T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$(\boldsymbol{k},\boldsymbol{h})$-KONVEKS FONKSİYONLAR VE BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

ALİ KARAOĞLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2017

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Ali KARAOĞLAN tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Erhan SET danışmanlığında yürütülen "(k,h) −Konveks Fonksiyonlar ve Bazı İntegral Eşitsizlikleri Üzerine" adlı bu tez, jürimiz tarafından 08/11/2017 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Erhan SET

Başkan	:	Doç. Dr. İsa YILDIRIM Matematik Bölümü, Atatürk Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Cemal BELEN Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Erhan SET Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

08 /12 / 2017... tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ..14. /12 / 2017... tarih ve 2017.. / 553 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1923

Enstitü Müdürü
Yrd. Doç. Dr. Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza

Ali KARAOĞLAN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

$(\boldsymbol{k},\boldsymbol{h})$-KONVEKS FONKSİYONLAR VE BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

Ali KARAOĞLAN

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2017
Yüksek Lisans Tezi, 54s.

Danışman: Doç. Dr. Erhan SET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde eşitsizlikler, konveks fonksiyonlar ve kesirli integrallerin tarihsel gelişimi hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan tanımlara, teoremlere, literatürde iyi bilinen integral eşitsizliklerine ve bazı kesirli integrallere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, k-konveks küme ve (k,h)-konveks fonksiyonlar ile ilgili bazı uygulamalara, (k,h)-konveks fonksiyonlar için elde edilen integral eşitsizliklerine yer verilmiştir.

Dördüncü bölümün ilk kısmında, Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla (k,h)-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizlik, ikinci kısmında uyumlu kesirli integralleri yardımıyla (k,h)-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizlik ve üçüncü kısmında Katugampola kesirli integralleri yardımıyla (k,h)-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizlikler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: h-konveks fonksiyon, k-konveks küme, (k,h)-konveks fonksiyon, Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği, Riemann-Liouville Kesirli integralleri, uyumlu kesirli integraller, Katugampola kesirli integralleri.

ABSTRACT

ON $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{h})$-CONVEX FUNCTIONS AND SOME INTEGRAL INEQUALITIES

Ali KARAOĞLAN

Ordu University
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2017
MSc. Thesis, 54p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Erhan SET

This thesis consist of four chapters. First chapter includes informations about the historical development of inequalities, convex function and fractional integrals. In the second chapter, definitions, theorems, integral inequalities which were well known in the literature and some fractional integrals which are used thesiss another chapters are given. In the third chapter, some applications related to the k-convex set and (k, h)-convex functions, integral inequalities that obtained for (k, h)-convex functions are given.

In the fourth chapter; firstly, Hermite-Hadamard-Fejér type inequality for (k, h)-convex function via Riemann-Liouville fractional integrals, Secondly, Hermite-Hadamard-Fejér type inequality for (k, h)-convex function via conformable fractional integrals and thirdly, Hermite-Hadamard and Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for (k, h)-convex function via Katugampola fractional integrals are given.

Key Words: h-convex function, k-convex set, (k, h)-convex function, Hermite-Hadamard-Fejér inequalities, Riemann-Liouville fractional integrals, conformable fractional integrals, Katugampola fractional integrals.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca, tez konumun belirlenmesinde ve tezimin hazırlanmasında engin bilgi ve deneyimleriyle beni aydınlatan, rehberlik ve yardım eden, ilgisini ve desteğini her zaman yanımda hissettiğim değerli hocam **Sayın Doç. Dr. Erhan SET'** e en içten duygularımla sonsuz teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine, araştırma görevlilerine ve birlikte çalıştığım yüksek lisans arkadaşlarıma en samimi dileklerimle şükranlarımı sunarım.

Ayrıca tüm hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen anneme ve babama ve ayrıca çalışmam boyunca üstün sabırlarını ortaya koyan ve desteklerini hiç esirgemeyen sevgili eşim ve oğluma minnettarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER ve KISALTMALAR

$\overline{D}$	:	D Kümesinin Kapanışı
$ess\ sup$	:	Esaslı Supremum
f'	:	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
f''	:	f Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
I	:	$\mathbb{R}$'de Bir Aralık
I^0	:	I'nın İçi
$L[a,b]$	:	$[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$P(I)$	:	P- Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$Q(I)$	:	Godunova-Levin Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathbb{Z}$	:	Tam Sayılar Kümesi
Γ	:	Gamma Fonksiyonu
β	:	Beta Fonksiyonu
K_s^1	:	Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonların Sınıfı
K_s^2	:	İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$J_{a^+}^{\alpha}$	:	α. Mertebeden Sağ Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
$J_{b^-}^{\alpha}$	:	α. Mertebeden Sol Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
I_α^a	:	α. Mertebeden Sağ Uyumlu Kesirli İntegral
${}^{b}I_\alpha$	:	α. Mertebeden Sol Uyumlu Kesirli İntegral
$H_{a^+}^{\alpha}$	:	α. Mertebeden Sağ Hadamard Kesirli İntegrali
$H_{b^-}^{\alpha}$	:	α. Mertebeden Sol Hadamard Kesirli İntegrali
${}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}$	:	α. Mertebeden Sağ Katugampola Kesirli İntegrali
${}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}$	:	α. Mertebeden Sol Katugampola Kesirli İntegrali

1. GİRİŞ

Eşitsizlik, iki değerin büyüklük veya küçüklük bakımından karşılaştırılması olarak ifade edilebilir. Matematiksel eşitsizliklerin amacı değeri tam olarak bilinmeyen bazı matematiksel ifadeleri ya da fonksiyonları daha iyi bildiğimiz ifadeler veya fonksiyonlarla alttan ve üstten sınırlamak ya da bu ifade veya fonksiyonlara doğrudan sayısal sınırlar belirlemektir. Eşitsizlikler, matematiğin neredeyse tüm alanlarında önemli bir yere sahiptir. Günümüze kadar eşitsizliklerle ilgili bir çok değişik çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların ilki Hardy, Littlewood ve Pólya'nın (1934) yazdığı "Inequalities" adlı kitaptır [20]. Bu kitapta bir çok yeni eşitsizlik ve uygulama yer almaktadır. Bu alanda yazılan ikinci kitap ise 1961 yılında E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından yazılan ve adı yine "Inequalities" olan kitaptır [6]. Bu çalışma 1934-1960 yılları arasında elde edilen eşitsizliklerin değişik sonuçlarını içermektedir. Eşitsizlik alanında matematik literatürüne üçüncü temel çalışma olarak, Mitrinović'in 1970 yılında "Analytic Inequalities" adında yayınladığı kitap girmiştir [34]. Bu kitapta ise, ilk iki kitapta yazılmayan, eşitsizlikle ilgili yeni bilgiler ve konular yer almaktadır. Eşitsizlikle ilgili bu üç temel kaynağın dışında Mitrinović ve arkadaşları tarafından yazılan "Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives" [35] ve "Classical and New Inequalities in Analysis" [36], Pachpatte tarafından yazılan "Mathematical Inequalities" [41], Niculescu ve Persons tarafından yazılan "Convex Functions and Their Applications" [37] kaynakları sıralanabilir. Bu kaynaklara ek olarak, S.S. Dragomir, V. Lakshmikantham, R.P. Agarval gibi araştırmacıların bir çok kitap, makale ve monografisi eşitsizlik alanında yapılan çalışmalar arasında gösterilebilir. Eşitsizlik alanında günümüze kadar bir çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların büyük bir bölümü S.S. Dragomir ve C.E.M. Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" isimli kaynakta toplanmıştır [17]. Matematikteki eşitsizlikler genel anlamda, öz fonksiyon eşitsizlikleri, Sobolev ve spektral eşitsizlikler, konveksite eşitsizlikleri, yeniden düzenleme eşitsizlikleri, saçılma eşitsizlikleri, korelasyon eşitsizlikleri ve majorizasyon eşitsizlikleri şeklinde sınıflandırılabilir.

Eşitsizlikler ile iç içe olan diğer kavram ise konvekslik kavramıdır. Konvekslik kavramının geçmişi, Archimedes'in M.Ö.250 yılında π sabit değerini hesaplamasına kadar dayanır. Geçmişi çok eskiye dayanmasına rağmen, konvekslik ve konveks fonksiyonlar teorisi matematik literatürüne 19. yüzyılın sonlarına doğru girmiştir. Konvekslik literatürde, Hermit'in 1881'de elde ettiği bir sonucun, Mathesis adlı bir dergide 1883 yılında yayınlanmasıyla ilk olarak yerini almıştır. Bu tarihten sonra konvekslik Hadamard'ın 1893 yılındaki çalışmasında yer alsa da konveks fonksiyonların sistemli olarak çalışılması J.L.W.V. Jensen'in 1905-1906 yılları arasında yaptığı çalışma ile başlamaktadır. Jensen'in yaptığı bu çalışmadan sonra konveks fonksiyonlar teorisiyle ilgili yapılan çalışmalar hız kazanmıştır. Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler konusuna, Beckenbach ve Bellman [6] ve Mitrinović [34] kitaplarında yer vermişlerdir. Ayrıca Roberts ve Varberg [43], Pečarić ve ark.[42], Niculescu ve Persson [37] gibi birçok matematikçi konveks fonksiyonlar üzerine eşitsizlikle ilgili çok sayıda çalışma yapmışlardır. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak 1987 yılında Pečarić tarafından yazılan "Convex Functions: Inequalities" adlı kaynaktır. Konvekslik konusu günlük hayatımızda birçok alanda yer almaktadır. Bu alanlar, mühendislik, ekonomi, endüstri, fizik, veri analizi, bankacılık, tıp, sanat, iş alanları şeklinde sıralanabilir. Konveks fonksiyonların birçok uygulaması, uygulamalı matematik, matematiksel analiz, olasılık teorisi ve matematiğin diğer çeşitli alanlarında doğrudan veya dolaylı olarak yer almaktadır. Günümüzde kullandığımız bir çok önemli eşitsizlik, konveks fonksiyonların uygulamasının bir sonucudur. Bu temel eşitsizlikler arasında, Hermite'in 1881'de ifade ettiği ve bu gün Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinen eşitsizlik, bunun yanında Jensen eşitsizliğinin bir sonucu olan Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri öne çıkar. Ayrıca Fejér, Hermit'in sonuçlarını genelleyerek 1906 yılında yeni bir integral eşitsizliği elde etmiştir. Fejér'in bu çalışmasından yararlanılarak bir çok yeni çalışma matematik literatürüne kazandırılmıştır.

Konveks fonksiyonlar üzerine yapılan bir çok yeni çalışma eşitsizlik teorisinin gelişmesine katkı sağlamıştır. Bu teoriye katkı sağlayan kavramlardan diğer ikisi de kesirli türev ve kesirli integral kavramlarıdır. Bu iki kavram, "Türev ve integraller yalnızca tam sayılar için mi vardır?" sorusundan ortaya çıkmıştır. Bu soruyu 1695 yılında Marquis'de L'Hospital bir mektup aracılığıyla "$\frac{d^n y}{dx^n}$ notasyonu $n = \frac{1}{2}$ için anlamlı mıdır?" şeklinde Gattfried Wilhem Leibnitz'e sormuştur. Leibnitz ise bu soruyu "Bu bir parodoksa yol açar, lakin bir gün kesin yararlı sonuçlara ulaşacağım" şeklinde cevaplamıştır. Dolayısla L'Hospital'in bu sorusuyla kesirli türev ve kesirli integral matematikte yerine almaya başlamış oldu. 17. yüzyıldan itibaren Leibnitz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer bir çok matematikçi bu alanda oldukça önemli çalışmalar yapmışlardır. Özellikle, Liouville bu alanın duyurulması ve tanıtılmasında öncü rol oynamıştır. Bu anlamda, Liouville kesirli analiz tanımlarını teorik problemlere uygulayarak 1832'de alandaki önemli çalışmasını yapmıştır. Keyfi mertebeli türev ve integral kavramları, bilinen tam sayı yöntemlerine göre dünyadaki nesnelerin özelliklerini tanımlamakta daha geçerli ve doğru sonuçlar vermektedir. Bu durum ise kesirli integral ve türevlerin önemli bir avantajını ortaya koymaktadır. Bu türev ve integraller, akışkanlar teorisi, elektrik devreleri, elektro analitik kimya, nesnelerin değişik özelliklerinin matematiksel olarak modellenmesi gibi bir çok değişik alanda kullanılma imkanı bulmaktadır. Kesirli türev ve integral alanında kesirli operatörü N.H. Abel 1823 yılında ilk kez bir problemin çözümü için kullanmıştır. Abel'in çalışmasını, J. Liouville (1832), A.K. Gürünwald (1867), G.F.B. Riemann (1892) gibi matematikçilerin çalışmaları izlemiştir. Daha sonra, H.H. Hardy, S.Samko, H. Weyl, M. Riezs, J. Spanier, K.B. Oldham, B. Ross, K. Nishimoto, A. Kilbaş, R.L. Bagley, K.S. Miller, M. Caputo, U.N. Katugampola gibi bir çok matematikçi bu alanda önemli çalışmalar yapmıştır $[7, 10, 21, 38, 39, 45, 46, 55]$.

Bu çalışmada, değişik konveks fonksiyonlar incelenmiştir ve özellikle (k, h)-konveks fonksiyonlar üzerine yoğunlaşılmıştır. (k, h)-konveks fonksiyonları ilk olarak B. Micherda ve T. Rajba 2012 yılında yayınladıkları makalede tanımlamışlardır [33].

Bu çalışmanın ikinci bölümünde matematikteki bazı temel tanım ve teoremler ile birlikte bazı integral eşitsizlikleri verilmiştir. Üçüncü bölümde de k-konveks kümeler, (k, h)- konveks fonksiyonlar için uygulamalar ve (k, h)- konveks fonksiyonlar için elde edilen integral eşitsizlikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Riemann-Liouville ve uyumlu kesirli integralleri yardımıyla (k, h)-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer tipli integral eşitsizlikleri ve Katugampola kesirli integralleri yardımıyla (k, h)-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejer tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1 Genel Kavramlar

Bu bölümde, bu çalışmanın diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı önemli tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1.1 (**Grup**): G kümesi tanımlanan o işlemi ile birlikte (G, o) matematik yapısını oluştursun. (G, o) matematik yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu matematik yapıya grup denir.

G1) $\forall x, y \in G \Rightarrow xoy \in G$ (G kümesi o işlemine göre kapalıdır).

G2) $\forall x, y, z \in G \Rightarrow xo(yoz) = (xoy)oz$ (o işleminin birleşme özelliği vardır).

G3) $\forall x \in G$ ve $\exists e \in G \Rightarrow xoe = eox = x$ (G kümesinin o işlemine göre etkisiz elemanı vardır).

G4) $\forall x \in G$ ve $\exists e \in G \Rightarrow xoy = yox = e$ (G kümesinin her elemanının o işlemine göre bir tersi vardır).

Tanım 2.1.2 (**Yarı Grup**): G kümesi tanımlanan o işlemi ile birlikte (G, o) matematik yapısını oluştursun. (G, o) matematik yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu matematik yapıya yarı grup denir.

G1) $\forall x, y \in G \Rightarrow xoy \in G$ (G kümesi o işlemine göre kapalıdır).

G2) $\forall x, y, z \in G \Rightarrow xo(yoz) = (xoy)oz$ (o işleminin birleşme özelliği vardır).

Tanım 2.1.3 (**Abel Grubu**): (G, o) bir grup olsun. o işleminin değişme özelliği varsa (G, o) grubuna değişmeli grup veya Abel grubu denir.

Tanım 2.1.4 (**Lineer Uzay**): L boş olmayan bir küme ve F, reel veya kompleks sayılar cismi olsun.
Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.
A)L, $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur.
B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:
L1. $\alpha.x \in L$ dir (Skalerle çarpmaya göre kapalılık).
L2. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.

L3. $(\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$ dir.
L4. $(\alpha\beta).x = \alpha(\beta.x)$ dir.
L5. $1.x = x$ dir (Burada 1, F nin birim elemanıdır).

Yukarıdaki tanıma dikkat edilirse lineer uzay, L kümesi ve sırasıyla A) ve B) şartlarını sağlayan $+ : L \times L \to L$ (Toplama) ve $\cdot : F \times L \to L$ (Skalerle çarpma) dönüşümlerinden ibarettir.

Ayrıca (L3) şartındaki + sembolünün iki anlamda kullanıldığına dikkat edilmelidir. Birinci taraftaki, + işareti F deki toplamayı; ikinci taraftaki ise L deki toplamayı belirtmektedir. Aynı şekilde (L4) eşitliğinde de iki tane çarpmanın olduğuna dikkat edilmelidir.

$F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye kompleks lineer uzay adı verilir [8].

Tanım 2.1.5 F bir cisim ve V ve W, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T : V \to W$ dönüşümü,
(a) $T(u+v) = T(u) + T(v)$
(b) $T(cu) = cT(u)$
şartlarını sağlıyorsa T ye V üzerinde lineer dönüşüm denir [3].

Tanım 2.1.6 (**Lineer Alt Uzay**): L, F cismi üzerindeki bir lineer uzay ve M, L nin bir alt kümesi olsun. Her $\alpha \in F$ ve her $x, y \in M$ için

1. $x + y \in M$

2. $\alpha x \in M$

şartları sağlanıyorsa M ye L nin altuzayı denir. Bu iki şart, $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere,

$$\alpha x + \beta y \in M$$

olmasına denktir. L nin kendisi L nin bir altuzayı olarak düşünüleceği gibi L nin sıfır vektöründen ibaret olan $\{\theta\}$ cümlesi de L nin bir altuzayıdır. Çünkü $\theta + \theta = \theta \in M$ ve $\alpha\theta = \theta \in M$ dir. Bu altuzaylara aşikâr altuzaylar denir [8].

Tanım 2.1.7 (**Metrik Lineer Uzay**): X reel veya kompleks sayılar üzerinde bir lineer uzay olsun ve (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer d metriği öteleme değişmezliğine sahip yani her $x, y, a \in X$ için,

$$d(x+a, y+a) = d(x, y)$$

ise ve ayrıca (X, d) uzayında toplama ve skalerle çarpma işlemleri yani

$$(x, y) \to x + y$$

ve

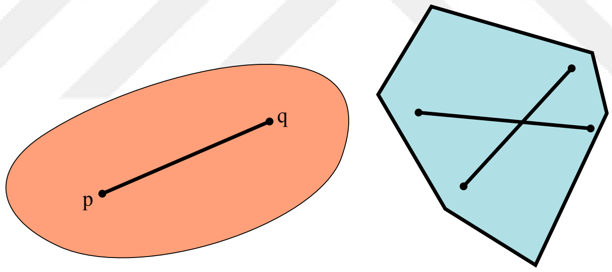
$$(\alpha, x) \to \alpha x$$

dönüşümleri sürekli ise o zaman (X, d) uzayına metrik lineer uzay denir [30].

Tanım 2.1.8 (**Konveks Küme**) L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $p, q \in A$ olmak üzere

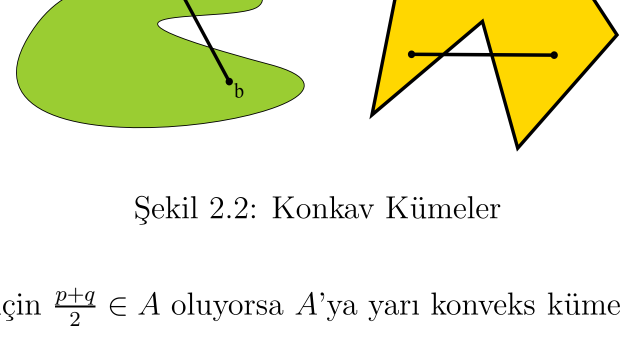
$$B = \{z \in L : z = \alpha p + (1-\alpha)q, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha p + (1-\alpha)q$ eşitliğindeki p ve q'nun katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımında $\alpha, (1-\alpha)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları p ve q olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir [8].



Şekil 2.1: Konveks Kümeler

Bir küme konveks küme değil ise bu küme konkav küme olarak ifade edilir.



Şekil 2.2: Konkav Kümeler

Ayrıca, her $p, q \in A$ için $\frac{p+q}{2} \in A$ oluyorsa A'ya yarı konveks küme denir.

Tanım 2.1.9 (**Konveks Fonksiyon**): I, $\mathbb{R}$ de bir aralık, $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere

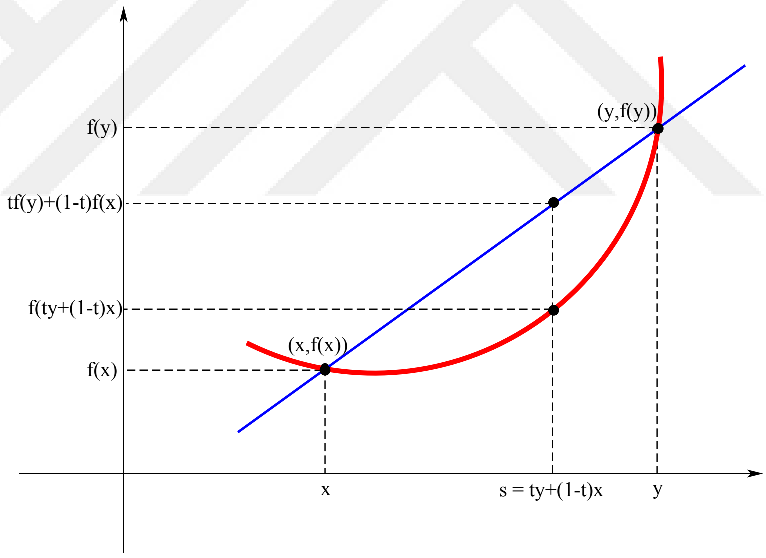
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{2.1.1}$$

eşitsizliği geçerli ise f'ye I üzerinde konveks denir [42].

Eğer $t \in [0,1]$ kapalı aralığındaki uç noktaları dışarıda bırakırsak o zaman konveks fonksiyon şartındaki $\leq$ yerine $<$ gelir yani

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$$

olur. Bu durumda bu fonksiyona kesin konveks fonksiyon denir. $-f$ konveks ise o zaman f ye konkav fonksiyon denir. Eğer f fonksiyonu hem konveks hem de konkav ise f afin dönüşüm olur.
Aşağıda (2.1.1) eşitsizliğinin geometrik yorumu verilmiştir.



Şekil 2.3: Konveks Fonksiyonun İncelenmesi

$(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarından geçen doğrunun denklemi,

$$L(s) = f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(s - x)$$

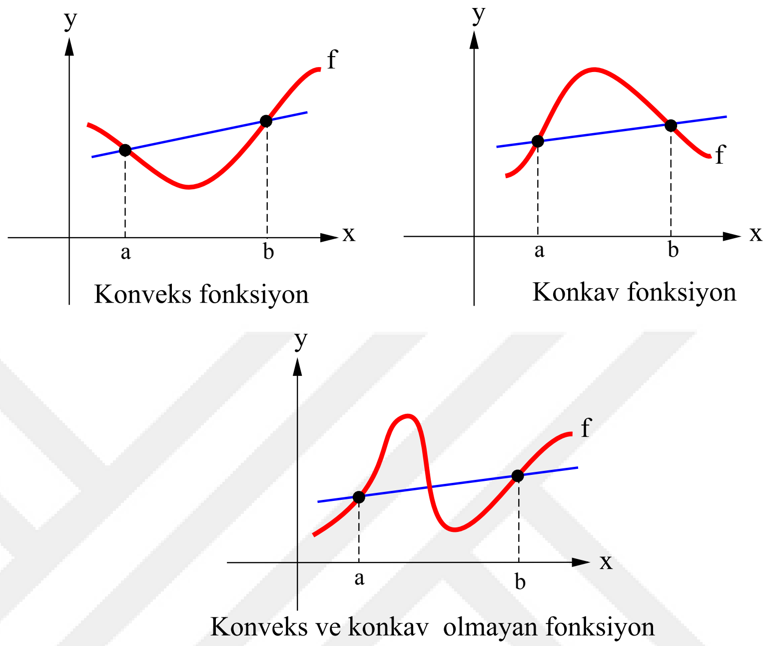
şeklinde yazılır. Burada $s = ty + (1-t)x$ yazılırsa

$$\begin{aligned} L(ty + (1-t)x) &= f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\big(t(y - x)\big) \\ &= f(x) + t\big(f(y) - f(x)\big) \\ &= tf(y) + (1-t)f(x) \end{aligned}$$

olur. $[x, y]$ aralığında; $ty + (1-t)x$ noktasında, f fonksiyonunun eğri üzerinde aldığı değerin L'nin $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerden daha küçük olduğuna dikkat edilerek,

$$f(ty + (1-t)x) \leq L(ty + (1-t)x) = tf(y) + (1-t)f(x) \qquad (2.1.2)$$

eşitsizliği elde edilir.



Şekil 2.4: Konveks veya Konveks Olmayan Fonksiyonlar

Tanım 2.1.10 (**Yıldız Biçimli (Starshaped Küme)**): S, L reel lineer uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. Her $x \in S$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için $x_0 \in S$ olmak üzere

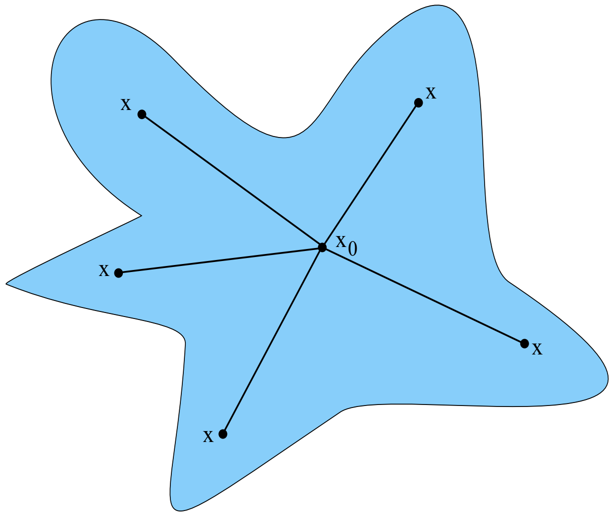
$$\lambda x + (1-\lambda)x_0 \in S$$

oluyorsa S ye x_0 a göre yıldız biçimli (starshaped) küme denir [24].

Geometrik olarak; sabit $x_0 \in S$ noktası ve her $x \in S$ için x_0 ile x noktalarını birleştiren doğru parçaları S nin içinde kalıyorsa S kümesine x_0 noktasına göre yıldız biçimli (starshaped) küme denir.

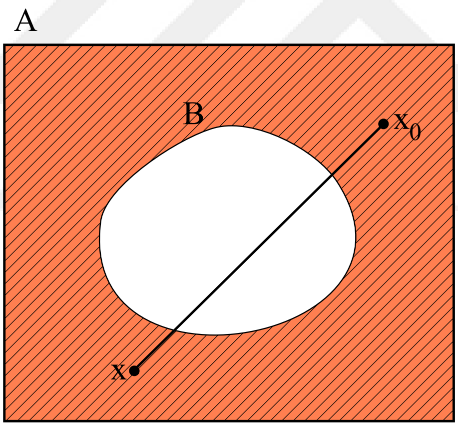
Reel lineer uzayın boş olmayan her konveks alt kümesi, elemanlarının her birine göre yıldız biçimlidir. Fakat tersine, bir x_0 noktasına göre yıldız biçimli olan reel lineer uzayın boş olmayan herhangi bir alt kümesi konveks bir küme olmayabilir.

Aşağıdaki yıldız biçimli (starshaped) kümenin öyle bir x_0 noktası vardır ki, bu x_0 noktasını kümenin tüm noktalarına birleştiren $|x_0 x|$ doğru parçalarının tamamı kümenin içinde yer almaktadır.



Şekil 2.5: Yıldız Biçimli (Starshaped) Küme

Aşağıdaki $A \setminus B$ kümesinin öyle bir x_0 noktası vardır ki, bu x_0 noktasını kümenin bazı noktalarına birleştiren $|x_0x|$ doğru parçalarının tamamı $A \setminus B$ kümesinin içinde yer almamaktadır.



Şekil 2.6: Yıldız Biçimli Olmayan (Starshaped Olmayan) $A \setminus B$ Kümesi

Tanım 2.1.11 (**Yıldız Biçimli (Starshaped Fonksiyon)**): $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in [0, b]$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(tx) \leq tf(x)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna starshaped fonksiyon denir [17].

Literatürde konveks fonksiyonlar için birçok eşitsizlik elde edilmiştir. Bu eşitsizliklerin en önemlilerinden birisi de literatürde bir çok genişletilmesi, genelleştirilmesi ve farklı versiyonları bulunan Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Hermite-Hadamard eşitsizliği aşagıdaki gibi ifade edilir.

Teorem 2.1.1 (**Hermite-Hadamard Eşitsizliği**): I, $\mathbb{R}$ de bir aralık $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.1.3}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 2.1.1'de, f'nin uygun özel seçimleri için (2.1.3) eşitsizliğinden bazı klasik eşitsizlikler elde edilebilir. Eğer f konkav ise (2.1.3) eşitsizliği yön değiştirir. Yani

$$f(\frac{a+b}{2}) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \geq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.1.4}$$

olur.

Fejér (2.1.3) eşitsizliğinin önemli bir genelleştirmesini vermiştir. Bu genelleştirme, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon ve $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ noktasına göre simetrik olan bir fonksiyon ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx \tag{2.1.5}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

Tanım 2.1.12 ($m-$**konveks Fonksiyon**): Her $x, y \in [0, b]$ ve $m, t \in [0, 1]$ olmak üzere $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f(tx + m(1-t)y) \quad \leq \quad tf(x) + m(1-t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna $m-$ konvekstir denir [17]. $-f$ fonksiyonu m-konveks ise f fonksiyonu m-konkavdır. Ayrıca $f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı m-konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir. Açıkçası Tanım 2.1.12'da $m = 1$ için standart konveks fonksiyon kavramı ve $m = 0$ için de starshaped fonksiyon kavramı elde edilir.

Teorem 2.1.2 $m \in (0, 1]$ olmak üzere $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu m-konveks fonksiyon olsun. $0 \leq a < b$ olmak üzere $f \in L[am, b]$ için

$$\frac{1}{m+1}\left[\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} f(x)dx + \frac{1}{b-ma}\int_{ma}^b f(x)dx\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

dir ([17], Teorem 196).

Tanım 2.1.13 (*J*- **Konveks Fonksiyon**): Her $x, y \in I$ olmak üzere $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{2.1.6}$$

eşitsizliği geçerli ise f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J-konveks fonksiyon denir [34].

Tanım 2.1.14 (**Kesin** *J*- **Konveks Fonksiyon**): Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ olmak üzere $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{2.1.7}$$

eşitsizliği geçerli ise f fonksiyonuna I üzerinde kesin J-konveks fonksiyon denir [34].

Sonuç 2.1.1 Her konveks fonksiyon J-konveks fonksiyondur [34].

Sonuç 2.1.2 $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun I'da konveks olması için gerek ve yeter şart, her $x, y \in I$ ve her $p, q > 0$ reel sayıları için

$$f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) \leq \frac{pf(x)+qf(y)}{p+q}$$

olmasıdır. Bu eşitsizlik (2.1.1) eşitsizliğine denktir [36].

Teorem 2.1.3 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise
a. $f, (a, b)$ aralığında süreklidir
b. $f, [a, b]$ aralığında sınırlıdır [4].

Teorem 2.1.4 f fonksiyonunun I aralığında ikinci mertebeden türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır [34].

Tanım 2.1.15 (**Artan ve Azalan Fonksiyonlar**): f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $x_1, x_2 \in I$ olsun. Bu durumda,

- $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,
- $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,
- $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,
- $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır denir [2].

Tanım 2.1.16 (**s-Orlicz Konveks Küme**): X bir lineer uzay, $K \subseteq X$ ve $s \in (0,\infty)$ olsun. $\forall x, y \in K$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ iken $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere

$$\alpha x + \beta y \in K$$

oluyorsa K kümesine X de s-Orlicz konveks küme denir [15].

Tanım 2.1.17 (**Birinci Anlamda** s**- Konveks Fonksiyon**): $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha, \beta \geq 0$ iken $\alpha^s + \beta^s = 1$ ve $\forall x, y \in [0,\infty)$ olmak üzere $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y) \tag{2.1.8}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye birinci anlamda s-Orlicz konveks fonksiyon veya birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. Birinci anlamdaki s-konveks fonksiyonların kümesini K_s^1 şeklinde gösterilir. [16, 40].

Tanım 2.1.18 (**İkinci Anlamda** s**- Konveks Fonksiyon**): $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha, \beta \geq 0$ iken $\alpha + \beta = 1$ ve $\forall x, y \in [0,\infty)$ olmak üzere

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y) \tag{2.1.9}$$

eşitsizliğini sağlayan $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna ikinci anlamda s-Breckner konveks fonksiyon veya ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. İkinci anlamdaki $s-$konveks fonksiyonların kümesini K_s^2 şeklinde gösterilir [5, 22].

Tanım 2.1.19 (**Godunova-Levin Fonksiyon**): $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda} \tag{2.1.10}$$

eşitsizliği geçerli ise f'ye bir Godunova-Levin fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfına ait bir fonksiyon denir [19].

Tanım 2.1.20 (**Alttoplamsal Fonksiyon**): $s, t \geq 0$ olmak üzere $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f(s+t) \leq f(s) + f(t) \tag{2.1.11}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye alttoplamsal (subadditive) fonksiyon denir [32, 44]. Eğer (2.1.11) eşitsizliği yön değiştirirse fonksiyon üsttoplamsal (superadditive) adını alır.

Tanım 2.1.21 (*P***-Fonksiyon**): $I \subseteq \mathbb{R}$, $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere, negatif olmayan $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq f(x) + f(y) \tag{2.1.12}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye P-fonksiyon veya $P(I)$ sınıfına ait fonksiyon denir [14].

Tanım 2.1.22 (*h***-Konveks Fonksiyon**): $h : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyon olsun. $\forall x, y \in I$ ve $t \in (0,1)$ olmak üzere $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu için

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) \tag{2.1.13}$$

eşitsizliği geçerli ise f'ye h-konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir [54].

Bu eşitsizlik yön değiştirirse, bu durumda f'ye h-konkav fonksiyon veya $SV(h, I)$ sınıfına aittir denir. Bu tanımın; $h(t) = t$ için klasik konveksliğe, $s \in (0,1)$ olmak üzere $h(t) = t^s$ için s-Breckner konveksliğe, $h(t) = 1$ için P-fonksiyonlara ve $h(t) = t^{-1}$ için Gudunova-Levin fonksiyonlarına indirgendiği açıktır.

h-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizlikleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Önerme 2.1.1 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ h-konveks fonksiyon ve $g \geq 0$ olmak üzere $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)dt \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 h(t)g(ta + (1-t)b)dt \tag{2.1.14}$$

olur [9].

Önerme 2.1.2 h fonksiyonu, $\big[0, max\{1, b-a\}\big]$'da tanımlansın ve $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ h-konveks fonksiyon olsun. Ayrıca, $g \geq 0$ olmak üzere $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik ve $\int_a^b g(t)dt > 0$ olsun. Bu durumda, $C = \dfrac{2h(1/2)}{\int_a^b g(t)dt}$ olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq C \int_a^b f(t)g(t)dt \tag{2.1.15}$$

olur [9].

Sarıkaya ve arkadaşları h-konveks fonksiyonlar için Fejér eşitsizliklerinin farklı versiyonunu aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

Önerme 2.1.3 $h(1/2) > 0$ için $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ h-konveks ve integrallenebilir olsun. $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu negatif olmayan, integrallenebilir ve $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik kabul edelim. Bu durumda, her $t \in (0,1)$ için

$$\frac{1}{2h(1/2)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\big[h(t)+h(1-t)\big] \int_a^b g(x)dx \tag{2.1.16}$$

olur [47].

Teorem 2.1.5 (**Jensen Eşitsizliği**): f fonksiyonu (a,b) aralığında konveks ve $x_i \in (a,b)$, $i = 1,2,...,n$ olsun. Bu durumda, $\alpha_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ise

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

eşitsizliği geçerlidir [41].

Teorem 2.1.6 (**İntegraller için Jensen Eşitsizliği**): $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon, $h : [a,b] \to (0,\infty)$ ve $u : [a,b] \to \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$f\left(\frac{\int_a^b h(t)u(t)dt}{\int_a^b h(t)dt}\right) \leq \frac{\int_a^b h(t)f(u(t))dt}{\int_a^b h(t)dt}$$

eşitsizliği geçerlidir [41].

Teorem 2.1.7 (**Üçgen Eşitsizliği**): Herhangi x, y reel sayıları için

$$|x+y| \leq |x| + |y|,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|,$$

$$\big||x| - |y| \leq |x+y|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + ... + x_n| \leq |x_1| + ... + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir [36].

Teorem 2.1.8 (**İntegraller için Üçgen Eşitsizliği**): f, $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx \; (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir [36].

Tanım 2.1.23 (Gamma Fonksiyonu): Gamma fonksiyonu $\Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$ için

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanır. Bu integral $\alpha > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonunun en önemli ve kullanışlı özelliklerinden biri $\alpha = n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$$

olmasıdır.

Tanım 2.1.24 (Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri): $f \in L[a,b]$ olsun. $\alpha > 0$ ve $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ reel eksen üzerinde sonlu bir aralık olmak üzere α. mertebeden sağ ve sol Riemann-Liouville kesirli integralleri sırasıyla,

$$J_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a$$

ve

$$J_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $\alpha = 0$ için $J_{a^+}^0 f(x) = J_{b^-}^0 f(x) = f(x)$ olarak tanımlanır [29].

Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin ve kesirli integrallerin geniş uygulamalarından dolayı bir çok araştırmacı, çalışmalarını kesirli integralleri içeren Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklere genişletmiştir. Son zamanlarda fonksiyonların farklı sınıfları için kesirli integralleri içeren bir çok Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik elde edilmiştir [13, 48–51, 53].

Riemann-Liouville kesirli integralleri ile ilgili bazı önemli sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.1.9 $0 \leq a < b$ ve $f \in L[a,b]$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitif tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer f, $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde konveks bir fonksiyon ise $\alpha > 0$ olması durumunda kesirli integrallar için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} \left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.1.17}$$

eşitsizliği geçerlidir [48].

Lemma 2.1.1 $a < b$ olmak üzere $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir ve $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik ise, bu durumda $\alpha > 0$ için

$$J_{a^+}^{\alpha} g(b) = J_{b^-}^{\alpha} g(a) = \frac{1}{2}\left[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a)\right]$$

olur [23].

Teorem 2.1.10 $a < b$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve $f \in L[a, b]$ olsun. $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $(a + b)/2$ noktasına göre simetrik olan bir fonksiyon ise bu durumda $\alpha > 0$ olmak üzere kesirli integraller için aşağıdaki

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\Big[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a)\Big] &\leq \Big[J_{a^+}^{\alpha} fg(b) + J_{b^-}^{\alpha} fg(a)\Big] \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\Big[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a)\Big] \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

eşitsizlikleri geçerli olur [23].

Tanım 2.1.25 (Uyumlu Kesirli İntegralleri): $n = 0, 1, 2, 3, ...$ olmak üzere $\alpha \in (n, n + 1]$, $\beta = \alpha - n$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve $f \in L[a, b]$ olsun. $\alpha > 0$ için α. mertebeden sağ ve sol uyumlu kesirli integralleri sırasıyla,

$$\big(I_{\alpha}^{a} f\big)(t) = \frac{1}{n!}\int_a^t (t-x)^n (x-a)^{\beta-1} f(x)dx,\ t > a$$

ve

$$\big({}^{b}I_{\alpha} f\big)(t) = \frac{1}{n!}\int_t^b (x-t)^n (b-x)^{\beta-1} f(x)dx,\ t < b$$

şeklinde tanımlanır [1, 28].

Eğer $\alpha = n + 1$ alınırsa bu durumda $\beta = \alpha - n = n + 1 - n = 1$ olur. Böylece $\big(I_{\alpha}^{a} f\big)(t) = J_{a^+}^{\alpha} f(t)$ ve $\big({}^{b}I_{\alpha} f\big)(t) = J_{b^-}^{\alpha} f(t)$ olduğu görülür.

Uyumlu kesirli integraller için bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Lemma 2.1.2 $a < b$ olmak üzere $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir ve $(a + b)/2$ noktasına göre simetrik ise $\alpha \in (n, n + 1], n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$I_{\alpha}^{a}(g)(b) = {}^{b}I_{\alpha}(g)(a) = \frac{1}{2}\Big[I_{\alpha}^{a}(g)(b) + \big({}^{b}I_{\alpha}(g)(a)\Big]$$

olur [52].

Teorem 2.1.11 $a < b$ ve $f \in L[a, b]$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $(a + b)/2$ noktasına göre simetrik ise $\alpha \in (n, n + 1]$ olmak üzere uyumlu kesirli integraller için

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\big[I_{\alpha}^{a}(g)(b) + {}^{b}I_{\alpha}(g)(a)\big] &\leq \big[I_{\alpha}^{a}(fg)(b) + {}^{b}I_{\alpha}(fg)(a)\big] \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\big[I_{\alpha}^{a}(g)(b) + {}^{b}I_{\alpha}(g)(a)\big] \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

eşitsizlikleri sağlanır [52].

Tanım 2.1.26 (Hadamard Kesirli İntegralleri): $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n-1 < \alpha \leq n$ ve $a < x < b$ olsun. Bir f fonksiyonu için α. mertebeden sağ ve sol Hadamard kesirli integralleri sırasıyla,

$$H_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt \tag{2.1.20}$$

ve

$$H_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \left(\ln \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt$$

şeklinde tanımlanır [46].

Son zamanlarda, Katugampola, Riemann-Liouville ve Hadamard kesirli integrallerinin tek bir formda genelleştirilmesi olan yeni bir kesirli integral operatörü tanımlamıştır [25, 26].

Tanım 2.1.27 E, ölçülebilir bir küme ve $f(x)$ de bu E kümesinde tanımlı ve gerçel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her K gerçel sayısı için, $f(x) > K$ olan $x \in E$ değerlerinin kümesi ölçülebilirse, f fonksiyonu E kümesinde Lebesgue anlamında ölçülebilirdir veya kısaca ölçülebilirdir denilir [12].

Bu tanımı vermeden önce ağırlıklı L_p uzayına ihtiyaç duyulur.
f, $[a, b]$ aralığında Lebesgue anlamında ölçülebilir kompleks değerli bir fonksiyon, $c \in \mathbb{R}$ ve $1 \leq p \leq \infty$) olmak üzere $X_c^p(a, b)$ uzayı

$$X_c^p(a, b) = \{f \mid \|f\|_{X_c^p} < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $1 \leq p < \infty$ için

$$\|f\|_{X_c^p} = \left(\int_a^b |t^c f(t)|^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|f\|_{X_c^\infty} = ess \sup\{t^c |f(t)| : a \leq t \leq b\}$$

biçimindedir. Özel olarak $c = \frac{1}{p}$ olduğunda $X_c^p(a, b)$ uzayı $L_p(a, b)$ uzayı ile çakışır. Yani $X_{\frac{1}{p}}^p(a, b) = L_p(a, b)$'dir.

Tanım 2.1.28 (Katugampola Kesirli İntegralleri): $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sonlu bir aralık ve $a < x < b$, $\rho > 0$ olmak üzere $f \in X_c^p(a, b)$ olsun. $\alpha > 0$ olmak üzere α. mertebeden sağ ve sol Katugampola kesirli integralleri sırasıyla,

$${}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{t^{\rho-1}}{[x^\rho - t^\rho]^{1-\alpha}} f(t) dt \ \text{ ve } \ {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{t^{\rho-1}}{[t^\rho - x^\rho]^{1-\alpha}} f(t) dt$$

şeklinde tanımlanır [27].

Katugampola Kesirli integralleri ile ilgili bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.1.12 $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olsun. Bu durumda $x > a$ için

1. $\lim\limits_{\rho\to 1} {}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}f(x) = J^{\alpha}_{a^+}f(x)$,

2. $\lim\limits_{\rho\to 0^+} {}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}f(x) = H^{\alpha}_{a^+}f(x)$

olur [27].

Benzer sonuçlar sol taraflı operatörler için de geçerlidir.

[11]'de, Chen ve Katugampola, Katugampola kesirli integralleri için Hermite-Hadamard eşitsizliklerini aşağıdaki gibi elde etmiştir.

Teorem 2.1.13 $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olsun. $0 \leq a < b$ ve $f \in X^p_c(a^\rho, b^\rho)$ olmak üzere $f : [a^\rho, b^\rho] \to \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer f $[a, b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon ise bu durumda,

$$f\left(\frac{a^\rho + b^\rho}{2}\right) \leq \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{2(b^\rho - a^\rho)^\alpha}\left[{}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}f(b^\rho) + {}^{\rho}I^{\alpha}_{b^-}f(a^\rho)\right] \leq \frac{f(a^\rho) + f(b^\rho)}{2} \tag{2.1.21}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [11].
Bu eşitsizliklerde kesirli integraller $f(x^\rho)$ fonksiyonu için ele alınmıştır ve sırasıyla a ve b'ye göre değerlendirilmiştir.

Tanım 2.1.29 $0 < a < b < \infty$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$F(x) := f(x) + f(a + b - x)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $[a, b]$ aralığında f konveks ise F ninde konveks olduğunu göstermek kolaydır. F fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $\frac{a+b}{2}$ noktasına göre F simetrik,

2. $F(a) = F(b) = f(a) + f(b)$,

3. $F(\frac{a+b}{2}) = 2f(\frac{a+b}{2})$ dir.

Teorem 2.1.14 f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks fonksiyon ve $f \in L[a,b]$ olsun. Bu durumda, $F(x)$ fonksiyonu da integrallenebilir ve $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olmak üzere

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{2(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left[{}^{\rho}I^{\alpha}_{a^{+}}F(b) + {}^{\rho}I^{\alpha}_{b^{-}}F(a)\right] \leq \frac{F(a)+F(b)}{2} \tag{2.1.22}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [11].

Chen ve Katugampola, (2.1.21)-(2.1.22) eşitsizliklerinin genelleştirilmesini aşağıdaki gibi vermişdir.

Teorem 2.1.15 $a < b$ ve $f \in L[a,b]$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. Bu durumda $F \in L[a,b]$ ve $F(x)$ konveks bir fonksiyondur. Eğer $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan ve integrallenebilir bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} F\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[{}^{\rho}I^{\alpha}_{a^{+}}g(b) + {}^{\rho}I^{\alpha}_{b^{-}}g(a)\right] &\leq \left[{}^{\rho}I^{\alpha}_{a^{+}}(gF)(b) + {}^{\rho}I^{\alpha}_{b^{-}}(gF)(a)\right] \\ &\leq \frac{F(a)+F(b)}{2}\left[{}^{\rho}I^{\alpha}_{a^{+}}g(b) + {}^{\rho}I^{\alpha}_{b^{-}}g(a)\right] \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [11].

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 k-Konveks Küme ve k-Konveks Kümelerin Bazı Sınıfları için Uygulamalar

Tanım 3.1.1 (k-Konveks Küme): $k:(0,1)\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda, $\forall x,y\in D$ ve $t\in(0,1)$ için

$$k(t)x+k(1-t)y\in D \tag{3.1.1}$$

ise X reel lineer uzayının alt kümesi olan D'ye k-konveks küme denir [33].

Yukarıdaki tanım bize, uygun olarak seçilen k fonksiyonları için, iyi bilinen kümelerin çeşitli sınıflarının üretilebileceğini belirtir. Bu durum örnek (3.1.1)'de gösterilmiştir.

Örnek 3.1.1 **i.** k-konveksliğin tanımı $k(t)=t$ için klasik konveksliğin tanımıyla örtüşür.

ii. Her t için $k(t)=1$ ise bu durumda, D'nin k-konveks olması için gerek ve yeter şart, $(D,+)$'nın yarı grup olmasıdır.

iii. k-konveksliğin tanımı, $k(t)=1/2$ için, X'in tüm yarı konveks alt kümelerinin ailesini üretir.

iv. k fonksiyonu

$$k(t)=\begin{cases}2t, & t<1/2 \text{ için}\\ 0, & t\geq 1/2 \text{ için}\end{cases} \tag{3.1.2}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, D'nin k-konveks küme olması için gerek ve yeter şart D'nin 0'a göre starshaped olmasıdır, yani; her $t\in[0,1]$ ve $x\in D$ için $tx\in D$ olmasıdır [33].

İspat.

i. D kümesi k- konveks ise her $x,y\in D$ için

$$k(t)x+k(1-t)y\in D$$

olur. Bu ifadede $k(t)=t$ olarak alınırsa

$$tx+(1-t)y\in D$$

olur.

ii. $\forall t \in (0,1)$ için $k(t) = 1$ olsun. D, k-konveks küme ise o zaman $x+y \in D$ olacağından D kümesi $+$ işlemine göre kapalıdır. Ayrıca $D \subset X$ olduğundan birleşme özelliğide sağlanır. O halde $(D,+)$ yarı gruptur. Tersine $(D,+)$ yarı grup olsun. Bu durumda $\forall x, y \in D$ için

$$k(t)x + k(1-t)y = x + y \in D$$

olur. Yani D, k-konvekstir.

iii. D kümesi k-konveks ise her $x, y \in D$ için

$$k(t)x + k(1-t)y \in D$$

olur. Bu ifadede $k(t) = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{x+y}{2} \in D$$

olur. Dolayısıyla D kümesi yarı konveks olur.

iv. t, $[0,1]$ aralığında $k(t)$ fonksiyonuna bağlı olarak $\frac{1}{2}$'ye göre incelenirse,

$$0 \leq t < \frac{1}{2} \Longrightarrow 0 \leq \frac{t}{2} < \frac{1}{4} \Longrightarrow k(\frac{t}{2}) = 2\frac{t}{2} = t$$

ve

$$0 \leq t < \frac{1}{2} \Longrightarrow 0 \leq \frac{t}{2} < \frac{1}{4} \Longrightarrow 0 \geq -\frac{t}{2} > -\frac{1}{4} \Longrightarrow 1 \geq 1 - \frac{t}{2} > \frac{3}{4} \Longrightarrow k(1 - \frac{t}{2}) = 0$$

olur. Dolayısıyla $0 \leq t < \frac{1}{2}$ için

$$k(\frac{t}{2}) + k(1 - \frac{t}{2}) = t$$

olur.

Diğer taraftan,

$$\frac{1}{2} \leq t < 1 \Longrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{t}{2} < \frac{1}{2} \Longrightarrow k(\frac{t}{2}) = 2\frac{t}{2} = t$$

ve

$$\frac{1}{2} \leq t < 1 \Longrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{t}{2} < \frac{1}{2} \Longrightarrow -\frac{1}{4} \geq -\frac{t}{2} > -\frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{3}{4} \geq 1 - \frac{t}{2} > \frac{1}{2} \Longrightarrow k(1 - \frac{t}{2}) = 0$$

olur. Dolayısıyla $\frac{1}{2} \leq t < 1$ için

$$k(\frac{t}{2}) + k(1 - \frac{t}{2}) = t$$

olur. D kümesi k-konveks ise, her $x, y \in D$ için

$$k(t)x + k(1-t)y \in D$$

olur. Buradan $t \in [0,1)$ ve her $x \in D$ için

$$tx = \underbrace{[\overbrace{k(\frac{t}{2})}^{t} + \overbrace{k(1-\frac{t}{2})}^{0}]}_{t}\, x = k(\frac{t}{2})x + k(1-\frac{t}{2})x \in D$$

olur.

Ayrıca, $t = 1$ ve her $x \in D$ için

$$tx = x \in D$$

dir. Dolayısıyla D kümesi starshaped kümedir. Benzer şekilde tersine olarak D kümesi starshaped küme iken D'nin k-konveks küme olduğuda kolayca görülür.

Sonuç 3.1.1 **i.** X'de, C ve D herhangi iki k-konveks küme olmak üzere, her $\alpha \in \mathbb{R}$ için C+D ve αD kümeleri de k-konvekstir.

ii. I herhangi bir indis kümesi olmak üzere $\forall i \in I$ için D_i kümeleri k-konveks küme ise $\bigcap_{i \in I} D_i$ kesişim kümesi de k-konvekstir.

iii. Tüm $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset ...$ kümeleri k-konveks ise, onların birleşimi olan $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_i$ kümesi de k-konvekstir.

iv. X'in metrik lineer uzay olduduğunu kabul edersek, $D \subset X$ kümesi k-konveks kümedir. Bu durumda D nin kapanışı olan $\overline{D}$ kümeside k-konvekstir [33].

İspat.

i. $C + D = \{x, y \in X,\ x = x_1 + x_2,\ y = y_1 + y_2,\ x_1, y_1 \in C,\ x_2, y_2 \in D\}$ olsun.
$\forall x, y \in C + D$ için

$$\begin{aligned} k(t)x + k(1-t)y &= k(t)(x_1 + x_2)k(1-t)(y_1 + y_2) \\ &= k(t)x_1 + k(t)x_2 + k(1-t)y_1 + k(1-t)y_2 \\ &= \underbrace{k(t)x_1 + k(1-t)y_1}_{\in C} + \underbrace{k(t)x_2 + +k(1-t)y_2}_{\in D} \in C + D \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $C + D$ kümesi k-konveks olur.

$\alpha D = \{x, y \in X,\ x = \alpha x_1,\ y = \alpha y_1,\ \alpha x_1, \alpha y_1 \in D\}$ olsun.

$\forall x, y \in \alpha D$ için

$$\begin{aligned} k(t)x + k(1-t)y &= k(t)\alpha x_1 + k(1-t)\alpha y_1 \\ &= \alpha[\underbrace{k(t)x_1 + k(1-t)y_1}_{\in D}] \in \alpha D \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla αD kümesi k-konvekstir.

ii. $x, y \in \bigcap_{i\in I} D_i$, $t \in (0,1)$ ve $k:(0,1) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda eğer $x, y \in \bigcap_{i\in I} D_i$ ise $\forall i \in I$ için $x \in D_i$ ve $y \in D_i$ dir. Böylece $\forall i \in I$ için D_i kümeleri k-konveks olduğundan

$$k(t)x + k(1-t)y \in D_i$$

ve dolayısıyla

$$k(t)x + k(1-t)y \in \bigcap_{i\in I} D_i$$

olur ki buda $\bigcap_{i\in I} D_i$ kesişim kümesinin k-konveks olduğunu gösterir.

iii. $x, y \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i$ ve $t \in [0,1]$, $k:(0,1) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall i \in \mathbb{N}$ için $D_i \subset D_{i+1}$ olduğundan $\exists i \in \mathbb{N}$ için $x, y \in D_i$ olacağından ve $\forall i \in \mathbb{N}$ için D_i'ler k-konveks olduğundan

$$k(t)x + k(1-t)y \in D_i$$

olur. Dolayısıyla

$$k(t)x + k(1-t)y \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i$$

olur ki buda $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i$ nin k-konveks olduğunu gösterir.

iv. $a \in \overline{D} \Leftrightarrow a_n \to a$ olacak şekilde terimleri D kümesine ait olan bir (a_n) dizisinin mevcut olduğunu biliyoruz. Bunu kullanarak $\overline{D}$ nın $k-$konveks olduğunu gösterelim.

$\forall x, y \in \overline{D}$ olsun. $k(t)x + k(1-t)y \in \overline{D}$ olduğunu veya denk olarak $a_n \to k(t)x + k(1-t)y$ olacak şekilde bir (a_n) dizisinin varlığını göstermeliyiz.

$\forall x, y \in \overline{D}$ olduğundan $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ olacak biçimde $(x_n), (y_n) \in D$ dizileri vardır.

$\forall n$ için $x_n, y_n \in D$ olduğundan ve D kümesi $k-$konveks olduğundan $\forall n$ için,

$$k(t)x_n + k(1-t)y_n \in D$$

olur.

$a_n = k(t)x_n + k(1-t)y_n$ dersek $(a_n) \in D$ için

$$\lim_{n\to\infty} a_n = k(t)x_n + k(1-t)y_n$$

olur ki bu $\overline{D}$ nin $k-$ konveks olduğunu gösterir.

3.2 (k,h)-Konveks Fonksiyon ve (k,h)-Konveks Fonksiyonların Bazı Sınıfları için Uygulamalar

Tanım 3.2.1 $\big($**(k,h)-Konveks Fonksiyon**$\big)$: $k,h:(0,1)\to\mathbb{R}$ verilen iki fonksiyon ve $D\subset X$ kümesi de k-konveks küme olsun. Her $x,y\in D$ ve $t\in(0,1)$ olmak üzere $f:D\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f(k(t)x+k(1-t)y)\leq h(t)f(x)+h(1-t)f(y) \tag{3.2.1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f'ye (k,h)-konveks fonksiyon denir [33].

Eğer (3.2.1) eşitsizliği uygun eşitliğe dönüştürülebilirse, f fonksiyonu (k,h)-afin fonksiyon olarak adlandırılır (Bu tip genel fonksiyonlarla ilgili daha fazla ayrıntı [31]'de yer almaktadır).

Uygun h ve k fonksiyonları için (3.2.1) eşitsizliği, konveks, Jensen-konveks, h-konveks, s-Orlicz konveks, s-Breckner konveks, Godunova-Levin, yıldızımsı (starshaped) fonksiyonlar ile P-fonksiyonların ve alttoplamsal (subadditive) dönüşümlerin ailesini üretir. Bu durum örnek (3.2.1)'de gösterilmiştir.

Örnek 3.2.1 **i.** $k(t)=t$ için, (k,h)-konvekslik kavramı (2.1.13)'de verilen h-konvekslikle örtüşmektedir (Negatif olmama şartı olmaksızın).
Uygun h fonksiyonları için eşitsizlik (3.2.1), konveks fonksiyonların, s-Breckner konveks fonksiyonların, P-fonksiyonların ve Godunova-Levin fonksiyonların ailesini üretir.

ii. $s>0,\ k(t)=t^{\frac{1}{s}}$ ve $h(t)=t$ ise, bu durumda; f'nin (k,h)-konveks olması için gerek ve yeter şart, f'nin s-Orlicz konveks olmasıdır.

iii. $k(t)=h(t)=1$ ise, (k,h)-konveks fonksiyonların sınıfı alttoplamsal tüm dönüşümleri kapsamaktadır.

iv. Her t için, $k(t)=h(t)=1/2$ ise, (3.2.1) eşitsizliği, Jensen-konveks fonksiyonların ailesini verir.

v. k fonksiyonu,

$$k(t)=\begin{cases}2t, & t<1/2 \text{ için}\\ 0, & t\geq 1/2 \text{ için}\end{cases} \tag{3.2.2}$$

şeklinde tanımlansın. O halde, k fonksiyonunun (k,k)-konveks fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul k'nın starshaped olmasıdır, yani her $t \in [0,1]$ ve $\forall x \in D$ için $f(tx) \leq tf(x)$ olmasıdır [33].

İspat.

i. f fonksiyonu (k,h)-konveks fonksiyon olduğundan,

$$f(k(t)x + k(1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y)$$

yazılır. Bu eşitsizlikte, $k(t) = t$ olarak alınırsa, eşitsizlik

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y)$$

şekline dönüşür. Buda f'nin (k,h)-konvekslikten h-konveksliğe dönüştüğünü gösterir. Aynı şekilde (3.2.1) eşitsizliğinde $k(t) = t$, $h(t) = t$, değerleri yerine yazılırsa, eşitsizlik

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

şekline dönüşür. Buda f'nin (k,h)'konvekslikten klasik konveksliğe dönüştüğünü gösterir. Bunun yanında, (3.2.1) eşitsizliği $k(t) = t$ ve $h(t) = t^s$ için s-Brecner konveks fonksiyonların ailesini, $k(t) = t$ ve $h(t) = 1$ için P-fonksiyonların ailesini ve $k(t) = t$ ve $h(t) = \frac{1}{t}$ için Godunova-Levin fonksiyonların ailesini üretir.

ii. f fonksiyonu (k,h)-konveks fonksiyon ise

$$f(k(t)x + k(1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y)$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlikte, $s > 0$ için $k(t) = t^{\frac{1}{s}}$ ve $h(t) = t$ yazılırsa, eşitsizlik

$$f(t^{\frac{1}{s}}x + (1-t)^{\frac{1}{s}}y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

eşitsizliğine dönüşür $\left((t^{\frac{1}{s}})^s + ((1-t)^{\frac{1}{s}})^s = t + 1 - t = 1\right)$. Bu da f fonksiyonunun s-Orlicz konveks fonksiyona dönüştüğünü gösterir. Bunun terside benzer şekilde gösterilebilir.

iii. f fonksiyonu (k,h)-konveks fonksiyon ise

$$f(k(t)x + k(1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y)$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlikte, $k(t) = h(t) = 1$ yazılırsa, eşitsizlik

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu da f'nin subadditive (alt toplamsal) fonksiyona dönüştüğünü gösterir. Bu nedenle (k,h)-konveks fonksiyonların sınıfı alt toplamsal tüm dönüşümleri kapsar.

iv. $f(k(t)x + k(1-t)y) \le h(t)f(x) + h(1-t)f(y)$ eşitsizliğinde $k(t) = h(t) = \frac{1}{2}$ yazılırsa, eşitsizlik

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu da f'nin (k,h)-konvekslikten Jensen-Konveksliğe dönüştüğünü gösterir. Dolayısıyla (3.2.1) eşitsizliği Jensen-Konveks fonksiyonların ailesini üretir.

v. t, $[0,1)$ aralığında $k(t)$ fonksiyonuna bağlı olarak $\frac{1}{2}$ ye göre incelenirse,

$$0 \le t < \frac{1}{2} \Longrightarrow 0 \le \frac{t}{2} < \frac{1}{4} \Longrightarrow k(\frac{t}{2}) = 2\frac{t}{2} = t$$

ve

$$0 \le t < \frac{1}{2} \Longrightarrow 0 \le \frac{t}{2} < \frac{1}{4} \Longrightarrow 0 \ge -\frac{t}{2} > -\frac{1}{4} \Longrightarrow 1 \ge 1 - \frac{t}{2} > \frac{3}{4} \Longrightarrow k(1-\frac{t}{2}) = 0$$

olur. Dolayısıyla, $x \in D$ ve f fonksiyonu (k,k)-konveks fonksiyon olmak üzere $0 \le t < \frac{1}{2}$ için

$$f(tx) = f\left(\underbrace{k(\frac{t}{2})}_{t}x + \underbrace{k(1-\frac{t}{2})}_{0}y\right) \le \underbrace{k(\frac{t}{2})}_{t}f(x) + \underbrace{k(1-\frac{t}{2})}_{0}f(y) = tf(x)$$

olur. Bu nedenle $0 \le t < \frac{1}{2}$ için f fonksiyonu starshaped fonksiyon olur.
Diğer taraftan,

$$\frac{1}{2} \le t < 1 \Longrightarrow \frac{1}{4} \le \frac{t}{2} < \frac{1}{2} \Longrightarrow k(\frac{t}{2}) = 2\frac{t}{2} = t$$

ve

$$\frac{1}{2} \le t < 1 \Longrightarrow \frac{1}{4} \le \frac{t}{2} < \frac{1}{2} \Longrightarrow -\frac{1}{4} \ge -\frac{t}{2} > -\frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{3}{4} \ge 1-\frac{t}{2} > \frac{1}{2} \Longrightarrow k(1-\frac{t}{2}) = 0$$

olur. Dolayısıyla, $x \in D$ ve f fonksiyonu (k,k)-konveks fonksiyon olmak üzere $\frac{1}{2} \le t < 1$ için

$$f(tx) = f\left(\underbrace{k(\frac{t}{2})}_{t}x + \underbrace{k(1-\frac{t}{2})}_{0}y\right) \le \underbrace{k(\frac{t}{2})}_{t}f(x) + \underbrace{k(1-\frac{t}{2})}_{0}f(y) = tf(x)$$

olur. Bu nedenle $\frac{1}{2} \leq t < 1$ için f fonksiyonu starshaped fonksiyon olur.

Ayrıca,

$$t = 1 > \frac{1}{2} \Longrightarrow k(t) = k(1) = 0$$

ve

$$t = 1 \Longrightarrow -t = -1 \Longrightarrow 1 - t = 0 < \frac{1}{2} \Longrightarrow k(1-t) = 2(1-t)$$

olur. Dolayısıyla, $t = 1$ için

$$\begin{aligned} f(2(1-t)y) = f\left(\underbrace{k(t)}_{0} x + \underbrace{k(1-t)}_{2(1-t)} y\right) &\leq \underbrace{k(t)}_{0} f(x) + \underbrace{k(1-t)}_{2(1-t)} f(y) \\ &= 2(1-t)f(y) \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle $t = 1$ içinde f fonksiyonu starshaped fonksiyon olur. Benzer şekilde tersine olarak k fonksiyonu starshaped fonksiyon iken k'nın (k, k)-konveks fonksiyon olduğuda kolayca görülür.

Diğer yandan, f fonksiyonu starshaped ise bu durumda, $h = k$ ve her t için (3.2.1) eşitsizliğini ele alırsak,

$$f(k(t)x) + k(1-t)y) = \begin{cases} f(2tx) \leq 2tf(x), & t \in (0, 1/2) \text{ için} \\ f(0) \leq 0, & t = 1/2 \text{ için} \\ f\left((2-2t)y\right) \leq (2-2t)f(y), & t \in (1/2, 1) \text{ için} \end{cases}$$

elde ederiz.

Konveks fonksiyonların iyi bilinen bir çok özelliği (k, h)-konveks dönüşüme benzer şekilde uygulanabilir.

Sonuç 3.2.1 **i.** $f, g : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonları (k, h)-konveks fonksiyon ve $c \geq 0$ ise bu durumda, $f + g$, $c.f$'de (k, h)-konvekstir.

ii. $h \geq 0$ ve I herhangi bir indis kümesi olmak üzere $\{f_i\}_{i \in I}$, D üzerinde tanımlı (k, h)-konveks fonksiyonların bir ailesi olsun. Bu durumda $\forall x, y \in D$ ve $t \in (0, 1)$ için

$$f = \sup_{i \in I} f_i$$

fonksiyonu da sonlu olduğu küme üzerinde (k, h)-konveks fonksiyondur.

iii. $h(t) = t$ olmak üzere, f bir (k, h)-konveks fonksiyon olsun ve

$$f^c = \{x \in D : f(x) \leq c\}$$

alt kümesi tanımlansın. Bu durumda, her $c \in \mathbb{R}$ için f^c bir k-konveks kümedir.

iv. $k \geq 0$ için f bir (k,k)-konveks fonksiyon ise, bu durumda, f'nin epigrafı yani epi$f = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : x \in D, y \geq f(x)\}$ kümesi k-konvekstir.

v. f'nin epigrafını k-konveks olarak kabul edelim. Bu durumda f bir (k,k)-konveks fonksiyondur.

vi. D, X'in k-konveks altkümesi ve $f : D \to \mathbb{R}$ bir (k,h)-afin fonksiyon ise, bu durumda, f'nin görüntüsü $f(D)$'nin $\mathbb{R}$'de h-konveks olduğu kolayca gösterilebilr.

vii. $f_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun (k,h)-konveks, $f_2 : D_2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun (h,h)-konveks ve azalmayan ve $f_1(D_1) \subset D_2$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $f = f_2 \circ f_1$ bir (k,h)-konveks fonksiyondur [33].

İspat.

i. $f(x) + g(x) = m(x)$ olsun.

$$\begin{aligned} m\big(k(t)x + k(1-t)y\big) &= f\big(k(t)x + k(1-t)y\big) + g\big(k(t)x + k(1-t)y\big) \\ &\leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) + h(t)g(x) + h(1-t)g(y) \\ &= h(t)\underbrace{\big[f(x) + g(x)\big]}_{m(x)} + h(1-t)\underbrace{\big[f(y) + g(y)\big]}_{m(x)} \\ &= h(t)m(x) + h(1-t)m(y) \end{aligned}$$

olduğundan $f(x) + g(x)$'de (k,h)-konvekstir.

Diğer taraftan, $c\,f(x) = g(x)$ olsun.

$$\begin{aligned} g\big(k(t)x + k(1-t)y\big) &= c\,f\big(k(t)x + k(1-t)y\big) \\ &\leq c\,\big(h(t)f(x) + h(1-t)f(y)\big) \\ &= c\,h(t)f(x) + c\,h(1-t)f(y) \\ &= h(t)\underbrace{c\,f(x)}_{g(x)} + h(1-t)\underbrace{c\,f(y)}_{g(y)} \\ &= h(t)g(x) + h(1-t)g(y) \end{aligned}$$

olduğundan $c\,f(x) = g(x)$ de (k,h)-konvekstir.

ii. $x, y \in D$, $t \in (0,1)$ ve $k : (0,1) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall i \in I$ için f_i'ler (k,h)-konveks olduğundan

$$f_i\big(k(t)x + k(1-t)y\big) \leq h(t)f_i(x) + h(1-t)f_i(y)$$

yazılır. $\forall i \in I$ için

$$\begin{aligned} f_i\big(k(t)x+k(1-t)y\big) &\leq \sup_{i\in I}\{f_i\big(k(t)x+k(1-t)y\big)\} \\ &\leq \sup_{i\in I}\{h(t)f_i(x)+h(1-t)f_i(y)\} \\ &\leq \sup_{i\in I}\{h(t)f_i(x)\}+\sup_{i\in I}\{h(1-t)f_i(y)\} \\ &= h(t)\sup_{i\in I}\{f_i(x)\}+h(1-t)\sup_{i\in I}\{f_i(y)\} \end{aligned}$$

olur ki buda f'nin (3.2.1) eşitsizliğini sağladığını gösterir.

iii. $\forall x,y \in f^c$ olsun. f, (k,h)-konveks ve $h(t)=t$ ise

$$\begin{aligned} f\big(k(t)x+k(1-t)y\big) &\leq h(t)f(x)+h(1-t)f(y) \\ &= t\underbrace{f(x)}_{c\geq f(x)}+(1-t)\underbrace{f(y)}_{c\geq f(y)} \\ &\leq tc+(1-t)c \\ &= c \end{aligned}$$

olur.Yani $f\big(k(t)x+k(1-t)y\big)\leq c$ olduğundan $k(t)x+k(1-t)y\in f^c$ olur. Dolayısıyla f^c, k- konveks kümedir.

iv. $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in \text{epi}f$, $t\in(0,1)$ ve f fonksiyonu k-konveks olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f\big(\underbrace{k(t)x_1+k(1-t)x_2}_{x}\big) &\leq k(t)\underbrace{f(x_1)}_{\leq y_1}+k(1-t)\underbrace{f(x_2)}_{\leq y_2} \\ &\leq \underbrace{k(t)y_1+k(1-t)y_2}_{y} \end{aligned}$$

yazılır. Buradan,

$$\Big(k(t)x_1+k(1-t)x_2,k(t)y_1+k(1-t)y_2\Big)=\Big(\underbrace{k(t)(x_1,y_1)+k(1-t)(x_2,y_2)}_{\in\text{epi}f}\Big)$$

yazılır$\big(f(x)\leq y$ ise $(x,y)\in\text{epi}f\big)$. Dolayısıyla epi$f$ kümesi k-konvekstir.

v. $\text{epi}f=\big\{(x,y)\in X\times\mathbb{R} : x\in D, y\geq f(x)\big\}$ dir.
$p_1=(x_1,f(x_1))$, $p_2=(y_1,f(y_1))\in\text{epi}f$ ve epi$f$ k-konveks küme olsun. Bu durumda, $k(t)p_1+k(1-t)p_2\in\text{epi}f$ olduğu açıktır. Bu şartlar altında f'nin (k,k)-

konveks fonksiyon olduğu gösterilecek olursa,

$$\begin{aligned}
k(t)p_1 + k(1-t)p_2 &= k(t)\big(x_1, f(x_1)\big) + k(1-t)\big(y_1, f(y_1)\big) \\
&= \Big(\big(k(t)x_1, k(t)f(x_1)\big) + \big(k(1-t)y_1, k(1-t)f(y_1)\big)\Big) \\
&= \Big(k(t)x_1 + k(1-t)y_1, k(t)f(x_1) + k(1-t)f(y_1)\Big) \in \text{epi}f
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$f\big(k(t)x_1 + k(1-t)y_1\big) \le k(t)f(x_1) + k(1-t)f(y_1)$$

yazılır. Dolayısıyla f fonksiyonu (k,k)-konvekstir.

vi. D kümesi k-konveks olduğundan, $\forall x, y \in D$ iken $k(t)x + k(1-t)y \in D$ dir. f fonksiyonu (k,h)-afin fonksiyon olduğundan, $\forall x, y \in D$ için

$$\underbrace{f\big(\overbrace{k(t)x + k(1-t)y}^{\in D}\big)}_{\in f(D)} = \underbrace{h(t)\overbrace{f(x)}^{\in f(D)} + h(1-t)\overbrace{f(y)}^{\in f(D)}}_{\in f(D)}$$

olur. Bu eşitlikten, $\forall f(x), f(y) \in f(D)$ için

$$h(t)f(x) + h(1-t)f(y) \in f(D)$$

yazılır. Dolayısıyla, $f(D)$ h-konvekstir.

vii. $\forall x, y \in D_1$ ve f_1 fonksiyonu (k,h)-konveks fonksiyon olduğundan

$$f_1\big(\underbrace{k(t)x + k(1-t)y}_{\in D_1}\big) \le h(t)f_1(x) + h(1-t)f_1(y)$$

yazılır. Bu durumda, $f_1\big(k(t)x + k(1-t)y\big) \in f_1(D_1) \subset D_2$ olduğundan

$$f_1\big(k(t)x + k(1-t)y\big) \in D_2$$

olur. O halde, $f = f_2 \circ f_1 = f_2\big(f_1(x)\big)$ yani $f(x) = f_2\big(f_1(x)\big)$ olur. Buradan f_2 nin azalmayanlığı ve (h,h)-konveksliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
f\big(k(t)x + k(1-t)y\big) &= f_2\Big(f_1\big(k(t)x + k(1-t)y\big)\Big) \\
&\le f_2\Big(h(t)f_1(x) + h(1-t)f_1(y)\Big) \\
&\le h(t)f_2\big(f_1(x)\big) + h(1-t)f_2\big(f_1(x)\big) \\
&= h(t)f(x) + h(1-t)f(y)
\end{aligned}$$

yazılır. Dolayısıyla f fonksiyonu (k,h)-konveks fonksiyon olur.

Son olarak, $h_2 \geq h_1$ olmak üzere her negatif olmayan ve (k, h_1)-konveks olan fonksiyonların aynı zamanda (k, h_2)-konveks olduğu ileri sürülebilir.

3.3 (k, h)-Konveks Fonksiyonlar için Elde Edilen Hermite-Hadamard-Fejér Tipli Bazı Yeni Eşitsizlikler

Bu bölümde, (k, h)-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér tipli bazı yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Şu andan itibaren, D kümesinin, $\mathbb{R}$'nin k-konveks alt kümesi olduğu kabul edilecektir.

Teorem 3.3.1 ((k, h)-konveks fonksiyonlar için ilk Fejér eşitsizliği)
$h(1/2) > 0$, $a < b$ ve $[a, b] \subset D$ olmak üzere $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (k, h)-konveks fonksiyon, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan ve $(a + b)/2$'ye göre simetrik olan fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\frac{f\big(k(1/2)(a+b)\big)}{2\,h(1/2)} \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \tag{3.3.1}$$

olur [33].

İspat. (3.2.1)'de $t = 1/2$, $x = wa + (1-w)b$ ve $y = (1-w)a + wb$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} f\big(k(1/2)(a+b)\big) &= f(k(1/2)x + k(1/2)y) \\ &\leq h(1/2)\,\big[f\big(wa + (1-w)b\big) + f\big((1-w)a + wb\big)\big] \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.3.2)'nin her iki tarafı $g(x) = g(y)$ ile çarpılır ve ardından, w ya göre $[0, 1]$ aralığında integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} & f\big(k(1/2)(a+b)\big) \int_0^1 g(wa + (1-w)b)dw \\ \leq\ & h(1/2)\bigg[\int_0^1 f\big(wa + (1-w)b\big)g\big(wa + (1-w)b\big)dw \\ & + \int_0^1 f\big((1-w)a + wb\big)g\big((1-w)a + wb\big)dw\bigg] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $x = wa + (1-w)b$ değişken değişimi yapılarak,

$$f\big(k(1/2)(a+b)\big) \int_b^a g(x)\frac{dx}{a-b} \leq h(1/2)\bigg[\int_b^a f(x)g(x)\frac{dx}{a-b} + \int_a^b f(x)g(x)\frac{dx}{b-a}\bigg]$$

bulunur. Yani

$$f\big(k(1/2)(a+b)\big)\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx \leq h(1/2)\bigg[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx\bigg]$$

olur. Burada gerekli sadeleştirme ve düzenlemeler yapılarak,

$$f\big(k(1/2)(a+b)\big)\int_a^b g(x)dx \leq 2\,h(1/2)\int_a^b f(x)g(x)dx$$

yani

$$\frac{f\big(k(1/2)(a+b)\big)}{2\,h(1/2)}\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx$$

elde edilir ve (3.3.1) bulunur.

Sonuç 3.3.1 $a < b$, $[a,b] \subset D$ ve $h(1/2) > 0$ olmak üzere $f : D \to \mathbb{R}$ bir (k,h)-konveks fonksiyon olsun. (3.3.1)'de her $t \in (0,1)$ için $g(t) = 1$ yazılırsa, (k,h)-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli ilk

$$\frac{f\big(k(1/2)(a+b)\big)}{2h(1/2)} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{3.3.3}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.3.2 $f : D \to \mathbb{R}$, s-Orlicz konveks fonksiyon olsun ve a, b noktalarının ve g fonksiyonunun Teorem (3.3.1)'in hipotezlerini sağladığı kabul edilsin. (3.3.1)'de $k(t) = t^{\frac{1}{s}}$ ve $h(t) = t$ yazılırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \tag{3.3.4}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.3.3 **1.** (3.3.1)'de $k(t) = t$ yazılırsa, (2.1.16)'nın sol tarafı olan (2.1.15) elde edilir.

2. (3.3.4)'de $g = 1$ yazılırsa, [16]'da kanıtlanan;

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

eşitsizliği elde edilir.

3. Teorem (3.3.1) den $k(t) = t$ ve $h(t) = t$ için aşağıdaki Fejér tipli

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx$$

eşitsizliğine ulaşılır. Özel olarak $g = 1$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4. Jensen-konveks fonksiyonlar için, yani $k(t) = \frac{1}{2}$ ve $h(t) = \frac{1}{2}$ için (3.3.1) ve (3.3.3)'den klasik eşitsizlik (2.1.5) ve (2.1.3)'ün sol tarafı yeniden elde edilir.

Teorem 3.3.2 ((k, h)-konveks fonksiyonlar için ikinci Fejér eşitsizliği)
$h(1/2) > 0$, $a, b \in D$ ve $a < b$ olmak üzere, $f : D \to \mathbb{R}$ (k, h)-konveks fonksiyon, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan ve $(a + b)/2$ noktasına göre simetrik olan fonksiyon olsun. Bu taktirde,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\,h(1/2)} \int_0^1 & f\big(k(1/2)[k(t) + k(1-t)](a+b)\big)\; g\big(ta + (1-t)b\big)dt \\ &\le \int_0^1 f\big(k(t)a + k(1-t)b\big)\; g\big(ta + (1-t)b\big)dt \\ &\le \big[f(a) + f(b)\big] \int_0^1 h(t)\; g\big(ta + (1-t)b\big)dt \qquad (3.3.5)\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [33].

İspat. (3.2.1)'de $x = k(w)a + k(1-w)b$, $y = k(1-w)a + k(w)b$ ve $t = 1/2$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} & f\big(k(1/2)\;[k(w) + k(1-w)]\;(a+b)\big) = f\big(k(1/2)x + k(1/2)y\big) \\ \le\; & h(1/2)\;\big[f\big(k(w)a + k(1-w)b\big) + f\big(k(1-w)a + k(w)b\big)\big] \qquad (3.3.6)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.
Bir önceki teoremin ispatında olduğu gibi, (3.3.6)'nın her iki tarafı

$$g\big(wa + (1-w)b\big) = g\big((1-w)a + wb\big)$$

ifadesi ile çarpılır ve elde edilen eşitsizliğin $[0, 1]$ aralığında w'ya göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f\big(k(1/2)\;[k(w) + k(1-w)]\;(a+b)\big)\; g\big(wa + (1-w)b\big)dw \\ \le\; & h(1/2)\left[\int_0^1 f(k(w)a + k(1-w)b)\; g(wa + (1-w)b)dw \right. \\ & \left. + \int_0^1 f\big(k(1-w)a + k(w)b\big)\; g\big((1-w)a + wb\big)dw\right]\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f\big(k(1/2)\;[k(w) + k(1-w)]\;(a+b)\big)\; g\big(wa + (1-w)b\big)dw \\ \le\; & 2h(1/2) \int_0^1 f\big(k(w)a + k(1-w)b\big)\; g\big(wa + (1-w)b\big)dw\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadede $w = t$ değişimi kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2h(1/2)} \int_0^1 f\big(k(1/2)\ [k(t) + k(1-t)]\ (a+b)\big)\ g\big(ta + (1-t)b\big) dt \\
\leq\ & \int_0^1 f\big(k(t)a + k(1-t)b\big)\ g\big(ta + (1-t)b\big) dt
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan ilk istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur.

Eşitsizliğin ikinci kısmını kanıtlamak için, (3.2.1)'de $x = a, y = b$ yazılırsa

$$
f(k(t)a + k(1-t)b \leq h(t)f(a) + h(1-t)f(b) \tag{3.3.7}
$$

eşitsizliği elde edilir. (3.3.7) eşitsizliğinin her iki tarafını $g\big(ta+(1-t)b\big) = g\big((1-t)a+tb\big)$ ile çarpar ve elde edilen eşitsizliğin $[0,1]$ aralığında t'ye göre integrali alınırsa buradan,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 f\big(k(t)a + k(1-t)b\big)\ g\big(ta + (1-t)b\big) dt \\
\leq\ & f(a) \int_0^1 h(t)\ g\big(ta + (1-t)b\big) dt + f(b) \int_0^1 h(1-t)\ g\big((1-t)a + tb\big) dt
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$
\int_0^1 f\big(k(t)a + k(1-t)b\big)\ g\big(ta + (1-t)b\big) dt \leq \big[f(a) + f(b)\big] \int_0^1 h(t)\ g\big(ta + (1-t)b\big) dt
$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.4 $h(1/2) > 0$, $a, b \in D$ ve $a < b$ olmak üzere $f : D \to \mathbb{R}$'ye (k,h)-konveks fonksiyon olsun. $g = 1$ için

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2h(1/2)} \int_0^1 f\big(k(1/2)\ [k(t) + k(1-t)]\ (a+b)\big) dt &\leq \int_0^1 f\big(k(t)a + k(1-t)b\big) dt \\
&\leq \big[f(a) + f(b)\big] \int_0^1 h(t) dt \quad (3.3.8)
\end{aligned}
$$

olur.

Sonuç 3.3.5 $f : D \to \mathbb{R}$, s-Orlicz konveks fonksiyon olsun. a, b noktalarının ve g fonksiyonunun Teorem 3.3.2'nin varsayımını sağladığı kabul edilsin. Bu durumda, $k(t) = t^{\frac{1}{s}}$ ve $h(t) = t$ için

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 f\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{s}}}\ \big[t^{\frac{1}{s}} + (1-t)^{\frac{1}{s}}\big]\ (a+b)\right) g\big(ta + (1-t)b\big) dt \\
&\qquad \leq \int_0^1 f\big(t^{\frac{1}{s}}a + (1-t)^{\frac{1}{s}}b\big)\ g\big(ta + (1-t)b\big) dt \\
&\qquad \leq \big[f(a) + f(b)\big] \int_0^1 t\ g\big(ta + (1-t)b\big) dt
\end{aligned} \tag{3.3.9}
$$

olur. (3.3.9) eşitsizliğinde s-Orlicz konveks fonksiyonlar için Fejér eşitsizliğinin değişik biçimi elde edilmiş olur.

Sonuç 3.3.6 **1.** (3.3.5)'de $k(t) = t$ olarak alınırsa, (2.1.14) ve (2.1.15) eşitsizlikleri elde edilir.

2. f, s-Orlicz konveks fonksiyon ve $g = 1$ ise, bu durumda, (3.3.9) eşitsizliği,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\Big(\frac{1}{2^{\frac{1}{s}}}\big[t^{\frac{1}{s}} + (1-t)^{\frac{1}{s}}\big](a+b)\Big)dt &\leq \int_0^1 f\big(t^{\frac{1}{s}}a + (1-t)^{\frac{1}{s}}b\big)dt \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\end{aligned}$$

haline gelir.

3. f, starshaped fonksiyon ve $a, b \neq 0$ ise, bu durumda, (3.3.8)'in sağ tarafından,

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(t)dt + \frac{1}{b}\int_0^b f(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.3.10}$$

eşitsizliği yazılır. Gerçekten, f starshaped ise f, (k,k)-konveks ve

$$k(t) = \begin{cases} 2t, & t < 1/2 \text{ için} \\ 0, & t \geq 1/2 \text{ için} \end{cases} \tag{3.3.11}$$

dir. Buna göre f $(k,k)-$konveks ise

$$f(k(t)x + k(1-t)y) \leq k(t)f(x) + k(1-t)f(y)$$

dir. Dolayısıyla $t < \frac{1}{2}$ için

$$f(\underbrace{k(t)}_{2t}x + \underbrace{k(1-t)}_{0}y) = f(2tx) \leq \underbrace{k(t)}_{2t}f(x) + \underbrace{k(1-t)}_{0}f(y) = 2tf(x)$$

ve $t \geq \frac{1}{2}$ için

$$f\big(\underbrace{k(t)}_{0}x + \underbrace{k(1-t)}_{2-2t}y\big) = f\big((2-2t)y\big) \leq \underbrace{k(t)}_{0}f(x) + \underbrace{k(1-t)}_{2-2t}f(y) = (2-2t)f(y)$$

olur. Bu durum (3.3.8)'in sağ tarafında kullanılır ve $k(t) = h(t)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\int_0^1 f\big(k(t)a + k(1-t)b\big)dt \leq \big[f(a)+f(b)\big]\int_0^1 h(t)dt$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{1}{2}} f\big(k(t)a + k(1-t)b\big)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f\big(k(t)a + k(1-t)b\big)dt \\ \leq\ &\big[f(a)+f(b)\big]\Big\{\int_0^{\frac{1}{2}} k(t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 k(t)dt\Big\}\end{aligned}$$

olur. Değişken değişimi yaptığımızda,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(\underbrace{2ta}_{u})dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f\big(\underbrace{(2-2t)b}_{v}\big)dt \leq \big[f(a)+f(b)\big]\bigg\{\int_0^{\frac{1}{2}} 2tdt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 0dt\bigg\}$$

olur. Yani

$$\frac{1}{2a}\int_0^a f(u)du + \frac{1}{2b}\int_0^b f(u)du \leq \big[f(a)+f(b)\big]\frac{1}{4}$$

olur. Ayrıca, (3.3.10) eşitsizliği $m=0$ için Teorem (2.1.2) den de elde edilebilir.

4. Konveks fonksiyonlar için, (3.3.8) ve (3.3.5)'den klasik eşitsizlik olan (2.1.3) ve (2.1.5) ayrı ayrı elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1 Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri Yardımıyla (k,h)-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér Tipli Eşitsizlik

Bu bölümde, Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla (k,h)-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér tipli yeni bir eşitsizlik elde edilmiştir.

Teorem 4.1.1 $h(1/2) > 0$ olmak üzere $f : D \to \mathbb{R}$ (k,h)-konveks fonksiyon, $[a,b] \subset D$, $a < b$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ ise

$$\frac{f\left(k(1/2)(a+b)\right)}{2h(1/2)}\left[J^{\alpha}_{a^+}g(b) + J^{\alpha}_{b^-}g(a)\right] \leq \left[J^{\alpha}_{a^+}fg(b) + J^{\alpha}_{b^-}fg(a)\right] \tag{4.1.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $\forall x, y \in D$ ve $t \in (0,1)$ olmak üzere $f : D \to \mathbb{R}$ (k,h)-konveks fonksiyon ise bu durumda,

$$f(k(t)x + k(1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) \tag{4.1.2}$$

olur. $t \in (0,1)$ olmak üzere (4.1.2) eşitsizliğinde $t = 1/2$, $x = wa + (1-w)b$ ve $y = (1-w)a + wb$ yazılırsa

$$\begin{aligned} f\left(k(1/2)(a+b)\right) &= f\left(k(1/2)x + k(1/2)y\right) \\ &\leq h(1/2)\big[f\big(wa + (1-w)b\big) + f\big((1-w)a + wb\big)\big] \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

eşitsizliği elde edilir. g fonksiyonunun simetrikliği dikkate alınarak (4.1.3) eşitsizliğinin her iki tarafı

$$g(x)w^{\alpha-1} = g(y)w^{\alpha-1}$$

ifadesiyle çarpılır ve w'ya göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} & f\left(k(1/2)(a+b)\right)\int_0^1 w^{\alpha-1}g(wa + (1-w)b)dw \\ \leq\; & h(1/2)\left[\int_0^1 w^{\alpha-1}f\big(wa + (1-w)b\big)g\big(wa + (1-w)b\big)dw \right. \\ & \left. + \int_0^1 w^{\alpha-1}f\big((1-w)a + wb\big)g\big((1-w)a + wb\big)dw\right] \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada $x = wa + (1-w)b$ değişken değişimi yapıldığında,

$$\begin{aligned}
& f\left(k(1/2)(a+b)\right)\int_b^a \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{\alpha-1} g(x)\frac{dx}{a-b} \\
\leq \;& h(1/2)\left[\int_b^a \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{\alpha-1} f(x)g(x)\frac{dx}{a-b} + \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(x)g(x)\frac{dx}{b-a}\right]
\end{aligned}$$

olur. Ardından gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
& f\left(k(1/2)(a+b)\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{(b-x)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}} g(x)dx \\
\leq \;& h(1/2)\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{(b-x)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}} f(x)g(x)dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}} f(x)g(x)dx\right]
\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned}
& f\left(k(1/2)(a+b)\right)\frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\Gamma(\alpha)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1} g(x)dx \\
\leq \;& h(1/2)\left[\frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\Gamma(\alpha)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1} f(x)g(x)dx \right.\\
& \left. +\frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\Gamma(\alpha)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (x-a)^{\alpha-1} f(x)g(x)dx\right]
\end{aligned}$$

ifadesi yazılır. Bu eşitsizlikte ise Riemann-Liouville kesirli integrallerinin tanımı kullanılarak,

$$f\left(k(1/2)(a+b)\right)\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}} J_{a+}^{\alpha} g(b) \leq h(1/2)\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha} fg(b) + J_{b-}^{\alpha} fg(a)\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Burada Lemma (2.1.1) kullanılarak,

$$f\left(k(1/2)(a+b)\right)\frac{1}{2}\left[J_{a+}^{\alpha} g(b) + J_{b-}^{\alpha} g(a)\right] \leq h(1/2)\left[J_{a+}^{\alpha} fg(b) + J_{b-}^{\alpha} fg(a)\right]$$

ifadesi yazılır. Bu da

$$\frac{f\left(k(1/2)(a+b)\right)}{2h(1/2)}\left[J_{a+}^{\alpha} g(b) + J_{b-}^{\alpha} g(a)\right] \leq \left[J_{a+}^{\alpha} fg(b) + J_{b-}^{\alpha} fg(a)\right]$$

anlamına gelir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.1 $f : D \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise yani (4.1.1) eşitsizlğinde $k(t) = t$ ve $h(t) = t$ yazılırsa (2.1.18) eşitsizliğinin sol tarafı elde edilir.

Sonuç 4.1.2 Eşitsizlik (4.1.1)'de $\alpha = 1$ yazılırsa (3.3.1) eşitsizliği elde edilir.

4.2 Uyumlu Kesirli İntegraller Yardımıyla (k,h)-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér Tipli Eşitsizlik

Bu bölümde, uyumlu kesirli integraller yardımıyla (k,h)-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér tipli yeni bir eşitsizlik elde edilmiştir.

Teorem 4.2.1 $h(1/2)>0$ olmak üzere $f: D\to\mathbb{R}$ (k,h)-konveks fonksiyon, $[a,b]\subset D$, $a<b$ ve $f\in L[a,b]$ olsun. $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\alpha\in(n,n+1], n\in\mathbb{N}$ ise

$$\frac{f\left(k(1/2)(a+b)\right)}{2h(1/2)}\Big[\big(I_\alpha^a g\big)(b)+\big({}^bI_\alpha g\big)(a)\Big]\leq\Big[\big(I_\alpha^a fg\big)(b)+\big({}^bI_\alpha fg\big)(a)\Big] \tag{4.2.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $\forall x,y\in D$ ve $t\in(0,1)$ olmak üzere $f:D\to\mathbb{R}$ (k,h)-konveks fonksiyon ise bu durumda,

$$f(k(t)x+k(1-t)y)\leq h(t)f(x)+h(1-t)f(y) \tag{4.2.2}$$

olur. $t\in(0,1)$ olmak üzere (4.2.2) eşitsizliğinde $t=1/2$, $x=wa+(1-w)b$ ve $y=(1-w)a+wb$ yazılırsa

$$\begin{aligned} f\left(k(1/2)(a+b)\right) &= f\left(k(1/2)x+k(1/2)y\right) \\ &\leq h(1/2)\big[f\big(wa+(1-w)b\big)+f\big((1-w)a+wb\big)\big] \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

eşitsizliği elde edilir. g fonksiyonunun simetrikliği dikkate alınarak (4.2.3) eşitsizliğinin her iki tarafı

$$w^n(1-w)^{\alpha-n-1}g(wa+(1-w)b)=w^n(1-w)^{\alpha-n-1}g((1-w)a+wb)$$

ifadesiyle çarpılır ve w'ya göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} & f\left(k(1/2)(a+b)\right)\int_0^1 w^n(1-w)^{\alpha-n-1}g(wa+(1-w)b)dw \\ \leq\ & h(1/2)\Bigg[\int_0^1 w^n(1-w)^{\alpha-n-1}f\big(wa+(1-w)b\big)g\big(wa+(1-w)b\big)dw \\ & +\int_0^1 w^n(1-w)^{\alpha-n-1}f\big((1-w)a+wb\big)g\big((1-w)a+wb\big)dw\Bigg] \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada $x = wa + (1-w)b$ değişken değişimi yapıldığında,

$$
\begin{aligned}
& f\left(k(1/2)(a+b)\right) \int_b^a \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^n \left(\frac{a-x}{a-b}\right)^{\alpha-n-1} g(x) \frac{dx}{a-b} \\
\leq \ & h(1/2) \Bigg[\int_b^a \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^n \left(\frac{a-x}{a-b}\right)^{\alpha-n-1} f(x) g(x) \frac{dx}{a-b} \\
& + \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha-n-1} f(x) g(x) \frac{dx}{b-a} \Bigg]
\end{aligned}
$$

olur. Ardından gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$
\begin{aligned}
& f\left(k(1/2)(a+b)\right) \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{(b-x)^n}{(b-a)^n} \frac{(x-a)^{\alpha-n-1}}{(b-a)^{\alpha-n-1}} g(x) dx \\
\leq \ & h(1/2) \Bigg[\frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{(b-x)^n}{(b-a)^n} \frac{(x-a)^{\alpha-n-1}}{(b-a)^{\alpha-n-1}} f(x) g(x) dx \\
& + \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{(x-a)^n}{(b-a)^n} \frac{(b-x)^{\alpha-n-1}}{(b-a)^{\alpha-n-1}} f(x) g(x) dx \Bigg]
\end{aligned}
$$

olur ve buradan

$$
\begin{aligned}
& f\left(k(1/2).(a+b)\right) \frac{1}{(b-a)^\alpha} n! \frac{1}{n!} \int_a^b (b-x)^n (x-a)^{\alpha-n-1} g(x) dx \\
\leq \ & h(1/2) \Bigg[\frac{1}{(b-a)^\alpha} n! \frac{1}{n!} \int_a^b (b-x)^n (x-a)^{\alpha-n-1} f(x) g(x) dx \\
& + \frac{1}{(b-a)^\alpha} n! \frac{1}{n!} \int_a^b (x-a)^n (b-x)^{\alpha-n-1} f(x) g(x) dx \Bigg]
\end{aligned}
$$

ifadesi yazılır. Bu eşitsizlikte ise uyumlu kesirli integrallerinin tanımı kullanılarak,

$$
f\left(k(1/2)(a+b)\right) \frac{n!}{(b-a)^\alpha} \left(I_\alpha^a g\right)(b) \leq h(1/2) \frac{n!}{(b-a)^\alpha} \left[\left(I_\alpha^a fg\right)(b) + \left({}^b I_\alpha fg\right)(a) \right]
$$

eşitsizliği elde edilir. Burada Lemma (2.1.2) kullanılarak,

$$
f\left(k(1/2)(a+b)\right) \frac{1}{2} \left[\left(I_\alpha^a g\right)(b) + \left({}^b I_\alpha g\right)(a) \right] \leq h(1/2) \left[\left(I_\alpha^a fg\right)(b) + \left({}^b I_\alpha fg\right)(a) \right]
$$

ifadesi yazılır. Bu da

$$
\frac{f\left(k(1/2)(a+b)\right)}{2h(1/2)} \left[\left(I_\alpha^a g\right)(b) + \left({}^b I_\alpha g\right)(a) \right] \leq \left[\left(I_\alpha^a fg\right)(b) + \left({}^b I_\alpha fg\right)(a) \right]
$$

anlamına gelir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.1 $f : D \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise yani (4.2.1) eşitsizliğinde $k(t) = t$ ve $h(t) = t$ yazılırsa, eşitsizlik (2.1.19) eşitsizliğinin sol tarafına dönüşür.

Sonuç 4.2.2 (4.2.1) eşitsizliğinde $\alpha = n + 1$ yazılırsa, (4.1.1) eşitsizliği elde edilir.

4.3 Katugampola Kesirli İntegralleri Yardımıyla (k,h)-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard -Fejér Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, Katugampola kesirli integralleri yardımıyla (k,h) konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 4.3.1 $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olsun. $0 \leq a < b$ ve $f \in L[a^\rho, b^\rho]$ olmak üzere $f : [a^\rho, b^\rho] \to \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. $a < b$, $[a^\rho, b^\rho] \subset D$ ve $h(1/2) > 0$ olmak üzere $f : D \to \mathbb{R}$ (k,h)-konveks fonksiyon ve $g(x) = x^\rho$ ise

$$f\left(k(1/2)(a^\rho + b^\rho)\right) \leq \frac{h\left(1/2\right)\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}\left[{}^\rho I^\alpha_{a^+}(fog)(b) + {}^\rho I^\alpha_{b^-}(fog)(a)\right] \tag{4.3.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $t \in [0,1]$ olsun. $a \geq 0$ ve $x, y \in [a,b]$ olmak üzere $x^\rho = w^\rho a^\rho + (1-w^\rho)b^\rho$ ve $y^\rho = (1-w^\rho)a^\rho + w^\rho b^\rho$ olarak tanımlansın. $[a^\rho, b^\rho]$ üzerinde $f : D \to \mathbb{R}$ (k,h)-konveks fonksiyon ise

$$f(k(t)x^\rho + k(1-t)y^\rho) \leq h(t)f(x^\rho) + h(1-t)f(y^\rho) \tag{4.3.2}$$

olur. (4.3.2) eşitsizliğinde $t = 1/2$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} f\left(k(1/2)(a^\rho + b^\rho)\right) &= f\left(k(1/2)x^\rho + k(1/2)y^\rho\right) \\ &\leq h(1/2)\Big[f\big(w^\rho a^\rho + (1-w^\rho)b^\rho\big) \\ &\quad + f\big((1-w^\rho)a^\rho + w^\rho b^\rho\big)\Big] \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

ifadesi elde edilir. $\alpha > 0$ olmak üzere (4.3.3) eşitsizliğinin her iki tafafı $w^{\alpha\rho-1}$ ile çarpılır ve $[0,1]$ aralığında w'ya göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} & f\left(k(1/2)(a^\rho + b^\rho)\right)\int_0^1 w^{\alpha\rho-1}dw \\ \leq\ & h(1/2)\left[\int_0^1 w^{\alpha\rho-1} f\big(w^\rho a^\rho + (1-w^\rho)b^\rho\big)dw \right. \\ & \left. + \int_0^1 w^{\alpha\rho-1} f\big((1-w^\rho)a^\rho + w^\rho b^\rho\big)\big)dw\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $x^\rho = w^\rho a^\rho + (1-w^\rho)b^\rho$ değişken değişimi yapıldığında,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha\rho} f\left(k(1/2)(a^\rho+b^\rho)\right)\\
\leq\;& h(1/2)\Bigg[\int_b^a \left(\frac{x^\rho-b^\rho}{a^\rho-b^\rho}\right)^\alpha \left(\frac{a^\rho-b^\rho}{x^\rho-b^\rho}\right) f(x^\rho)\frac{x^{\rho-1}}{a^\rho-b^\rho}dx\\
&+\int_a^b \left(\frac{y^\rho-a^\rho}{b^\rho-a^\rho}\right)^\alpha \left(\frac{b^\rho-a^\rho}{y^\rho-a^\rho}\right) f(y^\rho)\frac{y^{\rho-1}}{b^\rho-a^\rho}dy\Bigg]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ardından gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha\rho} f\left(k(1/2)(a^\rho+b^\rho)\right)\\
\leq\;& h(1/2)\Bigg[\int_a^b \frac{(b^\rho-a^\rho)^{1-\alpha}}{(b^\rho-x^\rho)^{1-\alpha}}\,\frac{x^{\rho-1}}{(b^\rho-a^\rho)}\,f(x^\rho)dx\\
&+\int_a^b \frac{(b^\rho-a^\rho)^{1-\alpha}}{(y^\rho-a^\rho)^{1-\alpha}}\,\frac{y^{\rho-1}}{(b^\rho-a^\rho)}\,f(y^\rho)dy\Bigg]
\end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha\rho} f\left(k(1/2)(a^\rho+b^\rho)\right)\\
\leq\;& h(1/2)\Bigg[\int_a^b \frac{x^{\rho-1}}{(b^\rho-x^\rho)^{1-\alpha}}\frac{1}{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}f(x^\rho)dx\\
&+\int_a^b \frac{y^{\rho-1}}{(y^\rho-a^\rho)^{1-\alpha}}\frac{1}{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}f(y^\rho)dy\Bigg]
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha\rho} f\left(k(1/2)(a^\rho+b^\rho)\right)\\
\leq\;& \frac{h\left(1/2\right)\Gamma(\alpha)}{\left(b^\rho-a^\rho\right)^\alpha\rho^{1-\alpha}}\Bigg[\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \frac{x^{\rho-1}}{(b^\rho-x^\rho)^{1-\alpha}}f(x^\rho)dx\\
&+\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \frac{y^{\rho-1}}{(y^\rho-a^\rho)^{1-\alpha}}f(y^\rho)dy\Bigg]
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Elde edilen bu eşitsizlikte, $g(x)=x^\rho$ olmak üzere, Katugampola kesirli integrallerinin tanımı kullanılarak,

$$\frac{1}{\alpha\rho} f\left(k(1/2)(a^\rho+b^\rho)\right) \leq \frac{h\left(1/2\right)\Gamma\left(\alpha\right)}{\left(b^\rho-a^\rho\right)^\alpha\rho^{1-\alpha}}\left[{}^\rho I^\alpha_{a^+}(fog)(b)+{}^\rho I^\alpha_{b^-}(fog)(a)\right]$$

eşitsizliği yazılır. Bu da

$$f\left(k(1/2)(a^\rho+b^\rho)\right) \leq \frac{h\left(1/2\right)\rho^\alpha\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\left(b^\rho-a^\rho\right)^\alpha}\left[{}^\rho I^\alpha_{a^+}(fog)(b)+{}^\rho I^\alpha_{b^-}(fog)(a)\right]$$

olmasını gerektirir ki ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.1 $\alpha > 0$ olmak üzere (4.3.1) eşitsizliğinde $\rho = 1$ yazılırsa,

$$f\left(k(1/2)(a+b)\right) \le \frac{h\left(1/2\right)\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\left(b-a\right)^{\alpha}}\left[J_{a^{+}}^{\alpha}f(b)+J_{b^{-}}^{\alpha}f(a)\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.3.2 $\rho > 0$ olmak üzere (4.3.1) eşitsizliğinde $\alpha = 1$ yazılırsa,

$$\frac{1}{\rho}f\left(k(1/2)(a^{\rho}+b^{\rho})\right) \le \frac{2\,h\left(1/2\right)}{\left(b^{\rho}-a^{\rho}\right)}\int_{a}^{b}x^{\rho-1}(fog)(x)dx$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.3.3 Eğer $f : D \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise yani $k(t) = t$ ve $h(t) = t$ için eşitsizlik (4.3.1), eşitsizlik (2.1.21)'in sol tarafına dönüşür.

Sonuç 4.3.4 Eğer (4.3.1) eşitsizliğinde; $\rho = 1$, $k(t) = t$ ve $h(t) = t$ yazılırsa, (2.1.17) eşitsizliğinin sol tarafı elde edilir.

Teorem 4.3.2 $[a, b] \subset D$, $0 < a < b < \infty$, $h(1/2) > 0$ ve $f \in L[a, b]$ olmak üzere $f : D \to \mathbb{R}$ (k, h)-konveks fonksiyon olsun. f fonksiyonu negatif olmayan ve $(a + b)/2$ noktasına göre simetrik bir fonksiyon ise $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olmak üzere

$$f\left(k(1/2)(a+b)\right) \le \frac{h(1/2)\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left[{}^{\rho}I_{a^{+}}^{\alpha}f(b)+{}^{\rho}I_{b^{-}}^{\alpha}f(a)\right] \tag{4.3.4}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. $\forall x, y \in D$ ve $t \in (0, 1)$ olmak üzere $f : D \to \mathbb{R}$ (k, h)-konveks fonksiyon ise bu durumda,

$$f(k(t)x + k(1-t)y) \le h(t)f(x) + h(1-t)f(y) \tag{4.3.5}$$

olur. f fonksiyonu negatif olmayan, $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik olan bir fonksiyon ve $w \in [0, 1]$ olmak üzere (4.3.5) eşitsizliğinde $t = 1/2$, $x = wa+(1-w)b$ ve $y = (1-w)a+wb$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} f\left(k(1/2)(a+b)\right) &= f\left(k(1/2)x+k(1/2)y\right) \\ &\le h(1/2)\left[f\big(wa+(1-w)b\big)+f\big((1-w)a+wb\big)\right] \\ &= 2\,h(1/2)f\big((1-w)a+wb\big) \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

elde edilir.(4.3.6) eşitsizliğinin her iki tarafı

$$\frac{((1-w)a+wb)^{\rho-1}}{\left[b^{\rho}-\big((1-w)a+wb\big)^{\rho}\right]^{1-\alpha}} \tag{4.3.7}$$

ifadesi ile çarpılır ve elde edilen eşitsizliğin $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa

$$
\begin{aligned}
& f\left(k(1/2)(a+b)\right) \int_0^1 \frac{((1-w)a+wb)^{\rho-1}}{\left[b^\rho-(1-w)a+wb)^\rho\right]^{1-\alpha}} dw \\
\leq \; & 2\, h(1/2) \int_0^1 \frac{((1-w)a+wb)^{\rho-1}}{\left[b^\rho-(1-w)a+wb)^\rho\right]^{1-\alpha}}\, f\left((1-w)a+wb\right) dw
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $x=(1-w)a+wb$ değişken değişimi yapıldığında,

$$
f\left(k(1/2)\;(a+b)\right) \int_a^b \frac{x^{\rho-1}}{\left[b^\rho-x^\rho\right]^{1-\alpha}} \, \frac{dx}{b-a} \leq 2\; h(1/2) \int_a^b \frac{x^{\rho-1}}{\left[b^\rho-x^\rho\right]^{1-\alpha}} \; f(x) \; \frac{dx}{b-a}
$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan,

$$
f\left(k(1/2)\;(a+b)\right) \frac{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}{\alpha\rho(b-a)} \leq \frac{2\; h(1/2)}{(b-a)} \; \frac{\Gamma(\alpha)}{\rho^{1-\alpha}} \; \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{x^{\rho-1}}{\left[b^\rho-x^\rho\right]^{1-\alpha}} \; f(x)dx
$$

olur. Burada Katugampola kesirli integrallerinin tanımı kullanılarak,

$$
f\left(k(1/2)\;(a+b)\right) \frac{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}{\alpha\rho(b-a)} \leq \frac{2\; h(1/2)\; \rho^{\alpha-1}\; \Gamma(\alpha)}{(b-a)} \;\; {}^\rho I_{a^+}^\alpha f(b)
$$

ifadesi yazılır. Yani

$$
f\left(k(1/2)\;(a+b)\right) \leq \frac{2\; h(1/2)\; \rho^{\alpha}\; \Gamma(\alpha+1)}{(b^\rho-a^\rho)^\alpha} \;\; {}^\rho I_{a^+}^\alpha f(b) \tag{4.3.8}
$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde (4.3.6)'nın her tarafı

$$
\frac{((1-w)a+wb)^{\rho-1}}{\left[\left((1-w)a+wb\right)^\rho-a^\rho\right]^{1-\alpha}} \tag{4.3.9}
$$

ifadesi ile çarpılır ve elde edilen sonucun $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa,

$$
f\left(k(1/2)\;(a+b)\right) \leq \frac{2\; h(1/2)\; \rho^{\alpha}\; \Gamma(\alpha+1)}{(b^\rho-a^\rho)^\alpha} \;\; {}^\rho I_{b^-}^\alpha f(a) \tag{4.3.10}
$$

eşitsizliği elde edilir. Ardından (4.3.8) ve (4.3.10) eşitsizlikleri toplanırsa,

$$
f\left(k(1/2)\;(a+b)\right) \leq \frac{h(1/2)\; \rho^{\alpha}\; \Gamma(\alpha+1)}{(b^\rho-a^\rho)^\alpha} \;\left[{}^\rho I_{a^+}^\alpha f(b) + {}^\rho I_{b^-}^\alpha f(a)\right]
$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.5 $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks yani $k(t)=t$ ve $h(t)=t$ için (4.3.4) eşitsizliği

$$
f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\rho^{\alpha}\; \Gamma(\alpha+1)}{2\;(b^\rho-a^\rho)^\alpha} \;\left[{}^\rho I_{a^+}^\alpha f(b) + {}^\rho I_{b^-}^\alpha f(a)\right]
$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.3.6 $\alpha > 0$ olmak üzere (4.3.4) eşitsizliğinde $\rho = 1$ yazılırsa,

$$f\left(k(1/2)\,(a+b)\right) \le \frac{h(1/2)\,\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\ \left[J^{\alpha}_{a^+}f(b) + J^{\alpha}_{b^-}f(a)\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.3.7 $\rho > 0$ olmak üzere (4.3.4) eşitsizliğinde $\alpha = 1$ yazılırsa,

$$\frac{1}{\rho} f\left(k(1/2)(a+b)\right) \le \frac{2\,h\,(1/2)}{(b^{\rho}-a^{\rho})} \int_a^b x^{\rho-1} f(x)dx$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.3.8 (4.3.4) eşitsizliğinde $\rho = 1$, $k(t) = t$ ve $h(t) = t$ yazılırsa, bu eşitsizlik (2.1.17) eşitsizliğinin sol tarafına dönüşür.

Teorem 4.3.3 $[a,b] \subset D$, $0 < a < b < \infty$, $h(1/2) > 0$ ve $f \in L[a,b]$ olmak üzere $f : D \to \mathbb{R}$ (k,h)-konveks fonksiyon olsun. f, negatif olmayan ve $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik olan bir fonksiyon ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan ve integrallenebilir bir fonksiyon ise $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olmak üzere

$$\frac{f\left(k(1/2)(a+b)\right)}{h(1/2)}\left[{}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}g(b) + {}^{\rho}I^{\alpha}_{b^-}g(a)\right] \le \left[{}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}fg(b) + {}^{\rho}I^{\alpha}_{b^-}fg(a)\right] \tag{4.3.11}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. $\forall x,y \in D$ ve $t \in (0,1)$ olmak üzere $f : D \to \mathbb{R}$ (k,h)-konveks fonksiyon ise

$$f(k(t)x + k(1-t)y) \le h(t)f(x) + h(1-t)f(y) \tag{4.3.12}$$

olur. f, negatif olmayan, $(a+b)/2$ noktasına göre simetrik bir fonksiyon ve $w \in [0,1]$ olmak üzere (4.3.12) eşitsizliğinde $t = 1/2$, $x = wa + (1-w)b$ ve $y = (1-w)a + wb$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} f\left(k(1/2)(a+b)\right) &= f\left(k(1/2)x + k(1/2)y\right) \\ &\le h(1/2)\big[f\big(wa+(1-w)b\big) + f\big((1-w)a+wb\big)\big] \\ &= 2\,h(1/2)f\big((1-w)a+wb\big). \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.3.13) eşitsizliğinin her iki tarafı

$$\frac{\left((1-w)a+wb\right)^{\rho-1}}{\left[b^{\rho} - \big((1-w)a+wb\big)^{\rho}\right]^{1-\alpha}}\, g\big((1-w)a+wb\big) \tag{4.3.14}$$

ifadesi ile çarpılır ve elde edilen sonucun $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa,

$$
\begin{aligned}
& f\left(k(1/2)(a+b)\right) \int_0^1 \frac{((1-w)a+wb)^{\rho-1}}{\left[b^\rho-(1-w)a+wb)^\rho\right]^{1-\alpha}}\, g\big((1-w)a+wb\big)dw \\
\leq\ & 2\, h(1/2) \int_0^1 \frac{((1-w)a+wb)^{\rho-1}}{\left[b^\rho-(1-w)a+wb)^\rho\right]^{1-\alpha}}\, f\left((1-w)a)+wb\right)\ g\big((1-w)a+wb\big)dw
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $x=(1-w)a+wb$ değişken değişimi yapıldığında,

$$
f\left(k(1/2)\ (a+b)\right) \int_a^b \frac{x^{\rho-1}}{\left[b^\rho-x^\rho\right]^{1-\alpha}}\, g(x)\frac{dx}{b-a} \leq 2\, h(1/2) \int_a^b \frac{x^{\rho-1}}{\left[b^\rho-x^\rho\right]^{1-\alpha}}\ f(x)g(x)\ \frac{dx}{b-a}
$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
& f\left(k(1/2)\ (a+b)\right) \frac{1}{(b-a)}\, \frac{\Gamma(\alpha)}{\rho^{1-\alpha}}\, \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{x^{\rho-1}}{\left[b^\rho-x^\rho\right]^{1-\alpha}}\ g(x)dx \\
\leq\ & \frac{2\, h(1/2)}{(b-a)}\, \frac{\Gamma(\alpha)}{\rho^{1-\alpha}}\, \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{x^{\rho-1}}{\left[b^\rho-x^\rho\right]^{1-\alpha}}\ f(x)g(x)dx
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte Katugampola kesirli integrallerinin tanımı kullanılarak,

$$
f\left(k(1/2)\ (a+b)\right) \frac{1}{(b-a)}\, \frac{\Gamma(\alpha)}{\rho^{1-\alpha}} I^\alpha_{a^+} g(b) \leq \frac{2\, h(1/2)}{(b-a)}\, \frac{\Gamma(\alpha)}{\rho^{1-\alpha}} I^\alpha_{a^+} fg(b)
$$

eşitsizliği yani

$$
f\left(k(1/2)\ (a+b)\right) {}^\rho I^\alpha_{a^+} g(b) \leq 2\, h(1/2) {}^\rho I^\alpha_{a^+} fg(b) \tag{4.3.15}
$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde (4.3.13) eşitsizliğinin her iki tarafı

$$
\frac{((1-w)a+wb)^{\rho-1}}{\left[\big((1-w)a+wb\big)^\rho-a^\rho\right]^{1-\alpha}}\, g\big((1-w)a+wb\big) \tag{4.3.16}
$$

ifadesi ile çarpılır ve elde edilen sonucun $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa,

$$
f\left(k(1/2)\ (a+b)\right) {}^\rho I^\alpha_{b^-} g(a) \leq 2\, h(1/2) {}^\rho I^\alpha_{b^-} fg(a). \tag{4.3.17}
$$

eşitsizliği elde edilir. (4.3.15) ve (4.3.17) eşitsizlikleri toplanırsa,

$$
\frac{f\left(k(1/2)\ (a+b)\right)}{2\, h(1/2)} \left[{}^\rho I^\alpha_{a^+} g(b) + {}^\rho I^\alpha_{b^-} g(a)\right] \leq \left[{}^\rho I^\alpha_{a^+} fg(b) + {}^\rho I^\alpha_{b^-} fg(a)\right]
$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.9 Eğer $f: D \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise yani $k(t)=t$ ve $h(t)=t$ için (4.3.11) eşitsizliği aşağıdaki

$$
f\left(\frac{a+b}{2}\right) \left[{}^\rho I^\alpha_{a^+} g(b) + {}^\rho I^\alpha_{b^-} g(a)\right] \leq \left[{}^\rho I^\alpha_{a^+} fg(b) + {}^\rho I^\alpha_{b^-} fg(a)\right]
$$

eşitsizliğine dönüşür.

Sonuç 4.3.10 $\rho > 0$ olmak üzere (4.3.11) eşitsizliğinde $\alpha = 1$ yazılırsa,

$$f\left(k(1/2)(a+b)\right)\int_a^b x^{\rho-1}g(x)dx \leq 2\, h\left(1/2\right)\int_a^b x^{\rho-1}f(x)g(x)dx$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.3.11 Eğer (4.3.11) eşitsizliğinde $\rho = 1$ yazılırsa (4.1.1) eşitsizliği elde edilir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Araştırmanın esasını oluşturan dördüncü bölümün birinci kısmında Tanım 3.2.1'de B. Micherda ve T. Rajba'nın vermiş oldukları (3.2.1) eşitsizliğinden yararlanarak Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla (k, h)-konveks fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizlikler ve ikinci kısmında Tanım 3.2.1'de B. Micherda ve T. Rajba'nın vermiş oldukları (3.2.1) eşitsizliğinden yararlanarak uyumlu kesirli integralleri yardımıyla (k, h)-konveks fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizlikler verilmiştir. Bu sonuçlar "E. Set, A. Karaoğlan, Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for (k, h)-convex function via Riemann-Liouville and conformable fractional integrals, AIP Conference Proceedings, 1883(020039) (2017), 1-5." şeklinde yayınlanmıştır. Dördüncü bölümün üçüncü kısmında ise Tanım 3.2.1'de B.Micharda ve T. Rajba'nın vermiş oldukları (3.2.1) eşitsizliğinden yararlanarak Katugampola kesirli integralleri yardımıyla (k, h)-konveks fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsiz-likler verilmiş olup bu bölümde elde edilen sonuçlar "Hermite-Hadamard and Hermite-Hadamard -Fejér type inequalities for (k, h)-convex functions via Katugampola fractional integrals" başlıklı çalışma altında "International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences (ICANAS 2017)" isimli uluslararası konferansta sözlü bildiri olarak sunulmuş olup "E. Set, A. Karaoğlan, Hermite-Hadamard and Hermite-Hadamard-Fejér type i-nequalities for (k, h)-convex functions via Katugampola fractional integrals, Konuralp Journal of Mathematics, 5(2) (2017), 181-191" şeklinde makale olarak yayınlanmıştır. Konuyla ilgilenen araştırmacılar h-konvekslik, (k, h)-konvekslik gibi konveksliğin farklı sınıflarından ve Tanım 3.2.1' den faydalanarak Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejér tipli yeni eşitsizlikler elde edebilirler.

KAYNAKLAR

[1] Abdeljawad, T. 2015. On conformable fractional calculus. Journal of Computational and Applied Mathematics, 729: 57-66.

[2] Adams, R.A., Essex, C. 2010. Calculus a complete course. Pearson Canada Inc., Toronto, Ontario.

[3] Anton, H., Rorres, C. 2006. Elementary linear algebra. Jhon Wiley and Sonsi Inc.

[4] Azpeitia, A.G. 1994. Convex functions and the Hadamard inequality. Revista Colombiana de Matemáticas, (28): 7-12.

[5] Breckner, W.W. 1978. Stetigkeitsaussagenf ureine Klass ever all gemeinerter konvexer funktionen in topologisc henlinearen Raumen. Institut Mathématique Publications (Beograd), 23(37): 13-20.

[6] Beckenbach, E.F., Bellman, R. 1961. Inequalities. Springer-Verlag, Berlin, 198 pp.

[7] Bagley, R.L., Torvik, P.J. 1983. A theorical basis for the application of the fractional calculus to viscoelasticity, J.Rheol., 27(3): 201-210.

[8] Bayraktar, M. 2006. Fonksiyonel analiz. ISBN 975-6009-74-8, Ankara.

[9] Bombardelli, M., Varošanec, S. 2009. Properties of h-convex functions related to the Hermite-Hadamard-Fejér inequalities. Computers and Mathematics with Applications, 58(9): 1869-1877.

[10] Caputo, M., 2001. Distributed order differential equations modelling dielectric induction and diffusion. Fractional Calculus and Applied Analysis, 4(4): 421-442.

[11] Chen, H., Katugampola, U.N. 2017. Hermite-Hadamard and Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for generalized fractional integrals. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 446: 1274-1291.

[12] Dönmez, A. 2001. Reel analiz. ISBN 975 347 3001, Ankara, 616 pp.

[13] Dahmani, Z. 2010. On Minkowski and Hermite-Hadamard integral inequalities via fractional integration. Annals of Functional Analysis, 1(1): 51-58.

[14] Dragomir, S.S., Pečarić , J., Person, L.E. 1995. Some inequalities of Hadamard type. Journal of Mathematics, 21(3): 335-341.

[15] Dragomir, S.S., Fitzpatrick, S. 1997. s-Orlicz convex functions in linear spaces and Jenses Discrete inequality. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 210(2): 419-439.

[16] Dragomir, S.S., Fitzpatrick, S. 1998. Hadamard's inequality for s-convex functions in the first sense and applications. Demonstratio Mathematica, 31(3): 633-642.

[17] Dragomir, S.S., Pearce, C.E.M. 2002. Selected topic on Hermite-Hadamard inequalities and applications. Melbourne and Adelaide, Victoria University, Australia.

[18] Fejér, L. 1906. Über die fourierreihen, II. Math. Naturwiss. Anz.Ungar.Akad. Wiss., 24: 369-390.

[19] Godunova, E.K., Levin, V.I. 1985. Nerevenstra dlja funccii sirokogo klassa soderzassego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkaii, Vycislitel Mat. i Mt. Fiz. Mezvuzov Sb. Nauc. Trudov. MPGI, Moscow, 138-142.

[20] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Polya, G. 1952. Inequalities, 2nd Ed., Cambridge University Press.

[21] Hardy, G.H., Riesz, M. 1915. The general theory of Dirichlet's series. Cambridge University Press, no:18, 78 pp.

[22] Hudzik, H., Maligranda, L. 1994. Some remark on s-convex functions. Aequationes Mathematicae, 48(1): 100-111.

[23] İşcan, İ. 2015. Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for convex function via fractional integrals. Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica, 60, No.3: 355-366.

[24] Johannes, J. 1994. Introduction to the theory of nonlinear optimization. ISBN 978-3-662-02985-5(eBook), Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[25] Katugampola, U.N. 2011. New approach to a generalized fractional integrals. Applied Mathematics and Computation, 218 (4): 860-865.

[26] Katugampola, U.N. 2011. Mellin transforms of generalized fractional integrals and derivatives. Applied Mathematics and Computation, 257: 566-580.

[27] Katugampola, U.N. 2014. New approach to generalized fractional derivatives. Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 6 (4): 1-15.

[28] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M. 2014. A new definition of fractional derivative. Journal of Computational and Applied Mathematics, 264: 65-70.

[29] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. 2006. Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies, 204pp.

[30] Maddox, J. 1970. Elements of functional analysis. Cambridge University Press, London, 208 pp.

[31] Maksa, G., Páles, Z.S. 2011. The equality case in some recent convexity inequlities. Opuscula Mathematica, 31(2): 269-277.

[32] Matkowski, J., Światkowski, T. 1993. On subadditive. Proceedings of The American Mathematical Society, 119: 187-197.

[33] Micharda, B., Rajba, T. 2012. On some Hermite-Hadamard-Fejér inequalities for (k, h)-convex functions. Mathematical Inequalities and Applications, 12(4): 931-940.

[34] Mitrinović, D.S. 1970. Analytic inequalities. Springer-Verlag, Berlin.

[35] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., Fink, A.M. 1991. Inequalities involving functions and their integrals and derivatives. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 587 pp.

[36] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., Fink, A.M. 1993. Classical and new inequalities in analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/ Boston/ London .

[37] Niculescu, C., Persson, L. 2006. Convex functions and their applications. A Contemporary Approach, Springer Science Business Media, Inc., 253.

[38] Nishimoto, K. 1991. An essence of Nishimoto's fractional calculus. Descartes Press, Koriyama.

[39] Oldham, K.B., Spanier, J. 1974. The fractional calculus. Academic Press, Newyork.

[40] Orlicz, W. 1968. A note on modular spaces. IX, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math., Astronom. Phys., 16: 801-808, MR 39:3278.

[41] Pachpatte, B.G. 2005. Mathematical inequalities. Elsevier B.V., Volume 67, Amsterdam, The Netherlands 591 pp.

[42] Pečarić, J.E., Proschan, F., Tong, Y.L. 1992. Convex functions. Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press Inc.

[43] Roberts, A.W., Varberg, D.E. 1973. Convex functions. Pure and Applied Mathematics, Academic Press, vol. 57, New York-London, 300 pp.

[44] Rosenbaum, R.A. 1950. Subadditive functions, Duke Mathematical Journal, 17: 227-242.

[45] Ross, B. 1974. Fractional calculus and its applications. Proceedings of the International Conferance, New Haven, June 1974, Springer Verlag, Newyork.

[46] Samko, S.G., Kilbaş, A.A., Marichev, O.I. 1993. Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications., Gordon and Breach, Amsterdam.

[47] Sarıkaya, M.Z., Set, E., Özdemir, M.E. 2010. On some new inequlities of Hadamard type involving h-convex functions. Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 79(2): 265-272.

[48] Sarıkaya, M.Z., Set, E., Yaldiz, H., Başak, N. 2013. Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, 57(9): 2403-2407

[49] Set, E., 2012. New inequalities of Ostrowski type for mapping whose derivatives are s-convex in the second sense via fractional integrals. Computers and Mathematics with Applications, 63: 1147-1154.

[50] Set, E., İşcan, İ., Sarıkaya, M.Z., Özdemir, M.E. 2015. On new inequalities of Hermite-Hadamard-Fejer type for convex functions via fractional integrals, Applied Mathematics and Computation, 259: 875-881.

[51] Set, E., İşcan, İ., Zehir, F. 2015. On some new inequalities of Hermite-Hadamard type involving harmonically convex functions via fractional integrals, Konuralp Journal of Mathematics, 3(1): 42-55.

[52] Set, E., Mumcu, İ. Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for conformable fractional integrals, ResearchGate, https://www.researchgate.net/publication/303382008.

[53] Set, E., Sarıkaya, M.Z., Özdemir, M.E., Yıldırım, H. 2014. The Hermite-Hadamard's inequality for some convex functions via fractional integrals and related results. Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics, 10(2): 69-83.

[54] Varošanec, S. 2007. On h-convexity. Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics, 326(1): 303-311.

[55] Weyl, H. 1917. Bemerkungen zum Begriff des Differantialquotienten gebrochener Ordnung. Vierteljahresschrift der Natur forschhenden Gesellschaft in Zürich, 62: 296-302.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	Ali KARAOĞLAN
Doğum Yeri	:	Ulubey / Ordu
Doğum Tarihi	:	01.02.1980
Medeni Hali	:	Evli
Bildiği Yabancı Dil	:	İngilizce
İletişim Bilgileri	:	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, aliblackboy80@hotmail.com
Lise	:	Ordu Fatih Lisesi (Süper Lise), 1995-1999
Lisans	:	Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü, 1999-2003
Yüksek Lisans	:	Ordu Üniversitesi, 2017