T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT UZAYINDA BİR SİMETRİK OPERATÖRÜN SİMETRİK, ÖZ-EŞLENİK GENİŞLEMELERİ VE SPEKTRAL YAPISI

İLKER MERT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2017

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi İlker MERT tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL danışmanlığında yürütülen "Hilbert Uzayında Bir Simetrik Operatörün Simetrik, Öz-Eşlenik Genişlemeleri ve Spektral Yapısı " adlı bu tez, jürimiz tarafından 06 / 02 / 2017 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman	:	Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL	
Başkan	:	Doç. Dr. İmdat İŞCAN Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 09/02/2017.... tarih ve 2017/7.6 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

27./02/2017

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Kürşat KORKMAZ

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza

İlker MERT

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

HİLBERT UZAYINDA BİR SİMETRİK OPERATÖRÜN SİMETRİK, ÖZ-EŞLENİK GENİŞLEMELERİ VE SPEKTRAL YAPISI

İlker MERT

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2017
Yüksek Lisans Tezi, 61s.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

Bu tez çalışması, beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, giriş ve literatür taraması, ikinci bölümde temel kavramlar anlatılmaktadır. Üçüncü bölümde literatürde var olan, Hilbert Uzayında Bir Simetrik Operatörün Simetrik, Öz-Eşlenik Genişlemeleri ve Spektral Yapısı konusu ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Dördüncü bölümde sonuçlar ve öneriler, son bölümde ise tezde kullanılan kaynaklar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İç-çarpım uzayı, Hilbert uzayı, Sınırsız operatör, Sınırsız öz-eşlenik ve simetrik operatörler.

ABSTRACT

SYMMETRIC, SELF-ADJOINT EXTENSIONS OF A SYMMERIC OPERATOR AND ITS SPECTRAL STRUCTURE IN HILBERT SPACE

İlker MERT

University of Ordu
Institute of Sciences
Department of Mathematics, 2017
MSc. Thesis, 61p.

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

This thesis is consisting of five chapters. In the first chapter, it is mentioned about the object of the thesis and previous studies in this area. In the second chapter, basic definitions and theorems that were used in thesis are given. In the third chapter, it is comprehensively explained that symmetric, self-adjoint extensions of a symmetric operator and its spectral structure, which exist in the literature. In the fourth chapter, it is given some results and propositions and in the last chapter, is given references.

Key Words: Inner product, Hilbert space, unbounded operator, unbounded self-adjoint and symmetric operators.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL' a;

Başta tez jüri üyelerim olmak üzere, Ordu Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarıma;

Bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme, özellikle eşime ve kızıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

$\emptyset$	: Boş küme
$\perp$	: Dik
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
Q	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$R(A-\lambda E)$	: $(A-\lambda E)$ operatörünün değer kümesi
$(ImA)^{\perp}$	: A operatörünün görüntüsünün ortogonal tümleyeni
$B(X,Y)$	: X'den Y'ye tanımlı sınırlı fonksiyonların kümesi
$AC(a,b)$	: Mutlak sürekli fonksiyonlar kümesi
$C[a,b]$	: $[a,b]$'den $\mathbb{R}$'ye sürekli fonksiyonların kümesi
$C([a,b],K)$	: $[a,b]$'den K cismine tanımlı sürekli fonksiyonların kümesi
E,I	: Birim operatör

1. GİRİŞ

Bir Hilbert uzayında lineer kapalı eşit defekt sayılarına sahip olan bir simetrik operatörün bütün maksimal simetrik ve öz-eşlenik genişlemelerinin tanım kümeleri dilinde ifadesi ve bu tip genişlemelerin spektral özellikleri ilk olarak John von Neumann'ın (1929-1930) çalışmasında ele alınmış ve bu alanda temel sonuçlara ulaşılmıştır. Bu genel teorinin diferensiyel ve fark operatörlerine uyarlanması uzun yıllar sürmüş ve bugüne kadar yapılan çalışmalarda devam etmiştir. Yapılan çalışmaların geniş özeti Rofe-Beketov ve Kholkin'in (2005) kitabında verilmiştir.

Lineer normal operatörlere ait ilk incelemeler Sz.-Nagy (1942), Kilpi (1953, 1957, 1963) ve Davis'in (1955) çalışmaları ile başlamıştır. 1960 yılından sonra Coddington ve Biriuk (1964, 1973) bir Hilbert uzayında lineer kapalı sınırsız formal normal bir operatörün bütün maksimal formal normal genişlemelerini tanım kümeleri dilinde ifade ederek J. von Neumann' ın meşhur çalışmasını formal normal operatörlere genişletebilmişlerdir. Bu teorinin gelişmesinde 1980 yılından itibaren Stochel ve Szafraniec' in (1985, 1989a, 1989b) büyük katkıları olmuştur. Bu teorinin diferensiyel operatörlere uygulamasına ait ilk araştırmalar Schmüdgen (1985), Maksudov ve İsmayilov (1994, 1996a, 1996b, 1999), İsmayilov (1992, 1994a, 1994b, 1998, 2003, 2005), İsmayilov ve Karatash (2000), Otelbayev ve Biyarov (1993), Otarov ve Kokebayev (1985) tarafından yapılmıştır.

XX. yüzyılın ikinci yarısından itibaren operatör katsayılı lineer diferensiyel denklemler teorisi hızla gelişmeye başladı. Bu alanda ilk çalışmalar Gorbachuk (1991), J-L. Lions, E. Hille, R. S. Philips, M. G. Krein, S. G. Krein, Yu. M. Berezansky, B. M. Levitan, A. G. Kostyuchenko, Yu. L. Daletsky, S. Yakubov, Y. Yakubov ve M. Gasımov gibi bilim insanlarının çalışmalarının geniş özetini Yakubov' un çalışmasında (2000) bulabilirsiniz. Ayrıca literatüre bakıldığında Dunford ve Schwartz (1958, 1963), Naimark (1968), Gorbachuk (1973), Eidelman ve ark. (2004), Abramovic ve Aliprantis (2002a, 2002b), Coddington (1973), Kochubei (1979) çalışmalarında da bu alanla ilgili birçok bilgiye sahip olabilirsiniz. Fu' nun (1992) çalışmasında ise;

$$M = \sum_{k=0}^{n} p_k\left(x\right) D^k \ ,$$

burada $-\infty < a < b < \infty$, $p_k : (a,b) \to \mathbb{R}$, $k = 0,1,\cdots,n$ katsayıları bazı pürüzsüz ve integrallenebilir, diferensiyel ifadesinin (a,b) aralığının içinde sonlu tane singüler nokta durumunda doğurduğu minimal operatörün tüm öz-eşlenik genişlemeleri onun eşlenik operatörünün tanım kümesindeki fonksiyonların sınır değerleri dilinde ifade edilmiştir. Ayrıca minimal operatörün, bakılan aralığın alt aralıkları üzerinde ifade edilemeyen öz-eşlenik genişlemelerinin varlığı gösterilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Metrik Uzaylar ve Lineer Uzaylar

Analiz'in temel kavramlarından biri olan yakınsaklık $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ Euclide uzayında iki nokta arasında tanımlanabilen uzaklık fonksiyonuna dayanmaktadır. Bu düşünceyi genişleterek üzerinde uzaklık fonksiyonu tanımlanabilen somut bir X kümesinin, çağdaş matematiğin esas kavramlarından biri olan metrik uzaya dönüştürülmesi önem taşımaktadır.

Tanım 1: X boş olmayan bir küme ve

$$d : X \text{ x } X \rightarrow [0,+\infty), \ (x,y) \rightarrow d(x,y)$$

bir fonksiyon olsun. Eğer d fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (özdeşlik aksiyomu);

M2) $d(x,y) = d(y,x)$ (simetriklik aksiyomu);

M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği),

özelliklerini sağlıyorsa d'ye X üzerinde bir *uzaklık fonksiyonu* veya *metrik* adı verilir ve (X,d) ikilisine bir *metrik uzay* denir.

Örnek 2: X boş olmayan bir küme ve $B(X)$ de X 'den □ 'ye tanımlı bütün sınırlı fonksiyonların kümesi olsun

$$d : B(X) \text{x} B(X) \rightarrow [0,+\infty), \ (f,g) \rightarrow d(f,g) = \sup\left\{\left|f(x) - g(x)\right| : x \in X\right\}$$

şeklinde tanımlı d dönüşümünün $B(X)$ kümesi üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim. Gerçekten de;

1) Her $x \in X$ için

$$\left|f(x) - g(x)\right| \leq \sup\left\{\left|f(x) - g(x)\right| : x \in X\right\} = d(f,g)$$

olduğundan $d(f,g) = 0$ ise her $x \in X$ için

$$\left|f(x) - g(x)\right| = 0$$

veya her $x \in X$ için $f\left(x\right)=g\left(x\right)$'dır. Ayrıca, eğer $f=g$ ise, $d\left(f,g\right)=0$ olduğu tanımdan açıktır.

2) Her $a \in \mathbb{R}$ için $\left|a\right|=\left|-a\right|$ olduğundan

$$d\left(f,g\right)=\sup\left\{\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|:x\in X\right\}=\sup\left\{\left|g\left(x\right)-f\left(x\right)\right|:x\in X\right\}=d\left(g,f\right).$$

3) Her $f,g,h\in B\left(X\right)$ ve her $x\in X$ için

$$\begin{aligned}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right| &= \left|f\left(x\right)-h\left(x\right)+h\left(x\right)-g\left(x\right)\right| \le \left|f\left(x\right)-h\left(x\right)\right|+\left|h\left(x\right)-g\left(x\right)\right| \\ &\le d\left(f,h\right)+d\left(h,g\right)\end{aligned}$$

ve buradan da

$$d\left(f,g\right)\le d\left(f,h\right)+d\left(h,g\right)$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Tanım 4: Bir $\left(X,d\right)$ metrik uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa, bu uzaya *ayrılabilir uzay* denir.

Örnek 4: $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ rasyonel sayılar kümesi sayılabilir sonsuz ve $\mathbb{R}$'de yoğun olduğu için $\mathbb{Q}$ bir ayrılabilir uzaydır.

Tanım 5: X boş olmayan bir küme ve K ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) bir cisim olsun.

$$+:X \text{ x } X\to X,\ \left(x,y\right)\to x+y,\ x,y\in X$$
$$\bullet:K \text{ x } X\to X,\ \left(a,x\right)\to ax,\ a\in K,\ x\in X$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemleri denilen işlemler tanımlansın. Bu işlemler her $x,y,z\in X$ ve $a,b\in K$ için aşağıdaki koşulları sağlasın:

1. $x+y=y+x$;

2. $x+\left(y+z\right)=\left(x+y\right)+z$;

3. Her $x\in X$ için $x+0=x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0\in X$ vardır;

4. Her $x\in X$ için $x+\left(-x\right)=0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x\in X$ vardır;

5. Her $x \in X$ için $1 \bullet x = x$;

6. $a \bullet (x+y) = a \bullet x + a \bullet y$;

7. $(a+b) \bullet x = a \bullet x + b \bullet x$;

8. $(a \bullet b)x = a \bullet (b \bullet x)$.

Bu durumda X 'e K cismi üzerinde bir *vektör uzayı* (*lineer uzay*), elemanlarına da *vektör* veya *nokta* adı verilir. $K = \mathbb{R}$ alınırsa X 'e bir *reel vektör uzayı* ve $K = \mathbb{C}$ alınırsa X 'e bir *kompleks vektör uzayı* denir.

Örnek 6: S bir küme ve X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bu durumda $F(S,X) := \{f: S \to X \ \ bir\ fonksiyon\}$ olmak üzere F ailesi

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \ f,g \in F(S,X)$$

$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x), \ \alpha \in K, \ f \in F(S,X)$$

işlemleri altında bir vektör uzayıdır.

Tanım 7: X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve Y, X 'in bir boş olmayan alt kümesi olsun. Y, X vektör uzayındaki cebirsel işlemlere göre kendi başına bir vektör uzayı oluşturuyorsa Y ' ye, X 'de bir *lineer manifold* (veya X 'in bir *lineer alt uzayı*) denir.

Örnek 8: $A \subset \ell_p(\square)$, $p \geq 1$ olmak üzere $A := \{(x_n) \in \ell_p(\square) : (x_n) = (0, x_2, x_3, ...)\}$

kümesi $\ell_p(\square)$'de bir lineer manifoldur.

Gerçekten $(x_n) = (0, x_2, x_3, ...)$, $(y_n) = (0, y_2, y_3, ...) \in A$ ve $\alpha, \beta \in \square$ için

$$\begin{aligned}(\alpha x_n + \beta y_n) &= (0, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, ...) = (0, \alpha x_2, \alpha x_3, ...) + (0, \beta y_2, \beta y_3, ...) \\ &= \alpha(0, x_2, x_3, ...) + \beta(0, y_2, y_3, ...) \\ &= \alpha(x_n) + \beta(y_n)\end{aligned}$$

olup, buradan A kümesi lineer manifoldur.

Tanım 9: X, bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in X$ olarak verilsin. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n \in K$ olmak üzere

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_n x_n$$

şeklindeki sonlu toplama $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in X$ elemanlarının bir *lineer kombinasyonu* denir.

$\emptyset \neq M \subset X$ için M 'den alınan her sonlu sayıdaki vektörlerin lineer kombinasyonlarının tümünün kümesine M ' nin *gereni* (veya *lineer örtüsü*) denir ve $spanM$ olarak gösterilir. Başka bir deyişle,

$$spanM := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ : \ x_i \in M, \ \alpha_i \in K, \ i = 1, \ldots, n, \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $spanM$, X 'de bir lineer manifolddur ve M ' nin *ürettiği lineer manifold* adı verilir.

Tanım 10: $n \in \mathbb{N}$ için $M_1, M_2, \ldots, M_n$, X vektör uzayında lineer manifoldlar olsun. Eğer her $x \in X$ için $x_j \in M_j$, $j = 1,2, \ldots, n$ olmak üzere,

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

şeklinde tek bir gösterime sahip ise, X vektör uzayı $M_1, M_2, \ldots, M_n$ lineer manifoldlarının *iç (internal) direkt toplamıdır* denir ve $X = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$ olarak yazılır. Yeni bir V vektör uzayı iki diğer X ve Y vektör uzaylarından (aynı cisim üzerinde) üretiliyorsa bu toplama da *dış (external) direkt toplam* denir.

2.2. Normlu Vektör Uzayları

Tanım 11: X , K cismi üzerinde tanımlı bir lineer vektör uzayı olsun. Eğer

$$\|\cdot\| : X \to [0, \infty), \ x \to \|x\|$$

dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in K$ için

N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta_X$;

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği) özelliklerini sağlıyorsa $\|\cdot\|: X \to [0,\infty),\ x \to \|x\|$ dönüşümüne X üzerinde *norm* ve bu durumda $(X,\|\cdot\|)$ ikilisine bir *normlu vektör uzayı* adı verilir. Yukarıda verilen N_1, N_2 ve N_3 özelliklerine *norm aksiyomları* denir.

Örnek 12: $E = C([a,b],K)$ kümesi

$$\|x\|_c = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

fonksiyonu ile bir normlu vektör uzaydır.

Gerçekten, E'nin bir lineer vektör uzayı olduğu açıktır. $x,y \in C[a,b]$ ve $\alpha \in K$ için,

(N_1) $\|x\|_c = 0$ ise, $\|x\|_c = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [a,b]$ için $x(t) = 0;$

(N_2) $\|\alpha x\|_c = \max_{t\in[a,b]} |(\alpha x)(t)| = \max_{t\in[a,b]} |\alpha||x(t)| = |\alpha| \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = |\alpha|\|x\|_c;$

(N_3) $\|x+y\|_c = \max_{t\in[a,b]} |x(t)+y(t)| \le \max_{t\in[a,b]} (|x(t)|+|y(t)|)$

$$\le \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |y(t)| = \|x\|_c + \|y\|_c .$$

Tanım 13: Bir X kümesi üzerinde tanımlı, $\mathbb{C}$-değerli, $\sum$-ölçülebilir, $|f|^p$, $1 \le p < \infty$, fonksiyonunun bir μ ölçümüne göre integralinin sonlu olduğu μ denklik sınıflarının ailesinin tümü $L_p(X,\sum,\mu)$ ile gösterilecektir. Bu $L_p(X,\sum,\mu)$ vektör uzayı $\|f\|_{L_p} := \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$, $1 \le p < \infty$ fonksiyonu altında bir normlu uzaydır.

Tanım 14: $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzay, $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. Eğer $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0$$

ise, (x_n) dizisi $x \in X$ elemanına $\|\cdot\|$ *normuna göre yakınsıyor* denir ve $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\ \|_X} x$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ notasyonlarının biriyle gösterilir.

Örnek 15: $L_2(0,1)$ uzayında alınan $x_n(t) = t^n$, $n \geq 1$ dizisi $x(t) = 0$ noktasına yakınsaktır. Gerçekten;

$$\|x_n - x\|_{L_2}^2 = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^2 dt$$

$$= \int_0^1 |t^n - 0|^2 dt = \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

olup sonuçta $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{L_2} = 0$ olduğu elde edilir ki bu $x_n(t) = t^n$, $n \geq 1$ dizisinin $x(t) = 0$ noktasına yakınsadığı anlamına gelir.

Tanım 16 : $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. Eğer

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ öyle ki } \forall m,n > n_\varepsilon \text{ için } \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

koşulu sağlanıyor ise (x_n) dizisine X içinde bir *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 17: Eğer bir normlu uzayda bir Cauchy dizisi bu normlu uzayda yakınsak ise o uzaya *tam uzay* denir.

Tanım 18: Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir elemana yakınsıyorsa, bu $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* adı verilir.

Örnek 19: $X = L_p([a,b])$, $a,b \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ vektör uzayı

$$\|f\|_{L_p} := \|[f]\|_{L_p} = \left(\int\limits_{[a,b]} |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in L_p([a,b])$$

normuna göre bir Banach Uzayıdır.

Bu $L_p([a,b])$ uzayının lineer olduğu Minkowski Eşitsizliğinin bir sonucudur. Normlu uzay olduğu kolayca gösterilebilir. Tamlığı ise, Riesz-Fischer teoreminden açıktır. $L_\infty([a,b])$ uzayının da bir Banach Uzayı olduğu da kolayca gösterilebilir (Aliprantis ve Burkinshaw, 1998).

Örnek 20: $C([0,1],\mathbb{R})$ lineer uzayı $\|\cdot\|_1 : C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\,dt$

normuna göre bir Banach Uzayı değildir.

Bu uzayın normlu lineer uzay olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi onun tam uzay olmadığını gösterelim.

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \le t \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ n\left(t - \frac{1}{2}\right) + 1 & , \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < t \le \frac{1}{2} \\ 1 & , \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

şeklinde bir $(f_n) \subset C[0,1]$ dizisi tanımlayıp, bu dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $m, n \in \mathbb{N}$ için $m < n$ sayılarını alalım. Bu durumda;

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |f_n - f_m|(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)} |f_n - f_m|(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)}^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)} |f_n - f_m|(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{\frac{1}{2}} |f_n - f_m|(x)\,dx$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f_n - f_m|(x)\,dx$$

$|f_n(x)| \le 1,\ n \ge 1$ eşitsizliğinden,

$$\|f_m - f_n\|_1 \le \int_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)}^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)} |f_m|\,dx + \int_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{\frac{1}{2}} |f_n - f_m|\,dx$$

$$\le \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2m}\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} \to 0\,.$$

Böylece $\|f_n - f_m\|_1 \xrightarrow[m<n]{m\to\infty} 0$ olup (f_n) bir Cauchy dizisidir. Şimdi ise (f_n) dizisinin $\|\cdot\|_1$ normunda yakınsamadığını gösterelim.

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0, & 0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ 1, & \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$ tanımlayalım.

$$\|f_n - \varphi\|_1 = \int_0^1 |f_n - \varphi|\,dx = \int_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{\frac{1}{2}} |f_n|\,dx \le \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

Yani $\int_0^1 |f_n - \varphi|(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Keyfi bir $f \in C[0,1]$ alalım. $f \in C[0,1]$ ve $\varphi \notin C[0,1]$ olduğundan $\int_0^1 |f - \varphi|(x)\,dx \neq 0$. Öte yandan

$$0 \le \int_0^1 |f - \varphi|(x)\,dx \le \int_0^1 |f - f_n|(x)\,dx + \int_0^1 \le |f_n - \varphi|(x)\,dx$$

eşitliğinden $\int_0^1 |f - f_n|(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$. Çünkü aksi halde $\int_0^1 |f - \varphi|(x)\,dx = 0$ olmalıdır, bu ise olamaz. Sonuç olarak (f_n) dizisi $C[0,1]$ uzayında $\|\cdot\|_1$ normu altında hiçbir fonksiyona yakınsamaz. Dolayısıyla $C([0,1],\cdot)$ lineer uzayı $\|\cdot\|_1$ normuna göre bir Banach Uzayı değildir.

2.3. İç Çarpım ve Hilbert Uzayları

Hilbert uzayları sonsuz boyutlu normlu uzayların en basit tipi olmak üzere Fonksiyonel Analiz ’in teorik ve pratik uygulamalarında önemli rol oynamaktadır. Euclide uzayları ile büyük benzerliğe sahip olan Hilbert uzaylarının böyle kullanışlı olmasının nedeni, vektör cebirinde tanımlanan iç çarpım ve diklik kavramlarının bu uzaylar için genelleştirilebilmesidir.

Tanım 21: K, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere X bir vektör uzayı olsun. Eğer $(\cdot,\cdot)_X : X \text{ x } X \to K$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise $(\cdot,\cdot)_X$ ’ ye X

üzerinde bir *iç çarpım*, $\left(X,(\cdot,\cdot)_X\right)$ ikilisine de *iç çarpım uzayı* (veya *ön Hilbert uzayı*) denir.

H1) $\forall x\in X$ için $(x,x)_X \geq 0$ ve $(x,x)_X = 0 \Leftrightarrow x=\theta_X$;

H2) $\forall x,y\in X$ için $(x,y)_X = \overline{(y,x)}_X$ (kompleks eşlenik);

H3) $\forall x,y\in X$ ve $\alpha\in K$ için $(\alpha x,y)_X = \alpha(x,y)_X$;

H4) $\forall x,y,z\in X$ için $(x+y,z)_X = (x,z)_X + (y,z)_X$.

$K=\mathbb{R}$ durumunda, her $x,y\in X$ için $(x,y)_X = (y,x)_X$ eşitliği doğrudur. Ayrıca H_2 ve H_4 ifadelerinden her $x,y,z\in X$ ve her $\alpha,\beta\in K$ için

a) $(\alpha x+\beta y,z)_X = \alpha(x,z)_X + \beta(y,z)_X$;

b) $(x,\alpha y)_X = \overline{\alpha}(x,y)_X$;

c) $(x,\alpha y+\beta z)_X = \overline{\alpha}(x,y)_X + \overline{\beta}(x,z)_X$

eşitliklerinin doğruluğu kolayca gösterilebilir.

Örnek 22: $f,g\in C([a,b],K)$ fonksiyonları için

$$(f,g) := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

tanımıyla $C([a,b],K)$ bir iç çarpım uzayıdır.

Gerçekten:

(H_1) $\forall f\in C([a,b];K)$ için

$$(f,f) = \int_a^b f(t)\overline{f(t)}dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt \geq 0,$$

eğer $(f,f) = \int_a^b f(t)\overline{f(t)}dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt = 0 \;\Leftrightarrow\; f=\theta$;

(H_2) $\forall f,g\in C([a,b];K)$ için

$$(f,g)=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt=\overline{\int_a^b \overline{f(t)}g(t)dt}$$

$$=\overline{\int_a^b g(t)\,\overline{f(t)}dt}=\overline{(g,f)};$$

(H_3) $\forall f\in C([a,b];K)$ ve için

$$(\alpha f,g)=\int_a^b \alpha f(t)\overline{g(t)}dt=\alpha\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt=\alpha(f,g);$$

(H_4) $\forall f,g,h\in C([a,b];K)$ için

$$(f+h,g)=\int_a^b\big(f(t)+h(t)\big)\overline{g(t)}dt=\int_a^b\Big(f(t)\overline{g(t)}+h(t)\overline{g(t)}\Big)dt$$

$$=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt+\int_a^b h(t)\overline{g(t)}dt=(f,g)+(h,g)\ .$$

Tanım 23: $\left(X,(\cdot,\cdot)_X\right)$ bir iç çarpım uzayı ve $x\in X$ olsun.

$$\|x\|_X=(x,x)_X^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon X üzerinde bir norm olup, bu norma *iç çarpımın ürettiği norm* denir.

Tanım 24: Bir $\left(X,(.,.)_X\right)$ iç çarpım uzayı, iç çarpımın ürettiği norma göre tam ise, yani $\left(X,(\cdot,\cdot)_X\right)$ içindeki her Cauchy dizisi iç çarpımın ürettiği norma göre yakınsaksa, bu iç çarpım uzayına *Hilbert uzayı* denir.

Örnek 25: $l_2(\square)$ ($l_2(\square)$) bir Hilbert uzayıdır (Hunter ve Nachtergaele, 2000).

Tanım 26: $L_2(H,(a,b))$, $a,b\in\mathbb{R}$ lineer uzayında

$$\|f\|^2_{L_2(H,(a,b))}+\|f'\|^2_{L_2(H,(a,b))}<\infty$$

koşulunu sağlayan $f:[a,b]\to H$ vektör fonksiyonların oluşturduğu aile $W_2^1(H,(a,b))$ ile gösterilir. Bu durumda $W_2^1(H,(a,b))$ lineer uzayı $(f,g)_{W_2^1(H,(a,b))}:=(f,g)_{L_2(H,(a,b))}+(f',g')_{L_2(H,(a,b))}$, $f,g\in W_2^1(H,(a,b))$ iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır. Bu uzaya Sobolev uzayı da denir. Ayrıca

$$\overset{0}{W}{}_2^{1}\left(H,(a,b)\right)=\left\{f\in W_2^1(H,(a,b)):\ f(a)=f(b)=0\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 27: B bir Banach uzayı ve $I\subset\mathbb{R}$ bir aralık olsun. $f:I\to B$ şeklindeki fonksiyonlara *vektör-fonksiyonlar* denir.

Tanım 28: Bir $f(t)$ vektör-fonksiyonu, $t_0\in I$ noktasında, eğer

$$\lim_{t\to t_0}\left\|f(t)-f(t_0)\right\|=0$$

ise, $f(t)$ vektör-fonksiyonuna $t_0\in I$ noktasında *süreklidir* denir. Diğer taraftan, I aralığının her bir noktasında sürekli olan $f(t)$ vektör-fonksiyonuna I aralığı üzerinde *süreklidir* denir.

Tanım 29: $f:I\to B$ bir vektör-fonksiyonu $t_0\in I$ noktası için

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\|\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}-y\right\|=0$$

olacak şeklinde bir $y\in B$ vektörü mevcutsa, $f(t)$ vektör-fonksiyonuna $t_0\in I$ noktasında *diferensiyellenebilir* denir. Buradaki $y\in B$ vektörüne de $f(t)$ vektör-fonksiyonunun $t_0\in I$ noktasındaki *türevi* adı verilir.

Eğer $f(t)$ vektör-fonksiyonu I aralığının her bir noktasında diferensiyellenebilir ise, o zaman bu $f(t)$'ye I aralığı üzerinde *diferensiyellenebilir* denir.

Tanım 30: H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun.

$$\int_a^b\left\|f(t)\right\|_H^2 dt<+\infty$$

koşulunu sağlayan $f:[a,b]\to H$ güçlü ölçülebilir vektör-fonksiyonlarının lineer vektör uzayı $L_2\left(H,(a,b)\right)$ ile gösterilir. Bu uzay

$$(f,g)_{L_2(H,(a,b))} := \int_a^b (f(t),g(t))_H \, dt, \quad f,g \in L_2(H,(a,b))$$

iç çarpımın doğurduğu norm ile bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 31: H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. $L_2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında

$$\sum_{k=0}^{m} \left\| \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right\|^2_{L_2(H,(a,b))} < +\infty, \quad f \in L_2(H,(a,b))$$

koşulunu sağlayan $f:[a,b] \to H,$ vektör-fonksiyonlarının oluşturduğu küme $W_2^m(H,(a,b))$ ile gösterilir. $\overset{0}{W}{}_2^m(H,(a,b))$ ise, m -yinci mertebeye kadar a ve b noktalarında sıfır olan $W_2^m(H,(a,b))$ fonksiyonların uzayı olarak gösterilir. $W_2^m(H,(a,b))$ uzayı

$$(f,g)_{W_2^m(H,(a,b))} = \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{d^k f(t)}{dt^k}, \frac{d^k g(t)}{dt^k} \right)_{L_2(H,(a,b))}$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır.

2.4. Lineer Operatörler ve Temel Spektral Özellikleri

Tanım 32: X ve Y iki normlu lineer uzay olsun. $A: D(A) \subset X \to Y$ olan her dönüşüme *operatör* adı verilir. Bu durumda

$D(A) := \{x \in X : Ax \ \textit{tanımlı}\} \subset X$ kümesine A operatörünün *tanım kümesi*,

$R(A) := AD(A) = \{y = Ax : \ x \in D(A)\} \subset Y$ kümesine ise A operatörünün *değer kümesi*,

$Ker\, A := \{ x \in X : Ax = 0 \} \subset X$ kümesine ise A operatörünün *sıfır kümesi* veya *çekirdeği* denir.

Tanım 33: X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki lineer uzay, $D(A)$, X 'de bir lineer manifold ve $A: D(A) \subset X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer her $x, y \in D(A)$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$A(\alpha x+\beta y)=\alpha A(x)+\beta A(y)$$

ise, A operatörüne X üzerinde bir *lineer operatör* denir.

Örnek 34: $X=Y=L_2(0,1)$ ve $A:L_2(0,1)\to L_2(0,1)$, $Au=u'(t)$,

$$D(A)=\{u\in L_2(0,1):u'\in L_2(0,1)\}=W_2^1(0,1)$$

ise, A bir lineer operatördür.

Gerçekten, her $u,v\in W_2^1(0,1)$ ve her $\alpha,\beta\in K$ için

$$\alpha u+\beta v\in W_2^1(0,1)$$

olup

$$A(\alpha u+\beta v)=(\alpha u+\beta v)'(t)=(\alpha u)'(t)+(\beta v)'(t)$$

$$=\alpha u'(t)+\beta v'(t)=\alpha Au+\beta Av,$$

yani A bir lineer operatördür.

Örnek 35: $A:C[a,b]\to C[a,b]$, $Af(t)=f(a)+1$, $f\in C[a,b]$ şeklinde tanımlanan operatör lineer değildir.

Gerçekten, $f,g\in C[a,b]$, $f(t)=g(t)=1$ ve $\alpha=\beta=1$ için $f+g\in C[a,b]$ olup

$$A(f+g)(t)=(f+g)(a)+1=f(a)+g(a)+1=1+1+1=3$$

ve

$$Af(t)+Ag(t)=(f(a)+1)+(g(a)+1)=1+1+1+1=4$$

olup $A(f+g)(t)\neq Af(t)+Ag(t)$ olduğundan A operatörü lineer değildir.

Tanım 36: X ve Y iki normlu uzaylar, $D(A)$, X 'de bir lineer manifold ve $A:D(A)\subset X\to Y$ bir operatör ve $x_0\in D(A)$ olsun. Eğer

$$\forall\varepsilon>0 \text{ için } \exists\delta>0:\ \|x-x_0\|<\delta \text{ olan } \forall x\in D(A) \text{ için } \|Ax-Ax_0\|<\varepsilon$$

ise, A operatörü $x = x_0$ noktasında *süreklidir* denir. A operatörü her $x \in D(A)$ noktasında sürekli ise, operatöre *sürekli operatör* denir.

Tanım 37: X ve Y iki normlu uzay ve $A: X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\|Ax\|_Y \le c\|x\|_X$$

olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa A operatörüne *sınırlı operatör* denir.

Teorem 38: X ve Y iki normlu uzay, $A: X \to Y$ lineer operatörünün sınırlı olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul sürekli olmasıdır.

Örnek 39: $X = Y = L_2(a,b)$ ve $k(t,s)$ fonksiyonu $D = [a,b]$ x $[a,b]$, $(a,b \in \mathbb{R})$ karesel bölgesi üzerinde kompleks değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$K : L_2(a,b) \to L_2(a,b),\ Kf(t) := \int_a^b k(t,s)\, f(s)\, ds$$

operatörü lineer sınırlı bir operatördür. Gerçekten K operatörünün lineer olduğu açık olup sınırlı olduğunu gösterelim. Her $f \in L_2(a,b)$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\int_a^b |k(t,s)\, f(s)| ds \le \left(\int_a^b |k(t,s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_a^b |f(s)|^2 ds \right)^{1/2}$$

olup

$$\|Kf\|^2_{L_2(a,b)} = \int_a^b \left(\int_a^b |k(t,s)\, f(s)| ds \right)^2 dt \le \|f\|^2_{L_2(a,b)} \int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 dsdt$$

olduğu ve buradan $f \in L_2(\mathrm{a,b})$ için $\|Kf\|^2 \le \left(\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 dsdt \right)^{1/2} \|f\|$ eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $K : L_2(a,b) \to L_2(a,b)$ operatörünün sınırlı olduğu görülür.

Örnek 40: $X = Y = L_2(0,1)$, $A: L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, $Af := f'$, $f \in L_2(0,1)$ ve

$$D(A) = \{ f \in L_2(0,1) : f' \in L_2(0,1) \}$$

şeklinde tanımlanan lineer operatör sınırlı değildir.

Gerçekten, $n = 1, 2, ...$ için $\varphi_n(x) = e^{inx}$ olsun. $\|\varphi_n\| = 1$, ama

$$\|A\varphi_n\| = n\|\varphi_n\| = n \to \infty,$$

olup, A operatörü sınırlı değildir.

Tanım 41: X ve Y iki normlu uzay ve $A: X \to Y$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu durumda $\|A\| := inf\{M: M > 0 \;\; ve$ her $x \in X \; için \; \|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X\}$ sayısına A operatörünün *normu* adı verilir.

Teorem 42: X ve Y iki normlu uzay ve $A: X \to Y$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu takdirde A operatörünün normu için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(1) $\|A\| := sup\left\{\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} : \; x \in X \;\; ve \;\; x \neq \theta_X\right\}$;

(2) $\|A\| := sup\{\|Ax\|_Y : \; x \in X \;\; ve \;\; \|x\|_X \leq 1\}$;

(3) $\|A\| := sup\{\|Ax\|_Y : \; x \in X \;\; ve \;\; \|x\|_X < 1\}$;

(4) $\|A\| := sup\{\|Ax\|_Y : \; x \in X \;\; ve \;\; \|x\|_X = 1\}$.

Örnek 43: $A: L_2(0,1) \to \mathbb{C}$, $Af(t) := \int_0^1 f(t)\,dt$, $f \in L_2(0,1)$ lineer fonksiyoneli sınırlı bir operatör olup $\|A\| = 1$'dır.

Gerçekten, her $f \in L_2(0,1)$ için

$$|Af|_{\mathbb{C}}^2 = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right|_{\mathbb{C}}^2 = \int_0^1 \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right|^2 dx$$

$$\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt\right)^2 dx = \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt\right)^2 \leq \left(\int_0^1 1^2\,dt\right)\left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right) = \|f\|_{L_2(0,1)}^2$$

Olup

$$|Af| \leq \|f\|.$$

Buradan $\|A\| \leq 1$ olduğu bulunur. Eğer $f_*(t) = 1 \in L_2(0,1)$ olarak alırsak

$$\left|Af_*\right|_{\square} = 1 = 1 \cdot \| f_* \|_{L_2(0,1)}$$

olup $\|A\| = 1$ elde edilir.

Tanım 44: X ve Y iki Banach uzayı olmak üzere $Z := X \oplus Y$ olsun. $A: X \to Y$ lineer operatörü için,

$$Gr(A) := \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset Z = X \oplus Y$$

alt kümesine A operatörünün *grafiği* denir.

Tanım 45: $A: X \to Y$ lineer operatörünün grafiği $Gr(A)$, $Z = X \oplus Y$ de kapalı ise A operatörüne *kapalı operatör* denir.

$A: X \to Y$ operatörünün grafiğinin kapalı olması

$$(x_n) \subset D(A), \quad \lim_{n\to\infty} \{x_n, Ax_n\} = \{x, y\}$$

koşullarından $x \in D(A)$ ve $y = Ax$ denklemini sağlaması demektir.

$\{x, y\} \in X \oplus \mathrm{Y}$ için $\|\{x, y\}\|^2_{X \oplus Y} = \|x\|^2_X + \|y\|^2_Y$ şeklinde olduğundan $A: X \to Y$ lineer operatörünün kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul $(x_n) \subset D(A)$ için $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ve $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$ ise,

$$x \in D(A) \text{ ve } y = Ax$$

olmasıdır.

Örnek 46: $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Af = f'$,

$$D(A) = \{ f \in L_2[0,1] : f \in AC,\ f' \in L_2[0,1],\ f(0) = 0\}$$

şeklinde tanımlanan A operatör kapalıdır.

Gerçekten, $n = 1, 2, \ldots$ için $f_n(t) = t^n$ olsun, bu durumda

$$\| f_n \|^2_{L_2[0,1]} = \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1} \leq 1$$

ve

$$\|Af_n\|^2_{L_2[0,1]} = \int_0^1 n^2 t^{2n-2} dt = \frac{n^2}{2n-1} \to \infty$$

olup A operatörü sınırsızdır. Şimdi A operatörünün kapalı olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için, ilk önce $KerA = \{0\}$ ve $\operatorname{Im} A = L_2[0,1]$ olduğunu not edelim. $g \in L_2[0,1]$ için $f(t) = \int_0^1 g(s)\,ds$ alalım. Buradan $f \in D(A)$ ve $Af = g$ 'dır. $g \in L_2[0,1]$ için $A^{-1}g = f$ şeklinde tanımlanır.

$$\left|\left(A^{-1}g\right)(t)\right| \le \int_0^1 |g(s)|\,ds \le \left(\int_0^1 |g(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} = \|g\|_{L_2(0,1)}$$

olup A^{-1} sınırlı lineer operatördür. Buradan

$$\left\|A^{-1}g\right\|^2 = \int_0^1 \left|\left(A^{-1}g\right)(t)\right|^2 dt \le \int_0^1 \|g\|^2\,dt = \|g\|^2_{L_2(0,1)}$$

olup $\left\|A^{-1}\right\| \le 1$ 'dır.

$f_n \in D(A)$ için $f_n \to f$ ve $Af_n \to h \in L_2[0,1]$

için $f_n = A^{-1}$, $Af_n = A^{-1}h$ olarak alındığında $f = A^{-1}h \in D(A)$ ve $Af = h$ olup, dolayısıyla A operatörü kapalıdır.

Tanım 47: $A: X \to Y$ operatörünün $D(A) \subset D(\overline{A})$ ve her $x \in D(A)$ için $Ax = \overline{A}x$ olacak şekilde bir kapalı $\overline{A}$ operatörü varsa, A'ya *kapanabilir operatör* ve $\overline{A}$ operatörüne A'nın *kapanışı* denir.

Örnek 48: $T: C[0,1] \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $\mathrm{T}f := xf(1)$,

şeklinde tanımlanan operatör kapalı değil ve kapanışı yoktur.

Gerçekten, $\overline{C[0,1]} = L_2[0,1]$ olup

$$\left(f_n(x)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{L_2}} u(x),$$

$$\left(h_n(x)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{L_2}} u(x),\ \left(f_n\right),\left(h_n\right)\subset C[0,1],$$

ama $f_n(1)=1,\ h_n(1)=0,\ n=1,2,...$ şeklinde tanımlansın. O halde $Tf_n = x,\ Th_n = 0$ olduğundan durum açıktır.

Tanım 49: H bir Hilbert uzayı, $A: D(A)\subset H \to H$ bir lineer operatör ve $\overline{D(A)} = H$ olsun. Bu durumda

$$D(A^*) := \left\{ y\in H : \forall x\in D(A) \text{ için bir } z\in H \text{ vardır, öyleki } (Ax,y)_H = (x,z)_H \right\}$$

olmak üzere $A^*: D(A^*)\subset H \to H$, $A^* y := z$ şeklinde tanımlanan operatöre A operatörünün *eşlenik* (*adjoint) operatörü* denir.

Örnek 50: $H=\ell_2(\square),\ T_c:\ell_2(\square)\to\ell_2(\square)$, $\left(c_n\right)\in\ell_\infty(\square)$ ve $T_c\left(x_n\right) := \left(c_n x_n\right)$ şeklinde tanımlanan operatörünün adjointini bulalım.

Bu halde $\left(x_n\right),\left(y_n\right)\in\ell_2(\square)$ ve $\alpha,\beta\in K$ için $\alpha\left(x_n\right)+\beta\left(y_n\right)\in\ell_2(\square)$ olup

$$T_c\left(\alpha\left(x_n\right)+\beta\left(y_n\right)\right) = \left(c_n\left(\alpha\left(x_n\right)+\beta\left(y_n\right)\right)\right) = \left(c_n\left(\alpha\left(x_n\right)\right)+c_n\left(\beta\left(y_n\right)\right)\right)$$

$$= \alpha\left(c_n x_n\right)+\beta\left(c_n y_n\right) = \alpha T_c\left(x_n\right)+\beta T_c\left(y_n\right)$$

bağıntısından T_c operatörünün lineerliği açıktır. Her $\left(x_n\right)\in\ell_2(\square)$

$$\left\|T_c\left(x_n\right)\right\|_{\ell_2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_n x_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le c\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = c\left\|\left(x_n\right)\right\|_{\ell_2},\ c:=\sup_{n\ge 1}\left|c_n\right| < +\infty$$

olup $T_c\in B\left(\ell_2(\square)\right)$ olduğu açıktır. O halde T_c^* adjoint operatörü var olup her $x=\left(x_n\right),\ y=\left(y_n\right)\in\ell_2(\square)$ için

$$\left(T_c x, y\right)_{\ell_2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{\left(\overline{c_n} y_n\right)} = \left(x, T_c^* y\right)_{\ell_2}$$

ve

$$T_c^* y := \left(\overline{c_n} y_n\right),\ y=\left(y_n\right)\in\ell_2(\square)$$

olup $T_c^* = T_{\overline{c}}$.

Örnek 51: $A: L_2(0,1) \to L_2(0,1),\ Af := f'$,

$$D(A) := \left\{ f \in L_2(0,1) : f \in AC(0,1),\ f' \in L_2(0,1) \text{ ve } f(0) = f(1) = 0 \right\}$$

olsun. Bu halde

$$C_0^\infty(0,1) \subset D(A)$$

olup

$$H = \overline{C_0^\infty(0,1)} \subset \overline{D(A)} \subset L_2(0,1).$$

Buradan

$$\overline{D(A)} = L_2(0,1)$$

olduğu açıktır. Şimdi

$$A^* g = -g',\ D(A^*) = \left\{ g \in L_2(0,1) \cap AC(0,1) : g' \in L_2(0,1) \right\}$$

olduğu gösterilsin.

$g \in D(A^*)$ ve $A^* g = h$ olsun. O halde her $f \in D(A)$ için

$$(Af, g)_{L_2} = \int_0^1 f'(t)\overline{g(t)}dt = (f, A^* g)_{L_2} = \int_0^1 f(t)\overline{h(t)}dt.$$

Ayrıca $f \in D(A)$ olduğundan $f(0) = f(1) = 0$ olup

$$\int_0^1 f(t)\overline{h(t)}dt = \int_0^1 f(t)\, d\overline{\left(\int_0^t h(s)\,ds + c \right)} = f(t)\overline{\left(\int_0^t h(s)\,ds + c \right)}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \overline{\left(\int_0^t h(s)\,ds + c \right)} f'(t)\,dt$$

$$= -\int_0^1 \left(H(t) + c \right) f'(t)\,dt,\ H(t) = \int_0^t \overline{h(s)}ds.$$

Yukarıdakilerden

$$0 = \int_0^1 \left(\overline{g(t)} + H(t) + c \right) f'(t)\,dt,\ f \in D(A).$$

Eğer $f_0(t) := \int_0^t \left(\overline{d(s)} + H(s) + c_0\right) ds$ (c_0 sayısı $f_0(1) = 0$ bağıntısından bulunur) ise, $f_0 \in D(A)$, sonuncu bağıntıda f yerine f_0 alarak

$$0 = \int_0^1 \left| \overline{g(t)} + H(t) + c_0 \right|^2 dt$$

sonucuna ulaşılır. Burada

$$g(t) = -\overline{H(t)} - c_0 = -\int_0^t h(s) ds - \overline{c_0},\ g \in AC(0,1) \text{ ve } g' = -h \in L_2(0,1).$$

Böylece $g \in D(A^*)$ için

$$(Af, g)_{L_2} = (f, -g') = (f, A^* g) \text{ ve } A^* g = -g'.$$

Tanım 52: H bir Hilbert uzayı, $A: D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör ve A^*, A operatörünün adjoint operatörü olsun.

Eğer $D(A) \subset D(A^*)$ ve her $f \in D(A)$ için $Af = A^* f$, yani

$\forall f, g \in D(A)$ için $(Af, g)_H = (f, Ag)_H$

ise, A operatörüne *simetrik operatör* denir ve $A \subset A^*$ sembolüyle gösterilir.

Eğer $D(A) = D(A^*)$ ve her $f \in D(A)$ için $Af = A^* f$ ise, A operatörüne *öz-eşlenik operatör* denir.

Eğer H Hilbert uzayında lineer kapalı bir A operatörü için

a) $D(A) \subset D(A^*)$ ve

b) Her $f \in D(A)$ için $\|Af\|_H = \|A^* f\|_H$

ise, A 'ya H 'da *formal normal operatör* adı verilir.

Eğer A, H Hilbert uzayında formal normal ve $D(A) = D(A^*)$ ise, A operatörüne H 'da *normal operatör* denir.

Eğer her $f \in H$ için $AA^* f = A^* Af = f$ ise, A operatörüne *üniter operatör* denir.

Örnek 53:

$$H = \ell_2(\mathbb{Z}),\ (c_n) \in \ell_\infty(\mathbb{Z}),\ A : \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z}),\ A(x_n) = (c_n x_n),$$

$x = (x_n) \in \ell_2(\mathbb{Z})$ şeklinde tanımlanan A operatörünün eşleniğini bulalım.

A operatörünün lineer olduğu açıktır. Ayrıca her $(x_n) \in \ell_2(\mathbb{Z})$ için

$$\|Ax\|_{\ell_2} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le c \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = c\|x\|,\ c := \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|$$

olduğundan $A \in B(\ell_2(\mathbb{Z}))$. Her $x = (x_n),\ y = (y_n) \in \ell_2(\mathbb{Z})$ için

$$(Ax, y)_{\ell_2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \overline{(\overline{c_n} y_n)}$$

olduğundan

$$A^*(y_n) = (\overline{c_n} y_n),\ y_n \in \ell_2(\mathbb{Z})$$

eşlenik operatörü bulunur. Buradan

$A = A^*$ olması için gerekli ve yeterli koşul her $n \in \mathbb{Z}$ için $c_n = \overline{c_n}$.

Örnek 54: $A : D(A) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ Au := u'(t) + au(t),\ a \in \mathbb{R}$,

$$D(A) := \{u \in L_2[0,1] \cap AC[0,1] : u(1) = u(0),\ u'(t) \in L_2[0,1]\}$$

şeklinde tanımlanan operatör bir normal operatördür.

Gerçekten, bu durumda

$$A^* v = -v'(t) + av(t),$$

$$D(A^*) = \{v(t) \in L_2[0,1] \cap AC[0,1] : v(1) = v(0),\ v'(t) \in L_2[0,1]\}$$

olup (Ismailov, 2006),

$$D(A) = D(A^*)$$

ve her $u(t) \in L_2[0,1]$ için

$$\|Au\|_{L_2[0,1]} = \|u' + au\|_{L_2[0,1]} = \|-u' + au\|_{L_2[0,1]} = \|A^* u\|_{L_2[0,1]},$$

yani A normaldir.

Örnek 55 : $A: L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, $\mathrm{a}(t) \in L_\infty(0,1)$, $Af(t) = a(t) f(t)$,

$f \in L_2(0,1)$ şeklinde tanımlanan operatör lineer sınırlı olup

$$AA^* f(t) = a(t)\overline{a^*(t)} f(t) = f(t),$$

$$A^* Af(t) = \overline{a^*(t)} a(t) f(t) = f(t),\ f \in L_2(0,1)$$

olması için, yani A'nın bir üniter operatör olması için gerekli ve yeterli koşul

$$|a(t)| = 1,\ t \in [0,1]$$

olmasıdır.

Tanım 56: H bir Hilbert uzayı ve $A: D(A) \subset H \to H$ bir lineer öz-eşlenik operatör olsun. Eğer her $f \in D(A)$ için

$$(Af, f)_H \geq 0$$

ise, A operatörüne *pozitif operatör* denir ve $A \geq 0$ sembolüyle gösterilir. Eğer A pozitif operatörü için $B^2 = A$ olacak şekilde bir B pozitif lineer operatörü varsa, B operatörüne A'nın *karekökü* denir ve $B = \sqrt{A}$ veya $B = A^{1/2}$ şeklinde gösterilir.

Teorem 57: H Hilbert uzayında tanımlı her pozitif operatörün bir pozitif karekökü mevcut ve bu karekök operatörü bir tektir.

Tanım 58: H bir Hilbert uzayı ve $A: D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör olsun.

$$\rho(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E)^{-1} \in B(X)\right\}$$

kompleks sayılar kümesine A operatörünün *rezolvent kümesi* denir.

$\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda;A) := (A - \lambda E)^{-1}$ operatörüne A operatörünün *rezolvent operatörü* (veya *çözücü operatörü*) adı verilir.

Tanım 59: H bir Hilbert uzayı olsun. $\mathbb{C} \setminus \rho(A)$ kümesine A operatörünün *spektrumu* denir. A operatörünün spektrum kümesi $\sigma(A)$ ile gösterilir.

Tanım 60:

$$\sigma_p(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E) \text{ operatörü bire bir değil} \right\}$$

kümesine A operatörünün *ayrık* veya *diskret spektrumu* denir. Eğer $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$ ise,

$$(A - \lambda_0 E)x_0 = 0$$

denkleminin $x_0 \neq 0$ çözümü vardır. Buradaki λ_0 ’a A operatörünün *özdeğeri*, x_0 ’ a ise λ_0 ’ a uygun bir *özvektörü* denir.

Tanım 61:

$$\sigma_c(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E) \text{ bire bir, } \overline{R(A - \lambda E)} = H, \text{ fakat } R(A - \lambda E) \neq H \right\}$$

kümesine A operatörünün *sürekli spektrumu* denir.

Tanım 62:

$$\sigma_r(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E) \text{ bire bir, } \overline{R(A - \lambda E)} \neq H \right\}$$

kümesine A operatörünün *kalan spektrumu* denir.

$\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ ve $\sigma_r(A)$ kümeleri ayrıktır. Ayrıca spektrumun tanımından

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

olduğu kolayca görülür.

Teorem 63: Eğer A lineer operatörü bir sonlu boyutlu X lineer uzayında tanımlı olsun. Bu takdirde

$$\sigma_c(A) = \varnothing \text{ ve } \sigma_r(A) = \varnothing .$$

Teorem 64: Eğer A lineer normal bir operatör ise, $\sigma_r(A) = \varnothing$.

Tanım 65: A, bir H Hilbert uzayında lineer operatör ve $\lambda \in \sigma_p(A)$ olsun. Bu λ özdeğerine karşılık gelen özvektörlerinin ürettiği lineer alt uzay $H_\lambda(A)$ ile gösterilir.

Örnek 66: $X = \left(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$ olmak üzere, $A: X \to X$, $Ax = tx(t)$ operatörünü göz önüne alalım. $Ax = tx(t)$ operatörü için $R(\lambda; A) = (A - \lambda E)^{-1}$ ' i bulalım.

$$tx(t) - \lambda x(t) = y(t)$$

olup, $x(t)$ çözümü her $t \in [0,1]$ için yukarıdaki eşitliği sağlayan bir fonksiyondur. Eğer $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$ $(\lambda < 0 \text{ veya } \lambda > 1)$ ise, yukarıdaki denkleminin her $y \in X$ için $[0,1]$ üzerinde sürekli tek

$$x(t) = \frac{1}{t - \lambda} y(t), \; t \in [0,1]$$

çözümü vardır. Bu nedenle $\rho(A) = \mathbb{R} \setminus [0,1]$ ve her $\lambda \in \rho(A)$ için

$$R(\lambda; A) = \frac{1}{t - \lambda} y(t), \; t \in [0,1]$$

olur. Şimdi $\lambda \in [0,1]$ sayısının A operatörünün spektrumuna dâhil olduğunu görelim.

$\lambda_0 \in [0,1]$ ve $y(t) \in C[0,1]$ fonksiyonu $y(\lambda_0) = a \neq 0$ koşulunu sağlayan herhangi bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon için

$$(t - \lambda_0) x(t) = y(t)$$

eşitliği hiçbir $x(t) \in C[0,1]$ fonksiyonu için sağlanamaz, çünkü $t = \lambda_0$ noktasında sol tarafı sıfır, sağ tarafı ise sıfırdan farklıdır. Dolayısı ile $\lambda = \lambda_0$ olduğundan yukarıda verilen denklemin bazı $y(t) \in C[0,1]$ fonksiyonları için çözümü yoktur. Bu ise $\lambda \in \sigma(A)$ olması demektir. Ayrıca $\sigma(A)$'nın hiçbir noktası A operatörünün öz değeri olamaz, çünkü

$$(t-\lambda)x(t)=0,\ \lambda\in[0,1]$$

denkleminin çözümü her $t\neq\lambda_0$ için $x(t)$'nin süreksizliğine göre $t=\lambda$ noktasında 0 olur.

Böylece $\sigma_c(A)=[0,1]$ ve $\sigma_p=\varnothing$ olduğu bulunur.

Örnek 67: $A_i:L_2(0,1)\to L_2(0,1),\ i=1,2,3,4$ operatörü için

(1) $A_1u:=u'+au,\ D(A_1)=\overset{0}{W}{}_2^1(0,1),\ a\in\mathbb{R};$

(2) $A_2u:=u'+au,\ D(A_2)=\left\{u\in W_2^1(0,1):u(0)=0\right\},\ a\in\mathbb{R};$

(3) $A_3u:=u'+au,\ D(A_3)=\left\{u\in W_2^1(0,1):u(0)=u(1)\right\},\ a\in\mathbb{R};$

(4) $A_4u:=u'+au,\ D(A_4)=W_2^1(0,1),\ a\in\mathbb{C};$

operatörlerinin spektrumlarını bulalım:

Çözüm: (1) $\lambda\in\mathbb{C}$ için $R(A_1-\lambda E)\perp e^{(a-\bar{\lambda})t}$ olduğunu gösterelim.

Gerçekten, her $u(t)\in\overset{0}{W}{}_2^1(0,1)$ için

$$\left(u'+au-\lambda u,e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L_2(0,1)}=\left(u',e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L_2(0,1)}+\left(u,\left(a-\bar{\lambda}\right)e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L_2(0,1)}$$

$$=\left(u,e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)'_{L_2(0,1)}-\left(u,\left(a-\bar{\lambda}\right)e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L_2(0,1)}+\left(u,\left(a-\bar{\lambda}\right)e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)$$

$$=\left(u(1),e^{(a-\bar{\lambda})}\right)_{L_2(0,1)}-\left(u(0),1\right)_{L_2(0,1)}=0$$

olduğundan her $\lambda\in\mathbb{C}$ için $R(A_1-\lambda E)\perp e^{(a-\bar{\lambda})t}$ ve buradan $\overline{R(A_1-\lambda E)}\perp e^{(a-\bar{\lambda})t}$ bulunur. Başka bir ifadeyle, $\overline{R(A_1-\lambda E)}\neq L_2(0,1)$.

Sonuncu ve kalan spektrumunun tanımına göre

$$\sigma(A_1)=\sigma_r(A_1)=\mathbb{C}\ .$$

(2) $A_2 u := u' + au,\ A: L_2(0,1) \to L_2(0,1),\ D(A_2) = \left\{ u \in W_2^1(0,1) : u(0) = 0 \right\}.$

Bu durumda $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$u' + au = \lambda u + f,\ f \in L_2(0,1)$$

denkleminin genel çözümü

$$u(t) = ce^{(\lambda - a)t} + \int_0^t e^{-(a-\lambda)(t-s)} f(s)\,ds$$

şeklinde olup $u(0) = 0$ sınır değer koşulundan $c = 0$ bulunur. Öyleyse, her $\lambda \in \mathbb{C}$ ve her $f \in L_2(0,1)$ için

$$(A_2 - \lambda)u = f$$

denkleminin

$$u(t) = \int_0^t e^{-(a-\lambda)(t-s)} f(s)\,ds \in W_2^1(0,1)$$

şeklinde bir tek çözümü vardır, yani her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$(A_2 - \lambda)^{-1} \in B(L_2(0,1)).$$

Başka bir ifadeyle

$$\sigma(A_2) = \varnothing,\ \rho(A_2) = \mathbb{C}.$$

(3) $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$A_3 u = u' + au = \lambda u,\ u \in D(A_3)$$

denkleminin çözüm kümesi

$$u_\lambda(t) = ce^{-(a-\lambda)t},\ c \in \mathbb{C},\ 0 \le t \le 1$$

şeklindedir. Ayrıca $u_\lambda \in W_2^1(0,1)$ olup $u(0) = u(1)$ sınır değerlerini kullanırsak,

$$c = ce^{-(a-\lambda)}$$

elde edilir. Buradan

$$c\left(1-e^{-(a-\lambda)}\right)=0$$

olup, $c\neq 0$ için $1=e^{-(a-\lambda)}$'dır. Buradan ise,

$$\lambda-a=2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$$

elde edilir. Sonuncu ve noktasal spektrumunun tanımından

$$\sigma_p\left(A_3\right)=\left\{a+2k\pi i : k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Diğer taraftan $A_3 : D\left(A_3\right)\subset L_2\left(0,1\right)\to L_2\left(0,1\right)$ operatörü normal olduğundan bu operatörün kalan spektrumu

$$\sigma_r\left(A_3\right)=\varnothing .$$

$\lambda\neq\lambda_k=a+2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$ alalım.

$A_3u=\lambda u+f,\ u\left(t\right), f\left(t\right)\in L_2\left(0,1\right)$ denkleminin çözüm kümesi

$$u\left(t\right)=ce^{-(a-\lambda)t}+\int_0^t e^{-(a-\lambda)(t-s)}f\left(s\right)ds,\ c\in\mathbb{C} \tag{2.4.1}$$

elde edilir. $u\left(0\right)=u\left(1\right)$ sınır değerleri kullanılırsa,

$$c=\left(1-e^{(\lambda-a)}\right)^{-1}\int_0^1 e^{(\lambda-a)(1-s)}f\left(s\right)ds$$

olup (2.4.1) denkleminden,

$$R_\lambda f\left(t\right)=\left(1-e^{(\lambda-a)}\right)^{-1}\int_0^1 e^{(\lambda-a)(1+t-s)}f\left(s\right)ds+\int_0^t e^{(\lambda-a)(t-s)}f\left(s\right)ds,\ f\in L_2\left(0,1\right).$$

Yani

$$R_\lambda f\left(t\right)=\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_0^t e^{(\lambda-a)(t-s)}f\left(s\right)ds+\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_t^1 e^{(\lambda-a)(t-s)}f\left(s\right)ds$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi $R_\lambda f\left(t\right)\in B\left(L_2\left(0,1\right)\right)$ olduğunu gösterelim.

$$\left\|R_\lambda f(t)\right\|^2=\int_0^1\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_0^t e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\,ds+\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_t^1 e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\,ds\right|^2 dt$$

$$\leq 2\int_0^1\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_0^t e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\,ds\right|^2+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\int_t^1 e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\,ds\right|^2\right)dt$$

$$\leq 2\int_0^1\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\left(\int_0^t\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\right|ds\right)^2+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\left(\int_t^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\right|ds\right)^2\right)dt$$

$$\leq 2\int_0^1\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\left(\int_0^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\right|ds\right)^2+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\left(\int_0^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}f(s)\right|ds\right)^2\right)dt$$

Cauchy-Schwarz-Bunyokowski eşitsizliğinden,

$$\leq 2\int_0^1\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\int_0^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}\right|^2 ds\int_0^1\left|f(s)\right|^2 ds+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\int_0^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}\right|^2 ds\int_0^1\left|f(s)\right|^2 ds\right)dt$$

$$\leq 2\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\right)\int_0^1\left(\int_0^1\left|e^{(\lambda-a)(t-s)}\right|^2 ds\right)dt\left\|f(t)\right\|^2$$

$$\leq 2\left(\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2+\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\right)\left(\frac{e^{2|a-\lambda|}-1}{2|a-\lambda|}\right)^2\left\|f(t)\right\|^2$$

olup,

$$c_\lambda:=\left(2\left|\frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2+2\left|\frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{e^{2|\lambda-a|}-1}{2|\lambda-a|}\right)$$

olarak seçildiğinde

$$\left\|R_\lambda f(t)\right\|\leq c_\lambda\left\|f(t)\right\|$$

elde edilir. Böylece eğer $\lambda\neq\lambda_k,\ k\in\mathbb{Z}$ ise, $\lambda\in\rho(A_3)$.

Sonuç olarak

$$\sigma(A_3)=\{a+2k\pi i:k\in\mathbb{Z}\}.$$

(4) Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $A_4 u = u' + au = \lambda u,\ u \in W_2^1(0,1)$ denkleminin çözüm kümesi

$$u(t) = ce^{(\lambda - a)t}$$

şeklinde olup her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$A_4 u = \lambda u$$

denkleminin $u \neq 0,\ u \in W_2^1(0,1)$ şeklinde çözümü vardır. Sonuncu ve noktasal spektrumunun tanımına göre

$$\sigma(A_4) = \sigma_p(A_4) = \mathbb{C}\ .$$

Tanım 68: A, bir H Hilbert uzayında lineer operatör ve $n_+ = \dim H_{-i}(A^*),\ n_- = \dim H_i(A^*)$ olsun. (n_+, n_-) sayılarına A operatörünün *defekt sayıları* denir.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma, Yuli Eidelman, Vitali Milman ve Antonis Tsolomitis'in, 2004 yılında American Mathematical Society tarafından, Graduate Studies in Mathematics 66'nın eseri olan "Functional Analysis: An Introduction" isimli eseri temel kaynak olarak alınmıştır. Literatürde, "Hilbert Uzayında Sınırsız Öz-Eşlenik ve Simetrik Operatörler" konusu birçok yabancı kaynaklarda bulunmaktadır. Fakat dilimizde yazılmış bu alanda çok az eser bulunmaktadır. Dolayısıyla, bu tez Türkçe bir kaynak olarak, sınırsız operatörler alanında kendi dilimizde yazılmış bir eser olacaktır. Yukarıda da temel kaynak olarak aldığımız bu eser, ünlü bilim insanları ve yayınevi tarafından basılmış olup, tezdeki bilimsel hataları en aza indirtir. Şimdi "Hilbert Uzayında Bir Simetrik Operatörün Simetrik, Öz-Eşlenik Genişlemeleri ve Spektral Yapısı" konusunu örnekleriyle, ayrıntılı bir biçimde incelemeye başlayalım.

3.1. H Hilbert Uzayında Sınırsız Öz-Eşlenik ve Simetrik Operatörler

3.1.1. Temel Gösterimler ve Örnekler

A, bir H Hilbert uzayının $dom\,A$ altkümesi üzerinde tanımlı bir dönüşüm olsun. Burada "$dom\,A$" A'nın tanım kümesini göstermektedir. Burada $(A, dom\,A)$ çiftine bir *operatör* adı verilir. Biz burada $\overline{dom\,A} = H$ olarak kabul edeceğiz ve A'nın tanım kümesi olarak $dom\,A$ yerine D_A sembolü ile göstereceğiz.

Kabul edelim ki, her $x \in D_A$ için

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle \tag{3.1}$$

olacak şekilde, verilmiş bir $y \in H$ için bir $y^* \in H$ var olsun. İlk baştaki $\overline{D_A} = H$ kabulümüz sayesinde, eğer bir $y^* \in H$ var ise bu y^*'ın tek olduğunu garantilemiş oluruz. Yani, eğer her $x \in D_A$ için $\langle Ax, y\rangle = \langle x, y_1^*\rangle$ ve $\langle Ax, y\rangle = \langle x, y_2^*\rangle$ olacak şekilde $y_1^*, y_2^* \in H$ varsa bu durumda $y_1^* = y_2^*$. Gerçekten, her $x \in D_A$ için

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle = \langle x, y_1^*\rangle = \langle x, y_2^*\rangle \;&\Rightarrow\; \langle x, y_1^*\rangle - \langle x, y_2^*\rangle = 0\\ &\Rightarrow\; \langle x, y_1^* - y_2^*\rangle = 0\\ &\Rightarrow\; y_1^* - y_2^* = 0\\ &\Rightarrow\; y_1^* = y_2^*\end{aligned}$$

Eğer y^* (3.1) tarafından tek türlü tanımlı ise, bu durumda D_A, H uzayında yoğun olmak zorundadır. Aksi takdirde $y^* \neq 0$ ve $y^* \perp D_A$ alınır ve buradan $y = 0$ elemanına karşılık sadece sıfır elemanı alınır. Böylece A^* dual operatörünün D_{A^*} tanım kümesi tanımlanır. Yani y^* var eden tüm y ile $y^* = A^*y$ formülüyle verilen A^* operatörünü içeren küme demektir. Sonuç olarak, $\overline{D_A} = H$ olan keyfi bir A lineer operatörü için A^* dual operatörü tanımlanabilir.

A^* dual operatörünün bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

i. A^* bir kapalı operatördür: Eğer $y_n \to y$, $y_n^* \to y^*$ ve her $x \in D_A$ için $\langle Ax, y_n \rangle = \langle x, y_n^* \rangle$ ise, $\langle Ax, y \rangle = \langle x, y^* \rangle$ olur ki bu da $y \in D_{A^*}$ ve $A^*y = y^*$ anlamına gelir.

ii. Eğer $D_{A_1} \subseteq D_{A_2}$ ve her $x \in D_{A_1}$ için $A_2x = A_1x$ ise, o zaman $A_1 \subseteq A_2$ dir diyebiliriz. Başka bir ifadeyle D_{A_1} üzerinde A_2'nin kısıtlanışı $A_1 : A_2|_{D_{A_1}} = A_1$ dir. Ayrıca $A_1 \subseteq A_2$ ise $A_1^* \supseteq A_2^*$ olduğu açıktır.

iii. Kabul edelim ki A operatörü kapanabilir olsun, yani A'nın grafiğinin kapanışı $\bar{A}$ operatörünün bir grafiğidir. Şimdi $\bar{A}^* = A^*$ ve eğer $(A^*)^*$ var ise, yani D_{A^*}, H uzayında yoğun ise, bu durumda $\bar{A} \subseteq A^{**}$ olduklarını gösterelim. Gerçekten, $A \subseteq \bar{A}$ olduğundan $\bar{A}^* \subseteq A^*$. $y \in D_{A^*}$ alalım. $x \in D_{\bar{A}}$, $x_n \to x$, $x_n \in D_A$ ve $Ax_n \to z = \bar{A}x$ olsun. $\langle Ax_n, y \rangle = \langle x_n, y^* \rangle$ eşitliğinden limit alırsak, $\langle \bar{A}x, y \rangle = \langle x, y^* \rangle$ elde ederiz, ki bu da $y \in \bar{A}^*$ olduğu anlamına gelir. Sonra $y \in D_{A^*}$ ve $x \in D_{\bar{A}}$ için

$$\langle \bar{A}x, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \text{ veya } \langle A^*y, x \rangle = \langle y, \bar{A}x \rangle$$

yazabiliriz. Bu ise $x \in D_{A^{**}}$ ve $A^{**}x = \bar{A}x$ olduğunu gösterir.

Eğer $\overline{D_A} = H$ ve her $x, y \in D_A$ için

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \tag{3.2}$$

ise A operatörü *simetriktir* denir, ayrıca $A \subseteq A^*$.

Keyfi $B \supseteq A$ simetrik operatörü için $B \subseteq A^*$ olduğu açıktır. Çünkü $B \subseteq B^* \subseteq A^*$. Böylece, bir A simetrik operatörünün tüm B simetrik genişlemeleri A ve A^* arasındadır, yani $A \subseteq B \subseteq A^*$. Eğer $A = A^*$ ise A'ya bir *öz-eşlenik operatör* denir.

Eğer $\overline{ImA} = E \neq H$ ise, $kerA^* \neq 0$ olduğu görülür (bu ise 0'ın A^* operatörünün bir özdeğeri olduğu anlamına gelir). Gerçekten, $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ ve $y \perp E$ işlemleri $A^*y = 0$ anlamına gelmektedir. Üstelik

$$(Im\,A)^{\perp} = \ker A^* \tag{3.3}$$

sonucuna da varırız.

Eğer $D_A = H$ olmak üzere A bir simetrik operatör ise, bu durumda A sınırlı bir operatördür.

Genel teoriyi genişletmeye devam etmeden önce birkaç örnek verelim.

Örnekler:

(i) A operatörü $L_2[0,1]$ uzayında

$$D_A = \{x \in L_2[0,1]:\ x \in C^1[0,1], x(0) = x(1) = 0\}$$

tanım kümesiyle, $Ax = i\frac{dx}{dt}$ şeklinde tanımlanan bir operatör olsun. Keyfi $x \in D_A$ ve $y \in D_{A^*}$ için

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle = \int_0^1 x(t)\overline{y^*(t)}dt &= \int_0^1 x(t)\left(\int_0^t \overline{y^*(\tau)}d\tau\right)' dt \\ &= \left(x(t)\int_0^t \overline{y^*(\tau)}d\tau\right)\Big|_{t=0}^1 - \int_0^1 x'(t)\int_0^t \overline{y^*(\tau)}d\tau\, dt \\ &= \int_0^1 (ix')(t)\overline{\left(\int_0^t(-\imath y^*)(\tau)d\tau\right)}dt \\ &= \langle Ax, \tilde{y}\rangle\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\tilde{y} = -i\int_0^t y^*(\tau)d\tau$. Böylece keyfi $x \in D_A$ için $\langle Ax, y - \tilde{y}\rangle = 0$, yani $y = \tilde{y} \in (Im\,A)^{\perp}$ elde edilir. $L_2[0,1] = \overline{span}\{\cos n\pi x\}_{n=1}^{\infty} \oplus span\{1\}$, $\cos n\pi x \in Im\,A$ ve $1 \perp Im\,A$ için $(Im\,A)^{\perp} = span\{1\}$ bulunur. Böylece c sabit olmak üzere $y - \tilde{y} = c$, yani $y(t) = -i\int_0^t y^*(\tau)d\tau + c$. Dolayısıyla $y(t)$ mutlak sürekli, $y' = -iy^* \in L_2[0,1]$ ve üstelik $y^* = A^*y = iy'$ elde edilir. Tersine, eğer $y(t)$ mutlak sürekli ve $y' \in L_2[0,1]$ ise, o zaman keyfi $x \in D_A$ için

$$\langle Ax, y\rangle = \int_0^1 (ix')(t)\overline{y(t)}dt = \int_0^1 x(t)\overline{\imath y'(t)}dt = \langle x, y^*\rangle$$

bulunur, burada $y^* = iy'$. Böylece

$$D_{A^*} = \{y: y\ mutlak\ sürekli, y' \in L_2[0,1]\} \text{ ve } A^*y = iy'.$$

olup, $A \subseteq A^*$; yani A simetrik ve kapalı değildir. Çünkü A'nın tanım kümesi $L_2[0,1]$ uzayında yoğun değildir. Fakat A operatörü

$D_{A_1} = \{x: x\ mutlak\ sürekli,\ x' \in L_2[0,1], x(0) = x(1) = 0\}$ ve $A_1 x = ix'$

şeklinde tanımlanırsa $A_1 = \bar{A}$ olacak şekilde bir kapanışa sahiptir.

(ii) A_2, $H = L_2[0,1]$ uzayı üzerinde tanımlı bir operatör ve $A_2 x = i\frac{dx}{dt}$ şeklinde tanımlansın, fakat şimdi

$$D_{A_2} = \{x \in H: x\ mutlak\ sürekli, x' \in L_2[0,1], x(0) = x(1)\}$$

şeklinde alınsın. A_2 operatörünün simetrikliği kolayca gösterilebilir. Burada $A_2 \supseteq A_1$ ve dolayısıyla $A_1^* \supseteq A_2^*$. Bu nedenle, her $y \in D_{A_2^*}$ mutlak sürekli, $y' \in L_2[0,1]$ ve $y^* = A_2^* y = iy'$. Böylece keyfi $x \in D_{A_2}$ ve $y \in D_{A_2^*}$ için

$$\langle x, y^* \rangle = \langle A_2 x, y \rangle = \int_0^1 i \left[\frac{d}{dt} x(t)\right] \overline{y(t)} dt$$

$$= i\left(x(1)\overline{y(1)} - x(0)\overline{y(0)}\right) + \int_0^1 x(t)\overline{\imath y'(t)} dt$$

elde edilir. Şimdi $y(0) = y(1)$ olduğunu gösterelim. Eğer aksi varsayılırsa, $L_2[0,1]$ uzayında bir x_n dizisi alınsın öyleki $x_n \in D_{A_2}$, $x_n(0) = x_n(1) = 1$ ve $x_n \to 0$. Buradan $\langle x_n, y^* \rangle \to 0$, $\langle x_n, iy' \rangle \to 0$ ve dolayısıyla $\langle A_2 x_n, y \rangle \to i\overline{(y(1) - y(0))} \neq 0$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir, böylece $y(0) = y(1)$ ve $A_2^* = A_2$, yani A_2 operatörü öz-eşleniktir.

(i) ve (ii) örneklerine geri dönecek olursak, A^* ve A_2^* operatörlerinin özfonksiyon ve özdeğerlerini hesaplayalım. (i) örneğinde, $A^* x = ix'$ ve başka şart yok. $ix' = \bar{\lambda} x$ alalım. Buradan $x = e^{\bar{\lambda}t/i}$ ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için bir trivialden farklı çözüm vardır. Üstelik $\dim \ker(A^* - \bar{\lambda} I) = 1$ ve bu codim $\overline{Im\ (A - \lambda I)} = 1$ anlamına gelir. Bu $codim$'e A operatörünün defekt sayıları denir. $Im\lambda > 0$ olan tüm λ ve $Im\,\lambda < 0$ olan aynı λ'lar için aynı sayıların (simetrik operatörler için) olduğu gösterilebilir. Fakat her iki durum için gerekli değildir. Böylece, bu örnek (1,1) defekt sayılara sahiptir. Ayrıca A operatörünün hiç özdeğeri yoktur, çünkü $ix' = \lambda x$ denkleminin trivial olmayan çözümü $x(0) = x(1) = 0$ şartlarını sağlamaz.

Şimdi (ii) örneğinde, $A_2^* = A_2$ ve $x(0) = x(1)$ alınsın. Bu $1 = e^{\lambda/i}$ ve $\lambda = 2\pi n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ verir. Böylece $Im\lambda > 0$ veya $Im\lambda < 0$ için çözüm yoktur ve bu örneğin defekt sayıları (0,0) şeklindedir.

(iii) $L_2[0,\infty)$ uzayında,

$$D_A = \{x \in L_2 : x\ düzgün\ ve\ bir\ sonlu\ desteğe\ sahip, x(0) = 0\ \}$$

tanım kümesiyle, $Ax = ix'$ operatörünü göz önüne alalım. (i) örneğindeki gibi hesaplama yapılırsa

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle = \int_0^\infty x(t)\overline{y^*(t)}dt = \int_0^\infty (ix')(t)\overline{\tilde{y}(t)}dt = \langle Ax, \tilde{y}\rangle$$

burada $\tilde{y} = -i\int_0^t y^*(\tau)d\tau$ alınır. Keyfi $b > 0$ ve $x \in D_A,\ x(t) = 0,\ t \geq b$ için

$$\langle Ax, y\rangle = \int_0^b x(t)\overline{y^*(t)}dt = \int_0^b (ix')(t)\overline{\tilde{y}(t)}dt$$

elde edilir. (i)'den, $0 \leq t \leq b$ için c_1 sabit olmak üzere $y(t) = -i\int_0^t y^*(\tau)d\tau + c_1$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla y mutlak sürekli ve $y' = -iy^* \in L_2[0,\infty)$. Aksine, eğer $y(t)$ mutlak sürekli ve $y' \in L_2[0,\infty)$ ise, bu durumda keyfi $x \in D_A$ için

$$\langle Ax, y\rangle = \int_0^\infty (ix')(t)\overline{y(t)}dt = \int_0^\infty x(t)\overline{iy'(t)}dt = \langle x, y^*\rangle$$

olup, burada $y^* = iy'$. Buradan

$$D_{A^*} = \{y \in L_2[0,\infty) : y\ mutlak\ sürekli, y' \in L_2[0,\infty)\}$$

sonucuna ulaşılır ve ilaveten $y^* = A^*y = iy'$. Böylece A simetriktir: $A \subseteq A^*$. A^* operatörünün özdeğerlerinin hesaplanması için $x = e^{\bar{\lambda}t/i}$ olup yalnızca $Im\,\lambda > 0$ için bir özdeğerdir, çünkü $x \in L_2[0,\infty)$ uzayında olmalıdır. Böylece defekt sayıları (1,0)'dır.

(iv) $L_2[0,\infty)$ uzayında

$$D_A = \left\{\begin{matrix} x \in L_2[0,\infty): x \text{ sonlu desteğe sahip ve } x'\ mutlak\ sürekli \\ türevlenebilir, \quad x''(t) \in L_2[0,\infty), \quad x(0) = x'(0) = 0 \end{matrix}\right\}$$

tanım kümesiyle $Ax = -x''$ operatörünü ele alalım. İlk önce

$$M = \left\{f \in L_2[0,\infty): f \text{ sonlu destekli}, \int_0^\infty f(t)dt = \int_0^\infty tf(t)dt = 0\right\}$$

olmak üzere $Im\ A = M$ olduğunu gösterelim.

Burada $x(0) = x'(0) = 0$ sınır şartları, iki integralin sıfır olma şartına dönüşür. Üstelik, eğer $x \in D_A$ ise, $x'' \in M$ olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi, keyfi $f \in M$ için $g(t) = \int_t^\infty (s-t)f(s)ds$ alalım. Buradan $g(t)$'nin sonlu desteğe sahip olduğu açıktır. Üstelik

$$g'(t) = -\int_t^\infty f(s)ds \quad \text{ve} \quad g''(t) = -f(t)$$

ki bu ise $g'(t)$'nin mutlak sürekli ve $g'' = -f \in L_2[0,\infty)$ olduğu anlamına gelir. Ayrıca

$$g'(0) = -\int_0^\infty f(s)ds = 0 \text{ ve } g(0) = \int_0^\infty sf(s)ds = 0$$

ve buradan $f \in Im\ A$ olduğu elde edilir. Keyfi $x \in D_A$ ve $y \in D_{A^*}$ için $\langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (-x''(t))\overline{y(t)}dt = \int_0^\infty x(t)\overline{y^*(t)}dt &= \int_0^\infty x(t)\left(\int_0^t \overline{y^*(\tau)}d\tau\right)' dt \\
&= \left(x(t)\int_0^\infty \overline{y^*(\tau)}d\tau\right)\Big|_{t=0}^\infty - \int_0^\infty x'(t)\int_0^t \overline{y^*(\tau)}d\tau\, dt \\
&= -\int_0^\infty x'(t)\left(\int_0^t\int_0^\tau \overline{y^*(s)}ds\, dt\right)' dt \\
&= -x'(t)\left(\int_0^t\int_0^\tau \overline{y^*(s)}ds\, d\tau\right)\Big|_{t=0}^\infty \\
&\quad + \int_0^\infty x''(t)\left(\int_0^t\int_0^\tau \overline{y^*(s)}ds\, d\tau\right) dt \\
&= \int_0^\infty (-x''(t))\overline{\tilde{y}(t)}dt,
\end{aligned}$$

burada $\tilde{y}(t) = -\int_0^t\int_0^\tau y^*(s)ds\, d\tau$. Böylece keyfi $f \in Im\ A$ için

$$\int_0^\infty f(t)\overline{y(t)}dt = \int_0^\infty f(t)\overline{\tilde{y}(t)}dt$$

elde edilir. $[0,b]$ aralığında destekli $f(t) \in ImA$ fonksiyonu alındığında, keyfi $b > 0$ ve $f_b(t)$ fonksiyonu için

$$\int_0^b f_b(t)dt = \int_0^b tf_b(t)dt = 0,$$

yani $[0,b]$'de keyfi $f_b(t) \in span\{1,t\}^\perp$ için

$$\int_0^b f_b(t)\overline{y(t)}dt = \int_0^b f_b(t)\overline{\tilde{y}(t)}dt$$

eşitliği doğrudur. Buradan c_1, c_2 sabitler ve $0 \leq t \leq b$ için

$$y(t) = \tilde{y}(t) + c_1(t) + c_2.$$

Dolayısıyla $y'(t)$ bir mutlak sürekli fonksiyon ve $y'' = -y^* \in L_2[0,\infty)$. Aksine, eğer $y(t) \in L_2[0,\infty)$, $y'(t)$ mutlak sürekli ve $y'' \in L_2[0,\infty)$ ise, keyfi $x \in D_A$ için $y^* = -y''$ olmak üzere

$$\langle Ax, y\rangle = \int_0^\infty (-x'')(t)\overline{y(t)}dt = -x'(t)\overline{y(t)}|_0^\infty + \int_0^\infty x'(t)\overline{y'(t)}dt$$

$$= x(t)\overline{y'(t)}|_0^\infty - \int_0^\infty x(t)\overline{y''(t)}dt$$

$$= \langle x, y^*\rangle.$$

Buradan

$$D_{A^*} = \{y \in L_2[0,\infty) : y' \; mutlak \; sürekli, y'' \in L_2[0,\infty)\}$$

ve $y^* = A^*y = -y''$ olduğu bulunur. Dolayısıyla A simetriktir: $A \subseteq A^*$, fakat öz-eşlenik değildir. Çünkü görüldüğü üzere D_{A^*} tanım kümesi sınır şartlarını içermez. Ayrıca keyfi $x \in D_A$ için $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ olduğu da kolayca gösterilebilir.

(v) $L_2[0,\infty)$ uzayında aynı $A_2x = -x''$ operatörü fakat tanım kümesi olarak

$$D_{A_2} = \{x \in L_2 : x' \; mutlak \; sürekli, x'' \in L_2[0,\infty) \; ve \; x(0) = 0\}$$

alınsın. A_2 operatörünün bir simetrik operatör olduğunu biliyoruz. Açıkça $A \subseteq A_2$ ve $A_2^* \subseteq A^*$. Böylece $y \in D_{A_2^*}$ olması y' mutlak sürekli ve $y'' \in L_2[0,\infty)$ olduğunu gösterir. Yukarıdaki benzer hesaplamalardan, $y \in D_{A_2^*}$ ve her $x \in D_{A_2^*}$ sonlu destekli için

$$\langle x, y^*\rangle = \langle Ax, y\rangle = -x'(0)\overline{y(0)} + \langle x, -y''\rangle \qquad (3.4)$$

elde edilir ve $y(0) = 0$ şartı sağlanır; aksi halde $x_n \in D_{A_2}$ sonlu destekli alırsak, $L_2[0,\infty)$ uzayında $x_n \to 0$ olur, fakat $x_n'(0) = 1$ olur ki bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $A_2 = A_2^*$ ve A_2 operatörü A operatörünün bir öz-eşlenik genişlemesidir.

A ve A_2 operatörlerinin defekt sayılarının hesaplanması için, A^* ve A_2^* dual operatörlerinin öz değerlerine bakılmak zorundadır. Yani

$$-x'' = \lambda x \tag{3.5}$$

denklemine bakılırsa bu denklemin çözümü $x(t) = c_1 e^{i\sqrt{\lambda}t} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}t}$. Ancak $x(t) \in L_2[0,\infty)$ çözümünü arıyoruz, dolayısıyla eğer $Im\lambda \neq 0$ ise, $e^{i\sqrt{\lambda}t}$ veya $e^{-i\sqrt{\lambda}t}$ fonksiyonlarından birine bakılmaz. Böylece A operatörünün indisleri (1,1) şeklinde olur. $A_2^* = A_2$ durumunda diğer bir şart vardır, yani $x(0) = 0$ ve başka bir çözüm yoktur. Böylece A_2 operatörünün indisleri (0,0) şeklindedir.

3.1.1. Simetrik Operatörlerin Bazı Özellikleri

Teorem 3.1: Eğer A bir simetrik operatör ve $Im\, A = H$ ise, A operatörü öz-eşleniktir.

İspat: Keyfi $y \in D_{A^*}$ ve $y^* = A^* y$ olsun. $Im\, A = H$ olduğu için, $Ax = y^*$olacak şekilde $x \in D_A$ vardır. $D_{A^*} = D_A$ ve $A = A^*$ olduğunu göstermek için $x = y$ olduğu gösterilsin. Her $z \in D_A$ için

$$\langle Az, y \rangle = \langle z, y^* \rangle = \langle z, Ax \rangle = \langle Az, x \rangle \tag{3.6}$$

burada $x, z \in D_A$. Böylece keyfi $u \in Im\, A = H$ için $\langle u, y \rangle = \langle u, x \rangle$, yani $y = x$ elde edilir.

Teorem 3.2: Eğer A bir öz-eşlenik operatör ve bir A^{-1} formal terse (bunun anlamı $\ker A = 0$, yani $A: D_A \to Im\, A$ bire bir) sahip ise, A^{-1} operatörü de öz-eşleniktir.

İspat: Eğer $\ker A = 0$ ve $A = A^*$ ise, $\overline{Im\, A} = H$. Gerçekten, eğer $\overline{Im\, A} = E \subset H$ ise, $A^* y_0 = 0$ olacak şekilde bir $y_0 \neq 0$ elemanı vardır. Fakat $A = A^*$ ve $\ker A = 0$. Böylece $D_{A^{-1}}$, H uzayında yoğundur.

Varsayalım ki $y \in D_{(A^{-1})^*}$ olsun. Keyfi $x \in D_{A^{-1}}$ için $\langle A^{-1}x, y \rangle = \langle x, y^* \rangle$. $z = A^{-1}x$ olsun. Buradan keyfi $z \in D_A$ için $\langle z, y \rangle = \langle Az, y^* \rangle$. A öz-eşlenik olduğu için $y^* \in D_A$ ve $Ay^* = y$. Dolayısıyla $y \in Im\, A = D_{A^{-1}}$ ve $(A^{-1})^* y = y^* = A^{-1} y$ olup bu ise $A^{-1} = (A^{-1})^*$ olduğu anlamına gelir.

Teorem 3.2 öz-eşlenik sınırsız operatörlerin bir çok örneğini verir. Herhangi bir trivial çekirdeğe sahip A öz-eşlenik kompakt operatörle başlansın. $D_{A^{-1}} = Im\, A$ tanım kümeli A^{-1} operatörü bir sınırsız öz-eşlenik operatördür.

3.1.3. $\sigma(A)$ Spektrum

$A: D_A \to H$ bir lineer operatör ve $\overline{D_A} = H$ olsun. Sınırlı operatörlerin durumuna benzer olarak, eğer $(A - \lambda I)^{-1}$ H uzayında mevcut tanımlanmış ve sınırlı ise $\lambda \in \mathbb{C}$ bir regüler noktadır. $\sigma(A)$ spektrumu tüm regüler olmayan noktalardan oluşur.

$\sigma(A)$ spektrumu aşağıdaki bölümlerden oluşur:

Noktasal Spektrum: $\sigma_p(A)$, A operatörünün özdeğerlerinin kümesi, yani $\lambda \in \sigma_p(A)$ olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, $Ax = \lambda x$, yani $\ker(A - \lambda I) \neq 0$, şartını sağlayan bir $x \in D_A$ olmasıdır.

Sürekli Spektrum: $\sigma_c(A)$, burada $\lambda \in \sigma_c(A)$ olması için gerek ve yeter şart $\lambda \notin \sigma_p(A)$ ve $Im\ (A - \lambda I)$, H uzayında yoğun fakat bu uzaya eşit olmayacak.

Kalan Spektrum: $\sigma_r(A)$, burada $\lambda \in \sigma_r(A)$ olması için gerek ve yeter şart $A - \lambda I$ bire bir, yani $\lambda \notin \sigma_p(A)$ ve $\overline{Im\ (A - \lambda I)} \neq H$.

A bir kapalı operatör olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ noktasının regüler olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $\ker(A - \lambda I) = 0$ ve $Im\ (A - \lambda I) = H$ olmasıdır. Bu koşullar altında $(A - \lambda I)^{-1}$ bir kapalı operatör, H uzayının tümünde tanımlı ve Banach Teoremine göre sınırlıdır. Dolayısıyla

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Şimdi özdeğerler ve özfonksiyonların bazı temel özelliklerini verdim.

$\vartriangle_A (\lambda) = Im\ (A - \lambda I)$ olarak tanımlansın.

(a) $\vartriangle_A (\lambda)$, H uzayında yoğun değildir $\Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.

Gerçekten, $A - \lambda I$ operatörü için (1.3) bağıntısından

$$(\vartriangle_A (\lambda))^{\perp} = \ker(A - \lambda I).$$

Bunun anlamı da $(\vartriangle_A (\lambda))^{\perp}$, $\bar{\lambda}$ özdeğerleri için A^* operatörünün özfonksiyonlarının spanındadır.

(b) A simetrik olsun. $\lambda \in \sigma_p(A)$ demek $\lambda \in \mathbb{R}$ anlamına gelir. Gerçekten sınırlı operatörlerdeki durum gibi, $x \in D_A$ için

$$\lambda\langle x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \bar{\lambda}\langle x, x\rangle \tag{3.7}$$

Daha sonra, eğer $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\sigma_p(A)$'da ve x_1, x_2 bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar, yani $i = 1,2$ için $Ax_i = \lambda_i x_i$ ise, bu özfonksiyonlar ortogonaldir, yani $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$.

(c) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$ için $z = \lambda + i\mu$ ve A bir kapalı simetrik operatör olsun. $\Delta_A\,(z)$ bir kapalı altuzaydır.

İspat: A simetrik operatörü için $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A_\lambda = A - \lambda I$ operatörü de simetriktir. $x \in D_A$ için

$$\|Ax - zx\|^2 = \|A_\lambda x\|^2 - \langle A_\lambda x, i\mu x \rangle - \langle i\mu x, A_\lambda x \rangle + \mu^2 \langle x, x \rangle$$

$$= \|A_\lambda x\|^2 + \mu^2 \|x\|^2.$$

Buradan

$$\|Ax - zx\| \geq |\mu| \|x\|. \qquad (3.8)$$

Kabul edelim ki,

$$y_n = Ax_n - zx_n \to u$$

olsun. (3.8)'den

$$|\mu| \|x_n - x_m\| \leq \|y_n - y_m\|$$

ve buradan

$$x_n \to x$$

olacak şekilde bir x elemanı vardır. A kapalı olduğundan $A - zI$ operatörü de kapalıdır. Dolayısıyla,

$x \in D_A$ ve $u = (A - zI)x$ olup, $u \in D_A$.

Teorem 3.3: A bir kapalı simetrik operatör olsun. $n_z = codim\ \Delta_A\,(z)$ sayıları keyfi $Im\,z > 0$ olan z ve $Im\,z < 0$ olan z için sabittir, yani

$Im\,z > 0$ olan her z için $codim\ \Delta_A\,(z) \equiv n_1$

ve

$Im\,z < 0$ olan her z için $codim\ \Delta_A\,(z) \equiv n_2$.

Bu n_1, n_2 sayılarına A operatörünün defekt sayıları denir.

İspat: Kabul edelim ki; $Im\, z > 0$ olsun ($Im\, z < 0$ durumu da benzer şekilde yapılabilir). Bu teoremin ispatı için $Im\, z_0 > 0$ olan keyfi z_0 için $U(z_0) \subset \{Im\, z > 0\}$ komşuluğu vardır öyleki keyfi $z \in U(z_0)$ için $n_z = n_{z_0}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $Im\, z_1 > 0$ ve $Im\, z_2 > 0$ alalım. Bu noktalar γ'nın içindedir. Keyfi $z \in \gamma$ için $Im\, z > 0$ ve $U(z) \subset \{Im\, z > 0\}$ varlığının varsayımına göre n_z sabittir. Bu şekilde γ'nın bir örtüsü elde edilir. Bir sonlu örtüsü alındığında, γ'nın örtüsünün komşuluklarının bir sonlu sayısı elde edilir öyleki bunların her biri için n_z sabittir. Dolayısıyla $n_{z_1} = n_{z_2}$ sonucuna ulaşılır.

Şimdi keyfi z_0 için bir komşuluğunun varlığı gösterilsin. Aksini varsayalım. O halde $Im\, z_m > 0$ olan bir $(z_m)_{m=1}^{\infty}$ dizisi vardır öyleki $\lim\limits_{m\to\infty} z_m = z_0$, fakat $n_{z_m} \neq n_{z_0}$. Buradan iki durum söz konusudur.

(i) Ya $(z_m)_{m=1}^{\infty}$ dizisi bir alt diziye sahiptir ki $(z_m)_{m=1}^{\infty}$ dizisi tarafından da ifade edilecek öyleki $n_{z_m} < n_{z_0}$ $(m \in \mathbb{N})$

(ii) Ya da her yeteri kadar büyük m için $n_{z_m} > n_{z_0}$.

(i) durumunu düşünelim: Keyfi $m \in \mathbb{N}$ için bir $g_m \neq 0$ alınabilir öyleki $g_m \perp \Delta_A(z_0)$ ve $g_m \in \Delta_A(z_m)$. Gerçekten, $N_0 = \left(\Delta_A(z_0)\right)^{\perp}$, $N_m = \left(\Delta_A(z_m)\right)^{\perp}$ ve P_0 operatörü N_0 altuzayının ortogonal prejeksiyonu olsun.

$$dim\left(P_0(N_m)\right) \leq dim(N_m) = n_m < n_0 = dim N_0$$

olduğundan, $g_m \neq 0$ olan $g_m \in N_0$ vardır öyleki $g_m \perp P_0(N_m)$. $u_1 = P_0 u \in P_0(N_m)$ ve $u_2 \in N_0^{\perp}$ olan keyfi $u \in N_m$, $u = u_1 + u_2$ elemanı düşünülsün. $g_m \in N_0$ olduğundan, $\langle g_m, u_2\rangle = 0$ ve $g_m \perp P_0(N_m)$ olduğundan $\langle g_m, u_1\rangle = 0$ elde edilir. Buradan $\langle g_m, u_2\rangle = 0$ bulunur. Bu ise $g_m \in N_m^{\perp} = \Delta_A(z_m)$ olduğunu gösterir.

$g_m \in \Delta_A(z_m)$ olduğundan, $f_m \in D_A$, $f_m \neq 0$ vardır öyleki $g_m = (A - z_m I) f_m$. Burada $\|f_m\| = 1$ olarak alınabilir. $(A - z_0 I) f_m \in \Delta_A(z_0)$ ve $g_m \perp \Delta_A(z_0)$ olduğundan

$$\langle (A - z_m I) f_m, (A - z_0 I) f_m \rangle = 0$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafı

$$\langle (A - z_m I) f_m, (A - z_0 I) f_m \rangle = \langle (A - z_0 I) f_m + (z_0 - z_m) f_m, (A - z_0 I) f_m \rangle$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\|(A - z_0 I)f_m\|^2 - (z_m - z_0)\langle f_m, (A - z_0 I)f_m\rangle = 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\|(A - z_0 I)f_m\|^2 \leq |z_m - z_0|\|(A - z_0 I)f_m\|\|f_m\|$$

sonucuna ulaşılır. Buradan $(A - z_0 I)f_m \neq 0$ olduğundan

$$\|(A - z_0 I)f_m\| \leq |z_m - z_0|, \|f_m\| = 1$$

elde edilir. $m \to \infty$ iken $z_m \to z_0$ olduğundan son eşitsizlik (3.2) eşitsizliğiyle çelişmektedir.

(ii) durumunda da benzer şekilde yapılabilir. Yukarıdaki gibi $g_m \neq 0$ alınabilir öyleki $g_m \perp \Delta_A\,(z_m)$ ve $g_m \in \Delta_A\,(z_0)$. $g_m \in \Delta_A\,(z_0)$ olduğundan vardır $f_m \in D_A$ öyleki $g_m = (A - z_0 I)f_m$ ve $\|f_m\| = 1$ alınabilir. Üstelik $g_m \perp \Delta_A\,(z_m)$ olduğundan

$$\langle (A - z_0 I)f_m, (A - z_m I)f_m\rangle = 0$$

elde edilir ve bu da (i) durumundaki gibi aynı yolla bir çelişki doğurur.

Teorem 3.4: $A = A^*$ olsun. Bu durumda;

(i) A operatörünün indisleri (0,0) şeklindedir ve $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$.

İspat: A bir kapalı simetrik operatör ve bu nedenle eğer $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ise $\Delta_A\,(z)$ bir kapalı altuzaydır. Dolayısıyla $\Delta_A\,(z) = H$; aksi halde $\bar{z} \in \sigma_p(A^*) = \sigma_p(A)$ ve z, A operatörünün bir özdeğeri olmadığından z elemanı A operatörünün bir regüler noktasıdır.

Şimdi $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\overline{\Delta_A\,(\lambda)} \neq H$ olsun. Buradan $\bar{\lambda} = \lambda \in \sigma_p(A)$ olur ki buradan $\sigma_r(A) = \emptyset$ elde edilir. Dolayısıyla, spektrum tanımından,

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$$

olup, ispat tamamlanır.

3.1.4. Grafik Metodunun Elemanları

Teorem 3. 5: $\overline{D_A} = H$ olsun. A operatörünün bir kapanışa sahip olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul A^{**} operatörünün var olmasıdır. Yani, D_{A^*}, H uzayında yoğundur ve bu durumda $A^{**} = \bar{A}$.

İspat: $\langle (x,y),(u,v)\rangle = \langle x,u\rangle + \langle y,v\rangle$

iç çarpımı ile $\mathbb{H} = H \oplus H$ ve A'nın grafiği

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax): x \in D_A\} \subseteq \mathbb{H}$$

olsun. Bir lineer A operatörü için $\Gamma(A)$ grafiği $\mathbb{H}$ uzayının bir lineer altuzayıdır. $U(x,y) = (y,-x)$ şeklinde tanımlanan $U: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ üniter operatörü düşünülsün. U operatörü üniter olduğu için $U^2 = -I$ olduğunu unutmayalım. Buradan $(y, y^*) \in (U(\Gamma(A)))^\perp$ ancak ve ancak keyfi $x \in D_A$ için

$$0 = \langle U(x, Ax), (y, y^*)\rangle = \langle Ax, y\rangle - \langle x, y^*\rangle,$$

ki buradan $(U(\Gamma(A)))^\perp = \Gamma(A^*)$. Bu ise; eğer A^* var, yani D_A kümesi H uzayında yoğun ise, onun grafiği $(U(\Gamma(A)))^\perp$ olduğu anlamına gelir. Böylece eğer $(U(\Gamma(A)))^\perp$ bir operatörün grafiği ise, bu operatör A^* olduğu ispatlanmış olur.

Şimdi, eğer $\Gamma(A)$ kapalı ise

$$\mathbb{H} = U\Gamma(A) \oplus \Gamma(A^*) \tag{3.9}$$

$\Gamma(A) = -\Gamma(A) = U^2\Gamma(A)$ ve bir üniter operatör olduğundan

$$\mathbb{H} = U\Gamma(A^*) \oplus \Gamma(A) \tag{3.10}$$

elde edilir. $\Gamma(A)$ grafiği $U\Gamma(A^*)$ için ortogonal ve bu bir operatörün grafiği olduğundan bu A^{**}'ın grafiğidir. Böylece $A = A^{**}$. Bu ise A^{**} operatörünün var olduğu anlamına gelir.

Eğer A kapalı değil fakat bir kapanışa sahip ise, $A^* = \bar{A}^*$ ve böylece D_{A^*} kümesi H uzayında yoğundur. Buradan A^{**} vardır ve $A^{**} = (A^*)^* = (\bar{A})^* = \bar{A}$. Ters yönde, eğer A^{**} var ise, $A \subseteq A^{**}$ ve A^{**} kapalı olduğundan A operatörü bir kapanışa sahiptir.

3.1.5. Cayley Dönüşümleri, Spektral Ayrılış

A bir kapalı simetrik operatör olsun. Her $x \in D_A$ için

$$y = (A + iI)x \text{ ve } z = (A - iI)x \tag{3.11}$$

tanımlansın. Bölüm 3.1.3'de $H_1 \coloneqq Im(A + iI)$ ve $H_2 \coloneqq Im(A - iI)$ uzaylarının H uzayının kapalı altuzayları oldukları ispatlanmıştı. Her iki $A \pm iI$ operatörleri de $\pm i$'nin bir simetrik operatörün özdeğerleri olmadığı için bire birdir. Böylece x bir tek yolla y ve z ile tanımlanır. Şimdi $V: H_1 \to H_2$, $z = Vy$ operatörünü tanımlayalım. (3.11) kullanılırsa,

$$\langle Vy, Vy \rangle = \langle (A - iI)x, (A - iI)x \rangle = \|Ax\|^2 + \|x\|^2$$

$$= \langle (A + iI)x, (A + iI)x \rangle = \langle y, y \rangle$$

ve buradan V bir izometridir. 1 sayısı V'nin bir özdeğeri değildir. Çünkü $z = y$, $x = 0$ ve $z = y = 0$ olduğu anlamına gelir. Bu $V: H_1 \to H_2$ izometrik operatörü A'nın Cayley dönüşümü olarak adlandırılır.

Ters dönüşüm

$$x = \frac{1}{2i}(I - V)y \text{ ve } Ax = \frac{1}{2}(I + V)y.$$

Böylece $Ax = i(I + V)(I - V)^{-1}x$, buradan $(I - V)^{-1}$ operatörü $1 \notin \sigma_p(V)$ olduğundan formal tanımlıdır.

Eğer A öz-eşlenik ise, Teorem 3.2'den $H_1 = H_2 = H$ ve V bir üniter operatördür.

$\{E_\lambda\}_a^b$ ortoprojeksiyonların bir ailesi olsun öyleki $a \le \lambda \le \mu \le b$ için $E_\lambda \le E_\mu$ ve güçlü anlamda (sağdan yarı-süreklilik) $E_{\lambda+0} = E_\lambda$. a, b sonlu reel sayılar ve $\varphi(t)$ $[a, b]$ üzerinde bir sürekli fonksiyon olsun. $x \in H$ için $\int_a^b \varphi(\lambda) dE_\lambda x$ integrali tanımlanır ve

$$\left\| \int_a^b \varphi(\lambda) dE_\lambda x \right\|^2 = \int_a^b |\varphi(\lambda)|^2 d\langle E_\lambda x, x \rangle \tag{3.12}$$

eşitliği elde edilir. Sonra, limitin olduğu x'ler için, $M, N \to \infty$ iken $\int_{-N}^M \varphi(\lambda) dE_\lambda x$ integralinin H uzayının normundaki limiti için $\int_{-\infty}^\infty \varphi(\lambda) dE_\lambda x$ has olmayan integrali tanımlanır. (3.12)'den bu durumun sonuçlandırılabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$\int_{-\infty}^\infty |\varphi(\lambda)|^2 d\langle E_\lambda x, x \rangle < \infty$$

olmasıdır.

Teorem 3.6: $\{E_\lambda\}_{-\infty}^{\infty}$ E_λ ortoprojeksiyonların bir spektral ailesi, yani $\lambda \leq \mu$ için $E_\lambda \leq E_\mu$ ve güçlü anlamda $\lambda \to -\infty$ iken $E_\lambda \to 0$, $\lambda \to \infty$ iken $E_\lambda \to I$ ve $E_{\lambda+0} = E_\lambda$ (sağdan yarı-sürekli) olsun.

$$D_A = \{x: \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\langle E_\lambda x, x\rangle < \infty\}$$

ve

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$$

olsun. Bu ise her $x \in D_A$ için $Ax = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda x$ olduğu anlamına gelir. Buradan A bir öz-eşlenik operatördür ve

$$\|Ax\|^2 = \int \lambda^2 d\langle E_\lambda x, x\rangle.$$

Eğer A operatörünün yukarıdaki şartlarını sağlayan bir $\{E_\lambda\}_{-\infty}^{\infty}$ spektral ailesi var ise A operatörü bir spektral ayrılışa sahiptir denir.

İspat: $P_{-N,M} = E_M - E_{-N}$ ortoprojeksiyonu düşünelim. Keyfi $x \in H$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\langle E_\lambda P_{-N,M}x, x\rangle = \int_{-N}^{M} \lambda^2 d\langle E_\lambda x, x\rangle < \infty$$

elde edilir ki buradan $P_{-N,M}x \in D_A$ dır. Bundan dolayı D_A kümesi H uzayında yoğundur ve bu nedenle A^* operatörü iyi tanımlıdır. Üstelik

$$AP_{-N,M}x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda E_\lambda P_{-N,M}x = \int_{-N}^{M} \lambda dE_\lambda x \tag{3.13}$$

bulunur. A operatörünün simetrik olduğunu gösterelim. $x \in D_A$ için

$$P_{-N,M}Ax = P_{-N,M} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda E_\lambda x = \int_{-N}^{M} \lambda dE_\lambda x$$

ve keyfi $x, y \in D_A$ için

$$\langle P_{-N,M}Ax, y\rangle = \langle \int_{-N}^{M} \lambda dE_\lambda x\,, y\rangle = \langle x, \int_{-N}^{M} \lambda dE_\lambda y\rangle = \langle x, P_{-N,M}Ay\rangle$$

elde edilir. M, N sonsuza giderken, her $x, y \in D_A$ için

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

olup A operatörü simetriktir. Kabul edelim ki $y \in D_{A^*}$ olsun. Keyfi $x \in H$ için $P_{-N,M}x \in D_A$ olduğundan ve (3.13) kullanılırsa, keyfi $x \in H$ için

$$\langle x, P_{-N,M}A^*y\rangle = \langle P_{-N,M}x, A^*y\rangle = \langle AP_{-N,M}x, y\rangle$$

$$= \langle \int_{-N}^{M} \lambda dE_\lambda x\,, y\rangle = \langle x, \int_{-N}^{M} \lambda dE_\lambda y\rangle$$

bulunur. Dolayısıyla

$$P_{-N,M}A^*y = \int_{-N}^{M} \lambda dE_\lambda y \qquad (3.14)$$

olarak bulunur. (3.14) eşitliğinin sol tarafının limiti var olduğundan, sağ tarafının da limiti vardır. Bu ise $y \in D_A$ anlamına gelir. M, N sonsuza giderken,

$$A^*y = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda y = Ay$$

bulunur.

Teorem 3.7: Eğer A bir kapalı simetrik operatör ve V Cayley dönüşümü bir üniter operatör, yani $H_1 = H_2 = H$ veya A'nın defekt sayıları (0,0) ise, bu durumda A operatörü, $t = -\cot(^{S}/_{2})$ için $E_t = F_s$ spektral ayrılışıyla öz-eşleniktir. Burada $\{F_s\}_0^{2\pi}$ V'nin spektral ayrılışıdır. Bu

$$D_A = \{x: \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d\langle E_t x, x\rangle < \infty\} \qquad (3.15)$$

ve

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t x \qquad (3.16)$$

anlamına gelir.

İspat: $E_t = F_s$'nin ortoprojeksiyon, $\tau \le t$ için $E_\tau \le E_t$, $t \to -\infty$ iken $E_t \to 0$ ve $E_{t+0} = E_t$ olduğu açıktır. $1 \notin \sigma_p(V)$ olduğundan, $t \to \infty$ iken $E_t \to I$. Bundan dolayı, $\{E_t\}_{-\infty}^{\infty}$ ortoprojeksiyonların bir spektral ailesidir. Teorem 3.6'dan

$$D_B = \{x: \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d\langle E_t x, x\rangle < \infty\} \text{ ve } Bx = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t x$$

bir B öz-eşlenik operatör tanımlanır. Bizim şimdi A operatörünün bu operatör ile çakıştığını göstermemiz gerekir.

$x \in D_A$ olsun, yani $y \in H$ için $x = \frac{1}{2i}(I - V)y$. Üniter operatörler için spektral gösterimi kullanılırsa,

$$x = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} (1 - e^{i\tau}) dF_\tau y$$

ve dolayısıyla

$$F_s x = \frac{1}{2i}(I - V)F_s y = \frac{1}{2i}\int_0^s (1 - e^{i\tau})dF_\tau y.$$

Buradan

$$\langle F_s x, x\rangle = \frac{1}{4}\langle (I - V)F_s y, (I - V)y\rangle = \frac{1}{4}\langle (2I - V - V^{-1})F_s y, y\rangle$$

ve $2 - e^{i\tau} - e^{-i\tau} = 4sin^2(\tau/_2)$ eşitliği kullanılırsa

$$\langle F_s x, x\rangle = \int_0^s sin^2(\tau/_2)d\langle F_\tau y, y\rangle \tag{3.17}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $x \in D_A$ için

$$Ax = \frac{1}{2}(I + V)y = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + e^{is})dF_s y \tag{3.18}$$

bulunur. (3.18) kullanılırsa, $x \in D_A$ için

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \frac{1}{4}\langle (2I + V + V^{-1})y, y\rangle = \int_0^{2\pi} cos^2(\tfrac{s}{2})d\langle F_s y, y\rangle$$

ve (3.17)'den

$$\int_0^{2\pi} cot^2(\tfrac{s}{2})d\langle F_s x, x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d\langle E_t x, x\rangle$$

eşitliği elde edilir. Bu ise $x \in D_A$ için $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d\langle E_t x, x\rangle < \infty$ anlamına gelir. Ayrıca, (3.18) kullanılırsa,

$$Ax = \int_0^{2\pi} i\frac{1+e^{is}}{1-e^{is}}dF_s x = -\int_0^{2\pi}\cot\left(\frac{s}{2}\right)dF_s x = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t x$$

bulunur. İspatın son bölümü için eğer x

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d\langle E_t x, x\rangle = \int_0^{2\pi} cot^2(\tfrac{s}{2})d\langle F_s x, x\rangle < \infty$$

ise, bu durumda $x \in D_A$ olduğunu göstermektedir. Bunu ispatlamak için, $(I - V)y = 2ix$ şartını sağlayan bir $y \in H$ bulunmak zorundadır. Böyle bir y bulmak için

$$\int_0^{2\pi} cot^2(\tfrac{s}{2})d\mu(s) < \infty \tag{3.19}$$

sınır varyasyonunun bir $\mu(s) = \langle F_s x, x\rangle$ monoton fonksiyonu için

$$\int_0^{2\pi} d\mu(s) < \infty$$

bilgisi ile başlayalım. Buradan, son iki integralin yakınsaklığından

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{sin^2(s/_2)} d\mu(s) < \infty \tag{3.20}$$

anlamına gelir. Dolayısıyla,

$$\int_0^{2\pi} \frac{-e^{-is/_2}}{\sin(s/_2)} dF_s x$$

has olmayan integrali, bir $y \in H$ vektörü için normda yakınsar. Gerçekten, bu bir sürekli fonksiyonun integrali olduğu için

$$y_{\varepsilon,\eta} = \int_\varepsilon^{2\pi-\eta} \frac{-e^{is/_2}}{\sin(s/_2)} dF_s x$$

Vektörünü göz önüne alalım. Burada paydayı sıfır yapan singüler noktalar ihmal edilmiştir. (3.20)'deki integral var olduğundan, $\varepsilon \to 0$, $\eta \to 0$ iken bunun bir Cauchy dizisi olduğunu gösterebiliriz.

Şimdi $(I - V)y = \int_0^{2\pi}(1 - e^{is}) dF_s y$ göz önüne alalım ve

$$F_s y = -\int_0^s \frac{e^{-i\tau/_2}}{\sin(\tau/_2)} dF_\tau x$$

olduğuna dikkat edersek, buradan

$$(I - V)y = -\int_0^{2\pi} \frac{(1-e^{is})e^{-is/_2}}{\sin(s/_2)} dF_s x = 2i\int_0^{2\pi} dF_s x = 2ix$$

ve $x \in D_A$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.1.6. Bir Simetrik Operatörün Simetrik ve Öz-Eşlenik Genişlemeleri

A_1 $A_1 \supseteq A$ ve $A_1 \neq A$ olan A operatörünün bir simetrik genişlemesi olsun.

Buradan

$$(A + iI)x_1 = y_1 \text{ ve } (A - iI)x_1 = z_1 = V_1 y_1 \tag{3.21}$$

eşitliğini sağlayan $x_1 \in D_{A_1}/D_A$ vardır. Burada $y_1 \notin H_1$ ve $z_1 \notin H_2$. Yani A_1 operatörünün V_1 Cayley dönüşümü V'nin bir izometrik genişlemesidir ve V ile çakışmaz. Bu nedenle aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 3.8: Eğer defekt sayılar $(n,0)$ veya $(0,n)$ ve $n \neq 0$ ise, bu durumda A hiçbir simetrik genişlemeye sahip değildir, yani A maksimal simetrik ve öz-eşlenik olmayan bir operatördür.

İspat: Gerçekten de, bu teoremin şartları altında ya $H_1 = H$ veya $H_2 = H$ ve burada V Cayley dönüşümü genişlemelere sahip değildir. Aynı zamanda A operatörünün defekt sayıları (0,0) değildir, bunun anlamı A bir öz-eşlenik operatör değildir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Şimdi defekt sayılarının ikisinin de sıfıra eşit olmadığı durumu göz önüne alalım. $D_{V_1} = H_1' = H_1 \oplus L_1$ ve $ImV_1 = H_2' = H_2 \oplus L_2$ olsun. Buradan, $V_1 \colon H_1 \oplus L_1 \to H_2 \oplus L_2$ ve V_1 bir izometridir. Aynı zamanda $V_1|_{H_1} = V$ ve V_1'in L_1'e kısıtlanışı L_1 ve L_2 arasında bir izometridir. Özel olarak $dimL_1 = dimL_2$. Bu nedenle aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Önerme 3.9: Eğer A operatörünün indeksleri (m,n) ve $m \neq n$ ise, bu durumda A operatörünün öz-eşlenik genişlemesi yoktur.

İspat: Gerçekten, keyfi A_1 öz-eşlenik genişlemesi $V_1 \colon H \to H$ Cayley dönüşümüne sahiptir. Bu ise $H_1 \oplus L_1 = H$, $H_2 \oplus L_2 = H$ ve $codimH_1 = codimH_2$ anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi ters durumu düşünelim, yani: V A'nın bir Cayley dönüşümü ve V_1 de V'nin izometrik genişlemesi olsun. Bu durumda, V_1, A_1'in Cayley dönüşümü olmak üzere, A'nın bir A_1 simetrik genişlemesi var mıdır?

Bu sorunun cevabı evettir ve (3.21) formülüyle bu genişleme inşa edilir, yani

$$D_{A_1} = \{x \colon x = \frac{1}{2i}(I - V_1)y,\ y \in D_{V_1}\}$$

ve $x = \frac{1}{2i}(I - V_1)y \in D_{A_1}$ için

$$A_1 x = \frac{1}{2}(I + V_1)y$$

olan A_1 operatörünü göz önüne alalım. A_1 operatörünün iyi tanımlılığını görmek için, $1 \notin \sigma_p(V_1)$, yani $\ker(I - V_1) = 0$ olduğunu göstermek gerekir. Eğer $1 \in \sigma_p(V_1)$ ise, bu durumda $y_0 = V_1 y_0$ olan bir $y_0 \neq 0$ vardır. $y_0 \perp D_{A_1}$ olup, bu bir çelişkidir.

Çünkü $D_{A_1} \supseteq D_A$ ve D_A H'da yoğundur. Böylece, keyfi $x \in D_{A_1}$ için $x = \frac{1}{2i}(I - V_1)y$ ve

$$\langle y_0, x\rangle = \langle y_0, \frac{1}{2i}(I - V_1)y\rangle = \frac{1}{-2i}(\langle y_0, y\rangle - \langle y_0, V_1 y\rangle) = 0$$

olan bir y elemanı vardır. Bu eşitlik, V_1 bir izometri olduğundan $V_1 y_0 = y_0$ ve $\langle V_1 y_0, V_1 y\rangle = \langle y_0, y\rangle$. Buradan $y_0 = 0$ elde edilir. Bundan sonra A_1'in bir simetrik operatör olduğunu göstermek kalıyor: Keyfi $x_1, x_2 \in D_{A_1}$ için

$$\begin{aligned}\langle A_1 x_1, x_2\rangle &= -\frac{1}{4i}\langle (I + V_1)y_1, (I - V_1)y_2\rangle \\ &= -\frac{1}{4i}(\langle y_1, y_2\rangle + \langle V_1 y_1, y_2\rangle - \langle y_1, V_1 y_2\rangle - \langle V_1 y_1, V_1 y_2\rangle) \\ &= -\frac{1}{4i}(\langle V_1 y_1, y_2\rangle - \langle y_1, V_1 y_2\rangle).\end{aligned}$$

eşitliğini sağlayan vardır $y_1, y_2 \in DomV_1$ elemanları vardır. Benzer şekilde,

$$\langle x_1, A_1 x_2\rangle = \frac{1}{4i}\langle (I - V_1)y_1, (I + V_1)y_2\rangle = \frac{1}{4i}(-\langle V_1 y_1, y_2\rangle + \langle y_1, V_1 y_2\rangle)$$

ve buradan, her $x_1, x_2 \in D_{A_1}$ için $\langle A_1 x_1, x_2\rangle = \langle x_1, A_1 x_2\rangle$ elde edilir. Dolayısıyla A_1 bir simetrik operatördür.

Bunun bir sonucu olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Önerme 3.10: Eğer bir A simetrik operatörünün indeksleri (n, n) ise, bu durumda A operatörü bir A_1 öz-eşlenik genişlemeye sahiptir.

İspat: Gerçekten, kabul edelim ki V, A'nın Cayley dönüşümü, $V: H_1 \to H_2$, $H = H_1 \oplus L_1$, $H = H_2 \oplus L_2$ ve $dimL_1 = dimL_2 = n$ olsun. T operatörü n-boyutlu L_1 ve L_2 Hilbert uzayları arasında bir izometri olsun. Buradan $u \in H_1$, $v \in L_1$ için $V_1(u, v) = (Vu, Tv)$ ve bir $V_1: H \to H$ üniter operatörü için V'nin bir genişlemesi elde edilir. A'nın aynı A_1 simetrik genişlemesi $(0,0)$ indekse sahiptir ve bu nedenle Teorem 3.7'den öz-eşlenik operatördür.

Örnek: $L_2(-\infty, \infty)$ uzayında, tanım kümesi

$$D_A = \{x: x\ mutlak\ sürekli, x' \in L_2(-\infty, \infty)\}$$

olan $Ax = ix'$ operatörü ve tanım kümesi

$$D_B = \{x: \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt < \infty\}$$

olan $(Bx)(t) = tx(t)$ operatörünü göz önüne alalım.

$\{E_\lambda\}_{-\infty}^{\infty}$ spektral ailesini

$$(E_\lambda x)(t) = \begin{cases} x(t), & t \leq \lambda \text{ için}, \\ 0 & , t > \lambda \text{ için} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $x \in D_B$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda x = tx(t) = (Bx)(t)$$

bulunur. Bu ise Teorem 3.6'da tanımlandığı gibi, B operatörünün $\{E_\lambda\}_{-\infty}^{\infty}$ ailesiyle bir spektral ayrılışa sahiptir.

$$(Fx)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{its} ds$$

fourier dönüşümünün üniter operatörünü

$$x \in L_2(-\infty, \infty) \text{ ,}$$

göz önüne alalım. Buradaki integral $L_2(-\infty, \infty)$ uzayında

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} x(s) e^{its} ds$$

limiti gibi düşünülsün. Fourier dönüşümünün özelliklerinden $F(D_A) = D_B$ ve $F(ix')(t) = t(Fx)(t)$ elde edilir ki, bu $x \in D_A$ için

$$FAx = BFx$$

anlamına gelir. Buradan,

$$(F^{-1}x)(t) = (Fx)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-its} ds$$

olduğundan $B = FAF^{-1}$ elde edilir. Bundan dolayı A ve B operatörleri üniter denktir.

Keyfi $x \in D_A$ için $G_\lambda = F^{-1} E_\lambda F$ olduğundan

$$Ax = F^{-1}BFx = F^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda Fx = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dG_\lambda x$$

dir. Böylece, $\{G_\lambda\}_{-\infty}^{\infty}$ spektral ailesiyle, A operatörünün spektral ayrılışı elde edilir. Üstelik $x \in L_2(-\infty, \infty)$ için

$$(G_\lambda x)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{i\tau s}d\tau\right)e^{-its}ds.$$

Şimdi A operatörünün V, Cayley dönüşümünü ele alalım. $y \in L_2(-\infty,\infty)$ için

$$Ax + ix = y \text{ ve } Ax - ix = Vy$$

elde edilir. $A = F^{-1}BF$ ve $Ax + ix = y$ kullanılırsa, $F^{-1}BFx + ix = y$, yani $BFx + iFx = Fy$ elde edilir. Buradan

$$(t + i)Fx = Fy \qquad (3.22)$$

olduğu kolayca görülür. Daha sonra, $A = F^{-1}BF$ ve $Ax - ix = Vy$ kullanılırsa, $BFx - iFx = FVy$ elde edilir ki, bu da

$$(t - i)Fx = FVy \qquad (3.23)$$

anlamına gelir. (3.22) ve (3.23)'den $\frac{t-i}{t+i}Fy = FVy$ bulunur. Bu ise $y \in L_2(-\infty,\infty)$ için

$$Vy = F^{-1}\left(\frac{t-i}{t+i}Fy\right)$$

anlamına gelir.

3.1.7. Örnekler

Örnek 1: $D_A = \{x: x\ mutlak\ sürekli,\ x' \in L_2[0,1],\ x(1) = \lambda x(0),\ |\lambda| = 1\}$

$A: D_A \to L_2[0,1],\ Ax = i\frac{dx}{dt}$ şeklinde tanımlanan A operatörünün öz-eşlenik olduğunu gösterelim.

Çözüm : Bunu gösterebilmek için,

$$D_B := \{x \in L_2[0,1]:\ x(0) = x(1),\ x\ bir\ düzgün\ fonksiyon\}$$

$B: D_B \to L_2[0,1]$, $Bx = ix'$ şeklindeki operatörü tanımlayalım. $B \subseteq A$ olduğu açıktır. Buradan $A^* \subseteq B^*$. Üçüncü bölümün (i). örneğini göz önüne alırsak, eğer $y \in D_{A^*}$ ise bu durumda $y(t)$ mutlak sürekli ve $y' \in L_2[0,1]$. $x \in D_A$ ve $y \in D_{A^*}$ için

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle = \int_0^1 ix'(t)\bar{y}(t)dt = ix(t)\bar{y}(t)|_0^1 - \int_0^1 x(t)\overline{iy'}(t)dt$$

elde ederiz. Buradan

$$\langle x, y^*\rangle = i\lambda x(0)\overline{\left(y(1) - \lambda y(0)\right)} + \langle x, iy'\rangle.$$

Şimdi $y(1) = \lambda y(0)$ olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki böyle olmasın. Bu durumda $L_2[0,1]$ içinde $x_n \to 0$ ve $x_n \neq 0$ olan bir $x_n(t) \in L_2[0,1]$ dizisi alalım. Bu durumda

$$\langle x_n, y^* \rangle \to 0$$

ve

$$\langle x_n, iy' \rangle \to 0$$

olur. Fakat bu

$$i\lambda x_n(0)\overline{(y(1) - \lambda y(0))} \nrightarrow 0$$

olup, bir çelişki ortaya çıkar. Bu çelişkiden

$D_{A^*} = D_A$ ve her $y \in D_{A^*}$ için $A^* y = iy'$

elde edilir. Dolayısıyla A operatörünün, $A = A^*$ yani öz-eşlenik olduğu ispat edilmiş olur.

Örnek 2 : A, bir Hilbert uzayında bir simetrik operatör olsun. Bu durumda;

(a) A operatörünün bir kapanışa sahip olduğunu gösteriniz.

(b) $Im\lambda \neq 0$ ve $\Delta_A(\lambda) = Im(A - \lambda I)$ olsun. Bu durumda $\Delta_{\bar{A}}(\lambda) = \overline{\Delta_A(\lambda)}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : (a) A simetrik bir operatör olduğundan $A \subseteq A^*$. A^* operatörü kapalıdır. Buradan, eğer

$Ax_n \to y$ ve $x_n \to 0$ ise, bu durumda $A^* x_n \to y$ ve $x_n \to 0$ olup $y = 0$. Dolayısıyla verilen bir A simetrik operatörü kapanışa sahiptir.

(b) $A \subseteq \bar{A}$ olduğu için $\Delta_A(\lambda) \subseteq \Delta_{\bar{A}}(\lambda)$ ve $\bar{A}$ operatörü kapalı ve simetrik olduğundan $\Delta_{\bar{A}}(\lambda)$ kapalıdır. Buradan

$$\overline{\Delta_A(\lambda)} \subseteq \Delta_{\bar{A}}(\lambda) \qquad (*)$$

Şimdi $y_0 \in \Delta_{\bar{A}}(\lambda)$ alalım. Tanımdan $x_0 \in D_{\bar{A}}$ için

$$y_0 = \bar{A}x_0 - \lambda x_0.$$

$x_0 \in D_{\bar{A}}$ ise $x_0 = \lim_{(n)} x_n$, $x_n \in D_A$ ve $Ax_n \to \bar{A}x_0$. Böylece

$$y_0 = \lim_{(n)}(Ax_n - \lambda x_n)$$

yazabiliriz. Bu ise $y_0 \in \overline{\Delta_A\,(\lambda)}$ anlamına gelir, yani

$$\Delta_{\bar{A}}\,(\lambda) \subseteq \overline{\Delta_A\,(\lambda)} \tag{**}$$

olur. (*) ve (**) bağıntılarından

$$\Delta_{\bar{A}}\,(\lambda) = \overline{\Delta_A\,(\lambda)}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Örnek 3: Kabul edelim ki A, bir Hilbert uzayında simetrik bir operatör olsun. Bu durumda

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: İlk önce, eğer $\lambda \notin \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$ ise, bu durumda λ A operatörünün bir regüler noktası olduğunu biliyoruz. Bu durumda $(A - \lambda I)^{-1}$ operatörü H uzayında tanımlıdır ve bizim bu operatörün sınırlı olduğunu göstermemiz gereklidir. Bunun için, kabul edelim ki, $\lambda \notin \mathbb{R}$ olsun. Buradan (3.8) eşitsizliğini kullanırsak, $(A - \lambda I)^{-1}$ operatörünün sınırlı olduğunu görürüz. Şimdi $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda Teorem 3.1'den, $(A - \lambda I)$ operatörü öz-eşlenik ve böylece kapalıdır. Dolayısıyla $(A - \lambda I)^{-1}$ operatörü kapalıdır ve buradan $(A - \lambda I)^{-1}$ operatörü sınırlıdır. Sonuç olarak bir H Hilbert uzayında, bir simetrik operatörün spektrumu için

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

Yazılabilir.

Örnek 4 : A, bir H Hilbert uzayında m, n defekt indekslere sahip bir kapalı simetrik operatör olsun. Bu durumda aşağıdakilerin doğruluğunu gösterelim.

(a) Eğer $m > 0$ ve $n > 0$ ise, bu durumda $\sigma(A) = \mathbb{C}$,

(b) Eğer $m > 0$ ve $n = 0$ ise, bu durumda $\sigma(A) = \{z: Imz \geq 0\}$,

(c) Eğer $m = n = 0$ ise, bu durumda $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Çözüm : A, bir H Hilbert uzayında, m, n defekt indekslere sahip kapalı simetrik bir operatör olsun. Bu durumda;

(a) Biz genel teoriden biliyoruz ki,

$$\{z \in \mathbb{C}: Imz > 0\} \cup \{z \in \mathbb{C}: Imz < 0\} \subseteq \sigma(A)$$

ve $\sigma(A)$ kapalı küme olduğundan

$$\sigma(A) = \mathbb{C}$$

olarak buluruz.

(b) Yine genel teoriden

$$\{z \in \mathbb{C}: Imz > 0\} \subseteq \sigma(A)$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca 3.3 bölümdeki (c) özelliğinden, $Imz < 0$ olan her $z \in \mathbb{C}$ elemanı, A operatörünün bir regüler noktasıdır. $\sigma(A)$ kapalı bir küme olduğu için

$$\sigma(A) = \{z: Imz \geq 0\}$$

olarak elde ederiz.

(c) 3.3 bölümünün yine (c) koşulundan her $z \notin \mathbb{R}$, A operatörünün bir regüler noktasıdır olduğundan

$$\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$$

sonucuna varırız.

Örnek 5 : A, bir Hilbert uzayında simetrik bir operatör ve $\overline{ImA} = H$ olsun. Bu durumda A^{-1} operatörünün var ve simetrik olduğunu gösterelim.

Çözüm : A, bir Hilbert uzayında simetrik bir operatör ve $\overline{ImA} = H$ olduğundan

$H = \overline{ImA} \oplus kerA^*$ olup, $kerA^* = \{0\}$ elde ederiz. $A \subseteq A^*$ bağıntısını kullanırsak $kerA = \{0\}$ olarak buluruz ve buradan A^{-1} operatörünün var olduğunu elde ederiz. Şimdi bu operatörün simetrik olduğunu gösterelim.

Keyfi $u, v \in ImA = D_{A^{-1}}$ olsun. Bu durumda

$$\langle A^{-1}u, v\rangle = \langle A^{-1}u, AA^{-1}v\rangle = \langle AA^{-1}u, A^{-1}v\rangle = \langle u, A^{-1}v\rangle$$

olup, A^{-1} operatörü simetriktir.

Örnek 6 : A, bir Hilbert uzayında simetrik bir operatör olsun. $\bar{A}$ kapanış operatörünün öz-eşlenik olabilmesi için gerekli ve yeterli koşulun aşağıdaki şartlardan birinin doğru olması gerektiğini gösteriniz.

(a) A^* operatörünün reel olmayan özdeğerinin olmamasıdır.

(b) $Im\lambda \neq 0$ olan keyfi λ için, $\overline{Im(A-\lambda I)} = H$ olmasıdır.

(c) $\overline{Im(A-\lambda I)} = H$ olsun diye, $Im\lambda_1 > 0$ ve $Im\lambda_2 < 0$ olan λ_1 ve λ_2 sayılarının olmasıdır.

Çözüm : $A-\lambda I$ operatörü için (1.3) eşitsizliğini uygular ve Teorem 3.3'ü kullanırsak, yukarıdaki (a), (b) ve (c) deki iddialara denk olduklarını görürüz. Şimdi iddiaların doğru olduklarını gösterelim.

Kabul edelim ki, $\bar{A} = (\bar{A})^*$ olsun. Teorem 3.4'den $\bar{A}$ operatörünün indeksleri $(0,0)$ olur. 2. örneği kullanırsak, (b) elde edilmiş olur.

Kabul edelim ki, (a) doğru olsun, yani $A^* = (\bar{A})^*$ operatörünün reel olmayan özdeğerleri olmasın. Bu durumda $\bar{A}-\lambda I$ operatörü için (1.3) eşitsizliğini uygularsak, $\bar{A}$ operatörünün indeksleri $(0,0)$ olarak hesaplanır. Buradan, Teorem 3.7'yi kullanırsak $\bar{A}$ kapanış operatörü öz-eşleniktir.

Sonuç olarak istenilenler ispat edilmiş olur.

SONUÇ ve ÖNERİLER

Hilbert uzayında sınırsız öz-eşlenik ve simetrik operatörler alanında hazırlanan bu tez; Yuli Eidelman, Vitali Milman ve Antonis Tsolomitis'in 2004 yılında American Mathematical Society tarafından "Graduate Studies in Mathematics, 66" basılan ve "Functional Analysis: An Introduction" isimli kitabı temel kaynak olarak kullanılmıştır.

Matematik literatürüne bakıldığında sınırlı operatörler teorisi ile ilgili birçok bilimsel kitap, makale bulunmaktadır. Fakat sınırsız operatörler ile ilgili hem tam anlamıyla oturtulmuş bir teorisi hem de sınırlı sayıda bilimsel çalışma bulunmaktadır. Var olan bu çalışmaların hemen hemen hepsi de yabancı dillerde, İngilizce, Rusça vb. dillerde yazılmış eserlerdir. Dolayısıyla ana dilimizde yazılmış olan bu tez, baz aldığı temel kaynağın, saygın bilimsel insanları ve bir o kadar da bilimsel eserleri basmakta titiz ve tecrübeli olan basım yerinin seçilmiş olması, bu alanda çalışmak isteyen genç bilim insanlarına temel kaynak olarak kullanabilecek bir eser olacağı kanaatindeyiz.

Teorik bilginin yanı sıra, bazı uygulamaların da açık bir şekilde ifade ve çözümlerinin verilmesiyle, bu alanın daha iyi anlaşılması sağlanmıştır.

KAYNAKLAR

Abramovich, Y. A., Aliprantis, C. D. 2002a. An Invitation to Operator Theory, Graduate Studies in Math. Vol.50, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island.

Abramovich, Y. A., Aliprantis, C. D. 2002b. Problems in Operator Theory, Graduate Studies in Math. Vol.51, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island.

Biriuk, G., Coddington, E. A. 1964. Normal extensions of unbounded formally normal operators, Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 13: 617-638.

Biyarov, H., Otelbayev M. 1993. Description of normal extensions, Math. Notes, 53, 5-6: 474-478.

Coddington, E. A. 1973 Extension theory of formally normal and symmetric subspaces, Memoirs of the American Mathematical Society, 134: 1-80.

Davis, R. H. 1955. Singular normal differential operators, Tech. Rep. Dep. Math. California Univ. 10.

Dunford, N. Schwartz J. T. 1958. Linear Operators I, Second ed. Interscience, New York,

Dunford, N. J. T. Schwartz, 1963. Linear Operators II, Second ed. Interscience, New York.

Eidelman, Y. V. Milman, A. Tsolomitis, 2004. Functional Analysis, an introduction, Graduate Studies in Math. Vol.66, American Mathematical Society Providence, Rhode Island.

Gorbachuk, V. I. M. L. Gorbachuk, 1973. Boundary Value Problemsfor a First Order Differential Operator with Operator Coefcientsand Expansion in the Eigen functions of that Equation, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 208: 1268-1271.

Gorbachuk, V. I., Gorbachuk, M.L. 1991. Boundary Value Problems for Operator Differential Equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Ismailov, Z.I. 1992 Formally-normal extensions of an operator, Diff. Equations, Minsk, 28, 5: 905-907 (in Russian).

Ismailov, Z. I. 1994a. A three-point normal boundary value problem for an operator-differential equation, Siberian Mathematical. Journal., 35, 5: 941-944.

Ismailov, Z.I. 1994b. Normal boundary value problems for a second-order equation with bounded operator potential, Differantial Equations, 30, 11: 1861-1862.

Ismailov, Z. I. 1998 Discreteness of the spectrum of first-order normal differential operators, Dokl. Math. 57, 1: 32-33.

Ismailov, Z. I., Karatash, H. 2000. Some necessary conditions for the normality of differential operators, Dokl. Math. 62, 2: 277-279.

Ismailov, Z.I., 2006. Compact inverses of first-order normal differential operators, Journal of Mathematical Analysis and Applications 320, 1: 266-278.

Ismailov, Z.I. 2003 On thenormality of first-order differential operators, Bull. Polish Acad.Sci. Math. , 51, 2: 139-145.

Ismailov, Z.I. 2005. On the discreteness of spectrum of normal second-order differential operators, Dokl. Math, 49, 3: 5-7 (in Russian).

Karatash, H., Ismailov, Z.I. 2000. On a class of firstorder normal differential operators, Trans.Acad.Sci.Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. 20,4: 115-122.

Kilpi, Y. 1953. Über lineare normale Transformationen in Hilbertschen Raumes, Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica Series AI, 154

Kilpi, Y. 1957. Über das komplexe Momenten Problem, Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica Series AI. 236.

Kilpi, Y. 1963. Über die Anzahl der hypermaximalen normalen fort setzungen normalen Transformationen, Annales Universityrsitasis Turkuensis Series AI. 65.

Kochubei, A. N. 1979. Symmetric Operators and Nonclassical Spectral Problems, Matematicheskie Zametki, 25, 3: 425-434.

Kokebayev, B. Otarov, H., 1985. On some properties of correct compressions of the operator of differentiation, Izrestiya AN Kaz.SSR, 5: 38-42.

Maksudov, F. G. Ismailov, Z. I. 1994. Normal extensions of second or derdifferential operators, Differantial Equations, 30, 10: 1687-1689.

Maksudov, F. G. Ismailov, Z. I. 1996a. Normal boundary value problems for a first-order differential equation, Dokl. Math.5, 2: 659-661.

Maksudov, F. G. Ismailov, Z.I. 1996b. Normal boundary value problems for differential equations of higher order, Turkish Journal Mathematics, 20, 2: 141-151.

Maksudov, F. G. Ismailov, Z.I. 1999. A necessary condition for the normality of differentia operators, Dokl. Math. 59, 3: 422-424.

Naimark, M. A. 1968. Linear Differential Operators, Ungar, New York.

Neumann, J. Von. 1930. Allgemenie Eigenwert theorie Heritescher Funktional operatoren, Mathematische Anallen 102: 49-131.

Rofe-Beketov, F. S. Kholkin A. M. 2005. Spectral Analysis of Differential Operators, World Scientific Monograph Series in Mathematics, Singapore, v.7.

Schmüdgen, K. 1985. A formally normal operator havingno normal extension, Proceedings American Mathematical Society, 95, 3: 503-504.

Shou-Zhong, Fu, 1992. On the self-adjoint extensions of symmetric ordinary differential operators in direct sumspaces, J. Differential Equations, 100, 2: 269-291.

Stochel, J. Szafraniec, F. H. 1985. On normal extensions of unbounded operators, I, Operator Theory, 14: 31-55.

Stochel, J. Szafraniec, F. H. 1989a. On normal extensions of unbounded operators, II, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), 53: 153-177.

Stochel, J. Szafraniec, F. H. 1989b. The normal part of an unbounded operator, Nederl. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A, 92: 495-503.

Sz-Nagy, B. 1942. Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbert schen Raumes, Ergeb. Math. Grenzgeb. 5, 5, iv-80.

Yakubov, S. Yakubov, Y. 2000. Differential-Operator Equations: ordinary and partial differential equations, Chapman&Hall/CRC monographs and surveys in pure and applied mathematics 103, Florida.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : İlker MERT

Doğum Yeri : Çorum

Doğum Tarihi : 10.08.1983

Yabancı Dili : İngilizce

E-mail : ilker-mert@hotmail.com

İletişim Bilgileri : Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/ Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik	Karadeniz Teknik Üniversitesi	2007
Tezsiz Yüksek Lisans(Formasyon)	Matematik	Amasya Üniversitesi	2014

İş Deneyimi:

Görev	**Görev Yeri**	**Yıl**
Matematik Öğretmeni	Analiz Dergisi Dershanesi	2007-2013
Matematik Öğretmeni	Çözüm Dershanesi	2013-2015
Matematik Öğretmeni	Pınar Koleji	2015-