T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ TÜREVLERİNİN MUTLAK DEĞERLERİ KUAZİ-KONVEKS OLAN FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPİ EŞİTSİZLİKLER

SEFA BAYRAMLI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2017

T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ TÜREVLERİNİN MUTLAK DEĞERLERİ KUAZİ-KONVEKS OLAN FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPİ EŞİTSİZLİKLER

SEFA BAYRAMLI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2017

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Sefa BAYRAMLI tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL danışmanlığında yürütülen "İkinci Türevlerinin Mutlak Değerleri Kuazi-Konveks Olan Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizlikler" adlı bu tez, jürimiz tarafından 06 / 02 / 2017 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman	:	Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL	
Başkan	:	Doç. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Rukiye ÖZTÜRK MERT Matematik, Hitit Üniversitesi	İmza : R.Ö. Mert

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 09/02/2017 tarih ve 2017/76 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

03/03/2017

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Kürşat KORKMAZ

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Sefa BAYRAMLI

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

İKİNCİ TÜREVLERİNİN MUTLAK DEĞERLERİ KUAZİ-KONVEKS OLAN FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Sefa BAYRAMLI

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2017
Yüksek Lisans Tezi, 40s.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

Bu tez çalışması, beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, giriş ve literatür taraması, ikinci bölümde temel kavramlar anlatılmaktadır. Üçüncü bölümde literatürde var olan, ikinci türevinin mutlak değeri kuazi-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler konusu ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Dördüncü bölümde sonuçlar ve öneriler, son bölümde ise tezde kullanılan kaynaklar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İkinci türev, Kuazi-konveks fonksiyonlar, Hermite-Hadamard tipi eşitsizlik.

ABSTRACT

INEQUALITIES OF HERMITE-HADAMARD TYPE FOR FUNCTIONS WHOSE SECOND DERIVATIVES ABSOLUTE VALUES ARE QUASI-CONVEX

Sefa BAYRAMLI

University of Ordu
Institute of Sciences
Department of Mathematics, 2017
MSc. Thesis, 40p.

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

This thesis is consist of five chapters. In the first chapter, it is mentioned about the object of the thesis and previous studies in this area. In the second chapter, basic definitions and theorems that were used in thesis are given. In the third chapter, it is comprehensivly explained of inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are quasi-convex, which exist in the literature. In the fourth chapter, it is given some results and propositions and in the last chapter, it is given references.

Keywords: Second derivative, Quasi-convex functions, Hermite-Hadamard type inequality.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan, desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL' a ve Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Tezin düzeltilmesinde ve yazımı sırasında yardımcı olan mesai arkadaşım Sayın Selçuk BAŞKÖY' e ve ablam Sayın Merve DEMİRCİ' ye teşekkür ederim.

Ayrıca her zaman benim yanımda olup, beni yüreklendirerek, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEZ BİLDİRİMİ……………………………………………………………...…….	I
ÖZET…………………………………………………………………...……	II
ABSTRACT…………………………………………………………………	III
TEŞEKKÜR…………………………………………………………………	IV
İÇİNDEKİLER……………………………………………………………...	V
ŞEKİLLER LİSTESİ ………………………………………………………	VI
SİMGELER LİSTESİ……………………………………………………....	VII
1. GİRİŞ…………………………………………………………….........	1
2. TEMEL KAVRAMLAR…...……………………………………………	5
3. YAPILAN ÇALIŞMALAR……………………………………......…	11
3.1. Fonksiyon Sınıfları…………………………………………………….……...	11
3.2. Benzer Özellikler…………..………………...…………………………………..	13
3.3. Benzer Olmayan Özellikler...…...…………....…………………………...…......	17
3.4. Açık ve Kesin Kuazi-Konveks Fonksiyonlar……………………………………	17
3.5. Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizlikler……………………………………………	23
3.6. Özel Ortalamalar İçin Uygulamalar…………………………..............................	28
4. SONUÇ ve ÖNERİLER…………………………………………….….....	30
5. KAYNAKLAR……………………………………………………………	31
ÖZGEÇMİŞ…………………………………………………………………	33

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1 Bir aralıkta konveks fonksiyon, 6. sayfa

Şekil 2.2 Konveks fonksiyon, 6. sayfa

Şekil 2.3 Kuazi-konveks olup konveks olmayan fonksiyon, 10.sayfa

SİMGELER LİSTESİ

$C(I)$	: Konveks fonksiyonlar sınıfı
f'	: f Fonksiyonun Birinci Mertebeden Türevi
f''	: f Fonksiyonun İkinci Mertebeden Türevi
Γ	: Gamma Fonksiyonu
I	: $\mathbb{R}$'de herhangi bir aralık
I^0	: I'nın içi
$\mathbb{R}^+$	: $(0,\infty)$ Aralığı
$\mathbb{R}_0^+$	: $[0,\infty)$ Aralığı
$\frac{\partial f}{\partial x}$	: f nin kısmi türevi
∇	: Gradiyent
∇f	: $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$

1. GİRİŞ

Konveksliğin temelini oluşturan tanım, eşitsizlikle ifade edildiğinden konveks fonksiyonlarda eşitsizliğin çok önemli bir yeri vardır. Klasik eşitsizlikle ve konvekslikle ilişkili olan Gauss, Cauchy, Schwartz, Buniakowsky, Hölder, Minkowski, Chebyshev, Lyapunov, Gram, Bessel, Hadamard, Landau, Bernstein, Hilbert, Hardy, Littlewood, Polya, Markoff, Kolmogorov, Stieltjes, Beckenbach, Bellman, Mitrinoviç, Pachpatte, Pecaric ve Fink gibi önemli isimler bu alanda çok sayıda kitap yazmışlardır. 1934 yılında Hardy, Littlewood ve Polya tarafından yazılan ”Inequalities” isimli kitap bu alanda ilk çalışma olup temel kaynak olarak önemli bir yere sahiptir. Bu kitap eşitsizlik konusunu ifade eden, farklı alanlar için kullanışlı bir rehber olarak kullanılan ilk kitaptır. Genel eşitsizlikler üzerine görülen diğer bir kitap ise E. F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961’ de yazılan ”Inequalities” isimli kitap, 1934 yılından 1961 yılına kadar eşitsizlikle ilgili yapılan mükemmel araştırmaları içeren bir kitaptır. 1970 yılında Mitrinoviç ise ”Analytic Inequalities” isimli kitapla birlikte bu konuyla ilgili literatürde mihenk taşı oluşturacak üçüncü kitap olmuştur. Konveks fonksiyonlar ve ilgili eşitsizlikleri için literatürde var olan diğer kitaplar ve doktora tezlerini bulabilirsiniz.

Konveks fonksiyonların uzun bir tarihi vardır. 19. yüzyılın sonunda ortaya çıkmaya başlamıştır ve Hölder (1889), Stolz (1893) ve Hadamard’ ın (1893) katkılarıyla temelleri atılmıştır. Konveks Fonksiyonlar Teorisi ile ilgili olan Eşitsizlikler Teorisi ise C. F. Gauss, A. L. Cauchy ve P. L. Chebyshev ile gelişmeye başlamıştır. 19.-20. yy’ da bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler olmuşlardır. Bunların en önemlileri 1881 yılında Hermite tarafından elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliği ve 1938 yılında Ostrowski tarafından elde edilen Ostrowski eşitsizliğidir. Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili çalışmaların önemli bir kısmını S. S. Dragomir ve C. E. M. Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan ”Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications” isimli kitapta; Ostrowski eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı da S. S. Dragomir ve Themistocles M. Rassias tarafından 2002 yılında yazılmış olan “Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration” isimli kitapta bir araya getirilmiştir. Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler üzerine çalışan diğer matematikçiler; R. Agarval, G. Anastassiou, G. V.

Milovanovic, A. M. Fink, Roberts ve Varberg, N.S. Barnett, M. E. Özdemir, U. S. Kırmacı, H. Yıldırım, M. Z. Sarıkaya, N. Ujeviç, S. Varosanec, P. S. Bullen, P. Cerone, E. Set ve İ. İşcan şeklinde sıralayabiliriz.

Richard Bellman II. Uluslararası Genel Eşitsizlik Konferansı devam ederken yaptığı bir konuşmasında eşitsizlik çalışmanın pratik, teorik ve estetik olmak üzere üç nedeni olduğundan bahsetmiştir. Bunlar içerisinde estetik neden için bakan bir kimsenin ya da bir seyircinin veya bir okuyucunun gözündeki güzellik olarak ifade etmiştir. Eşitsizliğin onları cezbeden bir zarifliği olduğunu söylemiştir.

Eşitsizlik Teorisi'nden doğan "Konveks Fonksiyonlar" bir çok araştırma alanına sahiptir. Alışılmış tanım E^n nin bir konveks alt kümesi üzerinde reel değerli fonksiyonlar için yapılmıştır, yani

Tanım 1: Her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in X$ için

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\right) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

oluyorsa f'ye konveks denir.

Bu tanıma denk olan konvekslik tanımını epigraf yardımıyla ikinci bölümdeki temel kavramlarda vereceğiz. Aslında bu iki tanım da geometrik kavramlarla ilgilidir.

Şunu söylemek gerekirse, bir fonksiyon kendi koordinatları üzerinde konveks olabilir, fakat tanım kümesi üzerinde konveks olmak zorunda değildir. Örneğin; $f(x,y) = xy$ fonksiyonu y sabit olmak üzere x üzerinde, x sabit olmak üzere y üzerinde konvekstir. Fakat $(x_1, y_1) = (1,0)$, $(x_2, y_2) = (0,1)$ ve $\lambda = \frac{1}{2}$ için tanımlanan eşitsizlik doğru değildir.

W. Fenchel tarafından konveks fonksiyonlarla ilgili birçok özellikler ortaya atılmıştır. Bir çok durumda fonksiyonların konveksliği için tanımlanan eşitsizlik zayıf kaldığından

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\right) \leq \max\left\{ f(x_1), f(x_2) \right\}$$

eşitsizliğine veya buna denk olan seviye kümelerine ihtiyaç vardır. Bu ise bize, daha geniş bir fonksiyonlar sınıfına ihtiyacımız olduğunu gösterir yani "Kuazi-Konveks Fonksiyonlara"

Tanım 2: Her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in X$ için

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\right) \leq \max\left\{ f\left(x_1\right), f\left(x_2\right) \right\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f ' ye X üzerinde kuazi-konveks fonksiyon denir. Eğer f fonksiyonu kuazi-konveks ise, $-f$ fonksiyonu kuazi-konveks'tir.

Buradaki "kuazi" ön ekinin anlamı, "-mış gibi, gibi, sanki" anlamına gelmektedir. Dolayısıyla, bu fonksiyon sınıfının, konveks fonksiyonların bazı özelliklerine sahip olacağını tahmin etmek hiç de zor değildir. Dahası her konveks fonksiyon kuazi-konveks olduğu için konveks fonksiyonlarda olmayan bazı özelliklerin, onun bir üst sınıfı olan kuazi-konveks fonksiyonlarda olacağını görmek hiç de zor değildir.

Definetti, (1949), konveks seviye kümelerine sahip fonksiyonların bazı özelliklerini tanımlayan ilk bilim insanlarından biridir. Fakat bu sınıfa ismini vermemiştir. Tüm konveks fonksiyonları ve bazı konveks olmayan fonksiyonları içeren çalışmasını yapmıştır.

Fenchel, (1953), kuazi-konveks fonksiyonları şekillendirmiş, geliştirmiş ve isimlendirmiştir.

Nikaido, (1954), Kuazi-Konveks fonksiyonların önemli özelliklerini, Brouwer'in sabit nokta teoremini kullanarak Van Neumann'ın minimax teoremini geliştirmesiyle elde etmiştir. Daha sonraki teoremler Nash ve Sion tarafından, Berge tarafından Kakutani'nin teoremini kullanarak tanımlamıştır.

Slater, (1950), Kuhn- Tucker eyer noktası denklik teoremini genelleştirmiştir.

Arrow ve Enthoven, (1961) ise tüketici talebiyle ilgili olan kuazi-konkav optimizasyon problemi hakkında önemli bir çalışma yapmıştır.

Martos (1967), özellikle Kuadratic fonksiyonlar için bir çok önemli sonuçlar elde etmiştir. Matematiksel programlama, konveks olmayan kuadratic programlar için yani kuazi-konveks için onun bir algoritmasıdır.

Cottle ve Ferland, kuazi- konveks kuadratikler ile çalışmalar yapmışlardır.

Mangasarian (1969), “Nonlinear Programing” isimli kitabı optimizasyon problemiyle ilgili bir çok anahtar kavramlar vermiştir.

Günümüz literatürüne bakıldığında, bu alanla ilgili birçok bilim insanı birçok çalışma yapmıştır. Biz bu tezde kuazi-konveksliğin temel özelliklerini inceleyeceğiz. Bu özellikleri konveks fonksiyonlarla kıyaslayacağız. Benzer olan ve benzer olmayan özellikleri göstereceğiz. Daha sonra kuazi-konvekslik çeşitlerini tanıtacağız. Son olarak ise ikinci türevin mutlak değeri kuazi-konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerle ilgili literatürde var olan bazı teoremleri ve ifadeleri açık bir şekilde ifade edeceğiz. Bu çalışmayı yaparken temel olarak H. J. Greenberg ve W. P. Pierskalla’nın 1971 yılındaki, “A review of quasi-convex functions” isimli çalışması ile 2010 yılında M. Alomari, M. Darus ve S. S. Dragomir tarafından “Tamkang Journal Of Mathematics” isimli dergisinde basılan “New Inequalities of Hermite-Hadamard Type for Functions whose Second Derivatives Absolute Values are Quasi-Convex” çalışmasından faydalandık.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bu çalışmada kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Konveks Küme): L bir lineer uzay ve A ⊆ L olmak üzere $\forall x, y \in A$ için

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1-\alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki x ve y nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1-\alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümesidir.

Tanım 2.1.2 (J-Konveks Fonksiyon): I, ℝ' de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan bir f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J-konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.1.3 (Kesin J-Konveks Fonksiyon): Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için,

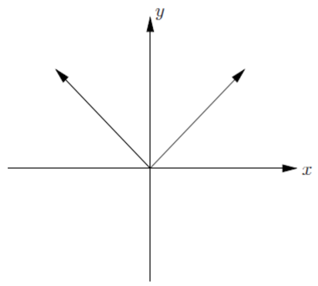
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna I üzerinde kesin J-konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.1.4 (Konveks Fonksiyon): I, ℝ' de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Bakınız Şekil 2.1). Örneğin, $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde bir konveks fonksiyondur.



Şekil 2.1: Bir aralıkta konveks fonksiyon ($f(x) = |x|$)

Sonuç 2.1.1: Her konveks fonksiyon aynı zamanda bir J-konveks fonksiyondur.

Sonuç 2.1.2: $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun I' da konveks olması için gerek ve yeter şart, her $x, y \in I$ için $p + q > 0$ olan $\forall p, q \geq 0$ için

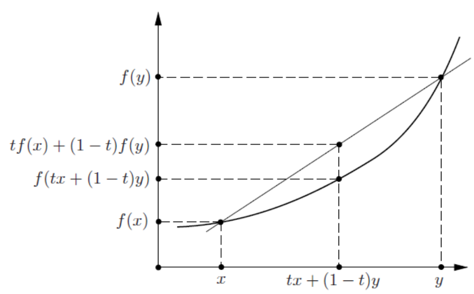
$$f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p + q}$$

olmasıdır. I üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun kesin konveksliğinin geometrik anlamı $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f' nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır. Bunu Şekil 2.2 de görmekteyiz.

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı, $[a, b]$ aralığında konveks (konkav) ve x_0 noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $x \in (a, b)$ için,

$$f(x) - f(x_0) \leq (\geq) f'(x_0)(x - x_0)$$

eşitsizliği yazılır.



Şekil 2.2: Konveks fonksiyon şekli

Tanım 2.1.5: (Eşlenik Konveks Fonksiyonlar): $g: [0, \infty) \to [0, \infty)$fonksiyonu artan ve sürekli bir fonksiyon olsun ayrıca $g(0) = 0$ ve $x \to \infty$ iken $g \to \infty$ şartlarını sağlasın. Bu durumda g^{-1} vardır ve g ile aynı şartları sağlar. Eğer f ve f^* fonksiyonları

$$f(x) = \int_0^x g(t)dt \quad ve \quad f^*(y) = \int_0^y g^{-1}(s)ds$$

şeklinde tanımlanırsa bu iki fonksiyon da konveks olup f ve f^* fonksiyonlarına birbirinin konveks eşleniği denir. Aşağıdaki teorem konveks eşlenik çiftlerle ilgili önemli bir sonuçtur.

Teorem 2.1.1 (Young Eşitsizliği): $f, [0, c], (c > 0)$, aralığı üzerinde reel değerli, artan ve sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f(0) = 0, a \in [0, c]$ ve $b \in [0, f(c)]$ ise,

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx \geq ab$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.1.6 (Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Eğer

$$|x - x_0| < \delta \quad olan \quad \forall x \in S \quad için \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, x_0 da süreklidir denir.

Tanım 2.1.7 (Lipschitz Şartı): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f, S de Lipschitz şartını sağlıyor denir .

Sonuç 2.1.3 f, S de Lipschitz şartını sağlıyorsa f, S de düzgün süreklidir .

Tanım 2.1.8 (Düzgün Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x \in S \; ve \; |x_1 - x_2| < \delta \; şartını \; sağlayan \; \forall x_1, x_2 \in S \; için \; |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, S' de düzgün süreklidir denir.

Tanım 2.1.9 (Mutlak Süreklilik): I, $\mathbb{R}$'nin boştan farklı bir alt kümesi ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. I nın $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ ayrık açık alt aralıklarının bir birleşimini göz önüne alalım. Eğer $\forall \epsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu I kümesinde mutlak süreklidir denir .

Konvekslik, Lipschitz şartı, süreklilik ve mutlak süreklilik arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem 2.1.2: L lineer uzay, $U \in L$ bir açık küme ve $f: U \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun.

- **a.** f, U açık kümesinde konveks olsun. Eğer f, U' da bir noktanın komşuluğunda üstten sınırlı bir fonksiyon ise f, U' da yerel Lipschitz' dir ve bu nedenle U'nun kompakt alt kümesinde Lipschitz şartını sağlar ve U' da süreklidir.
- **b.** f, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde konveks ise f, U' nun her kompakt altkümesinde Lipschitz şartını sağlar ve U' da süreklidir .

Teorem 2.1.3: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise, bu taktirde

- **a.** f, (a, b) aralığında süreklidir,
- **b.** f, $[a, b]$ aralığında sınırlıdır .

Tanım 2.1.10 (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $x_1 < x_2$ olan $\forall x_1, x_2 \in I$ için

- **i.** $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,
- **ii.** $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,
- **iii.** $f(x_2) \geq f(x_1)$ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,
- **iv.** $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır,

denir .

Teorem 2.1.4: I, $\mathbb{R}$' de bir aralık, f, I üzerinde sürekli ve I^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

- **i.** $\forall x \in I^0$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.
- **ii.** $\forall x \in I^0$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.
- **iii.** $\forall x \in I^0$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.
- **iv.** $\forall x \in I^0$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır .

Sonuç 2.1.4: f ve g konveks fonksiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu da konvekstir .

Teorem 2.1.5: Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyonlar I^0' de artandır (kesin artandır) .

Teorem 2.1.6: f fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart f'' nin artan (kesin artan) olmasıdır .

Teorem 2.1.7: f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi mevcutsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in I$ için,

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır .

Tanım 2.1.11 (Kuazi-Konveks Fonksiyon): $f: S \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \subset \mathbb{R}$ boştan farklı konveks küme olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

ise f' ye kuazi-konveks fonksiyon denir . Eğer,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < max\{f(x), f(y)\}$$

ise f' ye kesin kuazi-konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında, eğer

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq max\{f(x), f(y)\}$$

ise f' ye kuazi-konkav fonksiyon ve eğer

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) > max\{f(x), f(y)\}$$

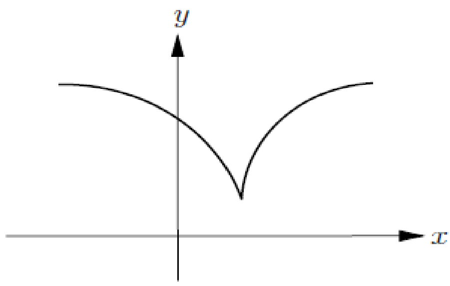
ise f' ye kesin kuazi-konkav fonksiyon denir .

Tanım 2.1.12: f hem kuazi-konveks hem de kuazi-konkav ise f' ye kuazi-monotonik fonksiyon denir .

Sonuç 2.1.5: Herhangi bir konveks fonksiyon aynı zamanda bir kuazi-konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani kuazi-konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar da vardır. Örneğin,

$$g(t) = \begin{cases} t & , \quad t \in [-2,-1] \\ t^2 & , \quad t \in [-1,2] \end{cases}$$

ile tanımlanan $g: [-2,2] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında kuazi-konveks fonksiyondur .



Şekil 2.3: Kuazi-konveks olup konveks olmayan fonksiyon

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Tezin bu bölümü esas olarak iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısmında, giriş ve literatür taramasında da bahsedildiği gibi kuazi-konveksliğin temel özellikleri, bu özelliklerin konveks fonksiyonlarla kıyaslanması ve kuazi-konveks çeşitlerinden bahsedilecektir. İkinci kısmında ise ikinci türevinin mutlak değeri kuazi- konveks olan fonksiyonlar için Hermite- Hadamard tipi eşitsizlikler için yapılmış bazı teoremler açık bir şekilde ifade edilecektir.

3.1 Fonksiyon Sınıfları

$$E_1(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$E_2(x)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}x_ix_j$$

.

.

.

$$E_n(x)=\prod_{i=1}^{n}x_i$$

şeklinde tanımlansın $E_r(x)$ r- inci elemanlı simetrik fonksiyon olsun. Yani, $E_r(x)$ $1\le r\le n$ için farklı r-defa çarpımların toplamıdır. Burada tanım kümemiz X, elemanlar $E_+^{\ n}=\{x:x\ge 0\}$dan alınmaktadır.

Marcus ve Lopes, $E_r(x)^{1/r}$ nin x üzerinde konkav olduğunu ispat ettiler. $a_rk_r\ge 0$ için $a_rE^r(x)^{k_r}$ kuazi- konkavdır. Dahası bir pozitif kuazi-konkav fonksiyonun negatifi kuazi- konveks olduğundan $a_rk_r\le 0$ ve $x\in E_+^n-\{0\}$ için $a_rE_r(x)^{k_r}$ kuazi-konvekstir.

Kuazi-konveksliğin kullanıldığı bir diğer yer ise matematiksel programlamadır. Luenberger, kuazi-konkav programlar için yeni yaklaşımlar geliştirmiştir. Greenberg ve Pierskalla, keyfi matematiksel programlar için bir teorik temel geliştirmiştir. Bunun için, bir X kümesinin yapısı ve bir $f(x)$ fonksiyonunun kuralına ihtiyaç vardır. $u : E^n \to E^1$, $u(y)$ reel değerli bir fonksiyon, $v : E^n \to E^m$ ise bu şekilde tanımlansın. Şimdi X' i ve f' yi aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$X := \left\{ x \geq 0 \,\middle|\, \sup_{y \in E^n} \left\{ u(y) : x^T v(y) \leq 0 \right\} < +\infty \right\}$$

$$f(x) := \sup_{y \in E^n} \left[u(y) : x^T v(y) \leq 0 \right], \; x \in X$$

Buradaki X ’in bir konveks küme ve f ’nin X üzerinde kuazi-konveks olduğunu G. H. J. Greenberg ve W.P. Pierskalla ispat etmiştir.

Konveks olması gerekmeyen kuazi-konveks fonksiyonların üçüncü bir sınıfı Martos tarafından gösterilmiştir. Yani, Q bir simetrik matris olmak üzere $f(x) = \frac{1}{2} xQx + cx$ şeklinde verilen kuadratik fonksiyonu göz önüne alalım. Eğer $X = E^n$ ise bu durumda, $f(x)$’in konveks olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $f(x)$ in kuazi-konveks olmasıdır. Ancak, eğer $X = E_+^n$ ise, bu durumda $f(x)$ kuazi-konveks olabilir, fakat konveks olamaz. Örneğin, $f(x_1, x_2) = -x_1 x_2$ fonksiyonu E_+^2 de kuazi-konvekstir, fakat konveks değildir.

Martos, $f(x)$ in E_+^n üzerinde kuazi-konveks olabilmesi için gerekli ve yeterli koşulun her $v \in E^n$ için $v^T Q v < 0$ eşitsizliğini sağlaması olduğunu ispat etmiştir. Başka bir değişle Q simetrik bir matris ve her $v \in E^n$ için $[Qv, c^T v] \overset{>}{\underset{=}{<}} 0$ olmasıdır. Buradaki $\overset{>}{\underset{=}{<}}$ sembolü, u nun pozitif olmadığı ya da negatif olmadığı anlamına gelmektedir.

Martos, bir homojen kuadratik ($c = 0$) bir fonksiyonun kuazi-konveks ve konveks olma şartını elde etmiştir. Daha sonra bu çalışmasını geliştirmiş ve $f(x)$ in E_+^n üzerinde kuazi-konveks olması ve konveks olmaması durumunun aşağıdaki üç şarta bağlı olduğunu ispat etmiştir.

1. $Q \leq 0$ ve $c \leq 0$,

2. Q tam olarak bir negatif özdeğere sahiptir,

3. $Qq = c$ ve $cq \leq 0$ şartını sağlayan bazı $q \in E^n$ vardır.

3.2. Benzer Özellikler

Konveks ve kuazi-konveks fonksiyonların benzer özellikleri kategorize etmede aşağıdaki beş durum göz önüne alınmıştır.

1. Konveks kümelerle bağlantıları,
2. Süreklilik, sınırlılık ve diferansiyellenebilme,
3. Ekstremum değerleri,
4. Eşitsizlikler,
5. Dönüşümler.

Şimdi konveks ve kuazi-konveks fonksiyonların benzer özelliklerini yazalım.

Teorem 3.2.1:

a) f 'nin konveks olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $[X, f]$ nin konveks küme olmasıdır.

b) f 'nin kuazi-konveks olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul tüm c-ler için $[S^c, f]$ nin bir konveks küme olmasıdır.

Teorem 3.2.2:

a) f 'nin lineer olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $[X, f]$ ve $[X, -f]$ lerin konveks küme olmasıdır.

b) f 'nin kuazi-monotonik olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul tüm c-ler için $[S^c, f]$ ve $[S^c, -f]$ lerin konveks küme olmasıdır.

Teorem 3.2.3:

a) f 'nin lineer olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $\{(Z, x) : x \in X, f(x) = z\}$ kümesinin bir konveks küme olmasıdır.

b) $Y := \{x \in X : f(x) = c\}$ olsun. Eğer f kuazi-monotonik ise, bu takdirde tüm c-ler için Y bir konveks kümedir. Eğer Y, tüm c-ler için bir konveks küme ve f sürekli ise bu durumda f Kuazi-Monotoniktir.

Teorem 3.2.4:

a) Tüm c-ler için $[S^c, f]$ nin sınırlı olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $[S^t, f]$ yi boştan farklı ve sınırlı yapan bir t-nin var olmasıdır.

b) Eğer $[S^c, f]$ boştan farklı ve sınırlı ise bu durumda $[S^t, f]$ yi sınırlı yapan bir $t > c$ vardır.

Teorem 3.2.5:

a) f konveks fonksiyonu X^0 üzerinde süreklidir.

b) f kuazi-konveks fonksiyonu hemen hemen her yerde X^0 üzerinde süreklidir.

Teorem 3.2.6:

a) f konveks fonksiyonunun tek taraflı kısmi türevleri X^0 ın her yerinde vardır.

b) f kuazi-konveks fonksiyonunun tek taraflı kısmi türevleri X^0 ın hemen hemen her yerinde vardır.

Teorem 3.2.7:

a) f fonksiyonu E^n üzerinde iki kere sürekli türevlenebilir olsun. Bu durumda f ' nin E^n üzerinde konveks olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul onun $H(.)$ Hessian' ın E^n boyunca pozitif yarı tanımlı olmasıdır.

b) f fonksiyonu E^n üzerinde iki kere diferansiyellenebilir olsun. Eğer f, E_n^+ üzerinde Kuazi-Konveks ise bu durumda $j = 1, 2, 3, ..., n$ için $|D_j| \leq 0$ dır. Eğer $j = 1, 2, 3, ..., n$ için $|D_j| < 0$ ise bu durumda f, E_n^+ üzerinde kuazi-konvekstir.

Teorem 3.2.8:

a) f E^n üzerinde iki kere sürekli diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda f 'nin E^n üzerinde kuazi-konveks olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $f(y)-f(x)\geq \nabla f(x)^T(y-x)$ olmasıdır.

b) f E^n üzerinde bir kere sürekli diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda f 'nin E^n üzerinde kuazi-konveks olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $f(y)\leq f(x)$ yani $\nabla f(x)^T(y-x)\leq 0$ olmasıdır.

Teorem 3.2.9:

a) Eğer X kompakt ise bu durumda $\sup_{x\in X^0} f(x)<+\infty$ dur.

b) Eğer X kompakt ise bu durumda $\sup_{x\in X^0} f(x)<+\infty$ dur.

Teorem 3.2.10:

a) Eğer X kompakt ise bu durumda $\sup_{x\in X} f(x)=\sup_{x\in E} f(x)$ tir.

b) Eğer X kompakt ise bu durumda $\sup_{x\in X} f(x)=\sup_{x\in E} f(x)$ tir.

Teorem 3.2.11:

a) Her lokal minimum bir global minimumdur.

b) Her lokal minimum bir global minimumdur veya f , lokal minimumun bir komşuluğunda sabittir.

Teorem 3.2.12:

a) Global minimum kümesi konvekstir.

b) Global minimum kümesi konvekstir.

Teorem 3.2.13:

a) X ve Y sırasıyla E^n ve E^m in kompakt alt kümeleri ve $f:X\times Y\rightarrow E^1$, her $y\in Y$ için $f(x,\cdot)$ konkav, her $x\in X$ için $f(\cdot,y)$ ise konveks olsun. İlaveten

$f(x,y)$ sürekli olsun. Bu durumda $f(x,y)$, $(x^*,y^*)\in X\times Y$ olacak şekilde bir eyer noktasına sahiptir.

b) X ve Y sırasıyla E^n ve E^m in kompakt alt kümeleri ve $f: X\times Y\to E^1$, her $y\in Y$ için $f(x,\cdot)$ kuazi-konkav ve üstten yarı-sürekli, her $x\in X$ için $f(\cdot,y)$ ise kuazi-konveks ve alttan yarı-sürekli olsun. Bu durumda $(x^*,y^*)\in X\times Y$ olacak şekilde $f(x,y)$ nin bir eyer noktası vardır.

Teorem 3.2.14:

a) f konveks fonksiyonu için eğer $f(0)\le 0$ ise her $\lambda\in[0,1]$ için $f(\lambda x)\le \lambda f(x)$ tir.

b) f kuazi-konveks fonksiyonu için eğer $f(x)\ge f(0)$ ise her $\lambda\in[0,1]$ için $f(\lambda x)\le f(x)$ tir.

Teorem 3.2.15:

a) f konveks fonksiyon olsun. Eğer $\lambda\in E^1$ için $f(0)=0$ ise bu durumda $\lambda>0$ için $g(\lambda)=f(\lambda x)/\lambda$ monoton artandır.

b) f kuazi-konveks fonksiyon olsun. Eğer $\lambda\in E^1$ için $f(x)\ge f(0)$ ise bu durumda $\lambda\ge 0$ için $g(\lambda)=f(\lambda x)$ monoton artandır.

Teorem 3.2.16:

a) Keyfi $x,y\in X$ için $\alpha\in[0,1]$ üzerinde $g(\alpha)=f(\alpha x+(1-\alpha)y)$ fonksiyonunun konveks olabilmesi için f nin konveks olmasıdır.

b) Keyfi $x,y\in X$ için $g(\alpha)=f(\alpha x+(1-\alpha)y)$ nin $\alpha\in[0,1]$ üzerinde kuazi-konveks olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul f nin kuazi-konveks olmasıdır.

Teorem 3.2.17:

a) f konveks fonksiyon ise $g(x)=\sup\limits_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma(x)$ fonksiyonu da konveks fonksiyondur. Burada Γ keyfi bir indeks kümesidir.

b) f kuazi-konveks fonksiyon ise $g(x)=\sup\limits_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma(x)$ fonksiyonu da kuazi-konveks fonksiyondur. Burada Γ keyfi bir indeks kümesidir.

Teorem 3.2.18:

a) Eğer F konveks ve azalmayan ise bu durumda $g(x)=F\left[f(x)\right]$ konvekstir.

b) Eğer F azalmayan ise bu durumda $g(x)=F\left[f(x)\right]$ kuazi-konvekstir.

3.3 Benzer Olmayan Özellikler

Bir önceki kısmın aksine şimdi vereceğimiz özellikleri genişletemeyiz ve hiçbir benzerliği de yoktur. Şimdi kuazi-konveks fonksiyonlar için benzer olmayan konveks fonksiyonların bazı özelliklerini verelim.

Teorem 3.3.1: Eğer $\alpha,\beta\geq 0$ ise, bu durumda $\alpha f(x)+\beta g(x)$ konvekstir.

Teorem 3.3.2: Eğer $\left[X,f\right]$ kapalı ise, bu durumda $[X,f]''=[X,f]$ dir.

Teorem 3.3.3: Eğer X sınırlı ise, bu durumda $\inf\limits_{x\in X^0} f(x)>-\infty$ dur.

Teorem 3.3.4: Her bir $j=1,2,3,...,m$ için X tanım kümesine sahip olan f_j ler olmak üzere $F\left[f_1(x),...,f_m(x)\right]$ olsun. Bu durumda $F(x)\leq 0$ olacak şekilde bir $x\in X$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul tüm $x\in X$ ler için $\lambda F(x)>0$ olacak şekilde $\lambda\in E_+^m$ olmaması ve $\lambda\neq 0$ olmasıdır.

3.4. Açık ve Kesin Kuazi-Konveks Fonksiyonlar

Literatürde kuazi-konveks fonksiyonlar üzerine iki tanım vardır. Birincisi açık kuazi-konveks ve ikincisi kesin kuazi-konveks fonksiyonlardır. Bu kısımda biz bu tanımları ve bu tanımların ne zaman çakışıp ne zaman çakışmadığı durumları inceleyeceğiz.

Tanım 3.4.1: f , X konveks tanım kümeli bir fonksiyon olsun. Bu durumda eğer $x_1, x_2 \in X$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ ve f kuazi-konveks ise bu durumda her $\lambda \in (0,1)$ için

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) < \max\left\{ f(x_1), f(x_1)\right\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu f fonksiyonuna açık kuazi-konveks denir.

Tanım 3.4.2: f , X konveks tanım kümeli bir fonksiyon olsun. Bu durumda eğer $x_1, x_2 \in X$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ fonksiyonu her $\lambda \in (0,1)$ için

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) < \max\left\{ f(x_1), f(x_1)\right\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu f fonksiyonuna açık kuazi-konveks denir.

Bu iki tanımdan açıkça anlaşılacağı üzere bir kesin kuazi-konveks fonksiyonun kuazi-konveks olmasına gerek yoktur. Yani

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

fonksiyonu kesin kuazi-konveks olmasına rağmen kuazi-konveks değildir.

Ayrıca $\{x : f(x) \leq 0\}$ seviye kümesi konveks değildir fakat f fonksiyonu kesin kuazi-konvekstir. Karamardian eğer kesin kuazi-konveks fonksiyonu bir S kümesi üzerinde alttan yarı-sürekli ise kuazi-konveks olduğunu göstermiştir. Böylece X kümesi üzerinde alttan yarı-sürekli bu fonksiyonların iki tanımı olan açık kuazi-konveks ve kesin kuazi-konveks tanımları çakışır.

Kolaylıkla görülebilir ki her konveks fonksiyon açık kuazi-konveks fonksiyondur. Bunu görebilmek için $f(x_1) < f(x_2)$ şartını sağlayan her $x_1, x_2 \in X$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) < f(x_2)$$

yazabiliriz.

Teorem 3.2.11. b) yi şu şekilde genişletebiliriz:

Eğer $f(x)$ fonksiyonu açık kuazi-konveks ise bu durumda her lokal minimum bir global minimumdur. Fakat biz burada şuna dikkat etmeliyiz ki her sabit nokta bir minimumdur. Örneğin $f(x)=x^3$ fonksiyonu açık kuazi-konvekstir. Fakat orijinde bir dönüm noktasına sahiptir.

Teorem 3.2.15. b) yi de şu şekilde genişletebiliriz:

Eğer $f(x)>f(0)$ ise bu durumda her $\lambda\in(0,1)$ için $f(\lambda x)<f(x)$ tir. Bu genişleme Teorem 3.2.15. a) daralma özelliği kadar güçlü olmasa bile Teorem 3.2.15. b) den daha güçlüdür.

Yani eğer her $\gamma\in\Gamma$ için X kümesi üzerinde $f_\gamma(x)$ fonksiyonu açık kuazi-konveks ise bu durumda $g(x)=\sup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma(x)$ fonksiyonunun açık kuazi-konveks olması gerekmez. Gerçekten

$X:=\{x:-1\le x\le 2\}$ ve $\Gamma:=\{\gamma:0<\gamma\}$ için

$$f_\gamma(x)=\begin{cases} x^3+\gamma(x-10) & , \quad -1\le x\le 0 \text{ ise},\\ \gamma(x-10) & , \quad 0\le x\le 1 \text{ ise},\\ (x-1)^3+\gamma(x-10), & \quad 1\le x\le 2 \text{ ise},\end{cases}$$

fonksiyonunu düşünelim. Bu durumda

$$g(x)=\sup_{\lambda>0} f(x)=\begin{cases} x^3 & , -1\le x\le 0 \text{ ise},\\ 0 & , 0\le x\le 1 \text{ ise},\\ (x-1)^3 & , 1\le x\le 2 \text{ ise},\end{cases}$$

olup, açık kuazi-konveks değildir. Yani, $x_1=-1,\ x_2=1$ ve $\lambda=\frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda

$$g(-1)=-1<g(1)=0$$

olur, fakat

$$g(0)=0\not<\max\{g(-1),g(1)\}=0$$

olup, kuazi-konveks değildir.

Ancak açıktır ki eğer her $x \in X$ için $g(x) = f_{\gamma^*}(x)$ olacak şekilde bir $\gamma^* \in \Gamma$ var ise bu durumda $f_{\gamma^*}(x)$ kuazi-konveks olarak kabul edildiği için $g(x)$ açık kuazi-konvekstir.

Daha genel olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teoerem 3.4.1: $\{f_\gamma(x), x \in X, \gamma \in \Gamma\}$ açık kuazi-konveks fonksiyonların bir ailesi olsun. Burada X, f nin tanım kümesi, Γ ise bir indeks kümesidir. Her $x \in X$ için

$$g(x) \coloneqq \sup_{\gamma \in \Gamma}\{f_\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım. Bu durumda her $x \in X$ için $\gamma^*(x)$ diyeceğimiz, $g(x) = f_{\gamma^*(x)}(x)$ şartını sağlayan en az bir $\gamma \in \Gamma$ var ise, o zaman $g(x)$, X kümesi üzerinde açık kuazi-konvekstir.

İspat: Teorem 18b'den $g(x)$ kuazi-konvekstir, dolayısıyla geriye $g(x_1) \neq g(x_2)$ için her $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere

$$g(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \max\{g(x_1), g(x_2)\}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu göstermek kalıyor. Bunun için tersinin doğru olduğunu kabul edelim, yani $g(x_1) > g(x_2)$ ve bazı $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ için $g(x) = g(x_1)$ olur. Hipotezden,

$$g(x) = f_{\gamma^*(x)}(x)$$

$$g(x_1) = f_{\gamma^*(x_1)}(x_1)$$

$$g(x_2) = f_{\gamma^*(x_2)}(x_2)$$

olacak şekilde, $\gamma^*(x), \gamma^*(x_1)$ ve $\gamma^*(x_2) \in \Gamma$ vardır. Şimdi

$$\gamma^*(x) \coloneqq \gamma^*, \gamma^*(x_1) \coloneqq \gamma_1^* \text{ ve } \gamma^*(x_2) \coloneqq \gamma_2^*$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda, iddiadan

$$f_{\gamma^*}(x) = g(x) = g(x_1) = f_{\gamma_1^*}(x_1)$$

yazabiliriz. $f_{\gamma^*}(x)$ açık kuazi-konveks olduğu için

$$f_{\gamma^*}(x) \leq \max\left\{ f_{\gamma^*}(x_1), f_{\gamma^*}(x_2) \right\}$$

dir. Eğer $f_{\gamma^*}(x_1) \neq f_{\gamma_1^*}(x_1)$ ise buradan

$$f_{\gamma^*}(x) < \max\left\{ f_{\gamma^*}(x_1), f_{\gamma^*}(x_2) \right\}$$

dir. Dahası, tanımdan

$$f_{\gamma^*}(x_1) \leq f_{\gamma_1^*}(x_1)$$

ve

$$f_{\gamma^*}(x_2) \leq f_{\gamma_2^*}(x_2)$$

yazabiliriz. Bu yüzden, eğer

$$f_{\gamma^*}(x_1) \neq f_{\gamma^*}(x_2)$$

ise,

$$\begin{aligned} g(x) = f_{\gamma^*}(x) &< \max\left\{ f_{\gamma^*}(x_1), f_{\gamma^*}(x_2) \right\} \\ &\leq \max\left\{ f_{\gamma_1^*}(x_1), f_{\gamma_2^*}(x_2) \right\} = \max\left\{ g(x_1), g(x_2) \right\} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu ise $g(x) < g(x_1)$ anlamına gelir. Dolayısıyla bu, bizim teoremin ispatı için aksini kabul ettiğimiz iddia ile çelişir. Diğer taraftan, eğer

$$f_{\gamma^*}(x_1) = f_{\gamma^*}(x_2)$$

ise, bu durumda

$$g(x) \leq f_{\gamma_2^*}(x_2) = g(x_2) < g(x_1)$$

olur ki, bu da tekrar bir çelişki oluşturur. Dolayısıyla bu çelişki ispatı tamamlar. X , en az iki noktaya sahip bir konveks küme ve f de S kümesi üzerinde alttan yarı-sürekli olsun. P ile kompakt sınıfı ve en az iki noktayı içeren X ' in konveks alt kümesini gösterelim. Eğer her bir $S \in P$ için f 'nin S üzerindeki her lokal minimumu, S üzerinde f 'nin bir global minimumu ise, bu duruma f açık kuazi-konvekstir.

Ayrıca eğer x^* gibi bir global minimum var ise o zaman $x \in I$ için $f(x) = f(x^*)$ olacak şekilde bir I aralığı vardır. Bir açık kuazi-konveks fonksiyon x, I aralığının solunda olmak üzere, $f(x)$ kesin azalandır ve x, I aralığının sağında olmak üzere, $f(x)$ kesin artandır. Bu özellik bize, belirli dizisel araştırma düzeni sağlar. Fibonacci'nin araştırması gibi yani I aralığında bir optimuma sahip bir alt aralığı, bize verilmiş $[a,b]$ aralığının bölünmesini azaltmamız.

Son olarak, genelde açık kuazi-konveks fonksiyonların kuazi-konveks olmasına gerek olmadığını söyleyebiliriz yani, Evans ve Gould [10, J. P. Evans and F. J. Gould, Stability in Nonlinear Programming, Opns. Res. 18, 107-118 (1970)], eğer $F(x) = [f_1(x), ..., f_m(x)]$, E^n tanım kümeli, m-açık kuazi-konveks sürekli fonksiyonların bir vektörü ve eğer, $I = \{x : F(x) < 0\}$ ile verilen seviye kümesinin (kesin) içi boş değil ise, bu durumda onun kapanışı $\bar{I} = \{x : F(x) \le 0\}$ şeklinde olacağını göstermişlerdir. Ancak bu durum genel olarak bir kuazi-konveks fonksiyon için doğru olmak zorunda değildir. Örneğin

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , x \le 0 \text{ ise}, \\ 0 & , 0 \le x \le 1 \text{ ise}, \\ (x-1)^3 & , 1 \le x \text{ ise}, \end{cases}$$

fonksiyonunu göz önüne alabiliriz.

Evans ve Gould tarafından geliştirilen bu özelliğin önemi,

$$B := \{b : F(x) \leq b, x \in E^n\}$$

için $b \in B$ olan

$$f^*(b) = \sup_x \{ f_0(x) | F(x) \leq b, x \in E^n \}$$

şeklinde verilen fonksiyonun sürekliliği için yeterli şartı elde etmeleridir. Bu, değer uzayında istikrarı sağlamak zorundadır. Greenberg ve Pierskalla [Extensions of the Evans-Gould Stability Theorems for Mathematical Programs] Evans ve Gould'un sonuçlarından bazılarını sadece b-nin değişimine izin vermesinden ziyade, $f_i(x)$ fonksiyonlarının değişimini yaparak genişletmiştir. Bu genişletilmiş sonuçlardan biri, eğer $F(x)$ açık kuazi-konkav ve alttan yarı sürekli, ayrıca eğer $f_0(x)$ de alttan yarı sürekli ise, bu durumda her bir $b \in B$ de $f^*(b)$ alttan yarı süreklidir. Üstten yarı süreklilik ise uygun bölgenin kompaktlığından elde edilir.

Özet olarak, açık kuazi-konveks fonksiyonları tanımlamak için daha güçlü eşitsizlikler, diğer kuazi-konveks fonksiyonlar tarafından genel olarak sağlanmayan istikrarlı özelliğe ihtiyaç duyulduğunu açığa çıkartır. Bu da hala konveks fonksiyonlardan daha geniş bir sınıf olduğunu ve süreksizliğe izin verdiğini gösterir.

3.5. Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizlikler

Tanım 3.5.1: $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu reel sayıların bir I aralığı üzerinde tanımlansın. $a < b, a, b \in I$ olsun. Eğer

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, buna literatürde konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizlik denir.

Son yıllarda birçok yazar bu gerçekle bağlantılı birkaç eşitsizlik kurdu. Son sonuçlar, geliştirmeler, denklikler, genellemeler ve yeni Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler için literatüre bakabilirsiniz.

Kuazi-Konveks Fonksiyon kavramının Konveks Fonksiyon kavramının bir genellemesi olduğunu biliyoruz. Daha açık bir ifadeyle $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \max\{f(x), f(y)\},\ \forall x,y \in [a,b], \lambda \in [0,1]$$

ise $[a,b]$ aralığında kuazi - konvekstir.

Açıkça her konveks fonksiyon kuazi-konvekstir. Ayrıca kuazi-konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar vardır.

Sonuçta D. A. Ion türevinin mutlak değeri kuazi-konveks olan fonksiyonlarda Hermite – Hadamard tipi eşitsizliğin sağ tarafı için iki eşitsizlik elde etti.

Teorem 3.5.1: $f: I^0 \subset R \to R$, $a,b \in I^0$ ve $a<b$ olmak üzere f, I^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığında kuazi–konveks ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{b-a}{4}\max\{|f'(a)|,|f'(b)|\}$$

Teorem 3.5.2: $f: I^0 \subset R \to R$, $a,b \in I^0$ ve $a<b$ olmak üzere f, I^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$, $[a,b]$ aralığında kuazi–konveks ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{b-a}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}(\max\{|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}},|f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\})$$

Burada temel amaç ikinci türevlerinin mutlak değerleri kuazi–konveks olan fonksiyon için Hermite-Hadamard'ın sağ tarafı için yeni eşitsizlik kurmaktır.

Ana teoremlerimizi kanıtlamak amacıyla lemmaya ihtiyacımız var.

Lemma : $f: I \subseteq R \to R$ I^0 üzerinde ikinci türevi olan bir dönüşüm ve $a,b \in I$, $a<b$ olmak üzere f'', $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{\left(b-a\right)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)f''\left(ta+\left(1-t\right)b\right)dt$$

Bu eşitliğin ispatı basitçe sağ tarafın iki kez integrali alınarak yapılabilir. Ayrıntılar ilgilenen okuyucuya bırakılmıştır.

Aşağıdaki teorem kuazi-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinden daha ileri yeni bir sonuç verir.

Teorem 3.5.3: $f:I\subseteq R\rightarrow R$ I^0 üzerinde ikinci türevi olan bir dönüşüm ve $a,b\in I$ $a<b$ olmak üzere f'', $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olsun. Eğer $|f''|$, $[a,b]$ aralığında kuazi-konveks ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{(b-a)^2}{12}\max\{|f''(a)|,|f''(b)|\}$$

İspat: Lemmadan

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)\,|f''(ta+(1-t)b)|dt$$

$$\leq\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)\max\{|f''(a)|,|f''(b)|\}\,dt\leq\frac{(b-a)^2}{2}\max\{|f''(a)|,|f''(b)|\}\int_0^1 t(1-t)\,dt$$

$$=\frac{(b-a)^2}{12}\max\{|f''(a)|,|f''(b)|\}$$

olup, bu ise ispatı tamamlar.

İkinci türevinin mutlak değerinin kuvvetleri için daha genel bir durumu aşağıdaki teoremde verilecektir

Teorem 3.5.4: $f:I\subseteq R\rightarrow R$ I^0 üzerinde ikinci türevi olan bir dönüşüm ve $a,b\in I$ $a<b$ olmak üzere f'', $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olsun. Eğer $|f''|^{\frac{p}{p-1}}$, $[a,b]$ aralığında kuazi-konveks ise $p>1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{(b-a)^2}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{1/p}\left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}\right)^{1/p}\left(\max\left\{\left|f''(a)\right|^q,\left|f''(b)\right|^q\right\}\right)^{1/q}$$

Burada $q=p/(p-1)$.

İspat : Lemma ve Hölder integral eşitsizliği yardımıyla

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)\left|f''(ta+(1-t)b)\right|dt$$

$$\le\frac{(b-a)^2}{2}\left(\int_0^1\left(t-t^2\right)^p dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1\left|f''(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{1/q}$$

$$\le\frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{2^{-1-2p}\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}\right)^{1/p}\left(\max\{\left|f''(a)\right|^q,\left|f''(b)\right|^q\}\right)^{1/q}$$

$$=\frac{(b-a)^2}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{1/p}\left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}\right)^{1/p}\left(\max\left\{\left|f''(a)\right|^q,\left|f''(b)\right|^q\right\}\right)^{1/q},\quad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$$

Burada Beta ve Gama fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt\,,\ x,y>0$$

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt\,,\ x>0$$

ve bunları kullanarak aşağıdaki integrali hesaplayabiliriz:

$$\int_0^1\left(t-t^2\right)^p dt=\int_0^1 t^p(1-t)^p\,dt=\beta(p+1,p+1),$$

$$\beta(x,x)=2^{1-2x}\beta\left(\frac{1}{2},x\right)$$

ve

$$\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

eşitliklerini kullanılarak

$$\beta(p+1,p+1)=2^{1-2(p+1)}\beta\left(\frac{1}{2},p+1\right)=2^{-2p-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}$$

elde ederiz. Burada $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ olup böylece ispat tamamlanır.

Daha genel bir eşitlik Lemma kullanılarak aşağıdaki gibi verilir:

Teorem 3.5.5: $f:I\subseteq R\rightarrow R$ I^0 üzerinde ikinci türevi olan bir dönüşüm ve $a,b\in I$ $a<b$ olmak üzere f'', $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olsun. Eğer $|f''|^q,[a,b]$ aralığında kuazi-konveks $(q\geq 1)$ ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{(b-a)^2}{12}\left(\max\left\{|f''(a)|^q,|f''(b)|^q\right\}\right)^{1/q}$$

İspat: Lemma ve kuvvet ortalamaları eşitsizliği kullanılarak

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)\left|f''(ta+(1-t)b)\right|dt$$

$$\leq\frac{(b-a)^2}{2}\left(\int_0^1(t-t^2)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1(t-t^2)\left|f''(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{1/q}$$

$$\leq\frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{6}\max\left\{|f''(a)|^q,|f''(b)|^q\right\}\right)^{1/q}$$

$$=\frac{(b-a)^2}{12}\left(\max\left\{|f''(a)|^q,|f''(b)|^q\right\}\right)^{1/q}$$

böylece ispat tamamlanır.

3.6. Özel Ortalamalar İçin Uygulamalar

1) Aritmetik Ortalama: $A(\alpha,\beta)=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$,

2) Logaritmik Ortalama: $L(\alpha,\beta)=\dfrac{\alpha-\beta}{\ln|\alpha|-\ln|\beta|}$, $|\alpha|\neq|\beta|$, $\alpha,\beta\neq 0$

3) Genelleştirilmiş Logaritmik Ortalama: $L_n(\alpha,\beta)=\left[\dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{(n+1)(\beta-\alpha)}\right]^{1/n}$,

$n\in\mathbf{Z}\setminus\{-1,0\}$

Şimdi reel sayıların özel ortalamalarına bazı uygulamalar vereceğiz.

Önerme 3.6.1: $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ ve $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ için

$$\left|L_n^n(a,b)-A(a^n,b^n)\right|\leq\frac{n(n-1)}{12}(b-a)^2\max\left\{|a|^{n-2},|b|^{n-2}\right\}$$

dir.

İspat: Kuazi-konveks dönüşüm olan $f(x)=x^n$, $x\in\mathbb{R}$ Teorem 3.5.3' e uygulandığında bulunabilir.

Önerme 3.6.2: $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ ve $0\notin[a,b]$ olsun. Her $p>1$ için

$$\left|L^{-1}(a,b)-A(a^{-1},b^{-1})\right|\leq\frac{(b-a)^2}{4}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{1/p}\left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+p\right)}\right)^{1/p}$$

$$\left(\max\left\{|a|^{-3q},|b|^{-3q}\right\}\right)^{1/q}$$

İspat: Kuazi-konveks dönüşüm olan $f(x)=x^{-1}$, $x\in[a,b]$ Teorem 3.5.4'e uygulanarak bulunabilir.

Önerme 3.6.3: $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ ve $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ için her $q\geq 1$ olmak üzere

$$\left|L_n^n(a,b)-A(a^n,b^n)\right|\leq\frac{n(n-1)}{12}(b-a)^2\left(\max\left\{|a|^{(n-2)q},|b|^{(n-2)q}\right\}\right)^{1/q}$$

İspat: Kuazi-konveks dönüşüm olan $f(x)=x^n$, $x \in \mathbb{R}$ Teorem 3.5.5'e uygulandığında bulunabilir.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, temel kaynak olarak H. J. Greenberg ve W. P. Pierskalla'nın 1971 yılındaki, "A review of quasi-convex functions" isimli çalışması ile M. Alomari, M. Darus ve S. S. Dragomir tarafından 2010 yılında "Tamkang Journal Of Mathematics" isimli dergisinde basılan "New Inequalities of Hermite-Hadamard Type for Functions whose Second Derivatives Absolute Values are Quasi-Convex" çalışmasından faydalandık. Bu kaynaklar çerçevesinde, literatürde var olan kuazi-konveks fonksiyonların, konveks fonksiyonlarla kıyaslanması açıklanmaya çalışıldı. Yani, konveks ve kuazi-konveks fonksiyonların benzer özelliklerini kategorize etmede aşağıdaki beş durum incelenmiştir.

1. Konveks kümelerle bağlantıları,
2. Süreklilik, sınırlılık ve diferansiyellenebilme,
3. Ekstremum değerleri,
4. Eşitsizlikler,
5. Dönüşümler.

Ayrıca, ikinci türevlerinin mutlak değeri kuazi-konveks olan Hermite-Hadamard Tipi eşitsizlikler ile ilgili bazı teoremler ve sonuçlar açıklanmıştır. Dolayısıyla, Eşitsizlik Teorisi'nin kuazi-konveks alt birimi ile çalışmak isteyen araştırmacılara Türkçe bir kaynak sağlamaktadır.

KAYNAKLAR

Alomari, M., Darus, M., Dragomir, S.S. 2010. New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are quasi-convex. Tamkang Journal of Mathematics, Vol 41, 4, 353-359.

Alomari, M., Darus, M., Kirmaci, U.S. 2010. Refinements of Hadomard-type inequalities for quasi-convex functions with aplications to trapezoidal formla and to special means. Comp. Math. Appl., 59, 225-232.

Alomari M., Darus M. 2010, Some Ostrowski type inequalities for quasi-convex functions with aplicationsto special means, PGMIA, 13, article No. 3. Preprint.

Alomari M., Darus M. 2009, On the Hadamard's inequality for log-convex functions on the coordinates, J. Ineq. Appl., Article ID 283147, 13 pages doi: 10.1155/2009/283147.

Alomari M., Darus M. 2010, On some inequalities Simpson-type via quasi-convex functions with applications, Trans. J. Math. Mech. (TJMM), 15-24.

Arrow K. J., Enthoven A.C. 1961, "Quasi-Concave Programming," Econometrica Vol 29, 779-800p.

Definetti B. 1949, "Sulla Stratificazioni Convesse," Ann. Mat. Pura. Appl. Vol 30, 173-183p.

Dragomir S. S. 1992, Two mappings in connection to Hadamard's inequalities, J. Math. Ana. Appl., 167, 49-56.

Dragomir S. S., Agarwal R. P. 1998, Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal Formula, Appl. Math. Lett., 11, 91-95.

Dragomir S. S., Cho Y. J., Kim S. S. 2000, Inequalities of Hadamard's type for Lipschitzian mapings and their aplications, J. Math. Anal. Appl., 245, 484-501.

Dragomir S. S., Pearce C. E. M. Pearce 2000, Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications, RGMIA Monographs, Victoria University. Online: http://www.staff.vu.edu.au/RGMIA/monographs/hermite_hadamard.html.

Dragomir S. S., Wang A. 1997, new inequality of Ostrowski's type in L_1 norm and applications to some special means and to some numerical quadrature rule, Tamkang J. Math., 28, 239-244.

Dragomir S. S., On some inequalities for differentiable convex functions and applications, (submitted).

Fenchel W. 1953, "Convex Cones, Sets, and Functions," Lecture Notes, Princeton University

Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. 2007, Table of integrals, series, and products, Academic Press, Elsevier Inc. 7ed.

Greenberg H. J., Pierskalla W. P. 1971, A review of quasi-convex functions, Operations Research, Vol 19, 7, 1553-1570p.

Ion D. A. 2007, Some estimates on the Hermite- Hadamard inequality through quasi-convex functions, Annals of University of Craiova Math. Comp. Sci. Ser., 34, 82-87.

Kirmaci U. S. 2004, Inequalities for differentiable mappings and applications to special means fo reals numbers to midoint Formula, Appl. Math. Comp., 147, 137-146.

Kirmaci U. S., Özdemir M. E. 2004, On some inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint Formula, Appl. Math. Comp., 153, 361-368.

Mangasarian O. L. 1969, Nonlinear Programming, Chap. 9, McGraw-Hill, New York.

Martos B. 1967, “Quasi-Convexity and Quasi-Monotonicity in Non-Linear Programming,” Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, Vol 2, 265-273p.

Nikaido H. 1954, “On von Neumann’s Minimax Theorem, Pacific J. Math. Vol 4, 65-72p.

Özdemir M. E. 2003, A theorem on mappings with bounded derivatives with applications to quadrature rules and menas, Appl. Math. Comp., 138, 425-434.

Pearce C. E. M., Pecaric 2000, Inegualities for diferentiable mappings with application to special menas and quadrature Formula, Appl. Math. Lett., 13, 51-55.

Slater M. November 1950, “Lagrange Multipliers Revisited: A Contribution to Non-Linear Programming,” Cowles Commission Discussion Paper, Math. 403.

Yang G. S., Hwang D. Y., Tseng K. L. 2004, Some ineqalities for differentiable convex and concave mappings, Appl. Math. Lett., 47, 207-216.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : SEFA BAYRAMLI

Doğum Yeri : ORDU

Yabancı Dili : İNGİLİZCE

E-mail : bayramlisefa@hotmail.com

İletişim Bilgileri: Cumhuriyet Mahallesi 1396. Sokak No:28

Bahar Kent D:5 Altınordu/ORDU

Öğrenim Durumu:

DERECE	BÖLÜM/ PROGRAM	OKUL/ ÜNİVERSİTE	YIL
Ortaöğretim	MF	ORDU LİSESİ	1997-2000
Lisans	Matematik Bölümü	İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ	2001-2006
Tezsiz Yüksek Lisans	OÖFMA PEDAGOJİK FORMASYON EĞİTİMİ	ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ	2014

İş Deneyimi:

Görev	Görev Yeri	Yıl
Matematik Öğretmeni	KÜLTÜR DERSHANESİ İSTANBUL	2005-2008
Matematik Öğretmeni	FEN BİLİMLERİ DERSHANESİ KIRKLARELİ	2009-2010
Matematik Öğretmeni	ORDU FİNAL DERGİSİ DERSHANESİ	2011-2014
Matematik Öğretmeni	ORDU ÖZEL ALTAŞ KOLEJİ	2014-