T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN EŞİTSİZLİKLER

ABDURRAHMAN GÖZPINAR

DOKTORA TEZİ

ORDU 2018

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Abdurrahman GÖZPINAR tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Erhan SET danışmanlığında yürütülen "Konveks Fonksiyon Sınıfları İçin Kesirli İntegraller İçeren Eşitsizlikler" adlı bu tez, jürimiz tarafından 12/01/2018 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman	:	Doç. Dr. Erhan SET
II. Danışman	:	Doç. Dr. İlker ERYILMAZ Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Başkan	:	Prof. Dr. Muhamet Emin Özdemir Matematik, Uludağ Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. İmdat İŞÇAN Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Erhan SET Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

23/01/2018.. tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 24/01/2018.. tarih ve 2018/40.sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Abdurrahman GÖZPINAR

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN KESİRLİ İNTEGRALLER İÇEREN EŞİTSİZLİKLER

Abdurrahman GÖZPINAR

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2018
Doktora Tezi, 121s.

Danışman: Doç. Dr. Erhan SET

II. Danışman: Doç. Dr. İlker ERYILMAZ

Eşitsizlikler teorisi matematik, fizik ve mühendislik gibi bilim dallarında önemli yere sahiptir. Birçok araştırmacının ilgi alanına giren Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili gerek klasik gerekse kesirli integraller yardımıyla sayısız çalışma ve tezler yayımlanmıştır. Birkaç farklı kesirli integral operatörü yardımıyla konveks fonksiyonların bazı sınıfları için Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizliklerin elde edildiği bu tez altı bölümden meydana gelmektedir. İlk bölüm giriş için ayrılmış olup eşitsizlik ve kesirli integraller ile ilgili, tarihsel süreci de içine katarak genel bilgilerin bir derlemesi niteliğinde verilmiştir. İkinci bölüm, araştırmamızda kullanılan temel kavramlar, Beta ve Gama gibi bazı özel fonksiyonlar, konveks fonksiyon sınıflarından birkaçının tanım ve özellikleri, ayrıca teorem ispatlarında kullanılacak olan birkaç eşitsizlik çeşidi ile ilgili bilgileri içermektedir. Üçüncü bölümde Riemann-Liouville kesirli integralleri, uyumlu kesirli integraller, genelleştirilmiş kesirli integraller ve genelleştirilmiş k-kesirli integrallerin tanım ve özelliklerine yer verilmiştir. Ayrıca üçüncü bölümde özellikle Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla literatürde bulunan ve bu çalışmada daha genel halleri elde edilen bazı lemmalar ile bu lemmalar yardımıyla elde edilen sonuçlar bulunmaktadır. Dördüncü bölümde uyumlu kesirli integraller, genelleştirilmiş kesirli integraller ve genelleştirilmiş k-kesirli integraller yardımıyla bazı konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir genelleştirmesi elde edilmiştir. Ayrıca bu integral operatörlerini içeren yeni özdeşlikler ve bu özdeşliklerle beraber, bilinen bazı eşitsizlikleri kullanarak Hermite-Hadamard tipli yeni sonuçlar elde edilmiştir. Araştırmada elde edilen sonuçların, bazı özel koşullar altında, literatürde var olan, klasik integraller ve Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla elde edilen birtakım sonuçların bir genişlemesi ve genelleştirmesi olduğu gözlenmiştir. Son olarak, tezin beşinci bölümü sonuç ve öneriler, altıncı bölümü ise tezde kullanılan kaynaklara ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş kesirli integral operatörü, Genelleştirilmiş *k*-kesirli integral operatörü, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Konveks fonksiyon, q*uasi*-Konveks fonksiyon, Riemann-Liouville kesirli integral operatörü, s-Konveks fonksiyon, Uyumlu kesirli integral operatörü.

ABSTRACT

INEQAULITIES INVOLVING FRACTIONAL INTEGRALS FOR CONVEX FUNCTION CLASSES

Abdurrahman GÖZPINAR

Ordu University
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2018
Phd. Thesis, 121p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Erhan SET

II. Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

The theory of inequalities has an important role in science such as mathematics, physics and engineering. Numerous studies and theses have been published about Hermite-Hadamard inequality, which is of interest to many researchers, with the help of classical or fractional integrals. This thesis, in which new inequalities of the Hermite-Hadamard type are obtained for some classes of convex functions with the aid of a few different fractional integral operators, comes in six parts. The first part is devoted to input and is given as a compilation of general information about inequality and fractional integrals, including historical process. The second part contains the basic concepts used in our research, some special functions such as Beta and Gamma, the definitions and properties of several of the classes of convex functions, as well as information on a few types of inequality that will be used in theorem proofs. In the third chapter, Riemann-Liouville fractional integrals, conformable fractional integrals, generalized fractional integrals and generalized k-fractional integrals are introduced. In addition, in the third part, there are some lemmas which are found in the literature with the help of Riemann-Liouville fractional integrals and which are obtained more general conditions in this study, and the results obtained with the help of these lemmas. In the fourth chapter, a generalization of the Hermite-Hadamard inequality for some convex function classes has been obtained by using conformable fractional integrals, generalized fractional integrals and generalized k-fractional integrals. In addition, new identities including these integral operators and new results of Hermite-Hadamard type are obtained by using some known inequalities together with these identities. It has been observed that the results obtained in the research are an extension and generalization of some of the results obtained with the help of classical integrals and Riemann-Liouville fractional integrals which exist in the literature under certain special circumstances. Finally, the fifth part of the thesis deals with the conclusion and the proposal, the sixth chapter is for the resources used in the thesis.

Key Words: Convex function, Conformable fractional integral, Hermite-Hadamard inequality, Generalized fractional integral, Generalized k-fractional integral, Riemann-Liouville fractional integral, quasi-konvex functions, *s*-convex functions,

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim süresince her türlü bilgi ve birikimini büyük bir özveri ve meslek sevgisi ile paylaşan, bu aşamalara gelmemde büyük pay sahibi olan, minnet ve saygıyla hatırlayacağım çok kıymetli danışman hocam, Doç. Dr. Erhan SET'e şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca öneri ve desteklerini eksik etmeyen Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve hiçbir zaman yardımını esirgemeyen arkadaşım Barış ÇELİK'e teşekkür ederim.

Diğer yandan, daima yanımda olan ve beni destekleyen aileme, ayrıca her türlü fedakârlığı gösteren sevgili eşim Zerrin GÖZPINAR'a yürekten teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Şekil No</u> **<u>Sayfa</u>**

SİMGELER ve KISALTMALAR

$B(a,b)$	:	Beta fonksiyonu
$B_x(a,b)$	:	Tamamlanmamış beta fonksiyonu
Γ	:	Gama fonksiyonu
K_s^1	:	Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon Sınıfı
K_s^2	:	İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon Sınıfı
f'	:	f Fonksiyonun Birinci Mertebeden Türevi
I	:	Reel Sayılar Kümesinde Bir Aralık
$I°$	:	I' nın içi
$\mathrm{J}_{\mathrm{a}^+}^{\alpha}$	:	α. Dereceden Sol Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegral
$\mathrm{J}_{\mathrm{b}^-}^{\alpha}$	:	α. Dereceden Sağ Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegral
$\mathrm{L[a,b]}$	:	$[\mathrm{a,b}]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonlar Kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$(\mathcal{J}_{\rho,\lambda.\alpha+;w}^{\sigma}\varphi)(x)$	:	Sol Taraflı Genelleştirilmiş İntegral Operatörü
$(\mathcal{J}_{\rho,\lambda,b-;w}^{\sigma}\varphi)(x)$	:	Sağ Taraflı Genelleştirilmiş İntegral Operatörü
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar.
f''	:	f Fonksiyonun İkinci Mertebeden Türevi
$Q(I)$	:	Q konveks fonksiyonlar sınıfı
$P(I)$	:	P Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$SX(h,I)$	:	h-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$SV(h,I)$	:	h-Konkav Fonksiyonlar Sınıfı
$T_{\alpha}^{a}(f)(t)$	:	α Mertebeli Sol Taraflı Uyumlu Kesirli Türev
$({}_{\alpha}^{b}Tf)(t)$	:	α Mertebeli Sağ Taraflı Uyumlu Kesirli Türev
$(I_{\alpha}^{a}f)(t)$	:	α Mertebeli Sol Taraflı Uyumlu Kesirli İntegral
$({}^{b}I_{\alpha}f)(\mathrm{t})$	:	α Mertebeli Sağ Taraflı Uyumlu Kesirli İntegral
$\sigma(k)$	:	Pozitif Reel Sayıların Sınırlı Dizisi

$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}_0$	:	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$I_k^{\alpha} f(t)$	:	α Mertebeli k-Kesirli İntegral
${}^{\rho}_{a}I_x^{\alpha} f(x)$	:	Katugampola Kesirli İntegral
$(\mathrm{I}_{a+;g}^{\alpha} f)(x)$	:	α Mertebeli, g Fonksiyonuna Bağlı , Sol Taraflı Kesirli İntegral
$(\mathrm{I}_{b-;g}^{\alpha} f)(x)$	:	α Mertebeli, g Fonksiyonuna Bağlı, Sağ Taraflı Kesirli İntegral
$\mathcal{J}_{\rho,\lambda,\alpha+;w}^{\sigma,k,g} f(x)$	:	α Mertebeli, g Fonksiyonuna Bağlı, Sol Taraflı k-Kesirli İntegral
$\mathcal{J}_{\rho,\lambda,b-;w}^{\sigma,k,g} f(x)$	:	α Mertebeli, g Fonksiyonuna Bağlı, Sağ Taraflı k-Kesirli İntegral
$K_m(b)$	:	m-Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m^{\alpha}(b)$	:	(α, m) $-$Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$Re(\alpha)$	:	α' nın Reel Kısmı.

1. GİRİŞ

Aigner ve Ziegler'in [5] işaret ettiği gibi "analiz eşitsizliklerle doludur". Eşitsizlik iki çokluk arasındaki farklılığı ifade eder ve bu iki miktarın oranını belirlemek için kullanılır. Analizdeki kullanımının yanı sıra, ortalamalar teorisi, yaklaşım teorisi, nümerik analiz gibi matematiğin diğer alanlarında da önemli ölçüde kullanılan kuvvetli bir araçtır. Örneğin, meşhur aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği dikdörtgenler ve teğetsel üçgenler yardımıyla integralleri tahmin etmek için Erdös ve Grunwald [21] tarafından kullanılmıştır. Eşitsizliklerin önemi, ağırlıklı olarak analizdeki rolleri ile vurgulanır; ancak eşitsizliklerin kullanımı, beklenmedik farklı alanlarda da mevcuttur, örneğin graf teori bunlardan biridir [5]. Eşitsizliklerin geometrik gerçekler olarak bilindiği eski çağlardan 18. yüzyılın başlarına kadar uzanan tarihsel süreci ile ilgili kapsamlı bilgiler Fink'in denemesinde sunulmuştur [22]. Hardy, Littlewood ve Polya [26], Beckenbach ve Bellmann [10] ve Mitrinovic'in [38] yazmış oldukları kitaplar bu alanda klasik eserler arasında gösterilebilir. Ayrıca, bazı dergilerde de eşitsizliklere önemli bir yer verilmiştir. 1997'de ilk cildi yayımlanan "Journal of Inequalities and Applications", 1998'de yayımlanan "Mathematical Inequalities and Applications", 2000'de yayımlanan "Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics" ve 2007'de yayımlanan "Journal of Mathematical Inequalities" gibi bilimsel dergiler bunların en önemlileri arasındadır. Eşitsizliklerin kullanımı sadece matematik alanıyla sınırlı kalmamış aynı zamanda fizik ve mühendislik gibi bazı bilimsel alanlarda da kullanılmıştır. Bu kullanımlar, yeni uygulamaları ortaya çıkarmıştır. Araştırmacıların dikkatini çeken bu yönüyle de günümüze kadar uzanan bir gelişme göstermiştir.

Çok eski bir tarihi altyapıya sahip olan konvekslik, geometride temel bir kavram olmakla birlikte, fonksiyonel analiz, graf teori, olasılık teorisi gibi diğer alanlarda da kullanılmaktadır. Bu kavramın temellerinin Yunan filozoflar tarafından atıldığı söylense de Mısırlılar zamanına kadar uzanan bir tarihi olduğu iddia edilmektedir. Euclid'in bilime kazandırdığı "Elements" adlı eserinde ilk kez konvekslikten bahsedilmiştir. Archimedes'in "On The Sphere and Cylinder" isimli eserinde ise konveksliğin daha kesin bir tanımı bulunmaktadır [20]. Bununla birlikte konvekslik kavramının sistematik olarak kullanımının başlangıcı 19. yüzyılın sonlarında olmuştur. 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen'in bu alanda öncü kabul edilecek çalışmalarının ardından konveks fonksiyon teorisi hızlı bir gelişim göstermiştir. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak (Convex Funtions: Inequalities) 1987 yılında J.Pecaric tarafından kaleme alınmıştır. Klasik integraller yardımıyla konveks fonksiyonların çeşitli sınıfları için Hermite-Hadamard, Ostrowski, Fejer ve Simpson gibi eşitsizlik türlerini içeren sayısız çalışmalar yapılmıştır.

Hermite-Hadamard eşitsizliği, klasik konveks fonksiyonların yanı sıra $h-$konveks, $s-$konveks, quasi-konveks, p-konveks, Goudunova-Levin gibi farklı fonksiyon sınıfları için de elde edilmiştir. Dragomir ve Fitzpatrick'in ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için [17], Dragomir ve Pearce'nin quasi-konveks fonksiyonlar için [18], Varosanec'in [65] $h-$konveks fonksiyonlar için, Dragomir ve Pečarić'in [14] $Q(I)$ ve $P(I)$ fonksiyon sınıfları için yaptıkları çalışmalarda bu eşitsizliklere ait daha geniş bilgiler bulunabilir. Ayrıca bu ve benzeri Hermite-Hadamard, Ostrowski ve diğer eşitsizlik türleri için sayısız çalışmalar mevcuttur. Birçok yazar bu eşitsizlikleri geliştirerek literatüre yeni eserler kazandırmıştır. Ülkemizde de bu alanda lisansüstü ve doktora seviyesinde tezler bulunmaktadır. Elbette yapılan çalışmalar sadece klasik integrallerin kullanımı ile sınırlı kalmamış aynı zamanda kesirli integralleri içeren de birçok çalışma yapılmıştır.

Kesirli hesaplamaların başlangıcı, n. mertebeden bir tamsayı için türevin anlamının "n tam sayı olmadığında da olabilir mi?" sorusuna borçludur. 30 Eylül 1695 tarihinde sorulan bu sorunun ilk sahibi ise L'Hopital'dir. Bir gün Leibniz, mektubunda $\frac{D^n x}{Dx^n}$ şeklinde $f(x) = x$ fonksiyonun n. mertebeden türevini bu sembol ile göstermiş ve L'Hopital meraklı bir biçimde $n = \frac{1}{2}$ olması halinde elde edilecek sonucun ne olacağını sormuştur. Leibniz'in bu soruya cevabı ise, kesirli hesaplamaları içeren sayısız çalışmalarda görüleceği üzere, "Bir paradoks gibi bir gün yararlı bir sonuç olarak ortaya çıkacaktır." şeklinde olmuştur. Daha sonra bu konu; Euler, Laplace, Fourier, Lacroix, Abel, Riemann, Liouville, Grunwald ve Letnikov gibi öncü birçok bilim adamı ve araştırmacının ilgi odağı haline gelmiştir. Bu sorudan motive olarak, kesirli türev ve kesirli integral kavramını ilk ortaya atan matematikçi Liouville olarak gösterilir. Kesirli türev düşüncesi ile ilgili ilk makale Lacroix tarafından 1819'da yayımlanmıştır. Daha sonra Euler, kesirli türevi yeniden tanımlamıştır. 17. yüzyıldan itibaren bir çok matematikçinin kesirli türev ve kesirli integrasyon kavramlarını genelleştirmesiyle bu konuda geniş bir çalışma sahası açılmıştır.

Geçmişte tamsayı mertebeden modellerin kullanılmasının sebebi kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunamamasıydı. Fakat artık kesirli türev ve integrallerin dahil olduğu problemleri çözmek için geniş çapta yaklaşım metodları geliştirilmiştir. Kesirli mertebeden türev, tamsayı mertebeli diferansiyel denklemlerin bazı fiziksel olayları açıklamadaki eksik kalan yanlarını kapatmakla beraber fiziksel olayların karakterinin anlaşılmasında da büyük rol sahibidir. Yapılan araştırmalar neticesinde keyfi mertebeli türev ve integral kavramının, gerçek dünyada karşımıza çıkan bir cismi veya modeli tanımlamakta, klasik tamsayı metodlarına göre çok daha doğru sonuçlar verdiği tespit edilmiş, bununla birlikte çeşitli madde ve işlemlerin kalıtsal özelliklerinin tanımlanmasında kullanılabilecek çok iyi bir araç olduğu gözlenmiştir. Bu ise tamsayı mertebeli türevlere göre önemli bir avantajdır. Kesirli türevlerin bu avantajı, nesnelerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin matematiksel modellemelerinde, akışkanlar teorisi, elektrik devreleri, elektro-analitik kimya gibi diğer birçok alanda kullanılmaktadır.

Literatürde kesirli türev ve integrallerin birçok matematikçi tarafından yapılmış tanımları mevcuttur. N.H. Abel, J. Liouville, A.L. Cauchy, P.A. Laurent, M. Caputo, M. Riesz ve H. Weyl yapmış oldukları tanımlar ile öne çıkan bilim adamları arasında gösterilmektedir. Birçok kesirli türev tanımında integral formu kullanılmıştır. Popüler olanlardan Riemann-Liouville ve Caputo'nun tanımlarında bunu görmekteyiz. Diğer yandan Grunwald-Letnikov limit formundan yararlanarak kesirli türev tanımı yapılmıştır. Bu ve benzeri bütün kesirli türev tanımlarında lineer olma özelliği tek ortak özelliktir [34]. Diğer özelllikler arasında ise pek fazla uyum olduğu söylenemez. Örneğin sabit fonksiyonun Riemann-Liouville kesirli türevi sıfır değildir. Ayrıca klasik türevde geçerli olan, iki fonksiyonun çarpımının türevi, bölümünün türevi ve zincir kuralı gibi özellikler kesirli türevlerin hepsi için geçerli değildir.

Kesirli hesaplamalar ile ilgili, ancak 1970'li yıllardan sonra özel konferanslar düzenlenmiş ve birtakım tezler yazılmaya başlanmıştır. İlk konferans etkinliğini, B. Ross kesirli analiz konusunda doktora tezini hazırladıktan sonra New Haven Üniversitesi'nde "First Conference on Fractional Calculus and its Applications" adı altında Haziran 1974'te düzenlemiştir. Kesirli analizin ilk "ansiklopedisi" olarak adlandırılan S. Samko, A. Kilbas ve O. Marichev'in kitabı "Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications" önce Rusça daha sonra ise İngilizce olarak 1993'te yayımlanmıştır [53]. Kesirli analiz konusunda istenilen birçok önemli ayrıntı için bu ansiklopedik kaynağa başvurulabilir. Son zamanlarda bu alanda yazılmış kitap, dergi ve yapılan konferanslar ile ilgili geniş literatür araştırması J. T. Machado, V. Kiryakova ve F. Mainardi'nin 2010 yılında yayımladıkları "Recent History of Fractional Calculus" adlı makalede mevcuttur [36].

Son zamanlarda kesirli türevin yeni bir tanımı, klasik türevin doğal bir genişletilmesi olarak ortaya atıldı. Uyumlu kesirli türev (conformable fractional derivative) olarak adlandırılan bu tanım ile klasik türev tanımı arasındaki uyum dikkat çekicidir. Uyumlu kesirli türevler için çarpım ve bölüm kuralları sağlamakla birlikte, zincir kuralı da klasik türevlerdeki kurala yakın bir formda yazılabilmektedir. Bu yeni operatör, belirtilen benzer özelliklerinden dolayı araştırmacıların ilgisini çekmiş ve kısa zamanda yeni çalışmalar literatürde yer almıştır. Khalil'in ortaya attığı bu yeni tanım, klasik türevdekine benzer şekilde limit formu ile verilmiştir. Daha sonra uyumlu kesirli türev kavramı, Abdeljawad tarafından geliştirilmiştir. Abdeljawad yaptığı çalışmada, sağ ve sol taraflı uyumlu kesirli türev kavramlarını, kesirsel zincir kuralını ve Gronwall eşitsizliğini vermiştir. Ayrıca $n = 0, 1, 2, ..$ olmak üzere $\alpha \in (n, n+1]$ için sağ ve sol taraflı uyumlu kesirli integral tanımları verilmiş ve $\alpha = n+1$ olarak seçildiğinde uyumlu kesirli integraller ile elde edilen sonuçların Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla elde edilen sonuçlara indirgendiğine işaret edilmiştir.

Son zamanlarda A. O. Akdemir, E. Set, M.Z. Sarıkaya gibi bazı yazarlar tarafından bu yeni operatörler ile ilgili yeni çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. Ayrıca, A. Yalçın [2] yüksek lisans tez çalışmasında uyumlu kesirli integraller yardımıyla farklı türden fonksiyonlar için yeni sonuçlar elde etmiştir.

Riemann-Liouville kesirli integrallerinin yeni bir genelleştirmesi, Raina [51] tarafından; $\mathbb{R}$ reel sayılar ve $\sigma(k)\,(k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$ ise pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere

$$\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}(x) = \mathcal{F}^{\sigma(0),\sigma(1),\ldots}_{\rho,\lambda}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\Gamma(\rho k + \lambda)} x^k \quad (\rho, \lambda > 0; x \in \mathbb{R}) \tag{1.0.1}$$

şeklinde verilen fonksiyonların yeni bir sınıfı kullanılarak

$$\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}\varphi\right)(x) = \int_a^x (x-t)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(x-t)^{\rho}]\varphi(t)dt \qquad (x > a) \tag{1.0.2}$$

şeklinde verilmiştir. Bu operatör için $\sigma(k)$, λ ve w nın özel seçimleri sayesinde uyumlu kesirli integrallerde olduğu gibi Riemann-Liouville kesirli integrallerine bir dönüşüm sağlanmaktadır. Bu yeni operatörler yardımıyla da son zamanlarda Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson gibi eşitsizlikler için yeni çalışmalar yapılmıştır.

Tunç ve arkadaşları, $k-$gama fonksiyonunu kullanarak $\sigma(m) \in \mathbb{R}^+$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ reel sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere

$$\mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sigma(m)}{\mathtt{k}\,\Gamma_{\mathtt{k}}(\rho\,\mathtt{k}\,m + \lambda)} x^m \quad \left(\mathtt{k},\ \rho,\ \lambda \in \mathbb{R}^+;\ |x| < \infty\right), \tag{1.0.3}$$

şeklinde yeni bir fonksiyon sınıfı tanımlamışlardır. Bu fonksiyon sınıfı ile birlikte Samko, Kilbas ve Marichev'in [53] verdikleri, bir başka fonksiyona bağlı integral operatörü tanımındakine benzer şekilde, sırasıyla sol ve sağ taraflı $k-$genelleştirilmiş kesirli integral operatörünün tanımı

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,a+;w} f(x) \\ = &\int_a^x \frac{g'(t)}{(g(x)-g(t))^{1-\frac{\lambda}{\mathtt{k}}}} \mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda}[w(g(x)-g(t))^{\rho}]f(t)dt \quad (x > a) \end{aligned} \tag{1.0.4}$$

ve

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}^{\sigma,\mathrm{k},g}_{\rho,\lambda,b-;w} f(x) && (1.0.5)\\ &= \int_x^b \frac{g'(t)}{(g(t)-g(x))^{1-\frac{\lambda}{\mathrm{k}}}} \mathcal{F}^{\sigma,\mathrm{k}}_{\rho,\lambda}[w(g(t)-g(x))^{\rho}] f(t)\,dt \quad (x<b) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $g(x)$ fonksiyonunun ve genelleştirilmiş kesirli integrallerde olduğu gibi $\sigma(k)$, λ ve w değişkenlerinin özel seçimleri sayesinde bilinen birkaç kesirli integral opertörüne bir dönüşüm sağlanmaktadır. Örneğin $g(x) = x$ ve $g(x) = \ln x$ gibi farklı seçimlerde bilinen bazı kesirli integral operatörleri elde edilmektedir.

1.1 Tezin Ana Hedefi

Yukarıda verilen özet niteliğindeki birtakım genel bilgiler ve literatürde yapılan örnek çalışmalardan alınan motivasyon ile bu tez çalışmasında varılmak istenen ana hedeflerden bazıları;

i. Kesirli integral ve türevin gelişimi konusunda bilgiler verip konu hakkında öne çıkan detayları vermek,

ii. Uyumlu kesirli integraller, genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri ve genelleştirilmiş $k-$kesirli integral operatörleri yardımıyla yeni eşitsizlikler elde etmek, ayrıca klasik integraller ve Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla verilen bazı sonuçların daha genel hallerini elde etmek,

iii. Kullanılan integral operatörlerindeki bazı parametrelerin özel seçimleriyle, çalışmada elde edilen birtakım sonuçların literatürdeki klasik veya Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla elde edilen bazı sonuçlara dönüştüğünü göstermek,

iv. Kullanılan yeni integral operatörleri ile ilgili ayrıntılı bilgiler vermek ve yeni çözümler sunarak daha sonra yapılacak olan gerek tez gerekse yeni çalışmalar için aydınlatıcı olmasını sağlamaktır.

1.2 Tezin Organizasyonu

Altı bölümden oluşan bu tez çalışmasında yapılanlar ile ilgili kısa bir organizasyon bilgisi aşağıda verilmiştir.

Birinci Bölüm: Tezin ana hedefleri ortaya konmuş ve yapılan literatür araştırması ile birlikte kapsamlı bir tanıtım yapılmış ve bununla beraber genel bir giriş verilmiştir.

İkinci Bölüm: Bu bölümde çalışma boyunca kullanılacak olan bazı konvekslik çeşitlerine, özel fonksiyonlara, önemli eşitsizliklere ve bunlar ile ilgili özellikler ve örneklere yer verilmiştir.

Üçüncü Bölüm: Materyal ve yöntem olarak adlandırılan bu bölümde Riemann-Liouville kesirli integrallerinin genel özellikleri, birkaç uygulamalası ve bazı yazarlar tarafından bu integraller yardımıyla elde edilen sonuçlar verilmiştir. Ayrıca uyumlu kesirli türev ve integralleri, genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri ve $k-$genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri ile ilgili tanım ve özellikler ayrıntılarıyla verilmiş ve bu kesirli integraller yardımıyla elde edilmiş bazı sonuçlara yer verilmiştir. Uyumlu kesirli integraller, genelleştirilmiş kesirli integraller ve $k-$genelleştirilmiş kesirli integral operatörlerinde bulunan bazı parametrelerin özel seçimleriyle hangi kesirli veya klasik integrallere dönüştükleri de yine bu bölümde gösterilmiştir.

Dördüncü Bölüm: Bulgulara ayrılan bu kısımda üç alt bölüm bulunmaktadır. Birinci alt bölümde sırasıyla, diferansiyellenebilen konveks, ikinci anlamda $s-$ konveks, quasi-konveks ve iki kez diferansiyellenebilen $m-$konveks fonksiyonlar için yeni özdeşlikler ispatlanmış daha sonra bu özdeşlikler ve bilinen bazı eşitsizlikler kullanılarak Hermite-Hadamard tipli yeni sonuçlar elde edilmiştir. İkinci alt bölümde genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri yardımıyla yeni özdeşlikler ispatlamakla beraber önce konveks, ardından iki kez diferansiyellenebilen $s-$konveks ve son olarak ise $P(I)$, $Q(I)$, $S(X, h)$ ve $r-$konveks gibi bazı konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Üçüncü alt bölümde ise $k-$genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri yardımıyla Hermite-Hadamard eşitsizliğinin genelleştirmesi, yeni bir özdeşlik ve bu özdeşlik yardımıyla elde edilen yeni bulgular verilmiştir. Elde edilen sonuçların bazı özel koşullar altında hangi sonuçlara indirgendiği gösterilmiştir.

Beşinci Bölüm: Çalışmanın özet niteliğinde sonucu ve ilgili araştırmacılar için yeni öneriler bu bölümde verilmiştir.

Altıncı Bölüm: Tezin içinde kullanılan kaynaklar bu bölümdedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamızda kullanılacak olan tanımlar, teoremler, bazı iyi bilinen eşitsizlikler ve temel özellikler ile gerekli olan ispatlar verilecektir.

2.1 Konveks Fonksiyon Sınıfları İçin Literatür Araştırması

Tanım 2.1.1 (**Lineer Uzay**): L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun.
$+ : L \times L \to L$ ve $\cdot : F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde lineer uzay(vektör uzayı) denir.
A) L, + işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,
G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir,
G2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir,
G3. Her $x \in L$ için $x + \Theta = \Theta + x = x$ olacak şekilde $\Theta \in L$ vardır,
G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \Theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır,
G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.
B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.
L1. $\alpha.x \in L$ dir,
L2. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir,
L3. $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$ dir,
L4. $(\alpha\beta).x = \alpha(\beta.x)$ dir,
L5. $1.x = x$ dir(Burada 1, F nin birim elemanıdır).

$F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye kompleks lineer uzay adı verilir [7].

Tanım 2.1.2 F bir cisim ve V ile W, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T : V \to W$ dönüsümü,
i. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
ii. $T(cu) = cT(u)$
şartlarını sağlıyorsa T ye V üzerinde lineer dönüşüm denir [7].

Tanım 2.1.3 (**Konveks Küme**): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

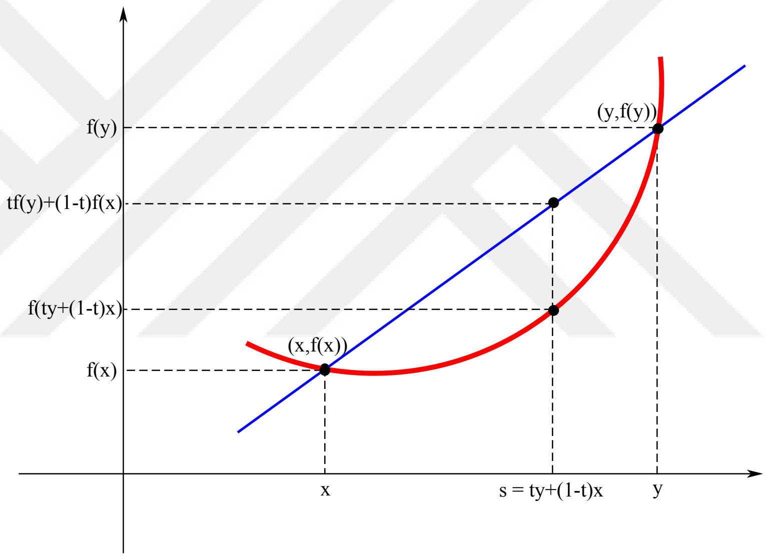
$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğindeki x ve y'nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu nedenle konveks küme tanımındaki α ve $1-\alpha$ yerine $\alpha+\beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan reel α, β sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir [9].

Tanım 2.1.4 (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y) \tag{2.1.1}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eşitsizlikte $'' \geq ''$ olması durumunda ise f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir. Eğer (2.1.1) eşitsizliği $t \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir [50].



Şekil 2.1: Konveks Fonksiyonun Geometrik Yorumu

Geometrik olarak bakıldığında; fonksiyonun konveks olduğu $[x, y]$ aralığında seçilen $ty + (1-t)x$ noktasındaki değeri, uç noktalarının koordinatları $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ olan kirişin temsil ettiği fonksiyonda aldığı değerden daima küçüktür. Bir başka deyişle kiriş eğrinin üzerindedir ya da eğri kirişin altında kalır denir.

Aşğıdaki kriterler konveks fonksiyon tanımına eşdeğerdir.

i. I aralığı üzerinde f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $c \in I$ olmak üzere $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ fonksiyonu I aralığında artan olmasıdır.

ii. $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $c, x \in (a,b)$ için

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)dt$$

olacak biçimde bir $g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ artan fonksiyonunun olmasıdır.
iii. f diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f' fonksiyonunun artan olmasıdır.
iv. f'' (a,b) de mevcut olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart $f'' \geq 0$ olmasıdır.
v. $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $x_0 \in (a,b)$ için f fonksiyonunun en az bir destek doğrusuna sahip olmasıdır. Yani $\forall x \in (a,b)$ için

$$f(x) \geq f(x_0) + \lambda(x - x_0)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu eşitsizlikte λ değişkeni x_0 a bağlıdır ve eğer f' var ise $\lambda = f'(x_0)$ yada $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ ise $\lambda \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ dir.
vi. $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart; grafik üzerinde seçilen üç ayrı P, Q, R noktalarını birleştiren kirişler için

$$eğimPQ \leq eğimPR \leq eğimQR$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 2.1.1 f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise
i. $f, (a,b)$ aralığında süreklidir,
ii. $f, [a,b]$ aralığında sınırlıdır [8].

Önerme 2.1.1 i. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise bu aralığın herhangi bir alt aralığı olan $[x,y]$ üzerinde de aynı şekilde konvekstir.
ii. Herhangi $x, y \in [a,b]$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada konveks fonksiyon için verilen tanımda $t = \frac{1}{2}$ seçimi yapıldığı açık bir şekilde görülmektedir.
iii. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks, $t_1, t_2, ..., t_n \in [0,1]$ için $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ ve $x_1, x_2, ..., x_n$ $\in [a,b]$ olmak üzere

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + ... + t_nf(x_n)$$

olarak verilen 'Jensen eşitsizliği' geçerlidir.
iv. Özel olarak $t_1 = t_2 = ... = t_n = \frac{1}{n}$ seçimi yapılırsa $x_1, x_2, ..., x_n \in [a,b]$ için

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)\right)$$

eşitsizliği geçerlidir [37].

Teorem 2.1.2 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart

$$U = \{(x, y)|a \leq x \leq b, f(x) \leq y\}$$

kümesinin konveks olmasıdır. Geometrik olarak, fonksiyonun tanımlı olduğu aralıkta eğri üzerinde kalan bölgenin konveks bir küme belirtmesidir [37].

Konveks fonksiyon ile ilgili tanım, teorem ve önermelerin ardından şimdi de çalışmada kullanılan bazı konvekslik çeşitlerinin tanım ve özellikleri verilecektir.

Tanım 2.1.5 (*J*-Konveks Fonksiyon): I, $\mathbb{R}$'de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen konveks veya J-konveks fonksiyon denir [38].

Tanım 2.1.6 (Kesin *J*-Konveks Fonksiyon): Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin J-konveks fonksiyon denir [38].

Sonuç 2.1.1 Her konveks fonksiyon J-konveks fonksiyondur.

Sonuç 2.1.2 $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun I'da konveks olması için gerek ve yeter sart, her $x, y \in I$ ve her $p, q > 0$ reel sayıları için

$$f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p+q}$$

olmasıdır. Bu eşitsizlik (2.1.1) eşitsizliğine denktir [39].

Tanım 2.1.7 (Quasi-Konveks Fonksiyon): $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve faklı küme olsun. Her $x, y \in [a, b]$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\left\{f(x), f(y)\right\}$$

ise f'ye $quasi-$konveks fonksiyon denir. Eğer

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \max\left\{f(x), f(y)\right\}$$

ise f'ye kesin $quasi-$konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \max\left\{f(x), f(y)\right\}$$

ise f'ye $quasi-$konkav fonksiyon ve

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)>\max\left\{f(x),f(y)\right\}$$

ise f'ye kesin $quasi-$konkav fonksiyon denir [18].

Tanım 2.1.8 f hem quasi konveks hem de quasi konkav ise f' ye quasi monotonik denir [25].

Not 2.1.1 Her konveks fonksiyon aynı zamanda bir quasi konveks fonksiyondur. Fakat bunun tersi doğru değildir. Yani konveks fonksiyon olmadığı halde quasi-konveks olan fonksiyonlar vardır.

Örnek 2.1.1 $g:[-2,2]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g(t)=\begin{cases}1, & t\in[-2,-1],\\ t, & t\in(-1,2].\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $g(t)$ fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında $quasi-$konvekstir fakat konveks değildir [30].

Tanım 2.1.9 ($m-$Konveks Fonksiyon): $f:[0,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ ve $b>0$ olsun. Her $x,y\in[0,b]$, $m\in[0,1]$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f(tx+m(1-t)y)\leq tf(x)+m(1-t)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna $m-$konveks fonksiyon denir ve bu fonksiyon sınıfları K_m^b ile gösterilir [62]. Burada $m=1$ seçilirse, yukarıda verilen eşitsizlik klasik konveks fonksiyon eşitsizliğine $m=0$ seçimi yapılırsa starshaped fonksiyonu eşitsizliğine dönüşür.

Tanım 2.1.10 ((α,m)$-$)Konveks Fonksiyon): $f:[0,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ ve $b>0$ olsun. Her $x,y\in[0,b]$, $t\in[0,1]$ ve $(\alpha,m)\in[0,1]^2$ için

$$f(tx+m(1-t)y)\leq t^\alpha f(x)+m(1-t^\alpha)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna $(\alpha,m)-$konveks fonksiyon denir [40]. Burada (α,m) nin seçimleriyle farklı konveks fonksiyon sınıfları elde edilir.
Örneğin $(\alpha,m)\in\{(0,0),(\alpha,0),(1,0),(1,m),(1,1),(\alpha,m)\}$ seçimleri yapıldığında yukarıdaki (α,m) fonksiyon sınıfı, sırasıyla; artan, $\alpha-$starshaped, starshaped, $m-$konveks, konveks ve $\alpha-$konveks fonksiyon sınıflarına dönüşür.

Tanım 2.1.11 (Godunova-Levin Fonksiyonu): Negatif olmayan $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$, $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f' ye Godunova-Levin fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir [24]. Bu tanıma denk olarak; $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise, bu takdirde

$$f(x)(x-y)(x-z) + f(y)(y-x)(y-z) + f(z)(z-x)(z-y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır [24].

Tanım 2.1.12 (P-Fonksiyon): Negatif olmayan $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x, y \in I$, $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f'ye $P-$fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir [14]. Tanımlardan açıkça görüleceği gibi, tüm negatif olmayan monoton ve negatif olmayan konveks fonksiyonlar $Q(I)$ sınıfına aittir. Ayrıca $Q(I) \supset P(I)$ ve $P(I)$ sınıfından fonksiyonlar negatif olmayan monoton, konveks ve quasi konveks fonksiyonlardan meydana gelmektedir.

Tanım 2.1.13 (Birinci Anlamda $s-$Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_+$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda $s-$konveks fonksiyon denir [45].

Tanım 2.1.14 (İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon): $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}_+$ için $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonsiyonuna ikinci anlamda s-konveks denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir [11]. Verilen eşitsizlikte $s = 1$ için $[0, \infty)$ aralığında $s-$konvekslik kavramı bilinen konveksliğe dönüşür.

Örnek 2.1.2 $s \in (0,1)$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} a, & t = 0 \\ bt^s + c, & t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

i. $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ ise $f \in K_s^2$ dir.

ii. $b > 0$ ve $c < 0$ ise $f \notin K_s^2$ dir [28].

Tanım 2.1.15 ($h-$Konveks Fonksiyon): $h : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu her $x, y \in I$, $\alpha \in (0,1)$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna $h-$konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir [65]. Bu eşitsizlik yön değiştirirse, bu durumda f fonksiyonuna h-konkav fonksiyon veya $SV(h, I)$ sınıfına aittir denir. Eğer $h(\alpha) = \alpha$ olarak seçilirse, bu takdirde tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına ve tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SV(h, I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ olarak alınırsa, $SX(h, I) = Q(I)$; $h(\alpha) = 1$ alınırsa $SX(h, I) \supseteq P(I)$ ve $h(\alpha) = \alpha^s$, $s \in (0,1)$ alınırsa $SX(h, I) \supseteq K_s^2$ olduğu açıkça görülebilir.

Tanım 2.1.16 x, y pozitif sayılarının r. kuvvetlerine göre kuvvet ortalaması

$$M_r(x, y; \lambda) = \begin{cases} (\lambda x^r + (1-\lambda)y^r)^{\frac{1}{r}} & , r \neq 0 \ ise \\ x^\lambda y^{1-\lambda} & , r = 0 \ ise \end{cases}$$

olarak tanımlanır [49].

Tanım 2.1.17 ($r-$Konveks Fonksiyon): Pozitif f fonksiyonu her $x, y \in [a, b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq M_r((f(x), f(y); \lambda))$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında $r-$konveks fonksiyon denir [23]. Bu tanımdan $0-$konveks fonksiyonların $log-$konveks fonksiyonlar ve $1-$konveks fonksiyonların bilinen konveks fonksiyonlar olduğu sonucuna ulaşılabilir. $r-$konvekslik tanımı

$$f^r(\lambda x + (1-\lambda)y) = \begin{cases} (\lambda f^r(x) + (1-\lambda)f^r(y))^{\frac{1}{r}} & , r \neq 0 \\ (f(x))^\lambda (f(y))^{1-\lambda} & , r = 0 \end{cases}$$

biçiminde genişletilmiştir [49].

Tanım 2.1.18 (log-Konveks Fonksiyon): I, $\mathbb{R}$ de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $logf$ konveks ise veya her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) > [f(x)]^\alpha [f(y)]^{1-\alpha}$$

ise f fonksiyonuna $log-$konveks fonksiyon ve bu eşitsizliğin ters çevrilmesi durumunda ise $log-$konkav fonksiyon denir [50].

Tanım 2.1.19 (Artan-Azalan Fonksiyon): f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 ise bu aralığın keyfi iki noktası olsun. Bu takdirde

i. $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,
ii. $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,
iii. $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,
iv. $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır [4].

Teorem 2.1.3 J açık bir aralık ve $J \subseteq I$ ve I, J' nin uç noktalarının her ikisini veya birini içeren en küçük aralık olmak üzere f, I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

i. $\forall x \in J$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.
ii. $\forall x \in J$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.
iii. $\forall x \in J$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.
iv. $\forall x \in J$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır [4].

Sonuç 2.1.3 f ve g konveks fonksiyonlar ve aynı zamanda g fonksiyonu artan ise $g \circ f$ fonksiyonu da konvekstir [52].

2.2 Gama, Beta ve Tamamlanmamış Beta Fonksiyonu

Tanım 2.2.1 (Gama Fonksiyonu): $n > 0$ için

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-u} u^{n-1} du$$

ile tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır [32]. Gama fonksiyonunun bazı önemli özellikleri aşağıda verilmiştir.

1. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\Pi}$

3. $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\Pi}{\sin p\Pi}, \quad 0 < p < 1$

4. $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\Pi}\,\Gamma(2n).$

Tanım 2.2.2 (Beta Fonksiyon): $\Gamma(\alpha)$, Euler Gama fonksiyonu, $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{Z}_0^-$ sırasıyla kompleks sayılar ile pozitif olmayan tamsayılar olmak üzere Beta fonksiyonu

$$B(\alpha,\,\beta) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt & (Re(\alpha) > 0;\; Re(\beta) > 0) \\ \\ \dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} & (\alpha,\,\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_0^-) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca tamamlanmamış Beta fonksiyonu

$$B_x(\alpha,\,\beta) := \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt \quad (Re(\alpha) > 0)$$

şeklinde tanımlanır [61]. Uyumlu kesirli integraller için yapılan çalışmalarda, $B(\alpha,\,\beta)$ ve $B_x(\alpha,\,\beta)$ ifadelerinde α ile β reel sayı olarak alınacaktır.

$x = 1$ için tamamlanmamış beta fonksiyonu beta fonksiyonuna dönüşür. Çalışmada kullanılacak olan bu fonksiyonlarla ilgili birkaç özellik ve örnek aşağıdaki gibi verilebilir.

i. $B(a,b) = B_t(a,b) + B_{1-t}(b,a)$

ii. $B(a,b) = B_{\frac{1}{2}}(a,b) + B_{\frac{1}{2}}(b,a)$

iii. $B_x(a+1,b) = \frac{aB_x(a,b) - x^a(1-x)^b}{a+b}$

iv. $B_x(a,b+1) = \frac{bB_x(a,b) + x^a(1-x)^b}{a+b}$

v $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$

vi. $B(x+1,y) + B(x,y+1) = B(x,y)$

vii. $B(1,y) = \frac{1}{y}$

viii. $B(x,y) = B(y,x)$

Özellikle uyumlu kesirli integraller ile yapılan çalışmalarda kullanılan tamamlanmamış beta fonksiyonunun integral ve türevi ile ilgili aşağıdaki örnekler aydınlatıcı olacaktır.

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt = u^{'}(x)f(u(x)) - v^{'}(x)f(v(x))$$

olarak bilinen Leibniz kuralı uygulanarak, $B_x(a,b)$ nin türevi;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}B_x(a,b) &= \frac{d}{dx}\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt \\ &= x^{a-1}(1-x)^{b-1} \end{aligned}$$

dir. Ayrıca, $B_t(a,b)$ nin $[0,1]$ üzerindeki integrali, kısmi integrasyon metodu kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_t(a,b)dt &= B_t(a,b)t\Big|_0^1 - \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}tdt \\ &= B(a,b) - B(a+1,b) \\ &= B(a,b) - \frac{a}{a+b}B(a,b) \\ &= \frac{b}{a+b}B(a,b) \end{aligned}$$

dir.

Lemma 2.2.1 $(\min\{Re(\alpha), Re(\beta)\} > 0;\ Re(p) > -1)$ olmak üzere kısmi integral yöntemi kullanılarak elde edilen aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\int_0^1 t^p\, B_t(\alpha,\beta)\, dt = \frac{1}{p+1}\left[B(\alpha,\beta) - B(\alpha+p+1,\beta)\right].$$

Örnek 2.2.1 $p = 2$ olmak üzere $t^2 B_t(a,b)$ nin $[0,1]$ üzerinden belirli integrali

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2 B_t(a,b)dt &= \frac{1}{3}B_t(a,b)t^3\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}t^3 dt \\ &= \frac{1}{3}\left[B(a,b) - B(a+3,b)\right]\end{aligned}$$

dir.

2.3 Bazı Önemli Eşitsizlikler

2.3.1 Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Konveks fonksiyonlar için literatürde bulunan önemli eşitsizliklerden biri olan Hermite-Hadamard eşitsizliği, son yıllarda eşitsizlik ile ilgili çalışmalar yapan çoğu araştırmacının ilgisini çekmiştir. Sürekli konveks fonksiyonun (integral) ortalama değerinin tahminini veren bu eşitsizlik, konveks fonksiyonlar teorisinde büyük rol oynamakla beraber, ayrıca fonksiyonun reel sayıların açık bir aralığında konveks olması için gerek ve yeter şartını da sağlamaktadır. Konveks bir fonksiyonun grafiğinin, üzerinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçasının altında kaldığı bilinmektedir. Bu bağlamda Hermite-Hadamard eşitsizliğinin geometrik yorumunu anlamak konveksliği anlamaktan geçmektedir diyebiliriz. Fonksiyonun seçilen bir $[a, b]$ aralığındaki integralinin ortalama değeri, aralığın orta noktasındaki değerinden büyük, uç noktalarındaki değerlerinin aritmetik ortalamasından ise küçüktür. Bu kolay eşitsizliği anlamak için küçük bir hesaplama yapmak yeterlidir. Aslında "konveks" teriminin temelleri, Hermite'nin 1881'de yazdığı ve "A Journal of Mathematics" dergisinde "A Short Note in Mathtesis" başlıklı makalesinde yer almıştır [19]. Dragomir ve Pearce, yayımladıkları monografide Hermite-Hadamard eşitsizliğinin, doğal bir geometrik yorumlama ve birçok uygulama ile konveks fonksiyonlar için ilk temel sonuç olduğunu belirtmişlerdir [19]. Matematikte bu eşitsizliğe olan ilgi hala devam etmektedir. Hermite-Hadamard eşitsizliği; integral eşitsizlikleri, yaklaşım teorisi, özel ortalamalar teorisi, optimizasyon teorisi, bilgi teorisi ve sayısal analiz alanlarında büyük katkılar sağlamaktadır. Bu eşitsizlik; quasi-konveks, log-konveks, $r-$konveks, Godunova-Levin, $p-$fonksiyon ve harmonik konveks gibi farklı fonksiyon sınıfları için genelleştirilmiştir.

Teorem 2.3.1 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): I, $\mathbb{R}$'de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.3.1}$$

eşitsizliği geçerlidir [49].

İspat. Hermite-Hadamard eşitsizliğinin literatürde varolan iki ispatı aşağıda verilecektir. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks yani (a, b) aralığında sürekli ve $[a, b]$ aralığında sınırlı olduğundan integrallenebilirdir. Konveksliğin geometrik yorumundan eşitsizliğin sağ tarafının ispatı açıktır.

$x = ta + (1-t)b$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &= \int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \\
&\leq f(a)\int_0^1 tdt + f(b)\int_0^1 (1-t)dt \\
&= \frac{f(a)+f(b)}{2}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca belirli integralin parçalanışından

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right)$$

olarak yazılabilir. Burada eşitsizliğin sağında $x = a + \frac{t(b-a)}{2}$ için

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

ve $x = b - \frac{t(b-a)}{2}$ için

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

eşitlikleri geçerlidir. Bu durumda, elde edilen bu eşitlikler ve fonksiyonun konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(a+\frac{t(b-a)}{2}\right) + f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)\right]dt \\
&\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}$$

dir. Böylece her iki eşitsizlikte ispatlanmış olur [8].
Hermite-Hadamard eşitsizliğinin farklı bir ispatı ise aşağıdaki gibi verilebilir;
f fonksiyonu konveks olduğundan fonksiyon grafiği üzerinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçasının fonksiyon grafiğinin üzerinde olduğu bilinmektedir. Buna göre

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlikte her iki taraf $[a, b]$ aralığı üzerinden x değişkenine göre integre edilirse

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\leq \int_a^b f(a)dx + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \int_a^b (x - a)dx \\ &= \frac{f(a) + f(b)}{2} \end{aligned}$$

dir. Ayrıca sol tarafın ispatına gelindiğinde, sırasıyla $x = \frac{a+b-t(b-a)}{2}$ ve $x = \frac{a+b+t(b-a)}{2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx &= \frac{1}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2} \right) + f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2} \right) \right] dt \\ &\geq f\left(\frac{a+b}{2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır [43].
Hermite-Hadamard eşitsizliğinin her iki tarafınında konveks fonksiyonları karakterize etmesi biraz ilginçtir. Daha net bir ifadeyle, I, $\mathbb{R}$' de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunun $[a, b]$ aralığının her kompakt alt aralığına kısıtlanması Hermite-Hadamard eşitsizliğini sağlıyor ise f konvekstir.

Bazı konveks fonksiyonlar için anlamayı kolaylaştırıcı olması açısından aşağıda verilen örnekte basit bir uygulama verilmiştir.

Örnek 2.3.1 $f(x) = x^2$ için $b > a > 0$ olması durumunda $[a, b]$ aralığında konveks f fonksiyonu için

$$(b - a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b x^2 dx \leq (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

ile verilen Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.
Burada

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \quad \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}, \quad \frac{f(a) + f(b)}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

dir. Gerçekten de

$$(b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{b^3-a^3}{3}$$

için

$$(b-a)\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leq \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3}$$

dir. Öyleyse

$$3a^2+6ab+3b^2 \leq 4a^2+4ab+4b^2$$

eşitsizlği vardır, dolayısıyla

$$0 \leq (a-b)^2$$

olduğu kolaylıkla anlaşılır, bu da birinci eşitsizliğin açık ispatıdır. Benzer şekilde

$$\frac{b^3-a^3}{3} \leq (b-a)\frac{a^2+b^2}{2}$$

eşitsizliği için de gerekli işlemlerin ardından yine

$$0 \leq (a-b)^2$$

olur ve böylece ispat tamamlanır.

Örnek 2.3.2 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ fonksiyonu için Hermite notunda

$$x - \frac{x^2}{x+2} < log(1+x) < x - \frac{x^2}{2x+2}$$

şeklinde bir eşitsizlik yazmıştır [27]. Özellikle, her $n \in \mathbb{N}^*$(pozitif doğal sayı) için

$$\frac{1}{\frac{n+1}{2}} < log(n+1) - logn < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

olarak verilmiş olup bu ise

$$n! \sim \sqrt{2\Pi}.n^{\frac{n+1}{2}}e^{-n}$$

ile verilen Stirling's formülünün elde edilişine yardımcı olur [42].

Örnek 2.3.3 $f = e^x$ için Hermite-Hadamard eşitsizliği sağlanır, yani

$$e^{\frac{a+b}{2}} < \frac{e^a - e^b}{b-a} < \frac{e^a + e^b}{2}$$

dir. Bu ise $x = e^a$ ve $y = e^b$ için

$$\sqrt{xy} < \frac{x-y}{\log x - \log y} < \frac{x+y}{2}$$

ile verilen geometrik, logaritmik, aritmetik ortalama ilişkisini verir [42].

Örnek 2.3.4 $f(x)=\sin x$ fonksiyonu için $[0,\pi]$ aralığında konkav olduğundan

$$\frac{\sin a+\sin b}{2}<\frac{\cos a-\cos b}{b-a}<\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

eşitsizliğini sağlar, bu ise $[0,\frac{\pi}{2}]$ aralığında "$\tan x>x>\sin x$" eşitsizliğini gösterir [42].

Hermite-Hadamard eşitsizliğinin farklı konveks fonksiyon sınıfları için gerek klasik gerekse bazı kesirli integral operatörlerini içeren genelleştirmeleri mevcuttur. Dragomir ve Fitzpatrik'ın [17], ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için elde ettikleri Hermite Hadamard eşitsizliği aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.3.2 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ ikinci anlamda $s-$konveks bir fonksiyon, $s\in(0,1]$, $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$ ve $f\in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{s+1} \tag{2.3.2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bazı kesirli integraller yardımıyla elde edilen formları ilerleyen bölümlerde verilecektir. Tez boyunca lemma ve teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan bazı eşitsizlikler aşağıda verilmiştir.

2.3.2 Hölder Eşitsizliği

Teorem 2.3.3 (Hölder Eşitsizliği): $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ ve $a=(b_1,b_2,...,b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki $n-$lisi olsun. Bu takdirde, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

(a) $p>1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n|a_kb_k|\leq\left(\sum_{k=1}^n|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p<0$ veya $q<0$ ise,

$$\sum_{k=1}^n|a_kb_k|\geq\left(\sum_{k=1}^n|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [38].

Teorem 2.3.4 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$

aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği vardır. Benzer şekilde iki katlı integraller için

$$\int_a^b \int_a^b |f(x)g(x)|dxdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \int_a^b |g(x)|^q dxdy\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [39].

Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan ve daha iyi sonuçlar elde etmek için kullanılan Power Mean eşitsizliği aşağıdaki gibidir.

Sonuç 2.3.1 (Power Mean Eşitsizliği): f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $q \geq 1$, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Benzer şekilde iki katlı integraller için

$$\int_a^b \int_a^b |f(x)g(x)|dxdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)|dxdy\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)||g(x)|^q dxdy\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

2.3.3 Minkowski ve Üçgen Eşitsizliği

Teorem 2.3.5 (Minkowski Eşitsizliği): $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ ve $a = (b_1, b_2, ..., b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki $n-$lisi olsun. Bu takdirde, $p > 1$ olmak üzere

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği geçerlidir [39].

Teorem 2.3.6 (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi x, y reel sayıları için,

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|$$

ve tümevarım yoluyla

$$|x_1 + x_2 +, ...x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir [39].

Teorem 2.3.7 (İntegraller için Üçgen Eşitsizliği): f, $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

eşitsizliği geçerlidir [39].

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Çalışmanın bu kısmında önce Riemann-Liouville kesirli integralleri ile ilgili, gerekli ön bilgiler ve literatürde varolan farklı konvekslik türleri için, konuya uygun olarak elde edilmiş, Hermite-Hadamard eşitsizlikleri verilecektir. İkinci olarak, bu kesirli integraller yardımıyla, farklı konveks fonksiyon sınıfları için, bazı yazarlar tarafından elde edilen lemma ve Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilecektir. Daha sonra ise araştırmada gerekli olan, uyumlu kesirli integraller, genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri ve genelleştirilmiş $k-$kesirli integral operatörleri ile ilgili tanım, özellikler ve örnekler ile literatürde bulunan bazı lemma ve eşitsizliklere yer verilecektir.

3.1 Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri

Tanım 3.1.1 $f \in L[a,b]$ olsun. Bu durumda sırasıyla $\alpha.(\alpha > 0)$ mertebeden sol taraflı ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integralleri

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad x > a$$

ve

$$J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad x < b$$

şeklinde tanımlanır [53]. Burada $\Gamma(t)$ gama fonksiyonudur ve $\alpha = 1$ seçilirse Riemann-Liouville kesirli integrali klasik integrale dönüşür. Ayrıca $\alpha = 0$ için $J_{a+}^{0} f(x) = J_{b-}^{0} f(x) = f(x)$ dir.

Örnek 3.1.1 $f(x) = 3(x-a)^2$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden kesirli integralini hesaplayalım. $x > a$ olmak üzere yukarıda verilen tanımdan faydalanarak $f(x) = 3(x-a)^2$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden kesirli integrali,

$$\begin{aligned} J_{a+}^{\frac{1}{2}} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_a^x 3(t-a)^2 (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x 3(t-a)^2 (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada $t = a + (x-a)u$ değişken değiştirmesi yapılarak

$$\begin{aligned} J_{a+}^{\frac{1}{2}} f(x) &= \frac{3}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 (x-a)^{\frac{5}{2}} u^2 (1-u)^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{3}{\sqrt{\pi}} (x-a)^{\frac{5}{2}} \int_0^1 u^2 (1-u)^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{3}{\sqrt{\pi}} (x-a)^{\frac{5}{2}} B(3, \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{\sqrt{\pi}}(x-a)^{\frac{5}{2}}\frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2})} \\ &= \frac{16}{5\sqrt{\pi}}(x-a)^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde değişken değiştirmesi yapılarak, elde edilen $\frac{16}{5\sqrt{\pi}}(x-a)^{\frac{5}{2}}$ fonksiyonunun tekrar $\frac{1}{2}$. mertebeden kesirli integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} J_{a+}^{\frac{1}{2}}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_a^x \frac{16}{5\sqrt{\pi}}(t-a)^{\frac{5}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{16}{5\sqrt{\pi}}(x-a)^3\int_0^1 u^{\frac{5}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{16}{5\sqrt{\pi}}(x-a)^3 B(\frac{7}{2},\frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{16}{5\sqrt{\pi}}(x-a)^3\frac{\Gamma(\frac{7}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(4)} \\ &= (x-a)^3 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece fonksiyonun art arda iki kez $\frac{1}{2}$. mertebeden kesirli integrali hesaplandığında klasik integraller için elde edilen sonucuna dönüştüğü görülmektedir.

Ayrıca, α. mertebeden sol taraflı ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli türevleri, $\alpha \in \mathbb{C}$ $(Re(\alpha) \geq 0)$ öyleki $[Re(\alpha)]$, $Re(\alpha)$' nın tam değeri olmak üzere

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha}f)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (J_{a+}^{n-\alpha}f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \ \ (n=[Re(\alpha)]+1;\ x>a) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

ve

$$\begin{aligned} (D_{b-}^{\alpha}f)(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (J_{b-}^{n-\alpha}f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dt \ \ (n=[Re(\alpha)]+1;\ x<b) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

şeklinde tanımlanır. Sarıkaya ve arkadaşları Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

Teorem 3.1.1 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $a<b$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde f, $[a,b]$ üzerinde konveks ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.1.3}$$

eşitsizliği geçerlidir [54]. Burada $\alpha = 1$ olarak seçildiğinde eşitsizliğin klasik integraller yardımı ile elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliğine dönüştüğü açıkça görülmektedir. Sarıkaya ve Yıldırım Riemann-Liouville kesirli integralleri yarımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir başka versiyonunu aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

Teorem 3.1.2 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $a < b$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde f, $[a,b]$ üzerinde konveks ise

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}f(b) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}f(a)\right] \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

eşitsizliği geçerlidir [55].

Ayrıca, Set ve arkadaşları Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla $s-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

Teorem 3.1.3 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyon, $a < b$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha > 0$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere f, $[a,b]$ üzerinde ikinci anlamda s-konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} 2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[J^{\alpha}_{a+}f(b) + J^{\alpha}_{b-}f(a)] \\ &\leq \alpha\left[\frac{1}{\alpha+s} + B(\alpha, s+1)\right]\frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

eşitsizliği geçerlidir [59].

3.1.1 Farklı Konveks Fonksiyon Sınıfları için Riemann-Liouville Kesirli İntegrallerini İçeren Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, literatürde bulunan bazı çalışmalardaki Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla elde edilen sonuçlara yer verilecektir. İlk olarak, Sarıkaya ve Yıldırım tarafından ispatlanan özdeşlik ve bu özdeşlik yardımıyla elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi verilmiştir.

Lemma 3.1.1 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}f(b) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}f(a)\right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &= \frac{b-a}{4}\left\{\int_0^1 t^{\alpha}f'\left(\frac{t}{2}a + \frac{2-t}{2}b\right)dt - \int_0^1 t^{\alpha}f'\left(\frac{2-t}{2}a + \frac{t}{2}b\right)dt\right\} \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

dir [55].

Teorem 3.1.4 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a<b$ olsun. Bu takdirde $q\geq 1$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon ise

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f(b)+J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \tag{3.1.7}$$
$$\leq \frac{b-a}{4(\alpha+1)}\left(\frac{1}{2(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\left\{\left[(\alpha+1)|f'(a)|^q+(\alpha+3)|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left[(\alpha+3)|f'(a)|^q+(\alpha+1)|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

eşitsizliği geçerlidir [55].

Teorem 3.1.5 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a<b$ olsun. Bu takdirde $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon ise

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f(b)+J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \tag{3.1.8}$$
$$\leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left[\frac{|f'(a)|+3|f'(b)|}{4}\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\frac{3|f'(a)|+|f'(b)|}{4}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$
$$\leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{4}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]$$

eşitsizlikleri geçerlidir [55].

Sarıkaya ve arkadaşları tarafından Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla elde edilen sonuçlar aşağıda verilecektir.

Lemma 3.1.2 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a<b$ ve $f^{'}\in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{a^+}f(b)+J^\alpha_{b_-}f(a)\right] \tag{3.1.9}$$
$$=\frac{b-a}{2}\int_0^1\left[(1-t)^\alpha-t^\alpha\right]f^{'}(ta+(1-t)b)dt$$

eşitsizliği geçerlidir [54].

Teorem 3.1.6 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a < b$ olsun. Bu takdirde $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b_-}^{\alpha} f(a)\right]\right| \\ &\leq \frac{b-a}{2(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left[|f'(a)| + |f'(b)|\right] \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

eşitsizliği geçerlidir [54].

Özdemir, Avcı ve Kavurmacı'nın Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla ispatladıkları özdeşlik ve bu özdeşlik yardımıyla $s-$konveks fonksiyonlar için elde ettikleri Hermite-Hadamard tipli sonuçlar aşağıdaki gibidir.

Lemma 3.1.3 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\frac{(x-a)^{\alpha} f(a) + (b-x)^{\alpha} f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J_{x^-}^{\alpha} f(a) + J_{x^+}^{\alpha} f(b)] \\ = &\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 (t^{\alpha}-1) f'(tx+(1-t)a)dt \\ &+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 (1-t^{\alpha}) f'(tx+(1-t)b)dt \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [46].

Teorem 3.1.7 $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $a, b \in I^{\circ}$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha > 0$, $s \in (0,1]$ ve $x \in [a,b]$ olmak üzere $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde $s-$konveks ise

$$\begin{aligned} &\left|\frac{(x-a)^{\alpha} f(a) + (b-x)^{\alpha} f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J_{x^-}^{\alpha} f(a) + J_{x^+}^{\alpha} f(b)]\right| \\ \leq\ &\frac{\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)}\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\right]|f'(x)| \\ &+\left[\frac{1}{s+1} - \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)}\right]\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}|f'(a)| + (b-x)^{\alpha+1}|f'(b)|}{b-a}\right] \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

dir [46].

Teorem 3.1.8 $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $a, b \in I^{\circ}$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha > 0$, $s \in (0,1]$ ve $x \in [a,b]$ olmak üzere $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde $s-$konveks ise

$$\left|\frac{(x-a)^{\alpha}f(a)+(b-x)^{\alpha}f(b)}{b-a}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x^-}^{\alpha}f(a)+J_{x^-}^{\alpha}f(b)\right]\right|$$
$$\leq \left(\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(1+p+\frac{1}{\alpha})}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\frac{|f'(x)|^q+|f'(a)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\frac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği geçerlidir [46].

Teorem 3.1.9 $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $a,b \in I^{\circ}$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha > 0$, $s \in (0,1]$ ve $x \in [a,b]$ olmak üzere $q \geq 1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde $s-$konveks ise

$$\left|\frac{(x-a)^{\alpha}f(a)+(b-x)^{\alpha}f(b)}{b-a}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x^-}^{\alpha}f(a)+J_{x^-}^{\alpha}f(b)\right]\right|$$
$$\leq \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\left\{\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\frac{\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)}|f'(x)|^q+\left[\frac{1}{s+1}-\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)}\right]|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\frac{\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)}|f'(x)|^q+\left[\frac{1}{s+1}-\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)}\right]|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitliği geçerlidir [46].

Zhu, Fečkan ve Wang'ın Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla ispatladıkları özdeşlik ve bu özdeşlik yardımıyla konveks fonksiyonlar için elde ettikleri sonuçlar aşağıdaki gibi verilecektir.

Lemma 3.1.4 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde

$$k(t)=\begin{cases} 1 & ,0<t\leq\frac{1}{2} \\ -1 & ,\frac{1}{2}<t\leq 1\end{cases}$$

olmak üzere

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{b^-}^{\alpha}f(a)+J_{a^+}^{\alpha}f(b)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{3.1.12}$$
$$=\frac{b-a}{2}\left[\int_0^1 k(t)f'(ta+(1-t)b)dt-\int_0^1\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]f'(ta+(1-t)b)dt\right.$$

eşitliği geçerlidir [68].

Teorem 3.1.10 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a<b$ olsun. Bu takdirde $|f^{'}|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[J^{\alpha}_{b^-}f(a)+J^{\alpha}_{a^+}f(b)]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\ &\leq \frac{b-a}{4(\alpha+1)}\left(\alpha+3-\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)\left[|f^{'}(a)|+|f^{'}(b)|\right]\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

eşitsizliği geçerlidir [68].

Noor ve Awan tarafından verilen Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren özdeşlik ve bu özdeşlik yardımıyla iki kez diferensiyellenebilen ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar için elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler aşağıda verilmiştir.

Lemma 3.1.5 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) üzerinde iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a<b$ ve $f''\in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}&\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f(b)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &=\frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)}\int_0^1(1-t)^{\alpha+1}\left[f''\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)+f''\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right]dt.\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

dir [44].

Teorem 3.1.11 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) üzerinde iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a<b$ ve $f''\in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde

$$\mathcal{C}(s,\alpha,t):=\int_0^1(1-t)^{\alpha+1}(1+t)^s dt \tag{3.1.15}$$

olmak üzere $|f''|$ ikinci anlamda s-konveks ise

$$\begin{aligned}&\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f(b)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\ &\leq\frac{(b-a)^2}{2^{s+3}(\alpha+1)}\left[\mathcal{C}(s,\alpha,t)+\frac{\Gamma(s+2+\alpha)}{\Gamma(s+3+\alpha)}\right](|f''(a)|+|f''(b)|)\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

dir [44].

Teorem 3.1.12 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) üzerinde iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a<b$ ve $f''\in L[a,b]$ olsun. $p,\,q\in(1,\infty)$ için $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $|f''|^q$ fonksiyonu ikinci anlamda $s-$konveks ise

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}f(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}f(b)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)^2}{2^{\frac{3q+s}{q}}(\alpha+1)}\left(\frac{1}{p(\alpha+1)+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.1.17}$$
$$\times\left[\left\{|f''(a)|^q(2^{s+1}-1)+|f''(b)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}+\left\{|f''(b)|^q(2^{s+1}-1)+|f''(a)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\right]$$

dir [44].

Teorem 3.1.13 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) üzerinde iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a<b$ ve $f''\in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde $q\geq 1$ ve $\mathcal{C}(s,\alpha,t)$ (3.1.15) de verildiği gibi olmak üzere, $|f''|^q$ fonksiyonu ikinci anlamda $s-$konveks ise

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}f(a)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}f(b)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)^2}{2^{\frac{3q+s}{q}}(\alpha+1)}\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\left[\left\{|f''(a)|^q\mathcal{C}(s,\alpha,t)+|f''(b)|^q\left(\frac{\Gamma(\alpha+s+2)}{\Gamma(\alpha+s+3)}\right)\right\}^{\frac{1}{q}}\right. \tag{3.1.18}$$
$$\left.+\left\{|f''(b)|^q\mathcal{C}(s,\alpha,t)+|f''(a)|^q\left(\frac{\Gamma(\alpha+s+2)}{\Gamma(\alpha+s+3)}\right)\right\}^{\frac{1}{q}}\right]$$

dir [44].

Özdemir ve Yıldız $quasi-$konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla aşağıdaki eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 3.1.14 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pozitif fonksiyon $0\leq a<b$ ve $f\in L[a,b]$ olsun. $\alpha>0$ olmak üzere f, $[a,b]$ üzerinde $quasi-$konveks bir fonksiyon ise

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left(J^{\alpha}_{a^+}f(b)+J^{\alpha}_{b^-}f(a)\right)\leq\max\{f(a),f(b)\} \tag{3.1.19}$$

eşitsizliği geçerlidir [47].

Teorem 3.1.15 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a<b$ olsun. $\alpha>0$ olmak üzere $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde $quasi-$konveks bir fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left(J^{\alpha}_{a^+}f(b)+J^{\alpha}_{b^-}f(a)\right)\right|\leq\frac{b-a}{\alpha+1}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\max\{|f'(a)|,|f'(b)|\} \tag{3.1.20}$$

eşitsizliği geçerlidir [47].

Teorem 3.1.16 $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$, (a,b) üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a<b$ ve $f^{'}\in L[a,b]$ olsun. $\alpha\in[0,1]$ ve $p>1$ için $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $|f^{'}|^{q}$, $[a,b]$ üzerinde $quasi-$konveks bir fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left(J_{a^{+}}^{\alpha}f(b)+J_{b^{-}}^{\alpha}f(a)\right)\right|\leq\frac{b-a}{2(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\max\left\{|f'(a)|^{q},|f'(b)|^{q}\right\}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.1.21}$$

eşitsizliği geçerlidir [47].

Teorem 3.1.17 $f:I\subset\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a,b\in I^{\circ}$ ve $a<b$ olsun. $\alpha>0$ için $f'\in L[a,b]$ ve $q\geq1$ olmak üzere $|f'|^{q}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde $quasi$-konveks ise

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left(J_{a^{+}}^{\alpha}f(b)+J_{b^{-}}^{\alpha}f(a)\right)\right| \\ &\leq\frac{b-a}{\alpha+1}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left(\max\left\{|f'(a)|^{q},|f'(b)|^{q}\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

eşitsizliği geçerlidir [47].

Yıldız ve arkadaşları $P(I)$, $Q(I)$, $S(X,h)$ ve $r-$konveks fonksiyon sınıfları için Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 3.1.18 $f:I\subseteq\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ bir fonksiyon, $0\leq a<b$, $a,b\in I^{\circ}$ ve $f\in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde, f fonksiyonu $Q(I)$ sınıfına ait ise $\alpha>0$ olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{2\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^{+}}^{\alpha}(b)+J_{b^{-}}^{\alpha}f(a)\right] \tag{3.1.23}$$

eşitsizliği geçerlidir [67].

Teorem 3.1.19 $f:I\subseteq\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ bir fonksiyon, $a<b$, $a,b\in I^{\circ}$ ve $f\in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde, f fonksiyonu $P(I)$ sınıfına ait ise $\alpha>0$ olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^{+}}^{\alpha}(b)+J_{b^{-}}^{\alpha}f(a)\right]\leq2[f(a)+f(b)] \tag{3.1.24}$$

eşitsizliği geçerlidir [67].

Teorem 3.1.20 $f:I\subseteq\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ bir fonksiyon, $a<b$, $a,b\in I^{\circ}$ ve $f\in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde, f fonksiyonu $SX(h,I)$ sınıfına ait ise $\alpha>0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^{+}}^{\alpha}(b)+J_{b^{-}}^{\alpha}f(a)\right] \\ &\leq [f(a)+f(b)]\int_{0}^{1}t^{\alpha-1}[h(t)+h(1-t)]dt\end{aligned} \tag{3.1.25}$$

eşitsizliği geçerlidir [67].

Teorem 3.1.21 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pozitif fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde $r-$konveks, $a < b$, $a, b \in I^{\circ}$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde $0 < r \leq 1$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right] \\ \leq & \left[\left(\frac{1}{\alpha+\frac{1}{r}}\right)^r [f(a)]^r + \left(\beta\left(\alpha, \frac{r+1}{r}\right)\right)^r [f(b)]^r\right]^{\frac{1}{r}} \\ & + \left[\left(\beta(\alpha, \frac{r+1}{r})\right)^r [f(a)]^r + \left(\frac{1}{\alpha+\frac{1}{r}}\right)^r [f(b)]^r\right]^{\frac{1}{r}} \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

eşitsizliği geçerlidir [67].

Son olarak Dragomir ve arkadaşlarının Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla ispatladıkları aşağıdaki lemma verilecektir.

Lemma 3.1.6 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ ve $f^{''} \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{b^-}^{\alpha} f(a) + J_{a^+}^{\alpha} f(b)\right] \\ = & \frac{(b-a)^2}{2(\alpha+1)} \int_0^1 t(1-t^{\alpha})\left[f''(ta+(1-t)b) + f''(tb+(1-t)a)\right] dt \end{aligned} \tag{3.1.27}$$

eşitsizliği geçerlidir [16].

3.2 Uyumlu (conformable) Kesirli İntegralleri

Bu bölümde uyumlu kesirli türev ve integraller ile ilgili bazı temel kavram ve bilgiler verilecektir. Ayrıca uyumlu kesirli integraller yardımıyla elde edilen bazı sonuçlar da burada yer almaktadır.

Tanım 3.2.1 (**Uyumlu Kesirli Türev**): $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $t > 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ için f fonksiyonunun "uyumlu kesirli türevi"

$$T_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon\, t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

ile verilir [34]. Eğer f fonksiyonu $\alpha > 0$ olmak üzere $(0,a)$ aralığında α diferensiyellenebilir ve $\lim_{t\to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ limiti varsa bu takdirde,

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t\to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$$

dir. f nin α mertebeli türevini göstermek için bazen $T_\alpha(f)(t)$ yerine $f^{(\alpha)}(t)$ yazılacaktır. Ayrıca, α. mertebeden uyumlu kesirli türev mevcutsa bu durumda f'ye kısaca α diferensiyellenebilirdir denir. Bu tanımın bir sonucu olarak aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 3.2.1 Bir $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t_0 > 0$ noktasında $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere α diferensiyellenebilir ise f fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir [34].

Teorem 3.2.2 $\alpha \in (0, 1]$ için f ve g fonksiyonları $t > 0$ noktasında α diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda
i. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$ dir.
ii. $\forall\, p \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$
iii. Tüm $f(t) = \lambda$ biçimindeki sabit fonksiyonlar için $T_\alpha(\lambda) = 0$ dır.
iv. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$ dir.
v. $T_\alpha(f/g) = \frac{gT_\alpha(f)-fT_\alpha(g)}{g^2}$ dir.
vi. Ek olarak eğer f diferensiyellenebilirse $T_\alpha(f) = t^{1-\alpha}\frac{df}{dt}(t)$ dir [34].

Teorem 3.2.3 (**Rolle Teoremi**) $\alpha > 0$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için
i. $[a, b]$ aralığında sürekli,
ii. $\alpha \in (0, 1)$ için α diferensiyellenebilir,
iii. $f(a) = f(b)$
koşulları sağlandığı takdirde $f^{(\alpha)}(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır [34].

Teorem 3.2.4 (**Ortalama Değer Teoremi**) $\alpha > 0$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve bazı $\alpha \in (0, 1)$ için α diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde

$$f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha}$$

olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır [34].

Tanım 3.2.2 $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için f fonksiyonunun α. mertebeden sol taraflı uyumlu kesirli türevi

$$T_\alpha^a(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon\,(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer (a, b) aralığında $(T_\alpha^a f)(t)$ mevcutsa $(T_\alpha^a f)(a) = \lim_{t \to a^+}(T_\alpha^a f)(t)$ olur [1].

Tanım 3.2.3 $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için f fonksiyonunun α mertebeli sağ taraflı uyumlu kesirli türevi

$$({}^bT_\alpha f)(t) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon\,(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer (a,b) aralığında $({}^{b}T_{\alpha}f)(t)$ mevcutsa $({}^{b}T_{\alpha}f)(b) = \lim_{t\to b^{-}}({}^{b}T_{\alpha}f)(t)$ olur. Eğer f fonksiyonu diferansiyellenebilir ise
$T_{\alpha}^{a}(f)(t) = (t-a)^{1-\alpha}f'(t)$ ve $({}_{\alpha}^{b}Tf)(t) = -(b-t)^{1-\alpha}f'(t)$ dir. Burada sabit fonksiyonunun uyumlu kesirli türevinin sıfır olduğu açıktır [1].

Tanım 3.2.4 $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonun α mertebeli sol taraflı uyumlu kesirli türevi

$$(\mathbf{T}_{\alpha}^{a}f)(t) = \left(T_{\beta}^{a}f^{(n)}\right)(t)$$

olarak tanımlanır [1]. Böylece α mertebeli sol taraflı uyumlu kesirli türevin var olabilmesi için f fonksiyonunun n kez türevlenebilir olması gerekir.

Benzer olarak $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun α mertebeli sağ taraflı uyumlu kesirli türevi

$$({}_{\alpha}^{b}\mathbf{T}f)(t) = (-1)^{n+1}\left({}_{\beta}^{b}Tf^{(n)}\right)(t)$$

olarak verilir. Burada $\alpha = n+1$ alınırsa $\beta = 1$ demektir, bu takdirde f'nin kesirli türevi $f^{(n+1)}(t)$ olur. Ayrıca $n = 0$ seçilirse $\alpha \in (0,1]$ ve $\beta = \alpha$ demektir, bu takdirde verilen tanım önceki verilen tanıma dönüşür.

Tanım 3.2.5 $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α mertebeli sol taraflı uyumlu kesirli integral

$$(I_{\alpha}^{a}f)(t) = \int_{a}^{t} f(x)d_{\alpha}(x,a) = \int_{a}^{t}(x-a)^{\alpha-1}f(x)dx$$

olarak tanımlanır.

Benzer olarak $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α mertebeli sağ taraflı uyumlu kesirli integral,

$$({}^{b}I_{\alpha}f)(t) = \int_{t}^{b} f(x)d_{\alpha}(b,x) = \int_{t}^{b}(b-x)^{\alpha-1}f(x)dx$$

olarak tanımlanır [1].

Lemma 3.2.1 $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde bütün $t > a$ için

$$T_{\alpha}^{a}I_{\alpha}^{a}f(t) = f(t)$$

eşitliği geçerlidir [1].

Lemma 3.2.2 $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0<\alpha\leq 1$ olsun. Bu takdirde bütün $t<b$ için

$$^{b}T_{\alpha}\ ^{b}I_{\alpha}f(t)=f(t)$$

olur [1].

Tanım 3.2.6 $\alpha\in(n,n+1]$ ve $\beta=\alpha-n$ olsun. Bu takdirde $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun sırasıyla α mertebeli sol taraflı ve sağ taraflı uyumlu kesirli integralleri

$$(I_{\alpha}^{a}f)(t)=J_{a^{+}}^{n+1}\left[(t-a)^{\beta-1}f(t)\right]=\frac{1}{n!}\int_{a}^{t}(t-x)^{n}(x-a)^{\beta-1}f(x)dx,$$

$$(^{b}I_{\alpha}f)(t)=J_{b^{-}}^{n+1}\left[(b-t)^{\beta-1}f(t)\right]=\frac{1}{n!}\int_{t}^{b}(x-t)^{n}(b-x)^{\beta-1}f(x)dx$$

şeklinde tanımlanır [1]. Burada eğer $\alpha=n+1$ olarak alınırsa, $\beta=\alpha-n=n+1-n=1$ olur. Böylece

$$(I_{\alpha}^{a}f)(t)=\left(J_{a}^{n+1}f\right)(t)=\frac{1}{n!}\int_{a}^{t}(t-x)^{n}f(x)dx$$

olur. Bu ise Cauchy formülü yardımıyla f fonksiyonunun $(a,t]$ aralığında $n+1$ kez tekrarlı integralidir.

$\alpha>0$ mertebeli sol Riemann-Liouville kesirli integralinin

$$(J_{a^{+}}^{\alpha}f)(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t}(t-x)^{\alpha-1}f(x)dx$$

olarak tanımlandığı göz önüne alınırsa $\alpha=n+1$, $n=0,1,2...$ için

$$(I_{\alpha}^{a}f)(t)=J_{a^{+}}^{n+1}f(t)$$

olduğu görülür [1].

Örnek 3.2.1 $\alpha,\mu>0$ için $f(t)=(t-a)^{\mu-1}$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli integrali

$$J_{a^{+}}^{\alpha}f(t)=\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha+\mu)}(t-a)^{\alpha+\mu-1}$$

şeklindedir [53].

Buna göre $f(t)=(t-a)^{\mu}$ fonksiyonunun $\alpha\in(n,n+1]$ için uyumlu kesirli integralini hesaplayalım.

$\mu\in\mathbb{R}$ öyleki $\alpha+\mu-n>0$ ve $g(t)=(t-a)^{\alpha+\mu-n-1}$ olmak üzere

$$\left(I_{\alpha}^{a}f\right)(t)=J_{a^{+}}^{n+1}g(t)=\frac{\Gamma(\alpha+\mu-n)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}(t-a)^{\alpha+\mu}$$

yazılabilir.

Benzer biçimde $f(t) = (b-t)^{\mu}$ ve $g(t) = (t-a)^{\alpha+\mu-n-1}$ olmak üzere sağ taraflı uyumlu kesirli integral

$$({}^{b}I_{\alpha}f)(t) = J_{a^{+}}^{n+1}g(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\mu-n)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}(b-t)^{\alpha+\mu}$$

olarak hesaplanır.

Bu örnek gösteriyor ki; Riemann-Liouville kesirli integrali ile uyumlu kesirli integraller bir polinom fonksiyona uygulandığında doğal sayı mertebeli integrallerde aynı sonucu verirler.

Lemma 3.2.3 $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f^{(n)}(t)$ sürekli ve $\alpha \in (n, n+1]$ olsun. Bu takdirde her $t > a$ için

$$T_{\alpha}^{a}I_{\alpha}^{a}f(t) = f(t)$$

olur [1].

Lemma 3.2.4 $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f^{(n)}(t)$ sürekli ve $\alpha \in (n, n+1]$ olsun. Bu takdirde her $t > a$ için

$${}^{b}T_{\alpha}\ {}^{b}I_{\alpha}f(t) = f(t)$$

olur [1].

Lemma 3.2.5 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilen bir fonksiyon, ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde her $t > a$ için

$$I_{\alpha}^{a}T_{\alpha}^{a}f(t) = f(t) - f(a)$$

olur [1].

Teorem 3.2.5 (**Zincir Kuralı**) $\alpha \in (0, 1]$ ve $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ (sol) α diferensiyellenebilen fonksiyonlar olsun. $h(t) = f(g(t))$ olmak üzere bütün $t \neq a$ ve $g(t) \neq 0$ için $h(t)$, (sol) α diferensiyellenebilirdir ve

$$(T_{\alpha}^{a}h)(t) = (T_{\alpha}^{a}f)(g(t)).(T_{\alpha}^{a}g)(t).g(t)^{\alpha-1}$$

şeklindedir. Eğer $t = a$ ise

$$(T_{\alpha}^{a}h)(t) = \lim_{t \to a^{+}}(T_{\alpha}^{a}f)(g(t)).(T_{\alpha}^{a}g)(t).g(t)^{\alpha-1}$$

olur [1].

Önerme 3.2.1 $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $1 < \alpha+\mu \leq 2$ olacak şekilde $0 < \alpha, \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda

$$(T_\alpha^a T_\beta^a f)(t) = T_{\alpha+\beta}^a f(t) + (1-\beta)(t-a)^{-\beta} T_\alpha^a f(t)$$

olur [1].

Aşağıda uyumlu kesirli integrallerde ki kısmi integral alma özelliği ile ilgili bazı teorem ve önermeler verilecektir.

Teorem 3.2.6 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve $f.g$ çarpım fonksiyonu ise (a, b) aralığında diferansiyellenebilir olsun. Bu takdirde

$$\int_a^b f(t) T_\alpha^a g(t) d_\alpha(t, a) = fg\Big|_a^b - \int_a^b g(t) T_\alpha^a f(t) d_\alpha(t, a)$$

olur [1].

Önerme 3.2.2 $o < \alpha \leq 1$ ve $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\int_a^b I_\alpha^a(f(t)) g(t) d_\alpha(b, t) = \int_a^b f(t)^b I_\alpha(g(t)) d_\alpha(t, a)$$

olur [1].

Teorem 3.2.7 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde

$$\int_a^b (T_\alpha^a f)(t) g(t) d_\alpha(t, a) = \int_a^b f(t)^b T_\alpha(g(t)) d_\alpha(b, t) + f(t)g(t)|_a^b$$

olur [1].

Uyumlu kesirli integraller yardımıyla elde edilen Hermite-Hadamard integral eşitsizliği Set ve arkadaşları tarafından aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Teorem 3.2.8 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $0 \leq a < b$ için $f \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde konveks ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha \Gamma(\alpha-n)} [(I_\alpha^a f)(b) + ({}^b I_\alpha f)(a)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \tag{3.2.1}$$

eşitsizliği vardır [60].

3.3 Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörü

Bu bölümde Riemann-Liouville kesirli integralinin bir genelleştirmesi olan ve ilk olarak Raina [51] tarafından tanıtılan, daha sonra Agarwal ve arkadaşları [3] tarafından sol taraflı ve sağ taraflı kesirli integraller olarak verilen genelleştirilmiş kesirli integral operatörü hakkında bilgiler verilecektir.

$\sigma(k)\,(k \in \mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{0\})$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu takdirde

$$\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}(x) = \mathcal{F}^{\sigma(0),\sigma(1),\ldots}_{\rho,\lambda}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\Gamma(\rho k + \lambda)} x^k \quad (\rho, \lambda > 0; \quad x \in \mathbb{R}) \tag{3.3.1}$$

şeklinde verilen fonksiyonların yeni bir sınıfı için;
$\lambda, \rho > 0$, $w \in \mathbb{R}$ ve $\varphi(t)$ fonksiyonu integrallenebilir olmak üzere, sol taraflı ve sağ taraflı kesirli integral operatörleri

$$\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}\varphi\right)(x) = \int_a^x (x-t)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(x-t)^{\rho}]\varphi(t)dt \qquad (x > a), \tag{3.3.2}$$

$$\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}\varphi\right)(x) = \int_x^b (t-x)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(t-x)^{\rho}]\varphi(t)dt \qquad (x < b) \tag{3.3.3}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

$$\mathfrak{M} := \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}] < \infty \tag{3.3.4}$$

ise $\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}\varphi(x)$ ve $\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}\varphi(x)$ operatörleri $L(a,b)$ üzerinde sınırlı integral operatörlerdir. Gerçekten,

$$||\varphi||_p := \left(\int_a^b |\varphi(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere $\varphi \in L(a,b)$ için

$$||\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}\varphi(x)||_1 \leq \mathfrak{M}(b-a)^{\lambda}||\varphi||_1 \tag{3.3.5}$$

ve

$$||\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}\varphi(x)||_1 \leq \mathfrak{M}(b-a)^{\lambda}||\varphi||_1 \tag{3.3.6}$$

dir. Genelleştirilmiş kesirli integral operatöründe, $\sigma(k)$ nın özel seçimleriyle bazı kesirli integral operatörleri elde edilir. Örneğin (3.3.2) ve (3.3.3) eşitliklerinde $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ seçimi yapılırsa α mertebeli Riemann-Liouville kesirli integrali elde edilir. Raina ve arkadaşları [51] bu operatörü kullanarak temel integral ve türev alma işlemleri ile ilgili birkaç özelliği aşağıdaki gibi vermişlerdir:
$\lambda, \rho, w \in \mathbb{C}$, $(Re(\rho) > 0, Re(\lambda) > 0)$; $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, (3.3.1) de verilen fonksiyon sınıfı kullanılarak,

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[wx^{\rho}] = x^{\lambda-n-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda-n}[wx^{\rho}] \tag{3.3.7}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\lambda, \rho, w \in \mathbb{C}$, $(Re(\rho) > 0, Re(\lambda) > 0)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\int_0^x ... \int_0^x t^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[wt^{\rho}](dt)^n = x^{\lambda+n-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+n}[wx^{\rho}] \tag{3.3.8}$$

yazılabilir. Şimdi ise $\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}(x)$ fonksiyonun kesirli integral (türev) operatörünü ele alalım.

$$J^{\alpha}_{a+}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt \tag{3.3.9}$$

kesirli operatörü ve $\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}(x)$ fonksiyonu göz önüne alınıp terim terim I^{α}_{0+} kesirli integrali alınarak ve Samko ile arkadaşlarının [53] verdiği

$$\left(J^{\alpha}_{a+}(x-t)^{\lambda-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\alpha)}(x-a)^{\lambda+\alpha-1} \tag{3.3.10}$$

formülünü kullanarak $x > a$ için

$$\begin{aligned}
&\left(J^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}_{\rho,\lambda}[w(t-a)^{\rho}]\right)(x) \\
&= \left(J^{\alpha}_{a+}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\Gamma(\rho k+\lambda)} w^k (t-a)^{\rho k+\lambda-1}\right\}\right)(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\Gamma(\rho k+\lambda)} w^k \left(J^{\alpha}_{a+}\left\{(t-a)^{\rho k+\lambda-1}\right\}\right)(x) \\
&= (x-a)^{\lambda+\alpha-1}\mathcal{F}_{\rho,\lambda+\alpha}[w(x-a)^{\rho}]
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $a \in \mathbb{R}_+(x > a)$; $\alpha, \lambda, \rho, w \in \mathbb{C}(Re(\rho) > 0, Re(\lambda) > 0, Re(\alpha) > 0)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left(J^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(t-a)^{\rho}]\right)(x) \\
&= (x-a)^{\lambda+\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+\alpha}[w(x-a)^{\rho}]
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

olur. Böylece (3.1.1), (3.3.1), (3.3.7) ve (3.3.11) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left(D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(t-a)^{\rho}]\right)(x) \\
&= (x-a)^{\lambda-\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda-\alpha}[w(x-a)^{\rho}]
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

yazılır. $\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}\varphi\right)(x)$ operatörü ile J^{α}_{0+} Riemann-Liouville kesirli integral operatörü ve D^{α}_{0+} kesirli türev operatörlerinin birlikte kullanıldığı özellikler aşağıdaki gibidir.

(3.3.9) ile (3.3.2) kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left(J^{\alpha}_{a+}(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}\varphi)\right)(x) \\
=\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-u)^{\alpha-1}du \int_a^u (u-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(u-t)^{\rho}]\varphi(t)dt \\
=\ & \int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_t^x (x-u)^{\alpha-1}(u-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(u-t)^{\rho}]du\right]\varphi(t)dt \\
=\ & \int_a^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^{x-t} (x-t-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w\tau^{\rho}]d\tau\right]\varphi(t)dt \\
=\ & \int_a^x J^{\alpha}_{0+}\left(\tau^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w\tau^{\rho}]\right)(x-t)\varphi(t)dt.
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (3.3.11) de verilen özellik yukarıdaki eşitliğin sağ tarafına uygulanarak

$$\begin{aligned} & \left(J^{\alpha}_{a+}(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}\varphi)\right)(x) \\ = & \int_a^x (x-t)^{\lambda+\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+\alpha}[w(x-t)^{\rho}]\varphi(t)dt \quad (x>a) \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

yazılır. Benzer metodlar kullanılarak (3.1.1) ve (3.3.2) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} & \left(D^{\alpha}_{a+}(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}\varphi)\right)(x) \\ = & \int_a^x (x-t)^{\lambda-\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda-\alpha}[w(x-t)^{\rho}]\varphi(t)dt \ ; \quad (x>a) \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{r}(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}\varphi)\right)(x) \\ = & \int_a^x (x-t)^{\lambda-r-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda-r}[w(x-t)^{\rho}]\varphi(t)dt \quad (x>a; Re(\lambda)>r;\ r\in\mathbb{N}) \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

yazılır.

Yaldız ve Sarıkaya konveks fonksiyonlar için genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri yardımıyla Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

Teorem 3.3.1 $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon ve $a<b$ olsun. Bu takdirde genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) & \le \frac{1}{2(b-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}\varphi\right)(a) + \left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}\varphi\right)(b)\right] \\ & \le \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2} \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

eşitsizliği geçerlidir [66].

Usta ve arkadaşlarının $s-$konveks fonksiyonlar için elde ettikleri Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.3.2 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $0 \le a < b$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde $s-$konveks ise

$$\sigma_{0,s}(k) = \frac{\sigma(k)}{\lambda+\rho k+s}, \quad k=0,1,2...$$

ve

$$A_1(\lambda,s) = \int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^s\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]dt$$

olmak üzere

$$2^s f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{(b-a)^\lambda \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda}[w(b-a)^\rho]}\left[\left(\mathcal{J}^\sigma_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a)+\left(\mathcal{J}^\sigma_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b)\right]$$
$$\leq \frac{1}{\mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho]}\left[A_1(\lambda,s)+\mathcal{F}^{\sigma_{0,s}}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^\rho]\right][f(a)+f(b)]$$

eşitsizliği geçerlidir [64].

Budak ve arkadaşlarının genelleştirilmiş kesirli integral operatörü yardımıyla elde ettikleri Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir başka genelleştirmesi ve ispatladıkları yeni özdeşlik aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.3.3 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon, $0\leq a<b$ ve $f\in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde

$$\sigma_{0,s}(k) = \frac{\sigma(k)}{\lambda+\rho k+s}, \quad k=0,1,2...\ ;$$
$$A_2(\lambda,s) = \int_0^1 t^\lambda(2-t)^s \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}\left[w\left(\frac{b-a}{2}\right)^\rho t^\rho\right]dt$$

olmak üzere, f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde $s-$konveks ise

$$2^s f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{(b-a)^\lambda \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}\left[w\left(\frac{b-a}{2}\right)^\rho\right]}\left[\left(\mathcal{J}^\sigma_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^-;w}f\right)(a)+\left(\mathcal{J}^\sigma_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^+;w}f\right)(b)\right]$$
$$\leq \frac{2^{-s}}{\mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}\left[w\left(\frac{b-a}{2}\right)^\rho\right]}\left[A_2(\lambda-1,s)+\mathcal{F}^{\sigma_{0,s}}_{\rho,\lambda}\left[w\left(\frac{b-a}{2}\right)^\rho\right]\right][f(a)+f(b)]$$

eşitsizliği geçerlidir [12].

Lemma 3.3.1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde diferensiyellenebilir, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri için

$$\frac{2^{\lambda-1}}{(b-a)^\lambda \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(\frac{b-a}{2})^\rho]}\left[\left(\mathcal{J}^\sigma_{\rho,\lambda,(\frac{a+b}{2})-;w}f\right)(a)+\left(\mathcal{J}^\sigma_{\rho,\lambda,(\frac{a+b}{2})+;w}f\right)(b)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$=\frac{(b-a)}{4\mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(\frac{b-a}{2})^\rho]}\left\{\int_0^1 t^\lambda \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}\left[w\left(\frac{b-a}{2}\right))^\rho t^\rho\right]f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)dt\right.$$
$$\left.-\int_0^1 t^\lambda \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}\left[w\left(\frac{b-a}{2}\right)^\rho t^\rho\right]f'\left(\frac{2-t}{2}a+\frac{t}{2}b\right)dt\right\} \tag{3.3.17}$$

eşitliği geçerlidir [12].

3.4 Genelleştirilmiş k-Kesirli İntegral Operatörü

Tanım 3.4.1 (**Hadamard Kesirli İntegrali**) $0\leq a<b<\infty$ olsun. Sırasıyla $\alpha.(\alpha>0)$ mertebeden sol taraflı ve sağ taraflı Hadamard kesirli integralleri

$$ {}_aJ_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\ln \frac{x}{t})^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt, \qquad x > a \tag{3.4.1} $$

$$ {}_xJ_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (\ln \frac{t}{x})^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt, \qquad x < b \tag{3.4.2} $$

şeklinde tanımlanır [53].

Tanım 3.4.2 (***k*-Kesirli İntegral**) $k > 0$, $0 < x < t < \infty$ olmak üzere $k-$ kesirli integral operatörü

$$ I_k^\alpha f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} \frac{f(t)}{t} dt \tag{3.4.3} $$

şeklinde tanımlanır. Burada $k \to 1$ ise Riemann-Liouville kesirli integrali elde edilir [41].

Tanım 3.4.3 (**Katugampola Kesirli integral**) α ve $\rho \neq -1$ olmak üzere, Katugampola kesirli integrali

$$ {}_a^\rho I_x^\alpha f(x) = \frac{(\rho+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^{\rho+1} - t^{\rho+1})^{\alpha-1} t^\rho f(t) dt \tag{3.4.4} $$

şeklindedir [33].

Tanım 3.4.4 (**Başka Bir Fonksiyona Bağlı Kesirli İntegral**) $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, (a,b) üzerinde sürekli g' türevine sahip, monoton, artan ve pozitif bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde, g fonksiyonuna bağlı, α. mertebeden, sol taraflı ve sağ taraflı kesirli integrali

$$ \left(\mathcal{I}_{a+;g}^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{g'(\tau) f(\tau)}{(g(x) - g(\tau))^{1-\alpha}} d\tau \quad (\alpha > 0;\ x > a); \tag{3.4.5} $$

$$ \left(\mathcal{I}_{b-;g}^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{g'(\tau) f(\tau)}{(g(\tau) - g(x))^{1-\alpha}} d\tau \quad (\alpha > 0;\ x < b) \tag{3.4.6} $$

şeklinde ifade edilir, ayrıca (3.4.5) ve (3.4.6) eşitliklerinde, $g(x) = x$ ve $g(x) = \ln x$ olarak seçilirse bu kesirli integral operatörleri sırasıyla Riemann-Liouville kesirli integrallerine ve Hadamard kesirli integraline dönüşür [53].

I bir aralık olmak üzere, $f : I^\circ \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $[a,b] \subset I$ $(0 < a < b < \infty)$ olsun. $\mathcal{I}_{a+,g}^\alpha f(x)$, $\mathcal{I}_{b-,g}^\alpha f(x)$ operatörleri yukarıdaki gibi ve $f \in L^\infty[a,b]$ olsun. Ayrıca $x \in [a,b]$ olmak üzere

$$ \tilde{f}(x) : \ = \ f(a+b-x); \tag{3.4.7} $$

$$ F(x) : \ = \ f(x) + f(a+b-x) = f(x) + \tilde{f}(x) \tag{3.4.8} $$

fonksiyonları tanımlansın. Bu koşullar altında Jleli ve Samet aşağıda verilen Hermite Hadamard eşitsizliğini elde etmişlerdir.

Teorem 3.4.1 $\alpha > 0$ olmak üzere f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4[g(b)-g(a)]^{\alpha}}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{a^{+};g}F(b)+\mathcal{I}^{\alpha}_{b^{-};g}F(a)\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.4.9}$$

eşitsizliği geçerlidir, ayrıca bu eşitsizlikte $g(x) = x$ seçilirse Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla elde edilen, $g(x) = \ln x$ olarak seçilirse Hadamard kesirli integralleri yardımıyla elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizlikleri elde edilir [31].

Diaz ve Pariguan tarafından tanımlanan $k-$gama fonksiyonu aşağıdaki gibidir [13].

$$\Gamma_{\mathtt{k}}(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-\frac{t^{\mathtt{k}}}{\mathtt{k}}}\,dt \quad \left(Re(x) > 0;\, \mathtt{k} \in \mathbb{R}^{+}\right). \tag{3.4.10}$$

Bu fonksiyonunun bazı özellikleri ise

$$\Gamma_{\mathtt{k}}(x) = \mathtt{k}^{\frac{x}{\mathtt{k}}-1}\Gamma\left(\frac{x}{\mathtt{k}}\right); \tag{3.4.11}$$

$$\Gamma_{\mathtt{k}}(\mathtt{k}) = 1 \quad \text{ve} \quad \Gamma_{\mathtt{k}}(x+\mathtt{k}) = x\Gamma_{\mathtt{k}}(x) \tag{3.4.12}$$

şeklindedir.

Tunç ve arkadaşları [63], $\sigma(m) \in \mathbb{R}^{+}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ reel sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere $k-$gama fonksiyonunu kullanarak

$$\mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda}(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sigma(m)}{\mathtt{k}\,\Gamma_{\mathtt{k}}(\rho\,\mathtt{k}\,m+\lambda)}x^m \quad \left(\mathtt{k},\,\rho,\,\lambda \in \mathbb{R}^{+};\; |x| < \infty\right) \tag{3.4.13}$$

şeklinde yeni bir fonksiyon sınıfı tanımlamışlardır. Bu fonksiyon sınıfı ile birlikte Samko'nun (3.4.5) ve (3.4.6) da verdiği tanımlardan yararlanarak başka bir fonksiyona bağlı genelleştirilmiş $k-$kesirli sol taraflı ve sağ taraflı integral operatörlerini aşağıdaki gibi tanımlamışlardır. Ayrıca parametrelerin özel seçimleriyle bu operatörün indirgendiği diğer kesirli integral operatörlerini sonuçlarda vermişlerdir.

Tanım 3.4.5 (**Genelleştirilmiş k-Kesirli İntegrali**) $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu pozitif, monoton ve artan, (a,b) üzerinde sürekli $g'(x)$ türevine sahip, ayrıca $\mathtt{k},\,\rho,\,\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ ve $w \in \mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde $[a,b]$ üzerinde g fonksiyonuna bağlı f fonksiyonunun, sırasıyla sol taraflı ve sağ taraflı genelleştirilmiş $k-$kesirli integralleri

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,a+;w}f(x) \\ = &\int_a^x \frac{g'(t)}{(g(x)-g(t))^{1-\frac{\lambda}{\mathtt{k}}}}\mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda}[w(g(x)-g(t))^{\rho}]f(t)dt \quad (x > a) \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

ve

$$\mathcal{J}^{\sigma,\mathrm{k},g}_{\rho,\lambda,b-;w}f(x) \tag{3.4.15}$$
$$= \int_x^b \frac{g'(t)}{(g(t)-g(x))^{1-\frac{\lambda}{\mathrm{k}}}}\mathcal{F}^{\sigma,\mathrm{k}}_{\rho,\lambda}[w(g(t)-g(x))^{\rho}]f(t)\,dt \quad (x<b)$$

şeklindedir.

Sonuç 3.4.1 $\mathtt{k}=1$ olarak seçilirse (3.4.14) eşitliği

$$\mathcal{J}^{\sigma,g}_{\rho,\lambda,a+;w}f(x) \tag{3.4.16}$$
$$= \int_a^x \frac{g'(t)}{(g(x)-g(t))^{1-\lambda}}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(g(x)-g(t))^{\rho}]f(t)\,dt \quad (x>a)$$

ile verilen f fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde g fonksiyonuna bağlı genelleştirilmiş kesirli integraline dönüşür.

Sonuç 3.4.2 $g(t)=t$ olarak seçilirse (3.4.14) eşitliği

$$\mathcal{J}^{\sigma,\mathrm{k}}_{\rho,\lambda,a+;w}f(x) \tag{3.4.17}$$
$$= \int_a^x (x-t)^{\frac{\lambda}{\mathrm{k}}-1}\mathcal{F}^{\sigma,\mathrm{k}}_{\rho,\lambda}[w(x-t)^{\rho}]f(t)\,dt \quad (x>a);$$

ile verilen f fonksiyonunun genelleştirilmiş $k-$kesirli integraline dönüşür.

Sonuç 3.4.3 $g(t)=\ln t$ olarak seçilirse (3.4.14) eşitliği

$$\mathcal{H}^{\sigma,\mathrm{k}}_{\rho,\lambda,a+;w}f(x) \tag{3.4.18}$$
$$= \int_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\frac{\lambda}{\mathrm{k}}-1}\mathcal{F}^{\sigma,\mathrm{k}}_{\rho,\lambda}\left[w\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\rho}\right]f(t)\,\frac{dt}{t} \quad (x>a)$$

ile verilen, f fonksiyonunun genelleştirilmiş $k-$kesirli Hadamard integraline dönüşür.

Sonuç 3.4.4 $g(t)=\frac{t^{s+1}}{s+1}$ $(s\in\mathbb{R}\setminus\{-1\})$ olarak seçilirse (3.4.14) eşitliği

$$^{s}\mathcal{J}^{\sigma,\mathrm{k}}_{\rho,\lambda,a+;w}f(x) = (s+1)^{1-\frac{\lambda}{\mathrm{k}}}$$
$$\times\int_a^x (x^{s+1}-t^{s+1})^{\frac{\lambda}{\mathrm{k}}-1}t^{r}\mathcal{F}^{\sigma,\mathrm{k}}_{\rho,\lambda}\left[w\left(\frac{x^{s+1}-t^{s+1}}{s+1}\right)^{\rho}\right]f(t)\,dt \quad (x>a)$$

ile verilen, f fonksiyonunun genelleştirilmiş $(k,s)-$kesirli integraline dönüşür.

Benzer şekilde, (3.4.15) ile verilen sağ taraflı genelleştirilmiş $k-$kesirli integral operatörü için de aynı özel durumlarda yukarıda verilen kesirli integral operatörlerinin sağ taraflı versiyonları elde edilir.

Sonuç 3.4.5 (3.4.14) ve (3.4.15) de $\mathtt{k} = 1$ ve $g(t) = t$ olarak seçilirse (3.3.2) ve (3.3.3) te verilen genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri elde edilir.

Sonuç 3.4.6 (3.4.14) ve (3.4.15) tanımlarında $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$, $w = 0$ olarak seçilirse Akkurt ve arkadaşlarının [6] tanımladıkları genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri elde edilir.

Sonuç 3.4.7 Tanım 3.4.5 te $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$, $w = 0$ olarak alınırsa
(i.) $k = 1$ için, g fonksiyonuna bağlı f fonksiyonunun kesirli integrali elde edilir [35].
(ii.) $g(t) = t$ için, $k-$kesirli integrali elde edilir [41].
(iii.) $k = 1$ ve $g(t) = \ln t$ için, Hadamard kesirli integrali elde edilir [35].
(iv.) $g(t) = \frac{t^{s+1}}{s+1}$ $(s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ için, $(k, s)-$kesirli integral operatörü elde edilir [57].
(v.) $k = 1$ ve $g(t) = \frac{t^{s+1}}{s+1}$ $(s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ için, Katugampola kesirli integrali elde edilir [33].
(vi.) $k = 1$ ve $g(t) = t$ için, Riemann-Liouville kesirli integrali elde edilir [31].

Tunç ve arkadaşları tanımladıkları genelleştirilmiş k-kesirli integral operatörleri yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

Teorem 3.4.2 $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, (a, b) üzerinde sürekli $g'(x)$ türevine sahip, $[a, b]$ üzerinde monoton, pozitif ve artan olsun. $\mathtt{k}$, ρ, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{R}_0^+$ ve $\sigma(m)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere f fonksiyonu g fonksiyonuna bağlı ve $[a, b]$ üzerinde konveks ise

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq & \frac{1}{4\,\mathtt{k}\,(g(b)-g(a))^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}}\mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}[w(g(b)-g(a))^{\rho}]} \\ & \times \left[\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,b-;w}F(a) + \mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,a+;w}F(b)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned} \tag{3.4.19}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada kullanılan $F(x)$ fonksiyonu yukarıda verildiği gibidir [63].

Tüm bu verilenlerden anlaşılıyor ki; $k-$ genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri bilinen bazı kesirli integral operatörlerinin iyi bir genelleşmesidir.

4. Bulgular

4.1 Uyumlu Kesirli İntegraller Yardımıyla Bazı Konveks Fonksiyon Türleri için Eşitsizlikler

Bu bölümde uyumlu(conformable) kesirli integraller yardımıyla üç farklı yeni lemma ispatlanmıştır. İlk olarak ispatlanan lemma yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli yeni sonuçlar elde edilmiştir. İkinci olarak verilen lemma yardımıyla önce $s-$konveks daha sonra ise quasi-konveks fonksiyonlar için yeni sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak ispatlanan lemma yardımıyla da iki kez diferansiyellenebilen $m-$konveks fonksi yonlar için yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca bu bölümde Hermite-Hadamard eşitsizliğinin hem $s-$konveks hem de quasi-konveks fonksiyonlar için genelleştirmeleri yapılmıştır. Elde edilen eşitlik ve eşitsizliklerin α, s, m, q gibi bazı parametrelerin özel seçimleriyle hangi eşitlik ve eşitsizliklere indirgendiği ise ispatlarından sonra sonuç olarak verilmiştir.

4.1.1 Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Lemma 4.1.1 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2, 3...$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{2^{\alpha-1} n!}{(b-a)^\alpha} \left[(I^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} f)(b) + (I^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} f)(a) \right] - B(n+1, \alpha - n) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (4.1.1) \\ = & \frac{b-a}{4} \left\{ \int_0^1 B_t(n+1, \alpha - n) f'\left(\frac{t}{2}a + \frac{2-t}{2}b\right) dt \right. \\ & \left. - \int_0^1 B_t(n+1, \alpha - n) f'\left(\frac{2-t}{2}a + \frac{t}{2}b\right) dt \right\} \end{aligned}$$

dir.

İspat. Kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak ve $x = \frac{t}{2}a + \frac{2-t}{2}b$ değişken değiştirmesi yapılarak

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 B_t(n+1, \alpha - n) f'\left(\frac{t}{2}a + \frac{2-t}{2}b\right) dt \qquad (4.1.2) \\ &= B_t(n+1, \alpha - n) f\left(\frac{t}{2}a + \frac{2-t}{2}b\right) \frac{2}{a-b} \Bigg|_0^1 \\ & \quad - \frac{2}{a-b} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha - n - 1} f\left(\frac{t}{2}a + \frac{2-t}{2}b\right) dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{a-b}B(n+1,\alpha-n)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad -(\frac{2}{a-b})^2\int_b^{\frac{a+b}{2}}\left(2.\frac{x-b}{a-b}\right)^n\left(2.\frac{\frac{a+b}{2}-x}{a-b}\right)^{\alpha-n-1}f(x)dx \\
&= \frac{2}{a-b}B(n+1,\alpha-n)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad -(\frac{2}{a-b})^2\int_b^{\frac{a+b}{2}}2^n\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n 2^{\alpha-n-1}\left(\frac{x-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right)^{\alpha-n-1}f(x)dx \\
&= \frac{2}{a-b}B(n+1,\alpha-n)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{4.2^{\alpha-1}n!}{(b-a)^{\alpha+1}}\left(I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+}f\right)(b)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde $x=\frac{2-t}{2}a+\frac{t}{2}b$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)f\left(\frac{2-t}{2}a+\frac{t}{2}b\right)dt \qquad (4.1.3)\\
&= B_t(n+1,\alpha-n)f\left(\frac{2-t}{2}a+\frac{t}{2}b\right)\frac{2}{b-a}\Bigg|_0^1 \\
&\quad -(\frac{2}{b-a})\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f\left(\frac{2-t}{2}a+\frac{t}{2}b\right)dt \\
&= \frac{2}{b-a}B(n+1,\alpha-n)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad -(\frac{2}{b-a})^2\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(2\frac{x-a}{b-a}\right)^n\left(2\frac{\frac{a+b}{2}-x}{b-a}\right)^{\alpha-n-1}f(x)dx \\
&= \frac{2}{b-a}B(n+1,\alpha-n)f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{4.2^{\alpha-1}n!}{(b-a)^{\alpha+1}}\left(I^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-}f\right)(a)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. I_1 ve $-I_2$ eşitlikleri toplanıp elde edilen eşitliğin her iki tarafı $\frac{b-a}{4}$ ile çarpılırsa istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.1.1 Lemma 4.1.1'de $\alpha=n+1$ olarak seçilirse (4.1.1) eşitliği (3.1.6) eşitliğine indirgenir.

Teorem 4.1.1 I, $\mathbb{R}$' de bir aralık ve $f:I\to\mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a,b\in I^{\circ}$ ve $a<b$ olsun. Bu takdirde $\alpha\in(n,n+1]$, $n=0,1,2,3...$ ve

$$
\begin{aligned}
&\Psi = B(n+1,\alpha-n+1), \\
&\Psi_1 = \left[\frac{B(n+1,\alpha-n)-B(n+3,\alpha-n)}{4}\right], \\
&\Psi_2 = \left[\frac{3B(n+1,\alpha-n+1)-B(n+2,\alpha-n+1)}{4}\right]
\end{aligned}
$$

olmak üzere $q\geq 1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}n!}{(b-a)^{\alpha}}\left[\left(I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}f\right)(b)+\left(I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}f\right)(a)\right]\right. \tag{4.1.4}$$
$$\left.-B(n+1,\alpha-n)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{4}\Psi^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left(\Psi_1|f'(a)|^q+\Psi_2|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\Psi_2|f'(a)|^q+\Psi_1|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.1, üçgen eşitsizliği, $|f'|^q$ nun konveksliği ve Power mean eşitsizliği kullanılarak

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}n!}{(b-a)^{\alpha}}\left[\left(I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}f\right)(b)+\left(I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}f\right)(a)\right]\right. \tag{4.1.5}$$
$$\left.-B(n+1,\alpha-n)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{4}\left\{\left|\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)dt\right|\right.$$
$$\left.+\left|\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)f'\left(\frac{2-t}{2}a+\frac{t}{2}b\right)dt\right|\right\}$$
$$\leq\frac{b-a}{4}\left\{\left[\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)dt\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)\left|f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left[\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)dt\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)\left|f'\left(\frac{2-t}{2}a+\frac{t}{2}b\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$
$$\leq\frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)dt\right]^{1-\frac{1}{q}}$$
$$\times\left\{\left[|f'(a)|^q\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)\frac{t}{2}dt\right.\right.$$
$$\left.+|f'(b)|^q\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)\left(\frac{2-t}{2}\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$\left.+\left[|f'(a)|^q\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)\left(\frac{2-t}{2}\right)dt+|f'(b)|^q\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)\frac{t}{2}dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

yazılır. Kısmi integrasyon yöntemi ve beta fonksiyonunun özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)\frac{t}{2}dt \\ &= B_t(n+1,\alpha-n)\frac{t^2}{4}\Big|_0^1-\frac{1}{4}\int_0^1 t^{n+2}(1-t)^{\alpha-n-1}dt \\ &= \Big[\frac{B(n+1,\alpha-n)-B(n+3,\alpha-n)}{4}\Big],\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_2 &= \int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)(1-\frac{t}{2})dt \qquad (4.1.7)\\
&= B_t(n+1,\alpha-n)(t-\frac{t^2}{4})\Big|_0^1 - \int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}(t-\frac{t^2}{4})dt\\
&= \Big[\frac{3B(n+1,\alpha-n)-4B(n+2,\alpha-n)+B(n+3,\alpha-n)}{4}\Big]\\
&= \Big[\frac{3B(n+1,\alpha-n+1)-B(n+2,\alpha-n+1)}{4}\Big],\\
\Psi &= \int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)dt \qquad (4.1.8)\\
&= B_t(n+1,\alpha-n)t\Big|_0^1 - \int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{\alpha-n-1}dt\\
&= \big[B(n+1,\alpha-n)-B(n+2,\alpha-n)\big]\\
&= B(n+1,\alpha-n+1)
\end{aligned}$$

eşitlikleri kolaylıkla elde edilebilir. Son olarak (4.1.6)-(4.1.8) eşitlikleri (4.1.5) eşitsizliğinde yerine yazılarak istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.1.2 Teorem 4.1.1'de $q=1$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\alpha-1}n!}{(b-a)^{\alpha}}\Big[(I_{(\frac{a+b}{2})^{+}}f)(b)+(I_{(\frac{a+b}{2})^{-}}f)(a)\Big]-B(n+1,\alpha-n)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\\
&\le \frac{b-a}{4}B(n+1,\alpha-n+1)\Big(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\Big)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Sonuç 4.1.3 Teorem 4.1.1'de $\alpha=n+1$ olarak seçilirse (4.1.4) eşitsizliği (3.1.7) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.1.2 *I, $\mathbb{R}$' de bir aralık ve $f: I\to\mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a,b\in I^{\circ}$ ve $a<b$ olsun. Bu takdirde $\alpha\in(n,n+1]$, $n=0,1,2,3...$ ve*

$$\Omega=\int_0^1\left(B_t(n+1,\alpha-n)\right)^p dt$$

olmak üzere $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\alpha-1}n!}{(b-a)^{\alpha}}\left[\left(I_{(\frac{a+b}{2})^{+}}f\right)(b)+\left(I_{(\frac{a+b}{2})^{-}}f\right)(a)\right]-B(n+1,\alpha-n)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\\
&\le \frac{b-a}{4}(\Omega)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{\left|f'(a)\right|^q+3\left|f'(b)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \qquad (4.1.9)\\
&\le \frac{b-a}{4}(4\Omega)^{\frac{1}{p}}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.1, üçgen eşitsizliği, $|f'|^q$ nun konveksliği ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}n!}{(b-a)^\alpha}\left[\left(I_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f\right)(b)+\left(I_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f\right)(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \tag{4.1.10}$$
$$\leq \frac{b-a}{4}\left\{\left|\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)dt\right|\right.$$
$$\left.+\left|\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)f'\left(\frac{2-t}{2}a+\frac{t}{2}b\right)dt\right|\right\}$$
$$\leq \frac{b-a}{4}\left\{\left[\int_0^1\Big(B_t(n+1,\alpha-n)\Big)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1\left|f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left[\int_0^1\big(B_t(n+1,\alpha-n)\big)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1\left|f'\left(\frac{2-t}{2}a+\frac{t}{2}b\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$
$$\leq \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1\big(B_t(n+1,\alpha-n)\big)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left\{\left[\int_0^1\frac{t}{2}|f'(a)|^q dt+\int_0^1\left(\frac{2-t}{2}\right)|f'(b)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\int_0^1\left[\left(\frac{2-t}{2}\right)|f'(a)|^q dt+\int_0^1\frac{t}{2}|f'(b)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$
$$\leq \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1\big(B_t(n+1,\alpha-n)\big)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left[\left(\frac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

$q>1$ için $0<\frac{1}{q}<1$ olmak üzere

$a_1=3|f'(a)|^q$, $b_1=|f'(b)|^q$, $a_2=|f'(a)|^q$ ve $b_2=3|f'(b)|^q$ olsun. Bu takdirde

$a_1,a_2,a_3,...,a_n\geq 0$, $\quad b_1,b_2,b_3,...,b_n\geq 0$ ve $s\in(0,1]$ için

$$\sum_{k=1}^n(a_k+b_k)^s\leq\sum_{k=1}^n a_k^s+\sum_{k=1}^n b_k^s$$

eşitsizliği geçerli olduğundan

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}n!}{(b-a)^\alpha}\left[(I_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f)(b)+(I_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f)(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \tag{4.1.11}$$
$$\leq\frac{b-a}{16}\left[4\int_0^1\Big(B_t(n+1,\alpha-n)\Big)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left[\Big(|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q\Big)^{\frac{1}{q}}+\Big(3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\Big)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{b-a}{16}\left[4\int_0^1 \left(B_t(n+1,\alpha-n)\right)^p dt\right]^{\frac{1}{p}} (3^{\frac{1}{q}}+1)\left[|f^{'}(a)|+|f^{'}(b)|\right]$$
$$\leq \frac{b-a}{4}\left[4\int_0^1 \left(B_t(n+1,\alpha-n)\right)^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[|f^{'}(a)|+|f^{'}(b)|\right]$$

dir. Böylece istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.4 Teorem 4.1.2'de $\alpha = n+1$ olarak seçilirse (4.1.9) eşitsizliği (3.1.8) eşitsizliğine indirgenir.

4.1.2 s-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu başlık altında önce $s-$konveks konksiyonlar için uyumlu kesirli integraller yardımı ile elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliği genelleştirilip ardından yeni bir özdeşlik ispatlanacaktır. Son olarak ise ispatlanan bu özdeşlik yardımıyla Hermite-Hadamard tipli yeni sonuçlar elde edilecektir.

Teorem 4.1.3 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^{\circ}$, $0 \leq a < b$ ve $f \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde $s \in (0, 1]$, $\alpha \in (n, n+1]$ ve $n = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere, f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde ikinci anlamda $s-$konveks ise

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \leq\ & \frac{1}{(b-a)^{\alpha}2^s}\left[(I_{\alpha}^{a}f)(b)+({}^{b}I_{\alpha}f)(a)\right] \\ \leq\ & \left[\frac{B(n+s+1,\alpha-n)+B(n+1,\alpha-n+s)}{n!}\right]\frac{f(a)+f(b)}{2^s} \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $x, y \in [a, b]$ olmak üzere f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında ikinci anlamda $s-$konveks olduğundan

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^s f(x) + \left(\frac{1}{2}\right)^s f(y)$$

dir. Bu eşitsizlikte $x = ta + (1-t)b,\ y = (1-t)a + tb$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$2^s f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb) \tag{4.1.13}$$

olur.

Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılıp daha sonra $[0, 1]$ üzerinden t değişkenine göre integre edilirse

$$\begin{aligned}
& \frac{2^s}{n!} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt \\
\leq \; & \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} f(ta+(1-t)b) dt + \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} f((1-t)a+tb) dt \\
= \; & \frac{1}{n!} \int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha-n-1} f(x) \frac{dx}{b-a} \\
& + \frac{1}{n!} \int_a^b \left(\frac{y-a}{b-a}\right)^n \left(\frac{b-y}{b-a}\right)^{\alpha-n-1} f(y) \frac{dy}{b-a} \\
= \; & \frac{1}{(b-a)^\alpha} \left[I_\alpha^a f(b) +^b I_\alpha f(a) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} dt = B(n+1, \alpha-n) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

olduğundan

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^s (b-a)^\alpha \Gamma(\alpha-n)} [I_\alpha^a f(b) +^b I_\alpha f(a)] \tag{4.1.14}$$

yazılır ve böylece (4.1.12) de verilen birinci eşitsizlik ispatlanmış olur.

İkinci eşitsizliğin ispatı için ise ilk olarak f ikinci anlamda $s-$konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
f(ta+(1-t)b) &\leq t^s f(a) + (1-t)^s f(b) \\
f((1-t)a+tb) &\leq (1-t)^s f(a) + t^s f(b)
\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb) \leq [t^s + (1-t)^s][f(a)+f(b)]$$

olur. Son eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n!} t^n (1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılıp daha sonra $[0,1]$ üzerinden t değişkenine göre integre edilirse

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(b-a)^\alpha} [I_\alpha^a f(b) +^b I_\alpha f(a)] \\
& \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} [t^s + (1-t)^s][f(a)+f(b)] dt \\
& = \frac{1}{n!} \Big[B(n+s+1, \alpha-n) + B(n+1, \alpha-n+s) \Big] [f(a)+f(b)]
\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

elde edilir. Böylece (4.1.14) ve (4.1.15) eşitsizlikleri birleştirilerek istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.1.5 Teorem 4.1.3'te $s=1$ olarak seçilirse (4.1.12) eşitsizliği konveks fonksiyonlar için uyumlu kesirli integraller yardımıyla elde edilen (3.2.1) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 4.1.6 Teorem 4.1.3'te $\alpha = n+1$ olarak seçilirse (4.1.5) eşitsizliği $s-$konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla elde edilen (3.1.5) eşitsizliğine indirgenir.

Şimdi de diferensiyellenebilen fonksiyonlar için uyumlu kesirli integralleri içeren yeni bir özdeşlik ve bu özdeşlik yardımıyla ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için (4.1.12) eşitsizliğinin sol tarafı ile ilişkili elde edilen yeni sonuçlar aşağıda verilecektir.

Lemma 4.1.2 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere

$$B(n+1, \alpha - n)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) - \frac{n!}{2(b-a)^{\alpha}}[I_{\alpha}^{a} f(b) +^{b} I_{\alpha} f(a)] \tag{4.1.16}$$
$$= \frac{b-a}{2}\left\{\int_0^1 \Big[B_{1-t}(n+1, \alpha-n) - B_t(n+1, \alpha-n)\Big] f^{'}(ta+(1-t)b)dt\right\}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat.

$$I = \int_0^1 \big[B_{1-t}(n+1, \alpha-n) - B_t(n+1, \alpha-n)\big] f^{'}(ta+(1-t)b)dt \tag{4.1.17}$$

olarak verilsin. Bu eşitlikte kısmi integrasyon yöntemi ve $x = ta + (1-t)b$ değişken değiştirmesi kullanılarak

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 B_{1-t}(n+1, \alpha-n) f^{'}(ta+(1-t)b)dt \qquad (4.1.18) \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-t} x^n (1-x)^{\alpha-n-1} dx\right) f^{'}(ta+(1-t)b)dt \\ &= \left(\int_0^{1-t} x^n (1-x)^{\alpha-n-1} dx\right) \frac{f(ta+(1-t)b)dt}{a-b}\Bigg|_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 (1-t)^n t^{\alpha-n-1} f(ta+(1-t)b)\frac{dt}{a-b} \\ &= \left(\int_0^1 x^n (1-x)^{\alpha-n-1} dx\right)\frac{f(b)}{b-a} + \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha-n-1} f(x)\frac{dx}{a-b} \\ &= B(n+1, \alpha-n)\frac{f(b)}{b-a} - \frac{n!}{(b-a)^{\alpha+1}}({}^{b}I_{\alpha} f)(a) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) f^{'}(ta+(1-t)b)dt \qquad (4.1.19) \\ &= B_t(n+1, \alpha-n)\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 t^n (1-t)^{\alpha-n-1} f(ta+(1-t)b)\frac{dt}{a-b} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -B(n+1,\alpha-n)\frac{f(a)}{b-a}+\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha-n-1}f(x)\frac{dx}{b-a}\\
&= -B(n+1,\alpha-n)\frac{f(a)}{b-a}+\frac{n!}{(b-a)^{\alpha+1}}(I_\alpha^a f)(b)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir ki böylece $I = I_1 - I_2$ eşitliği yazılabilir. Son olarak bu eşitliğin her iki tarafı $\frac{b-a}{2}$ ile çarpılırsa istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.1.7 Lemma 4.1.2'de $\alpha = n+1$ olarak seçilirse (4.1.16) eşitliği (3.1.9) eşitliğine indirgenir.

Teorem 4.1.4 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$. Bu takdirde $s \in (0,1]$, $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0,1,2...$ olmak üzere $|f'|$ ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyon ise

$$
\begin{aligned}
&\left|B(n+1,\alpha-n)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{n!}{2(b-a)^\alpha}[I_\alpha^a f(b)+{}^b I_\alpha f(a)]\right| \qquad (4.1.20)\\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\left(\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{s+1}\right)\\
&\times\Bigg\{B_{\frac{1}{2}}(\alpha-n+s+1,n+1)-B_{\frac{1}{2}}(n+1,\alpha-n+s+1)\\
&+B_{\frac{1}{2}}(n+s+2,\alpha-n)-B_{\frac{1}{2}}(\alpha-n,n+s+2)+B(n+1,\alpha-n)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.2, üçgen eşitsizliği ve $|f'|$ nün ikinci anlamda $s-$konveksliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\left|B(n+1,\alpha-n)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)-\frac{n!}{2(b-a)^\alpha}[I_\alpha^a f(b)+{}^b I_\alpha f(a)]\right| \qquad (4.1.21)\\
=\ & \frac{b-a}{2}\left|\int_0^1\big[B_{1-t}(n+1,\alpha-n)-B_t(n+1,\alpha-n)\big]f'(ta+(1-t)b)dt\right|\\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\int_0^1\Big|\big[B_{1-t}(n+1,\alpha-n)-B_t(n+1,\alpha-n)\big]\Big|\big|f'(ta+(1-t)b)\big|dt\\
=\ & \frac{b-a}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\big[B_{1-t}(n+1,\alpha-n)-B_t(n+1,\alpha-n)\big]\big|f'(ta+(1-t)b)\big|dt\\
&+\int_{\frac{1}{2}}^1\big[B_t(n+1,\alpha-n)-B_{1-t}(n+1,\alpha-n)\big]\big|f'(ta+(1-t)b)\big|dt\\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\Bigg\{\int_0^{\frac{1}{2}}\big[B_{1-t}(n+1,\alpha-n)-B_t(n+1,\alpha-n)\big]\big(t^s|f'(a)|+(1-t)^s|f'(b)|\big)dt\\
&+\int_{\frac{1}{2}}^1\big[B_t(n+1,\alpha-n)-B_{1-t}(n+1,\alpha-n)\big]\big(t^s|f'(a)|+(1-t)^s|f'(b)|\big)dt\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{b-a}{2}\Bigg\{|f^{'}(a)|\int_0^{\frac{1}{2}}\big[B_{1-t}(n+1,\alpha-n)-B_t(n+1,\alpha-n)\big]t^s dt \\
& +|f^{'}(b)|\int_0^{\frac{1}{2}}\big[B_{1-t}(n+1,\alpha-n)-B_t(n+1,\alpha-n)\big](1-t)^s dt \\
& +|f^{'}(a)|\int_{\frac{1}{2}}^{1}\big[B_t(n+1,\alpha-n)-B_{1-t}(n+1,\alpha-n)\big]t^s\Big)dt \\
& +|f^{'}(b)|\int_{\frac{1}{2}}^{1}\big[B_t(n+1,\alpha-n)-B_{1-t}(n+1,\alpha-n)\big](1-t)^s dt
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca tamamlanmamış beta fonksiyonunun özellikleri kullanılarak;

$$
\begin{aligned}
& B_{1-t}(n+1,\alpha-n)-B_t(n+1,\alpha-n) \\
= \; & \int_0^{1-t} x^n(1-x)^{\alpha-n-1}dx-\int_0^{t} x^n(1-x)^{\alpha-n-1}dx \\
= \; & \int_t^{1-t} x^n(1-x)^{\alpha-n-1}dx, \quad (0\leq t\leq \frac{1}{2})
\end{aligned}
\tag{4.1.22}
$$

$$
\begin{aligned}
& B_t(n+1,\alpha-n)-B_{1-t}(n+1,\alpha-n) \\
= \; & \int_0^{t} x^n(1-x)^{\alpha-n-1}dx-\int_0^{1-t} x^n(1-x)^{\alpha-n-1}dx \\
= \; & \int_{1-t}^{t} x^n(1-x)^{\alpha-n-1}dx \quad (\frac{1}{2}\leq t\leq 1)
\end{aligned}
\tag{4.1.23}
$$

dir. (4.1.22), (4.1.23) eşitsizlikleri yardımıyla

$$
\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt = u^{'}(x)f(u(x))-v^{'}(x)f(v(x))
$$

olarak bilinen integrallerin türevleri için Leibniz formülü ve kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\Phi_1 \; = \; & \int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\int_t^{1-t} x^n(1-x)^{\alpha-n-1}dx\Big)t^s dt \\
= \; & \Bigg[\Big(\int_t^{1-t} x^n(1-x)^{\alpha-n-1}dx\Big)\frac{t^{s+1}}{s+1}\Bigg]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} \\
& -\int_0^{\frac{1}{2}}\big(-(1-t)^n t^{\alpha-n-1}-t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\big)\frac{t^{s+1}}{s+1}dt \\
= \; & \frac{1}{s+1}\Big[\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha-n+s}(1-t)^n dt+\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n+s+1}(1-t)^{\alpha-n-1}dt\Big] \\
= \; & \frac{1}{s+1}\Big[B_{\frac{1}{2}}(\alpha-n+s+1,n+1)+B_{\frac{1}{2}}(n+s+2,\alpha-n)\Big],
\end{aligned}
\tag{4.1.24}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_2 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{1-t} x^n (1-x)^{\alpha-n-1} dx \right) (1-t)^s dt \\
&= \left[\left(\int_t^{1-t} x^n (1-x)^{\alpha-n-1} dx \right) \frac{-(1-t)^{s+1}}{s+1} \right] \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} \\
&\quad - \int_0^{\frac{1}{2}} \big(-(1-t)^n t^{\alpha-n-1} - t^n (1-t)^{\alpha-n-1} \big) \frac{-(1-t)^{s+1}}{s+1} dt \qquad (4.1.25) \\
&= \frac{1}{s+1} \int_0^1 x^n (1-x)^{\alpha-n-1} dx \\
&\quad - \frac{1}{s+1} \Big[\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha-n-1} (1-t)^{n+s+1} dt + \int_0^{\frac{1}{2}} t^n (1-t)^{\alpha-n+s} dt \Big] \\
&= \frac{1}{s+1} \Big[B(n+1, \alpha-n) - B_{\frac{1}{2}}(\alpha-n, n+s+2) - B_{\frac{1}{2}}(n+1, \alpha-n+s+1) \Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_3 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{1-t}^{t} x^n (1-x)^{\alpha-n-1} dx \right) t^s dt \qquad (4.1.26) \\
&= \left[\left(\int_{1-t}^{t} x^n (1-x)^{\alpha-n-1} dx \right) \frac{t^{s+1}}{s+1} \right] \Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&\quad - \frac{1}{s+1} \int_{\frac{1}{2}}^1 \big(t^n (1-t)^{\alpha-n-1} + t^{\alpha-n-1} (1-t)^n \big) t^{s+1} dt \\
&= \frac{1}{s+1} \int_0^1 x^n (1-x)^{\alpha-n-1} dx \\
&\quad - \frac{1}{s+1} \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{n+s+1} (1-t)^{\alpha-n-1} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{\alpha-n+s} (1-t)^n dt \right] \\
&= \frac{1}{s+1} \Big[B(n+1, \alpha-n) - B_{\frac{1}{2}}(\alpha-n, n+s+2) - B_{\frac{1}{2}}(n+1, \alpha-n+s+1) \Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_4 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{1-t}^{t} x^n (1-x)^{\alpha-n-1} dx \right) (1-t)^s dt \\
&= \left[\left(\int_{1-t}^{t} x^n (1-x)^{\alpha-n-1} dx \right) \frac{-(1-t)^{s+1}}{s+1} \right] \Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 \big(t^n (1-t)^{\alpha-n-1} + t^{\alpha-n-1} (1-t)^n \big) \frac{(1-t)^{s+1}}{s+1} dt \qquad (4.1.27) \\
&= \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 t^n (1-t)^{\alpha-n+s} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{\alpha-n-1} (1-t)^{n+s+1} dt \right] \\
&= \frac{1}{s+1} \Big[B_{\frac{1}{2}}(\alpha-n+s+1, n+1) + B_{\frac{1}{2}}(n+s+2, \alpha-n) \Big]
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Tanım 2.2.2'de verilen beta fonksiyonu ile tamamlanmamış beta fonksiyonu arasındaki ilişkiden dolayı

$$B(a,b) = B_{\frac{1}{2}}(a,b) + B_{\frac{1}{2}}(b,a)$$

olarak yazılır. Daha sonra (4.1.24), (4.1.25), (4.1.26) ve (4.1.27) eşitlikleri (4.1.21) eşitsizliğinde kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.8 Teorem 4.1.4'te $s=1$ olarak seçilirse (bu durumda $|f^{'}|$ fonksiyonu konveks demektir)

$$\begin{aligned}
&\left|B(n+1,\alpha-n)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{n!}{2(b-a)^{\alpha}}[I_{\alpha}^{a}f(b)+^{b}I_{\alpha}f(a)]\right| \qquad (4.1.28)\\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\frac{|f^{'}(a)|+|f^{'}(b)|}{2}\\
&\times\Big\{B_{\frac{1}{2}}(\alpha-n+2,n+1)-B_{\frac{1}{2}}(n+1,\alpha-n+2)\\
&+B_{\frac{1}{2}}(n+3,\alpha-n)-B_{\frac{1}{2}}(\alpha-n,n+3)+B(n+1,\alpha-n)\Big\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.1.9 Sonuç 4.1.8'de $\alpha=n+1$ olarak seçilirse (4.1.28) eşitsizliği (3.1.10) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 4.1.10 Teorem 4.1.4'te $\alpha=n+1$ olarak seçiilirse (4.1.20) eşitsizliği Set ve arkadaşları [59] tarafından Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla elde edilen

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+I_{b_-}^{\alpha}f(a)\right]\right| \qquad (4.1.29)\\
&\leq\frac{b-a}{2}\left[\frac{2}{\alpha+1}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\right]^{\frac{q-1}{q}}\\
&\times\left\{B_{\frac{1}{2}}(s+1,\alpha+1)-B_{\frac{1}{2}}(\alpha+1,s+1)+\frac{2^{\alpha+s}-1}{(\alpha+s+1)2^{\alpha+s}}\right\}\left[|f^{'}(a)|^{q}+|f^{'}(b)|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.1.5 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f:I\to\mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a,b\in I^{\circ}$, $a<b$ ve $f^{'}\in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha\in(n,n+1]$, $n=0,1,2...$ ve

$$\Psi=2\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t}^{1-t}x^{n}(1-x)^{\alpha-n-1}dx\right)^{p}dt$$

olmak üzere $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $|f^{'}|^{q}$ ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
&\left|B(n+1,\alpha-n)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{n!}{2(b-a)^{\alpha}}[I_{\alpha}^{a}f(b)+^{b}I_{\alpha}f(a)]\right| \qquad (4.1.30)\\
&\leq\frac{b-a}{2}\Psi^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f^{'}(a)|^{q}+|f^{'}(b)|^{q}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.2, üçgen eşitsizliği, Hölder eşitsizliği ve $|f^{'}|^q$ nun $s-$konveksliği kullanılarak

$$\left|B(n+1,\alpha-n)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{n!}{2(b-a)^{\alpha}}[I_{\alpha}^{a}f(b)+^{b}I_{\alpha}f(a)]\right| \tag{4.1.31}$$
$$=\frac{b-a}{2}\left|\int_0^1\left[B_{1-t}(n+1,\alpha-n)-B_t(n+1,\alpha-n)\right]f^{'}(ta+(1-t)b)dt\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{2}\int_0^1\left|B_{1-t}(n+1,\alpha-n)-B_t(n+1,\alpha-n)\right|\left|f^{'}(ta+(1-t)b)\right|dt$$
$$\leq\frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\left|B_{1-t}(n+1,\alpha-n)-B_t(n+1,\alpha-n)\right|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1\left|f^{'}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned}\Psi &= \int_0^1\left|B_{1-t}(n+1,\alpha-n)-B_t(n+1,\alpha-n)\right|^p dt \qquad (4.1.32)\\
&= \int_0^{\frac{1}{2}}\Big(B_{1-t}(n+1,\alpha-n)-B_t(n+1,\alpha-n)\Big)^p dt\\
&\quad+\int_{\frac{1}{2}}^1\Big(B_t(n+1,\alpha-n)-B_{1-t}(n+1,\alpha-n)\Big)^p dt\\
&= \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_t^{1-t}x^n(1-x)^{\alpha-n-1}dx\right)^p dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\int_{1-t}^{t}x^n(1-x)^{\alpha-n-1}dx\right)^p dt\\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_t^{1-t}x^n(1-x)^{\alpha-n-1}dx\right)^p dt\end{aligned}$$

ve

$$\int_0^1\left|f^{'}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\leq|f^{'}(a)|^q\int_0^1 t^s dt+|f^{'}(b)|^q\int_0^1(1-t)^s dt \tag{4.1.33}$$
$$=\frac{1}{s+1}\left(|f^{'}(a)|^q+|f^{'}(b)|^q\right)$$

hesaplamaları göz önüne alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.11 Teorem 4.1.5'te $s=1$ olarak seçilirse

$$\left|B(n+1,\alpha-n)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{n!}{2(b-a)^{\alpha}}[I_{\alpha}^{a}f(b)+^{b}I_{\alpha}f(a)]\right| \tag{4.1.34}$$
$$\leq\frac{b-a}{2}\Psi^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f^{'}(a)|^q+|f^{'}(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.1.12 Sonuç 4.1.11'de $\alpha=n+1$ olarak seçilirse, (4.1.34) eşitsizliği

$$\Psi_1=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}}{\alpha}\right)^p dt$$

olmak üzere

$$\left|B(\alpha,1)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha)}{2(b-a)^{\alpha}}[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b_-}^{\alpha}f(a)]\right| \tag{4.1.35}$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\Psi_1^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 4.1.13 Sonuç 4.1.12'de $\alpha = 1$ olarak seçilirse (4.1.35) eşitsizliği Dragomir ve arkadaşları [15, Teorem 2.3] tarafından verilen

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \tag{4.1.36}$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 4.1.14 Sonuç 4.1.12'de $\alpha \in (0,1]$ olarak seçilirse (4.1.35) eşitsizliği Özdemir ve arkadaşları [48, Corollary 1] tarafından verilen

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha)}{2(b-a)^{\alpha}}[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b_-}^{\alpha}f(a)]\right| \tag{4.1.37}$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine indirgenir .

4.1.3 Quasi-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Quasi-konveks fonksiyonlar için uyumlu kesirli integraller yardımıyla elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir genelleştirmesi aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 4.1.6 *I*, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2...$ olmak üzere f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde $quasi-$konveks ise

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{2(b-a)^{\alpha}}\left(I_{\alpha}^{a}f(b)+{}^{b}I_{\alpha}f(a)\right) \leq B(n+1,\alpha-n)\max\{f(a),f(b)\} \tag{4.1.38}$$

dir.

İspat. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde *quasi*-konveks olduğundan

$$f\left(ta+(1-t)b\right)\leq\max\{f(a),f(b)\}$$

ve

$$f\left((1-t)a+tb\right)\leq\max\{f(a),f(b)\}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{1}{2}\left[f\left(ta+(1-t)b\right)+f\left((1-t)a+tb\right)\right]\leq\max\{f(a),f(b)\}$$

olur.

Burada eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n!}t^n(1-t)^{\alpha-n-1}$ ile çarpılıp t değişkenine göre $[0,1]$ üzerinden integre edilirse

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f\left(ta+(1-t)b\right)dt\right.\\
&\left.+\frac{1}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f\left((1-t)a+tb\right)dt\right]\\
\leq\ &\frac{1}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\max\{f(a),f(b)\}dt
\end{aligned}$$

elde edilir.

$x=ta+(1-t)b$ ve $x=tb+(1-t)a$ değişken değiştirmeleri yapılarak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!}\int_a^b\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^n\left(\frac{a-x}{a-b}\right)^{\alpha-n-1}\frac{f(x)dx}{b-a}\\
&+\frac{1}{n!}\int_a^b\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha-n-1}\frac{f(x)dx}{b-a}\\
\leq\ &\frac{2}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}\max\{f(a),f(b)\}dt\\
=\ &\frac{2}{n!}B(n+1,\alpha-n)\max\{f(a),f(b)\}
\end{aligned}$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!}\int_a^b\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha-n-1}\frac{f(x)dx}{b-a}\\
=\ &\frac{1}{(b-a)^\alpha}\frac{1}{n!}\int_a^b(b-x)^n(x-a)^{\alpha-n-1}f(x)dx\\
=\ &\frac{1}{(b-a)^\alpha}I_\alpha^a f(b)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\frac{1}{n!}\int_a^b\frac{(x-a)^n(b-x)^{\alpha-n-1}}{(b-a)^\alpha}f(x)dx=\frac{1}{(b-a)^\alpha}I_\alpha^b f(a)$$

olduğu göz önüne alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.15 Teorem 4.1.6'da $\alpha = n+1$ seçilirse (4.1.38) eşitsizliği (3.1.19) eşitsizliğine indirgenir.

Lemma 4.1.2 yardımıyla quasi-konveks fonksiyonlar için elde edilen yeni sonuçlar aşağıdaki gibidir.

Teorem 4.1.7 I, $\mathbb{R}$' de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2...$ olmak üzere $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde $quasi-$konveks ise

$$\begin{aligned}
&\left| B(n+1, \alpha-n)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{n!}{2(b-a)^{\alpha}}\left(I_{\alpha}^{a} f(b) + {}^{b}I_{\alpha} f(a)\right)\right| \\
\leq\;& \frac{b-a}{\alpha+1}\max\{|f'(a)|, |f'(b)|\} \qquad (4.1.39)\\
&\times\left[(\alpha-n)B_{\frac{1}{2}}(\alpha-n, n+1) + (n+1)B_{\frac{1}{2}}(n+1, \alpha-n) - \frac{1}{2^{\alpha}}\right]
\end{aligned}$$

dir.

İspat. Lemma 4.1.2, üçgen eşitsizliği ve $|f'|$ fonksiyonunun *quasi*-konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left| B(n+1, \alpha-n)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{n!}{2(b-a)^{\alpha}}\left[I_{\alpha}^{a} f(b) + I_{\alpha}^{b} f(a)\right]\right| \\
\leq\;& \frac{b-a}{2}\int_0^1 |B_{1-t}(n+1, \alpha-n) - B_t(n+1, \alpha-n)|\,|f'(ta+(1-t)b)|dt \\
\leq\;& \int_0^1 |B_{1-t}(n+1, \alpha-n) - B_t(n+1, \alpha-n)| \max\{|f(a)|, |f(b)|\}dt \\
=\;& \frac{b-a}{2}\max\{|f'(a)|, |f'(b)|\} \qquad (4.1.40)\\
&\times\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(B_{1-t}(n+1, \alpha-n) - B_t(n+1, \alpha-n)\right)dt\right. \\
&\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(B_t(n+1, \alpha-n) - B_{1-t}(n+1, \alpha-n)\right)dt\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Tamamlanmamış beta fonsiyonun özelliklerinden

$$\int B_t(n+1, \alpha-n)dt = tB_t(n+1, \alpha-n) - B_t(n+2, \alpha-n)$$

ve

$$\int B_{1-t}(n+1, \alpha-n)dt = tB_{1-t}(n+1, \alpha-n) + B_t(\alpha-n+1, n+1)$$

yazılır. Dolayısıyla yukarıda verilen hesaplamalar yardımıyla

$$\begin{aligned}
K_1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} B_{1-t}(n+1,\alpha-n)dt = \frac{1}{2}B_{\frac{1}{2}}(n+1,\alpha-n) + B_{\frac{1}{2}}(\alpha-n+1,n+1), \\
K_2 &= \int_0^{\frac{1}{2}} B_t(n+1,\alpha-n)dt = \frac{1}{2}B_{\frac{1}{2}}(n+1,\alpha-n) - B_{\frac{1}{2}}(n+2,\alpha-n), \\
K_3 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 B_{1-t}(n+1,\alpha-n)dt = B_{\frac{1}{2}}(n+1,\alpha-n+1) - \frac{1}{2}B_{\frac{1}{2}}(n+1,\alpha-n), \\
K_4 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 B_t(n+1,\alpha-n)dt = B(n+1,\alpha-n+1) \\
& \quad -\frac{1}{2}B_{\frac{1}{2}}(n+1,\alpha-n) + B_{\frac{1}{2}}(n+2,\alpha-n)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece K_1, K_2, K_3 ve K_4 ifadeleri (4.1.40) eşitsizliğinde yerine yazılırsa istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.1.16 Teorem 4.1.7'de $\alpha = n+1$ seçilirse (4.1.39) eşitsizliği (3.1.20) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.1.8 I, $\mathbb{R}$' de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2...$ ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde $quasi-$konveks ise

$$\begin{aligned}
& \left| B(n+1,\alpha-n)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{n!}{2(b-a)^\alpha}\left(I_\alpha^a f(b) + {}^bI_\alpha f(a)\right)\right| \\
\leq \; & \frac{b-a}{2}\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} \qquad (4.1.41) \\
& \times\left\{\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(B_{1-t}(n+1,\alpha-n) - B_t(n+1,\alpha-n)\right)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\right. \\
& \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(B_t(n+1,\alpha-n) - B_{1-t}(n+1,\alpha-n)\right)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\right\}
\end{aligned}$$

dir.

İspat. Lemma 4.1.2, üçgen eşitsizliği, $|f'|^q$ fonksiyonunun *quasi*-konveksliği ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| B(n+1,\alpha-n)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{n!}{2(b-a)^\alpha}\left(I_\alpha^a f(b) + {}^bI_\alpha f(a)\right)\right| \\
\leq \; & \frac{b-a}{2}\left|\int_0^1 B_{1-t}(n+1,\alpha-n) - B_t(n+1,\alpha-n)\right| |f'(ta+(1-t)b)|dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 |B_{1-t}(n+1,\alpha-n)-B_t(n+1,\alpha-n)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 |B_{1-t}(n+1,\alpha-n)-B_t(n+1,\alpha-n)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

yazılır ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.17 Teorem 4.1.8'de $\alpha = n+1$ seçilirse elde edilen eşitsizlik $\alpha \in (0,1]$ için (3.1.21) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.1.9 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a,b \in I^\circ$, $a<b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha \in (n,n+1]$, $n = 0,1,2...$ ve $q \geq 1$ olmak üzere $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde $quasi-$konveks ise

$$
\begin{aligned}
&\left|B(n+1,\alpha-n)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{n!}{2(b-a)^\alpha}\left(I_\alpha^a f(b) + I_\alpha^b f(a)\right)\right| \\
&\leq \frac{b-a}{2}\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left[(\alpha-n)B_{\frac{1}{2}}(\alpha-n,n+1) + (n+1)B_{\frac{1}{2}}(n+1,\alpha-n) - \frac{1}{2^\alpha}\right]
\end{aligned}
\tag{4.1.42}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.2, üçgen eşitsizliği, $|f'|^q$ nun $quasi-$konveksliği ve Power-mean eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\left|B(n+1,\alpha-n)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{n!}{2(b-a)^\alpha}\left(I_\alpha^a f(b) + I_\alpha^b f(a)\right)\right| \\
&\leq \frac{b-a}{2}\left|\int_0^1 B_{1-t}(n+1,\alpha-n)-B_t(n+1,\alpha-n)\right| |f'(ta+(1-t)b)| dt \\
&\leq \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 |B_{1-t}(n+1,\alpha-n)-B_t(n+1,\alpha-n)| dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 |B_{1-t}(n+1,\alpha-n)-B_t(n+1,\alpha-n)||f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{b-a}{2}\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(B_{1-t}(n+1,\alpha-n)-B_t(n+1,\alpha-n)\right) dt\right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(B_t(n+1,\alpha-n)-B_{1-t}(n+1,\alpha-n)\right) dt\right]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{b-a}{2}\max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}^{\frac{1}{q}}$$
$$\times\left[(\alpha-n)B_{\frac{1}{2}}(\alpha-n,n+1)+(n+1)B_{\frac{1}{2}}(n+1,\alpha-n)-\frac{1}{2^\alpha}\right]$$

yazılır ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.18 Teorem 4.1.9'da $\alpha = n+1$ seçilirse (4.1.42) eşitsizliği (3.1.22) eşitsizliğine indirgenir.

4.1.4 İkinci Mertebeden Türevi $m-$Konveks Olan Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde ilk olarak iki kez diferensiyellenebilen fonksiyonlar için yeni bir özdeşlik verilecektir. Daha sonra bu özdeşlik ve literatürde iyi bilinen bazı eşitsizlikler yardımıyla m-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlikler elde edilecektir.

Lemma 4.1.3 *I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$, I°'de iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a,b \in I^\circ$, $a<b$ ve $f'' \in L[a,b]$ olsun. $\alpha \in (n,n+1]$ ve $n = 0,1,2...$ olmak üzere*

$$\frac{2^{\alpha-1}n!}{(b-a)^\alpha}\left[I^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f(a)+I^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f(b)\right]-B(n+1,\alpha-n)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (4.1.43)$$
$$= \frac{(b-a)^2}{8}\int_0^1\left[tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)\right]$$
$$\times\left[f''\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)+f''\left(\frac{t}{2}b+\frac{2-t}{2}a\right)\right]dt$$

dir.

İspat. Leibniz integral kuralı ve kısmi integrasyon yardımıyla

$$K_1 = \int_0^1\left[tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)\right]f''\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)dt$$
$$= \frac{2}{a-b}\left[tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)\right]f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\Bigg|_0^1$$
$$+\frac{2}{b-a}\int_0^1 B_t(n+1,\alpha-n)f'\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)dt$$
$$= \frac{2}{a-b}\left[B(n+1,\alpha-n)-B(n+2,\alpha-n)\right]f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$+\frac{2}{b-a}\left[B(n+1,\alpha-n)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{2}{a-b}\right.$$
$$\left.+\frac{2}{b-a}\int_0^1 t^n(1-t)^{\alpha-n-1}f\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)dt\right]$$

olarak yazılır. $x = \frac{t}{2}a + \frac{2-t}{2}b$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{2}{a-b}\left[B(n+1,\alpha-n) - B(n+2,\alpha-n)\right] f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad + \frac{2}{b-a}\left[B(n+1,\alpha-n) f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{2}{a-b}\right. \\
&\quad \left. + \frac{2^{\alpha+1}}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-x)^n\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha-n-1} f(x)dx\right] \\
&= \frac{2}{a-b}\left[B(n+1,\alpha-n) - B(n+2,\alpha-n)\right] f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad - \frac{4}{(b-a)^2}B(n+1,\alpha-n) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{2^{\alpha+2}n!}{(b-a)^{\alpha+2}} I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} f(b)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
K_2 &= \int_0^1 \left[tB_t(n+1,\alpha-n) - B_t(n+2,\alpha-n)\right] f''\left(\frac{t}{2}b + \frac{2-t}{2}a\right) dt \\
&= \frac{2}{b-a}\left[B(n+1,\alpha-n) - B(n+2,\alpha-n)\right] f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad - \frac{4}{(b-a)^2}B(n+1,\alpha-n) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{2^{\alpha+2}n!}{(b-a)^{\alpha+2}} I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} f(a)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Son olarak K_1 ve K_2 eşitlikleri toplanıp eşitliğin her iki tarafı $\frac{(b-a)^2}{8}$ ile çarpılırsa istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.1.19 Lemma 4.1.3'te $\alpha = n+1$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} f(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} f(b)\right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (4.1.44) \\
&= \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)}\int_0^1 t^{\alpha+1}\left[f''\left(\frac{t}{2}a + \frac{2-t}{2}b\right) + f''\left(\frac{t}{2}b + \frac{2-t}{2}a\right)\right] dt.
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra son eşitlikte $1-t = x$ dönüşümü yapılırsa Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren Lemma 3.1.5 de verilen özdeşlik elde edilir.

Lemma 4.1.3 yardımıyla iki kez diferansiyellenebilen $m-$konveks fonksiyonlar için elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.1.10 $f : [0,b^*] \to \mathbb{R}$, $(a,b) \subset [0,b^*]$ $(b^* > 0)$ üzerinde iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $0 \le a < b$, $m \in (0,1]$ ve $\frac{b}{m} \le b^*$ için $f'' \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0,1,2...$ ve $q \ge 1$ olmak üzere $|f''|^q$ fonksiyonu $[a, \frac{b}{m}]$ üzerinde m-konveks ise

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}f(a)+I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}f(b)\right]-B(n+1,\alpha-n)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \tag{4.1.45}$$
$$\leq \frac{(b-a)^2}{8}\Phi^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left(\Lambda_1|f''(a)|^q+m\Lambda_2|f''\left(\frac{b}{m}\right)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\Lambda_1|f''(b)|^q+m\Lambda_2|f''\left(\frac{a}{m}\right)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada Φ, Λ_1 ve Λ_2 ispatın içinde hesaplanmıştır.

İspat. (4.1.45) eşitsizliğinin sol tarafı kısaca $\mathcal{L}_1$ olarak gösterilsin. $t\in[0,1]$ için Lemma 4.1.3'te üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 \leq\ & \frac{(b-a)^2}{8}\left\{\int_0^1 [tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)]\right. \\ & \left.\times\left[\left|f''\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right|+\left|f''\left(\frac{t}{2}b+\frac{2-t}{2}a\right)\right|\right]dt\right\}\end{aligned} \tag{4.1.46}$$

yazılır. Burada

$$tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)=\int B_t(n+1,\alpha-n)\,dt>0$$

dir. (4.1.46) eşitsizliğinde Power-mean eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 \leq\ & \frac{(b-a)^2}{8}\left\{\left(\int_0^1 [tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)]\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\right. \\ & \times\left(\int_0^1 [tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)]\left|f''\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ & +\left(\int_0^1 [tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)]\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \left.\times\left(\int_0^1 [tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)]\left|f''\left(\frac{t}{2}b+\frac{2-t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. $|f''|^q$ fonksiyonu $[a,\frac{b}{m}]$ üzerinde m-konvex olduğundan

$$\left|f''\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right|^q \leq \frac{t}{2}|f''(a)|^q+m\frac{2-t}{2}\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q$$

ve

$$\left|f''\left(\frac{t}{2}b+\frac{2-t}{2}a\right)\right|^q \leq \frac{t}{2}|f''(b)|^q+m\frac{2-t}{2}\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q$$

dır ve son eşitsizliğe $m-$konvekslik şartı uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 \leq\ & \frac{(b-a)^2}{8}\left(\int_0^1 \left[tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)\right]dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \qquad (4.1.47)\\
&\times\Bigg\{\Bigg[|f''(a)|^q\int_0^1 \left[tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)\right]\frac{t}{2}dt\\
&+m|f''\left(\frac{b}{m}\right)|^q\int_0^1 \left[tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)\right]\left(\frac{2-t}{2}\right)dt\Bigg]^{\frac{1}{q}}\\
&+\Bigg[|f''(b)|^q\int_0^1 \left[tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)\right]\frac{t}{2}dt\\
&+m|f''\left(\frac{a}{m}\right)|^q\int_0^1 \left[tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)\right]\left(\frac{2-t}{2}\right)dt\Bigg]^{\frac{1}{q}}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

yazılır. Kısmi integrasyon yöntemi ve beta fonksiyonunun özellikleri yardımıyla

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \int_0^1 \left[tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)\right]dt \qquad (4.1.48)\\
&= \frac{1}{2}\left[B(n+1,\alpha-n)-2B(n+2,\alpha-n)+B(n+3,\alpha-n)\right],\\
\Lambda_1 &= \int_0^1 \left[tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)\right]\frac{t}{2}dt \qquad (4.1.49)\\
&= \frac{1}{12}\left[2B(n+1,\alpha-n)-3B(n+2,\alpha-n)+B(n+4,\alpha-n)\right],\\
\Lambda_2 &= \int_0^1 \left[tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)\right]\left(\frac{2-t}{2}\right)dt \qquad (4.1.50)\\
&= \frac{1}{12}\Big[4B(n+1,\alpha-n)-9B(n+2,\alpha-n)+6B(n+3,\alpha-n)-B(n+4,\alpha-n)\Big]
\end{aligned}
$$

sonuçları elde edilir. Son olarak (4.1.48), (4.1.49), (4.1.50) eşitlikleri (4.1.47) de kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.20 Teorem 4.1.10'da $\alpha = n+1$, $q = 1$ ve $m = 1$ olarak seçilirse elde edilen sonuç Teorem 3.1.11'de $s = 1$ için elde edilen özel sonuç ile aynıdır.

Sonuç 4.1.21 Teorem 4.1.10'da $\alpha = n+1$ olarak seçilirse

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f(a)+J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f(b)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\\
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{(\alpha+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{3+\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
\times\ & \left\{\left[\frac{|f''(a)|^q}{\alpha+3}+\frac{m(\alpha+4)|f''(\frac{b}{m})|^q}{(\alpha+2)(\alpha+3)}\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\frac{|f''(b)|^q}{\alpha+3}+\frac{m(\alpha+4)|f''(\frac{a}{m})|^q}{(\alpha+2)(\alpha+3)}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.22 Sonuç 4.1.21'de $m = 1$ olarak seçilirse

$$\left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} \left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}} f(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}} f(b) \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{(\alpha+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{3+\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{\alpha+2}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left\{ \left[\frac{|f''(a)|^q}{\alpha+3} + \frac{(\alpha+4)|f''(b)|^q}{(\alpha+2)(\alpha+3)} \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{|f''(b)|^q}{\alpha+3} + \frac{(\alpha+4)|f''(a)|^q}{(\alpha+2)(\alpha+3)} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

yazılır. Bu sonuç Teorem 3.1.13'te $s = 1$ için elde edilen özel sonuç ile aynıdır.

Sonuç 4.1.23 Sonuç 4.1.22'de α, $q = 1$ olarak seçilirse elde edilen sonuç Sarıkaya ve arkadaşları [58] tarafından klasik integraller yardımıyla elde edilen

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{48} \left(|f''(a)| + |f''(b)|\right)$$

eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.1.11 $f : [0, b^*] \to \mathbb{R}$, $\frac{b}{m} \leq b^*$ ve $0 \leq a < b$ için $(a, b) \subset [0, b^*]$ $(b^* > 0)$ üzerinde iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $f'' \in L[a, b]$ olsun. $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2...$, p, $q \in (1, \infty)$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve

$$\Psi := \int_0^1 \left[tB_t(n+1, \alpha-n) - B_t(n+2, \alpha-n) \right]^p dt \tag{4.1.51}$$

olmak üzere $|f''|^q$ fonksiyonu $[a, \frac{b}{m}]$ üzerinde m-konvex ise

$$\left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}} \left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}} f(a) + I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}} f(b) \right] - B(n+1, \alpha-n) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \tag{4.1.52}$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{8} \Psi^{\frac{1}{p}} \left\{ \left[\frac{1}{4}|f''(a)|^q + m\frac{3}{4}\left| f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{1}{4}|f''(a)|^q + m\frac{3}{4}\left| f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

dır.

İspat. Lemma 4.1.3, $|f''|^q$ nun $m-$konveksliği ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\mathcal{L}_1 \leq \frac{(b-a)^2}{8} \left\{ \int_0^1 \left[tB_t(n+1, \alpha-n) - B_t(n+2, \alpha-n) \right] \left| f''\left(\frac{t}{2}a + \frac{2-t}{2}b\right) \right| dt \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \left[tB_t(n+1, \alpha-n) - B_t(n+2, \alpha-n) \right] \left| f''\left(\frac{t}{2}b + \frac{2-t}{2}a\right) \right| dt \right\} \tag{4.1.53}$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{8}\left\{\left(\int_0^1 [tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)]^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\right.\\
&\times\left(\int_0^1\left|f''\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\int_0^1 [tB_t(n+1,\alpha-n)-B_t(n+2,\alpha-n)]^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\left.\times\left(\int_0^1\left|f''\left(\frac{t}{2}b+\frac{2-t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned}
$$

yazılır. $t\in[0,1]$ için $|f''|^q$ fonksiyonu $[a,\frac{b}{m}]$ üzerinde $m-$konveks olduğundan

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\left|f''\left(\frac{t}{2}a+\frac{2-t}{2}b\right)\right|^q dt &\leq |f''(a)|^q\int_0^1\frac{t}{2}dt+m\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\int_0^1\frac{2-t}{2}dt\\
&=\frac{1}{4}|f''(a)|^q+m\frac{3}{4}\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q
\end{aligned}
\tag{4.1.54}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\left|f''\left(\frac{t}{2}b+\frac{2-t}{2}a\right)\right|^q dt &\leq |f''(b)|^q\int_0^1\frac{t}{2}dt+m\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\int_0^1\frac{2-t}{2}\,dt\\
&=\frac{1}{4}|f''(b)|^q+m\frac{3}{4}\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q
\end{aligned}
\tag{4.1.55}
$$

olur. (4.1.54) ve (4.1.55) eşitsizlikleri ile (4.1.51) eşitliği (4.1.53) eşitsizliğinde kulanılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.24 Teorem 4.1.11'de $\alpha=n+1$ olarak seçilirse

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f(a)+J^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f(b)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\\
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{2^{3+\frac{2}{q}}(\alpha+1)}\left(\frac{1}{p(\alpha+1)+1}\right)^{\frac{1}{p}}\\
\times\ & \left\{\left[|f''(a)|^q+3m\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}+\left[|f''(b)|^q+3m\left|f''\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca bu eşitsizlikte $m=1$ olarak seçilirse Teorem 3.1.12'nin $s=1$ için verilen özel sonucu elde edilir.

4.2 Genelleştirilmiş Kesirli İntegraller Yardımıyla Bazı Konveks Fonksiyon Türleri İçin Eşitsizlikler

Bu bölümde ilk olarak genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri yardımıyla iki yeni özdeşlik verilmiş, bu özdeşliklere bağlı olarak, Hölder, Power-mean ve integraller için üçgen eşitsizliği gibi iyi bilinen bazı eşitsizlikler kullanılarak konveks fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. İkinci olarak farklı bir özdeşlik daha ispatlanmış ve ardından ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Son kısımda ise $P(I), Q(I), S(X,h)$ ve $r-$konveks fonksiyon sınıfları için yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler yer almaktadır. Ayrıca ispatların ardından, elde edilen sonuçların, σ, ρ, w gibi parametrelerin özel seçimleri ile hangi sonuçlara indirgendikleri verilecektir. Bu dönüşüm için kullanılan işlem basamakları şöyledir:

$$\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}(x) = \mathcal{F}^{\sigma(0),\sigma(1),\ldots}_{\rho,\lambda}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\Gamma(\rho k+\lambda)} x^k \quad (\rho, \lambda > 0; \quad x \in \mathbb{R})$$

serisinin açık halini, x yerine $w(x-t)^{\rho}$ ve $w \in \mathbb{R}$ olmak üzere, integralin içinde yazalım.

$$\begin{aligned}
&\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}\varphi\right)(x) \\
&= \int_a^x (x-t)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(x-t)^{\rho}]\varphi(t)dt \\
&= \int_a^x (x-t)^{\lambda-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\Gamma(\rho k+\lambda)} [w(x-t)^{\rho}]^k \right) \varphi(t)dt \\
&= \int_a^x (x-t)^{\lambda-1} \left(\frac{\sigma(0)}{\Gamma(\lambda)} [w(x-t)^{\rho}]^0 + \frac{\sigma(1)}{\Gamma(\rho+\lambda)} [w(x-t)^{\rho}]^1 + \ldots \right) \varphi(t)dt
\end{aligned}$$

Son eşitlikte integralin içerisindeki açık yazılan toplamda birinci terimde $w \neq 0$, $\lambda = \alpha$ ve $\sigma(0) = 1$ diğer terimlerde ise $w = 0$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}\varphi\right)(x) \\
&= \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + 0 + 0 + 0 \ldots \right] \varphi(t)dt \\
&= (J^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)
\end{aligned}$$

dir. Sağ taraflı genelleştirilmiş kesirli integralin dönüşümü de aynı özel koşullar altında benzer şekilde görülebilir. Bu bölümde teoremlerin ardından verilecek sonuçlarda $''\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ seçilirse$''$ ifadelerinden çıkarılacak anlam yukarıda yapılan uygulamadaki gibidir. Bu operatör yardımıyla yapılan işlemlerin anlaşılması için iki uygulama aşağıdaki gibi verilecektir.

Örnek 4.2.1

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t^{\lambda} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]dt \\
&= \int_0^1 t^{\lambda} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)} [w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]^k \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)[w(b-a)^{\rho}]^k}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)} t^{\lambda+\rho k} \right) dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)[w(b-a)^{\rho}]^{k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)} \left(\int_{0}^{1} t^{\lambda+\rho k} dt \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)[w(b-a)^{\rho}]^{k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)} \left(\left. \frac{t^{\lambda+\rho k+1}}{\lambda+\rho k+1} \right|_{0}^{1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)[w(b-a)^{\rho}]^{k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)} \left(\frac{1}{\lambda+\rho k+1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)[w(b-a)^{\rho}]^{k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+2)} \\
&= \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}] \ ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[(1-t)^{\lambda} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}(1-t)^{\rho}] \right] \\
&= \frac{d}{dt} \left[(1-t)^{\lambda} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)} [w(b-a)^{\rho}(1-t)^{\rho}]^{k} \right) \right] \\
&= \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)[w(b-a)^{\rho}]^{k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)} (1-t)^{\lambda+\rho k} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)[w(b-a)^{\rho}]^{k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)} \left(-(\lambda+\rho k)(1-t)^{\lambda+\rho k-1} \right) \\
&= -(1-t)^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)[w(b-a)^{\rho}(1-t)^{\rho}]^{k}}{\Gamma(\rho k+\lambda)} \\
&= -(1-t)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}(1-t)^{\rho}].
\end{aligned}
$$

4.2.1 Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Lemma 4.2.1 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $\varphi : I \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ ve $\varphi' \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde, $\rho, \lambda \in \mathbb{R}^{+}$, $w \in \mathbb{R}$ ve $\sigma(k) \in \mathbb{R}^{+}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi olmak üzere

$$
\begin{aligned}
& \frac{(x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^{\rho}]\varphi(a) + (b-x)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^{\rho}]\varphi(b)}{b-a} \qquad (4.2.1) \\
&- \frac{1}{b-a} \left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x+;w}\varphi \right)(b) + \left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x-;w}\varphi \right)(a) \right] \\
&= \frac{(x-a)^{\lambda+1}}{b-a} \left\{ \int_{0}^{1} \left[t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^{\rho}t^{\rho}] - \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^{\rho}] \right] \varphi'(tx+(1-t)a)dt \right\} \\
&+ \frac{(b-x)^{\lambda+1}}{b-a} \left\{ \int_{0}^{1} \left[\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^{\rho}] - t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^{\rho}t^{\rho}] \right] \varphi'(tx+(1-t)b)dt \right\}
\end{aligned}
$$

dir.

İspat. Kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak ve $u = tx + (1-t)a$ değişken değiştirmesi yapılarak

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[t^\lambda \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho t^\rho] - \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho]\right] \varphi'(tx+(1-t)a)dt \qquad (4.2.2)\\
= &\int_0^1 t^\lambda \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho t^\rho]\varphi'(tx+(1-t)a)dt\\
&-\int_0^1 \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho]\varphi'(tx+(1-t)a)dt\\
= &\; t^\lambda \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho t^\rho]\frac{\varphi(tx+(1-t)a)}{x-a}\Bigg|_0^1\\
&-\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda}[w(x-a)^\rho t^\rho]\frac{\varphi(tx+(1-t)a)}{x-a}dt\\
&-\mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho]\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}\\
= &\; \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho]\frac{\varphi(a)}{x-a} - \frac{1}{x-a}\int_a^x \left(\frac{u-a}{x-a}\right)^{\lambda-1} \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda}\left[w(x-a)^\rho\left(\frac{u-a}{x-a}\right)^\rho\right]\frac{\varphi(u)}{x-a}du\\
= &\; \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho]\frac{\varphi(a)}{x-a} - \frac{1}{(x-a)^{\lambda+1}}\int_a^x (u-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda}\left[w(u-a)^\rho\right]\varphi(u)du\\
= &\; \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho]\frac{\varphi(a)}{x-a} - \frac{1}{(x-a)^{\lambda+1}}\left(\mathcal{J}^\sigma_{\rho,\lambda,x-;w}\varphi\right)(a)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[\mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^\rho] - t^\lambda \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^\rho t^\rho]\right]\varphi'(tx+(1-t)b)dt \qquad (4.2.3)\\
= &\; \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho]\frac{\varphi(b)}{b-x} - \frac{1}{(b-x)^{\lambda+1}}\left(\mathcal{J}^\sigma_{\rho,\lambda,x+;w}\varphi\right)(b)
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak (4.2.2) ve (4.2.3) eşitliğinin her iki tarafı sırasıyla $\frac{(x-a)^{\lambda+1}}{b-a}$ ve $\frac{(b-x)^{\lambda+1}}{b-a}$ ile çarpılıp elde edilen sonuçlar taraf tarafa toplanırsa istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.1 Lemma 4.2.1'de $\lambda = \alpha$, $\rho(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse (4.2.1) eşitliği Lemma 3.1.3'te verilen eşitliğe indirgenir.

Teorem 4.2.1 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $\varphi : I \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $\varphi' \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde $\rho, \lambda \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{R}$, $\sigma(k) \in \mathbb{R}^+$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi ve

$$\begin{aligned}
\sigma_1(k) &:= \sigma(k)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\rho k+\lambda+2}\right),\\
\sigma_2(k) &:= \sigma(k)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(\rho k+\lambda+1)(\rho k+\lambda+2)}\right)
\end{aligned}$$

olmak üzere, $|\varphi'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^{\rho}]\varphi(a)+(b-x)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^{\rho}]\varphi(b)}{b-a}\right. \\
&\left.-\frac{1}{b-a}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^{+};w}\varphi\right)(b)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^{-};w}\varphi\right)(a)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{\lambda+1}\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\lambda+1}[|w|(x-a)^{\rho}]+(b-x)^{\lambda+1}\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\lambda+1}[|w|(b-x)^{\rho}]}{b-a}|\varphi'(x)| \\
&+\frac{(x-a)^{\lambda+1}\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\lambda+1}[|w|(x-a)^{\rho}]|\varphi'(a)|+(b-x)^{\lambda+1}\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\lambda+1}[|w|(b-x)^{\rho}]|\varphi'(b)|}{b-a}
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.2.1 ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^{\rho}]\varphi(a)+(b-x)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^{\rho}]\varphi(b)}{b-a}\right. \\
-\ &\left.\frac{1}{b-a}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^{+};w}\varphi\right)(b)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^{-};w}\varphi\right)(a)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{\lambda+1}}{b-a}\int_0^1\left|t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^{\rho}t^{\rho}]-\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^{\rho}]\right||\varphi'(tx+(1-t)a)|dt \\
+\ & \frac{(b-x)^{\lambda+1}}{b-a}\int_0^1\left|\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^{\rho}]-t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^{\rho}t^{\rho}]\right||\varphi'(tx+(1-t)b)|dt
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

elde edilir. Ayrıca $|\varphi'|$ fonksiyonunun konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\left|t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^{\rho}t^{\rho}]-\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^{\rho}]\right||\varphi'(tx+(1-t)a)|dt \\
\leq\ & \int_0^1\left(\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[|w|(x-a)^{\rho}]-t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[|w|(x-a)^{\rho}t^{\rho}]\right)[t|\varphi'(x)|+(1-t)|\varphi'(a)|]\,dt \\
\leq\ & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)[|w|^{k}(x-a)^{\rho k}]}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)}\int_0^1\left(1-t^{\lambda+\rho k}\right)(t|\varphi'(x)|+(1-t)|\varphi'(a)|)\,dt \\
=\ & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)[|w|^{k}(x-a)^{\rho k}]}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\rho k+\lambda+2}\right)|\varphi'(x)| \\
+\ & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)[|w|^{k}(x-a)^{\rho k}]}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(\rho k+\lambda+1)(\rho k+\lambda+2)}\right)|\varphi'(a)| \\
=\ & \mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\lambda+1}[|w|(x-a)^{\rho}]|\varphi'(x)|+\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\lambda+1}[|w|(x-a)^{\rho}]|\varphi'(a)| \\
&\int_0^1\left|\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^{\rho}]-t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^{\rho}t^{\rho}]\right||\varphi'(tx+(1-t)b)|dt
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\leq\ & \int_0^1\left|\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^{\rho}]-t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^{\rho}t^{\rho}]\right|(t|\varphi'(x)|+(1-t)|\varphi'(b)|)\,dt \\
=\ & \mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\lambda+1}[|w|(b-x)^{\rho}]|\varphi'(x)|+\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\lambda+1}[|w|(b-x)^{\rho}]|\varphi'(b)|
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

olur. Sonuç olarak (4.2.6) ve (4.2.7) eşitsizlikleri (4.2.5) eşitsizliğinde yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.2 Teorem 4.2.1'de $\lambda = \alpha$, $\rho(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse elde edilen sonuç Teorem 3.1.7'de $s = 1$ için elde edilen özel sonuç ile aynı olur.

Teorem 4.2.2 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $\varphi : I \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $\varphi' \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde, $\rho, \lambda \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{R}$, $\sigma(k) \in \mathbb{R}^+$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi, ayrıca $\sigma_1(k)$, $\sigma_2(k)$ (4.2.4) te verildiği gibi ve

$$\sigma_3(k) := \sigma(k)\frac{\rho k + \lambda}{\rho k + \lambda + 1}$$

olmak üzere $q \geq 1$ için $|\varphi'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde konveks ise

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(x-a)^\lambda \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho]\varphi(a) + (b-x)^\lambda \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^\rho]\varphi(b)}{b-a}\right. \qquad (4.2.8)\\
&- \left.\frac{1}{b-a}\left[\left(\mathcal{J}^\sigma_{\rho,\lambda,x+;w}\varphi\right)(b) + \left(\mathcal{J}^\sigma_{\rho,\lambda,x-;w}\varphi\right)(a)\right]\right|\\
\leq\ & \frac{(x-a)^{\lambda+1}}{b-a}\left(\mathcal{F}^{\sigma_3}_{\rho,\lambda+1}[|w|(x-a)^\rho]\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times \left[\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\lambda+1}[|w|(x-a)^\rho]|\varphi'(x)|^q + \mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\lambda+1}[|w|(x-a)^\rho]|\varphi'(a)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\\
&+ \frac{(b-x)^{\lambda+1}}{b-a}\left(\mathcal{F}^{\sigma_3}_{\rho,\lambda+1}[|w|(b-x)^\rho]\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times \left[\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\lambda+1}[|w|(b-x)^\rho]|\varphi'(x)|^q + \mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\lambda+1}[|w|(b-x)^\rho]|\varphi'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.2.1, üçgen eşitsizliği ve Power-mean eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(x-a)^\lambda \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho]\varphi(a) + (b-x)^\lambda \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^\rho]\varphi(b)}{b-a}\right. \qquad (4.2.9)\\
&- \left.\frac{1}{b-a}\left[\left(\mathcal{J}^\sigma_{\rho,\lambda,x^+;w}\varphi\right)(b) + \left(\mathcal{J}^\sigma_{\rho,\lambda,x^-;w}\varphi\right)(a)\right]\right|\\
\leq\ & \frac{(x-a)^{\lambda+1}}{b-a}\left[\int_0^1 \left|\mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho] - t^\lambda \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho t^\rho]\right|dt\right]^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left\{\int_0^1 \left|\mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho] - t^\lambda \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho t^\rho]\right|\left|\varphi'(tx+(1-t)a)\right|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}\\
&+\frac{(b-x)^{\lambda+1}}{b-a}\left[\int_0^1 \left|\mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^\rho] - t^\lambda \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^\rho t^\rho]\right|dt\right]^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left\{\int_0^1 \left|\mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^\rho] - t^\lambda \mathcal{F}^\sigma_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^\rho t^\rho]\right|\left|\varphi'(tx+(1-t)b)\right|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

yazılır. Daha sonra (3.3.1) de verilen fonksiyon sınıfı göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left|\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho] - t^\lambda \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho t^\rho]\right| dt && (4.2.10)\\
\leq\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)[|w|^k (x-a)^{\rho k}]}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)} \int_0^1 \left(1-t^{\lambda+\rho k}\right) dt \\
=\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)[|w|^k (x-a)^{\rho k}]}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)} \frac{\rho k+\lambda}{\rho k+\lambda+1} \\
=\ & \mathcal{F}^{\sigma_3}_{\rho,\lambda+1}[|w|(x-a)^\rho]
\end{aligned}$$

elde edilir. $|\varphi'|^q$ fonksiyonunun konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left|\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho] - t^\lambda \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho t^\rho]\right| \left|\varphi'(tx+(1-t)a)\right|^q dt \\
\leq\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)[|w|^k (x-a)^{\rho k}]}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)} \int_0^1 \left(1-t^{\lambda+\rho k}\right) \left(t|\varphi'(x)|^q + (1-t)|\varphi'(a)|^q\right) dt \\
=\ & \mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\lambda+1}[|w|(x-a)^\rho]|\varphi'(x)|^q + \mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\lambda+1}[|w|(x-a)^\rho]|\varphi'(a)|^q && (4.2.11)
\end{aligned}$$

yazılır. Benzer yöntemler ile

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left|\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^\rho] - t^\lambda \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^\rho t^\rho]\right| \left|\varphi'(tx+(1-t)b)\right|^q dt \\
\leq\ & \mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\lambda+1}[|w|(b-x)^\rho]|\varphi'(x)|^q + \mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\lambda+1}[|w|(b-x)^\rho]|\varphi'(b)|^q && (4.2.12)
\end{aligned}$$

eşitsizliğine kolayca ulaşılır. Son olarak (4.2.10), (4.2.11) ve (4.2.12) eşitsizlikleri (4.2.9) eşitsizliği ile birleştirildiğinde ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.3 Teorem 4.2.2'de $\lambda = \alpha$, $\rho(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse elde edilen sonuç Teorem 3.1.9'da $s = 1$ için elde edilen özel sonuç ile aynı olur.

Teorem 4.2.3 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $\varphi : I \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $\varphi' \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde, $\rho, \lambda \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{R}$, $\sigma(k) \in \mathbb{R}^+$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi ve

$$\sigma_4(k) := \sigma(k) \left[\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(1+\frac{1}{\lambda+\rho k})}{\Gamma(p+1+\frac{1}{\lambda+\rho k})}\right]^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $|\varphi'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(x-a)^\lambda \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^\rho]\varphi(a) + (b-x)^\lambda \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^\rho]\varphi(b)}{b-a}\right. && (4.2.13)\\
&- \left.\frac{1}{b-a}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^+;w}\varphi\right)(b) + \left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^-;w}\varphi\right)(a)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{\lambda+1}}{b-a} \mathcal{F}^{\sigma_4}_{\rho,\lambda+1}[|w|(x-a)^\rho] \left(\frac{|\varphi'(x)|^q + |\varphi'(a)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \\
+\ & \frac{(b-x)^{\lambda+1}}{b-a} \mathcal{F}^{\sigma_4}_{\rho,\lambda+1}[|w|(b-x)^\rho] \left(\frac{|\varphi'(x)|^q + |\varphi'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.2.1 ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^{\rho}]\varphi(a)+(b-x)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^{\rho}]\varphi(b)}{b-a} \right. \\
& \left. -\frac{1}{b-a}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^{+};w}\varphi\right)(b)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^{-};w}\varphi\right)(a)\right] \right| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{\lambda+1}}{b-a}\int_0^1 \left| t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^{\rho}t^{\rho}]-\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(x-a)^{\rho}]\right| |\varphi'(tx+(1-t)a)|dt \\
+\ & \frac{(b-x)^{\lambda+1}}{b-a}\int_0^1 \left| \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^{\rho}]-t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-x)^{\rho}t^{\rho}]\right| |\varphi'(tx+(1-t)b)|dt \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{\lambda+1}}{b-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)[|w|^{k}(x-a)^{\rho k}]}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)}\int_0^1 \left(1-t^{\lambda+\rho k}\right)|\varphi'(tx+(1-t)a)|dt \\
+\ & \frac{(b-x)^{\lambda+1}}{b-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)[|w|^{k}(b-x)^{\rho k}]}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)}\int_0^1 \left(1-t^{\lambda+\rho k}\right)|\varphi'(tx+(1-t)b)|dt
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

elde edilir. Daha sonra Hölder eşitsizliği ve $|\varphi'|^{q}$ nun konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left(1-t^{\lambda+\rho k}\right)|\varphi'(tx+(1-t)a)|dt \\
\leq\ & \left(\int_0^1 \left(1-t^{\lambda+\rho k}\right)^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |\varphi'(tx+(1-t)a)|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \left[\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(1+\frac{1}{\lambda+\rho k})}{\Gamma(p+1+\frac{1}{\lambda+\rho k})}\right]^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|\varphi'(x)|^{q}+|\varphi'(a)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^1 \left(1-t^{\lambda+\rho k}\right)^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |\varphi'(tx+(1-t)b)|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \left[\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(1+\frac{1}{\lambda+\rho k})}{\Gamma(p+1+\frac{1}{\lambda+\rho k})}\right]^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|\varphi'(x)|^{q}+|\varphi'(b)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

eşitsizliğinin sağlandığı açıkça görülmektedir. Sonuç olarak (4.2.15), (4.2.16) eşitsizlikleri (4.2.14) te yerine yazılırsa istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.2.4 Teorem 4.2.3'te $\lambda=\alpha$, $\rho(0)=1$ ve $w=0$ olarak seçilirse (4.2.13) eşitsizliği Teorem 3.1.8'de $s=1$ özel durumu için elde edilen eşitsizliğe indirgenir.

Şimdi genelleştirilmiş kesirli integraller yardımıyla elde edilen yeni bir özdeşlik aşağıdaki gibi verilecektir. İlk olarak kısaca

$$L_f(a,b;w;J) := \frac{1}{2(b-a)^\lambda}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b)\right]-\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho]f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ile gösterilsin.

Lemma 4.2.2 *I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a,b \in I^\circ$, $a<b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde, $\rho,\lambda \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{R}$, $\sigma(k) \in \mathbb{R}^+$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi ve*

$$k(t)=\begin{cases} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho] & ,0<t\le \frac{1}{2} \\ -\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho] & ,\frac{1}{2}<t\le 1 \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} L_f(a,b;w;J) &= \frac{b-a}{2}\Bigg\{\int_0^1 k(t)f^{'}(ta+(1-t)b)dt \\ &\quad -\int_0^1 (1-t)^\lambda \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho(1-t)^\rho]f^{'}\left(ta+(1-t)b\right)dt \\ &\quad +\int_0^1 t^\lambda \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho t^\rho]f^{'}\left(ta+(1-t)b\right)dt\Bigg\} \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. $k(t)$ fonksiyonun parçalanışından

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho]f^{'}(ta+(1-t)b)dt \\ &\quad -\int_{\frac{1}{2}}^1 \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho]f^{'}(ta+(1-t)b)dt \\ &\quad -\int_0^1 (1-t)^\lambda \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho(1-t)^\rho]f^{'}\left(ta+(1-t)b\right)dt \\ &\quad +\int_0^1 t^\lambda \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho t^\rho]f^{'}\left(ta+(1-t)b\right)dt \\ &:= I_1+I_2+I_3+I_4 \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

olarak yazılabilir. Kısmi integrasyon yöntemi ve $x=ta+(1-t)b$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho]f^{'}(ta+(1-t)b)dt \\ &= \frac{\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho]}{b-a}\left[f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \;; \\ I_2 &= -\int_{\frac{1}{2}}^1 \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho]f^{'}(ta+(1-t)b)dt \\ &= \frac{\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho]}{b-a}\left[f(a)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \;; \\ I_3 &= -\int_0^1 (1-t)^\lambda \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho(1-t)^\rho]f^{'}\left(ta+(1-t)b\right)dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{b-a}(1-t)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}(1-t)^{\rho}]f\left(ta+(1-t)b\right)\Big|_0^1 \\
&\quad +\frac{1}{b-a}\int_0^1 (1-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}(1-t)^{\rho}]f\left(ta+(1-t)b\right)dt \\
&= -\frac{1}{b-a}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]f(b) \\
&\quad +\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(b-a)^{\rho}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\rho}\right]\frac{f(x)}{b-a}dx \\
&= -\frac{1}{b-a}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]f(b)+\frac{1}{(b-a)^{\lambda+1}}\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a) \ ; \\
I_4 &= \int_0^1 t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]f'\left(ta+(1-t)b\right)dt \\
&= -\frac{1}{b-a}t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]f\left(ta+(1-t)b\right)\Big|_0^1 \\
&\quad +\frac{1}{b-a}\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]f\left(ta+(1-t)b\right)dt \\
&= -\frac{1}{b-a}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]f(a) \\
&\quad +\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(b-a)^{\rho}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\rho}\right]\frac{f(x)}{b-a}dx \\
&= -\frac{1}{b-a}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]f(a)+\frac{1}{(b-a)^{\lambda+1}}\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b)
\end{aligned}
$$

elde edilir. I_1, I_2, I_3, I_4 eşitlikleri (4.2.18) de kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{-2}{b-a}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad +\frac{1}{(b-a)^{\lambda+1}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b)\right]
\end{aligned}
\tag{4.2.19}
$$

olur. Son olarak (4.2.19) eşitliğinin her iki tarafı $\frac{(b-a)}{2}$ ile çarpılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.5 Lemma 4.2.2'e $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse (4.2.17) eşitliği (3.1.12) eşitliğine indirgenir.

Teorem 4.2.4 *I*, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $a, b \in I^{\circ}$ ve $f' \in L[a, b]$olsun. Bu takdirde, $\rho, \lambda \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{R}$, $\sigma(k) \in \mathbb{R}^+$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi ve

$$\sigma_1(k) = \sigma(k)\left(\lambda+\rho k+3-\frac{1}{2^{\lambda+\rho k-1}}\right)$$

olmak üzere $|f'|$ fonksiyonu (a, b) üzerinde konveks ise

$$|L_f(a,b;w;J)| \le \frac{b-a}{4}\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\lambda+2}[|w|(b-a)^{\rho}]\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right] \tag{4.2.20}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.2.2, üçgen eşitsizliği ve $|f^{'}|$ fonksiyonunun konveksliği kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
& |L_f(a,b;w;J)| \qquad (4.2.21)\\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\Bigg\{\Bigg|\int_0^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]f^{'}(ta+(1-t)b)dt\\
& +\int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]f^{'}(ta+(1-t)b)dt\Bigg|\\
& +\Bigg|\int_0^1 (1-t)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}(1-t)^{\rho}]f^{'}\,(ta+(1-t)b)\,dt\\
& -\int_0^1 t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]f^{'}\,(ta+(1-t)b)\,dt\Bigg|\Bigg\}\\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\Bigg\{\int_0^1 \left|\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]\right|\Big(t|f^{'}(a)|+(1-t)|f^{'}(b)|\Big)\,dt\\
& +\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k(b-a)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)}\Bigg[\int_0^{\frac{1}{2}}\Big((1-t)^{\lambda+\rho k}-t^{\lambda+\rho k}\Big)\Big(t|f^{'}(a)|+(1-t)|f^{'}(b)|\Big)\,dt\\
& +\int_{\frac{1}{2}}^{1}\Big(t^{\lambda+\rho k}-(1-t)^{\lambda+\rho k}\Big)\Big(t|f^{'}(a)|+(1-t)|f^{'}(b)|\Big)\,dt\Bigg]\Bigg\}\\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k(b-a)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)}\times\Bigg\{\left(\frac{|f^{'}(a)|+|f^{'}(b)|}{2}\right)\\
& +|f^{'}(a)|\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(t(1-t)^{\lambda+\rho k}-t^{\lambda+\rho k+1}\Big)dt\\
& +|f^{'}(b)|\int_0^{\frac{1}{2}}\Big((1-t)^{\lambda+\rho k+1}-t^{\lambda+\rho k}(1-t)\Big)dt\\
& +|f^{'}(a)|\int_{\frac{1}{2}}^{1}\Big(t^{\lambda+\rho k+1}-t(1-t)^{\lambda+\rho k}\Big)dt\\
& +|f^{'}(b)|\int_{\frac{1}{2}}^{1}\Big((1-t)t^{\lambda+\rho k}-(1-t)^{\lambda+\rho k+1}\Big)dt\Bigg\}\\
=\ & \frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k(b-a)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda+\rho k+1}\left(1-\frac{1}{2^{\lambda+\rho k}}\right)\right]\Big[|f^{'}(a)|+|f^{'}(b)|\Big]\\
=\ & \frac{b-a}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k(b-a)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)(\lambda+\rho k+1)}\left(\lambda+\rho k+3-\frac{1}{2^{\lambda+\rho k-1}}\right)\Big[|f^{'}(a)|+|f^{'}(b)|\Big]\\
=\ & \frac{b-a}{4}\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\lambda+2}[|w|(b-a)^{\rho}]\Big[|f^{'}(a)|+|f^{'}(b)|\Big]
\end{aligned}
$$

elde edilir ki burada

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(t(1-t)^{\lambda+\rho k}-t^{\lambda+\rho k+1}\Big)dt &= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\Big((1-t)t^{\lambda+\rho k}-(1-t)^{\lambda+\rho k+1}\Big)dt\\
&= \frac{2^{\lambda+\rho k+1}-(\lambda+\rho k+2)}{(\lambda+\rho k+1)(\lambda+\rho k+2)2^{\lambda+\rho k+1}}
\end{aligned}
$$

ve

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}\Big((1-t)^{\lambda+\rho k+1}-t^{\lambda+\rho k}(1-t)\Big)dt &= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\Big(t^{\lambda+\rho k+1}-t(1-t)^{\lambda+\rho k}\Big)dt\\ &= \frac{1}{\lambda+\rho k+2}-\frac{1}{(\lambda+\rho k+2)2^{\lambda+\rho k+2}}\\ &\quad -\frac{\lambda+\rho k+3}{(\lambda+\rho k+1)(\lambda+\rho k+2)2^{\lambda+\rho k+2}}\end{aligned}$$

dir. Böylece istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.6 Teorem 4.2.4'te $\lambda=\alpha$, $\sigma(0)=1$ ve $w=0$ olarak seçilirse (4.2.20) eşitsizliği (3.1.13) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.2.5 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f:I\to\mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a<b$, $a,b\in I^\circ$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde, $\rho,\lambda\in\mathbb{R}^+$, $w\in\mathbb{R}$, $\sigma(k)\in\mathbb{R}^+$ $(k\in\mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi ve

$$\begin{aligned}\sigma_2(k) &= \sigma(k)\left[\frac{1}{p(\lambda+\rho k)+1}\left(1-\frac{1}{2^{p(\lambda+\rho k)}}\right)\right]^{\frac{1}{p}};\\ \sigma_3(k) &= \sigma(k)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left(1+\left[\frac{4}{p(\lambda+\rho k)+1}\left(1-\frac{1}{2^{p(\lambda+\rho k)}}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\end{aligned}$$

olmak üzere $(q>1)$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu (a,b) üzerinde konveks ise

$$\begin{aligned}&|L_f(a,b;w;J)| \qquad (4.2.22)\\ \le\ &\frac{b-a}{2}\Bigg\{\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[|w|(b-a)^\rho]\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(a)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &+\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\lambda+1}[|w|(b-a)^\rho]\left(\left[\frac{1}{8}|f'(a)|^q+\frac{3}{8}|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\frac{3}{8}|f'(a)|^q+\frac{1}{8}|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right)\\ \le\ &\mathcal{F}^{\sigma_3}_{\rho,\lambda+1}[|w|(b-a)^\rho]\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.2.2 ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}&|L_f(a,b;w;J)| \qquad (4.2.23)\\ \le\ &\frac{b-a}{2}\Bigg\{\Bigg|\int_0^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho]f'(ta+(1-t)b)dt\\ &+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho]f'(ta+(1-t)b)dt\Bigg|\\ &+\Bigg|\int_0^1(1-t)^\lambda\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho(1-t)^\rho]f'(ta+(1-t)b)\,dt\\ &-\int_0^1 t^\lambda\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho t^\rho]f'(ta+(1-t)b)\,dt\Bigg|\Bigg\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \frac{b-a}{2}\Bigg\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k(b-a)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)}\int_0^1 \left|f^{'}(ta+(1-t)b)\right|dt \\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k(b-a)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+1)}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left((1-t)^{\lambda+\rho k}-t^{\lambda+\rho k}\right)\left|f^{'}(ta+(1-t)b)\right|dt\right. \\
&\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t^{\lambda+\rho k}-(1-t)^{\lambda+\rho k}\right)\left|f^{'}(ta+(1-t)b)\right|dt\right]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. $|f^{'}|^q$ nun konveksliği ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$
\int_0^1 \left|f^{'}(ta+(1-t)b)\right|dt \leq \left(\frac{|f^{'}(a)|^q+|f^{'}(a)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.2.24}
$$

eşitsizliği yazılabilir. $A \geq B \geq 0$ ve $p \geq 1$ için $(A-B)^p \leq A^p - B^p$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{1}{2}}\left((1-t)^{\lambda+\rho k}-t^{\lambda+\rho k}\right)\left|f^{'}(ta+(1-t)b)\right|dt \qquad (4.2.25)\\
\leq\ & \left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left((1-t)^{\lambda+\rho k}-t^{\lambda+\rho k}\right)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f^{'}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left((1-t)^{p(\lambda+\rho k)}-t^{p(\lambda+\rho k)}\right)dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left(t|f^{'}(a)|^q+(1-t)|f^{'}(a)|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \left[\frac{1}{p(\lambda+\rho k)+1}\left(1-\frac{1}{2^{p(\lambda+\rho k)}}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{1}{8}|f^{'}(a)|^q+\frac{3}{8}|f^{'}(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t^{\lambda+\rho k}-(1-t)^{\lambda+\rho k}\right)\left|f^{'}(ta+(1-t)b)\right|dt \qquad (4.2.26)\\
\leq\ & \left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t^{\lambda+\rho k}-(1-t)^{\lambda+\rho k}\right)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f^{'}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t^{p(\lambda+\rho k)}-(1-t)^{p(\lambda+\rho k)}\right)dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t|f^{'}(a)|^q+(1-t)|f^{'}(a)|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \left[\frac{1}{p(\lambda+\rho k)+1}\left(1-\frac{1}{2^{p(\lambda+\rho k)}}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{3}{8}|f^{'}(a)|^q+\frac{1}{8}|f^{'}(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \geq 0$, $b_1, b_2, b_3, ..., b_n \geq 0$ olmak üzere $s \in (0,1]$ için

$$
\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^s \leq \sum_{k=1}^{n}a_k^s + \sum_{k=1}^{n}b_k^s
$$

dir. $q > 1$ için $0 < \frac{1}{q} < 1$ olmak üzere $a_1 = 3|f^{'}(a)|^q$, $b_1 = |f^{'}(b)|^q$, $a_2 = |f^{'}(a)|^q$ ve $b_2 = 3|f^{'}(b)|^q$ olarak seçilsin. (4.2.25) ile (4.2.26) eşitsizlikleri birleştirilerek

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{1}{2}}\left((1-t)^{\lambda+\rho k}-t^{\lambda+\rho k}\right)\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt \qquad (4.2.27)\\
&+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t^{\lambda+\rho k}-(1-t)^{\lambda+\rho k}\right)\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt\\
\leq\ &\left[\frac{1}{p(\lambda+\rho k)+1}\left(1-\frac{1}{2^{p(\lambda+\rho k)}}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\times\left(\left[3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}+\left[|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right)\\
\leq\ &\left[\frac{1}{p(\lambda+\rho k)+1}\left(1-\frac{1}{2^{p(\lambda+\rho k)}}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\left(3^{\frac{1}{q}}+1\right)\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]\\
\leq\ &\left[\frac{1}{p(\lambda+\rho k)+1}\left(1-\frac{1}{2^{p(\lambda+\rho k)}}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{q}}4\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]\\
=\ &\left[\frac{4}{p(\lambda+\rho k)+1}\left(1-\frac{1}{2^{p(\lambda+\rho k)}}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.2.24) eşitsizliği için

$$
\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(a)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right] \qquad (4.2.28)
$$

yazılabilir. Son olarak (4.2.24), (4.2.27) ve (4.2.28) eşitsizlikleri (4.2.23) te kullanılarak ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.7 Teorem 4.2.5'te $\lambda=\alpha$, $\sigma(0)=1$ ve $w=0$ olarak seçilirse (4.2.22) eşitsizliği

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[(J_{\alpha^-}^{a}f)(b)+(J_{\alpha^+}^{b}f)(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \qquad (4.2.29)\\
\leq\ &\frac{b-a}{2}\Bigg\{\left[\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}\\
&+\left[\frac{1}{\alpha p+1}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha p}}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\left(\left[\frac{1}{8}|f'(a)|^q+\frac{3}{8}|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\frac{3}{8}|f'(a)|^q+\frac{1}{8}|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right)\Bigg\}\\
\leq\ &\frac{b-a}{2}\left(1+\left[\frac{4}{\alpha p+1}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha p}}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliğine dönüşür.

4.2.2 İkinci Mertebeden Türevi s-Konveks Olan Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Lemma 4.2.3 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f: I\to\mathbb{R}$, I°'de iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a<b$, $a,b\in I^{\circ}$ ve $f''\in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde, $\rho,\lambda\in\mathbb{R}^{+}$, $w\in\mathbb{R}$,

$\sigma(k) \in \mathbb{R}^+$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi olmak üzere

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{2(b-a)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a) + \left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b)\right] \\ = & \frac{(b-a)^2}{2}\left\{\int_0^1 \left(t\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}] - t^{\lambda+1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]\right)\right. \\ & \left.\left[f''(ta+(1-t)b) + f''((1-t)a+tb)\right]dt\right\} \end{aligned} \tag{4.2.30}$$

dir.

İspat. Kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak ve $x = (ta + (1-t)b)$, $y = (tb + (1-t)a)$ değişken değiştirmeleri yapılarak

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}]\int_0^1 tf''(ta+(1-t)b)\,dt \\ &= \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}]\left\{\frac{1}{a-b}tf'(ta+(1-t)b)\Big|_0^1 - \frac{1}{a-b}\int_0^1 f'(ta+(1-t)b)\,dt\right\} \\ &= \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}]\left\{-\frac{f'(a)}{b-a} - \frac{f(a)-f(b)}{(b-a)^2}\right\}; \\ I_2 &= \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}]\int_0^1 tf''((1-t)a+tb)\,dt \\ &= \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}]\left\{\frac{f'(b)}{b-a} - \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}\right\}; \\ I_3 &= \int_0^1 t^{\lambda+1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]f''(ta+(1-t)b)\,dt \\ &= t^{\lambda+1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]\frac{f'(ta+(1-t)b)}{a-b}\Big|_0^1 \\ &\quad -\int_0^1 t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]\frac{f'(ta+(1-t)b)}{a-b}dt \\ &= \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}]\frac{f'(a)}{a-b} - \frac{1}{a-b}t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Big|_0^1 \\ &\quad +\frac{1}{a-b}\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt \\ &= \frac{\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}]f'(a)}{a-b} - \frac{\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]f(a)}{(b-a)^2} \\ &\quad +\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(b-a)^{\rho}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\rho}\right]\frac{f(x)}{b-a}dx \\ &= \frac{\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}]f'(a)}{a-b} - \frac{\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]f(a)}{(b-a)^2} + \frac{\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b)}{(b-a)^{\lambda+2}}; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^1 t^{\lambda+1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[(b-a)^{\rho}t^{\rho}]f''\left((1-t)a+tb\right)dt \\
&= \frac{\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}]f'(b)}{b-a}-\frac{\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]f(b)}{(b-a)^2}+\frac{\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a)}{(b-a)^{\lambda+2}}
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir ve daha sonra $I_1+I_2-I_3-I_4$ işlemi yapılıp eşitliğin her iki tarafı $\frac{(b-a)^2}{2}$ ile çarpılırsa istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.2.8 Lemma 4.2.3'te $\lambda=\alpha$, $\sigma(0)=1$ ve $w=0$ olarak seçilirse (4.2.30) eşitliği (3.1.27) eşitliğine indirgenir.

Teorem 4.2.6 *I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f:I\to\mathbb{R}$, I°'de iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a<b$, $a,b\in I^{\circ}$ ve $f''\in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde, $\rho,\lambda\in\mathbb{R}^+$, $w\in\mathbb{R}$, $\sigma(k)\in\mathbb{R}^+$ $(k\in\mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi, ayrıca $B(a,b)$ beta fonksiyonu ve*

$$
\sigma_{1,s}(k)=\sigma(k)\left[\frac{\lambda+\rho k}{(2+s)(\lambda+\rho k+s+2)}+B(2,s+1)-B(\lambda+\rho k+2,s+1)\right]
$$

olmak üzere $|f''|$ fonksiyonu ikinci anlamda $s-$konveks ise

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{2(b-a)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b)\right]\right| \\
\leq\ &\frac{(b-a)^2}{2}\mathcal{F}^{\sigma_{1,s}}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}]\left[\left|f''(a)\right|+\left|f''(b)\right|\right]
\end{aligned}
$$

dir.

İspat. Lemma 4.2.3 ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{2(b-a)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b)\right]\right| \\
\leq\ &\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1\left|t\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}]-t^{\lambda+1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]\right| \qquad (4.2.31)\\
&\left|\left[f''(ta+(1-t)b)+f''((1-t)a+tb)\right]\right|dt \\
\leq\ &\frac{(b-a)^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k(b-a)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+2)}\int_0^1\left|t-t^{\lambda+\rho k+1}\right|\left|f''(ta+(1-t)b)\right|dt \\
&+\frac{(b-a)^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k(b-a)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+2)}\int_0^1\left|t-t^{\lambda+\rho k+1}\right|\left|f''((1-t)a+tb)\right|dt
\end{aligned}
$$

yazılır. $|f''|$ fonksiyonu $s-$konveks olduğundan

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1(t-t^{\lambda+\rho k+1})\left|f''(ta+(1-t)b)\right|dt+\int_0^1(t-t^{\lambda+\rho k+1})\left|f''((1-t)a+tb)\right|dt \\
\leq\ &\left[\int_0^1 t^{1+s}(1-t^{\lambda+\rho k})dt+\int_0^1 t(1-t)^s(1-t^{\lambda+\rho k})dt\right]\left[\left|f''a)\right|+\left|f''b)\right|\right] \qquad (4.2.32)\\
=\ &\left[\frac{(\lambda+\rho k)}{(2+s)(\lambda+\rho k+s+2)}+B(2,s+1)-B(\lambda+\rho k+2,s+1)\right]\left[\left|f''a)\right|+\left|f''b)\right|\right]
\end{aligned}
$$

olur. (4.2.31) ile (4.2.32) eşitsizlikleri birleştirilerek istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.2.9 Teorem 4.2.6'da $s = 1$ olarak seçilirse $\rho, \lambda > 0,\ w \in \mathbb{R}$ ve

$$\sigma_{1,1}(k) = \sigma(k)\left[\frac{\lambda + \rho k}{2(\lambda + \rho k + 2)}\right]$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &\left|\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{2(b-a)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a) + \left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b)\right]\right| \\ \leq\ & \frac{(b-a)^2}{2}\mathcal{F}^{\sigma_{1,1}}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}]\left[\left|f''(a)\right| + \left|f''(b)\right|\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.10 Sonuç 4.2.9'da $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{b^-}f(a) + J^{\alpha}_{a^+}f(b)\right]\right| \\ \leq\ & \frac{(b-a)^2\alpha}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}\left[\left|f''(a)\right| + \left|f''(b)\right|\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ki bu eşitsizlik $\alpha \in (0, 1)$ için Dragomir ve arkadaşları [16, Teorem 2] tarafından verilen

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{b^-}f(a) + J^{\alpha}_{a^+}f(b)\right]\right| \\ \leq\ & \frac{(b-a)^2}{\alpha+1}B(2, \alpha+1)\frac{\left|f''(a)\right| + \left|f''(b)\right|}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliğinden daha iyidir.

Sonuç 4.2.11 Sonuç 4.2.10'da $\alpha = 1$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse, aynı koşullar altında, Sarıkaya ve Aktan [56, proposition 2] tarafından verilen

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)^2}{24}\left[\left|f''b)\right| + \left|f''b)\right|\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.7 *I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$, I°'de iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $a, b \in I^{\circ}$ ve $f'' \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde, $\rho, \lambda \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{R}$, $\sigma(k) \in \mathbb{R}^+$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi, ayrıca $B(a, b)$ beta fonksiyonu ve*

$$\sigma_2(k) = 2\sigma(k)\left[\frac{1}{\lambda+\rho k}B\left(\frac{p+1}{\lambda+\rho k}, p+1\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere $q > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $|f''|^q$ fonksiyonu ikinci anlamda $s-$konveks ise

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{2(b-a)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^{-};w}f\right)(a)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^{+};w}f\right)(b)\right]\right| \\
\leq\ &\frac{(b-a)^2}{2}\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}]\left[\frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{s+1}\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

dir.

İspat. Lemma 4.2.3 ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{2(b-a)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^{-};w}f\right)(a)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^{+};w}f\right)(b)\right]\right| \\
\leq\ &\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1\left|t\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}]-t^{\lambda+1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]\right| \qquad (4.2.33)\\
&\left|\left[f''(ta+(1-t)b)+f''((1-t)a+tb)\right]\right|dt \\
\leq\ &\frac{(b-a)^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k(b-a)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+2)}\int_0^1\left|t-t^{\lambda+\rho k+1}\right|\left|f''(ta+(1-t)b)\right|dt \\
&+\frac{(b-a)^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k(b-a)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+2)}\int_0^1\left|t-t^{\lambda+\rho k+1}\right|\left|f''((1-t)a+tb)\right|dt
\end{aligned}
$$

yazılır. $|f''|^q$ fonksiyonunun s-konveksliği ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 t(1-t^{\lambda+\rho k})\left[\left|f''(ta+(1-t)b)\right|+\left|f''((1-t)a+tb)\right|\right]dt \qquad (4.2.34)\\
\leq\ &\left[\int_0^1\left(t(1-t^{\lambda+\rho k})\right)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left\{\left[\int_0^1\left|f''(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left[\int_0^1\left|f''((1-t)a+tb)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \\
\leq\ &\left[\int_0^1 t^p(1-t^{\lambda+\rho k})^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[|f''(a)|^q+|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \\
=\ &2\left[\frac{1}{\lambda+\rho k}B\left(\frac{p+1}{\lambda+\rho k},p+1\right)\right]^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[|f''(a)|^q+|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $x=t^{\lambda+\rho k}$ değişken değiştirmesi yapılarak

$$
\int_0^1 t^p(1-t^{\lambda+\rho k})^p dt=\frac{1}{\lambda+\rho k}B\left(\frac{p+1}{\lambda+\rho k},p+1\right)
$$

olarak hesaplanır. Son olarak (4.2.33) ve (4.2.34) eşitsizlikleri birleştirilerek istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.2.12 Teorem 4.2.7'de $\lambda = \alpha = 1$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse Hussain ve arkadaşları [29, Theorem 10] tarafından verilen

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\
\leq \quad & \frac{(b-a)^2}{2}\left[|f''(a)|^q + |f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}} (s+1)^{-\frac{1}{q}} \left[B(p+1,p+1)\right]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.13 Teorem 4.2.7'de $s = 1$ olarak seçilirse, $B(a,b)$ Beta fonksiyonu ve

$$\sigma_2(k) = 2\sigma(k)\left[\frac{1}{(\lambda+\rho k)}B\left(\frac{p+1}{\lambda+\rho k}, p+1\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{2(b-a)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a) + \left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b)\right]\right| \\
\leq \quad & \frac{(b-a)^2}{2}\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}]\left[\frac{|f''(a)|^q + |f''(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.14 Sonuç 4.2.13'te $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse, $B(a,b)$ Beta fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{b^-}f(a) + J^{\alpha}_{a^+}f(b)\right]\right| \\
\leq \quad & \frac{(b-a)^2}{(\alpha+1)}\left[\frac{1}{\alpha}B\left(\frac{p+1}{\alpha}, p+1\right)\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f''(a)|^q + |f''(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir, bu ise Dragomir ve arkadaşlarının [16, Theorem 3] verdikleri

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{b^-}f(a) + J^{\alpha}_{a^+}f(b)\right]\right| \\
\leq \quad & \frac{(b-a)^2}{(\alpha+1)}\left[B(p+1,\alpha p+1)\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f''(a)|^q + |f''(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden daha iyidir.

Teorem 4.2.8 *I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$, I°'de iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a < b$, $a,b \in I^{\circ}$ ve $f'' \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde, $\rho,\lambda \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{R}$, $\sigma(k) \in \mathbb{R}^+$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi, ayrıca $B(a,b)$ beta fonksiyonu ve*

$$\begin{aligned}
\sigma_{3,s}(k) \quad = \quad & \sigma(k)\left[\frac{\lambda+\rho k}{2(\lambda+\rho k+2)}\right]^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left[\frac{\lambda+\rho k}{(s+2)(\lambda+\rho k+s+2)}|f''(a)|^q\right.\right. \\
& \left. + \left(B(2,s+1) - B(\lambda+\rho k+2,s+1)\right)|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$+\Bigg[(B(2,s+1)-B(\lambda+\rho k+2,s+1))\,|f''(a)|^q + \frac{\lambda+\rho k}{(s+2)(\lambda+\rho k+s+2)}|f''(b)|^q\Bigg]^{\frac{1}{q}}\Bigg\}$$

olmak üzere $q \geq 1$ için $|f''|^q$ fonksiyonu ikinci anlamda s-konveks ise

$$\left|\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{2(b-a)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b)\right]\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}\mathcal{F}^{\sigma_{3,s}}_{\rho,\lambda+2}[|w|(b-a)^{\rho}]$$

dir.

İspat. Lemma 4.2.3 ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{2(b-a)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1\left|t\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}]-t^{\lambda+1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]\right| \\
&\left|\left[f''(ta+(1-t)b)+f''((1-t)a+tb)\right]\right|dt \qquad (4.2.35)\\
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k(b-a)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+2)}\int_0^1\left|t-t^{\lambda+\rho k+1}\right|\left|f''(ta+(1-t)b)\right|dt \\
&+\frac{(b-a)^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k(b-a)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+2)}\int_0^1\left|t-t^{\lambda+\rho k+1}\right|\left|f''((1-t)a+tb)\right|dt
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $|f''|^q$ nun s-konveksliği ve Power-mean eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t\left(1-t^{\lambda+\rho k}\right)\left[\left|f''(ta+(1-t)b)\right|+\left|f''((1-t)a+tb)\right|\right]dt \qquad (4.2.36)\\
\leq\ & \left[\int_0^1(t-t^{\lambda+\rho k+1})dt\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\int_0^1\left(t-t^{\lambda+\rho k+1}\right)\left|f''(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
&+\left[\int_0^1\left(t-t^{\lambda+\rho k+1}\right)dt\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\int_0^1\left(t-t^{\lambda+\rho k+1}\right)\left|f''((1-t)a+tb)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \left[\frac{\lambda+\rho k}{2(\lambda+\rho k+2)}\right]^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\Bigg\{\left[\frac{\lambda+\rho k}{(s+2)(\lambda+\rho k+s+2)}|f''(a)|^q+(B(2,s+1)-B(\lambda+\rho k+2,s+1))\,|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \\
&+\left[(B(2,s+1)-B(\lambda+\rho k+2,s+1))\,|f''(a)|^q+\frac{\lambda+\rho k}{(s+2)(\lambda+\rho k+s+2)}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\Bigg\}
\end{aligned}$$

yazılır. (4.2.35) ile (4.2.36) eşitsizlikleri birleştirilirse

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{2(b-a)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k(b-a)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+2)}\left[\frac{\lambda+\rho k}{2(\lambda+\rho k+2)}\right]^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left\{\left[\frac{\lambda+\rho k}{(s+2)(\lambda+\rho k+s+2)}|f''(a)|^q+\left(B(2,s+1)-B(\lambda+\rho k+2,s+1)\right)|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left[\left(B(2,s+1)-B(\lambda+\rho k+2,s+1)\right)|f''(a)|^q+\frac{\lambda+\rho k}{(s+2)(\lambda+\rho k+s+2)}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \\
=\ & \frac{(b-a)^2}{2}\mathcal{F}^{\sigma_{3,s}}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}]
\end{aligned}
$$

olur, böylece istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.15 Teorem 4.2.8'de $s=1$ olarak seçilirse

$$
\begin{aligned}
\sigma_{3,1}(k) &= \sigma(k)\left[\frac{\lambda+\rho k}{2(\lambda+\rho k+2)}\right]^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left\{\left[\frac{\lambda+\rho k}{3(\lambda+\rho k+3)}|f''(a)|^q+\frac{(\lambda+\rho k)(\lambda+\rho k+5)}{6(\lambda+\rho k+2)(\lambda+\rho k+3)}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left[\frac{(\lambda+\rho k)(\lambda+\rho k+5)}{6(\lambda+\rho k+2)(\lambda+\rho k+3)}|f''(a)|^q+\frac{\lambda+\rho k}{3(\lambda+\rho k+3)}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{2(b-a)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{2}\mathcal{F}^{\sigma_{3,1}}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^{\rho}]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.16 Teorem 4.2.8'de $\lambda=\alpha=1$, $\sigma(0)=1$ ve $w=0$ olarak seçilirse klasik integraller için Hussain ve arkadaşları [29, Theorem 8] tarafından verilen

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| &\leq \frac{(b-a)^2}{2.6^{\frac{q-1}{q}}}\left[\frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{(s+2)(s+3)}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{(b-a)^2}{2.6^{\frac{q-1}{q}}}\left[B(s+2,2)\left(|f''(a)|^q+|f''(b)|^q\right)\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir .

Sonuç 4.2.17 Teorem 4.2.8'de $s=1$, $\lambda=\alpha$, $\sigma(0)=1$ ve $w=0$ olarak seçilirse, Dragomir ve arkadaşları [16, Theorem 4] tarafından verilen

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{b^-}^{\alpha}f(a)+J_{a^+}^{\alpha}f(b)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^2\alpha}{4(\alpha+1)(\alpha+2)} \\
&\left[\left(\frac{2\alpha+4}{3\alpha+9}\left|f''(a)\right|^q+\frac{\alpha+5}{3\alpha+9}\left|f''(b)\right|\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{2\alpha+4}{3\alpha+9}\left|f''(b)\right|^q+\frac{\alpha+5}{3\alpha+9}\left|f''(a)\right|\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.9 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f:I\to\mathbb{R}$, I°'de iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $a<b$, $a,b\in I^{\circ}$ ve $f''\in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde, $\rho,\lambda\in\mathbb{R}^+$, $w\in\mathbb{R}$, $\sigma(k)\in\mathbb{R}^+$ $(k\in\mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi,

$$\sigma_{4,s}(k)=\sigma(k)2^{\frac{s}{q}}\left[\frac{2}{\lambda+\rho k}B\left(\frac{p+1}{\lambda+\rho k},p+1\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere $q>1$ için $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $|f''|^q$ fonksiyonu ikinci anlamda s-konkav ise

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}[w(b-a)^{\rho}]\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{2(b-a)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}_{\rho,\lambda,b^-;w}^{\sigma}f\right)(a)+\left(\mathcal{J}_{\rho,\lambda,a^+;w}^{\sigma}f\right)(b)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{2}\mathcal{F}_{\rho,\lambda+2}^{\sigma_{4,s}}[w(b-a)^{\rho}]\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|
\end{aligned}$$

dir.

İspat. Lemma 4.2.3, üçgen eşitsizliği ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}[w(b-a)^{\rho}]\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{2(b-a)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}_{\rho,\lambda,b^-;w}^{\sigma}f\right)(a)+\left(\mathcal{J}_{\rho,\lambda,a^+;w}^{\sigma}f\right)(b)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1\left|t\mathcal{F}_{\rho,\lambda+2}^{\sigma}[w(b-a)^{\rho}]-t^{\lambda+1}\mathcal{F}_{\rho,\lambda+2}^{\sigma}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]\right| \qquad (4.2.37)\\
&\left|\left[f''(ta+(1-t)b)+f''((1-t)a+tb)\right]\right|dt \\
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k(b-a)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+2)} \\
&\times\int_0^1\left|t-t^{\lambda+\rho k+1}\right|\left[\left|f''(ta+(1-t)b)\right|+\left|f''((1-t)a+tb)\right|\right]dt \\
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k(b-a)^{\rho k}}{\Gamma(\rho k+\lambda+2)}\left[\int_0^1(t-t^{\lambda+\rho k+1})^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\left\{\left[\int_0^1\left|f''(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\int_0^1\left|f''((1-t)a+tb)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $|f''|^q$, s-konkav olduğundan

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left|f''((1-t)a+tb)\right|^q dt &\leq 2^{s-1}\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q, \\ \int_0^1 \left|f''(ta+(1-t)b)\right|^q dt &\leq 2^{s-1}\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q \end{aligned} \tag{4.2.38}$$

eşitsizlikleri yazılır. Diğer yandan Teorem 4.2.7'de olduğu gibi değişken değiştirmesi yapılarak

$$\int_0^1 (t-t^{\lambda+\rho k+1})^p dt = \frac{1}{\lambda+\rho k} B\left(\frac{p+1}{\lambda+\rho k}, p+1\right) \tag{4.2.39}$$

olur. Böylece (4.2.38) ve (4.2.39) eşitlikleri (4.2.37) ile birleştirilerek istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.18 Teorem 4.2.9'da $s=1$ olarak seçilirse

$$\sigma_{4,1}(k) = \sigma(k)2^{\frac{1}{q}}\left[\frac{2}{\lambda+\rho k} B\left(\frac{p+1}{\lambda+\rho k}, p+1\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left|\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho]\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{2(b-a)^\lambda}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a) + \left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b)\right]\right| \\ \leq\ & \frac{(b-a)^2}{2}\mathcal{F}^{\sigma_{4,1}}_{\rho,\lambda+2}[w(b-a)^\rho]\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.19 Sonuç 4.2.18'de $\lambda=\alpha$, $\sigma(0)=1$ ve $w=0$ olarak seçilirse, $B(a,b)$ Beta fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\lambda}\left[J^{\alpha}_{b^-}f(a) + J^{\alpha}_{a^+}f(b)\right]\right| \\ \leq\ & \frac{(b-a)^2}{(\alpha+1)}\left[\frac{1}{\alpha}B\left(\frac{p+1}{\alpha}, p+1\right)\right]^{\frac{1}{p}}\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca bu eşitsizlik, aynı koşullar altında, Dragomir ve arkadaşları [16, Theorem 5] tarafından verilen

$$\begin{aligned} & \left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\lambda}\left[J^{\alpha}_{b^-}f(a) + J^{\alpha}_{a^+}f(b)\right]\right| \\ \leq\ & \frac{(b-a)^2}{(\alpha+1)}B^{\frac{1}{p}}(1+p, 1+\alpha p)\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \end{aligned}$$

eşitsizliğine göre daha iyidir.

Sonuç 4.2.20 Teorem 4.2.8'de $s=1$, $\lambda=\alpha=1$, $\sigma(0)=1$ ve $w=0$ olarak seçilirse elde edilen sonuç Hussain ve arkadaşları [29, Theorem 9] tarafından verilen

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \\ \leq \; & \frac{(b-a)^2}{2}\left[B(p+1,p+1)\right]^p \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \end{aligned}$$

eşitsizliği ile aynıdır.

4.2.3 *P(I)*, *Q(I)*, *S(X,h)* ve *r*-Konveks Fonksiyon Sınıfları için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde $P(I)$, $Q(I)$, $S(X,h)$ ve r-konveks fonksiyon sınıfları için genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri yardımıyla yeni eşitsizlikler elde edilecektir.

Teorem 4.2.10 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$, $Q(I)-$sınıfına ait bir fonksiyon, $a<b$, $a,b \in I^{\circ}$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde, $\rho,\lambda \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{R}_0^+$, $\sigma(k) \in \mathbb{R}^+$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi olmak üzere

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \leq \; & \frac{2}{(b-a)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b) + \left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a)\right] \end{aligned} \tag{4.2.40}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Her $x,y \in I$ olmak üzere $f \in Q(I)$ olduğundan, Tanım 2.1.11'de $\lambda=\frac{1}{2}$ olarak seçilirse

$$f\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right) \leq \frac{f(x)}{\frac{1}{2}} + \frac{f(y)}{\frac{1}{2}} = 2\left[f(x)+f(y)\right]$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte $x=(ta+(1-t)b)$ ve $y=((1-t)a+tb)$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 2\left[f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)\right] \tag{4.2.41}$$

dir. Eşitsizliğin her iki tarafı $t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]$ ile çarpılıp t değişkenine göre $[0,1]$ üzerinden integre edilirse

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}] \\ = \; & \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]dt \\ \leq \; & 2\left[\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]f(ta+(1-t)b)dt\right. \end{aligned} \tag{4.2.42}$$

$$
\begin{aligned}
& +\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]f((1-t)a+tb)dt\Big] \\
= \; & 2\Big[\int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(b-a)^{\rho}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\rho}\right]\frac{f(x)}{b-a}dx \\
& +\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(b-a)^{\rho}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\rho}\right]\frac{f(x)}{b-a}dx\Big] \\
= \; & \frac{2}{(b-a)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a)\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.21 Teorem 4.2.10'da $\lambda = \alpha$, $\rho(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse (4.2.40) eşitsizliği (3.1.23) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.2.11 *I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$, $P(I)-$sınıfına ait bir fonksiyon, $a < b$, $a, b \in I^{\circ}$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde, $\rho, \lambda \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{R}_0^+$, $\sigma(k) \in \mathbb{R}^+$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi olmak üzere*

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) \; & \leq \; \frac{\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a)}{(b-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]} \\
& \leq \; 2\big[f(a)+f(b)\big]
\end{aligned}
\tag{4.2.43}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Her $x, y \in I$ için $f \in P(I)$ olduğundan

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq f(x)+f(y)$$

dir. Bu eşitsizlikte $x = (ta+(1-t)b)$, $y = ((1-t)a+tb)$ değişken değiştirmesi ve $\lambda = \frac{1}{2}$ seçimi yapılarak

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq [f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)] \tag{4.2.44}$$

elde edilir. Daha sonra eşitsizliğin her iki tarafı $t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]$ ile çarpılıp t değişkenine göre $[0,1]$ üzerinden integre edilirse

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}] \\
\leq \; & \frac{1}{(b-a)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a)\right]
\end{aligned}
\tag{4.2.45}
$$

dir. Böylece (4.2.43) deki birinci eşitsizlik ispatlanmış olur. $f \in P(I)$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
f(ta+(1-t)b) \; & \leq \; f(a)+f(b)\,, \\
f((1-t)a+tb) \; & \leq \; f(a)+f(b)
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa

$$f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)\leq 2[f(a)+f(b)] \tag{4.2.46}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde (4.2.46) eşitsizliğinin her iki tarafı $t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]$ ile çarpılıp t değişkenine göre $[0,1]$ üzerinden integre edilirse

$$\begin{aligned} &\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]\,[f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)]\,dt \\ \leq\;& 2[f(a)+f(b)]\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]dt \end{aligned} \tag{4.2.47}$$

olur. Daha sonra (4.2.42) te yapılan işlemlerden faydalanılarak (4.2.43) teki ikinci eşitsizlik elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.22 Teorem 4.2.11'de $\lambda=\alpha$, $\rho(0)=1$ ve $w=0$ olarak seçilirse (4.2.43) eşitsizliği (3.1.24) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.2.12 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f:I\to\mathbb{R}$ pozitif fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde $r-$konveks, $a<b$, $a,b\in I^{\circ}$ ve $0<r\leq 1$ için $f\in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde, $\rho,\lambda\in\mathbb{R}^{+}$, $w\in\mathbb{R}^{+}_{0}$, $\sigma(k)\in\mathbb{R}^{+}$ $(k\in\mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi ve

$$\begin{aligned} \sigma_1(k) &:= \sigma(k)\frac{1}{\rho k+\lambda+\frac{1}{r}}\,, \\ \sigma_2(k) &:= \sigma(k)B\left(\rho k+\lambda,\frac{r+1}{r}\right) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(b-a)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^{+};w}f\right)(b)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^{-};w}f\right)(a)\right] \\ \leq\;& \left\{\left[\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}]\right]^{r}[f(a)]^{r}+\left[\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}]\right]^{r}[f(b)]^{r}\right\}^{\frac{1}{r}} \\ &+\left\{\left[\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}]\right]^{r}[f(a)]^{r}+\left[\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}]\right]^{r}[f(b)]^{r}\right\}^{\frac{1}{r}} \end{aligned} \tag{4.2.48}$$

dir.

İspat. Her $t\in[0,1]$ olmak üzere $r>0$ için f fonksiyonu r-konveks olduğundan

$$\begin{aligned} f(ta+(1-t)b) &\leq \left(t[f(a)]^{r}+(1-t)[f(b)]^{r}\right)^{\frac{1}{r}}\;; \\ f((1-t)a+tb) &\leq \left((1-t)[f(a)]^{r}+t[f(b)]^{r}\right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanıp daha sonra her iki tarafı $t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]$ ile çarpılarak t değişkenine göre $[0,1]$ üzerinden integre edilirse

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]\left[f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)\right]dt \qquad (4.2.49)\\ \leq & \int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]\Big(t[f(a)]^r+(1-t)[f(b)]^r\Big)^{\frac{1}{r}}dt\\ & +\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]\Big((1-t)[f(a)]^r+t[f(b)]^r\Big)^{\frac{1}{r}}dt \end{aligned}$$

elde edilir. Minkowski eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]\Big(t[f(a)]^r+(1-t)[f(b)]^r\Big)^{\frac{1}{r}}dt \qquad (4.2.50)\\ \leq & \left\{\left(\int_0^1 t^{\lambda-1+\frac{1}{r}}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}][f(a)]dt\right)^r\right.\\ & \left.+\left(\int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{\frac{1}{r}}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}][f(b)]dt\right)^r\right\}^{\frac{1}{r}}\\ = & \left\{\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)[w^k(b-a)^{\rho k}]}{\Gamma(\rho k+\lambda)}\int_0^1 t^{\lambda+\rho k+\frac{1}{r}-1}[f(a)]dt\right)^r\right.\\ & \left.+\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)[w^k(b-a)^{\rho k}]}{\Gamma(\rho k+\lambda)}\int_0^1 t^{\lambda+\rho k-1}(1-t)^{\frac{1}{r}}[f(b)]dt\right)^r\right\}^{\frac{1}{r}}\\ = & \left\{\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)[w^k(b-a)^{\rho k}]}{\Gamma(\rho k+\lambda)}\frac{1}{\rho k+\lambda+\frac{1}{r}}[f(a)]\right)^r\right.\\ & \left.+\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)[w^k(b-a)^{\rho k}]}{\Gamma(\rho k+\lambda)}B\left(\rho k+\lambda,\frac{r+1}{r}\right)[f(b)]\right)^r\right\}^{\frac{1}{r}}\\ = & \left\{\left[\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}]\right]^r[f(a)]^r+\left[\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}]\right]^r[f(b)]^r\right\}^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]\Big((1-t)[f(a)]^r+t[f(b)]^r\Big)^{\frac{1}{r}}dt \qquad (4.2.51)\\ \leq & \left\{\left[\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}]\right]^r[f(a)]^r+\left[\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}]\right]^r[f(b)]^r\right\}^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]\left[f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)\right]dt \qquad (4.2.52)\\ = & \frac{1}{(b-a)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a)\right] \end{aligned}$$

olduğundan (4.2.50)-(4.2.52) eşitsizlikleri (4.2.49) eşitsizliğinde yerine yazılarak istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.2.23 Teorem 4.2.12'de $\lambda = \alpha$, $\rho(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse (4.2.48) eşitsizliği (3.1.26) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.2.13 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$, $SX(h, I)-$sınıfına ait bir fonksiyon, $a < b$, $a, b \in I^\circ$ ve $f \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde, $\rho, \lambda \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{R}_0^+$, $\sigma(k) \in \mathbb{R}^+$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi ve

$$\sigma_3(k) := \sigma(k) \int_0^1 t^{\rho k+\lambda-1}[h(t) + h(1-t)]dt$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho]}{h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{(b-a)^\lambda}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b) + \left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a)\right] \\ &\leq [f(a) + f(b)]\left(\mathcal{F}^{\sigma_3}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^\rho]\right) \end{aligned} \tag{4.2.53}$$

dir.

İspat. Tanım 2.1.15'te $h-$konveks fonksiyonlar için verilen

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y)$$

eşitsizliğinde $x = ta + (1-t)b$, $y = (1-t)a + tb$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq h\left(\frac{1}{2}\right) f(ta + (1-t)b) + h\left(\frac{1}{2}\right) f((1-t)a + tb) \\ &= h\left(\frac{1}{2}\right)[f(ta + (1-t)b + f((1-t)a + tb))] \end{aligned} \tag{4.2.54}$$

olur. (4.2.54) eşitsizliğinin her iki tarafı $t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^\rho t^\rho]$ ile çarpılıp t değişkenine göre $[0, 1]$ üzerinden integre edilirse

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^\rho t^\rho]dt \\ \leq\ & h\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^\rho t^\rho]f(ta + (1-t)b)dt \\ & +h\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^\rho t^\rho]f((1-t)a + tb)dt \end{aligned} \tag{4.2.55}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^\rho] \\ \leq\ & h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(b-a)^\lambda}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f\right)(b) + \left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f\right)(a)\right] \end{aligned} \tag{4.2.56}$$

yazılır ve birinci eşitsizlik ispatlanmış olur. $f \in SX(h, I)$ olduğundan

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y)$$

ve

$$f((1-t)x+ty) \leq h(1-t)f(x)+h(t)f(y).$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa

$$f(tx+(1-t)y)+f((1-t)x+ty) \leq [h(t)+h(1-t)][f(x)+f(y)] \tag{4.2.57}$$

olur. Daha sonra $x=a$ ve $y=b$ olarak alınırsa

$$f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb) \leq [h(t)+h(1-t)][f(a)+f(b)] \tag{4.2.58}$$

yazılır. Benzer şekilde (4.2.58) eşitsizliğinin her iki tarafı $t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]$ ile çarpılıp t değişkenine göre $[0,1]$ üzerinden intege edilirse

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]f(ta+(1-t)b)dt \\ & + \int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}]f((1-t)a+tb)dt \\ \leq \; & [f(a)+f(b)]\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}][h(t)+h(1-t)]dt \end{aligned} \tag{4.2.59}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(b-a)^{\lambda}}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^{+};w}f\right)(b)+\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^{-};w}f\right)(a)\right] \\ \leq \; & [f(a)+f(b)]\int_0^1 t^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}t^{\rho}][h(t)+h(1-t)]dt \\ = \; & [f(a)+f(b)]\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)[w^{k}(b-a)^{\rho k}]}{\Gamma(\rho k+\lambda)}\int_0^1 t^{\rho k+\lambda-1}[h(t)+h(1-t)]dt\right) \\ = \; & [f(a)+f(b)]\left(\mathcal{F}^{\sigma_3}_{\rho,\lambda}[w(b-a)^{\rho}]\right) \end{aligned} \tag{4.2.60}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.1 Teorem 4.2.13'te $\lambda=\alpha$, $\rho(0)=1$ ve $w=0$ olarak seçilirse (4.2.53) eşitsizliği (3.1.25) eşitsizliğine indirgenir.

4.3 Genelleştirilmiş k-Kesirli İntegraller Yardımıyla Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde genelleştirilmiş $k-$kesirli integral operatörünün yardımıyla yeni özdeşlik ve eşitsizlikler elde edilecektir.

I, $\mathbb{R}$ de bir aralık $[a,b] \subset I$ $(0 < a < b < \infty)$ ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $f \in L^{\infty}[a,b]$ olmak üzere $\mathcal{I}^{\alpha}_{a+,g}f(x)$ ve $\mathcal{I}^{\alpha}_{b-,g}f(x)$ iyi tanımlı olsun. Bu durumda

$$\tilde{f}(x) := f(a+b-x), \qquad x \in [a,b] \tag{4.3.1}$$

ve

$$F(x) := f(x) + f(a+b-x) = f(x) + \tilde{f}(x), \qquad x \in [a,b] \tag{4.3.2}$$

fonksiyonları tanımlansın. Aşağıda tanımlı fonksiyonlar bu bölüm boyunca ispatlarda kullanılacaktır.

$$\Delta^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s) := \left[g(b) - g\left(\frac{s}{2}a + \frac{2-s}{2}b\right)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m}; \tag{4.3.3}$$

$$\Omega^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s) := \left[g\left(\frac{s}{2}b + \frac{2-s}{2}a\right) - g(a)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m}; \tag{4.3.4}$$

$$\varphi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(s) := \left[g(b) - g\left(\frac{s}{2}a + \frac{2-s}{2}b\right)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}} \mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}\left[w\left(g(b) - g\left(\frac{s}{2}a + \frac{2-s}{2}b\right)\right)^{\rho}\right]; \tag{4.3.5}$$

$$\Phi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(s) := \left[g\left(\frac{s}{2}b + \frac{2-s}{2}a\right) - g(a)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}} \mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}\left[w\left(g\left(\frac{s}{2}b + \frac{2-s}{2}a\right) - g(a)\right)^{\rho}\right] \tag{4.3.6}$$

Özel olarak (4.3.5) ve (4.3.6) eşitliklerinde $s = 1$ seçilirse

$$\varphi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(1) = \left[g(b) - g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}} \mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}\left[w\left(g(b) - g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^{\rho}\right]; \tag{4.3.7}$$

$$\Phi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(1) = \left[g\left(\frac{a+b}{2}\right) - g(a)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}} \mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}\left[w\left(g\left(\frac{a+b}{2}\right) - g(a)\right)^{\rho}\right] \tag{4.3.8}$$

dir.

Bu bölümdeki integral alma işlemlerinin kolay anlaşılması açısından $k-$gamma fonksiyonunun $\Gamma_{\mathtt{k}}(x) = \mathtt{k}^{\frac{x}{\mathtt{k}}-1}\Gamma\left(\frac{x}{\mathtt{k}}\right)$ olarak verilen özelliğinin kullanımı ve integral alma işlemleri ile ilgili örnekler aşağıdaki gibi verilecektir.

Örnek 4.3.1

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{\mathtt{k}}(\rho k m + \lambda + k) \\
&= k^{\left(\frac{\rho k m+\lambda+k}{k}\right)-1}\Gamma\left(\frac{\rho k m + \lambda + k}{k}\right) \\
&= k^{\frac{\rho k m+\lambda}{k}}\Gamma\left(\frac{\rho k m + \lambda}{k} + 1\right) \\
&= k^{\frac{\rho k m+\lambda}{k}}\frac{\rho k m + \lambda}{k}\Gamma\left(\frac{\rho k m + \lambda}{k}\right) \\
&= (\rho k m + \lambda)\left[k^{\frac{\rho k m+\lambda}{k}-1}\Gamma\left(\frac{\rho k m + \lambda}{k}\right)\right] \\
&= (\rho k m + \lambda)\Gamma_{\mathtt{k}}(\rho k m + \lambda)
\end{aligned}$$

dir.

Örnek 4.3.2

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b (x-a)^{\frac{\lambda}{k}-1}\mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda}\left[w(x-a)^{\rho}\right]^m dx\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sigma(m)}{\mathtt{k}\Gamma_{\mathtt{k}}(\rho k m+\lambda)}\left[w\right]^m\int_a^b (x-a)^{\frac{\lambda}{k}+\rho m-1}dx\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sigma(m)w^m}{\mathtt{k}\Gamma_{\mathtt{k}}(\rho k m+\lambda)}\frac{(b-a)^{\frac{\lambda}{k}+\rho m}}{\frac{\lambda}{k}+\rho m}\\
&= k(b-a)^{\frac{\lambda}{k}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sigma(m)\left[w(b-a)^{\rho}\right]^m}{\mathtt{k}\Gamma_{\mathtt{k}}(\rho k m+\lambda+k)}\\
&= k(b-a)^{\frac{\lambda}{k}}\mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+k}\left[w(b-a)^{\rho}\right]^m.
\end{aligned}
$$

(3.4.13), (3.4.14), (3.4.15), (4.3.1), (4.3.2) ve (4.3.7) ile verilen tanımlar kullanılarak genelleştirilmiş k-kesirli integraller yardımıyla Teorem 3.4.2'de verilen Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir başka versiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 4.3.1 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde pozitif, monoton ve artan, (a,b) üzerinde sürekli $g'(x)$ türevine sahip olsun. Bu takdirde $\mathtt{k}$, ρ, $\lambda\in\mathbb{R}^+$, $w\in\mathbb{R}_0^+$ ve $\sigma(m)\in\mathbb{R}^+$ $(m\in\mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi olmak üzere f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2\mathtt{k}\left[\varphi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(1)+\Phi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(1)\right]}\\
&\quad\times\left[\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^-;w}F(a)+\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^+;w}F(b)\right]\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}
\end{aligned}
\tag{4.3.9}
$$

dir.

İspat. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks olduğundan

$$
f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}\quad (x,\,y\in[a,b])
\tag{4.3.10}
$$

dır. $s\in[0,1]$ için

$$
x=\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\quad\text{ve}\quad y=\frac{2-s}{2}a+\frac{s}{2}b
$$

nin $[a,b]$ aralığında olduğu açıkça görülebilir. Bu durumda (4.3.10) eşitsizliği

$$
2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq f\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)+f\left(\frac{2-s}{2}a+\frac{s}{2}b\right)\quad (s\in[0,1])
\tag{4.3.11}
$$

şeklinde yazılabilir. ilk olarak (4.3.11) eşitsizliğinin her iki tarafı

$$
\frac{b-a}{2}\frac{g'\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)}{\left[g(b)-g\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)\right]^{1-\frac{\lambda}{\mathtt{k}}}}\mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda}\left[w\left(g(b)-g\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)\right)^{\rho}\right]
$$

ile çarpılıp s değişkenine göre $[0,1]$ üzerinden integre edilir ve daha sonra elde edilen ifade de $t=\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} 2\mathtt{k}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\varphi_{\rho,\lambda}^{\sigma,\mathtt{k},g}(1) &\leq \mathcal{J}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+};w}^{\sigma,\mathtt{k},g} f(b)+\mathcal{J}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+};w}^{\sigma,\mathtt{k},g} \tilde{f}(b) \\ &= \mathcal{J}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+};w}^{\sigma,\mathtt{k},g} F(b) \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

elde edilir. Benzer şekilde eşitsizliğinin her iki tarafı

$$\frac{b-a}{2}\frac{g'\left(\frac{s}{2}b+\frac{2-s}{2}a\right)}{\left[g\left(\frac{s}{2}b+\frac{2-s}{2}a\right)-g(a)\right]^{1-\frac{\lambda}{\mathtt{k}}}}\mathcal{F}_{\rho,\lambda}^{\sigma,\mathtt{k}}\left[w\left(g\left(\frac{s}{2}b+\frac{2-s}{2}a\right)-g(a)\right)^{\rho}\right]$$

ile çarpılıp s değişkenine göre $[0,1]$ üzerinden integre edilir ve daha sonra elde edilen ifadede $t=\frac{s}{2}b+\frac{2-s}{2}a$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} 2\mathtt{k}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\Phi_{\rho,\lambda}^{\sigma,\mathtt{k},g}(1) &\leq \mathcal{J}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-};w}^{\sigma,\mathtt{k},g} f(a)+\mathcal{J}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-};w}^{\sigma,\mathtt{k},g} \tilde{f}(a) \\ &= \mathcal{J}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-};w}^{\sigma,\mathtt{k},g} F(a) \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

olur. (4.3.12) ve (4.3.13) eşitlikleri taraf tarafa toplanarak

$$\begin{aligned} &2\mathtt{k}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\varphi_{\rho,\lambda}^{\sigma,\mathtt{k},g}(1)+\Phi_{\rho,\lambda}^{\sigma,\mathtt{k},g}(1)\right] \\ &\leq \mathcal{J}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-};w}^{\sigma,\mathtt{k},g} F(a)+\mathcal{J}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+};w}^{\sigma,\mathtt{k},g} F(b) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece (4.3.9) daki birinci eşitsizlik ispatlanmış olur.

İkinci eşitsizliğin ispatı için f fonksiyonunun $[a,b]$ üzerindeki konveksliği kullanılarak

$$f\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)\leq\frac{s}{2}f(a)+\frac{2-s}{2}f(b)\quad(s\in[0,1])$$

ve

$$f\left(\frac{s}{2}b+\frac{2-s}{2}a\right)\leq\frac{s}{2}f(b)+\frac{2-s}{2}f(a)\quad(s\in[0,1])$$

yazılır. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$f\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)+f\left(\frac{2-s}{2}a+\frac{s}{2}b\right)\leq f(a)+f(b)\quad(s\in[0,1]) \tag{4.3.14}$$

olur. (4.3.14) eşitsizliğinin her iki tarafı

$$\frac{b-a}{2}\frac{g'\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)}{\left[g(b)-g\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)\right]^{1-\frac{\lambda}{\mathtt{k}}}}\mathcal{F}_{\rho,\lambda}^{\sigma,\mathtt{k}}\left[w\left(g(b)-g\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)\right)^{\rho}\right]$$

ile çarpılıp s değişkenine göre $[0,1]$ üzerinde integre edilirse

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+};w}^{\sigma,\mathtt{k},g} f(b)+\mathcal{J}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+};w}^{\sigma,\mathtt{k},g} \tilde{f}(b) &= \mathcal{J}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+};w}^{\sigma,\mathtt{k},g} F(b) \\ &\leq \mathtt{k}\,\varphi_{\rho,\lambda}^{\sigma,\mathtt{k},g}(1)\left(f(a)+f(b)\right) \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

bulunur. Benzer şekilde (4.3.14) eşitsizliğinin her iki tarafı

$$\frac{b-a}{2}\frac{g'\left(\frac{s}{2}b+\frac{2-s}{2}a\right)}{\left[g\left(\frac{s}{2}b+\frac{2-s}{2}a\right)-g(a)\right]^{1-\frac{\lambda}{\mathtt{k}}}}\mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda}\left[w\left(g\left(\frac{s}{2}b\frac{2-s}{2}a\right)-g(a)\right)^{\rho}\right]$$

ile çarpılıp s değişkenine göre $[0,1]$ üzerinden integre edilirse

$$\begin{aligned}&\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-};w}f(a)+\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-};w}\tilde{f}(a)=\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-};w}F(a)\\&\leq\mathtt{k}\Phi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(1)\left(f(a)+f(b)\right)\end{aligned}\tag{4.3.16}$$

olur. (4.3.15) ve (4.3.16) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}&\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-};w}F(a)+\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+};w}F(b)\\&\leq\mathtt{k}\left[\varphi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(1)+\Phi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(1)\right]\left(f(a)+f(b)\right)\end{aligned}\tag{4.3.17}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.1 Teorem 4.3.1'de $\mathtt{k}=1$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}f\left(\frac{a+b}{2}\right)&\leq\frac{1}{2\left[\varphi^{\sigma,1,g}_{\rho,\lambda}(1)+\Phi^{\sigma,1,g}_{\rho,\lambda}(1)\right]}\left[\mathcal{J}^{\sigma,1,g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-};w}F(a)+\mathcal{J}^{\sigma,1,g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+};w}F(b)\right]\\&\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}\end{aligned}\tag{4.3.18}$$

elde edilir. Ayrıca Sonuç 4.3.1'de $\lambda=\alpha$, $\sigma(0)=1$ ve $w=0$ olarak seçilirse Jleli ve Samet [31] tarafından (3.4.9) ile verilen Hermite-Hadamard eşitsizliğinin yeni bir versiyonu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 4.3.2 Teorem 4.3.1'de $\lambda=\alpha$, $\sigma(0)=1$ ve $w=0$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}f\left(\frac{a+b}{2}\right)&\leq\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left(\left[g(b)-g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]^{\alpha}+\left[g\left(\frac{a+b}{2}\right)-g(a)\right]^{\alpha}\right)}\left[\mathcal{I}^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}+;g}F(b)+\mathcal{I}^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}-;g}F(a)\right]\\&\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}\end{aligned}\tag{4.3.19}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.3.3 Sonuç 4.3.1'de $g(t)=t$ olarak seçilirse elde edilen sonuç, Budak ve arkadaşları [12, corollary 1] tarafından elde edilen (3.3.17) eşitsizliğinin $s=1$ özel durumu için elde edilen sonucu ile aynıdır.

Sonuç 4.3.4 Teorem 4.3.1'in koşulları altında $k=1$, $g(t)=t$, $\lambda=\alpha$, $\sigma(0)=1$ ve $w=0$ olarak seçilirse (4.3.9) eşitsizliği (3.1.4) eşitsizliğine indirgenir.

Bundan sonraki kısımda (4.3.5)-(4.3.8) de verilen fonksiyonları içeren integral eşitsizlikleri aşağıdaki lemma yardımıyla verilecektir.

Lemma 4.3.1 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde monoton, pozitif ve artan; (a,b) üzerinde sürekli $g'(x)$ türevine sahip olsun. Ayrıca $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde diferensiyellenebilir öyleki $f'\in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde $\mathtt{k}$, ρ, $\lambda\in\mathbb{R}^+$, $w\in\mathbb{R}_0^+$ ve $\sigma(m)\in\mathbb{R}^+$ $(m\in\mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\mathtt{k}}\left[\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^+;w}F(b)+\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^-;w}F(a)\right]-\left(\varphi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(1)+\Phi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(1)\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\
&=\frac{b-a}{4}\left[\int_0^1\left(\varphi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(s)+\Phi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(s)\right)f'\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)ds\right.\\
&\qquad\left.-\int_0^1\left(\varphi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(s)+\Phi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(s)\right)f'\left(\frac{s}{2}b+\frac{2-s}{2}a\right)ds\right]
\end{aligned}\tag{4.3.20}$$

dir.

İspat. (3.4.14) eşitliği ile verilen sol taraflı genelleştirilmiş $k-$kesirli integral tanımında $x=b$ için

$$t=\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\quad(0\le s\le 1)$$

değişken değiştirmesi yapılarak

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^+;w}F(b)&=\frac{b-a}{2}\int_0^1\frac{g'\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)}{\left[g(b)-g\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)\right]^{1-\frac{\lambda}{\mathtt{k}}}}\\
&\times\mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda}\left[w\left(g(b)-g\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)\right)^\rho\right]F\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)ds
\end{aligned}\tag{4.3.21}$$

elde edilir. Kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^+;w}F(b)\\
=\;&\mathtt{k}\left[g(b)-g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}}\mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}\left[w\left(g(b)-g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^\rho\right]F\left(\frac{a+b}{2}\right)\\
&+\frac{b-a}{2}\mathtt{k}\int_0^1\left[g(b)-g\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}}\mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}\left[w\left(g(b)-g\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)\right)^\rho\right]\\
&\times F'\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)ds
\end{aligned}\tag{4.3.22}$$

yazılır. Benzer şekilde (3.4.15) eşitliği ile verilen sağ taraflı genelleştirilmiş k-kesirli integral tanımında $x=a$ için

$$t=\frac{s}{2}b+\frac{2-s}{2}a\quad(0\le s\le 1)$$

değişken değiştirmesi yapılarak ve kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak

$$\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^-;w}F(a) \tag{4.3.23}$$
$$\begin{aligned}
= {} & \mathtt{k}\left[g\left(\frac{a+b}{2}\right)-g(a)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}}\mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}\left[w\left(g\left(\frac{a+b}{2}\right)-g(a)\right)^{\rho}\right]F\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
& -\frac{b-a}{2}\mathtt{k}\int_0^1\left(g\left(\frac{s}{2}b+\frac{2-s}{2}a\right)-g(a)\right)^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}}\mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}\left[w\left(g\left(\frac{s}{2}b+\frac{2-s}{2}a\right)-g(a)\right)^{\rho}\right] \\
& \times F'\left(\frac{s}{2}b+\frac{2-s}{2}a\right)ds
\end{aligned}$$

elde edilir. $x\in[a,b]$ olmak üzere $F(x):=f(x)+f(a+b-x)=f(x)+\tilde{f}(x)$ eşitliği (4.3.22) ve (4.3.23) eşitliklerinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\mathtt{k}}\left[\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^+;w}F(b)+\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^-;w}F(a)\right] \\
= {} & \left[g(b)-g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}}\mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}\left[w\left(g(b)-g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^{\rho}\right]f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
& +\left[g\left(\frac{a+b}{2}\right)-g(a)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}}\mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}\left[w\left(g\left(\frac{a+b}{2}\right)-g(a)\right)^{\rho}\right]f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
& +\frac{b-a}{4}\int_0^1\left[g(b)-g\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}}\mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}\left[w\left(g(b)-g\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)\right)^{\rho}\right] \\
& \times F'\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)ds \qquad (4.3.24) \\
& -\frac{b-a}{4}\int_0^1\left(g\left(\frac{s}{2}b+\frac{2-s}{2}a\right)-g(a)\right)^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}}\mathcal{F}^{\sigma,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}\left[w\left(g\left(\frac{s}{2}b+\frac{2-s}{2}a\right)-g(a)\right)^{\rho}\right] \\
& \times F'\left(\frac{s}{2}b+\frac{2-s}{2}a\right)ds
\end{aligned}$$

bulunur. $F'(x)=f'(x)-f'(a+b-x)$ eşitliği dikkate alınarak (4.3.5)-(4.3.8) eşitlikleri (4.3.24) eşitliğinde kullanılırsa istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.3.5 Lemma 4.3.1'de $\mathtt{k}=1$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}
& \mathcal{J}^{\sigma,1,g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^+;w}F(b)+\mathcal{J}^{\sigma,1,g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^-;w}F(a)-2\left(\varphi^{\sigma,1,g}_{\rho,\lambda}(1)+\Phi^{\sigma,1,g}_{\rho,\lambda}(1)\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
& =\frac{b-a}{2}\left[\int_0^1\left(\varphi^{\sigma,1,g}_{\rho,\lambda}(s)+\Phi^{\sigma,1,g}_{\rho,\lambda}(s)\right)f'\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)ds\right. \qquad (4.3.25) \\
& \quad\left.-\int_0^1\left(\varphi^{\sigma,1,g}_{\rho,\lambda}(s)+\Phi^{\sigma,1,g}_{\rho,\lambda}(s)\right)f'\left(\frac{s}{2}b+\frac{2-s}{2}a\right)ds\right]
\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 4.3.6 $\mathcal{I}^{\alpha}_{a+;g}f(x)$ ve $\mathcal{I}^{\alpha}_{b-;g}f(x)$ sırasıyla (3.4.5) ve (3.4.6) daki gibi olmak üzere Lemma 4.3.1'de $\alpha>0$ için $\mathtt{k}=1$, $\lambda=\alpha$, $\sigma(0)=1$, $w=0$ olarak seçilirse

$$
\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\left[\mathcal{I}^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+};g}F(b)+\mathcal{I}^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-};g}F(a)\right] \qquad (4.3.26)\\
& -\left(\left[g(b)-g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]^{\alpha}+\left[g\left(\frac{a+b}{2}\right)-g(a)\right]^{\alpha}\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\
= \; & \frac{b-a}{4}\Bigg\{\int_0^1\left(\left[g(b)-g\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)\right]^{\alpha}+\left[\left(g\left(\frac{s}{2}b+\frac{2-s}{2}a\right)-g(a)\right)\right]^{\alpha}\right)\\
& \times f'\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)ds\\
& -\int_0^1\left(\left[g(b)-g\left(\frac{s}{2}a+\frac{2-s}{2}b\right)\right]^{\alpha}+\left[\left(g\left(\frac{s}{2}b+\frac{2-s}{2}a\right)-g(a)\right)\right]^{\alpha}\right)\\
& \times f'\left(\frac{s}{2}b+\frac{2-s}{2}a\right)ds\Bigg\}
\end{aligned}
$$

eşitliği geçerlidir.

Sonuç 4.3.7 Lemma 4.3.1'de $\mathtt{k}=1$ ve $g(t)=t$ olarak seçilirse (4.3.20) eşitliği (3.3.17) eşitliğine indirgenir. Ayrıca $\mathtt{k}=1$, $\lambda=\alpha$, $g(t)=t$, $\sigma(0)=1$ ve $w=0$ olarak seçilirse (3.1.6) eşitliğine indirgenir.

Teorem 4.3.2 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde monoton, pozitif ve artan; (a,b) üzerinde sürekli $g'(x)$ türevine sahip olsun. Ayrıca $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $(a<b)$ (a,b) üzerinde diferensiyellenebilir öyleki $f'\in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde $\mathtt{k}$, ρ, $\lambda\in\mathbb{R}^{+}$, $w\in\mathbb{R}_0^{+}$, $\sigma(m)\in\mathbb{R}^{+}$ $(m\in\mathbb{N}_0)$ ise sınırlı bir dizi ve

$$
\sigma_1(m):=\sigma(m)\int_0^1\left(\Delta^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)+\Omega^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\right)ds \qquad (4.3.27)
$$

olmak üzere $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\mathtt{k}}\left[\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+};w}F(b)+\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-};w}F(a)\right]-\left(\varphi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(1)+\Phi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(1)\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\\
&\quad\le\frac{b-a}{4}\left(\mathcal{F}^{\sigma_1,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}[w]\right)\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right)
\end{aligned}
\qquad (4.3.28)
$$

dir.

İspat. (4.3.20) eşitliğinin sol tarafına kısaca $\mathcal{L}$ denilsin. g fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde artan, $|f'|$ fonksiyonu ise $[a,b]$ üzerinde konveks olduğundan Lemma 4.3.1 de mutlak değerin özellikleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{L}| \leq \frac{b-a}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sigma(m)\, w^m}{\mathtt{k}\Gamma_{\mathtt{k}}(\rho m \mathtt{k}+\lambda+\mathtt{k})} \\
\times\Bigg\{ \int_0^1 \left[g(b) - g\left(\frac{s}{2}a + \frac{2-s}{2}b\right)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m} \left(\frac{s}{2}|f'(a)| + \frac{2-s}{2}|f'(b)|\right) ds \\
+ \int_0^1 \left[g(b) - g\left(\frac{s}{2}a + \frac{2-s}{2}b\right)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m} \left(\frac{s}{2}|f'(b)| + \frac{2-s}{2}|f'(a)|\right) ds \\
+ \int_0^1 \left(g\left(\frac{s}{2}b + \frac{2-s}{2}a\right) - g(a)\right)^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m} \left(\frac{s}{2}|f'(b)| + \frac{2-s}{2}|f'(a)|\right) ds \\
+ \int_0^1 \left(g\left(\frac{s}{2}b + \frac{2-s}{2}a\right) - g(a)\right)^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m} \left(\frac{s}{2}|f'(a)| + \frac{2-s}{2}|f'(b)|\right) ds \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{4.3.29}
$$

yazılır.

$$
\frac{s}{2}|f'(b)| + \frac{2-s}{2}|f'(a)| + \frac{s}{2}|f'(a)| + \frac{2-s}{2}|f'(b)| = |f'(a)| + |f'(b)|
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{L}| &\leq \frac{b-a}{4}\left(|f'(a)| + |f'(b)|\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sigma(m)\, w^m}{\mathtt{k}\Gamma_{\mathtt{k}}(\rho m \mathtt{k}+\lambda+\mathtt{k})} \\
&\quad \times \int_0^1 \left[\left(g(b) - g\left(\frac{s}{2}a + \frac{2-s}{2}b\right)\right)^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m} + \left(g\left(\frac{s}{2}b + \frac{2-s}{2}a\right) - g(a)\right)^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m}\right] ds \\
&= \frac{b-a}{4}\left(|f^{'}(a)| + |f^{'}(b)|\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{\mathtt{k}\Gamma_{\mathtt{k}}(\rho m \mathtt{k}+\lambda+\mathtt{k})}\, \sigma(m) \int_0^1 \left(\Delta^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s) + \Omega^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\right) ds \\
&= \frac{b-a}{4}\left(|f^{'}(a)| + |f^{'}(b)|\right) \mathcal{F}^{\sigma_1,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}[w]
\end{aligned}
$$

elde edilir ve istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.3.8 Teorem 4.3.2 ile aynı koşullar altında $k = 1$, $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilsin. Bu takdirde

$$
\eta^{\alpha}_{a,b;g} := \left(\left[g(b) - g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]^{\alpha} + \left[g\left(\frac{a+b}{2}\right) - g(a)\right]^{\alpha}\right) \tag{4.3.30}
$$

ve

$$
\Upsilon^{\alpha}_{a,b;g} := \int_0^1 \left[\left(g(b) - g\left(\frac{s}{2}a + \frac{2-s}{2}b\right)\right)^{\alpha} + \left(g\left(\frac{s}{2}b + \frac{2-s}{2}a\right) - g(a)\right)^{\alpha}\right] ds \tag{4.3.31}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\left[\mathcal{I}^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+;g} F(b) + \mathcal{I}^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-;g} F(a)\right] - \eta^{\alpha}_{a,b;g}\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\
&\qquad \leq \frac{b-a}{4}\, \Upsilon^{\alpha}_{a,b;g}\, \left(|f'(a)| + |f'(b)|\right)
\end{aligned}
\tag{4.3.32}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

Sonuç 4.3.9 Teorem 4.3.2'de $k=1$ ve $g(t)=t$ olarak seçilirse (4.3.28) eşitsizliği Budak ve arkadaşlarının [12, Corollary 3] konveks $|f'|$ fonksiyonu için verdikleri

$$\begin{aligned} &\left| \frac{2^{\lambda-1}}{(b-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(\frac{b-a}{2})^{\rho}]} \left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-};w} f(a) + \mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+};w} f(b) \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ = \; & \frac{(b-a)\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}[w(\frac{b-a}{2})^{\rho}]}{4\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(\frac{b-a}{2})^{\rho}]} (|f^{'}(a)| + |f^{'}(b)|) \end{aligned}$$

eşitsizliğe indirgenir. Ayrıca Teorem 4.3.2'de $k=1$, $\lambda=\alpha$, $\sigma(0)=1$, $w=0$ ve $g(t)=t$ olarak seçilirse elde edilen sonuç Teorem 3.1.4'in $q=1$ özel durumu için elde edilen sonucu ile aynıdır.

Teorem 4.3.3 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde pozitif, monoton ve artan; (a,b) üzerinde sürekli $g'(x)$ türevine sahip olsun. Ayrıca, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $(a<b)$ (a,b) üzerinde diferensiyellenebilir öyleki $f'\in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde $\mathtt{k}$, ρ, $\lambda\in\mathbb{R}^{+}$, $w\in\mathbb{R}^{+}_{0}$, $\sigma(m)\in\mathbb{R}^{+}$ $(m\in\mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi ve

$$\sigma_2(m) := \sigma(m)\left(\left[\int_0^1 \left(\Delta^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\right)^p ds\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_0^1 \left(\Omega^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\right)^p ds\right]^{\frac{1}{p}}\right)$$

olmak üzere $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2\mathtt{k}} \left[\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+};w} F(b) + \mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-};w} F(a) \right] - \left(\varphi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(1) + \Phi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(1)\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ \leq \; & \frac{b-a}{4}\mathcal{F}^{\sigma_2,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}[w] \left[\left(\frac{1}{4}|f'(a)|^q + \frac{3}{4}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3}{4}|f'(a)|^q + \frac{1}{4}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned} \tag{4.3.33}$$

dir.

İspat. Lemma 4.3.1, $|f'|^q$ fonksiyonunun konveksliği ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$|\mathcal{L}| \leq \frac{b-a}{4}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sigma(m)\, w^m}{\mathtt{k}\Gamma_{\mathtt{k}}(\rho m\mathtt{k}+\lambda+\mathtt{k})} \left(\sum_{j=1}^{4} \mathcal{I}_j\right)$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada

$$\mathcal{I}_1 := \left(\int_0^1 \left[g(b) - g\left(\frac{s}{2}a + \frac{2-s}{2}b\right)\right]^{p(\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m)} ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{s}{2}|f'(a)|^q + \frac{2-s}{2}|f'(b)|^q\right) ds\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\mathcal{I}_2 := \left(\int_0^1 \left[g(b) - g\left(\frac{s}{2}b + \frac{2-s}{2}a\right)\right]^{p(\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m)} ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{s}{2}|f'(b)|^q + \frac{2-s}{2}|f'(a)|^q\right) ds\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\mathcal{I}_3 := \left(\int_0^1 \left(g\left(\frac{s}{2}b + \frac{2-s}{2}a\right) - g(a)\right)^{p(\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m)} ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{s}{2}|f'(a)|^q + \frac{2-s}{2}|f'(b)|^q\right) ds\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\mathcal{I}_4 := \left(\int_0^1 \left(g\left(\frac{s}{2}b + \frac{2-s}{2}a\right) - g(a)\right)^{p(\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m)} ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{s}{2}|f'(b)|^q + \frac{2-s}{2}|f'(a)|^q\right) ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}| &\le \frac{b-a}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sigma(m)\, w^m}{\mathtt{k}\Gamma_{\mathtt{k}}(\rho m\mathtt{k} + \lambda + \mathtt{k})} \left[\left(\int_0^1 \left(\Delta_{\rho,\lambda,m}^{\sigma,k,g}(s)\right)^p ds\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 \left(\Omega_{\rho,\lambda,m}^{\sigma,k,g}(s)\right)^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\
&\quad \times \left[\left(\frac{1}{4}|f'(a)|^q + \frac{3}{4}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3}{4}|f'(a)|^q + \frac{1}{4}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&= \frac{b-a}{4} \mathcal{F}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}^{\sigma_2,\mathtt{k}}[w] \left[\left(\frac{1}{4}|f'(a)|^q + \frac{3}{4}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3}{4}|f'(a)|^q + \frac{1}{4}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.3.10 Teorem 4.3.3'te $\mathtt{k} = 1$, $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse Teorem 4.3.3'ün koşulları altında $\eta_{a,b;g}^{\alpha}$ ifadesi (4.3.30) de verildiği gibi, ayrıca

$$\kappa_{p;g}^{\alpha} := \int_0^1 \left[g(b) - g\left(\frac{s}{2}a + \frac{2-s}{2}b\right)\right]^{p\alpha} ds$$

ve

$$\Lambda_{p;g}^{\alpha} := \int_0^1 \left[g\left(\frac{s}{2}b + \frac{2-s}{2}a\right) - g(a)\right]^{p\alpha} ds$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\left[\mathcal{I}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+;g}^{\alpha} F(b) + \mathcal{I}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-;g}^{\alpha} F(a)\right] - \eta_{a,b;g}^{\alpha}\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\
&\le \frac{b-a}{4}\left\{\left(\kappa_{p;g}^{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\Lambda_{p;g}^{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \qquad (4.3.34) \\
&\quad \times \left[\left(\frac{1}{4}|f'(a)|^q + \frac{3}{4}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3}{4}|f'(a)|^q + \frac{1}{4}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

dir.

Sonuç 4.3.11 Teorem 4.3.3'te $k = 1$ ve $g(t) = t$ olarak seçilirse elde edilen sonuç Budak ve arkadaşları [12, Corollary 5] tarafından verilen;

$$C_1(\lambda, p) = \left(\int_0^1 t^{\lambda p}\left(\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}\left[w\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\rho} t^{\rho}\right]\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\lambda-1}}{(b-a)^{\lambda}\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}[w(\frac{b-a}{2})^{\rho}]}\left[\mathcal{J}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^-;w}^{\sigma} f(a) + \mathcal{J}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^+;w}^{\sigma} f(b)\right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\
\le\ & \frac{(b-a)C_1(\lambda,p)}{2^{2+\frac{2}{q}}\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}[w(\frac{b-a}{2})^{\rho}]}\left[(|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}} + (3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}\right] \\
\le\ & \frac{(b-a)C_1(\lambda,p)}{2^{\frac{2}{q}}\mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}[w(\frac{b-a}{2})^{\rho}]}\left(|f'(a)| + |f'(b)|\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği ile aynıdır. Ayrıca $k = 1$, $g(t) = t$, $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse elde edilen sonuç Teorem 3.1.5'te verilen eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 4.3.4 $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde pozitif ve artan; (a, b) üzerinde sürekli $g'(x)$ türevine sahip olsun. Ayrıca $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(a < b)$ (a, b) üzerinde diferensiyellenebilir öyleki $f' \in L[a, b]$ olsun. Bu takdirde $\mathtt{k}$, ρ, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{R}_0^+$, $\sigma(m) \in \mathbb{R}^+$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi ve

$$\begin{aligned}\sigma_3(m) :=& \sigma(m)\left(\int_0^1 \Delta^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\right)^{1-\frac{1}{q}} \\ &\times\left\{\left[|f'(a)|^q \int_0^1 \Delta^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\frac{s}{2}\, ds + |f'(b)|^q \int_0^1 \Delta^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\frac{2-s}{2}\, ds\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\ &\left.+\left[|f'(b)|^q \int_0^1 \Delta^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\frac{s}{2}\, ds + |f'(a)|^q \int_0^1 \Delta^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\frac{2-s}{2} ds\right]^{\frac{1}{q}}\right\},\end{aligned} \tag{4.3.35}$$

$$\begin{aligned}\sigma_4(m) :=& \sigma(m)\left(\int_0^1 \Omega^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\right)^{1-\frac{1}{q}} \\ &\times\left\{\left[|f'(a)|^q \int_0^1 \Omega^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\frac{s}{2}\, ds + |f'(b)|^q \int_0^1 \Omega^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\frac{2-s}{2}\, ds\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\ &\left.+\left[|f'(b)|^q \int_0^1 \Omega^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\frac{s}{2}\, ds + |f'(a)|^q \int_0^1 \Omega^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\frac{2-s}{2}\, ds\right]^{\frac{1}{q}}\right\}\end{aligned} \tag{4.3.36}$$

olmak üzere $q \geq 1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde konveks ise

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2\mathtt{k}}\left[\mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^+;w}F(b) + \mathcal{J}^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,\left(\frac{a+b}{2}\right)^-;w}F(a)\right] - \left(\varphi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(1) + \Phi^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda}(1)\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\ &\leq \frac{b-a}{4}\left[\mathcal{F}^{\sigma_3,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}[w] + \mathcal{F}^{\sigma_4,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}[w]\right]\end{aligned} \tag{4.3.37}$$

dir.

İspat. Lemma 4.3.1, üçgen eşitsizliği, $|f'|^q$ nun konveksliği ve Power-mean eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}|\mathcal{L}| \leq& \frac{b-a}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sigma(m)\, w^m}{\mathtt{k}\Gamma_{\mathtt{k}}(\rho m\mathtt{k}+\lambda+\mathtt{k})} \\ &\times\left(\int_0^1\left[g(b) - g\left(\frac{s}{2}a + \frac{2-s}{2}b\right)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m} ds\right)^{1-\frac{1}{q}} (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2) \\ &+\frac{b-a}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sigma(m)\, w^m}{\mathtt{k}\Gamma_{\mathtt{k}}(\rho m\mathtt{k}+\lambda+\mathtt{k})} \\ &\times\left(\int_0^1\left[g\left(\frac{s}{2}b + \frac{2-s}{2}a\right) - g(a)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m} ds\right)^{1-\frac{1}{q}} (\mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4)\end{aligned}$$

elde edilir ki burada

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 :=&\left\{|f'(a)|^q \int_0^1 \left[g(b) - g\left(\frac{s}{2}a + \frac{2-s}{2}b\right)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m} \frac{s}{2}\, ds \right.\\
&\left. + |f'(b)|^q \int_0^1 \left[g(b) - g\left(\frac{s}{2}a + \frac{2-s}{2}b\right)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m} \frac{2-s}{2}\, ds\right\}^{\frac{1}{q}},\\
\mathcal{R}_2 :=&\left\{|f'(b)|^q \int_0^1 \left[g(b) - g\left(\frac{s}{2}a + \frac{2-s}{2}b\right)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m} \frac{s}{2}\, ds \right.\\
&\left. + |f'(a)|^q \int_0^1 \left[g(b) - g\left(\frac{s}{2}a + \frac{2-s}{2}b\right)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m} \frac{2-s}{2}\, ds\right\}^{\frac{1}{q}},\\
\mathcal{R}_3 :=&\left\{|f'(a)|^q \int_0^1 \left[g\left(\frac{s}{2}b + \frac{2-s}{2}a\right) - g(a)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m} \frac{s}{2}\, ds \right.\\
&\left. + |f'(b)|^q \int_0^1 \left[g\left(\frac{s}{2}b + \frac{2-s}{2}a\right) - g(a)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m} \frac{2-s}{2}\, ds\right\}^{\frac{1}{q}},\\
\mathcal{R}_4 :=&\left\{|f'(b)|^q \int_0^1 \left[g\left(\frac{s}{2}b + \frac{2-s}{2}a\right) - g(a)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m} \frac{s}{2}\, ds \right.\\
&\left. + |f'(a)|^q \int_0^1 \left[g\left(\frac{s}{2}b + \frac{2-s}{2}a\right) - g(a)\right]^{\frac{\lambda}{\mathtt{k}}+\rho m} \frac{2-s}{2}\, ds\right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}| \leq\;& \frac{b-a}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sigma(m)|w|^m}{\mathtt{k}\Gamma_{\mathtt{k}}(\rho m \mathtt{k} + \lambda + \mathtt{k})} \left(\int_0^1 \Delta^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left\{\left[|f'(a)|^q \int_0^1 \Delta^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\frac{s}{2}ds + |f'(b)|^q \int_0^1 \Delta^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\frac{2-s}{2}ds\right]^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left. + \left[|f'(b)|^q \int_0^1 \Delta^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\frac{s}{2}ds + |f'(a)|^q \int_0^1 \Delta^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\frac{2-s}{2}ds\right]^{\frac{1}{q}}\right\}\\
&+\frac{b-a}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sigma(m)|w|^m}{\mathtt{k}\Gamma_{\mathtt{k}}(\rho m \mathtt{k} + \lambda + \mathtt{k})} \left(\int_0^1 \Omega^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left\{\left[|f'(a)|^q \int_0^1 \Omega^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\frac{s}{2}ds + |f'(b)|^q \int_0^1 \Omega^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\frac{2-s}{2}\right]^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left. + \left[|f'(b)|^q \int_0^1 \Omega^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\frac{s}{2}ds + |f'(a)|^q \int_0^1 \Omega^{\sigma,\mathtt{k},g}_{\rho,\lambda,m}(s)\frac{2-s}{2}ds\right]^{\frac{1}{q}}\right\}\\
=\;& \frac{b-a}{4}\left[\mathcal{F}^{\sigma_3,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}[w] + \mathcal{F}^{\sigma_4,\mathtt{k}}_{\rho,\lambda+\mathtt{k}}[w]\right]
\end{aligned}$$

yazılır ve istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.12 Teorem 4.3.4'te $\mathtt{k} = 1$ ve $g(t) = t$ olarak seçilirse $\sigma_{1,1}(k) = \frac{\sigma(k)}{\rho k+\lambda+2}$ olmak üzere, Budak ve arkadaşlarının [12, corollary 7] verdikleri

$$\left|\frac{2^{\lambda-1}}{(b-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(\frac{b-a}{2})^{\rho}]}\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(\frac{a+b}{2})-;w}f(a) + \mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(\frac{a+b}{2})+;w}f(b)\right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\begin{aligned}
\leq\;& \frac{(b-a)}{2^{2+\frac{1}{q}}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\rho}\right]}\left(\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}\left[w\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\rho}\right]\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left\{\left[\mathcal{F}^{\sigma_{1,1}}_{\rho,\lambda+1}\left[w\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\rho}\right]|f'(a)|^{q}\right.\right. \\
&\left.+\left(\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}\left[w\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\rho}\right]-\mathcal{F}^{\sigma_{1,1}}_{\rho,\lambda+1}\left[w\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\rho}\right]\right)|f'(b)|^{q}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&+\left[\mathcal{F}^{\sigma_{1,1}}_{\rho,\lambda+1}\left[w\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\rho}\right]|f'(b)|^{q}\right. \\
&\left.\left.+\left(\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+2}\left[w\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\rho}\right]-\mathcal{F}^{\sigma_{1,1}}_{\rho,\lambda+1}\left[w\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\rho}\right]\right)|f'(a)|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca yukarıdaki eşitsizlik $\lambda=\alpha$, $\sigma(0)=1$ ve $w=0$ için Teorem 3.1.4'te verilen sonuca ingirgenir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde klasik konveks fonksiyonlar ve konveks fonksiyonların ikinci anlamda s-konveks, p-konveks, q-konveks, h-konveks, m-konveks, $(\alpha, m)-$konveks, quasi-konveks gibi bazı farklı sınıfları için Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla elde edilmiş özdeşlik ve eşitsizliklerin farklı kesirli integral operatörleri yardımıyla genelleştirmelerinin elde edilmesi amaçlanmıştır. Yazılan teoremlerin sonuçlarının, özel koşullar altında, literatürde yer alan eşitsizlikleri sağladığı ve bu yönüyle de literatürle uyumlu olduğu görülmüştür. İlgili araştırmacılar, bu tezde verilen özdeşlikleri kullanarak harmonik konveks, simetrik konveks gibi başka konveks fonksiyon sınıfları için de yeni genelleştirmeler elde edebilirler. Ayrıca bu tezde kullanılmayan Katugampola, Hadamard, Erdelyi-Kober ve diğer kesirli integral operatörleri için de Hermite-Hadamard, Ostrowski, Simpson, Fejer, Grüss, Chebshev tipli yeni sonuçlar elde edilebilir. İspatlarda kullanılan metodlarda bazı küçük değişiklikler yapılarak daha iyi sonuçlar elde edilmesi olası bir durumdur. Bulgular kısmında verilen sonuçlar makale formatına getirilerek çeşitli dergilerde yayımlanmıştır.

Birinci bölümde uyumlu kesirli integraller için verilen sonuçlardan

"Some Hermite-Hadamard Type Inequalities For Convex Functions Via Conformable Fractional Integrals And Related Inequalities" başlıklı çalışma **"Creative Mathematics and Informatics"** adlı dergide yayımlanmış, "A study on Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex functions via conformable fractional integrals" başlıklı çalışma **"Stud. Univ. Babes-Bolyai Math."** adlı dergide yaynımlanmış, "Hermite-Hadamard type inequalities for twice differentiable $m-$convex functions via Conformable fractional integrals" başlıklı çalışma **"Far East Journal of Mathematical Sciences"** adlı dergide yayımlanmış, "Hermite-Hadamard type inequalities for quasi-convex functions via conformable fractional integrals" başlıklı çalışma ise **"Xth International Statistics Days Conference, 2016, Giresun, Turkey"** adlı uluslararası konferansta sunulup tam metin olarak yayımlanmıştır.

İkinci bölümdeki Genelleştirilmiş kesirli integraller için verilen sonuçlardan,

"Hermite-Hadamard Type Inequalities For Convex Functions Via Generalized Fractional Integral Operators" başlıklı çalışma **"International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME-2017)"** adlı uluslararası konferansta sunulmuş, ayrıca **"Topological Algebra and Applications"** adlı dergide yayımlanmıştır, "Generalized Hermite-Hadamard type inequalities involving fractional integral operators" başlıklı çalışma **"Journal of Inequalities and Applications"** adlı dergide yayımlanmış ve "Some new inequalities involving generalized fractional integral operators for several class of functions" başlıklı çalışma ise **"ICANAS 2017, Antalya-TURKEY"** adlı uluslararası konferansta sunulup tam metin olarak yayımlanmıştır.

Üçüncü bölümde Genelleştirilmiş k-kesirli integraller için verilen sonuçlardan, “Hermite-Hadamard type inequalities for the generalized k-fractional integral operators” başlıklı çalışma ise **“Journal of Inequalities and Applications”** adlı dergide yayımlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Abdeljawad, T. 2015. On conformable fractional calculus. Journal of Computational and Applied Mathematics, 729: 57-66.

[2] Yalçın, A. 2016. Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Uyumlu Kesirli İntegraller İçeren Eşitsizlikler. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, Ağrı.

[3] Agarwal, R.P., Luo, M-J., Raina, R.K. 2016. On Ostrowski type inequalities. Fasciculi Mathematici, 56(1): 5-27.

[4] Adams, R.A., Essex, C. 2010. Calculus A Complete Course. Pearson Canada Inc., Toronto, Ontario.

[5] Aigner, M. Ziegler, G.M., Quarteroni, A. 2010. Proofs from the Book, third ed., Springer-Verlag, Berlin.

[6] Akkurt, A., Yıldırım, M.E., Yıldırım, H. 2016. On some integral inequalities for $(k,h)-$Riemann-Liouville fractional integral. New Trends in Mathematical Sciences, 4(1): 138-146.

[7] Anton, H., Rorres, C. 2005. Elementary Linear Algebra. Jhon Wiley and Sonsi Inc.

[8] Azpeitia, A.G. 1994. Convex functions and the Hadamard inequality. Revista Colombiana de Matemáticas, 28(1): 7-12.

[9] Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN 975–442-035-1.

[10] Beckenbach, E.F., Bellman, R. 1961. Inequalities. Springer-Verlag, Berlin.

[11] Breckner, W.W. 1978. Stetigkeitsaussagenf ureine Klass ever all gemeinerter konvexer funktionen in topologisc henlinearen Raumen, Publications de l'Institut Mathématique, 23: 13–20.

[12] Budak, H., Usta, F., Sarıkaya, M.Z., Özdemir, M.E. 2017. On generalization of midpoint type inequalities with generalized fractional integral operators, https://www.researchgate.net/publication/312596723.

[13] Díaz, R., Pariguan, E. 2007. On hypergeometric functions and k-Pochhammer symbol, Divulgaciones Mathemáticas. Mat, 15(2): 179-192.

[14] Dragomir, S. S., Pečarić , J., Person, L.E. 1995. Some inequalities of Hadamard type. Journal of Mathematics, 21(3): 335-341.

[15] Dragomir, S. S., Fitzpatrik, S. 1998. Two Inequalities for Differentiable Mappings and Applications to Special Means of Real Numbers and to Trapezoidal Formula. Applied Mathematics Letters, 11(5): 91–95.

[16] Dragomir, S. S., Bhatti, M. I., Iqbal, M., Muddassar, M. 2015. Some new Hermite-Hadamard's type inequalities. Journal of Computational Analysis And Applications, 18(4): 655-661.

[17] Dragomir S.S., Fitzpatrick, S. 1999. The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense. Demonstratio Mathematica, 32(4): 687–696.

[18] Dragomir, S.S., Pearce, C.E.M. 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality. Bulletin Australian Mathematical Society, 57: 377–385.

[19] Dragomir, S.S., Pearce, C.E.M. 2002. Selected topic on Hermite-Hadamard inequalities and applications. Melbourne and Adelaide, Victoria University, Australia. (ONLINE: http://rgmia. vu. edu. au/monographs).

[20] Dwilewicz, R.J. 2009. A Short History of Convexity. Differential Geometry-Dynamical Systems, 11: 112-129.

[21] Erdös, P., Grunwald, T. 1939. On polynomials with only real roots. Annals of Mathematics, 40(3): 537-548

[22] Fink, A.M. 2000. An essay on the history of inequalities. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 249(1): 118–134.

[23] Gill, P.M., Pearce, C.E.M., Pečarić, J. 1997. Hadamard's inequality for convex functions. Journal of Mathematics Analysis and Applications, 215: 461-470.

[24] Godunova, E.K., Levin, V.I. 1985. Nerevenstra dlja funccii sirokogo klassa soderzassego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkaii, Vycislitel Mat. i Mt. Fiz. Mezvuzov Sb. Nauc. Trudov. MPGI, Moscow, 138-142.

[25] Greenberg, H.J., Pierskalla, W.P. 1970. A review of quasi convex functions. Operations Research, 19(7): 1553–1570

[26] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Polya, G. 1952. Inequalities. Cambridge University Press.

[27] Hermite, C. 1883. Sur deux limites d'une integrale definie. Mathesis, 3: 82.

[28] Hudzik H., Maligranda. L. 1994. Some remarks on s-convex functions. Aequationes Mathematicae, 48: 100-111.

[29] Hussain, S., Bhatti, M.I., Iqbal, M. 2009. Hadamard-type inequalities for s-convex functions I. Punjab University Journal of Mathematics, 41: 51-60.

[30] Ion, D.A. 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series, 34: 82-87.

[31] Jleli, M., Samet, B. 2016. On Hermite-Hadamard type inequalities via fractional integrals of a function with respect to another function. Journal of Nonlinear Science and Applications, 9: 1252–1260.

[32] Kannapan, Pl. 2009. Functional Equations and Inequalities with Applications. Springer.

[33] Katugampola, U.N. 2011. New approach to a generalized fractional integrals. Applied Mathematics and Computation, 218(4): 860-865.

[34] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M. 2014. A new definition of fractional derivative. Journal of Computational and Applied Mathematics, 264: 65-70.

[35] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier Science Limited, 204: 523, Amsterdam.

[36] Machado, J.T, Virginia, K. and Francesco, M. 2011. Recent history of fractional calculus. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16(3): 1140-1153.

[37] Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., Delgado, R. V. 2009. Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach, Springer Science and Business Media.

[38] Mitrinović, D.S. 1970. Analytic inequalities. Springer-Verlag, Berlin.

[39] Mitrinović, D.S, Pečarić, J.E., Fink, A.M. 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, UK.

[40] Miheşan, V.G. 1993. A generalization of the convexity, Seminar on Functional Equations, Approx. and Convex., Cluj-Napoca (Romania).

[41] Mubeen, S., Habibullah, G.M. 2012. k- Fractional Integrals and Applications. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 7(2): 89–94.

[42] Niculescu, C., Persson, L. 2006. Convex functions and their applications. A Contemporary Approach, Springer Science Business Media, Inc.

[43] Niculescu, C. P., Persson, L.E. 2004. Old and new on the Hermite-Hadamard inequality. Real Analysis Exchange, 29(2): 663-686.

[44] Noor, M.A., Awan, M. U. 2013. Some Integral inequalities for two kinds of convexities via fractional integrals, Transylvanian Journal of Mathematical Mechanics 5(2): 129-136.

[45] Orlicz, W. 1968. A note on modular spaces I, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math., Astronom. Phys., MR 0131763.

[46] Özdemir, M.E., Avcı-Ardıç, M., Kavurmacı-Önalan, H. 2016. Hermite Hadamard type inequalities for s-convex and s-concave functions via fractional integrals. Turkish Journal of Science, 1(1): 28-40.

[47] Özdemir, M.E., Yıldız, Ç. 2013. The Hadamard's inequality for quasi-convex functions via fractional integrals, Mathematics and Computer Science Series, 40(2): 167-173.

[48] Özdemir, M.E., Kavurmacı, H., Yıldız, Ç. 2012. Fractional integral inequalities via s-convex functions, arxiv:201.491v1.

[49] Pearce, C.E.M., Pecaric, J.E., Šimić, V. 1998. Stolarsky means and Hadamard's inequality. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 220(1): 99-109.

[50] Pečarić, J.E., Proschan, F., Tong, Y.L. 1992. Convex functions. Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press Inc.

[51] Raina, R.K. 2005. On generalized Wright's hypergeometric functions and fractional calculus operators. East Asian Mathematical Journal, 21(2): 191–203.

[52] Roberts, A.W., Varberg, D.E. 1973. Convex functions. Pure and Applied Mathematics, Academic Press, vol. 57, New York-London.

[53] Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I. 1993. Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers.

[54] Sarıkaya, M.Z., Set E., Yaldız H., Başak N. 2013. Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. Mathematical and Computer Modelling, 57(9): 2403-2407.

[55] Sarıkaya, M.Z., Yıldırım, H. 2016. On Hermite-Hadamard type inequalities for Riemannn-Liouville fractional integrals. Miskolc Mathematical Notes, 17(2): 1049-1059.

[56] Sarıkaya, M.Z., Aktan, N. 2011. On the generalization of some integral inequalities and their applications, Mathematical and Computer Modelling, 54(9): 2175-2182.

[57] Sarıkaya, M.Z., Dahmani, Z., Kiriş, M. and Ahmad, F. 2016. (k, s) Rieamann-Liouville fractional integral and applications. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 45(1): 77-89.

[58] Sarikaya, M. Z., Saglam, A., Yıldırım, H. 2012. New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are convex and quasi-convex. International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics, 5(3): 1-14.

[59] Set, E., Sarıkaya, M.Z., Özdemir, M.E., Yıldırım, H. 2014. The Hermite-Hadamard's inequality for some convex functions via fractional integrals and related results. Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics, 10(2): 69-83.

[60] Set, E., Akdemir, A.O., Mumcu, İ. 2016. The Hermite-Hadamard's inequaly and its extentions for conformable fractional integrals of any order $\alpha > 0$. https://www.researchgate.net/publication/303382221.

[61] Srivastava, H.M., Choi, J. 2012. Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, London and New York.

[62] Toader, G. 1984. Some generalizations of the convexity. Proceedings of The Colloquium On Appraximation and Optimization. University Cluj-Napoca, 329-338.

[63] Tunç, T., Budak, H., Usta, F., Sarıkaya, M.Z. 2017. On new generalized fractional integral operators and related inequalities. ResearchGate, https://www.researchgate.net/publication/313650587

[64] Usta, F., Budak, H., Sarıkaya, M.Z., Set, E. 2017. On generalization of trapezoid type inequalities for s-convex functions with generalized fractional integral operators. ResearchGate, https://www.researchgate.net/publication/312596720.

[65] Varošanec, S. 2007. On h-convexity. Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics, 326(1): 303-311.

[66] Yaldız, H., Sarıkaya, M.Z. On the Hermite-Hadamard type inequalities for fractional integral operator, ResearchGate, https://www.researchgate.net/publication/309824197.

[67] Yıldız, Ç., Özdemir, M.E., Önelan, K.H. 2015. Fractional integral inequalities for different functions, New Trends in Mathematical Sciences, 3(2): 110-117.

[68] Zhu, C., Fečkan, M., Wang, J.R. 2012. Fractional integral inequalities for differentiable convex mappings and applications to special means and a midpoint formula. Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics, 8(2): 21–28.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	Abdurrahman GÖZPINAR
Doğum Yeri	:	Ulubey / ORDU
Doğum Tarihi	:	01.03.1979
Yabancı Dil	:	İngilizce
E-Posta	:	abdurrahmangozpinar79@gmail.com
Medeni Hali	:	Evli
İş Deneyimi	:	M.E.B. Matematik Öğretmeni (14/09/2001-...)

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2001, Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Y. Lisans:** 2011, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yayınlar

1. Set, E., Sarıkaya, M. Z., Gözpınar A., "Some Hermite-Hadamard Type Inequalities For Convex Functions Via Conformable Fractional Integrals And Related Inequalities", Creative Mathematics and Informatics, 26(2): 221-229, (2017).
2. Set, E., Gözpınar, A., "A study on Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex functions via conformable fractional integrals", Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica, 62(3): 309-323, (2017).
3. Set, E., Gözpınar, A., Choi, J., "Hermite-Hadamard Type Inequalities For Twice differentiable m-Convex Functions Via Conformable Fractional Integrals", Far East Journal of Mathematical Sciences, 101(4): 873-891, (2017).
4. Set, E., Noor, M. A., Awan, M. U., Gözpınar, A., "Generalized Hermite-Hadamard type inequalities involving fractional integral operators", Journal of Inequalities and Applications, 2017:169, (2017).

5. Set, E., Choi, J., Gözpınar, A., “Hermite-Hadamard type inequalities for the generalized k-fractional integral operators”, Journal of Inequalities and Applications, 2017:206, (2017).

6. Set, E., Gözpınar, A., İşçan, İ., “Some Integral Inequalities for Twice Differentiable Functions”, Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics, 9(1): 73-82, (2017).

7. Set, E., Gözpınar, A., Ekinci, A., “Hermite-Hadamard type inequalities via Conformable fractional integrals”, Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 86(2): 309-320, (2017).

8. Set, E., Gözpınar, A., “Hermite-Hadamard Type Inequalities for convex functions via generalized fractional integral operators”, Topological Algebra and Applications, 5: 55-62, (2017).

9. Set, E., Gözpınar, A., “Some new inequalities involving generalized fractional integral operators for several class of functions”, AIP Conference Proceedings 1833(1): 020038-1-020038-5 (2017).

10. Set, E., Gözpınar, A., “Some Inequalities for generalized s-convex functions in the second sense on fractal sets”, AIP Conference Proceedings, 1726(1): 020050-1-020050-5 (2016).

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında (Proceedings) basılan bildiriler

1. Set, E., Gözpınar, A., “Some new inequalities involving generalized fractional integral operators for several class of functions”, 2nd International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences (ICANAS 2017), Book of Abstracts, Antalya, Turkey.

2. Set, E., Çelik, B., Gözpınar, A., “Conformable Fractional Integral Inequalities for Some Convex Functions”, 2nd International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences (ICANAS 2017), Book of Abstracts, Antalya, Turkey.

3. Kavurmacı-Önalan, H., Set E., Gözpınar, A., “Generalized Hermite Hadamard Type Inequalities for Fractional Integral Operators via Convex Functions”, 2nd International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences (ICANAS 2017), Book of Abstracts, Antalya, Turkey.

4. Set, E.,Gözpınar, A., “Hermite-Hadamard Type Inequalities For Convex Functions Via Generalized Fractional Integral Operators”, International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME-2017), Book of Abstracts, Istanbul, Turkey, 2017.

5. Gözpınar A., Çelik, B., Set E., “Hermite Hadamard type inequalities for quasi convex functions via conformable fractional integrals”, Xth International Statistics Days Conference, Book of Abstracts, Giresun University, Turkey, 2016.

6. Set, E., Gözpınar, A., “Some Inequalities for generalized s-convex functions in the second sense on fractal sets”, International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences (ICANAS 2016), Book of Abstracts, Antalya, Turkey.