T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TANJANT DEMETİN GEOMETRİSİ

BÜŞRA HÜMEYRA YILDIRIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2018

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Büşra Hümeyra YILDIRIM tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT danışmanlığında yürütülen "Tanjant Demetin Geometrisi" adlı bu tez, jürimiz tarafından 18/ 01/ 2018 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT

Başkan	:	Doç. Dr. Selahattin MADEN Ordu Üniversitesi Matematik Bölümü	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT Ordu Üniversitesi Matematik Bölümü	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Haşim ÇAYIR Giresun Üniversitesi Matematik Bölümü	İmza :

ONAY:

14 /02/2018 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 15/02/ 2018 tarih ve 2018 / 100 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1923

Enstitü Müdürü
Yrd. Doç. Dr. Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Büşra Hümeyra YILDIRIM

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

TANJANT DEMETİN GEOMETRİSİ

Büşra Hümeyra YILDIRIM

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 54 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT)

Bu tezde, Riemannian metrik çeşitlerinin teğet demetlerinin geometrisi üzerine en iyi sonuçlarından bazılarının detaylı ve birleşik sonuçlarını yazmak amacıyla *M*'de ki vektör alanlarının dikey ve yatay liftlerinin *TM* tanjant demeti üzerinde Lie parantezi açık ifadelerle türetildi. Liftlerin local koordinatları incelendi. Riemannian metriğinin Natural metrik olabilmesi için Levi-civita konneksiyonunun denklemleri sağlatıldı. $C^{\infty}(TM)$'de vektör alanları için *TM* tanjant demetteki Cheeger-Gromoll metriği verildi. Levi-Civita konneksiyonunun denklemleri ispatlandı. (TM,$\tilde{g}$) tanjant demeti Levi-Civita konneksiyonunu belirleyen eğrilik tensörü hesaplandı. Ayrıca hesaplamalar sonucu *M* manifold tabana sahipse $\tilde{g}$ Cheeger-Gromoll metriği ile *TM* homojen(eğrilik) olmadığı görüldü. Belirli değerler için diskriminant hesaplanmış 3 bileşene bağlı minimum ve maksimum değerler arasında grafik çizilmiş ve de aradığımız horizontal(yatay) çizgiler ailesi parametreleştirildi.

Anahtar Kelimeler: Tanjant demet, Dikey ve Yatay Liftler, Liftlerin Lokal Koordinatları, Lie parantezi, Natural metrik, Sasaki metriği, Cheeger-Gromoll metriği, Levi-Civita konneksiyonu.

ABSTRACT

TANJANT BUNDLE GEOMETRY

BÜŞRA HÜMEYRA YILDIRIM

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MSc. THESİS, 54 P.

(SUPERVISOR: Yrd. Doç. Dr. SÜLEYMAN ŞENYURT)

In this thesis, Lie parentheses are explicitly derived on the TM tangent bundle of vertical and horizontal lifts of vector fields in M to write the detailed and concatenated results of some of the Riemannian metric varieties on geometry of the tangent bundles. The local coordinates of the lifts are examined.In order for the Riemannian metric to be a Natural metric, the Levi-Civita connection equations are provided and these connection equations are proven. For the vector fields in $C^{\infty}(TM)$, the Cheeger-Gromoll metric of TM tangent is given. $(TM, \tilde{g})$ tangent bundle of the curvature tensor determining the Levi-Civita connection is calculated. After the calculations if the result provides M has a manifold table, $\tilde{g}$ Cheeger-Gromoll metric and TM is not homogeneous (curvature). Discriminant calculated for some certain values, between the minimum and maximum values depending on 3 components related plots are drawn and the family of horizontal lines that we are looking for is parameterized.

Keywords: The Tanjant Bundle, Vertical ve Horizontal Lifts, Lifts in Local Coordinates, Lie bracket, Natural Metric, Sasaki Metric, Cheeger-Gromoll Metric, Levi-Civita connections.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan, samimiyetini benden esirgemeyen ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT'a en samimi duygularım ile teşekkürlerimi sunarım.

Yine bu tezin hazırlanmasında ciddi desteğini gördüğüm Giresun Üniversitesi Fen-Edebiyat fakültesi Matematik bölümü öğretim üyesi Sayın Yrd. Doç. Dr. Haşim ÇAYIR'a içtenlikle teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, teşekkürlerin az kalacağı diğer üniversite hocalarımın da bana bunca yıllık üniversite hayatım boyunca kazandırdıkları her şey için ve beni gelecekte söz sahibi yapacak bilgilerle donattıkları için hepsine teker teker teşekkürlerimi sunuyorum.

Öğrenim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen babama ve her anımda desteklerini esirgemeyip rahatlatan Serdar ÖZDEMİR'e ve de canım dostlarıma teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Cismi
T_pM	:	$p\varepsilon M$ noktasındaki tanjant uzay
TM	:	M manifoldunun tanjant demeti
TTM	:	İkinci mertebeden tanjant demeti
x^i, y^i	:	i. koordinat fonksiyonları
$\leq$	:	Küçük eşit
$\geq$	:	Büyük eşit
$\vee$	:	Supremum
$\wedge$	:	İnfimum
$\Rightarrow$	:	Gerek şart
$\Leftarrow$	:	Yeter şart
$\Leftrightarrow$	:	Gerek ve yeter şart
p, q	:	Vektör uzayının elemanları
ξ	:	Kanonik lineer izomorfizmi
π	:	Tabii İzdüşümü
$\mathrm{V}_{X(t)}$	:	Eğri teğetinin verticali
γ	:	Jeodezik eğri
$\nabla_X Z$	:	Z vektör alanının Levi-Civita konneksiyonu
$\mathscr{V}_{(p,u)}$	:	Vertical alt uzay
$\mathscr{H}_{(p,u)}$	:	Horizontal alt uzay
$\bar{g}$	:	Natural metrik
$\bar{\nabla}$	:	Natural metriğin Levi-Civita konneksiyonu
Γ^i_{jm}	:	Christoffel sembolü
γ^i_{jk}	:	(M, g)'de ∇ Levi-Civita konneksiyonunun Christoffel sembolleridir.
τ_M	:	TM'den M'ye kanonik projeksiyon
τ_{TM}	:	TTM'den TM'ye kanonik projeksiyon
$\hat{g}$	:	Sasaki metriği

$\hat{\nabla}$: Sasaki metriğinin Levi-Civita konneksiyonu

$\tilde{R}$: Eğrilik tensörü

$\tilde{g}$: Cheeger-Gromoll metriği

$\tilde{\nabla}$: Cheeger-Gromoll metriğinin Levi-Civita konneksiyonu

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometrinin önemli konularından biri olan Riemannian Manifold'da Tanjant demetlerin Diferensiyel geometrisinin incelenmesi ilk olarak 1958 yılında Sasaki tarafından yapılmıştır. Sasaki 'On the Differantial Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifolds' çalışmasında M diferensiyellenebilir manifoldunun TM tanjant demetinde, M'nin g Riemannian metriğini kullanarak $\hat{g}$ metriğini üretmiştir. Bugün bu metrik, Sasaki metrik adı verilen Diferensiyel Geometride standart bir kavramdır.

Daha sonra Dombrowski 1962 yılında, Tanjant demetteki geometrilerin gelişmesine katkıda bulunmuştur. 1965 yılında Tanjant demette liftler çalışılmaya başlanmıştır. İlk çalışma 1965 yılında Kobayashi ve Yano tarafından Tanjant demette tensör alanlarının ve konneksiyonların tam(complete) ve dikey(vertical) liftleri olmuştur. (1967)'de Yano ve Ishihara yatay(horizontal) lift teorisini geliştirmiştir. TM'nin TTM tanjant demetinin yapısı, horizontal ve vertical alt demetlerine doğal bir bölünmeye dayanır. Lie paketi TM 'nin Lie köşebenti için açık ifadeler Dombrowski tarafından verilmiştir.

TM'de Sasaki metriğinin $\hat{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu ve $\hat{R}$ Riemannian eğrilik tensörü Kowalski (1971) tarafından hesaplanmıştır.

(1972)'de Cheeger ve Gromoll,(M,g) Riemannian manidoldunun TM tanjant demetinde, Cheeger-Gromoll metriği adıyla yeni bir $\tilde{g}$ metriğini üretmişlerdir. Cheeger ve Gromoll, negatif eğriliğin tam manifoldlarını incelemiş ve (1988)'de Musso ve Ticerri Riemannian metriğinin açık formülünü vermişlerdir.

Kowalski, Aso, Musso ve Tricerri (M,g) ve $(TM,\hat{g})$ geometrik özellikleri arasında ilginç bağlantılar üretmişlerdir. (1988)'de Musso ve Tricerri , Sasaki metriğinin sabit skalar eğrilikli olması için gerek ve yeter şartın (M,g)'nin lokal olarak Euclidean olması gerektiğini göstermiştir.

Sekizawa,(1991)'de ∇ Levi-Civita konneksiyonunu ve Cheeger-Gromoll metriğiyle donatılmış teğet demetinin $(TM,\tilde{g})$ eğrilik tensörü $\tilde{R}$'yi hesaplamıştır. (M,g) ve $(TM,\tilde{g})$ geometrik özellikleri arasındaki ilişkileri de bulmuştur. Gudmundsson ve Kappos (2002) tamamlamıştır.

Bu araştırmanın amacı Riemann metriğinin çeşitlerini Tanjant demetin geometrisi üzerinde ki en iyi sonuçlarından bazılarının detaylı ve birleşik sunumunu yazmaktır. Türevsel çeşitlerin Tanjant demetleri, Matematik ve Fizik'teki bir çok alanda büyük önem taşır.

Diferensiyel geometri, eğri ve yüzeylerin Matematiksel Analiz metodları ile incelenmesi yolunun seçilmesi ile XVII. yüzyılda ortaya çıkmış ve günümüze kadar güncelliğini korumuş, Geometrinin bir bölümüdür. Diferensiyel Geometri objelerinin tensör demetlere liftlerinin (genişlemelerinin) incelenmesi, geometrinin hızlı bir şekilde gelişen bölümlerinden birisidir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Sasaki, (1958), Riemannian manifoldda Tanjant demetlerin Diferensiyel geometrisinin incelenmesini yapmıştır.

Dombrowski, (1962), Tanjant demetteki geometrilerin gelişmesine katkıda bulunmuştur. Lie paketi TM 'nin Lie köşebenti için açık ifadeler Dombrowski tarafından verilmiştir. 1965 yılında Tanjant demette liftler çalışılmaya başlanmıştır.

Kobayashi ve Yano, (1965), İlk çalışma, Tanjant demette tensör alanlarının ve konneksiyonların tam(complete) ve dikey(vertical) liftleri olmuştur.

Yano ve Ishihara, (1967), Yatay(horizontal) lift teorisini geliştirmiştir.

Kowalski, (1971), TM'de Sasaki metriğinin $\hat{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu ve $\hat{R}$ Riemannian eğrilik tensörünü hesaplamıştır.

Cheeger ve Gromoll, (1972), (M,g) Riemannian manidoldunun TM tanjant demetinde, Cheeger-Gromoll metriği adıyla yeni bir $\tilde{g}$ metriğini üretmişlerdir.

Musso ve Ticerri, (1988), İlk olarak Cheeger ve Gromoll tarafından incelenen negatif eğriliğin tam manifoldlarına faydalı Riemann metriğinin açık formülünü vermişlerdir. Ayrıca Sasaki metriğinin sabit skalar eğrilikli olması için gerek ve yeter şartın (M,g)'nin lokal olarak Euclidean olması gerektiğini göstermişlerdir.

Sekizawa, (1991), ∇ Levi-Civita konneksiyonunu ve Cheeger-Gromoll metriğiyle donatılmış teğet demetinin $(TM,\tilde{g})$ eğrilik tensörü $\tilde{R}$'yi hesaplamıştır. (M,g) ve $(TM,\tilde{g})$ geometrik özellikleri arasındaki ilişkileri de bulmuştur.

2.1 TEMEL KAVRAMLAR

2.1.1 Tangent Bundle

Bu çalışma boyunca M'nin maksimal atlas $A=\{(U_{\alpha,x_\alpha)|\alpha\in I}\}$ 'ya sahip düzgün m boyutlu bir manifold olduğunu varsayacağız.

$p\in M$ noktası için M üzerindeki p tanjant uzayını T_pM ile gösterelim.
$p\in U$ ve M üzerinde (U,x) in lokal koordinatları $(\frac{\partial}{\partial_{x_k}})_p\in T_pM$ olarak tanımlanır.

Burada $\{e_k, k = 1, \ldots, m\}$ için R^m de standart taban

$$(\frac{\partial}{\partial_{x_k}})_p : F \to \frac{\partial f}{\partial_{x_k}}(p) = \partial_{e_k}(fox^{-1})(x(p))$$

şeklindedir. Buradan

$$\{(\frac{\partial}{\partial_{x_k}})_p | k = 1, \ldots, m\}$$

T_pM için bir temel oluşturur. M'nin tanjant demeti $TM = \{(p,u) | p \in M, u \in T_pM\}$ diye adlandırılır ve projeksiyon dönüşümü $\pi : TM \to M$, $\pi : (p,u) \mapsto p$'dir.

Teorem 2.1.1 M, düzgün bir m-boyutlu bir manifold olsun. $2m$-boyutlu düzgün manifoldun TM tanjant demet yapısı verilebilir (Dombrowski, 1962),(Çayır, 2015).

İspat. A, M'nin maximal atlası olsun. A'da (U,x) için local koordinatları $x^* : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$'ye bakarak

$$x^* : (p, \sum_{k=1}^{m} u_k \frac{\partial}{\partial_{x_k}}|_p) \mapsto (X(p), (u_1, \ldots, u_m)).$$

$(TM, \mathbf{T}_{TM})$ $2m$-boyutlu topolojik manifoldun lokal koordinatları TM tanjant demeti üzerinde $\mathbf{T}_{TM}$ topolojisi ve $(\pi^{-1}(U), x^*)$ için

$$\{(x^*)^{-1}(W) \subset TM | (U,x) \in A \ \ ve \ \ W \subset x(U) \times \mathbb{R}^m\}$$

Eğer M üzerinde $p \in U \cap V$ öyleki (U,x) ve (V,y) local koordinatlar ise geçiş haritası

$$(y^*)o(X^*)^{-1} : x^*(\pi^{-1}(U \cap V)) \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

tarafından

$$(x,u) \mapsto \left(yox^{-1}(x), \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial_{y_1}}{\partial_{x_k}}(x^{-1}(x))u_k, \ldots, \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial_{y_1}}{\partial_{x_k}}(x^{-1}(x))u_k \right).$$

olarak verilir. yox^{-1} geçiş haritasının düzgün olması $(y^*)o(x^*)^{-1}$ bileşiminin düzgün olduğunu gösterir. $\{(\pi^{-1}(U), x^*) | (U, \emptyset) \in A$ kapsayan TM için maksimal atlas A^* verilsin. (TM, A^*) düzgün manifolddur. Yukarıdaki A^* yapısının doğrudan bir sonucu olarak demet haritasının $\pi : TM \to M$'nin düzgün olduğunu görüyoruz. Her $p \in M$ noktası için $\pi^{-1}(p)$ fibresi M'deki tanjant uzayı T_pM'dir ve bu nedenle m-boyutlu bir vektör uzayıdır. $(U,x) \in A$ için $\bar{x} : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^m$ tarafından lokal koordinatlar

$$\bar{x} : (p, \sum_{k=1}^{m} u_k \frac{\partial}{\partial_{x_k}}|_p) \to (p, (u_1, \ldots, u_m)).$$

ile tanımlar. T_pM tanjant uzayına kısıtlaması

$$\bar{x} : \bar{x}|_{T_pM} : T_pM \to \{p\} \times \mathbb{R}_m$$

için

$$\bar{x} : \sum_{k=1}^{m} u_k \frac{\partial}{\partial_{x_k}}|_p \to (u_1, \ldots, u_m)$$

açıkçası bir vektör uzayı izomorfizmidir. Bu ifade şu anlama gelmektedir TM için teğet grafik teğet grafiği $\bar{x} : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^m$ ve $m-$boyutlu topolojik vektör demetine dönüştüren (TM, M, π) demet atlası $\{(\pi^{-1}(U), \bar{x}) | (U,x) \in A\}$dir. (M,A) düzgün manifold olduğundan (TM, M, π) vektör demeti $\{(\pi^{-1}(U), \bar{x}) | (U,x) \in A\}$ içeren B maksimal demet atlası ile birlikte düzgün bir vektör demetidir.

2.1.2 Vertical ve Horizontal Liftler

Bundan sonra her teğet uzayda M Manifoldunun bir $\| \, . \, \|$ norm üreten bir g Riemannian metriği ile tanımlı olduğu kabul edilecektir. (M, g)'nin Levi-Civita konneksiyonu ∇ ile gösterilecektir.

$\pi : TM \to M$ teğet haritasının diferensiyeli $d\pi : TTM \to M$ düzgün haritadır. $(p, u) \in TM$ için (p, u)'ya göre çekirdeği ve (p, u) noktasında ki $T_{(p,u)}TM$, *vertical alt uzayı* ele alalım. Bu uzay

$$\mathbf{V}_{(p,u)} = Ker(d\pi|_{p,u})$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.1 $X : I \to TM$ tanjant demeti içinde ki $X^{'}(t)$ bir eğri teğeti tüm $t \in I$ için eğer $X'(t) \in \mathbf{V}_x(t)$ 'yi sağlıyorsa buna vertical denir.

Tanım 2.1.2 M'nin bir açık komşuluğu $\mathbf{V}$ olsun. Öyle ki $\mathbf{V}$ üstüne T_pM diffeomorfik bileşiği 0'ın $V^{'}$ harita komşuluğunun üstel haritası $exp_p : T_pM \to M$dir (Dombrowski, 1962).

Sonrasında harita konneksiyonu $K_{(p,u)} : T_{(p,u)}TM \to T_pM$ dır. Her $Z \in T_{(p,u)}TM$ için ∇ Levi-Civita konneksiyonu tarafından $K(Z) = d(exp_p oR_{-u} o\tau)(Z)$ tanımlanır (Dombrowski, 1962).

Lemma 2.1.1 (M,g) Riemannian manifoldu ile ∇ Levi-Civita konneksiyonu olsun. $X_p \in T_pM$ *ve* $Z : I \to TM$ haritası için $Z \in C^\infty(TM)$ vektör alanı, $K_{(p,u)} : T_{(p,u)}TM \to T_pM$ harita dönüşüm denklemi $K(dZ_p(X_p)) = (\nabla_X Z)_p$ şeklinde verilir (Dombrowski,1962).

İspat. Z, p'deki değeri (p,u) olan vektör alanı olsun. Dönüşüm denklemi $K_{(p,u)}(dZ_p(X_p))$ aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\begin{aligned}
K_{(p,u)}(dZ_p(X_p)) &= d(exp_p oR_{-u} o\tau)(dZ_p(X_p)) \\
&= \frac{d}{dt}(exp_p oR_{-u} o\tau(Z_{\gamma(t)}))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(exp_p(\tau(Z_{\gamma(t)}) - u))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\tau(Z_{\gamma(t)})|_{t=0} \\
&= \nabla_X Z.
\end{aligned}$$

Tanım 2.1.3 (p,u) noktasındaki TM tanjant demeti için $T_{(p,u)}TM$ Tanjant uzayının $H_{(p,u)}$ horizontal alt uzayı $H_{(p,u)} = Ker\big(K_{(p,u)}\big)$ denklemi ile tanımlanır. Bütün $t \in I$ için $X'(t)$ teğeti eğer $X'(t) \in H_x(t)$ şartını sağlarsa Tanjant demette $X : I \to TM$ eğrisi horizontaldir denir (Dombrowski, 1962).

$\gamma : I \to M, \gamma(0) = P, \gamma'(0) = U$ şartlarını sağlayan M'de bir eğri ve $X : I \to TM$ γ eğrisi boyunca bir vektör alanı (yani tanjant demetin (p,u) noktasında ki γ eğrisi $\pi oX = \gamma$ şartını sağlar) olsun. Diğer bir değişle her t için $\big(\gamma(t), U(t)\big)$'deki X haritaları için $U(t) \in T_{\gamma(t)}M$ ve $U(O) = u$. Böylece K haritasının ∇ konveksiyonu

$$K_{(p,u)} : X'(t) \mapsto (\nabla_{\gamma'} U(0))$$

şeklinde olur. Bu demektir ki tanjant demetteki horizontal eğriler (M,g,∇) Manifoldunun paralel vektör alanlarıdır. Bu bulgu horizontal alt uzayların tanımı için ana bir etkendir.

Önerme 2.1.1 (p,u) noktasındaki $T_{(p,u)}TM$ tanjant uzayı onun tanjant demette horizontal alt uzayı vertical alt uzayının direk toplamı

$$T_{(p,u)}TM = H_{(p,u)} \oplus V_{(p,u)}$$

şeklinde yazılır (Sasaki, 1958 ve Dombrowski, 1962).

İspat. Tanım 2.1.2 kullanarak biz $\pi^{-1}(V)$ deki bütün dikey tanjant vektörlerin haritalarının kontraksiyonu $\tau : \pi^{-1}(V) \to T_pM$ şeklinde olduğu görülür. T_uT_pM'nin $d(exp_p o R_u)$ haritası bir izomorfizmdir. Yani $u \in T_pM$ için tanjant uzay T_pM 'dir. Dolayısıyla K'nın çekirdeği, yani $H(p,u)$ horizontal uzayı ve $V(p,u)$ dikey uzayı $H_{(p,u)} \cap V_{(p,u)} = \{0\}$ ve basit boyutlu argümanlar için takip eden sonuçları da sağlar.
M'deki tanjant vektörlerinin yatay ve dikey lifleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1.4 $X \in C^\infty(TM)$ vektör alanının horizontal lifti $X^h \in C^\infty(TTM)$ bir vektör alanıdır. Aynı şekilde vektör alanının vertical liftide tanımlanır. X, M'de bir vektör alanı olsun. V vektör alanın X^h, X^v vertical liftleri TM'de $Z \in TM$ için

$$X^H = X^C - \nabla_Y X, \ \ \nabla_Y X =_Y (\nabla X)$$

$$X^C : \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix}, \quad \nabla_\gamma X : \begin{pmatrix} 0 \\ Y^i \nabla_j X^h \end{pmatrix}$$

$$X^H : \begin{pmatrix} X^h \\ -\Gamma_i^h X^i \end{pmatrix}, \quad \Gamma_i^h = y^j \Gamma_j^h$$

ve

$$\tilde{X}^j(\partial_j w_i) y^i + \tilde{X}^j w_j = w_1 X^1, \quad X^V : \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix}$$

şartlarını sağlayan tek vektör alanlarıdır (Sasaki, 1958).

2.1.3 Konneksiyonların Dönüştürülmesi

Keyfi iki afin konneksiyonlu uzayların difeomorfizmini göz önüne alalım. Bu durumda, bu uzayların karşılıklı noktalarının koordinatları aynı olacak şekilde uygun eğrisel koordinat sistemi verilebilir. Bu tür karşılık getirme, bir X_n diferensiyellenebilir manifoldunda iki keyfi afin konneksiyonun verilmesiylede oluşturulabilir. Bu işleme konneksiyonların dönüştürülmesi veya paralel kaydırma kuralının dönüştürülmesi olarak bakılabilir. Aynı Manifold üzerinde çeşitli konneksiyonlar dahil etmek mümkündür.

2.1.4 Natural Metrikler

Bu bölümde (M,g) Riemannian manifoldunun tanjant demetindeki Cheerger-Gromoll ve Sasaki metriklerinden bahsedilecektir.

Tanım 2.1.5 (M,g) Riemannian manifoldu olsun. Her $X,Y \in C^\infty(TM)$ ve $(p,u) \in TM$ için TM tanjant demetinin $\bar{g}$ Riemannian metriğinin M'deki g metriğine göre bir naturel metrik olabilmesi için

$$1)\bar{g}_{(p,u)}(X^h,Y^h) = g_p(X,Y),$$
$$2)\bar{g}_{(p,u)}(X^h,Y^v) = 0$$

şartlarını sağlayan $\bar{g}$ Riemannian metriğine Natural metrik denir
(Gudmundsson ve Kappos, 2002).

2.1.5 Sasaki Metriği

$\hat{\nabla}$, $\hat{g}$ Sasaki metriğinin Levi-Civita konneksiyonu olsun.(M,g) manifoldunun Sasaki metriğine göre tanjant demeti TM ile gösterilir.

Tanım 2.1.6 (M,g) Riemannian manifoldu olsun. Bu durumda M'nin tanjant demetinin $\hat{g}$ Sasaki metriği her $X,Y \in C^\infty(TM)$ *ve* $(p,u) \in TM$ için

$$1)\ \hat{g}_{(x,u)}(X^h,Y^h) = g_p(X,Y),$$
$$2)\hat{g}_{(x,u)}(X^v,Y^h) = 0,$$
$$3)\ \hat{g}_{(x,u)}(X^v,Y^v = g_p(X,Y)$$

eşitliklerini sağlar. Sasaki metriği naturel metrikleri içerir (Sasaki, 1958) .

2.1.6 Cheeger-Gromoll Metriği

Cheeger ve Gromoll, Manifold üzerinde negatif olmayan bütün eğriliği çalışmışlar ve Riemann metriklerinin inşaasını önermişlerdir. Buna göre (M,g) bir Riemannian manifoldu olarak verildiğinde TM tanjant demeti üzerinde $\hat{h}$'nin bir doğal metrik olarak kullanıldığını gösterdiler. Bunun yanı sıra ilk olarak 1988'de Musso ve Tricerri tarafından TM üzerindeki Cheeger-Gromoll metriğinin açık formülleri verilmiştir. $u = (v_{m+1},\ldots,v_{2m})$, $u \in C^\infty(TM)$ bir vektör alanı için U tarafından local koordinatlarda TM'nin Kanonik vertical vektör alanı

$$U = \sum_{i=1}^{m} v_{m+i}(\frac{\partial}{\partial_{v_{m+i}}})_{p,u}$$

şeklinde verilir(Cheeger-Gromoll, 1972),(Çayır, 2017*b*). Gösterimi basitleştirmek için $\alpha = 1+r^2$ *ve* $r(p,u) = |u| = \sqrt{g_p(u,u)}$, $r : TM \to \mathbb{R}$ şeklinde ifade edilecektir.

Tanım 2.1.7 (M,g) bir Riemannian manifold olsun. Bütün $X,Y \in C^\infty(TM)$ vektör alanları için TM tanjant demetinde

$$1)\tilde{g}_{(p,u)}(X^h,Y^h) = g_p(X,Y)$$
$$2)\tilde{g}_{(p,u)}(X^h,Y^v) = 0,$$
$$3)\tilde{g}_{(p,u)}(X^h,Y^h) = \frac{1}{1+r^2}(g_p(X,Y)+g_p(X,u)g_p(Y,u)).$$

şartlarını sağlayan $\tilde{g}$ metriğini Cheeger - Gromoll metriği denir (Cheeger ve Gromoll, 1972),(Çayır, 2017*a*).

2.1.7 Kanonik Projeksiyon

Tanım 2.1.8 TM'de M manifoldu üzerinde sürekli ve örten

$$\begin{aligned} \tau_M : TM &\to M \\ z &\to \tau_M(z) = p \end{aligned}$$

dönüşümüne kanonik projeksiyon denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Diferensiyellenebilir Manifoldlar

X Haussdorff topolojik uzay olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinin $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine $\varphi : U \to V$ homeomorfizmine X'de n-boyutlu koordinat sistemi, U'ya ise φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir. Bazen harita (U,V) şeklinde de gösterilir. Eğer $x \in U$ ise $\varphi(x) = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ olur. $x^1, x^2, \ldots, x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir (Dülger, 2010).

Tanım 3.1.1 X Haussdorff topolojik uzayının n-boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha, \quad (A\textit{-indisler kümesi})$$

ise X'e n-boyutlu topolojik manifold veya sadece n boyutlu manifold denir (Çayır, 2013).

Tanım 3.1.2 M bir cümle olsun ve $X : M \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu için diferensiyellenebilir Manifold $x = U$ olmak üzere aşağıdaki iki aksiyom sağlanıyor ise (U,x)'ye M'de bir n-boyutlu harita denir:

1) X, birebir,

2) $X(U), \mathbb{R}^n$'de açıktır (Dülger, 2010).

Teorem 3.1.1 Bir diferensiyelleneblir manifoldun denk atlasları aynı tam atlas içerisinde bulunur. Dolayısıyla her bir tam atlas bir denklik sınıfıdır.(Dülger, 2010)

Tanım 3.1.3 Bir M cümlesinin bir C^∞-tam atlasına M'de bir n-boyutlu C^∞-yapı denir.Bu yapı ile birlikte M'ye n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold adı verilir (Dülger, 2010).

Tanım 3.1.4 S ve T iki topolojik uzay $f : S \to T$ bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon sürekli, birebir ve açık ise f fonksiyonuna bir homeomorfizm denir.

3.2 Diferensiyellenebilir Fonksiyon

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ olmak üzerine $\mathbb{R}^n$ uzayının koordinat fonksiyonları $x_1, x_2, \ldots, x_n$ olsun. $1 \leqslant i \leqslant n$ için $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ olmak üzere

$$x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$p \mapsto x_i(p) = p_i$$

dir. p noktasında f'nin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koordinat fonksiyonlarına göre kısmi türevleri var ve sürekli ise f fonksiyonuna p noktasında diferensiyellenebilirdir denir. $\mathbb{R}^n$'nin her bir p noktasında f fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri varsa f fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri varsa f fonksiyonu C^∞ sınıfındandır denir.

$$\begin{array}{rcl} & f : \mathbb{R}^n \to & \mathbb{R}^m \\ f_j = \pi_j o f & \searrow & \downarrow \pi_j \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n,$

$\pi_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ 1 \leq j \leq m,$

$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$

$f(z) = \big(f_1(z), \ldots, f_n(z)\big),\ z \in \mathbb{R}^n$

1) X birebirdir.
2) $X(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ açıktır.

O halde $(\mathbb{R}, x), \mathbb{R}$'nın bir haritasıdır. $A = \{(\mathbb{R}, x)\}$ olsun.

1) Örtü aksiyomu aşikardır.
2) $xox^{-1} = x$ difeomorfizmdir.

$$\begin{array}{ccc} M & \overset{I = xox^{-1}}{\overbrace{\to}} & M \\ & x \searrow & \downarrow x \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

$A = \{(\mathbb{R}, X)\}, \mathbb{R}$'nın bir C^∞-atlasıdır. Bu atlasın belirttiği C^∞-yapı ile birlikte $\mathbb{R}$, 1-boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur (Dülger, 2010).

Tanım 3.2.1 X topolojik Haussdorff uzay ve k ise $0 \leq k \leq \infty$ şartını sağlayan tam sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \subset X\}$ lokal koordinatlar ailesine X üzerine C^k sınıfından n-boyutlu atlas adı verilir (Dülger, 2010).

1) Lokal haritaların U_α bölgesi X'i örter, yani X, h boyutlu topolojik manifolddur.

2) Keyfi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ ise $\varphi_\beta o \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \to \varphi_\beta(U_\beta \cap U_\beta)$ dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta bazen $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ *ve* (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı denir. $\varphi_\beta o \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü $(U_\beta^i) = U_\beta^i(U_\alpha^i)$ $i, j = 1, \ldots, n$ denir. Burada $U_\beta^i, (U_\beta, \varphi_\beta)$ haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatları U_α^i ise $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritasındaki x noktasının koordinatlarıdır. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ ise bu duruma $\varphi_\beta o \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tayin edilemez. Bu durumda $\varphi_\beta o \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün

C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2.şartı $\varphi_\beta o \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından diffeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise $\varphi_\beta o \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün jakobiyen matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir (Dülger, 2010).

Tanım 3.2.2 $\{(U_\infty, \varphi_\beta)\}$ *ve* $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$, C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ *ve* $(U_\beta, \varphi_\alpha)$ haritaları C^k uzlaşmış ise yani, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise verilen atlaslara denk atlaslar denir.

Tanım 3.2.3 X Haussdorff uzay üzerine C^k atlaslarının denklik sınıfına C^k-yapı denir. C^k- yapısının tüm C^k atlaslarının birleşimi yine C^k atlas oluşturur. Bu atlasa maksimal C^k atlas adı verilir.
X üzerindeki her bir C^k yapısının bu yapıdan olan bir C^0-yapıya topolojik yapı, C^k, $(1 \leq k \leq \infty)$ yapıya ise düzgün(smooth) yapı denir. Bundan sonra yalnız C^∞ sınıfından olan yapılara bakılacaktır.

Tanım 3.2.4 TM, C^∞- manifolduna, M'nin tanjant manifoldu denir. (U,x) ikilisi, M, C^∞- manifoldu için bir haritası olsun. $U \subset M$ bir açık alt cümle olduğundan $\pi^{-1}(U) = U^{'}$ cümlesi TM'nin bir açık alt cümlesi olur. U üzerindeki lokal koordinat sistemi $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd} U^{'} \subset TM \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "v^i"'] & & U \subset M \arrow[dl, "x^i"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak biçimde $v^i : U^{'} \subset TM \to \mathbb{R}$, $(1 \leq i \leq n)$reel değerli fonksiyonları göz önüne alalım. Bu durumda her bir $z \in U^{'}$ için

$$v^i z = (x^i o \pi)(z) = X^i b(\pi(z)) = x^i(p).$$

Ayrıca $V^{n+i} : U^{'} \subset TM \to \mathbb{R}$, $(1 \leq i \leq n)$ reel değerli fonksiyonları da her bir $z \in U^{'}$ için $v^{n+i}(z) = dx^i(z) = z(x^i)$: z-nin i-inci bileşeni olarak tanımlansın. Böylece

$$v^i = x^i o \pi, \ 1 \leq i \leq n$$
$$v^{n+i} = (z) = dx^i(z), z \in U^{'}$$

sistemi elde edilir. Bu sisteme kısaca $\{V\}, V = (V^{'}, V^2, \ldots, V^{2n})$ şeklinde gösterecek olursak, $\{V\}$ sistemi TM için bir (lokal)koordinat sistemi ve $(U^{'}, V)$ ikilisi de TM için bir (lokal) harita olur. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $V^{n+i} = y^i$ ile gösterilirse, TM'nin lokal koordinat sistemi $\{V\} = (V^i, V^{n+i}) = (x^i, y^i) = (x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n) = (x, y)$ şeklinde ifade edilir. (x^i, y^i) şeklindeki gösterimde $x^i, x^i o\pi$ anlamındadır. (x^i, y^i) sistemine, (x^i)'den indirgenmiş (lokal) koordinat sistemi denir. TM'nin herhangi bir z noktasındaki tanjant uzayı $T_z(TM)$'nin bir bazı

$$\left\{\frac{\partial}{\partial_{x^i}}\mid_{\pi(z)}, \frac{\partial}{\partial_{y^i}}\mid_z; 1 \leq i \leq n\right\}$$

olup buna $T_z(TM)$'nin standart bazı denir. Böylece her bir $A_z \in T_z(TM)$ elemanı

$$A_z = \sum_{\alpha=1}^{2n} A^\alpha(z)\frac{\partial}{\partial_{V^\alpha}}|_z = \sum_{i=1}^{n} A^i(z)\frac{\partial}{\partial_{x^i}}|_{\pi(z)} + \sum_{i=1}^{n} A^{n+i}(z)\frac{\partial}{\partial_{y^i}}|_z$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca TM üzerindeki C^∞ vektör alanlarının nodülü $T_0^1(TM)$ ile gösterilecek olursa, $T_0^1(TM)$'nin standart bazı da $\{\frac{\partial}{\partial_{x^i}}, \frac{\partial}{\partial_{y^i}}; 1 \leq i \leq n$ olup buradaki $\frac{\partial}{\partial_{x^i}}, \frac{\partial}{\partial_{x^i}} o\pi$ anlamındadır. $TM, 2n$-boyutlu bir C^∞-manifold olduğundan

$$TTM = \bigcup_{z \in TM} T_z(TM)$$

olmak üzere $\Gamma_{TM} = (TTM, \tilde{\pi}, TM, \mathbb{R}^{2n})$ dörtlüsü bir vektör demetidir. τ_{TTM} vektör demeti TM'nin tanjant demeti olup, M'nin ikinci tanjant demeti olarak da adlandırılır.

Tanım 3.2.5 n-boyutlu bir C^∞-manifold M,bir haritası (U, x^h) ve M üzerinde lineer bir konneksiyon ∇ olmak üzere, M manifoldunun $x_{(i)} = \frac{\partial}{\partial_x^i}, x$ tane lokal vektör alanlarının TM'ye horizontal ve vertical liftlerinin (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre ifadesi,

$$X_i^H : \begin{pmatrix} \delta_i^h \\ -\Gamma_i^h \end{pmatrix} \quad ve \quad X_{(i)}^V : \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_i^h \end{pmatrix}$$

dir. Böylece elde edilen $2n$-tane lokal vektör alanları TM üzerinde bir baz oluşturmakta olup $\{X_1^H, \ldots, X_n^H, X_1^V, \ldots, X_n^V\}$ veya kısaca $X_{(i)}^H, X_{(i)}^V$ sistemine $TM(veya\pi^{(-1)}(u) = u')$ üzerinde ∇ lineer konneksiyonuna göre adapte çatı denir (Yano ve Ishihara,1973).

3.3 Manifold Üzerinde Konneksiyon Kavramı

3.3.1 Lineer Konneksiyon

M, C^{∞}-manifold ve bir $\nabla : T_0^1(M) \times T_0^1(M) \to T_0^1(M)$ dönüşümü verilsin. $\forall X,Y,Z \in T_0^1(M)$ *ve* $\forall f \in T_0^0(M)$ için

1) $\nabla_X +_Y Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

2) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$

3) $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$

4) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

ise ∇'ya M üzerinde bir lineer konneksiyon denir. M'nin bir haritası (U, X^h) olsun. Bu durumda

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial_{x^j}}} \frac{\partial}{\partial_{x^i}} = \Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial_{x^h}}$$

yazılabilir ve burada Γ_{ji}^h bileşenleri ∇'nın (X^h) koordinat sistemine göre bileşenleri Christoffel sembolleridir (Turgut, 1989), (Çayır, 2016*b*). Eğer Γ_{ji}^hler diferensiyellenebilirse ∇ lineer konneksiyonu diferensiyellenebilirdir. Bu çalışmada konneksiyonlar diferensiyellenebilirdir yani $\Gamma_{ji}^h \in T_0^0(M)$ alınacaktır.

3.3.2 Metrik Konneksiyon

(M,g) bir Riemann manifoldu ve $\nabla : T_0^1(M) \times T_0^1(M) \to T_0^1(M)$ M üzerinde bir lineer konneksiyon olsun.Eğer $\nabla_g \equiv 0$ veya her $X \in T_0^1$ için $\nabla_X g \equiv 0$ ise ∇'ya M üzerinde bir metrik konneksiyon denir (Kobayashi ve Nomizu,1963).

Yukarıdaki tanımda $\forall X,Y,Z \in T_0^1(M)$ için g'nin X'e göre kovaryant(tensör) türevi

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$$

olduğundan

$$X(g(Y,Z)) \equiv g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

ifadesi $\nabla_g \equiv 0$ şartına denktir (Turgut, 1989), (Çayır, 2017).

3.3.3 Riemann Konneksiyonu

(M,g) bir Riemann manifoldu ve $\nabla : T_0^1(M) \times T_0^1(M) \to T_0^1(M)$ M üzerindeki bir metrik konneksiyonu olsun. Eğer ∇ simetrik ise, ∇'ya M üzerinde Riemannian konneksiyonu (veya Levi-Civita konneksiyonu) denir (Kobayashi ve Nomizu,1963).

Teorem 3.3.1 Bir Riemannian manifoldu üzerinde Riemann konneksiyonu tektir (Kobayashi ve Nomizu,1963).

3.3.4 Eğrilik Tensör Alanı

M üzerinde lineer bir konneksiyon ∇ olsun. $R : T_0^1(M) \times T_0^1(M) \to L(T_0^1(M), T_0^1(M))$

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = R(X,Y,Z) &= [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]Z} \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan vektör değerli tensöre ∇ lineer konnekisyonunun eğrilik tensör alanı denir (Kobayashi ve Nomizu,1963).

Teorem 3.3.2 M bir C^∞ manifold ve ∇ ile ∇' de M üzerinde farklı iki konneksiyon olsun. Bu durumda $B : T_0^1(M) \times T_0^1(M) \to T_0^1(M)$ için $B(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla'_X Y$ şeklinde tanımlı B dönüşümü $T_0^1(M)$ değerli kovaryant tensördür (Turgut, 1989).

Teorem 3.3.3 $\nabla' : T_0^1(M) \times T_0^1(M) \to T_0^1(M)$ dönüşümü olsun. Bu durumda $(\nabla - \nabla') \in T_2^1(M) \equiv L^2(T_0^1(M), \quad T_0^1(M), T_0^1(M))$ ise ∇', M üzerinde bir lineer konneksiyondur (Kobayashi ve Nomizu,1963).

4. BULGULAR

4.1 Local Koordinatların Liftleri

m- boyutlu M manifoldunda ki (V,x) lokal koordinatları için aşağıdaki düzgün fonksiyonları tanımlıyoruz. $v_1,\dots,v_{2m}: TM \to \mathbf{R}$

$$v_i = x_i o \pi,$$
$$v_{m+i}(Y) = Y(x_i) = dx_i(Y)$$

$\forall \quad Y \in TM$ ve $i = 1,\dots,m.$ Bu durumda TM'de lokal koordinatlar $\big(v_1,\dots,v_{2m}\big): \pi^{-1}(V) \subset TM \to \mathbf{R}^{2m}$ şeklindedir. Tanım 2.1.4 kullanarak görülür ki her $Z \in TM$ ve $i = 1,\dots,m$ için

$$d\pi\big((\frac{\partial}{\partial v_i})z\big) = \big(\frac{\partial}{\partial x_i}\pi(z)\big) \ ve \ d\pi\big((\frac{\partial}{\partial v_{m+i}})z\big) = 0$$

sağlanır ve M'deki bütün düzgün fonksiyonlar f olmak üzere

$$d\pi\big(\frac{\partial}{\partial v_i}\big)(f) = \frac{\partial}{\partial v_i}(fo\pi) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f)$$

ve

$$d\pi\big(\frac{\partial}{\partial v_{m+i}}\big)(f) = \frac{\partial}{\partial v_{m+i}}(fo\pi) = 0$$

denklemleride sağlanır. Bu eşitliklerin bizi $X \in C^\infty(TM)$ vektör alanının X^h, X^v horizontal ve vertical liftleri için aşağıdaki sonuçlara götürür.

Lemma 4.1.1 (M,g) bir Riemannian manifoldu olsun. M 'deki $X,Z \in C^\infty(TM)$ vektör alanların lokal olarak

$$X = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ ve \ Z = \sum_{i=1}^{m} \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde gösterilir (Dombrowski, 1962).

$Z \in TM$ noktasındaki X'in X^v ve X^h dikey ve yatay lifleri

$$\big(X^h\big)z = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial}{\partial v_{m+i}}$$

ve

$$\big(X^h\big)z = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial}{\partial v_i} - \big(\sum_{i,j,k=1}^{m} \xi_j \eta_k \tau_{jk}^{i}\big) \frac{\partial}{\partial v_{m+i}}$$

denklemi ile verilir. Burada Γ^i_{jk} 'lar (M,g) 'de ∇ Levi-Civita konneksiyonunun Christoffel sembolleridir (Dombrowski, 1962).

İspat. Vertical kısmın formülü Tanım 2.1.4 ün direk sonucudur.
$X \; ve \; X^h, \; \pi(yani \; d\pi(X^h_z) = X_\pi(z))$ sağlanırsa aşağıdaki formüller direkt elde edilir.

$$d\pi\big((\frac{\partial}{\partial v_{m+i}})z\big) = 0 \; ve \; d\pi\big((\frac{\partial}{\partial v_i})z\big) = \big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big)\pi(z)$$

lokal koordinatlarına göre $Z : M \to TM$ haritası $Z : (x_1,\ldots,x_m) \mapsto (x_1,\ldots,x_m,\eta_1,\ldots,\eta_m)$ denklemi ile verilir. Böylece

$$\begin{aligned}
dZ(X) &= dZ(\sum_{i=1}^{m} \xi \frac{\partial}{\partial x_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \xi \frac{\partial}{\partial v_i} + \sum_{i,k=1}^{m} \xi \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial v_{m+k}} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial}{\partial v_i} + \sum_{i=1}^{m} X(\eta_k) \frac{\partial}{\partial_{m+k}} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \xi \frac{\partial}{\partial v_i} + \sum_{i=1}^{m} X(\eta_i) \frac{\partial}{\partial v_{m+i}}
\end{aligned}$$

denklemi sağlanır. $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ alalım ve $\big(\nabla_{X_j} X_m\big) = \sum_{i=1}^{m} \Gamma^i_{jm} X_i$ şartını sağlayan ∇'nın Cristoffel sembolleri Γ^i_{jm} olsun. Bu durumda Levi-Civita konneksiyonu aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$\begin{aligned}
\nabla_X Z &= \sum_{i=1}^{m} \nabla_X(\eta_i X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \big(X(\eta_i)X_i + \eta_i \nabla_X X_i\big) \\
&= \sum_{i=1}^{m} X(\eta_i)X_i + \sum_{i,j=1}^{m} \eta_i \xi_j \nabla_{X_j} X_i \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} X(\eta_i)X_i + \sum_{i,j,k=1}^{m} \xi_j \eta_i \Gamma^k_{ji} X_k \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} X(\eta_i)X_i + \sum_{i,j,k=1}^{m} \xi_j \eta_i \Gamma^i_{jk} X_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \big(X(\eta_i) + \sum_{j,k=1}^{m} \xi_j \eta_k \Gamma^i_{jk}\big) X_i
\end{aligned}$$

Lemma 2.1.1 ve Tanım 2.1.4'nin direk sonucu olarak

$$K\big(dZ(X)\big) = \nabla_X Z = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m}(\xi_i(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m}\Gamma^i_{jk}\eta_k)))\frac{\partial}{\partial x_i}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemden görülür ki $K(dZ(X)) = 0$ olması için gerek ve yeter şart

$$X(\eta_i) = -\sum_{j=1}^{m}\xi_j\sum_{k=1}^{m}\eta_k\Gamma^i_{jk}$$

dır.Diğer yandan $\nabla_X Z = 0$ için gerek ve yeter şart K'nın $dZ(X)$ çekirdeğinin

$$dZ(X) = \sum_{i=1}^{m}\xi_i\frac{\partial}{\partial v_i} - \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j,k=1}^{m}\xi_j\eta_k\Gamma^i_{jk})\frac{\partial}{\partial_{v_{m+i}}}$$

sağlamasıdır. Buradan

$$X^h = \sum_{i=1}^{m}\xi_i\frac{\partial}{\partial v_i} - \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j,k=1}^{m}\xi_i\eta_k\Gamma^i_{jk})\frac{\partial}{\partial v_{m+i}}$$

bu denklemde X'in horizontal lifti için ispatı tamamlar.

Sonuç 4.1.1 M'deki lokal koordinatları $(x_1,\ldots,x_m)$ ve TM'deki lokal koordinatları $(v_1,\ldots,v_{2m})$ olsun. Eğer $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ ve $U_i = \dfrac{\partial}{\partial v_i}$ ise

$$(X_i)^v = U_{m+i} \;\; ve \;\; (X_i)^h = U_i - \sum_{j,k=1}^{m}(\Gamma^j_{ik} o\pi)v_{m+k}U_{m+j}$$

şeklinde yazılır.

4.2 Lie Parantezi

Bu bölümde, M'deki vektör alanlarının vertical ve horizontal liftlerinin TM tanjant demeti üzerinde Lie parantezini açık ifadelerle türetmeye çalışacağız.

Önerme 4.2.1 (M,g) bir Riemannian manifoldu olsun. ∇ bu manifoldun Levi-Civita konneksiyonu, R'de Riemannian eğrilik tenssörü, M'nin TM tanjant demetinin Lie parantezi, bütün vektör alanları için

$$1)[X^v, Y^v] = 0,$$

$$2)[X^h, Y^v] = (\nabla_X Y)^v,$$

$$3)[X^h, Y^h] = [X,Y]^h - (R(X,Y)u)^v$$

eşitlikleri sağlanır. Burada $X,Y \in C^{\infty}(TM)$ ve $(p,u) \in TM$'dır (Dombrowski, 1962), (Çayır, 2016a, 2016c,2016d).

İspat.

1) M'nin lokal koordinatları $(x_1,\ldots,x_m)$ ve TM'nin lokal koordinatları $(v_1,\ldots,v_{2m})$ olsun. $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ ve $U_i = \dfrac{\partial}{\partial v_i}$ için $[U_i,U_j] = 0$'dır. M'deki keyfi X,Y iki vektör alanı lokal olarak

$$X = \sum_{i=1}^{m} \xi_i X_i \ \ ve \ \ Y = \sum_{k=1}^{m} \eta_k X_k$$

denklemiyle verilsin. Burada bütün $i,j,k = 1,\ldots,m$ için $U_{m+j}(\xi_i o\pi) = 0$, $U_{m+j}(\eta_k o\pi) = 0$ sağlanır. Bu demektir ki X^v ve Y^v vertical liftinin Lie parantezi

$$\begin{aligned}
[X^v,Y^v] &= \sum_{i,k}[(\xi_i o\pi)U_{m+i},(\eta_k o\pi)U_{m+k}] \\
&= \sum_{i,k}\xi_i U_{m+i}(\eta_k o\pi)U_{m+k} - \eta_k U_{m+k}(\xi_i o\pi)U_{m+i} \\
&= 0
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

2) Önermenin ikinci maddesi için $d\pi\big([X^h,Y^v]\big) = [d\pi(X^h),d\pi(Y^v)] = 0$ eşitliği biliniyor. Bu eşitlikte $[X^v,Y^v]$ 'nin Lie parantezinin horizontal kısmı sıfırlanır. $i,j = 1,\ldots,m$ için

$$\begin{aligned}
[X_i^h,X_j^v] &= [U_i - \sum_{l,k=1}^{m}(\Gamma_{ik}^l o\pi)v_{m+k}U_{m+l},U_j] \\
&= [U_i,U_j] - \sum_{l,k=1}^{m}(\Gamma_{ik}^l o\pi)v_{m+k}[U_{m+1},U_j] + \sum_{l,k=1}^{m}U_j((\Gamma_{ik}^l o\pi)v_{m+k})U_{m+1}) \\
&= \sum_{l,k=1}^{m}(\Gamma_{ik}^l o\pi)\delta_{jk}U_{m+1} \\
&= \sum_{l=1}^{m}(\Gamma_{ij}^l o\pi)U_{m+1}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu da bize $K([X_i^h,X_j^v]) = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k = \nabla_{X_i}X_j$ eşitliğini verir.

Şimdi $[X^h, Y^v]$ Lie parantezi için

$$\begin{aligned}
K([X^h,Y^v]) &= \sum_{i,k} K([(\xi_i o\pi)X_i^h,(\eta_k o\pi)X_k^v]) \\
&= \sum_{i,k} K((\xi_i o\pi)X_i^h,(\eta_k o\pi)X_k^v - (\eta_k o\pi)X_k^v(\xi_i o\pi)X^h + (\xi_i o\pi)(\eta_k o\pi)[X_i^h,X_k^v]) \\
&= \sum_{i,k} (\xi_i X_i(\eta_k)X_k + \xi_i\eta_k \nabla_{X_i}X_k) \\
&= \nabla_X Y.
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece sonuç olarak $[X^h,Y^v] = (\nabla_X Y)^v$'u elde ederiz.

3) Önermenin üçüncü maddesi için $d\pi([X^h,Y^h]) = [X,Y]$ 'den $[X^h,Y^h]$'ın horizontal kısmı $[X,Y]^h$ olur. $i, j = 1,\ldots,m$ için

$$\begin{aligned}
[(X_i)^h,(X_j)^h)] &= \sum_{k,l,n=1}^{m} \{U_j(\Gamma_{il}^k o\pi) - U_i(\Gamma_{jl}^k o\pi) + (\Gamma_{il}^k o\pi)(\Gamma_{jn}^k o\pi) \\
&= -(\Gamma_{jl}^n o\pi)(\Gamma_{in}^k o\pi)\} v_{m+l}U_{m+k} \\
&= -\sum_{k,l=1}^{m} (R_{lij}^k o\pi) v_{m+l}U_{m+k}
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Böylece

$$K([(X_i)^h,(X_j)^h]_{(p,u)}) = -\sum_{k=1}^{m} u_k R(X_i,X_j)X_k = -R(X_i,X_j)u$$

ve M'de tanımlı f ve g fonksiyonu için takip eden

$$K([(fX)^h,(gY)^h]) = fgK([X^h,Y^h])$$

sonucu bulunur.

4.3 Natural Metrikler

Bu bölümde (M,g) Riemannian manifoldunun tanjant demetindeki Cheerger-Gromoll ve Sasaki metriklerinden bahsedilecektir.

Tanım 4.3.1 $(M,g), g$ Riemannian manifoldu olsun. Her $X,Y \in C^\infty(TM)$ ve $(p,u) \in TM$ için TM tanjant demetinin $\bar{g}$ Riemannian metriğinin M'deki g metriğine göre bir natural metrik olabilmesi için

1) $\bar{g}_{(p,u)}(X^h,Y^h) = g_p(X,Y)$,

2) $\bar{g}_{(p,u)}(X^h,Y^v) = 0$

şartlarını sağlayan $\bar{g}$ Riemannian metriğine Natural metrik denir (Gudmundsson ve Kappos, 2002). Aynı yolla elde edilmiş dikey ve yatay alt demette ki $\bar{g}$ naturel metriği ortagonaldir ve $\pi : (TM,\bar{g}) \to (M,g)$ projeksiyon dönüşümü bir Reimannian (submersion) $\bar{g}$ metriği tanjant uzayda bir norm tanımlar ve bu norm $\| \, . \, \|$ şeklinde gösterilir.

Lemma 4.3.1 (M,g) Riemannian manifoldu ve TM'de M'nin tanjant demeti olsun. TM'de $\bar{g}$ Riemannian metriğinin M'deki g metriğine göre naturel metrik olabilmesi için $\bar{\nabla}$ Levi-civita konneksiyonunun her $X,Y,Z \in C^\infty(TM)$ *ve* $(p,u) \in TM$ için aşağıdaki denklemi sağlar (Gudmundsson ve Kappos, 2002).

$$
\begin{aligned}
&1)\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}Y^h,Z^h) = g(\nabla_X Y,Z),\\
&2)\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}Y^h,Z^v) = -\bar{g}((R(X,Y)u)^v,Z^v)/2,\\
&3)\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}Y^v,Z^h) = \bar{g}((R(X,Z)u)^v,Y^v)/2,\\
&4)\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}Y^v,Z^v) = (X^h(\bar{g}(Y^v,Z^v)) - \bar{g}(Y^v,(\nabla_X Z)^v) + \bar{g}(Z^v,(\nabla_X Y)^v))/2,\\
&5)\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^v}Y^h,Z^h) = \bar{g}((R(Y,Z)u)^v,X^v)/2,\\
&6)\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^v}Y^h,Z^v) = (Y^h(\bar{g}(Z^v,X^v)) - \bar{g}(Z^v,(\nabla_Y X)^v) - \bar{g}(X^v,(\nabla_Y Z)^v))/2,\\
&7)\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^v}Y^v,Z^h) = (-Z^h(\bar{g}(X^v,Y^v)) + \bar{g}(Y^v,(\nabla_Z X)^v) + \bar{g}(X^v,(\nabla_Z Y)^v))/2,\\
&8)\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^v}Y^v,Z^v) = (X^v(\bar{g}(Y^v,Z^v)) + Y^v(\bar{g}(Z^v,X^v)) - Z^v(\bar{g}(X^v,Y^v)))/2
\end{aligned}
$$

İspat. $\bar{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonun aşağıdaki Kozsul formülü kullanılacaktır.
Kozsul formulü;

$$
\begin{aligned}
2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^i}Y^j,Z^k) = {} & X^i(g(Y^j,Z^k)) + Y^j(\bar{g}(Z^k,X^i)) - Z^k(\bar{g}(X^i,Y^j))\\
& - \bar{g}(X^i,[Y^j,Z^k]) + \bar{g}(Y^j,[Z^k,X^i]) + \bar{g}(Z^k,[X^i,Y^j])
\end{aligned}
\tag{4.3.1}
$$

$X,Y,Z \in C^\infty(TM)$ *ve* $i,j,k \in \{h,v\}$ için

$$
\begin{aligned}
2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^i}Y^j,Z^k) = {} & X^i(\bar{g}(Y^i,Z^k)) + Y^j(\bar{g}(Z^k,X^i))\\
& - Z^k(\bar{g}(X^i,Y^j)) - \bar{g}(X^i,[Y^j,Z^k])\\
& + \bar{g}(Y^j,[Z^k,X^i]) + \bar{g}(Z^k,[X^i,Y^j])
\end{aligned}
$$

1) hesaplamaların direk sonucunda

$$\begin{aligned}
2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}Y^h, Z^h) &= (X^h(\bar{g}(Y^h, Z^h)) + Y^h(\bar{g}(Z^h, X^h)) \\
&- Z^h(\bar{g}(X^h, Y^h))) - \bar{g}(X^h, [Y^h, Z^h]) \\
&+ \bar{g}(Y^h, [Z^h, X^h]) + \bar{g}(Z^h, [X^h, Y^h]) \\
&= X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,Y)) - Z(g(X,Y)) \\
&- \bar{g}(X^h, [Y,Z]^h) + \bar{g}(Y^h, [Z,X]^h) + \bar{g}(Z^h, [X,Y]^h) \\
&= 2g(\nabla_X Y, Z)
\end{aligned}$$

2) Aşağıdaki hesaplama ile bulunur.

$$\begin{aligned}
2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}Y^h, Z^v) &= X^h(\bar{g}(Y^h, ^v)) + Y^h(\bar{g}(Z^v, X^h)) \\
&- Z^v(\bar{g}(X^h, Y^h)) - \bar{g}(X^h, [Y^h, Z^v]) \\
&+ \bar{g}(Y^h, [Z^v, X^h]) + \bar{g}(Z^v, [X^h, Y^h]) \\
&= -\bar{g}(Z^v, (R(X,Y)u)^v).
\end{aligned}$$

3) Önceki ispata benzer yapılır.

4) Tanım 4.3.1 ve Önerme 4.2.1 den

$$\begin{aligned}
2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^h}Y^v, Z^v) &= X^h(\bar{g}(Y^v, Z^v)) + Y^v(\bar{g}(Z^v, X^h)) \\
&- Z^v(\bar{g}(X^h, Y^v)) - \bar{g}(X^h, [Y^h, Z^v]) \\
&+ \bar{g}(Y^v, [Z^v, X^h]) + \bar{g}(Z^v, [X^h, Y^v]) \\
&= X^h(\bar{g}(Y^v, Z^v)) - \bar{g}(Y^v, (\nabla_X Z)^v) + \bar{g}(Z^v, (\nabla_X Y)^v).
\end{aligned}$$

elde edilir.

5) ve 7)'nin ispatları , 4'e benzer olarak hesaplanır.

6) Bu madde iki vektör alanının Lie parantezinin 0'a eşit olmasının bir direk sonucudur.

Sonuç 4.3.1 (M,g) bir Riemannian manifold ve $\bar{g}$'de M'nin TM tanjant demetinde bir doğal metrik olsun. Bu durumda $\bar{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu $X,Y \in C^\infty(TM)$ *ve* $(p,u) \in TM$ için

$$(\bar{\nabla}_{X^h}Y^h)_{(p,u)} = (\nabla_X Y)^h_{(p,u)} - \frac{1}{2}(R_p(X,Y)u)^v$$

İspat. Bu eşitlik lemma 4.3.1 nin $i)$ ve $ii)$ şıklarından elde edilir.

Sonuç 4.3.2 (M,g) bir Riemannian manifold ve $\bar{g}$'de M'nin g metriğine göre tanjant demette bir natural metrik olsun. Bu durumda M'nin ve TM 'nin sectional eğrilikleri arasında

$$\bar{K}(X^h,Y^h) = K(X,Y) - \frac{3}{4} \parallel (R(X,Y)u)^v \parallel^2$$

eşitliği yazılır.Burada $X,Y \in C^\infty(TM)$ M'deki ortonormal vektör alanlarıdır.

İspat. M ve TM sectional eğrilikleri arasında bu ilginç bağlantı (O'Neill) çalışmasındaki Riemannian submersions için O'Neill'in ünlü eğrilik formülünde direkt olarak görülür (O'Neill, 1966).

Tanım 4.3.2 (M,g) bir Rieamannian manifold $F: TM \to TTM$ bir düzgün demet endomorfizmi olsun. Bu durumda $F^v: TM \to TTM$ vertical lifti ve $F^h :\to TTM$ horizontal lifti

$$F^v(\eta) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i F(\partial_i)^v \ \ ve \ \ F^h(\eta) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i F(\partial_i)^h$$

eşitlikleri yazılır. Burada $\eta \in C^\infty(TM)$'un lokal temsili $\Sigma_{i=1}^m \eta_i \partial_i \in \pi^{-1}(V)$'dir (Gudmundsson ve Kappos, 2002).

Lemma 4.3.2 (M,g) Riemannian manifold, M'deki g metriğine göre $\bar{g}$ tanjant demette bir natural metrik olsun. $F: TM \to TM$ bir düzgün demet endomorfizmi

$\xi = (p,u) \in TM$, $X \in C^\infty(TM)$ ve $\eta = \Sigma_{i=1}^m \eta_i \partial_i \in \pi^{-1}(V)$. için aşağıdaki şartlar sağlanır (Gudmundsson ve Kappos, 2002).

$$1) \ (\bar{\nabla}_{X^v} F^v(\eta))_\xi = F(X_p)^v_\xi + \Sigma_{i=1}^m \eta_i(p)(\bar{\nabla}_{X^v} F(\partial_i)^v)_\xi,$$

$$2) \ (\bar{\nabla}_{X^v} F^v(\eta))_\xi = F(X_p)^h_\xi + \Sigma_{i=1}^m \eta_i(p)(\bar{\nabla}_{X^v} F(\partial_i)^h)_\xi,$$

$$3) \ (\bar{\nabla}_{X^h} F^v(\eta))_\xi = (\bar{\nabla}_{X^h} F(u)^v)_\xi,$$

$$4) \ (\bar{\nabla}_{X^h} F^v(\eta))_\xi = (\bar{\nabla}_{X^h} F(u)^h)_\xi$$

İspat. p'nin M'deki V komşuluğundaki lokal koordinatları $(x_1,\ldots,x_m)$ olsun. $\dfrac{\partial}{\partial_{x_i}} = X_i$ için , $i \in \{1,\ldots,m\}$ $X^v(dx_i) = dx_i(X)$. 'dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla}_{X^v} F^v(\eta) &= \sum_{i=1}^{m} \nabla_{X^v}(\eta_i F(\partial_i)^v) \\
&= \sum_{i=1}^{m} X^v(\eta_i) F(\partial_i)^v + \eta_i \hat{\nabla}^v_X F(\partial_i)^h \\
&= \sum_{i=1}^{m} \eta_i(X) F(\partial_i)^h + \eta_i \hat{\nabla}_{X^v} F(\partial_i)^h \\
&= F(X_p)^h_\xi + \sum_{i=1}^{m} \eta_i \hat{\nabla}_{X^v} F(\partial_i)^h.
\end{aligned}$$

bulunur. Lemmanın 3) 4) eşitlikleri için $\gamma : [0,1] \to M$, $\gamma(0) = p$ *ve* $\gamma'(0) = X_p$ diferensiyellenebilir eğrisi kullanılır. Buradan $Uo\gamma(0) : [0,1] \to TM$ öyleki $Uo\gamma(0) = \xi$ ve $(Uo\gamma)'(0) = X^h_\xi$ diferensiyellenebilir eğrisi elde edilir. F^h *ve* F^v'nin tanımından $F^v|_{Uo\gamma}$ ve $F^h|_{Uo\gamma} = (FoU)^h|_{Uo\gamma}$ elde edilir. Buda 2) *ve* 4) eşitliklerini ispatlar.

4.4 Sasaki Metriğinin Levi-Civita Konneksiyonu ve Riemannian Eğrilik Tensörü

Önerme 4.4.1 (M,g) Riemannian manifoldu ve $\hat{\nabla}(TM,\tilde{g})$ tanjant demetinde Sasaki metriğine göre Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bütün $X,Y \in C^\infty(TM)$ vektör alanları için

$$\begin{aligned}
&1)\ (\hat{\nabla}_{X^h} Y^h)_{(p,u)} = (\nabla_X Y)^h_{p,u} - \frac{1}{2}(R_p)(X,Y)u)^v, \\
&2)\ (\hat{\nabla}_{X^h} Y^v)_{(p,u)} = (\nabla_X Y)^v_{(p,u)} - \frac{1}{2}(R_p(u,Y)X)^h, \\
&3)\ (\hat{\nabla}_{X^v} Y^h)_{(p,u)} = \frac{1}{2}(R_p(u,X)Y)^h, \\
&4)\ (\hat{\nabla}_{X^v} Y^v)_{(p,u)} = 0
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır (Kowalski, 1971).

İspat.

1) Bu madde sonuç 4.3 ün direkt sonucudur.

2) Lemma 4.3.1 yi kullanarak horizontal kısmı

$$\begin{aligned}2\hat{g}(\hat{\nabla}^h_X Y^v, Z^h) &= -\hat{g}((R(Z,X)u)^v, Y^v)\\ &= -g(R(u,Y)Z,X)\\ &= g(R(u,Y)X,Z)\\ &= g((R(u,Y)X)^h, Z^h).\end{aligned}$$

elde ederiz. Aynı şekilde vertical kısmı kullanarak

$$\begin{aligned}2\hat{g}(\hat{\nabla}^h_X Y^v, Z^v) &= X^h(\hat{g}(Y^v, Z^v)) - \hat{g}(Z^v, (\nabla_X Y)^v) - \hat{g}(Y^v, (\nabla_X Z)^v)\\ &= X(g(Y,Z)) + g(Z, \nabla_X Y) - g(Y, \nabla_X Z)\\ &= 2g((\nabla_X Y)^v, Z^v).\end{aligned}$$

bulunur.

3) Horizontal kısmı için ispat benzer olarak yapılır.

$$\begin{aligned}2\hat{g}(\hat{\nabla}^v_X Y^h, Z^h) &= \hat{g}(X^v, (R(Y,Z)u)^v)\\ &= g(X, R(Y,Z)u)\\ &= g(R(u,X)Y,Z).\end{aligned}$$

Daha sonra

$$\begin{aligned}2\hat{g}(\hat{\nabla}^v_X Y^h, Z^v) &= Y^h(\hat{g}(Z^v, X^v)) - \hat{g}(Z^v, (\nabla_Y X)^v) - \hat{g}(X^v, (\nabla_Y Z)^v)\\ &= Y(g(Z,X)) - g(Z, \nabla_Y X) - g(X, \nabla_Y Z)\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir.

4) Lemma 4.3.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}2\hat{g}(\hat{\nabla}^v_X Y^v, Z^h) &= -Z^h(\hat{g}(X^v, Y^v)) + \hat{g}(Y^v, (\nabla_Z X)^v) + \hat{g}(X^v, (\nabla_Z Y)^v)\\ &= -Z(g(X,Y)) + g(Y, \nabla_Z X) + g(X, \nabla_Z Y)\\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}2\hat{g}(\hat{\nabla}^v_X Y^v, Z^v) &= X^v(\hat{g}(Y^v, Z^v)) + Y^v(\hat{g}(Z^v, X^v)) - Z^v(\hat{g}(X^v, Y^v))\\ &= X^v(g(Y,Z)) + Y^v(g(Z,X)) - Z^v(g(X,Y))\\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Böylelikle ispat tamamlanır.

Sonuç 4.4.1 (M,g) Riemannian manifold ve (TM,g) bir Sasaki metriğiyle tanımlanmış tanjant demeti olsun. Bu durumda $\pi : TM \to M$ projeksiyon dönüşümü bir harmonik morfizmdir.

İspat. Bu durum $\pi : TM \to M$ tüm geodezik fibrelere göre bir Riemannian submersion sonucudur. Harmonik morfizmler teorisi (Gudmundsson, 2002) çalışmasında ele alınmıştır. $\hat{g}$ Sasaki metriğine göre tanjant demetin $\hat{R}$ Riemannian eğrilik tensörünü inceleyelim. Bunun için aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır.

Lemma 4.4.1 (M,g) bir Riemannian manifold ve $\hat{\nabla}$'de TM tanjant demetin $\hat{g}$ Sasaki metriğine göre Levi-Civita konneksiyonu olsun. Eğer $F : TM \to TM$ bir düzgün demet endomorfizmi ise her $\xi = (p,u) \in TM$ ve $X, \eta \in C^\infty(TM)$ için

$$(\hat{\nabla}^v_X F^v, (\eta))_\xi = F(X)^v_\xi$$

ve

$$(\hat{\nabla}^v_X F^v, (\eta))_\xi = F(X)^h_\xi + \frac{1}{2}(R(u,X)F(\eta))^h_\xi$$

denklemleri sağlanır (Gudmundsson, 2002). Bu eşitlikte Lemma 4.3.2 ve Önerme 4.4.1 nin direkt sonucudur.

Önerme 4.4.2 (M,g) bir Riemannian manifoldu ve $\hat{R}$'de, $\hat{g}$ Sasaki metriğine göre $\hat{R}$ Riemannian eğrilik tensörü verilsin. Bu durumda $X,Y,Z \in T_pM$ vektörleri için aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Kowalski,1971).

$$
\begin{aligned}
&1)\ \hat{R}_{(p,u)}(X^v,Y^v)Z^v = 0,\\
&2)\ \hat{R}_{(p,u)}(X^v,Y^v)Z^h = (R(X,Y)Z + \frac{1}{4}R(u,X)(R(u,Y)Z) - \frac{1}{4}R(u,Y)(R(u,X)Z))_p^h,\\
&3)\ \hat{R}_{(p,u)}(X^h,Y^v)Z^v = -(\frac{1}{2}R(Y,Z)X + \frac{1}{4}R(u,Y)(R(u,Z)X))_p^h,\\
&4)\ \hat{R}_{(p,u)}(X^h,Y^v)Z^h = (\frac{1}{4}R(R(u,Y)Z,X)u + \frac{1}{2}R(X,Z)Y)_p^h + \frac{1}{2}((\nabla_X R)(u,Y)Z)_p^h,\\
&5)\ \hat{R}_{(p,u)}(X^h,Y^h)Z^v = (R(X,Y)Z + \frac{1}{4}R(R(u,Z)Y,X)u - \frac{1}{4}R(R(u,Z)X,Y)u)_p^v\\
&\qquad + \frac{1}{2}((\nabla_X R)(u,Z)Y - (\nabla_Y R)(u,Z)X)_p^h,\\
&6)\ \hat{R}_{(p,u)}(X^h,Y^h)Z^h = \frac{1}{2}((\nabla_Z R)(X,Y)u)_p^v + (R(X,Y)Z + \frac{1}{4}R(u,R(Z,Y)u)X\\
&\qquad + \frac{1}{4}R(u,R(X,Z)u)Y + \frac{1}{2}R(u,R(X,Y)u)Z)_p^h
\end{aligned}
$$

İspat.

1) Önerme 4.4.1 ve 4.2.1 in sonucunda bu eşitlik direkt olarak görülür (Kowalski,1971).

2) Bu önermenin ispatı için 3) bağıntısı ve Bianchi eşitliği kullanılarak

$$\hat{\nabla}(X^v,Y^v)Z^h = \hat{R}(Z^h,Y^v)X^v - \hat{R}(Z^h,X^v)Y^v$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
\hat{R}(X^v,Y^v)Z^h &= (-\frac{1}{2}R(Y,X)Z - \frac{1}{4}R(u,Y)(R(u,X)Z))^h\\
&\quad + (\frac{1}{2}R(X,Y)Z + \frac{1}{4}R(u,X)(R(u,Y)Z))^h
\end{aligned}
$$

eşitliğini verir.

3) $L : TM \to TM$, $F : u \mapsto \frac{1}{2}R(u,Z)X$ şeklinde verilen bir demet izomorfizmi ise Lemma 4.4.1 ve Önerme 4.4.1 den $\hat{\nabla}_Y^v F(u)^h = F(Y)^h + \dfrac{1}{2}(R(u,Y)F(u))^h$ eşitliği yazılır. Buradan

$$
\begin{aligned}
\hat{R}(X^h,Y^v)Z^v &= \hat{\nabla}_{X^h}\hat{\nabla}_{Y^v}Z^v - \hat{\nabla}_{Y^v}\hat{\nabla}_{X^h}Z^v - \hat{\nabla}_{[X^h,Y^v]}Z^v\\
&= -\hat{\nabla}_{Y^v}\hat{\nabla}_{X^h}Z^v\\
&= -\hat{\nabla}_{Y^v}((\nabla_X Z)^v + F(u)^h)\\
&= -\hat{\nabla}_{Y^v}F(u)^h\\
&= -F(Y)^h - \frac{1}{2}(R(u,Y)F(u))^h\\
&= -(\frac{1}{2}R(Y,Z)X + \frac{1}{4}R(u,Y)(R(u,Z)X))^h
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur.

4) $F_1, F_2 : TM \to TM$ için

$$F_1(u) \mapsto \frac{1}{2}R(u,Y)Z \ \ ve \ \ F_2(u) \mapsto -\frac{1}{2}R(X,Z)u$$

demet izomorfizmi verilsin. Bu durumda önerme 4.4.1 bize

$$\begin{aligned}
\hat{R}(X^h,Y^v)Z^h &= \hat{\nabla}_{X^h}\hat{\nabla}_{Y^v}Z^h - \hat{\nabla}_{Y^v}\hat{\nabla}_{X^h}Z^h - \hat{\nabla}_{[X^h,Y^v]}Z^h \\
&= \hat{\nabla}_{X^h}F_1(u)^h - \hat{\nabla}_{Y^v}((\nabla_X Z)^h + F_2(u)^v - \hat{\nabla}^v_{\nabla_X Y}Z^h \\
&= (\nabla_X(F_1(u)))^h - \frac{1}{2}(R(X,F_1(u))u)^v \\
&- \frac{1}{2}(R(u,Y)\nabla_X Z)^h - F_2(Y)^v - \frac{1}{2}(R(u,\nabla_X Y)Z)^h \\
&= (\frac{1}{4}R(R(u,Y)Z,X)u + \frac{1}{2}R(X,Z)Y)^v + \frac{1}{2}((\nabla_X R)(u,Y)Z)^h
\end{aligned}$$

denklemini verir.

5) Bu önermenin ispatı için 4) *ve* 1). Bianchi özdeşliği kullanılarak

$$\hat{R}(X^h,Y^h)Z^v = \hat{R}(X^h,Z^v)Y^h - \hat{R}(Y^h,Z^h)X^h$$

elde edilir ve bu eşitlik sayesinde

$$\begin{aligned}
\hat{R}(X^h,Y^h)Z^v = &\frac{1}{4}(R(R(u,Z)Y,X)u)^v + \frac{1}{2}((\nabla_X R)(u,Z)Y)^h \\
&- \frac{1}{4}(R(R(u,Z)X,Y)u)^v - \frac{1}{2}((\nabla_Y R)(u,Z)X)^h \\
&+ \frac{1}{2}(R(X,Y)Z - R(Y,X)Z)^v
\end{aligned}$$

bağıntısı bulunur.

6)

$$\begin{aligned}
\hat{R}(X^h,Y^h)Z^h &= \hat{\nabla}_{X^h}\hat{\nabla}_{Y^h}Z^h - \hat{\nabla_{Y^h}}\hat{\nabla}_{X^h}Z^h - \hat{\nabla}_{[X^h,Y^h]}Z^h \\
\hat{R}(X^h,Y^h)Z^h &= \hat{\nabla}_{X^h}((\nabla_Y Z)^h - \frac{1}{2}(R(Y,Z)u)^v) \\
&- \hat{\nabla}_{Y^h}((\hat{\nabla}_X Z)^h - \frac{1}{2}(R(X,Z)u)^v) \\
&- \hat{\nabla}_{[X,Y]^h}Z^h + \hat{\nabla}_{(R(X,Y)u)^u}Z^h
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{R}(X^h,Y^h)Z^h = & (\nabla_X\nabla_Y Z)^h - \frac{1}{2}(R(X,\nabla_Y Z)u)^v \\
& - \frac{1}{2}(\nabla_X R(Y,Z)u)^v - \frac{1}{4}(R(u,R(Y,Z)u)X)^h \\
& - (\nabla_Y\nabla_X Z)^h + \frac{1}{2}(R(Y,\nabla_X Z)u)^v \\
& + \frac{1}{2}(\nabla_Y R(X,Z)u)^v + \frac{1}{4}(R(u,R(X,Z)u)Y)^h \\
& - (\nabla_[X,Y]Z)^h + \frac{1}{2}(R([X,Y],Z)u)^v \\
& + \frac{1}{2}(R(u,R(X,Y)u)Z)^h \\
& = \frac{1}{2}((\nabla_Z R)(X,Y)u)^v + (R(X,Y)Z)^h \\
& + \frac{1}{4}(R(u,R(Z,Y)u)X)^h + \frac{1}{4}(R(u,R(X,Z)u)Y)^h \\
& + \frac{1}{2}(R(u,R(X,Y)u)Z)^h
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada Bianchi özdeşliği kullanılırsa

$$(\nabla_X R)(Y,Z)u + (\nabla_Y R)(Z,X)u + (\nabla_Z R)(X,Y)u = 0$$

elde edilir.

Şimdi $\hat{g}$ Sasaki metriği ile tanımlanmış TM Tanjant demetinin (M,g) Riemannian manifoldunun geometrilerini kıyaslayalım.

Teorem 4.4.1 (M,g) bir Riemannian metriği ve M'nin $\hat{g}$ Sasaki metriğine göre tanjant demeti TM olsun. Bu durumda TM'nin burulmasız (düz) olabilmesi için gerek ve yeter koşul M'nin burulmasız (düz) olmasıdır (Kowalski,1971 ve Aso, 1981).

İspat. Önerme 4.4.2'te $R \equiv 0$ alınırsa $\hat{R} \equiv 0$ bulunur. Buda teoremimizi direkt olarak ispatlar. Farzedelim ki $\hat{R} \equiv 0$ olsun. $(p,0)$ noktasında ki horizontal vektör alanı için Riemannian eğrilik tensörü $R_p(X,Y)Z = \hat{R}_{(p,0)}(X^h,Y^h)Z^h = 0$ şeklinde hesaplanır. Tanjant demetin Sectional (ayrılabilir,bölgesel) eğrilikleri aşağıdaki özellikleri sağlar (Aso, 1981).

Önerme 4.4.3 (M,g) bir Riemannian Manifold ve $\hat{g}$ Sasaki metriğine göre TM onun bir tanjant demeti olsun. $(p,u) \in TM$ *ve* $X,Y \in T_pM$, p noktasında iki ortonormal tanjant demeti olsun. $i,j \in \{h,v\}$ için X^i *ve* Y^i tarafından gerilen düzlemin sectional eğriliğini $\hat{K}(X^i,Y^i)$ gösterelim.

Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&1)\hat{K}(X^v,Y^v)=0,\\
&2)\hat{K}(X^h,Y^v)=\frac{1}{4}|R(Y,u)X|^2,\\
&3)\hat{K}(X^h,Y^h)=K(X,Y)-\frac{3}{4}|R(X,Y)u|^2.
\end{aligned}
$$

eşitlikleri sağlanır (Aso, 1981).

İspat.

1) Bu eşitlik Önerme 4.4.2'in direk sonucudur.

2) Yine Önerme 4.4.2'den

$$
\begin{aligned}
\hat{g}(\hat{R}(X^h,Y^v)Y^v,X^h &= -\frac{1}{2}g(R(Y,Y)X,X)\\
&-\frac{1}{4}g(R(u,Y)(R(u,Y)X,X)\\
&=\frac{1}{4}g(R(u,Y)X,R(u,Y)X).
\end{aligned}
$$

elde edilir.

3) Yine Önerme 4.4.2'den

$$
\hat{g}(\hat{R}(X^h,Y^h)Y^h,X^h)=K(X,Y)-\frac{3}{4}g(R(X,Y)u,R(X,Y)u).
$$

elde edilir.

Bu önermenin ispatı O'Neill-in çok iyi bilinen formülü tarafından da yapılabilir. Bu, $\pi : TM \to M$ projeksion dönüşümlerinin düz ve tamamen jeodezik olduğuna dair etkilerin doğrudan bir sonucudur. O'Neill formülü kısaltıyor.

$$
\begin{aligned}
K(X^h,Y^v) &= \|A_{X^h}Y^v\|^2\\
&=\|(\hat{\nabla}_{X^h}Y^v)^h\|^2\\
&=|\frac{1}{2}R(u,Y)X|^2
\end{aligned}
$$

Teorem 4.4.2 (M,g) Riemannian manifoldu olsun ve $\hat{g}$ Sasaki metriği ile TM Tanjant demeti verilsin. Eğer $(TM,\hat{g})$ sectional (ayrılabilir) eğriliği sınırlı ise TM düz yüzeydir (Aso, 1981).

İspat. Farzedelim ki TM düz yüzey olmasın. M 'nin düz olmadığı Teorem 4.4.1'yı takip eder. Dolayısıyla $p \in M$ bir nokta ve $X,Y \in T_pM$ bir çift ortanormal vektör, öyle ki bazı

$u \in T_pM$ için $R(X,Y)u \neq 0$'dır. Elimizde

$$\hat{K}(X^h,Y^h) = K(X,Y) - \frac{3}{4}|R(X,Y)u|^2$$

denklem var. Bu şartı sağlayan u kümesi sınırsız olduğundan $\hat{K}(X^h,Y^h)$ sectional eğriliği altında sınırsızdır ve böylece ispat tamamlanır (Aso, 1981). Benzer şekilde, $\hat{K}(X^h,Y^v)$'nın Önerme 4.4.3'nin 2.formülü kullanılarak yukarıdan sınırlandığı gösterilebilir. Sabit eğriliğin Riemannian manifoldları için eğrilik tensörünün iyi bilinen formunu kullanarak aşağıdaki bilgileri alalım.

Sonuç 4.4.2 κ sabit sectional eğriliğin Riemannian manifoldu (M,g) olsun. Daha sonra herhangi bir $X,Y \in C^\infty(TM)$ ortonormal vektör alanı için

$$\begin{aligned}
&1)\hat{K}(X^v,Y^v) = 0,\\
&2)\hat{K}(X^h,Y^v) = \frac{1}{4}\kappa^2 g(u,X)^2,\\
&3)\hat{K}(X^h,Y^h) = \kappa - \frac{3}{4}\kappa^2(g(u,X)^2 + g(u,Y)^2)
\end{aligned}$$

denklemleri sağlanır.

Önerme 4.4.4 (M,g) Riemannian manifoldu olsun ve $\hat{g}$ Sasaki metriği ile TM Tanjant demeti verilsin. TM için $\hat{S}$, $\{X_1,\ldots,X_m\}$ bir lokal ortonormal çerçeve olduğunda aşağıdaki denklem yazılır (Musso ve Tricerri, 1988).

$$\hat{S} = S - \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{m} |R(X_i,X_j)u|^2$$

İspat. Önerme 4.4.3'den X_i^h *ve* $X_i^v = Y_{m+i}$ ile TTM için bir $\hat{S}$, $\{Y_1,\ldots,Y_{2m}\}$ yerel ortonormal çerçeve için

$$\begin{aligned}
\hat{S} &= \sum_{i,j=1}^{2m} \hat{K}(Y_iY_j)\\
&= \sum_{i,j=1}^{m} (\hat{K}(X_i^h,X_j^h) + 2\hat{K}(X_i^h,X_j^v) + \hat{K}(X_i^v,X_j^v))\\
&= \sum_{i,j=1}^{m} (K(X_i,X_j) - \frac{3}{4}|R(X_i,X_j)u|^2) + 2\sum_{i,j=1}^{m} \frac{1}{4}|R(X_j,u)X_i|^2.
\end{aligned}$$

Son ifadeyi basitleştirmek için $u = \Sigma_{i=1}^m u_i X_i$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{m} |R(X_j,u)X_i|^2 &= \sum_{i,j,k,l=1}^{m} u_k u_l g(R(X_j,X_k)X_i, R(X_j,X_l)X_i) \\
&= \sum_{i,j,k,l,s=1} u_k u_l g(R(X_j,X_k)X_i,X_s) g(R(X_j,X_l)X_i,X_s) \\
&= \sum_{i,j,k,l,s=1} u_k u_l g(R(X_s,X_i)X_k,X_j) g(R(X_s,X_i)X_l,X_j) \\
&= \sum_{i,j,k,l=1} u_k u_l g(R(X_j,X_i)X_k, R(X_j,X_i)X_l) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} |R(X_j,X_i)u|^2
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.4.3 (M,g) bir Riemmannian manifoldu olsun ve TM tanjant demeti, $\hat{g}$ Sasaki metriği ile tanımlanmış olsun. (M,g) düz olması için gerek ve yeter şart $(TM,\hat{g})$'nin sabit skalar eğriliğinin olmasıdır (Musso ve Tricerri, 1988).

İspat. Bu açıklama direkt olarak Önerme 4.4.4'den geliyor.

Sonuç 4.4.3 (M,g) bir Riemmannian manifoldu olsun ve TM tanjant demeti, $\hat{g}$ Sasaki metriği ile tanımlanmış olsun. $(TM,\hat{g})$ 'nin düz olması için gerek ve yeter şart $(TM,\hat{g})$'nin lokal olarak homojen olmasıdır (Musso ve Tricerri, 1988).

İspat. Bu, Teorem 4.4.3'in direkt sonucudur.

Sonuç 4.4.4 (M,g) bir Riemmannian manifoldu olsun ve TM tanjant demeti, $\hat{g}$ Sasaki metriği ile tanımlanmış olsun. $(TM,\hat{g})$'nin sabit skalar eğriliğinin olması için gerek ve yeter şart skalar eğriliğin sıfır olmasıdır.

İspat. Teorem 4.4.1 ve 4.4.3'in direkt sonucudur.

Sonuç 4.4.5 (M,g) bir Riemmannian manifoldu olsun ve TM tanjant demeti, $\hat{g}$ Sasaki metriği ile tanımlanmış olsun. $(TM,\hat{g})$ Einstein'dir ancak ve ancak $(TM,\hat{g})$'nin düz olmasıdır (Musso ve Tricerri, 1988).

İspat. Bu ifade Teorem 4.4.3'in direkt sonucudur.

Sonuç 4.4.6 (M,g) bir Riemannian manifoldu, κ sabit sectional eğri olsun. Bu durumda $\hat{S}$, yerel ortonormal çerçeve için

$$\hat{S} = (m-1)\kappa(m - \frac{1}{2}\kappa|u|^2).$$

İspat. Sabit eğri manifoldları için eğrilik tensörünün özel formunu kullanarak

$$
\begin{aligned}
\hat{S} &= S - \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{m} |R(X_i, X_j)|^2 \\
&= S - \frac{1}{4}\kappa^2 \sum_{i,j=1}^{m} |g(X_j, u)X_i - g(X_i, u)X_j|^2 \\
&= S - \frac{1}{4}\kappa^2 \sum_{i,j=1}^{m} |g(X_j, u)^2 + g(X_i, u)^2 \\
&- 2(g(X_i, u)g(X_j, u)g(X_i, X_j)) \\
&= m(m-1)\kappa - \frac{1}{2}\kappa^2(m-1)|u|^2.
\end{aligned}
$$

4.5 Cheeger-Gromoll Metriğinin Levi-Civita Konneksiyonu ve Riemannian Eğrilik Tensörü

Önerme 4.5.1 (M, g) bir Riemmannian manifoldu olsun ve TM tanjant demeti, $\tilde{g}$ Cheeger-Gromoll metriği ile tanımlanmış olsun. $(p, u) \in TM$ *ve* $X, Y \in C^\infty(TM)$ için $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilir (Sekizawa, 1991).

$$
\begin{aligned}
&1)(\tilde{\nabla}_{X^h} Y^h) = (\nabla_X Y) - \frac{1}{2}(R(X, Y)u)^v, \\
&2)(\tilde{\nabla}_{X^h} Y^v) = \frac{1}{2\alpha}(R(u, Y)X)^h + (\nabla_X Y)^v \\
&3)(\tilde{\nabla}_{X^v} Y^h) = \frac{1}{2\alpha}(R(u, Y)X)^h, \\
&4)(\tilde{\nabla}_{X^v} Y^v) = -\frac{1}{\alpha}(\tilde{g}(X^v, Y^v)Y^v + \tilde{g}(Y^v, U)X^v) \\
&\qquad + \frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}(X^v, y^v)U - \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(X^v, U)\tilde{g}(Y^v, U)U.
\end{aligned}
$$

İspat.

1) Sadece ilk ifade Sonuç 4.3'ten elde edilir.

2) Tanım 2.1.7 ve Lemma 4.3.1'den

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h} Y^v, Z^h) &= -\frac{1}{2}\tilde{g}(Y^v, (R(Z, X)u)^v) \\
&= -\frac{1}{2\alpha}(g(Y, R(Z, X)u) + g(Y, u)g(R(Z, X)u, u)) \\
&= \frac{1}{2\alpha} g(R(u, Y)X, Z) \\
&= \frac{1}{2\alpha}\tilde{g}((R(u, Y)X)^h, Z^h).
\end{aligned}
$$

Tanım 2.1.4 ve Lemma 4.1.1 için

$$X^h(\frac{1}{\alpha}) = 0 \ ve \ X^h(g(Y,u)o\pi) = g(\nabla_X Y,u)o\pi$$

yani

$$X^h(\tilde{g}(Y^v,Z^v)) = \tilde{g}((\nabla_X Y)^v,Z^v) + \tilde{g}(Y^v,(\nabla_X Z)^v).$$

Buradan

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^v,Z^v) &= \frac{1}{2}(X^h(\tilde{g}(Y^v,Z^v)) + \tilde{g}(Z^v,(\nabla_X Y)^v) - \tilde{g}(Y^v,(\nabla_X Z)^v)) \\ &= \tilde{g}((\nabla_X Y)^v,Z^v)\end{aligned}$$

elde edilir.

3) Bu önerme de 2)'deki verilere benzer hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^h,Z^h) &= \frac{1}{2}\tilde{g}(X^v,(R(Y,Z)u)^v) \\ &= \frac{1}{2\alpha}\tilde{g}((R(u,X)Y)^h,Z^h).\end{aligned}$$

ayrıca

$$\begin{aligned}2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^h,Z^v) &= Y^h(\tilde{g}(Z^v,X^v)) - \tilde{g}(Z^v,(\nabla_Y X)^v) - \tilde{g}(X^v,(\nabla_Y Z)^v) \\ &= \tilde{g}(Z^v,(\nabla_Y X)^v) + \tilde{g}(X^v,(\nabla_Y Z)^v) \\ &\quad - \tilde{g}(Z^v,(\nabla_Y X)^v) - \tilde{g}(X^v,(\nabla_Y Z)^v) \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur.

4) Lemma 4.3.1 uygulanırsa

$$\begin{aligned}2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v,Z^h) &= -Z^h(\tilde{g}(X^v,Y^v)) + \tilde{g}(Y^v,(\nabla_Z X)^v) \\ &\quad + \tilde{g}(X^v,(\nabla_Z Y)^v) \\ &= -\tilde{g}(Y^v,(\nabla_Z X)^v) - \tilde{g}(X^v,(\nabla_Z Y)^v) \\ &\quad + \tilde{g}(Y^v,(\nabla_Z X)^v) + \tilde{g}(X^v,(\nabla_Z Y)^v) \\ &= 0.\end{aligned}$$

$X^v(f(R^2)) = 2f'(r^2)g(X,u)$ *ve* $\alpha = 1+r^2$ uygulayalım

$$X^v(\tilde{g}(Y^v,Z^v)) = -\frac{2}{\alpha^2}g(X,u)(g(Y,Z)+g(Y,u)g(Z,u)) + \frac{1}{\alpha}(g(X,Y)g(Z,u)+g(X,Z)g(Y,u)).$$

Cheeger-Gromoll metriğin tanımından

$$\tilde{g}(X^v,U) = \frac{1}{\alpha}(g(X,u)+g(X,u)g(u,u)) = g(X,u)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\alpha^2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v,Z^v) &= \frac{\alpha^2}{2}(X^v(\tilde{g}(Y^v,Z^v))+Y^v(\tilde{g}(Z^v,X^v))\\ &- Z^v(\tilde{g}(X^v,Y^v)))\\ &= -g(X,u)(g(Y,Z)+g(Y,u)g(Z,u))\\ &+ \frac{\alpha}{2}(g(X,Y)g(Z,u)+g(X,Z)g(Y,u))\\ &- g(Y,u)(g(Z,X)+g(Z,u)g(X,u))\\ &+ \frac{\alpha}{2}(g(Y,Z)g(X,u)+g(Y,X)g(Z,u))\\ &+ g(Z,u)(g(X,Y)+g(X,u)g(Y,u))\\ &- \frac{\alpha}{2}(g(Z,X)g(Y,u)+g(Z,Y)g(X,u))\\ &= g((g(X,Y)-g(X,u)g(Y,u))u+\alpha g(X,Y)u\\ &- g(X,u)Y-g(Y,u)X,Z).\end{aligned}$$

Lemma 4.5.1 (M,g) bir Riemmannian manifoldu TM tanjant demeti üzerinde $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu ve $\hat{g}$ Cheeger-Gromoll metriği tanımlanmış olsun. TM'de bir düzgün demet endomorfizmi $F: TM \to TM$ olsun. $X,\eta \in C^\infty(TM)$ *ve* $\xi = (p,u) \in TM$ için

$$(\tilde{\nabla}_{X^v}F^v(n))_\xi = F(X)^v_\xi - \frac{1}{\alpha}(\tilde{g}(X^v,U)F(\eta)^v + \tilde{g}(F^v(\eta),U)X^v - (1+\alpha)\tilde{g}(F(\eta)^v,X^v)U + \tilde{g}(X^v,U)\tilde{g}(X^v,U)\tilde{g}(F(\eta)^v,U)U)_{xi}$$

ve

$$(\tilde{\nabla}_{X^v}F^v(n))_\xi = F(X)^h_\xi + \frac{1}{2\alpha}(R(u,X)F(\eta))^h_\xi$$

İspat. Açıklama Önerme 4.5 ve Lemma 4.3.2'nın doğrudan sonucudur.

Önerme 4.5.1 (M,g) bir Riemannian Manifold olsun. $(TM,\tilde{g})$ tanjant demeti $\tilde{R}$ Riemann eğrilik tensörü ve Cheeger-Gromoll metriği ile tanımlanmış olsun. O zaman aşağıdaki formüller yazılır (Sekizawa, 1991).

$$\begin{aligned}
1)\tilde{R}(X^h,Y^h)Z^h &= (R(X,Y)Z)^h \\
&- \frac{1}{4\alpha}(R(u,R(Y,Z)u)X - R(u,R(X,Z)u)Y \\
&- 2R(u,R(X,Y)u)Z)^h + \frac{1}{2}((\nabla_Z R)(X,Y)u)^v, \\
2)\tilde{R}(X^h,Y^h)Z^v &= (R(X,Y)Z)^v \\
&+ \frac{1}{2\alpha}((\nabla_X R)(u,Z)Y - (\nabla_Y R)(u,Z)X)^h \\
&- \frac{1}{4\alpha}(R(X,R(u,Z)Y)u - R(Y,R(u,Z)X)u)^v \\
&- 4\tilde{g}(Z^v,U)(R(X,Y)u)^v) + \frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}((R(X,Y)u)^v,Z^v)U, \\
3)\tilde{R}(X^h,Y^v)Z^h &= \frac{1}{2\alpha}((\nabla_X R)(u,Y)Z)^h + \frac{1}{2}(R(X,Z)Y)^v \\
&- \frac{1}{4\alpha}((R(X,R(u,Y)Z)u)^v - \frac{2}{\alpha}g(Y,u)(R(X,Z)u)^v) \\
&+ \frac{1+\alpha}{2\alpha}\tilde{g}((R(X,Z)u)^v,Y^v)U, \\
4)\tilde{R}(X^h,Y^v)Z^v &= -\frac{1}{2\alpha}(R(Y,Z)X)^h - \frac{1}{4\alpha^2}(R(u,Y)R(u,Y)R(u,Z)X)^h \\
&+ \frac{1}{2\alpha^2}(g(Y,u)(R(u,Z)X)^h - g(Z,u)(R(u,Y)X)^h) \\
5)\tilde{R}(X^v,Y^v)Z^h &= \frac{1}{\alpha}(R(X,Y)Z)^h \\
&+ \frac{1}{4\alpha^2}(R(u,X)R(u,Y)Z - R(u,Y)R(u,X)Z)^h \\
&+ \frac{1}{\alpha^2}(g(Y,u)(R(u,X)Z)^h - g(X,u)(R(u,Y)Z))^h, \\
6)\tilde{R}(X^v,Y^v)Z^v &= \frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha^2}(\tilde{g}(Y^v,Z^v)X^v - \tilde{g}(X^v,Z^v)Y^v) \\
&+ \frac{\alpha+2}{\alpha^2}(\tilde{g}(X^v,Z^v)g(Y,u)U - \tilde{g}(Y^v,Z^v)g(X,u)U) \\
&+ \frac{\alpha+2}{\alpha^2}(g(X,u)g(Z,u)Y^v - g(Y,u)g(Y,u)g(Z,u)X^v).
\end{aligned}$$

İspat. Standart hesaplamalar aşağıdaki sonuç elde edilir.

1)

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}(X^h,Y^h)Z^h &= \tilde{\nabla}^h_X \tilde{\nabla}_{Y^h} Z^h - \tilde{Y^h}\tilde{\nabla}_{X^h} Z^h - \tilde{\nabla}_{[X^h,Y^h]} Z^h \\
&= \tilde{\nabla}_{X^h}((\nabla_Y Z)^h - \frac{1}{2}(R(Y,Z)u)^v) \\
&- \tilde{\nabla}_{Y^h}((\nabla_X Z)^h - \frac{1}{2}(R(Y,Z)u)^v) \\
&- \tilde{\nabla}^v_{[X,Y]^h - y(R(X,Y)u)} Z^h \\
&= (\nabla_X \nabla_Y Z)^h - \frac{1}{2}(R(X,\nabla_Y Z)u)^v \\
&- \frac{1}{4\alpha}(R(u,R(Y,Z)u)X)^h - \frac{1}{2}(\nabla_X R(Y,Z)u)^v \\
&- (\nabla_Y \nabla_X Z)^h + \frac{1}{2}(R(Y,\nabla_X Z)u)^v \\
&+ \frac{1}{4\alpha}(R(u,R(X,Z)u)Y)^h + \frac{1}{2}(\nabla_Y R(X,Z)u)^v \\
&- (\nabla_{[X,Y]} Z)^h + \frac{1}{2}(R([X,Y],Z)u)^v \\
&+ \frac{1}{2\alpha}(R(u,R(X,Y)u)Z)^h \\
&= (R(X,Y)Z)^h + \frac{1}{2}((\nabla_Z R)(X,Y)u)^v \\
&- \frac{1}{4\alpha}(R(u,R(Y,Z)u)X - R(u,R(X,Z)u)Y \\
&- 2R(u,R(X,Y)u)Z)^h.
\end{aligned}
$$

Son adım, 2^{nd} Bianchy özdeşliğinin bir sonucudur.

2) $\tilde{g}_{(p,u)}(X^v,U) = g_p(X,u)$ denklemi: $\tilde{g}_{(p,u)}((R(X,Y)u)^v,U) = g_p(R(X,Y)u,u) = 0$ eşitliğini sağlar. Bundan dolayı

$$
\begin{aligned}
\alpha\tilde{R}(X^h,Y^h)Z^v &= \alpha\tilde{\nabla}_{X^h}\tilde{\nabla}_{Y^h}Z^v - \alpha\tilde{\nabla}_{Y^h}\tilde{\nabla}_{X^h}Z^v - \alpha\tilde{\nabla}_{[X^h,Y^h]}Z^v \\
&= \tilde{\nabla}_{X^h}(\frac{1}{2}(R(u,Z)U)^h + \alpha(\nabla_Y Z)^v) - \tilde{\nabla}_{Y^h}(\frac{1}{2}(R(u,Z)X)^h + \alpha(\nabla_X Z)^v) \\
&- \alpha\tilde{\nabla}_{[X,Y]^h - (R(X,Y)u)^v} Z^v \\
&= \frac{1}{2}(\nabla_X R(u,Z)Y)^h - \frac{1}{4}(R(X,R(u,Z)Y)u)^v + \frac{1}{2}(R(u,\nabla_Y Z)X)^h + \alpha(\nabla_X \nabla_Y Z)^v \\
&- \frac{1}{2}(R(u,\nabla_X Z)Y)^h - \alpha(\nabla_Y \nabla_X Z)^v - \frac{1}{2}(R(u,Z)[X,Y])^h - \alpha(\nabla_{[X,Y]}Z)^v \\
&- (\tilde{g}((R(X,Y)u)^v,U)Z^v + \tilde{g}(Z^v,U)(R(X,Y)u)^v) + (1+\alpha)\tilde{g}((R(X,Y)u)^v,Z^v)U \\
&- \tilde{g}((R(X,Y)u)^v,U)\tilde{g}(Z^v,U)U
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha(R(X,Y)X)^v \\
&+ \frac{1}{2}((\nabla_X R)(u,Z)Y - (\nabla_Y R)(u,Z)X)^h - \frac{1}{4}((R(X,R(u,Z)Y)u)^v \\
&- (R(Y,R(u,Z)X)u)^v) - g(Z,u)(R(X,Y)u)^v + (1+\alpha)\tilde{g}((R(X,Y)u)^v, Z^v)U.
\end{aligned}
$$

3) Üçüncü formülün yukarıdakilere benzer hesaplaması

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}(X^h,Y^v)Z^h &= \tilde{\nabla}_{X^h}\tilde{\nabla}_{Y^v}Z^h - \tilde{\nabla}_{[X^h,Y^v]}Z^h \\
&= \frac{1}{2\alpha}\tilde{\nabla}_{X^h}(R(u,Y)Z)^h - \tilde{\nabla}_{(\nabla_X Y)^v}Z^h \\
&- \tilde{\nabla}_{Y^v}((\nabla_X Z)^h - \frac{1}{2}(R(X,Z)u)^v) \\
&= \frac{1}{2\alpha}((\nabla_X R(u,Y)Z)^h - \frac{1}{2}(R(X,R(u,Y)Z)u)^v) \\
&- \frac{1}{2\alpha}(R(u,\nabla_X Y)Z)^h - \frac{1}{2\alpha}(R(u,Y)\nabla_X Z)^h \\
&+ \frac{1}{2}(R(X,Z)Y)^v - \frac{1}{2\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)(R(X,Z)u)^v \\
&- \frac{1}{2\alpha}\tilde{g}((R(X,Z)u)^v,U)Y^v + \frac{1+\alpha}{2\alpha}\tilde{g}((R(X,Z)u)^v,Y^v)U \\
&- \frac{1}{2\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}((R(X,Z)u)^v,U)U \\
&= \frac{1}{2\alpha}((\nabla_X R)(u,Y)Z)^h + \frac{1}{2}(R(X,Z)Y)^v \\
&- \frac{1}{4\alpha}(R(X,R(u,Y)Z)u)^v - \frac{1}{2\alpha}\tilde{g}(Y^v,U)(R(X,Z)u)^v \\
&+ \frac{1+\alpha}{2\alpha}\tilde{g}((R(X,Z)u)^v,Y^v)U.
\end{aligned}
$$

Burada $\tilde{\nabla}_{Y^v}(R(X,Z)u)^v$'ü hesaplamak için Lemma 4.5.1 kullanıldı.

4) $X^v_{(p,u)}(f(r^2)) = 2f'(r^2)g_p(X,u)$ *ve* $(\tilde{\nabla}_{X^h}U)_{(p,u)} = 0$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
2\alpha\tilde{R}(X^h,Y^v)Z^v &= 2\alpha(\tilde{\nabla}_{X^h}\tilde{\nabla}_{Y^v}Z^v - \tilde{\nabla}_{Y^v}\tilde{\nabla}_{X^h}Z^v - \tilde{\nabla}_{[X^h,Y^v]}Z^v \\
&= -2\tilde{\nabla}_{X^h}(\tilde{g}(Y^v,U)Z^v - (1+\alpha)\tilde{g}(Y^v,Z^v)U \\
&+ \tilde{g}(Z^v,U)Y^v + \tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}(Z^v,U)U) \\
&- \alpha\tilde{\nabla}_{Y^v}\frac{1}{\alpha}(R(u,Z)X)^h \\
&- 2\alpha(\tilde{\nabla}_{Y^v}(\nabla_X Z)^v + \tilde{\nabla}_{(\nabla_X Y)^v Z^v})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -g(Y,u)(\frac{1}{\alpha}(R(u,Z)X)^h + 2(\nabla_X Z)^v) \\
&- g(Z,u)(\frac{1}{\alpha}(R(u,Y)X)^h + 2(\nabla_X Y)^v) \\
&+ \frac{2}{\alpha} g(Y,u)(R(u,Z)X)^h - \frac{1}{2\alpha}(R(u,Y)R(u,Z)X)^h \\
&- (R(Y,Z)X)^h + 2(g(Y,u)(\nabla_X Z)^v + g(\nabla_X Z,u)Y^v \\
&- (1+\alpha)\tilde{g}(Y^v,(\nabla_X Z)^v)U + g(Y,u)g(\nabla_X Z,u)U \\
&+ g(\nabla_X Y,u)Z^v + g(Z,u)(\nabla_X Y)^v \\
&- (1+\alpha)\tilde{g}((\nabla_X Y)^v, Z^v)U + g(\nabla_X Y,u)g(Z,u)U \\
&= -(R(Y,Z)X)^h - \frac{1}{2\alpha}(R(u,Y)R(u,Z)X)^h \\
&+ \frac{1}{\alpha} g(Y,u)(R(u,Z)X)^v - \frac{1}{\alpha} g(Z,u)(R(u,Y)X)^h.
\end{aligned}
$$

Burada $\tilde{\nabla}_{Y^v}(R(X,Z)u)^h$'ü hesaplamak için Lemma 4.5.1'ü kullanıldı. Son denklem için, R, Riemannian eğrilik tensörünü içermeyen tüm terimlerin kaybolduğunu göstermeliyiz.

$$
\tilde{g}(Y^v,(\nabla_X Z)^v)U = \frac{1}{\alpha}(g(Y,\nabla_X Z) + g(Y,u)g(\nabla_X Z,u))U
$$

denkleminden geriye kalan ifadeler

$$
-\frac{2}{\alpha}(g(Y,\nabla_X Z) + g(Y,u)g(\nabla_X Z,u) + g(Z,\nabla_X Y) + g(Z,u)g(\nabla_X Y,u))U
$$

sıfırlanır, çünkü

$$
-\frac{2}{\alpha} X^h(\tilde{g}(Y^v,Z^v) + \tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}(Z^v,U))U = 0.
$$

5) Denklemini elde etmek için;

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X^v}\tilde{\nabla}_{Y^v}Z^h &= \tilde{\nabla}_{X^v}\frac{1}{2\alpha}(R(u,Y)Z)^h \\
&= -\frac{1}{\alpha^2} g(X,u)(R(u,Y)Z)^h + \frac{1}{4\alpha^2}(R(u,X)R(u,Y)Z)^h \\
&+ \frac{1}{2\alpha}(R(X,Y)Z)^h.
\end{aligned}
$$

$[X^v, Y^v] = 0$ denklemlerini kullanarak

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X^v,Y^v)Z^v = \tilde{\nabla}_{X^v}\tilde{\nabla}_{Y^v}Z^h - \tilde{\nabla}_{Y^v}\tilde{\nabla}_{X^v}Z^h \\ - \frac{1}{\alpha^2}g(X,u)(R(u,Y)Z)^h + \frac{1}{4\alpha^2}(R(u,X)R(u,Y)Z)^h \\ + \frac{1}{2\alpha}(R(X,Y)Z)^h + \frac{1}{\alpha^2}g(Y,u)(R(u,X)Z)^h \\ - \frac{1}{4\alpha^2}(R(u,Y)R(u,X)Z)^h - \frac{1}{2\alpha}(R(Y,X)Z)^h.\end{aligned}$$

elde edilir.

6) Lemma 4.1.1 ve Önerme 4.51 takip edilerek

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{X^v}U &= \tilde{\nabla}_{X^v}\Sigma_{i=1}^m v_{m+i}(\frac{\partial}{\partial_{v_{m+i}}} \\ &= \sum_{i=1}^m X^v(v_{m+i})\frac{\partial}{\partial_{v_{m+i}}} + \sum_{i=1}^m v_{m+i}\tilde{\nabla}_{X^v}(\frac{\partial}{\partial_{v_{m+i}}}) \\ &= \frac{1}{\alpha}(X^v + \tilde{g}(X^v,U)U).\end{aligned}$$

elde edilir. Bununla birlikte $\tilde{g}(U,U) = r^2$ ifadesini de kullanılırsa

$$\begin{aligned}\alpha^2\tilde{\nabla}_{X^v}\tilde{\nabla}_{Y^v}Z^v &= \alpha^2\tilde{\nabla}_{X^v}\frac{1}{\alpha}(-g(Y,u)Z^v - g(Z,u)Y^v \\ &- g(Y,u)g(Z,u)U + (1+\alpha)\tilde{g}(Y^v,Z^v)U) \\ &= -\alpha^2X^v(\frac{1}{\alpha})(g(Y,u)Z^v + g(Z,u)Y^v \\ &+ g(Y,u)g(Z,u)U - (1+\alpha)\tilde{g}(Y^v,Z^v)U) \\ &- \alpha(g(X,Y)Z^v + g(Y,u)\tilde{\nabla}_{X^v}Z^v + g(X,Z)Y^v \\ &+ g(Z,u)\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v + g(X,Y)g(Z,u)U + g(X,Z)g(Y,u)U \\ &+ g(Y,u)g(Z,u)\tilde{\nabla}_{X^v}U - X^v(\alpha+1)\tilde{\nabla}(Y^v,Z^v)U \\ &- (1+\alpha)X^v(\tilde{g}(Y^v,Z^v))U - (1+\alpha)\tilde{g}(Y^v,Z^v)\tilde{\nabla}_{X^v}U) \\ &= 2g((X,u)g(Y,u)Z^v + 2g(X,u)g(Z,u)Y^v \\ &+ 2g(X,u)g(Y,u)g(Z,u)U - 2(1+\alpha)g(X,u)\tilde{g}(Y^v,Z^v)U \\ &- \alpha g(X,Y)Z^v + g(Y,u)g(X,u)Z^v + g(Y,u)g(Z,u)X^v \\ &+ g(Y,u)g(X,u)g(Z,u)U - (1+\alpha)g(Y,u)\tilde{g}(X^v,Z^v)U \\ &- \alpha g(X,Z)Y^v + g(Z,u)g(X,u)Y^v + g(Z,u)g(Y,u)X^v\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+g(Z,u)g(X,u)g(Y,u)U-(1+\alpha)g(Z,u)\tilde{g}(X^v,Y^v)U\\
&-\alpha g(X,Y)g(Z,u)U-\alpha g(X,Z)g(Y,u)U\\
&-g(Y,u)g(Z,u)X^v-g(Y,u)g(Z,u)g(X,u)U\\
&+2\alpha g(X,u)\tilde{g}(Y^v,Z^v)U+(1+\alpha)(-\frac{2}{\alpha}g(X,u)g(Y,Z)U\\
&-\frac{2}{\alpha}g(X,u)g(Y,u)g(Z,u)U+g(X,Y)g(Z,u)U\\
&+g(X,Z)g(Y,u)U+\tilde{g}(Y^v,Z^v)X^v+\tilde{g}(Y^v,Z^v)g(X,u)U)\\
&=g(Y,u)g(Z,u)X^v+(1+\alpha)\tilde{g}(Y^v,Z^v)X^v\\
&+3g(X,u)g(Z,u)Y^v-\alpha g(X,Z)Y^v\\
&+3g(X,u)g(Y,u)Z^v-\alpha g(X,Y)Z^v\\
&+g(X,u)g(Y,u)g(Z,u)U-(\alpha+3)g(X,u)\tilde{g}(Y^v,Z^v)U\\
&-g(Y,u)\tilde{g}(X,Z)U-g(Z,u)\tilde{g}(X^v,Y^v)U.
\end{aligned}
$$

elde edilir.Yani

$$
\begin{aligned}
\alpha^2\tilde{R}(X^v,Y^v)Z^v &= \alpha^2(\tilde{\nabla}^2(\tilde{\nabla}_{X^v}\tilde{\nabla}_{Y^v}Z^v)\\
&=g(Y,u)g(Z,u)X^v+(1+\alpha)\tilde{g}(Y^v,z^v)X^v\\
&+3g(X,u)g(Z,u)Y^v-\alpha g(X,Z)Y^v\\
&+3g(X,u)g(Y,u)Z^v-\alpha g(X,Y)Z^v\\
&+g(X,u)g(Y,u)g(Z,u)U-(\alpha+3)g(X,u)\tilde{g}(Y^v,Z^v)U\\
&-g(Y,u)\tilde{g}(X^v,Z^v)U-g(Z,u)\tilde{g}(X^v,Y^v)U\\
&-g(X,u)g(Z,u)Y^v-(1+\alpha)\tilde{g}(X^v,Z^v)Y^v\\
&-3g(Y,u)g(Z,u)X^v+\alpha g(Y,Z)X^v\\
&-3g(Y,u)g(X,u)Z^v+\alpha(Y,X)Z^v\\
&-g(Y,u)g(X,u)g(Z,u)U+(\alpha+3)g(Y,u)\tilde{g}(X^v,Z^v)U\\
&+g(X,u)\tilde{g}(Y^v,Z^v)U+g(Z,u)\tilde{g}(Y^v,X^v)U\\
&=(\alpha^2+\alpha+1)(\tilde{g}(Y^v,Z^v)X^v-\tilde{g}(X^v,Z^v)Y^v\\
&-(\alpha+2)(g(Y,u)g(Z,u)X^v-g(X,u)g(Z,u)Y^v)\\
&-(\alpha+2)(\tilde{g}(Y^v,Z^v)g(X,u)U-\tilde{g}(X^v,Z^v)g(Y,u)U)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Aşağıda $\tilde{Q}(V,W)$ tarafından $V,W \in C^{\infty}(TTM)$ için yan V yüzeyleri ve W olan kenarlar ile paralelkenar alanının karesini belirtmektedir.

$$\tilde{Q}(V,W) = \|V\|^2\|W\|^2 - \tilde{g}(V,W)^2$$

Lemma 4.5.2 M'nin T_pM tanjant uzayında iki ortanormal vektör $X,Y \in T_pM$ olsun. (Sekizawa, 1991).

$$\begin{aligned}
&1)\tilde{Q}(X^h,Y^h) = 1,\\
&2)\tilde{Q}(X^h,Y^v) = \frac{1}{\alpha}(1+g(Y,u)^2),\\
&3)\tilde{Q}(X^v,Y^v) = \frac{1}{\alpha^2}(1+g(Y,u)^2+g(X,u)^2)
\end{aligned}$$

İspat.

1) Cheeger-Gromoll metriğinin tanımının direkt sonucudur.
2) Bu doğrudan bir sonuçtur.

$$\tilde{Q}(X^h,Y^v) = \tilde{g}(X^h,X^h)\tilde{g}(Y^v,Y^v) - \tilde{g}(X^h,Y^v)^2 = \frac{1}{\alpha}(1+g(Y,u)^2).$$

3) Son bölüm aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}(X^v,Y^v) &= \tilde{g}(X^v,X^v)\tilde{g}(Y^v,Y^v) - \tilde{g}(X^v,Y^v)^2\\
&= \frac{1}{\alpha}(1+g(X,u)^2)\frac{1}{\alpha}(1+g(Y,u)^2)\\
&- (\frac{1}{\alpha}(g(X,Y)+g(X,u)g(Y,u)))^2\\
&= \frac{1}{\alpha^2}(1+g(Y,u)^2+g(X,u)^2).
\end{aligned}$$

TM tanjant demeti üzerinde verilen $V,W \in C^{\infty}(TTM)$ için $(2,0)$ tipli tensör $\tilde{G}$ olsun. Bu durumda

$$\tilde{G} : (V,W) \mapsto \tilde{g}(\tilde{R}(V,W)W,V)$$

şeklinde bir dönüşümdür.

Lemma 4.5.3 p'de M'nin Tanjant uzayı T_pM içinde iki ortonormal vektörleri X,Y olsun. $\tilde{G}$ tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$1)\tilde{G}(X^h,Y^h) = K(X,Y) - \frac{3}{4\alpha}|R(X,Y)u|^2$$

$$2)\tilde{G}(X^h,Y^v) = \frac{1}{4\alpha^2}|R(u,Y)X|^2,$$

$$3)\tilde{G}(X^v,Y^v) = \frac{(1+\alpha+\alpha^2)}{\alpha^2}\tilde{Q}(X^v,Y^v) - \frac{(\alpha+2)}{\alpha^3}(g(X,u)^2+g(Y,u)^2).$$

İspat.
1)

$$\begin{aligned}
\alpha\tilde{G}(X^h,Y^h) &= \alpha\tilde{g}(\tilde{R}(X^h,Y^h)Y^h,X^h)\\
&= \alpha\tilde{g}((R(X,Y)Y)^h,X^h)\\
&- \frac{1}{4}(\tilde{g}((R(u,R(X,Y)u)X)^h,X^h)\\
&- \tilde{g}((R(u,R(X,Y)u)Y)^h,X^h)\\
&- \tilde{g}((2R(u,R(X,Y)u)Y)^h,X^h)\\
&+ \frac{\alpha}{2}\tilde{g}((\nabla_Z R(X,Y)u)^v,X^h)\\
&= \alpha g(R(X,Y)Y,X)\\
&+ \frac{3}{4}g(R(u,R(X,Y)u)Y,X).
\end{aligned}$$

Riemann eğrilik tensörünün özellikleri ile

$$g(R(u,R,R(X,Y)u)Y,X) = -|R((X,Y)u)|^2$$

sonucu elde edilir.
2)

$$\begin{aligned}
\alpha^2\tilde{G}(X^c,Y^c) &= \alpha^2\tilde{g}(\tilde{R}(X^h,Y^v)Y^v,X^h)\\
&= -\frac{\alpha}{2}\tilde{g}((R(Y,Y)X)^h,X^h)\\
&+ \frac{2\alpha-1}{2\alpha}(\tilde{g}(Y^v,U)\tilde{g}(R(u,Y)X)^h,X^h)\\
&- \frac{1}{2\alpha}\tilde{g}(Z^v,U)\tilde{g}((R(u,Y)X)^h,X^h)\\
&- \frac{1}{4}\tilde{g}((R(u,Y)R(u,Y)X)^h,X^h)\\
&= -\frac{1}{4}g(R(u,Y)R(u,Y)X,X)\\
&= \frac{1}{4}|R(u,Y)X|^2.
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(X^v,Y^v) &= \tilde{g}(\tilde{R}(X^v,Y^v)Y^v,X^v) \\
&+ \frac{(\alpha+2)}{\alpha^2}(\tilde{g}(X^v,Y^v)g(Y,u)g(X,u) - \tilde{g}(Y^v,Y^v)g(X,u)^2) \\
&+ \frac{(1+\alpha+\alpha^2)}{\alpha^2}(\tilde{g}(Y^v,Y^v)\tilde{g}(X^v,X^v) - \tilde{g}(X^v,Y^v)) \\
&+ \frac{(\alpha+2)}{\alpha^2}(g(X,u)g(Y,u)\tilde{g}(X^v,Y^v) - g(Y,u)^2\tilde{g}(X^v,X^v)) \\
&= \frac{(1+\alpha+\alpha^2)}{\alpha^2}\tilde{Q}(X^v,Y^v) - \frac{(\alpha+2)}{\alpha^3}(g(X,u)^2 + g(Y,u)^2).
\end{aligned}$$

Önerme 4.5.2 (M,g) bir Riemmannian manifoldu olsun ve TM tanjant demeti, $\tilde{g}$ Cheeger-Gromoll metriği ile tanımlanmış olsun. O halde $(TM,\tilde{g})$'nin $\tilde{K}$ sectional (parçalı,ayrılabilir) eğrilikleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
&1)\tilde{K}(X^h,Y^h) = K(X,Y) - \frac{3}{4\alpha}|R(X,Y)u|^2, \\
&2)\tilde{K}(X^h,Y^h) = \frac{1}{4\alpha}\frac{|R(u,Y)X|^2}{(1+g(Y,u)^2)}, \\
&3)\tilde{K}(X^v,Y^v) = \frac{1-\alpha}{\alpha^2} + \frac{\alpha+2}{\alpha}\frac{1}{(1+g(X,u)^2+g(Y,u)^2)}.
\end{aligned}$$

İspat.

1) ilk denklem Sonuç 4.3 ve Cheeger-Gromoll metriğin tanımından gelmektedir.

2) İkinici denklem

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(X^h,Y^h).\tilde{g}(Y^h,Y^h) &= \|A_{X^h}Y^v\|^2 \\
&= \|(\tilde{\nabla}_{X^h}Y^v)^h\|^2 \\
&= \frac{1}{4\alpha^2}|R(u,Y)X|^2.
\end{aligned}$$

3) Bu önermenin ispatı 2)'ye benzer şekilde yapılır.

Önerme 4.5.3 (M,g) bir Riemmannian manifoldu, κ sabit sectional eğrilik olsun TM tanjant demeti, $\tilde{g}$ Cheeger-Gromoll metriği ile donatılmış olsun. O halde $(TM,\tilde{g})$'nin $\tilde{K}$ sectional (parçalı,ayrılabilir) eğrilikleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$1)\tilde{K}(X^h,Y^h) = \kappa - \frac{3\kappa^2}{4\alpha}(g(u,X)^2 + g(u,Y)^2),$$
$$2)\tilde{K}(X^h,Y^h) = \frac{\kappa^2 g(X,u)^2}{4\alpha(1+g(Y,u)^2)},$$
$$3)\tilde{K}(X^v,Y^v) = \frac{1-\alpha}{\alpha^2} + \frac{\alpha+2}{\alpha}\frac{1}{(1+g(X,u)^2+g(Y,u)^2)}.$$

Burada $X,Y \in T_pM$ ortonormal vektörlerdir.

İspat. Eğrilik tensörünün özel biçimini kullanarak basitçe hesaplanır.

Önerme 4.5.4 (M,g) bir Riemannian manifoldu, κ sabit sectional eğrilik,$\tilde{g}$, TM tanjant demeti üzerinde Cheeger-Gromoll metriği ve $\tilde{K}$ ifadesi, $(TM,\tilde{g})$üzerinde sectional eğrilik olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) $0 \leq \kappa \leq \frac{4}{3}$ ise $\tilde{K}(X^h,Y^h)$, negatif değil

2) $\tilde{K}(X^h,Y^v)$ negatif değil

3) $\tilde{K}(X^v,Y^v)$ pozitif.

İspat. Eğer $X,Y \in T_pM$ ortonormal ise

$$g(Y,u)^2 + g(X,u)^2 \leq |u|^2 < \alpha$$

olduğu açıktır. Bu eldeki sonuç direkt olarak Önerme 4.5.3 ile izlenir.

Sonuç 4.5.4 (M,g) Riemannian metriğinin negatif olmayan sectional (parçalı, ayrılabilir) eğriliği vardır, bu da hiç bir yerde sabit değildir. $u \neq 0$ ile $(p,u) \in TM$ belirli bir nokta için p'de M'nin T_pM tanjant uzayı için ortonormal taban $\{e_1,\ldots,e_m\}$ olsun. Öyle ki $e_1 = u/|u|$, burada $|u|$, M üzerinde ki g metriğine göre u'nun normudur. $i \in \{1,\ldots,m\}$ ve $k \in \{2,\ldots,m\}$ için horizontal ve vertical liftleri $f_i = e_i^h$, $f_{m+1} = e_1^v$ ve $f_{m+k} = \sqrt{\alpha}e_k^v$ eşitliklerini sağlar. Bu durumda $\{f_1,\ldots,f_{2m}\}$ tanjant uzayı $T_{(p,u)}M$ için Cheeger-Gromoll metriğine göre ortonormal taban oluşturur (Sekizawa, 1991).

Lemma 4.5.4 $T_{(p,u)}M$ için Cheeger-Gromoll metriğine göre ortonormal tabandır. (p,u), TM üzerinde bir nokta ve $f_1,\ldots f_{2m}$'yi yukarıdaki gibi teğet uzay $T_{(p,u)}TM$ için bir ortonormal taban olsun. $\tilde{K}$ kesitsel eğrilikler $i,j \in \{1,\dots,m\}$ ve $k,l \in \{2,\dots,m\}$ için aşağıdaki denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(f_i,f_j) &= K(e_i,ej) - \frac{3}{4\alpha}|R(e_i,e_j)u|^2,\\
\tilde{K}(f_i,f_{m+1}) &= 0\\
\tilde{K}(f_i,f_{m+k}) &= \frac{1}{4}|R(u,e_k)e_i|^2\\
\tilde{K}(f_{m+1},f_{m+k}) &= \frac{3}{\alpha^2},\\
\tilde{K}(f_{m+k},f_{m+1}) &= \frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^2}
\end{aligned}$$

Önerme 4.5.5 (M,g) Riemannian manifoldu ve S skalar eğrilik olsun. TM tanjant demeti $\tilde{g}$ Cheeger-Gromoll metriği ile tanımlansın. $(p,u) \in TM$ üzerinde bir noktası verilsin. $(TM,\tilde{g})$'nin $\tilde{S}$ skaler eğriliği

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_{(p,u)} = S_p + \frac{(2\alpha-3)}{4\alpha}\sum_{i,j=1}^{m}|R(e_i,e_j)u|^2\\
+\frac{(m-1)}{\alpha^2}(6+(m-2)(\alpha^2+\alpha+1)).
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

İspat. $\{f_1,\dots,f_{2m}\}$, $T_{(p,u)}TM$ tanjant uzayı için bir ortonormal taban olsun. Skaler eğriliğin tanımından

$$\begin{aligned}
\tilde{S} &= \sum_{i\neq j}\tilde{K}(f_i,f_j)\\
&= 2\sum_{(i,j=1)_{i<1}}^{m}\tilde{K}(f_i,f_j) + 2\sum_{i,j=1}^{m}\tilde{K}(f_i,f_{m+j}) + 2\sum_{(i,j=1)_{i<j}}^{m}\tilde{K}(f_{m+i},f_{m+j})\\
&= \sum_{i\neq j}^{m}K(e_i,e_j) - \frac{3}{4\alpha}\sum_{i,j=1}|R(e_i,e_j)u|^2\\
&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}|R(u,e_j)e_i|^2 + 2\sum_{i=2}^{m}\frac{3}{\alpha^2} + \sum_{(i,j=2)_{i\leq j}}^{m}\frac{(1+\alpha+\alpha^2)}{\alpha^2}\\
&= S + \frac{(2\alpha-3)}{4\alpha}\sum_{i,j=1}^{m}|R(e_i,e_j)u|^2\\
&+\frac{(m-1)}{\alpha^2}(6+(m-2)(1+\alpha+\alpha^2))
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\sum_{i,j=1}^{m}|R(e_i,e_j)u|^2 = \sum_{i,j=1}^{m}|R(u,e_j)e_i|^2$$

Önerme 4.4.4'un ispatı görülür.

Önerme 4.5.6 (M,g) bir Riemannian manifoldu, κ sabit sectional (parçalı,kesitsel) eğrilik ve $(TM,\tilde{g})$ tanjant demeti Cheeger-Gromoll metriği ile tanımlanmış olsun. TM'nin skaler eğriliği $\tilde{S}$,

$$\tilde{S} = \frac{(m-1)}{2\alpha^2}(\alpha(\alpha-1)(2\alpha-3)\kappa^2 + 2m\alpha^2\kappa$$
$$+2(6+(m-2)(1+\alpha+\alpha^2)))$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. Önerme 4.5.5 ve hesaplamalardan skalar eğriliğe ulaşılır.

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{m} |R(e_i,e_j)u|^2 &= \sum_{i,j=1}^{m} (\alpha-1)\kappa^2|\delta_{1j}e_i - \delta_{i1}e_j|^2 \\ &= 2(m-1)(\alpha-1)\kappa^2.\end{aligned}$$

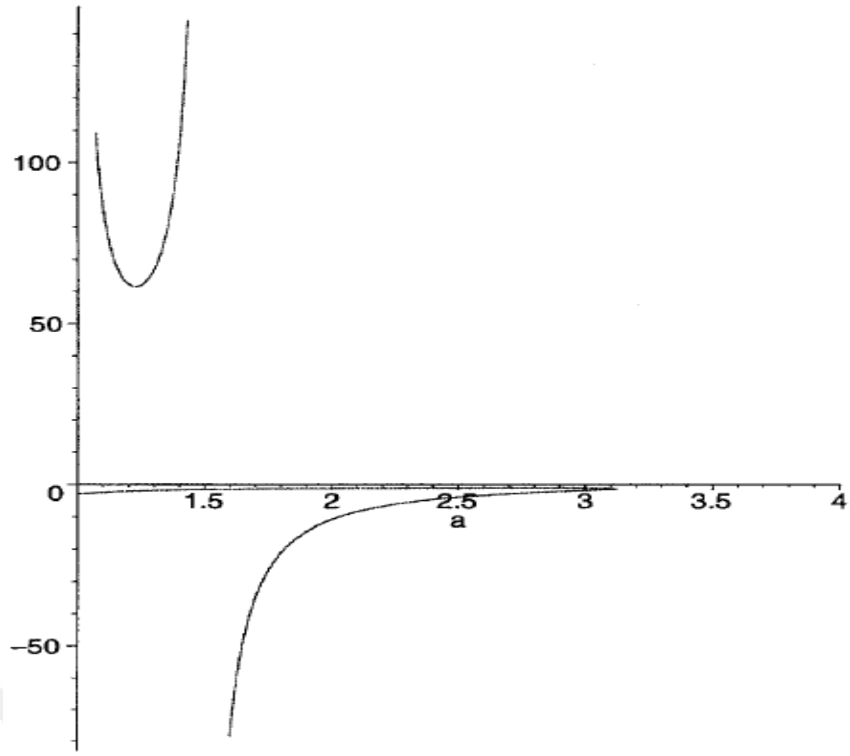
Sonuç 4.5.6 Eğer κ sabit sectional (kesitsel,ayrılabilir) M manifold tabanına sahipse $\tilde{g}$ Cheeger-Gromoll metriği ile TM tanjant demeti homojen (eğrilik) değildir (Sekizawa, 1991).

İspat. Önerme 4.5.6, κ sabit iken $\tilde{\sigma}$'in asla sabit olmadığı anlamına gelir. Belirli bir $m \geq 2$ için $(\alpha,\kappa) \in D = [1,\infty) \times \mathbb{R}$ fonksiyonu olarak skalar eğrilik $\tilde{S}_m(\alpha,\kappa)$'nın işaretini belirleyelim. (α,κ)-düzleminde ki $D_o = \{(\alpha,\kappa) \in D | \tilde{S}_m(\alpha,\kappa) = 0\}$ ve κ üzerindeki ikinci derece polinom denklemini ise

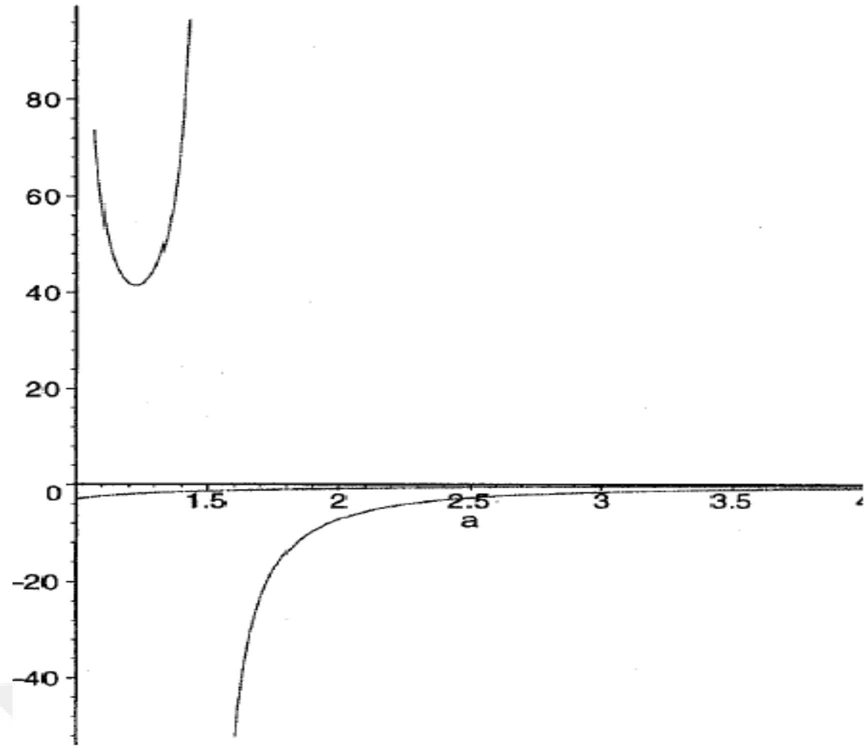
(1) $\alpha(\alpha-1)(2\alpha-3)\kappa^2 + 2m\alpha^2\kappa + 2(6+(m-2)(1+\alpha+\alpha^2)) = 0$

ile belirlenir. Eğer $\alpha \leq 1$, $\alpha = 3/2$ ve 4.5 sayılı denklemin diskriminantı negatif değilse aşağıdaki verilen $\kappa_{\pm}$ çözümlerini elde ederiz.

$$\frac{-m\alpha^2 \pm \sqrt{m^2\alpha^4 - \alpha(\alpha-1)(2\alpha-3)2(6+(m-2)(1+\alpha+\alpha^2))}}{\alpha(\alpha-1)(2\alpha-3)}$$



Şekilde, yol D_0'ı $m = 3$'ün durumuna göre (α, κ)-düzleminde çizdik. D'yi D_0'dan çıkarırken kalan üç bileşene bağlı düşer. Skala eğriliği $(2, 40)$ noktasını içeren D_+ bileşenide pozitiftir ve diğer iki noktada negatiftir. Biz bu $\kappa \in \mathbb{R}$'yi belirleyelim. Öyle ki $S_3(\alpha, \kappa)$ tüm $\alpha \in [1, \infty)$ için pozitiftir (negatif olmayan). Diğer bir deyişle bunlar D_+ bileşeninde tamamen bulunan yarı horizontal çizgilerdir. $\kappa > 0$'ın üst yarım boşluğunda bulunan D_0'ın bağlı bileşeni $\alpha \in (1, 3/2)$ için çözüm κ_- grafiğidir. Minimum $C_3 > 0$ değeri vardır. Tanımlanan diğer çözümün κ_+ grafiği tanım olarak bir maksimum $c_3 < 0$ değerine sahiptir. Aradığımız horizontal çizgiler ailesi daha sonra $\kappa \in (c_3, C_3)$ tarafından parametreleştirilir.



$m > 3$ için $m = 3$ teki gibi iki çözümün κ_- *ve* κ_+'nın tanım olarak aynı nitel davranışı elde ettiğimizi görmek kolaydır. Bu bize aşağıdaki sonucu verir:

Teorem 4.5.1 (M,g), $m > 2$ boyutlu bir Riemannian manifoldu ve κ sabit sectional (kesitsel, ayrılabilir) eğrilik olsun. O zaman gerçek sayılar $c_m < 0$ *ve* $C_m > 60$ vardır. $(TM,\tilde{g})$ tanjant demeti

1) Pozitif skalar eğriliğe sahip olması gerek ve yeter şart $\kappa \in (c_m,C_m)$,
2) Negatif olmayan skalar eğriliğe sahip olması için gerek ve yeter şart $\kappa \in [c_m,C_m]$

$\alpha \in (1,3/2)$ ve $m \geq 3$ için işlevin m'de arttığına dikkat edelim, eğer $m < \bar{m}$ ise $C_m < C_{\bar{m}}$' dir. $m = 2$ olduğunda eşitliği her yerde pozitiftir ve çözüm κ_- ve κ_+

$$\kappa\pm = \frac{-2\alpha^2 \pm 2\sqrt{\alpha^4 - 3\alpha(\alpha-1)(2\alpha-3)}}{\alpha(\alpha-1)(2\alpha-3)}.$$

Figure 2'de $m = 2$ için (α,κ) üzerinde D_0 yolunu çizdik. Bu D'den çıkarıldığında dinlenme dört bağlı bileşene girer. Skalar eğriliği $(2,\pm 40)$ değer içeren iki bileşende pozitif diğerleri negatiftir. $\alpha > 3/2$ hem $\kappa_\pm$ çözümleri negatifken hemde $\alpha \to \infty$, 0'a yaklaştığı durumda aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 4.5.2 (M,g), κ sabit sectional (kesitsel,ayrılabilir) eğriliğin yüzeyi olsun. $(TM,\tilde{g})$ tanjant demeti içerisinde öyle $C_2 \geq 40$ vardır ki

1) Pozitif skalar eğriliğe sahip olması için gerek ve yeter şart $\kappa \in [0,C_2)$, *2)* Negatif olmayan skalar eğriliğe sahip olması için gerek ve yeter şart $\kappa \in [0, C_2]$

Sonuç 4.5.7 (M,g), m-boyutlu Riemannian manifold κ'sabit sectional eğrilik olsun. C_m sayısı $(10+4\sqrt{6})$ m ile yaklaşık olarak hesaplanabilir.

İspat. m ve κ_- için karekök formülünde $m\alpha^2$ ile yaklaştırılabilir. Dolayısıyla

$$\kappa_- \approx frac{-2m\alpha(\alpha-1)(2\alpha-3)}$$

$\alpha \geq 1$ için $\alpha \mapsto \alpha/(\alpha-1)(2\alpha-3)$ fonksiyonu $\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$'de global bir minimum değere sahiptir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu araştırmada Riemann metriğinin çeşitlerini Tanjant demetin geometrisi üzerinde ki en iyi sonuçlarından bazılarının detaylı ve birleşik sunumu hazırlanmıştır. Tanjant demet tanımlanmış, yardımcı teoremler verilmiştir. Tanjant demet üzerinde tanımlanan Vertical(dikey) ve Horizontal(yatay) araştırılmıştır. M'deki vektör alanlarının vertical ve horizontal liftlerinin TM tanjant demeti üzerinde Lie parantezini açık ifadelerle türetilmiştir. (M,g) Riemannian manifoldunun tanjant demetindeki Cheerger-Gromoll ve Sasaki metriklerinden bahsedilmiştir.TM'de $\bar{g}$ Riemannian metriğinin M'deki g metriğine göre natural metrik olabilmesi için $\bar{\nabla}$ Levi-civita konneksiyonu hesaplanmıştır.
Sasaki ve Cheerger-Gromoll Metriğinin Levi-Civita Konneksiyonu ve Riemannian Eğrilik Tensörü hesaplanmıştır. Horizontal çizgiler ailesi parametreleştirilip, (M,g), $m > 2$ boyutlu bir Riemannian manifoldu,Pozitif ve Negatif olmayan skalar eğriliğe sahip olması için gerek ve yeter şartlar ele alınarak incelenmiştir.

6. KAYNAKLAR

Aso, K. (1981). Notes on some properties of the sectional curvature of the tangent bundle. *The Yokohama mathematical journal, 29*(1), 1-5.

Cheeger, J., & Gromoll, D. (1972). On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature. *Annals of Mathematics,* 413-443.

Çayır, H. (2013). Almost Paracontact Yapılar. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Geometri Bilim Dalı, Erzurum.

Çayır, H. (2015). Some Notes on Lifts of Almost Paracontact Structures. *American Review of Mathematics and Statistics*, *3*(1), 52-60.

Çayır, H. (2016).Covarient derivatives of almost contact structure and almost paracontact structure with Respect to X^C and X^V on Tangent Bundle T (M)., Konuralp Journal of Mathematics, 4 (2), 209-216.

Çayır, H., & Köseoğlu, G. (2016). Lie derivatives of almost contact structure and almost paracontact structure with respect to X^C and X^V on tangent bundle T(M), New Trends in Mathematical Sciences. 4 (1), 153-159.

Çayır, H., & Akdağ, K. (2016). Some notes on almost paracomplex structures associated with the diagonal lifts and operators on cotangent bundle $T^*(M^n)$. New Trends in Mathematical Sciences. 4 (4), 42-50.

Çayır, H. (2016). Tachibana and Vishnevskii Operators Applied to X^V and X^H in Almost Paracontact Structure on Tangent Bundle T(M). New Trends in Mathematical Sciences, 4 (3), 105-115.

Çayır, H. (2017). Derivatives with respect to horizontal and vertical lifts of the Cheeger-Gromoll metric ^{CG}g on Cotangent Bundle. Poincare Journal of Analysis and Applications, Vol:(1), 1-9.

Cayır, H. (2017) Derivatives with respect to horizontal and vertical lifts of the modified Riemannian extension $\tilde{g}\nabla_{,C}$ on Cotangent Bundle. Transactions of the Institute of Mathematics and Mechanics of Azerbaijan, vol XXXVII, no. 1, 1-8.

Çayır, H., & Khan, MNI. (2017). (Emerging Sources Citation Index) Derivatives with respect to horizontal and vertical lifts of the Cheeger-Gromoll metric ^{CG}g on the (1,1)-tensor bundle $T_1^1(M)$, Konuralp Journal of Mathematics, 5(2), 78-86.

Dombrowski, P. (1962). On the Geometry of the Tangent Bündle. *Journal für Mathematik. Bd*, *210*(1/2), 10.

Dülger, M.Y. (2010). Lie Grupları ve Lie dönüşüm grubu olarak etkileri. Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırıkkale.

Gudmundsson, S., & Kappos, E. (2002). On the geometry of the tangent bundle with the Cheeger-Gromoll metric. *Tokyo Journal of Mathematics*, *25*(1), 75-83.

Gudmundsson, S., & Kappos, E. (2002). On the geometry of tangent bundles. *Expositiones Mathematicae*, *20*(1), 1-41.

Kobayashi, S., & Nomizu, K. (1963). *Foundations of differential geometry* (Vol. 1, No. 2). New York: Interscience publishers.

Kowalski, O. (1971). Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold. *J. reine angew. Math*, *250*(1), 24-1.

Kowalski, O. (1988). Natural Transformations of Riemannian Metrics on Manifolds to Metrics on Tangent Bundles: A Classification, Bull. Tokyo Gakugei Univ. (4)*40*, 1-29.

Musso, E., & Tricerri, F. (1988). Riemannian metrics on tangent bundles. *Annali di matematica pura ed applicata*, *150*(1), 1-19.

O'Neill, B. (1966). The fundamental equations of a submersion. *The Michigan Mathematical Journal*, *13*(4), 459-469.

Salimov, A. A., & Mağden, A. (1999). Diferensiyel Geometriye Giriş. Aktif Yayınevi, *Atatürk Üniversitesi*.

Sasaki, S. (1958). On the differential geometry of tangent bundles of riewannian manifolds. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, *10*(3), 338-354.

Sekizawa, M. (1991). Curvatures of tangent bundles with Cheeger-Gromoll metric. *Tokyo Journal of Mathematics*, *14*(2), 407-417.

Turgut, A. (1989). Tanjant Manifold Üzerinde Metrikler, Konneksiyonlar ve Eğriler. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara.

Yano, K., & Ishihara, S. (1967). Horizontal lifts of tensor fields and connections to tangent bundles. *J. Math. Mech*, *16*(9), 1015-1030.

Yano, K., & Ishihara, S. (1973). Tangent and Cotangent Bundles, Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology, 423p, Japan.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Büşra Hümeyra YILDIRIM
Doğum Yeri	Tarsus \ MERSİN
Doğum Tarihi	26.08.1991
Uyruğu	☑ T.C. ❒ Diğer:
Telefon	0545 339 3279
E-Posta Adresi	busra.humeyra.y@gmail.com

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Fakülte	Fen – Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2015
Yüksek Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Tarihi	