes integral. Pan-American Mathematical Journal 17, no.3, 91-109.

Anastassiou, G.A. 2007c, Chebyshev-Grüss type inequalities via Euler type and Fink identies. Mathematical and Computer Modelling 45, no. 9-10, 1189-1200.

Biernacki, M. 1951. Sur une inegalite entre les integrales due a Tchhebyscheff. Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska (Poland), A5, 23-29.

Boukerrioua, K., Guezane-Lakoud, A. 2007 On generalization of Cebysev type inequalities. Journal of Inequal, Pure Applied Mathematic 8, no, 2 Article 55, 4 pp.

Cerone, P. 2003. On some results involving the Cebysev functional and its generalisations Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. 4, No.3 Article 55, 17 pp.

Cerone, P. 2006. On a Cebysev-type functional and Grüss-like bounds. Mathematical Inequalities and Applications 9, no. 1, 87-102.

Cerone, P., Dragomir, S.S. 2004. Chebychev functional bounds using Ostrowski seminorms. Southeast Aslan Bulletin of Mathematics 28, no. 2, 219-228.

Cerone, P., Dragomir, S.S. 2007. A refinement of the Grüss inequality and applications.Tamkang Journal Mathematics 38, no. 1, 37-49.

Dragomir, S.S., Pecaric, J.E. 1989a. Refinements of some inequalities for isotonic linear function- als L'Anal. Num. Theor de L' Approx. (Romania) 18 (1), 61-65.

Dragomir, S.S. 1993a, Some improvement of Cebysev's inequality for isotonic functionals, Atti. Sem. Mat. Fis..Univ.Modena (Italy), 41, 473-481.

Dragomir, S.S., Mond, B. 1993b Some mappings associated with Cebysev's inequality for sequences of rea numbers Bulletin of the Allahabad Mathematical Society 8/9, 37-55.

Dragomir, S.S. 1999a. Grüss inequality in inner product spaces, The Australian Mathematical Society Gazette, 26, No. 2,66-70.

Dragomir, S.S. 1999b. A generalization of Grüss ' inequality in inner product spaces and applicatons, Journal of Mathematical Analysis and Applications 237, 145-156.

Dragomir, S.S. 2000a. Some integral inequalities of Grüss type, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 31(4), 397-415.

Dragomir, S.S., Booth G.L. 2000b. On a Grüss-Lupaş type inequality and its applications for the estimation of p-moments of guessing mappings, Mathamatical Communications, 5, 117-126.

Dragomir, S.S. 2004. On Bessel and Grüss inequalities for orthormormal families in inner product spaces, Bulletin of Australian Mathematical Society, 69(2), 327-340.

Dragomir, S.S. 2005, Advances in Inequalities of the Schwarz, Grüss and Bessel Type in Inner Product Spaces, Nova Science Publishers Ine, New York, 2005, X+249 p.

Dragomir, S.S. 2010. Grüss' type inequalities for some classes of continuous functions of selfadjoint operators in Hilbert spaces, Preprint RGMIA Res. Rep.Coll., 13, No.2, Art.15.

Fink, A.M. 1999. A treatise on Grüss' inequality, Analytic and Geometric Inequalities, 93-113, Math. Appl. 478, Kluwer Academic Publ.

Furuta, T., Micic Hot, J., Pecaric, J., Seo, Y. 2005. Mond-Pecaric Method in Operatör Inequalities. Inequalities for Bounded Selfadjoint Operators on a Hilbert Space, Element. Zagreb, 200pp.

Adı Soyadı : Şükran Şahin

Doğum Yeri : Kırıkkale

Doğum Tarihi : 20.12.1990

Yabancı Dili : İngilizce

E-mail : sukran716161@hotmail.com

İletişim Bilgileri : Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/ Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik	Ordu Üniversitesi	2012

İş Deneyimi:

Görev	**Görev Yeri**	**Yıl**
Matematik Öğretmeni	ABC Sağlık Koleji	2013
Matematik Öğretmeni	Adel Akademi	2016-