T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FONKSİYON DİZİLERİNİN İDEAL EŞ YAKINSAKLIĞI

Samet BEKAR

YÜKSEK LİSANS

ORDU 2018

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Samet BEKAR tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Cemal BELEN danışmanlığında yürütülen "Fonksiyon Dizilerinin İdeal Eş Yakınsaklığı" adlı bu tez, jürimiz tarafından 26/01/2018 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Cemal BELEN

Başkan	:	Doç. Dr. İmdat İŞCAN Matematik Bölümü, Giresun Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Cemal BELEN Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

30/01/2018… tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun .01.. 02/2018… tarih ve 2018./7.1.. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ 1923

Enstitü Müdürü

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Samet BEKAR

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

FONKSİYON DİZİLERİNİN İDEAL EŞ YAKINSAKLIĞI

Samet BEKAR

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2018
Yüksek Lisans Tezi, 72s.

Danışman: Doç. Dr. Cemal BELEN

Bu tez, fonksiyon dizilerinin ideal eş yakınsaklığı kavramına ilişkin son yıllarda elde edilmiş sonuçları içeren bir derleme çalışmasıdır.

Tezin ilk bölümü giriş bölümü olup bu bölüm tez konusunun bir literatür özeti ile tezin amacını içermektedir.

İkinci bölümde ideal, ideal yakınsaklık ve kardinal sayılar kavramları ile küme teorisi modelleri hakkında temel gösterimler, tanımlar ve sonuçlar sunulmuştur.

Üçüncü bölümde ise fonksiyon dizilerinin ideal eş yakınsaklığı, süzgeç eş yakınsaklığı, ideal noktasal yakınsaklığı, ideal düzgün yakınsaklığı gibi kavramlar ele alınmış ve bunlar arasındaki çeşitli ilişkiler incelenmiştir.

Tezin son bölümünde ise tüm çalışmaya ait sonuçlar ve öneriler yer almaktadır.

Anahtar Kelimeler: İdeal, İdeal yakınsaklık, İdeal eş yakınsaklık, Süzgeç eş yakınsaklık, Kardinal sayılar, Sınırlama sayısı.

ABSTRACT

IDEAL EQUAL CONVERGENCE OF SEQUENCES OF FUNCTIONS

Samet BEKAR

Ordu University
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Biology, 2018
MSc. Thesis, 72p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Cemal BELEN

This work is a compilation thesis including the recent results related to the concept of ideal equal convergence of sequences of functions.

The first chapter of the thesis is introduction chapter and it contains a brief overwiew of the study and the main purpose of the thesis.

In the second chapter we present basic notations, definitions and results related to the concepts of ideal, ideal convergence and cardinal numbers and also some models of set theory.

In the third chapter we consider some concepts such as ideal equal convergence, filter equal convergence, ideal pointwise convergence and ideal uniform convergence of sequences of functions. We also examine some relations between these concepts.

In the final chapter we present some conclusions and recommendations of the whole work.

Key Words: Ideal, Ideal convergence, Ideal equal convergence, Filter equal convergence, Cardinal numbers, Bounding number.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının belirlenmesi ve hazırlanması esnasında ilgisini hiç eksik etmeyen, bilgi ve tecrübesiyle her konuda destek olan ve bir dost gibi davranan değerli hocam Doç. Dr. Cemal BELEN'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca her zaman başarılı olacağıma inanan ve daima yanımda olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$P(X)$	X kümesinin kuvvet kümesi
$\mathcal{F}(\mathcal{I})$	$\mathcal{I}$ idealinin ürettiği süzgeç
$\mathrm{Fin}(X)$	X kümesinin tüm sonlu alt kümelerinin kümesi
χ_A	A kümesinin karekteristik fonksiyonu
AP-ideal	Toplamsallık özelliğine sahip bir ideal
ZFC	Zermelo-Fraenkel ve Seçme aksiyomlarını kabul eden kümeler kuramı
$\neg p$	p önermesinin değili
$\mathfrak{c}$	Reel sayılar kümesinin kardinalitesi
$\mathfrak{b}$	Sınırlama sayısı olarak adlandırılan kardinal
$\aleph_0$	Sayılabilir kümenin kardinalitesi
$f_n \overset{\mathcal{I}\text{-}e}{\rightarrow} f$	(f_n) dizisinin f fonksiyonuna ideal eş yakınsak olması
$f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}e}{\rightarrow} f$	(f_n) dizisinin f fonksiyonuna süzgeç eş yakınsak olması

1. GİRİŞ

Klasik anlamda yakınsaklıkta yakınsak olan bir dizinin limitinin herhangi bir komşuluğu dışında kalan terimlerinin sayısı sonludur. Dolayısıyla bu indislerden oluşan kümenin sonlu olması sebebiyle dikkate değer bir özelliği bulunmaz. Ancak bir çok kez matematiğin kapsamındaki bazı araştırmalarda öyle yakınsak olmayan dizilerle karşılaşırız ki bu dizilerin hemen hemen bütün terimleri (belirli bir anlamda) yakınsak bir dizinin özelliklerine sahiptir. Buna göre yakınsaklık kavramı üzerine çalışıldığında, amacımıza uygun olarak daha fazla diziyi ele almak gerekebilir ve bunun da bir yolu doğal sayılar kümesinin belirli bir anlamda daha "büyük" bir alt kümesine kısıtlandığında yakınsak olan dizileri seçmektir. Örneğin, büyük kümeden kasıt doğal sayılar kümesinin sonlu olmayan bir alt kümesi ise bilinen yakınsaklık kavramı ortaya çıkar. Eğer büyük kümeden kasıt doğal sayılar kümesinin asimptotik yoğunluğu sıfır olmayan bir alt kümesi ise o zaman istatistiksel yakınsaklık fikri ortaya çıkar. Alışılmış yakınsaklığın bir genelleşmesi özelliğine sahip olup matematiğin birçok alanında önemli uygulamaları barındıran dizilerin istatistiksel yakınsaklığı fikri genellikle Steinhaus'a (1951) ve Fast'a (1951) atfedilse de bu kavram ilk olarak birinci baskısı 1935 yılında Zygmund tarafından yazılan "Trigonometric Series" isimli kitapta hemem hemen yakınsaklık adı altında çalışılmıştır. Diğer taraftan, Furstenberg (1981) tarafından ele alınan monografide bu kavramın ilk kez 1932 yılında Koopman ve von Neumann tarafından "yoğunluğa göre yakınsaklık" ismiyle çalışıldığı belirtilmektedir.

Bir kümenin tüm alt kümelerinin bir alt ailesi olup kalıtsallık özelliğine ve kümelerde birleşim işlemine göre kapalılık özelliğine sahip olan bir aileye ideal denir. $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde tüm tek nokta kümelerini bulunduran bir ideal (uygun ideal) ve (x_n) bir reel sayı dizisi olmak üzere (x_n) dizisinin bir x reel sayısının her ε-komşuluğu dışında bulunan tüm terimlerine ait indislerin kümesi $\mathcal{I}$ idealine ait ise (x_n) dizisi x sayısına ideal yakınsaktır veya kısaca $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir. Hem klasik anlamda yakınsaklığın hem de istatistiksel yakınsaklığın genel bir hali olan ideal yakınsaklık kavramı, Cartan (1937) tarafından tanımlanan süzgeç yakınsaklık kavramına denktir. Buna rağmen, son yıllarda bir çok yazar Kostyrko ve ark. (2000) tarafından ilk kez kapsamlı olarak incelenen ideal yakınsaklık kavramını kullanmayı tercih etmiştir. Bu konuda matematikçiler daha çok klasik anlamda yakınsaklık kullanılarak elde edilen sonuçları ideal yakınsaklık kullanarak genelleştirmeyi hedeflemişlerdir.

Császár ve Laczkovich (1975) fonksiyon dizilerinin eş yakınsaklığı kavramını tanımlamıştır.

Bukovská (1991) bu kavramı quasi-normal yakınsaklık adı altında çalışmıştır. Császár ve Laczkovich (1975) reel değerli her fonksiyon dizisi için eş yakınsaklığın düzgün yakınsaklıktan daha zayıf olduğunu ve noktasal yakınsaklıktan daha kuvvetli olduğunu göstermiştir.

Das ve Dutta (2013) ve Das ve ark. (2014), $\mathbb{N}$ üzerindeki bir $\mathcal{I}$ uygun idealini kullanarak fonksiyon dizilerinin ideal eş yakınsaklığını (kısaca $\mathcal{I}$-eş yakınsaklığını) ve süzgeç eş yakınsaklığını (kısaca $\mathcal{I}^*$-eş yakınsaklığını) tanımlamışlardır ve bu yakınsaklık tiplerinin bazı özelliklerini incelemişlerdir. X boş olmayan bir küme, f_n $(n \in \mathbb{N})$ ve f, X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde sıfıra $\mathcal{I}$-yakınsak olan pozitif reel sayıların bir (ε_n) dizisi varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna X kümesi üzerinde $\mathcal{I}$-eş yakınsaktır denir. İdeal eş yakınsaklık tanımındaki (ε_n) dizisini bir sıfır dizisi alarak, Filipów ve Szuca (2012) $\mathcal{I}$-eş yakınsaklığı farklı bir biçimde tanımlamışlardır. Filipów ve Staniszewski (2014), $\mathbb{N}$ üzerindeki iki farklı $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ ideallerini kullanarak hem Das ve ark. (2014) tarafından hem de Filipów ve Szuca (2012) tarafından verilen ideal eş yakınsaklık kavramını kapsayacak şekilde daha genel bir tanım elde etmişlerdir ve bunu $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-eş yakınsaklık olarak ifade etmişlerdir. Üstelik aynı çalışmada hem $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ idealleri hem de X kümesinin üzerine çeşitli koşullar konularak yakınsaklık tipleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Filipów ve Staniszewski (2015) diğer bir çalışmasında ise ideal noktasal yakınsaklığın ideal eş yakınsaklığı gerektirmediği zaman bir karekterizasyon ispatlamışlardır ve bu karekterizasyon sınırlama sayısı olarak bilinen $\mathfrak{b}$ sayısı ile ilişkili olan bir kardinal katsayısı aracılığıyla verilmiştir.

Bu yüksek lisans tezi fonksiyon dizilerinin ideal eş yakınsaklığına ilişkin yukarıda belirtilen çalışmaları detaylı bir şekilde ele alan bir derleme çalışmasıdır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde ilk olarak ideal tanımına, örneklerine ve ideal yakınsaklık kavramına değinilecektir. Sonrasında ise tezde kullanılan çeşitli küme teorisi sistemlerinden, aksiyomlarından ve ayrıca ordinal ve kardinal sayı kavramlarından bahsedilecektir.

2.1 İdeal ve İdeal Yakınsaklık

Tanım 2.1.1 $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{P}(X)$, X in tüm alt kümelerinin kümesi olsun. Bir $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$ sınıfı için
(i) $\emptyset \in \mathcal{I}$
(ii) $A, B \in \mathcal{I}$ iken $A \cup B \in \mathcal{I}$
(iii) $A \in \mathcal{I}$ ve $B \subset A$ iken $B \in \mathcal{I}$
koşulları sağlanırsa bu durumda $\mathcal{I}$ ya X de bir ideal denir. Eğer $X \notin \mathcal{I}$ ise veya denk olarak $\mathcal{I} \neq \mathcal{P}(X)$ ise $\mathcal{I}$ ya aşikar olmayan (veya öz) ideal denir (Kuratowski, 1958, syf. 34).

Tanım 2.1.2 $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. Eğer X in alt kümelerinin boş kümeden farklı bir $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ sınıfı aşağıdaki koşulları sağlıyor ise $\mathcal{F}$ ye X de bir süzgeç denir:
(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$
(ii) $A, B \in \mathcal{F}$ iken $A \cap B \in \mathcal{F}$
(iii) $A \in \mathcal{F}$ ve $A \subset B$ ise $B \in \mathcal{F}$ (Cartan, 1937).

Lemma 2.1.1 $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{I}$, X üzerinde aşikar olmayan bir ideal olsun. Bu durumda

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subset X : \exists\, A \in \mathcal{I} \text{ için } M = X \setminus A\}$$

kümesi X üzerinde bir süzgeçtir. $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ ya $\mathcal{I}$ ile üretilen süzgeç denir (Kostyrko ve ark., 2000).

Tanım 2.1.3 $\mathcal{I}$, X üzerinde aşikar olmayan bir ideal olsun. Eğer her $x \in X$ için $\{x\} \in \mathcal{I}$ oluyorsa $\mathcal{I}$ ya bir uygun (admissible) ideal denir (Kostyrko ve ark., 2000).

Tanım 2.1.4 $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ aşikar olmayan bir ideal ve (x_n) bir reel sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ ise bu durumda (x_n) dizisi L sayısına ideal yakınsaktır (veya $\mathcal{I}$-yakınsaktır) denir ve $\mathcal{I}\text{-}\lim x_n = L$ veya $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} L$ şeklinde yazılır. L sayısına (x_n) dizisinin $\mathcal{I}$-limiti denir (Kostyrko ve ark., 2000).

Uyarı 2.1.1 $\mathcal{I}$ uygun bir ideal ve $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ olsun. Bu durumda $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\}$ kümesi sonlu yani en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için en fazla $\{1, 2, \ldots, n_0\}$ biçiminde bir küme olduğundan $\mathcal{I}$ idealine aittir. Böylece $\mathcal{I}\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = L$ dir. O halde yakınsak bir dizi ideal yakınsaktır. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir.
Örneğin, $A \in \mathcal{I}$ sonsuz bir küme olmak üzere

$$x_n = \begin{cases} 1, & n \in A \\ 0, & n \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlı (x_n) dizisini ele alalım. Bu durumda eğer $\varepsilon \leq 1$ ise $\{n \in \mathbb{N} : |x_n| \geq \varepsilon\} = A \in \mathcal{I}$ ve $\varepsilon > 1$ ise $\{n \in \mathbb{N} : |x_n| \geq \varepsilon\} = \emptyset \in \mathcal{I}$ olacağından $\mathcal{I}\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ dır. Ancak (x_n) dizisi yakınsak değildir.

Örnek 2.1.1 $\mathcal{I}_f$, $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu alt kümelerinin ailesi olsun. Bu durumda $\mathcal{I}_f$ bir uygun idealdir ve $\mathcal{I}_f$-yakınsaklık bilinen anlamdaki yakınsaklıktır. (Kostyrko ve ark., 2000).

Örnek 2.1.2 $A \subset \mathbb{N}$, $\chi_A(k)$, A nın karekteristik fonksiyonu ve $d_n(A) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_A(k)$ olsun.

$$\underline{d}(A) = \liminf_{n\to\infty} d_n(A) \quad \text{ve} \quad \overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} d_n(A)$$

sayılarına sırasıyla A kümesinin alt ve üst asimptotik yoğunluğu denir. Eğer $\underline{d}(A) = \overline{d}(A)$ ise A kümesi yoğunluğa sahiptir denir ve $d(A) = \underline{d}(A)$ sayısına A kümesinin asimptotik veya doğal yoğunluğu denir. d yoğunluğu $d(\emptyset) = 0$, $A \subset B$ ise $d(A) \leq d(B)$, $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$ ve $d(\mathbb{N} \setminus A) = 1 - d(A)$ özelliklerine sahiptir.
Buna göre

$$\mathcal{I}_d = \{A \subset \mathbb{N} : d(A) = 0\}$$

ailesi $\mathbb{N}$ de uygun bir ideal olup $\mathcal{I}_d$-yakınsaklık istatistiksel yakınsaklık olur (Kostyrko ve ark., 2000).

Örnek 2.1.3 $\{\Delta_j \subset \mathbb{N} : j \in \mathbb{N}\}$ ailesi $\mathbb{N}$ nin bir ayrışımı yani $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_j$ ve $i \neq j$ için $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ olsun (örneğin, $\Delta_j = \{2^{j-1}(2s-1) : s \in \mathbb{N}\}$ alınabilir). Buna göre

$$\mathcal{I} = \{A \subset \mathbb{N} : \text{sonlu sayıda } j \text{ için } A \cap \Delta_j \neq \emptyset\}$$

ailesi $\mathbb{N}$ de bir uygun idealdir (Kostyrko ve ark., 2000).

Tanım 2.1.5 Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ veya $\{n \in \mathbb{N} : x_n \geq -\varepsilon\} \in \mathcal{I}$ ise (x_n) reel sayı dizisi sırasıyla sonsuza veya eksi sonsuza $\mathcal{I}$-ıraksaktır denir ve bu durum sırasıyla $\mathcal{I}\text{-}\lim x_n = +\infty$ ve $\mathcal{I}\text{-}\lim x_n = -\infty$ ile gösterilir (Lahiri ve Das, 2003).

Örnek 2.1.4 $\mathcal{I} \neq \mathcal{I}_f$ bir uygun ideal ve $A \in \mathcal{I}$ sonsuz bir küme olmak üzere

$$x_n = \begin{cases} 1, & n \in A \\ n, & n \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlı (x_n) dizisi için $\mathcal{I}\text{-}\lim x_n = +\infty$ dur.

Tanım 2.1.6 $\mathcal{I}$ uygun bir ideal olsun. Eğer $\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = \xi$ olacak şekilde bir $M = \{m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi mevcut ise $x = (x_n)$ dizisi ξ ye $\mathcal{I}^*$-yakınsaktır denir. Bu durumu ifade etmek için kısaca $\mathcal{I}^*\text{-}\lim x_n = \xi$ yazılır (Kostyrko ve ark., 2000).

Teorem 2.1.1 $\mathcal{I}$ uygun bir ideal olsun. $\mathcal{I}^*\text{-}\lim x_n = \xi$ ise $\mathcal{I}\text{-}\lim x_n = \xi$ dir (Kostyrko ve ark., 2000).

Aşağıdaki örnek bu teoremin tersinin doğru olmadığını gösterir.

Örnek 2.1.5 $\mathcal{I}$ ideali Örnek 2.1.3'deki ideal olsun. $x = (x_n)$ dizisini, $n \in \Delta_j$ için $x_n = \frac{1}{j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\mathcal{I}\text{-}\lim x_n = 0$ dır. Ancak $\mathcal{I}^*\text{-}\lim x_n \neq 0$ dır. Gerçekten, eğer $\mathcal{I}^*\text{-}\lim x_n = 0$ olduğunu kabul edersek

$$\lim_{m\to\infty, m\in M} x_m = 0 \tag{2.1.1}$$

olacak şekilde bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ vardır. $H \in \mathcal{I}$ olmak üzere M kümesini $M = \mathbb{N} \backslash H$ biçiminde yazabiliriz. $\mathcal{I}$ idealinin tanımına göre

$$H \subset \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_p$$

olacak biçimde $p \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $\Delta_{p+1} \subset M$ olup sonsuz çoklukta $m \in M$ için $x_m = \frac{1}{p+1}$ olur ki bu (2.1.1) ile çelişir (Kostyrko ve ark., 2000).

Tanım 2.1.7 Terimleri aralarında ayrık ve $\mathcal{I}$ idealine ait her (A_i) dizisi için $A_i \Delta B_i = (A_i \setminus B_i) \cup (B_i \setminus A_i)$ simetrik farkı sonlu bir küme ve $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{I}$ olacak biçimde $B_i \subset \mathbb{N}$ kümeleri varsa $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ uygun ideali (AP) koşulunu sağlar denir (Kostyrko ve ark., 2000).

Teorem 2.1.2 $\mathcal{I}$ ideali (AP) özelliğine sahip olduğunda $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramları denktir (Kostyrko ve ark., 2000).

Tanım 2.1.8 (AP) özelliğinde A_i kümelerinin ayrık olma şartını kaldırınca elde edilen özelliğe (AP') adı verilir (Kostyrko ve ark., 2000).

Tanım 2.1.9 $\mathcal{I}$ $\mathbb{N}$ de bir ideal olsun. Eğer $\mathcal{I}$'ya ait kümelerin her (A_n) dizisi ve her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \setminus A_\infty$ sonlu olacak şekilde bir $A_\infty \in \mathcal{I}$ varsa $\mathcal{I}$ idealine bir P-idealdir denir (Balcerzak ve ark., 2007).

Teorem 2.1.3 $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ uygun bir ideal olsun. Aşağıdakiler denktir:
(i) $\mathcal{I}$ bir P-idealdir.
(ii) $\mathcal{I}$ ideali (AP') özelliğini sağlar.
(iii) $\mathcal{I}$ ideali (AP) özelliğini sağlar (Balcerzak ve ark., 2007).

Tanım 2.1.10 $\mathcal{I}$, X üzerinde bir aşikar olmayan ideal, yani $\mathcal{I} \neq P(X)$ olsun. Eğer $\mathcal{I}$ idealini kapsayan X üzerinde tanımlı aşikar olmayan bir ideal yoksa $\mathcal{I}$ idealine maksimal ideal denir. $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı uygun bir idealin maksimal olması için gerek ve yeter şart her $A \subset \mathbb{N}$ için $A \in \mathcal{I}$ veya $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{I}$ olmasıdır. Bu sonuç herhangi bir X kümesi üzerinde tanımlı bir $\mathcal{I}$ uygun ideali için de geçerlidir. (Kostyrko ve ark., 2005).

2.2 Küme Teorisi, Ordinal ve Kardinal Sayılar

Bu kısımda ilk olarak kümeler teorisi hakkında bir kısa literatür özeti verilecek daha sonra ise tezde kullanılan sıralama bağıntıları, ordinal ve kardinal sayı kavramları hakkındaki temel bilgilere yer verilecektir.

Geometrinin temel sonuçlarının Euclid tarafından verilen aksiyomlara dayanması gibi Küme Teorisi'nin de aksiyomatik olarak kurulması gereği anlaşıldıktan sonra, ilk aksiyomatik küme kuramı modeli 1908 yılında Alman matematikçi Ernst Zermelo tarafından verilmiştir (Ergun, 2006). Adolf Fraenkel ise bu kuramı daha tutarlı hale getirmek için iki yeni aksiyom keşfetmiştir ve günümüzde Zermelo-Fraenkel ya da kısaca ZF modeli denilen kümeler kuramı modeli ortaya çıkmıştır. Bu model dokuz temel aksiyoma dayanır. Diğer taraftan "Boş olmayan kümelerden oluşan boş olmayan bir ailenin kartezyen çarpımı boş değildir" şeklinde ifade edilen ve Seçme Aksiyomu (kısaca C) olarak bilinen özellik Zermelo tarafından 1904 yılında ifade edildi. Zermelo bu aksiyomdan yararlanarak ifadesi "Her küme iyi sıralanabilirdir" şeklinde olan "İyi Sıralama Teoremi"ni ispatladı. ZF kümeler kuramına seçme aksiyomunun da eklenmesiyle elde edilen kurama ya da sisteme ZFC kümeler kuramı denir. 1935 yılında Kurt Gödel, eğer ZF çelişkisiz bir sistem ise ZFC nin de çelişkisiz bir sistem olduğunu, 1963'te Paul Cohen ise, seçme aksiyomunun kümeler kuramının diğer aksiyomlarından bağımsız olduğunu yani eğer ZF çelişkisiz bir sistem ise hem ZFC nin hem de ZF+($\neg$C) nin çelişkisiz sistemler olduğunu ispatlamıştır. Bu yüzden bugün birçok matematikçi tarafından kabul edilen ve kullanılan kümeler kuramı sistemi ZFC sistemidir.

Tanım 2.2.1 X bir küme ve $<$, X üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer
(P_1) Hiçbir $x \in X$ için $x < x$ olamaz
(P_2) $x < y$ ve $y < z$ ise $x < z$ dir
koşulları sağlanırsa $<$ bağıntısına X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı, $(X, <)$ ikilsine de bir kısmi sıralı küme denir. Eğer ek olarak
(P_3) Her $x, y \in X$ için ya $x < y$ ya $x = y$ ya da $y < x$ oluyorsa $(X, <)$ ikilisine bir tam sıralı veya lineer sıralı küme denir (Jech, 2003).

Uyarı 2.2.1 $i)$ $<$ bağıntısı bir kısmi (tam) sıralama bağıntısı ise bu durumda

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \text{ veya } x = y$$

ile tanımlı $\leq$ bağıntısı da bir kısmi (tam) sıralama bağıntısı olur. Bu nedenle $<$ bağıntısına kesin kısmi sıralama bağıntısı da denir. Her $x \in X$ için $x = x$ olduğundan o zaman (P_1) koşulu

$$(P_1^{'}): \text{ her } x \in X \text{ için } x \leq x$$

şeklinde değişir (yansıma özelliği).
$ii)$ X kümesi üzerinde $(P_1^{'})$ ve (P_2) özelliklerine sahip bir $\leq$ bağıntısına bir pre-sıralama veya quasi-sıralama bağıntısı denir (Jech, 2003).

Tanım 2.2.2 $(X, <)$ bir tam sıralı küme olsun. Eğer X kümesinin boş olmayan her alt kümesinin $<$ bağıntısına göre en küçük elemanı (minimumu) varsa, yani,

$$\exists a \in A, \forall x \in A, a \leq x$$

ise $<$ bağıntısına X üzerinde bir iyi sıralama bağıntısı, $(X, <)$ ikilisine de bir iyi sıralı küme denir (Jech, 2003).

Tanım 2.2.3 α bir küme olsun. Eğer α nın her elemanı α nın bir alt kümesi ise ve α kümesi $\in$ (elemanı olma) bağıntısı ile bir iyi sıralı küme ise α kümesine bir ordinal veya bir ordinal sayı denir (Jech, 2003).

Tanıma göre $\beta, \gamma \in \alpha$ olmak üzere

$$\beta < \gamma \Leftrightarrow \beta \in \gamma$$

şeklinde tanımlı $<$ bağıntısı α kümesi üzerinde bir iyi sıralama bağıntısıdır.

Örneğin, $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$, ... kümeleri birer ordinaldir. Genel olarak $\omega = \mathbb{N}$ olmak üzere her $n \in \omega$ doğal sayısı bir ordinaldir. Bu ordinallere sonlu ordinaller denir. İlk sonsuz ordinal ise ω doğal sayılar kümesidir.

Ordinallerin bazı özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1) Bir ordinalin her elemanı da bir ordinaldir.

2) Tüm ordinallerin sınıfı $\in$ (veya $<$) bağıntısı ile iyi sıralıdır.

3) α bir ordinal ise $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$ kümesi de bir ordinaldir. Bu ordinale α ordinalinden sonra gelen ordinal denir. Ayrıca bir β ordinali için $\alpha = \beta + 1$ ise α ya ardıl ordinal denir. Eğer $\alpha \neq 0$ ve α bir ardıl ordinal değil ise $\alpha = \sup\{\beta : \beta < \alpha\}$ şeklindedir ve bu durumda α ordinaline limit ordinal denir.

Tanım 2.2.4 X ve Y iki küme olsun. Eğer X kümesinden Y kümesine tanımlı birebir ve örten bir fonksiyon varsa o zaman X ve Y kümeleri arasında bir eşleme vardır denir ve bu durum $X \approx Y$ veya $|X| = |Y|$ biçiminde gösterilir. $\approx$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. X kümesinin $\approx$ bağıntısına göre denklik sınıflarının kümesine ise X kümesinin kardinal sayısı, kardinalitesi veya kardinali denir ve $|X|$ ile gösterilir. Buna göre $|X| = |Y| \Leftrightarrow X \approx Y$ olur (Jech, 2003).

Kardinal sayılar üzerinde

$$|X| \leq |Y| \Leftrightarrow X \text{ den } Y \text{ ye birebir bir fonksiyon vardır}$$

ve

$$|X| < |Y| \Leftrightarrow |X| \leq |Y| \text{ ve } X \not\approx Y \text{ dir}$$

şeklinde sıralama bağıntıları tanımlanır.

Not 2.2.1

(**i**) En az bir $n \in \omega$ için $|X| \leq n$ ise X kümesine sonlu küme denir. $X \approx \omega$ ise X kümesine sayılabilir sonsuz küme denir. Sonlu veya sayılabilir sonsuz olan bir X kümesine de sayılabilir küme denir.

(**ii**) $[0, 1]$ kapalı aralığı ile arasında bir eşleme bulunan kümelere sayılamayan küme denir. Örneğin; $\mathbb{R}$ sayılamayan sonsuz bir kümedir.

(**iii**) $|X| \leq |Y|$ ve $|Y| \leq |X|$ ise $|X| = |Y|$ dir (Schröder-Bernstein Teoremi).
(**iv**) X bir küme ve $\mathcal{P}(X)$ onun kuvvet kümesi ise $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ dir (Cantor Teoremi).

ZFC kümeler kuramında kardinal sayı tanımı ordinaller kullanılarak aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 2.2.5 α bir ordinal olsun. Eğer her $\beta < \alpha$ için $\beta \not\approx \alpha$ ise o zaman α ordinaline bir kardinal veya kardinal sayı denir (Jech, 2003).

Her doğal sayı bir kardinaldir ve ω doğal sayılar kümesi bir kardinaldir. Fakat $\omega^+ = \omega + 1$ ordinali bir kardinal değildir. Çünkü, $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ve $\omega + 1 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$ ordinalleri için $\omega < \omega + 1$ olup, $f(0) = \omega$ ve diğer $n \in \omega$ sayıları için $f(n) = n - 1$ şeklinde tanımlı $f : \omega \to \omega + 1$ dönüşümü birebir ve örtendir. Yani $\omega \approx \omega + 1$ dir.

Uyarı 2.2.2 Her X kümesi için $X \approx |X|$ olan tek kardinal $|X|$ dir. Seçme aksiyomuna göre her küme iyi sıralanabilirdir ve bir α ordinaline eşleniktir. Eğer $X \approx \alpha$ ise bu durumda $|X| = \min\{\beta \leq \alpha : X \approx \beta\}$ mevcut ve tektir. O halde, X kümesinin kardinalitesi, X kümesi ile arasında eşleme bulunan ordinallerin en küçüğü olarak tanımlanır (Jech, 2003).

Not 2.2.2
(**i**) Her α kardinali için α kardinalinden büyük olan bir kardinal vardır.
(**ii**) α kardinalinin ardılı α kardinalinden büyük olan en küçük kardinaldir ve α^+ ile gösterilir.
(**iii**) $\aleph_0 = \omega_0 := \omega$ dir. Kardinaller için $\aleph_\alpha$ ve ordinaller için ω_α gösterimi kullanılır. $\aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$ dır. Eğer α bir limit ordinal ise $\aleph_\alpha = \omega_\alpha = \sup\{\omega_\beta : \beta < \alpha\}$ dır.
(**iv**) $\mathbb{R}$ nin kardinalitesi $\mathfrak{c}$ (continuum) ile gösterilir. Tüm terimleri 0 veya 1 olan diziler kümesi $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ veya $2^{\mathbb{N}}$ ile gösterilir ve buna Cantor uzayı denir. $|P(\mathbb{N})| = \left|2^{\mathbb{N}}\right| = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ dir. $\mathbb{N}$ den $\mathbb{N}$ ye tüm fonksiyonların kümesi $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ olmak üzere $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = \mathfrak{c}$ dir.
(**v**) $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ olduğundan Cantor teoremine göre $\aleph_0 < \mathfrak{c}$ dir. Acaba, $\aleph_0 < |X| < \mathfrak{c}$ olacak şekilde bir X küme var mıdır? Cantor böyle bir kümenin olmadığını yani $\aleph_1 = \mathfrak{c}$ olduğunu tahmin etmiştir ancak bu iddiasını ispatlayamamıştır. Cantor'un bu kestirimi *Süreklilik Hipotezi* (continuum hipotezi veya kısaca CH) olarak bilinir. Tıpkı, seçme aksiyomunda olduğu gibi Gödel, kümeler kuramının aksiyomları ile süreklilik hipotezinin çürütülemeyeceğini, Cohen ise süreklilik hipotezininin varlığını kabul eden ve etmeyen kümeler kuramlarının birbirlerinden farklı çelişkisiz sistemler olduğunu ispatlamıştır.

(**vi**) Eğer α bir X kümesine eşlenik (izomorfik) olan bir ordinal ise X kümesinin elemanları α ordinalinden küçük olan ordinaller ile (α nın elemanları ile) indekslenebilir. Yani $X = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ şeklinde yazılır. Örneğin X sayılabilir bir küme ise $X \approx \omega$ olduğundan $X = \{x_n : n < \omega\} = \{x_n : n \in \omega\}$ şeklinde yazılır (Jech, 2003).

3. İDEAL EŞ YAKINSAKLIK

3.1 Fonksiyon dizilerinin $\mathcal{I}$-eş yakınsaklığı

Bu kısımda Das ve Chandra (2013), Das ve Dutta (2013) ve Das ve ark. (2014) tarafından yapılan çalışmalarda yer alan, boş olmayan bir küme üzerinde tanımlı fonksiyon dizilerinin $\mathcal{I}$-noktasal, $\mathcal{I}$-düzgün, $\mathcal{I}$-eş, $\mathcal{I}^*$-eş, $\mathcal{I}^*$-noktasal, $\mathcal{I}^*$-düzgün, $\mathcal{I}^*$-düzgün eş, $\mathcal{I}^*$-düzgün ayrık ve $\mathcal{I}^*$-kuvvetli düzgün eş yakınsaklığı kavramları verilecek ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler ele alınacaktır. Ayrıca $\mathcal{I}^*$-hemen hemen düzgün eş yakınsaklık kavramını içeren bir Egorov tipi teorem ispatlanacaktır.

Tanım 3.1.1 $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de uygun bir ideal, $X \neq \emptyset$ bir küme, f ve f_n $(n \in \mathbb{N})$ X üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsun.
(i) Eğer her $x \in X$ için $f_n(x) \xrightarrow{\mathcal{I}} f(x)$ oluyorsa, yani her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için en az bir $A \in \mathcal{I}$ var öyleki her $n \notin A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa veya denk olarak her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ ise (f_n) dizisi f fonksiyonuna $\mathcal{I}$-noktasal yakınsaktır denir ve bu durum $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ ile gösterilir.
(ii) Eğer her $\varepsilon > 0$ için en az bir $A \in \mathcal{I}$ var öyleki her $n \notin A$ ve her $x \in X$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna X kümesi üzerinde $\mathcal{I}$-düzgün yakınsaktır denir ve bu durum $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}u} f$ ile gösterilir. (Gezer ve Karakuş, 2005; Balcerzak ve ark., 2007).

Tanıma göre

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}u} f \implies f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$$

ve

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}u} f \Leftrightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{\mathcal{I}} 0 \tag{3.1.1}$$

olduğu açıktır. Ayrıca alışılmış anlamdaki düzgün yakınsaklık $\mathcal{I}$-düzgün yakınsaklığı gerektirir (Balcerzak ve ark., 2007).

Uyarı 3.1.1 Sürekli fonksiyonlar dizisinin $\mathcal{I}$-düzgün limiti süreklidir (Balcerzak ve ark., 2007).

Tanım 3.1.2 $X \neq \emptyset$ bir küme, f ve f_n $(n \in \mathbb{N})$ X üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ olacak şekilde pozitif reel sayıların bir (ε_n) dizisi ve her $x \in X$'e karşılık $n > n_0$ iken $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$ olacak biçimde bir $n_0 = n_0(x)$ sayısı varsa, veya denk olarak her $x \in X$ için $\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\}$ kümesi sonlu ise

(f_n) dizisi f fonksiyonuna eş (equal) yakınsaktır denir ve bu durum kısaca $f_n \xrightarrow{e} f$ ile gösterilir (Császár ve Laczkovich, 1975).

Bu tanım Das ve Chandra (2013) tarafından ideal kullanılarak şu şekilde genelleştirilmiştir:

Tanım 3.1.3 $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ uygun bir ideal, f_n ve f bir $X \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde sıfıra $\mathcal{I}$-yakınsak olan pozitif reel sayıların bir (ε_n) dizisi varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna X kümesi üzerinde ideal eş yakınsaktır veya kısaca $\mathcal{I}$-eş yakınsaktır denir ve bu durum $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}e} f$ ile gösterilir (Das ve Chandra, 2013; Das ve ark. 2014).
Bu tanım şu şekilde de yazılabilir:
$f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}e} f$ (X üzerinde) $\Leftrightarrow$ $\mathcal{I}\text{-}\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ olacak şekilde pozitif reel sayıların öyle bir (ε_n) dizisi mevcuttur ki her $x \in X$ ve her $n \in \mathbb{N} \setminus M$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$ olacak biçimde bir $M = M_x \in \mathcal{I}$ vardır.

Uyarı 3.1.2 Yukarıda tanımlanan ideal eş yakınsaklık kavramı Filipów ve Szuca (2012) tarafından da ele alınmıştır. Ancak onların verdiği tanımın Tanım 3.1.3'den farkı (ε_n) dizisinin sıfıra ideal yakınsak olması yerine sıfıra bilinen anlamda yakınsak olmasıdır. Yakınsak her dizi $\mathcal{I}$-yakınsak olduğundan Tanım 3.1.3'de kullanılan ideal eş yakınsaklık Filipów ve Szuca (2012) tarafından verilen ideal eş yakınsaklıktan daha geneldir. İleride (Sonuç 3.2.2) P-idealler için bu iki tanımın denk olduğu gösterilecektir.

Not 3.1.1 $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}e} f$ ise $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ dir. Gerçekten, $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}e} f$ olsun. Bu durumda sıfıra $\mathcal{I}$-yakınsak olan öyle bir (ε_n) dizisi mevcuttur ki her $x \in X$ ve her $n \in \mathbb{N} \setminus M$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$ olacak biçimde bir $M = M_x \in \mathcal{I}$ vardır. Ayrıca $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{I}} 0$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $A \in \mathcal{I}$ vardır ki her $n \in \mathbb{N} \setminus A$ için $\varepsilon_n < \varepsilon$ olur. Böylece $M \cup A \in \mathcal{I}$ olup her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için $n \in \mathbb{N} \setminus (M \cup A)$ iken $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ bulunur. Bu ise $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ olmasıdır.

Teorem 3.1.1 f_n ve f bir $X \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsun. $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}u} f$ ise $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}e} f$ dir (Das ve ark. 2014).

İspat. $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}-u} f$ olsun ve herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. (3.1.1)'den

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}$$

olur.

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \in A \\ \\ \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| + \frac{1}{n}, & n \notin A \end{cases}$$

tanımlayalım. $\frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ olduğundan öyle bir n_0 vardır ki her $n > n_0$ için $\frac{1}{n} < \varepsilon$ dur. Böylece, eğer $n \notin A$ ve $n > n_0$ ise $\varepsilon_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| + \frac{1}{n} < 2\varepsilon$ olacağından $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{I}} 0$ dır. Ayrıca her $n \notin A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$ olduğundan $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}e} f$ elde edilir. □

Aşağıdaki örnekte $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}e} f$ fakat $f_n \overset{\mathcal{I}\text{-}u}{\nrightarrow} f$ olacak şekilde f fonksiyonunun ve (f_n) dizisinin mevcut olduğu gösterilmektedir.

Örnek 3.1.1 $\mathcal{I} \neq \mathcal{I}_f$ herhangi bir uygun ideal ve $C \in \mathcal{I}$ bir sonsuz küme olsun. $x \in [0, 1]$ olmak üzere

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & n \in C \\ x^n, & n \notin C \end{cases}$$

ile tanımlı (f_n) dizisini ve

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

ile tanımlı f fonksiyonunu ele alalım. (ε_n) ise sıfıra $\mathcal{I}$-yakınsak bir pozitif reel sayı dizisi olsun (örneğin, $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ alınabilir). $x \in [0, 1)$ için $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ olduğundan öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki her $n > n_0$ için $x^n < \varepsilon_n$ dir. Böylece her $x \in [0, 1]$ ve her $n \in (\mathbb{N} \setminus C) \cap (n_0, \infty)$ için

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0 < \varepsilon_n, & x = 1 \\ x^n < \varepsilon_n, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

olur. Yani $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}e} f$ dir. Diğer taraftan f_n ler sürekli, $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ fakat f sürekli olmadığından Uyarı 3.1.1'e göre $f_n \overset{\mathcal{I}\text{-}u}{\nrightarrow} f$ dir (Das ve Chandra, 2013).

Tanım 3.1.4 (i) Her $A \in \mathcal{I}$ için $A \subset C_k$ olacak şekilde elemanları $\mathcal{I}$ ya ait ve $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \cdots$ özelliğine sahip bir (C_k) dizisi varsa $\mathcal{I}$ ideali zincir koşulunu sağlıyor denir (Farah, 1998).

(ii) $\mathcal{I}$ idealinin bir $\mathcal{B}$ alt ailesi verilsin. Eğer her $A \in \mathcal{I}$ için $A \subset B$ olacak şekilde en az bir $B \in \mathcal{B}$ varsa veya denk olarak

$$\mathcal{I} = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$$

ise $\mathcal{B}$ ailesine $\mathcal{I}$ idealinin bir bazı denir (Farah, 1998).

(iii) $\mathcal{G}$, $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinin bir ailesi olsun. $\mathcal{G}$ yi içeren en küçük ideale $\mathcal{G}$ tarafından üretilen ideal denir. Eğer bir ideal sayılabilir bir $\mathcal{G}$ ailesi tarafından üretilirse bu ideale sayılabilir üretilmiş ideal denir. Bir $\mathcal{I}$ idealinin sayılabilir üretilmiş olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{I}$ idealinin sayılabilir bir baza sahip olmasıdır. Yani $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{I}$ olmak üzere her $A \in \mathcal{I}$ için $A \subset A_n$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ sayısının mevcut olmasıdır (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Uyarı 3.1.3 Tanımlara göre, $\mathcal{I}$ idealinin zincir koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart $\mathcal{I}$ idealinin sayılabilir bir baza sahip olmasıdır. Gerçekten, $\mathcal{I}$ ideali zincir koşulunu sağlarsa her $A \in \mathcal{I}$ için $A \subset C_k$ olacak şekilde elemanları $\mathcal{I}$ ya ait ve $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \cdots$ özelliğine sahip bir (C_k) dizisi vardır. Eğer $\mathcal{B} = \{C_k : \text{her } k \in \mathbb{N} \text{ için } C_k \in \mathcal{I} \text{ ve } C_k \subset C_{k+1}\}$ denirse $\mathcal{I} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$ olduğu yani $\mathcal{B}$ ailesinin $\mathcal{I}$ idealinin sayılabilir bir bazı olduğu görülür. Tersine $\mathcal{B} = \{C_k : k \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{I}$ idealinin sayılabilir bir bazı olsun. Eğer $k \in \mathbb{N}$ için $D_k = \bigcup_{n=1}^{k} C_n$ olarak alınırsa her k için $D_k \subset D_{k+1}$ ve $\mathcal{I} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k$ olacağından $\mathcal{I}$ ideali zincir koşulunu sağlar.
O halde bir $\mathcal{I}$ idealinin zincir koşulunu sağlaması, sayılabilir bir baza sahip olması ve sayılabilir üretilmiş olması birbirine denk olan kavramlardır.

Örnek 2.1.3'deki ideal zincir koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir ideale örnektir.

Teorem 3.1.2 $\mathcal{I}$ zincir koşulunu sağlayan bir ideal ve f_n ve f, $X \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir:
(i) $f_n \overset{\mathcal{I}\text{-}e}{\to} f$ dir.
(ii) Öyle $X_k \subset X$ kümeleri vardır ki $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ ve her $k = 1, 2, \ldots$ için X_k üzerinde $f_n \overset{\mathcal{I}-u}{\to} f$ dir.
(iii) Öyle $X_k \subset X$ kümeleri vardır ki $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$, $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ ve her $k = 1, 2, \ldots$ için X_k üzerinde $f_n \overset{\mathcal{I}-u}{\to} f$ dir.
Eğer X bir topolojik uzay ve f_n $(n \in \mathbb{N})$ fonksiyonları sürekli ise bu durumda (i), (ii) ve (iii) koşulları aşağıdaki koşula denktir:
(iv) Öyle $X_k \subset X$ kapalı kümeleri vardır ki $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$, $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ ve her $k = 1, 2, \ldots$ için X_k üzerinde $f_n \overset{\mathcal{I}-u}{\to} f$ dir (Das ve Chandra, 2013; Das ve ark. 2014).

İspat. $(i) \Rightarrow (iii)$: $f_n \overset{\mathcal{I}\text{-}e}{\to} f$ olsun. Bu durumda tanım gereğince $\mathcal{I}\text{-}\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ olacak şekilde pozitif reel sayıların bir (ε_n) dizisi ve her $x \in X$ için öyle bir $A_x \in \mathcal{I}$ vardır ki her $n \in \mathbb{N} \setminus A_x$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$ dir. $\mathcal{I}$ zincir koşulunu sağladığından terimleri $\mathcal{I}$ idealine ait olan ve $C_1 \subset C_2 \subset \cdots$ özelliğine sahip bir (C_k) dizisi vardır öyleki her $A \in \mathcal{I}$ için $A \subset C_k$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{N}$ mevcuttur.

$$X_k = \{x \in X : \forall n \in \mathbb{N} \setminus C_k \text{ için } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n\}$$

kümelerini tanımlayalım. Her k için $C_k \subset C_{k+1}$ olduğundan $\mathbb{N} \backslash C_{k+1} \subset \mathbb{N} \backslash C_k$ dır. Böylece her k için $X_k \subset X_{k+1}$ olur. Diğer taraftan $x \in X$ için A_x yukarıda $\mathcal{I}$-eş yakınsaklık tanımındaki küme olmak üzere zincir koşulundan dolayı $A_x \subset C_k$ olacak biçimde bir $C_k \in \mathcal{I}$ vardır. $\mathbb{N} \backslash C_k \subset \mathbb{N} \backslash A_x$ olduğundan ve $x \in X$, $n \in \mathbb{N} \backslash A_x$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$ olduğundan $n \in \mathbb{N} \setminus C_x$ iken $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$ elde ederiz. Bu ise $x \in X_k$ olmasıdır. O halde $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$ olur. Şimdi de X_k üzerinde $f_n \overset{\mathcal{I}-u}{\rightarrow} f$ olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $B = \{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n \geq \varepsilon\}$ olsun. $\mathcal{I}\text{-}\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ olduğundan $B \in \mathcal{I}$ dır. Eğer $x \in X_k$ ve $n \in (\mathbb{N} \setminus C_k) \cap (\mathbb{N} \setminus B)$ ise $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$ dir. $\varepsilon_n < \varepsilon$ olacağından $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olur. Yani $n \in \mathbb{N} \setminus (C_k \cup B)$ ve $x \in X_k$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olur. Bu ise $C_k \cup B \in \mathcal{I}$ olmasından dolayı X_k üzerinde $f_n \overset{\mathcal{I}-u}{\rightarrow} f$ olmasıdır.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$ ve X_k üzerinde $f_n \overset{\mathcal{I}-u}{\rightarrow} f$ olacak şekilde X_k kümeleri mevcut olsun. X üzerinde $f_n \overset{\mathcal{I}\text{-}e}{\rightarrow} f$ olduğunu göstereceğiz. Sabit bir i için $\sup_{x \in X_i} |f_n(x) - f(x)| = \varepsilon_{in} \overset{\mathcal{I}}{\rightarrow} 0$ dır. Yani her $x \in X_i$ için öyle bir $M(i) \in \mathcal{I}$ vardır ki her $n \notin M(i)$ için $|f_n(x) - f(x)| = \varepsilon_{in}$ ve $\mathcal{I}\text{-}\lim \varepsilon_{in} = 0$ dır. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{I}\text{-}\lim \varepsilon_{kn} = 0$ olduğundan $n \notin M_k$ iken $\varepsilon_{kn} < \frac{1}{k}$ olacak şekilde $M_k \subset M_{k+1}$ özelliğine sahip $M_k \in \mathcal{I}$ kümeleri seçebiliriz. (ε_n) dizisini

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n \in M_2 \\ \frac{1}{k}, & n \in M_{k+1} \setminus M_k \\ \frac{1}{n}, & n \notin \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} M_k \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $n \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$ iken $\varepsilon_n = \frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ olduğundan $\mathcal{I}\text{-}\lim \varepsilon_n = 0$ dır. Eğer $n \notin M(i) \cup M_i$ ise her $x \in X_i$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_{in} < \frac{1}{i} = \varepsilon_n$ olacağından $f_n \overset{\mathcal{I}\text{-}e}{\rightarrow} f$ dir.

Şimdi X bir topolojik uzay ve $f_n, n = 1, 2, \ldots$ sürekli olsun. (iv)'nin (iii)'yi gerektirdiği açıktır. (i)'nin sağlandığını kabul edelim. $k \in \mathbb{N}$ için

$$X_k = \{x \in X : \forall m, n \in \mathbb{N} \setminus C_k \text{ için } |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon_m + \varepsilon_n\}$$

kümelerini tanımlayalım ve daha önceki gibi (C_k), $\mathcal{I}$ nın bir ait dizisi olmak üzere $\mathcal{I}$ nın zincir koşulunu sağladığını kabul edelim. $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \cdots$ olduğu açıktır. Ayrıca f_n ler sürekli olduğundan X_k $(k = 1, 2, \ldots)$ kapalıdır. Gerçekten, X_k', X_k kümesinin yığılma noktaları kümesi olmak üzere, eğer $x \in X_k'$ ise $x_j \to x$ $(j \to \infty)$ olacak şekilde terimleri X_k ya ait olan bir (x_j) dizisi vardır. f_n sürekli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x_j) \to f_n(x)$ $(j \to \infty)$ olur. Diğer taraftan $x_j \in X_k$ olduğundan her $n, m \in \mathbb{N} \setminus C_k$ için $|f_n(x_j) - f_m(x_j)| \leq \varepsilon_m^{(1)} + \varepsilon_n^{(2)}$ dir. Böylece her $n, m \in \mathbb{N} \setminus C_k$ ve yeterince büyük j'ler için

$$
\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f_n(x_j) + f_n(x_j) - f_m(x_j) + f_m(x_j) - f_m(x)| \\
&\leq |f_n(x_j) - f_n(x)| + |f_n(x_j) - f_m(x_j)| + |f_m(x_j) - f_m(x)| \\
&< \varepsilon + \varepsilon_n^{(1)} + \varepsilon_m^{(1)} + \varepsilon = \varepsilon_n + \varepsilon_m
\end{aligned}
$$

olur. O halde $x \in X_k$ yani X_k kapalıdır. Buna göre $x \in X$ ise $(i) \Rightarrow (iii)$ ispatında olduğu gibi en az bir $k \in \mathbb{N}$ için $x \in X_k$ yani $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$ ve her bir X_k kümesi üzerinde $f_n \overset{\mathcal{I}-u}{\to} f$ elde ederiz. Böylece (iv) ispatlanır. Sonuç olarak $(i), (ii)$ ve $(iii), (iv)$'ye denktir. □

Örnek 3.1.2 Bu örnekte $f_n \overset{\mathcal{I}}{\to} f$ fakat $f_n \overset{\mathcal{I}\text{-}e}{\nrightarrow} f$ olacak şekilde f ve f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ fonksiyonlarının varlığını göstereceğiz. $\mathcal{I} \neq \mathcal{I}_f$ zincir koşuluna sahip uygun bir ideal ve $C \in \mathcal{I}$ sonsuz bir küme olsun. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi sayılabilir olduğundan $\mathbb{Q} = \{r_k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ biçiminde yazabiliriz.

$$
f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 2^{-k} & x = r_k,\ k = 1, 2, \ldots \end{cases}
$$

fonksiyonunu alalım. f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreksiz bir fonksiyondur. Gerçekten, aksine f nin sürekli olduğunu kabul edelim. $\varepsilon = \frac{1}{2^k+1} > 0$ ve $x_0 \in \mathbb{Q}$ ise her $\delta > 0$ için $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ iken $|f(x) - f(x_0)| = \left|0 - 2^{-k}\right| = 2^{-k} > \frac{1}{2^k+1}$ olur.
Eğer $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ise her $\delta > 0$ için $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \mathbb{Q}$ iken $|f(x) - f(x_0)| = \left|2^{-k} - 0\right| = \frac{1}{2^k} > \frac{1}{2^k+1} = \varepsilon$ olur. Böylece f her $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında süreksizdir. Bu nedenle kabulümüz yanlıştır.
Her $n \in \mathbb{N} \setminus C$ için $\delta_n < 2^{-n}$ olacak şekilde pozitif bir δ_n sayısı seçelim öyleki $i, j = 0, 1, 2, \ldots, n$ ve $i \neq j$ iken $\delta_n \leq \frac{1}{2}|r_i - r_j|$ olsun.
Bir (f_n) dizisini $n \in \mathbb{N} \setminus C$ iken

$$
f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{n} (r_i - \delta_i, r_i + \delta_i) \\ 2^{-i}, & x = r_i,\ i = 0, 1, ..., n \\ 2^{-i}\left(1 - \dfrac{|x - r_i|}{\delta_i}\right), & x \in (r_i - \delta_i, r_i + \delta_i),\ i = 0, 1, ..., n \end{cases}
$$

ile ve $n \in C$ iken $f_n(x) = n$ ile tanımlayalım.
$\mathbb{R}$ üzerinde f_n, f ye noktasal yakınsak olmamasına rağmen $f_n \overset{\mathcal{I}}{\to} f$ dir. Çünkü $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N} \setminus C \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ için $f_n(x) \to f(x)$ dir. Ancak $f_n \overset{\mathcal{I}\text{-}e}{\nrightarrow} f$ dir. Gerçekten eğer $f_n \overset{\mathcal{I}\text{-}e}{\to} f$ olduğunu kabul edersek Teorem 3.1.2'ye göre E_k lar kapalı küme olmak üzere $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ ve her $k = 1, 2, \ldots$ için E_k üzerinde $f_n \overset{\mathcal{I}-u}{\to} f$ olmalıdır. Bu durumda Baire Kategori Teoremi'ne göre $E_k^\circ \neq \emptyset$ olacak şekilde en az bir k mevcut olmalıdır. Yani

$[a, b] \subset E_k$ olacak şekilde a ve b $a < b$ sayıları vardır. Diğer taraftan $[a, b]$ üzerinde $f_n \overset{\mathcal{I}-u}{\to} f$ ve her bir f_n sürekli olduğundan f fonksiyonuda $[a, b] \subset \mathbb{R}$ de sürekli olmalıdır. Fakat bu f nin süreksiz bir fonksiyon olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır (Das ve Chandra, 2013).

Sonuç 3.1.1 Kesin olarak

$$f_n \overset{\mathcal{I}-u}{\to} f \Longrightarrow f_n \overset{\mathcal{I}-e}{\to} f \Longrightarrow f_n \overset{\mathcal{I}}{\to} f$$

gerektirmeleri gerçeklenir (Das ve ark., 2014).

Tanım 3.1.5 (i) Eğer f fonksiyonu $(f_{m_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ alt dizisinin noktasal limiti olacak şekilde bir $M = \{m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ varsa f ye (f_n) dizisinin $\mathcal{I}^*$-noktasal limiti denir. Bu durum $f_n \overset{\mathcal{I}^*}{\to} f$ ile gösterilir (Gezer ve Karakuş, 2005; Das ve ark. 2014).
(ii) Eğer f fonksiyonu $(f_{m_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ alt dizisinin düzgün limiti olacak şekilde bir

$$M = \{m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

varsa f ye (f_n) dizisinin $\mathcal{I}^*$-düzgün limiti denir ve bu durum $f_n \overset{\mathcal{I}^*-u}{\to} f$ biçiminde gösterilir (Gezer ve Karakuş, 2005; Das ve ark. 2014).
(iii) Eğer f fonksiyonu $(f_{m_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ alt dizisinin eş limiti olacak şekilde bir

$$M = \{m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna $\mathcal{I}^*$-eş yakınsaktır veya süzgeç eş yakınsaktır denir ve bu durum $f_n \overset{\mathcal{I}^*-e}{\to} f$ biçiminde gösterilir (Das ve ark. 2014).

Uyarı 3.1.4 Sürekli fonksiyonlar dizisinin $\mathcal{I}^*$-düzgün limiti de süreklidir (Gezer ve Karakuş, 2005).

Teorem 3.1.3 $\mathcal{I}$ bir P-ideal, f, f_n $(n = 1, 2\ldots)$ X üzerinde reel değerli fonksiyonlar olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir.
(i) X üzerinde $f_n \overset{\mathcal{I}^*-e}{\to} f$ dir.
(ii) $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ ve her $k = 1, 2, \ldots$ için X_k üzerinde $f_n \overset{\mathcal{I}^*-u}{\to} f$ olacak şekilde X_k kümeleri vardır.
(iii) $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$, $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ ve her k için X_k üzerinde $f_n \overset{\mathcal{I}^*-u}{\to} f$ olacak şekilde $X_k \subset X$ kümeleri vardır.
Eğer X topolajik uzay ve f_n 'ler sürekli ise bu durumda $(i), (ii)$ ve (iii) koşulları (iv)'e denktir.
(iv) $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ ve her k için X_k üzerinde $f_n \overset{\mathcal{I}^*-u}{\to} f$ olacak şekilde $X_k \subset X$ kapalı kümeleri vardır (Das ve ark. 2014).

İspat. $(i) \Rightarrow (iii)$: X üzerinde $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}e}{\rightarrow} f$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $f(x)$ fonksiyonu (f_{p_n}) dizisinin eş-limiti olacak şekilde bir $M = \{p_1 < p_2 < p_3 < \cdots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi vardır. Buna göre (ε_{p_n}) pozitif reel sayıların bir sıfır dizisi olmak üzere her $x \in X$ ve her $n \geq k$ için $|f_{p_n}(x) - f(x)| \leq \varepsilon_{p_n}$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır.

$$X_k = \{x \in X : \forall n \geq k \text{ için } |f_{p_n}(x) - f(x)| \leq \varepsilon_{p_n}\}$$

kümelerini tanımlayalım. $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ olduğu açıktır. Ayrıca $x \in X$ için $x \in X_k$ olacak biçimde en az bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Yani $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$ olur. Ayrıca Teorem 3.1.2'nin ispatına benzer şekilde $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}u}{\rightarrow} f$ olduğu gösterilebilir.
$(iii) \Rightarrow (ii)$: Açıktır
$(ii) \Rightarrow (i)$: $X_k \subset X$, $X = \bigcup X_k$ ve her k için X_k üzerinde $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}u}{\rightarrow} f$ olsun. Buna göre, sabit bir i için öyle bir $(p_n^i) = M_i \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve $\lim_{p \to \infty} \varepsilon_{p_n}^i = 0$ olacak şekilde $\left(\varepsilon_{p_n}^i\right)$ dizisi vardır ki her $x \in X_i$ için $n \geq k(i)$ iken $\left|f_{p_n^i}(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon_{p_n}^i$ dir. $\mathcal{I}$, P-ideal olduğundan her i için $(\mathbb{N} \setminus M_{\dot{I}}) \setminus (\mathbb{N} \setminus M_0) = M_0 \setminus M$ sonlu olacak şekilde $M_0 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ vardır. Bu nedenle eğer $M_0 = \{p_1 < p_2 < p_3 < \cdots\}$ dersek M_0 ın sonlu sayıda elemanı hariç diğer p_n elemanları ve her $x \in X$ için, $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_{p_n} = 0$ olmak üzere, $|f_{p_n}(x) - f(x)| \leq \varepsilon_{p_n}$ eşitsizliği sağlanır. Böylece X üzerinde $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}e}{\rightarrow} f$ olur. O halde (i) ispatlanır. Dolayısıyla $(i), (ii)$ ve (iii) denktir.
$(i) \Rightarrow (iv)$: $k \in \mathbb{N}$ için

$$X_k = \{x \in X : \forall m, n \geq k \text{ için } |f_{p_n}(x) - f_{p_m}(x)| \leq \varepsilon_{p_n} + \varepsilon_{p_m}\}$$

kümelerini tanımlarsak ve Teorem 3.1.2'nin bu kısmındaki ispat yönteminden yararlanırsak $k \in \mathbb{N}$ için X_k kümelerinin kapalı, $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$ $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ ve her k için X_k üzerinde $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}u}{\rightarrow} f$ olduğu gösterilebilir. $\square$

Örnek 3.1.3 $\mathcal{I} \neq \mathcal{I}_f$ uygun bir ideal, $C \in \mathcal{I}$ sonsuz bir küme, $\mathbb{Q} = \{r_k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ ve f fonksiyonu Örnek 3.1.2'deki gibi olsun. (f_n) dizisini ise $n \in \mathbb{N} \setminus C$ iken

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=0}^{n} (r_i - \delta_i, r_i + \delta_i) \\ 2^{-i}, & x = r_i, \ i = 0, 1, ..., n \\ 2^{-i}\left(1 - \dfrac{|x - r_i|}{\delta_i}\right), & x \in (r_i - \delta_i, r_i + \delta_i), \ i = 0, 1, ..., n \end{cases}$$

ile ve $n \in C$ iken $f_n = 0$ ile tanımlayalım. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{n \in \mathbb{N} \setminus C, n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

olduğundan $f_n \overset{\mathcal{I}^*}{\rightarrow} f$ dir. Ancak $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}e}{\nrightarrow} f$ dir. Gerçekten eğer $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}e}{\rightarrow} f$ olduğunu kabul edersek Teorem 3.1.3'e göre E_k lar kapalı küme olmak üzere $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ ve her $k =$

$1, 2, \ldots$ için E_k üzerinde $f_n \stackrel{\mathcal{I}^*-u}{\to} f$ olmalıdır. Buna göre E_k üzerinde her bir f_n sürekli olduğundan Uyarı 3.1.4'e göre f fonksiyonu da E_k üzerinde sürekli olmalıdır. Fakat bu f nin süreksiz bir fonksiyon olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır (Das ve Chandra, 2013).

Teorem 3.1.4 $\mathcal{I}$ uygun bir ideal olsun. Eğer $f_n \stackrel{\mathcal{I}^*\text{-}e}{\to} f$ ise $f_n \stackrel{\mathcal{I}\text{-}e}{\to} f$ dir (Das ve ark. 2014).

İspat. $f_n \stackrel{\mathcal{I}^*\text{-}e}{\to} f$ olsun. Bu durumda f fonksiyonu bir (f_{m_k}) alt dizisinin eş limiti olacak şekilde $M = \{m_1, m_2, \ldots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ vardır. f fonksiyonu (f_{m_k}) alt dizilerinin eş limiti olduğundan $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_{m_k} = 0$ olacak şekilde bir (ε_{m_k}) pozitif reel sayı dizisi ve her $x \in X$ için $k > k_0$ iken $|f_{m_k}(x) - f(x)| < \varepsilon_{m_k}$ olacak şekilde bir k_0 sayısı vardır. Bu durumda

$$\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_{m_k}\} \subset \underbrace{(\mathbb{N} \setminus M)}_{\in \mathcal{I}} \cup \underbrace{\{m_{k_1}, m_{k_2}, \ldots, m_{k_0}\}}_{\in \mathcal{I}}$$

ve $\mathcal{I}\text{-}\lim \varepsilon_{m_k} = 0$ olduğundan $f_n \stackrel{\mathcal{I}\text{-}e}{\to} f$ bulunur. □

Teorem 3.1.5 $g_n \stackrel{\mathcal{I}\text{-}e}{\to} f$ fakat $g_n \stackrel{\mathcal{I}^*-e}{\nrightarrow} f$ olacak şekilde bir $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ uygun ideali ve bir (g_n) dizisi vardır (Das ve ark. 2014).

İspat. X üzerinde $f_n \stackrel{u}{\to} f$ ve herhangi $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \neq f$ olacak şekilde bir (f_n) fonksiyonlar dizisini ve bir f fonksiyonunu ele alalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda öyle bir $m \in \mathbb{N}$ vardır ki her $x \in X$ ve her $n > m$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ dur. $\{\Delta_j \subset \mathbb{N} : j \in \mathbb{N}\}$ ailesi $\mathbb{N}$ nin bir ayrışımı yani $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_j$ ve $i \neq j$ için $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ olsun. $\mathcal{I}$ ideali olarak Örnek 2.1.3'deki ideali alalım. $\{g_n\}$ dizisini $n \in \Delta_j$ iken $g_n = f_i$ olarak tanımlayalım. Bu durumda her $x \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : |g_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_m \in \mathcal{I}$$

olduğundan $\{n \in \mathbb{N} : |g_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ olur. O halde $g_n \stackrel{\mathcal{I}-u}{\to} f$ ve böylece Teorem 3.1.1'den $g_n \stackrel{\mathcal{I}\text{-}e}{\to} f$ olur. Şimdi, $g_n \stackrel{\mathcal{I}^*\text{-}e}{\to} f$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $g_{m_k} \stackrel{e}{\to} f$ olacak şekilde $M = \mathbb{N} \setminus H = \{m_1, m_2 \cdots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ vardır. $\mathcal{I}$ nın tanımından dolayı $H \subset \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_p$ olacak şekilde $p \in \mathbb{N}$ vardır. Fakat o zaman $\Delta_{p+1} \subset \mathbb{N} \setminus H = M$ olur. Δ_{p+1} sonsuz küme olduğundan sonsuz çoklukta k ve her $x \in X$ için

$$|g_{m_k}(x) - f(x)| = |f_{p+1}(x) - f(x)| = \varepsilon_{p+1} > 0$$

olur ki bu $g_n \stackrel{\mathcal{I}^*\text{-}e}{\to} f$ olması ile çelişir. Dolayısıyla ispat biter. □

Teorem 3.1.6 X sayılabilir bir küme ve $\mathcal{I}$ bir P-ideal olsun. Bu durumda $f_n \stackrel{\mathcal{I}\text{-}e}{\to} f$ iken $f_n \stackrel{\mathcal{I}^*\text{-}e}{\to} f$ dir (Das ve ark. 2014).

İspat. $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}e} f$ olduğundan $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif reel sayıların $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{I}} 0$ koşulunu sağlayan bir dizisi olmak üzere her $x \in X$ için öyle bir $M(x) \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ vardırki her $n \in M(x)$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$ olur. $\mathcal{I}$, P-ideal olduğundan $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{I}} 0$ iken $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*} 0$ dır. Bundan dolayı $(\varepsilon_n)_{n\in A} \to 0$ olacak şekilde $A \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi vardır. X sayılabilir bir küme olduğundan X kümesinin elemanlarını $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ biçiminde yazabiliriz. Hipoteze göre her $x_i \in X$ için öyle bir $M_i = M(x_i) \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi vardır ki $n \in M_i$ iken $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ dur. $\mathcal{I}$, P-ideal olduğundan her i için $M_0 \setminus Mi$ sonlu olacak şekilde $M_0 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ vardır. $M_0 \setminus Mi$ sonlu olduğundan, sonlu sayıda elemanlar hariç diğer tüm elemanlar için $M_0 = M_i$ olur. Böylece $M_0 \cap A$ kümesine ait sonlu sayıda indis hariç diğer tüm n indisleri için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$ olur. Dolayısıyla $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*\text{-}e} f$ dir. □

Teorem 3.1.7 Eğer $\mathcal{I}$-eş ve $\mathcal{I}^*$-eş yakınsaklık çakışıyorsa o zaman $\mathcal{I}$ bir P-idealdir (Das ve ark., 2014).

İspat. X üzerinde $f_n \xrightarrow{u} f$ ve herhangi $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \neq f$ olacak şekilde bir (f_n) fonksiyonlar dizisini ve bir f fonksiyonunu ele alalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda öyle bir $m \in \mathbb{N}$ vardır ki her $x \in X$ ve her $n > m$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ dur. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elemanları boş kümeden farklı, aralarında ayrık ve $\mathcal{I}$ idealine ait kümeler ailesi olsun. Bir (g_n) dizisini

$$g_n = \begin{cases} f_j, & n \in A_j \\ f, & n \notin A_j \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m \in \mathcal{I}$ dır ve ayrıca verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \in \mathbb{N} \setminus A$ iken $|g_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ dur. O halde $g_n \xrightarrow{\mathcal{I}-u} f$ olması $g_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}e} f$ olmasını gerektirir. Böylece varsayımdan $g_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*\text{-}e} f$ elde edilir. Dolayısıyla öyle bir $B \in \mathcal{I}$ vardır ki $M = \mathbb{N} \setminus B = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve $g_{m_k} \xrightarrow{e} f$ dir. $j \in \mathbb{N}$ için $B_j = A_j \cap B$ olsun. Bu durumda her j için $B_j \in \mathcal{I}$ olur. Ayrıca $B \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset B$ dir. Dolayısıyla $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{I}$ olur. $g_{m_k} \xrightarrow{e} f$ olduğundan sabit j için $A_j \subset (A_j \cap B) \cup \{m_1, m_2, \ldots, m_{k_0}\}$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $A_j \bigtriangleup B_j = A_j \setminus B_j \subset \{m_1, m_2, \ldots, m_{k_0}\}$ yani $A_j \bigtriangleup B_j$ sonludur. Dolayısıyla $\mathcal{I}$ bir P-idealdir. □

Tanım 3.1.6 Her $x \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\}$$

kümesinin kardinalitesi en fazla k olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ sayısı ve pozitif reel sayıların sıfıra yakınsak bir (ε_n) dizisi varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün eş yakınsaktır denir ve bu durum kısaca $f_n \xrightarrow{u.e} f$ ile gösterilir (Papanastassiou, 2002).

Tanım 3.1.7 Eğer her $x \in X$ için $|\{n \in M : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\}| \leq k$ olacak şekilde pozitif reel sayıların sıfıra yakınsak bir (ε_n) dizisi, bir $M = M(\varepsilon_n) \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi ve bir $k = k(\varepsilon_n)$ sayısı varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna $\mathcal{I}^*$-düzgün eş yakınsaktır denir ve bu durum kısaca $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\longrightarrow} f$ ile gösterilir (Das ve ark., 2014).

Tanımlar dikkate alındığında, $\mathcal{I}^*$-eş yakınsaklığın, $\mathcal{I}^*$-düzgün eş yakınsaklıktan ve $\mathcal{I}^*$-düzgün eş yakınsaklığın ise $\mathcal{I}^*$-düzgün yakınsaklıktan daha zayıf olduğu anlaşılır. Bu ise sembolik olarak

$$f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}u}{\to} f \Longrightarrow f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\to} f \Longrightarrow f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}e}{\to} f$$

şeklinde gösterilebilir.

Aşağıdaki örnekler yukarıdaki gerektirmelerin terslerinin her zaman doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 3.1.4 $\mathcal{I} \neq \mathcal{I}_f$, $\mathbb{N}$ de bir uygun ideal ve $A \in \mathcal{I}$ sonsuz bir küme olsun. $(A_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus A}$ ailesi $\mathbb{R}$ nin boş olmayan ve aralarında ayrık alt kümelerinin bir ailesi olsun (Örneğin, $A_n = \left[n, n + \frac{1}{n}\right]$ alınabilir). $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir (f_n) fonksiyon dizisi ise

$$f_n = \begin{cases} \chi_{A_n}, & \text{her } n \in \mathbb{N} \setminus A \text{ için} \\ 1, & \text{her } n \in A \text{ için} \end{cases}$$

ile tanımlansın. Her n için $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = 1$ olduğundan (f_n) dizisi $f \equiv 0$ sabit fonksiyonuna $\mathcal{I}^*$-düzgün yakınsak olamaz. Diğer taraftan (ε_n), pozitif reel sayıların sıfıra yakınsak bir dizisi olmak üzere her $x \in \mathbb{R}$ için $\{n \in \mathbb{N} \setminus A : f_n(x) \geq \varepsilon_n\}$ kümesinin kardinalitesi en fazla 1 dir. Dolayısıyla (f_n) dizisi $f \equiv 0$ fonksiyonuna $\mathcal{I}^*$-düzgün eş yakınsaktır. Bunun yanı sıra, A sonsuz bir küme olduğundan (f_n) dizisi, $f \equiv 0$ fonksiyonuna düzgün eş yakınsak değildir ve böylece eş yakınsak da değildir (Das ve Dutta, 2013).

Örnek 3.1.5 Her $m \in \mathbb{N}$ için $\left[m, m + \frac{j}{m}\right]$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$ biçimindeki aralıkları göz önüne alalım ve (f_i) ile bu aralıkların karakteristik fonksiyonlarının dizisini gösterelim. $\mathcal{I}$ uygun bir ideal ve $A \in \mathcal{I}$ olsun. O halde $M = \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ dır ve $\mathcal{I}$ uygun bir ideal olduğundan M sonsuz bir kümedir. $M = \{n_1 < n_2 < \ldots\}$ olsun. Şimdi $\mathbb{R}$ üzerinde

$$\begin{aligned} &\forall k \in A \text{ için } g_k = 1, \\ &\forall i \in \mathbb{N} \text{ için } g_{n_i} = f_i \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı (g_k) dizisini ele alalım. Bu durumda (g_k) dizisi sıfır fonksiyonuna $\mathcal{I}^*$-eş yakınsaktır. Gerçekten, (ε_i) pozitif reel sayıların herhangi bir sıfır dizisi ve $k \in M$, yani

$g_k = g_{n_i} = f_i$ olsun. $x \in \mathbb{R}$ için $i_0 > x$ olacak şekilde bir $i_0 \in \mathbb{N}$ seçelim. Bu durumda her $i > i_0$ için $|g_{n_i}(x)| = |f_i(x)| = 0 < \varepsilon_i$ olur. Bu ise $g_k \overset{\mathcal{I}^*\text{-}e}{\to} 0$ olmasıdır.
Diğer taraftan, (ε_n) bir sıfır dizisi olmak üzere her $x \in \mathbb{N}$ için $|\{n \in M : |g_n(x)| \geq \varepsilon_n\}| = x - 1$ olur ki bu x değişkenine göre artandır. Ayrıca x, $\mathbb{N}$ de değiştiğinde n'lerin tümü M kümesini verir. O halde (g_k) dizisi $f = 0$ fonksiyonuna $\mathcal{I}^*$-düzgün eş yakınsak olamaz (Das ve Dutta, 2013).

Teorem 3.1.8 $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ olsun. $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\to} f$ olması için gerek ve yeter şart $\rho_n |f_n - f| \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\to} 0$ olacak şekilde sonsuza $\mathcal{I}$-ıraksak bir (ρ_n) pozitif tamsayı dizisinin mevcut olmasıdır (Das ve Dutta, 2013).

İspat. $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\to} f$ olsun. Bu durumda (ε_n) pozitif reel sayıların bir sıfır dizisi olmak üzere her $x \in X$ için

$$|\{n \in M : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\}| \leq k \tag{3.1.2}$$

olacak biçimde bir $M = M(\varepsilon_n) \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi ve bir $k = k(\varepsilon_n) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Şimdi (ρ_n) dizisini

$$\rho_n = \begin{cases} \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}}\right], & n \in M \\ 1, & n \notin M \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. (ρ_n) sonsuza $\mathcal{I}$-ıraksaktır. Bundan dolayı (3.1.2)'den, her $x \in X$ için

$$|\{n \in M : \rho_n |f_n(x) - f(x)| \geq \sqrt{\varepsilon_n}\}| \leq k$$

olur ki bu da $\rho_n |f_n - f| \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\to} 0$ olmasını gerektirir.
Tersine, (ρ_n) sonsuza $\mathcal{I}$-ıraksak bir pozitif tamsayı dizisi olmak üzere $\rho_n |f_n - f| \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\to} 0$ olsun. Bu durumda (λ_n) pozitif reel sayıların bir sıfır dizisi olmak üzere her $x \in X$ için

$$|\{n \in M : \rho_n |f_n(x) - f(x)| \geq \lambda_n\}| \leq k$$

olacak biçimde bir $M = M(\lambda_n) \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi ve bir $k = k(\lambda_n) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.
Bir $(\Theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini

$$\Theta_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda_n}{\rho_n}, & n \in M \\ \dfrac{1}{n}, & n \notin M \end{cases}$$

ile tanımlayalım. $\lim_n \Theta_n = 0$ olup her $x \in X$ için $|\{n \in M : |f_n(x) - f(x)| \geq \Theta_n\}| \leq k$ dır. O halde ispat tamamlanmış olur. $\square$

Lemma 3.1.1 $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ olsun. $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\longrightarrow} 0$ ise o halde $f_n^2 \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\longrightarrow} 0$ dır (Das ve Dutta, 2013).

İspat. Tanımdan (ε_n) pozitif reel sayıların bir sıfır dizisi olmak üzere her $x \in X$ için

$$|\{n \in M : |f_n(x)| \geq \varepsilon_n\}| \leq k$$

olacak biçimde bir $M = M(\varepsilon_n) \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi ve bir $k = k(\varepsilon_n) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. O halde her $x \in X$ için

$$\left|\left\{n \in M : |f_n(x)|^2 \geq \varepsilon_n^2\right\}\right| \leq k$$

ve buradan her $x \in X$ için

$$\left|\left\{n \in M : \left|f_n^2(x)\right| \geq \varepsilon_n^2\right\}\right| \leq k$$

olur. Bu ise $f_n^2 \overset{\mathcal{I}^*-ue}{\longrightarrow} 0$ olmasıdır. □

Lemma 3.1.2 $f_n, f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ olsun. Eğer f sınırlı ve $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\longrightarrow} f$ ise $f_n f \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\to} f^2$ dir (Das ve Dutta, 2013).

İspat. Her $x \in X$ için $|f(x)| \leq B$ olacak şekilde bir B pozitif reel sayısı mevcut olsun. $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\longrightarrow} f$ olduğundan, (ε_n) pozitif reel sayıların bir sıfır dizisi olmak üzere her $x \in X$ için

$$|\{n \in M : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\}| \leq k$$

olacak biçimde bir $M = M(\varepsilon_n) \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi ve bir $k = k(\varepsilon_n) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

$$|f(x)|\,|f_n(x) - f(x)| \geq \left|(f_n.f)(x) - f^2(x)\right|$$

olduğundan her $x \in X$ için

$$\begin{aligned}\left\{n \in M : \left|(f_n.f)(x) - f^2(x)\right|\right\} &\subset \{n \in M : f(x)|\,|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n B\} \\ &\subset \{n \in M : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\}\end{aligned}$$

dir. Böylece her $x \in X$ için $|\{n \in M : |(f.f_n)(x) - f^2(x)| \geq \varepsilon_n.B\}| \leq k$ olur. Bu ise $f_n.f \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\to} f^2$ olmasıdır. □

Lemma 3.1.1 ve Lemma 3.1.2 kullanılıp

$$f_n g_n = \frac{(f_n + g_n)^2 - (f_n - g_n)^2}{4}$$

eşitliği dikkate alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.1.9 $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\longrightarrow} f$ ve $g_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\longrightarrow} g$ ise $f_n g_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\longrightarrow} fg$ dir (Das ve Dutta, 2013).

X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere X üzerinde tanımlı fonksiyonların herhangi bir sınıfını Φ ile gösterelim. Φ sınıfına ait olan fonksiyonların dizilerinin $\mathcal{I}$-eş ve $\mathcal{I}^*$-düzgün eş limiti olan X üzerinde tanımlı fonksiyonların sınıfını da sırasıyla $\Phi^{\mathcal{I}\text{-}e}$ ve $\Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ue}$ ile gösterelim.

Tanım 3.1.8 (i) Eğer Φ tüm sabitleri içerir ve $f, g \in \Phi$ için $\max(f, g) \in \Phi$ ve $\min(f, g) \in \Phi$ ise Φ ye bir *latis* denir.
(ii) Eğer Φ bir latis ve $f \in \Phi$, $c \in \mathbb{R}$ için $f + c \in \Phi$ ise Φ ye bir *öteleme latisi* denir.
(iii) Eğer Φ bir *öteleme latisi* ve $f \in \Phi$ için $-f \in \Phi$ ise Φ ye bir *eş latis* denir.
(iv) Eğer Φ bir eş latis ve $C \subset (0, \infty)$ sınırlı olmayan bir küme olmak üzere $f \in \Phi$, $c \in C$ için $cf \in \Phi$ ise Φ ye bir *zayıf afin latis* denir.
(v) Eğer Φ bir eş latis ve $f \in \Phi$, $c \in C$ için $cf \in \Phi$ ise Φ ye bir *afin latis* denir.
(vi) Eğer Φ bir latis ve $f, g \in \Phi$ için $f - g \in \Phi$ ise Φ ye *subtractive latis* denir.
(vii) Eğer Φ bir subtractive latis ve $f, g \in \Phi$ için $f.g \in \Phi$ ve ayrıca her $x \in X$ için $f(x) \neq 0$ olan bir $f \in \Phi$ için $1/f \in \Phi$ oluyorsa Φ ye bir *adi (ordinary) sınıf* denir. (Császár ve Laczkovich, 1979).

Teorem 3.1.10 Eğer Φ bir adi sınıf ise $\Phi^{\mathcal{I}\text{-}e}$ de bir adi sınıftır (Das ve ark., 2014).

İspat. İdeal eş yakınsaklık tanımından $\Phi^{\mathcal{I}\text{-}e}$ sınıfının bir subtractive latis olduğu kolayca görülebilir. Varsayalım ki $f, g \in \Phi^{\mathcal{I}\text{-}e}$ olsun. Bu durumda Φ sınıfına ait öyle (f_n) ve (g_n) dizileri ve bir $A_x \in \mathcal{I}$ vardır ki her $x \in X$ ve her $n \in A_x^c = \mathbb{N} \setminus A_x$ için $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n^2}$ ve $|g_n(x) - g(x)| < \frac{1}{n^2}$ dir. Eğer $n_0 = \max\{2[|g(x)| + 1], 2[|f(x)|]\}$ (Burada $[|f|]$, f nin tam değeridir) dersek, $n \notin A_x \cup \{1, 2, 3, \ldots, n_0\}$ için

$$\begin{aligned}
|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &\leq |f_n(x) - f(x)|\,|g_n(x)| + |f(x)|\,|g_n(x) - g(x)| \\
&\leq \frac{1}{n^2}(|g(x)| + 1) + \frac{1}{n^2}(|f(x)|) \\
&< \frac{1}{n^2}\frac{n}{2} + \frac{1}{n^2}\frac{n}{2} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu nedenle $f.g$ fonksiyonu $(f_n.g_n)$ dizisinin $\mathcal{I}$-eş limitidir. Bundan dolayı $f.g \in \Phi^{\mathcal{I}\text{-}e}$ dir. Şimdi de $f \in \Phi^{\mathcal{I}\text{-}e}$ ve her $x \in X$ için $f(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda $f^2 \in \Phi^{\mathcal{I}\text{-}e}$ olur. Buna göre öyle bir $(f_n) \subset \Phi$ dizisi ve bir $A_x \in \mathcal{I}$ vardır ki her $n \in A_x^c$ için $|f_n(x) - f^2(x)| < \frac{1}{n^3}$ olur. Eğer $g_n = \max\left\{f_n, \frac{1}{n}\right\}$ olarak alırsak $g_n \in \Phi$ ve $g_n \geq \frac{1}{n}$ dir. Ayrıca $n_0 = 2\left[f(x)^{-2}\right] + 1$ olmak üzere her $n \notin A_x \cup \{1, 2, 3, \ldots, n_0\}$ için $|g_n(x) - f^2(x)| <$

$\frac{1}{n^3}$ tür. Böylece $h_n = g_n^{-1}$ için $h_n \in \Phi$ dir ve her $n \notin A_x \cup \{1, 2, 3, \ldots, n_0\}$ için

$$\left|h_n(x) - f\,(x)^{-2}\right| = \left|g_n(x) - f(x)^2\right| \left|g_n(x)^{-1}\right| \left|f(x)^{-2}\right| < \frac{1}{n^3}.n.n = \frac{1}{n}$$

elde ederiz. Böylece $f^{-2} \in \Phi^{\mathcal{I}\text{-}e}$ dir. Bundan dolayı $f^{-1} = f.f^{-2} \in \Phi^{\mathcal{I}\text{-}e}$ bulunur. Sonuç olarak, $\Phi^{\mathcal{I}\text{-}e}$ bir adi sınıftır. □

Teorem 3.1.11 Φ, X üzerindeki fonksiyonların bir sınıfı olsun. Eğer Φ bir latis, bir öteleme latisi, bir eş latis, bir zayıf afin latis, bir afin latis veya bir subtractive latis ise bu durumda $\Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ue}$ sınıfıda aynı özelliklere sahiptir. Ayrıca $f \in \Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ue}$ sınırlı ise $f^2 \in \Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ue}$ dir (Das ve Dutta, 2013).

İspat. Φ bir latis olsun. Φ tüm sabit fonksiyonları içerdiğinden $\Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ue}$ sabit fonksiyonları içerir. Şimdi $f, g \in \Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ue}$ için $\max(f, g) \in \Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ue}$ ve $\min(f, g) \in \Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ue}$ olduğunu gösterelim. $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\rightarrow} f$ olsun. (ε_n) pozitif reel sayıların $\lim_n \varepsilon_n = 0$ özelliğine sahip bir dizisi olmak üzere her $x \in X$ için

$$|\{n \in M : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\}| \leq k$$

olacak şekilde bir $M = M(\varepsilon_n) \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi ve bir $k = k(\varepsilon_n) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $||f_n(x)| - |f(x)|| \leq |f_n(x) - f(x)|$ olduğundan her $x \in X$ için

$$|\{n \in M : ||f_n|\,(x) - |f|\,(x)| \geq \varepsilon_n\}| \leq k$$

yani $|f_n| \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\rightarrow} |f|$ dir. Şimdi $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\rightarrow} f$, $g_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\rightarrow} g$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ise $\alpha f_n + \beta g_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\rightarrow} \alpha f + \beta g$ olduğunu gösterelim. Tanımdan (ε_n) ve (λ_n) pozitif reel sayıların iki sıfır dizisi olmak üzere her $x \in X$ için

$$|\{n \in M_f : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\}| \leq n_f$$

ve

$$|\{n \in M_g : |g_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon_n\}| \leq n_g$$

olacak şekilde $M_f, M_g \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümeleri ve $n_f = n_f(\{\varepsilon_n\})$, $n_g = n_g(\{\lambda_n\}) \in \mathbb{N}$ sayıları vardır. $Q_n = \max\{2\,|\alpha|\,\varepsilon_n, 2\,|\beta|\,\lambda_n\}$ ve $k = n_f + n_g$ olduğunu varsayalım. Dolayısıyla

$$|\{n \in M_f \cap M_g : |\alpha\,(f_n - f)\,(x) + \beta(g_n - g)(x)| \geq Q_n\}| \leq k$$

olur ve burada $M_f \cap M_g \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve $\lim_n Q_n = 0$ dır. Bundan dolayı $\alpha f_n + \beta g_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\rightarrow} \alpha f + \beta g$ dir. Buna göre $f, g \in \Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ue}$, $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\rightarrow} f$ ve $g_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\rightarrow} g$ ise

$$\frac{f_n + g_n}{2} + \frac{|f_n - g_n|}{2} \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\longrightarrow} \frac{f + g}{2} + \frac{|f - g|}{2} = \max(f, g)$$

elde edilir. Bu ise $\max(f, g) \in \Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ue}$ olmasıdır. Benzer şekilde $\min(f, g) \in \Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ue}$ olduğu gösterilebilir. Böylece $\Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ue}$ bir latistir. Diğer iddiaların ispatları ise açıktır. Ayrıca son iddianın doğruluğu Lemma 3.1.2'den çıkar. □

Teorem 3.1.12 Φ, X üzerindeki fonksiyonların bir adi sınıfı, $f \in \Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ue}$ sınırlı bir fonksiyon ve her $x \in X$ için $f(x) \neq 0$ olsun. Eğer X üzerinde $\frac{1}{f}$ sınırlı ise $\frac{1}{f} \in \Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ue}$ dir (Das ve Dutta, 2013).

İspat. $1/f$ fonksiyonunun X üzerinde sınırlı olduğunu varsayalım. Bu durumda her $x \in X$ için $f^2(x) > \lambda$ olacak şekilde $\lambda > 0$ sayısı vardır. Teorem 3.1.11'e göre, $f \in \Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ue}$ ve f sınırlı olduğundan $f^2 \in \Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ue}$ olmalıdır. Bundan dolayı Φ sınıfına ait öyle bir (f_n) dizisi, $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi ve $k \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki her $x \in X$ için

$$\left|\left\{n \in M : \left|f_n(x) - f^2(x)\right| \geq \frac{1}{n^3}\right\}\right| \leq k$$

dır. $x \in X$ için $g_n(x) = \max\left\{f_n(x), \frac{1}{n}\right\}$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $g_n \in \Phi$ dir. Bundan dolayı

$$\left|\left\{n \in M : g_n(x) = f_n(x),\ \ \left|g_n(x) - f^2(x)\right| \geq \frac{1}{n^3}\right\}\right| \leq k$$

ve

$$\begin{aligned}
& \left\{n \in M : g_n(x) = \frac{1}{n}, \left|g_n(x) - f^2(x)\right| \geq \frac{1}{n^3}\right\} \\
= \ & \left\{n \in M : g_n(x) = \frac{1}{n}, g_n(x) - f^2(x) \geq \frac{1}{n^3}\right\} \\
& \cup \left\{n \in M : g_n(x) = \frac{1}{n}, -g_n(x) + f^2(x) \geq \frac{1}{n^3}\right\} \\
\subset \ & \left\{n \in M : f^2(x) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right\} \cup \left\{n \in M : f^2(x) \geq f_n(x) + \frac{1}{n^3}\right\} \\
\subset \ & \left\{n \in M : f^2(x) < \frac{1}{n}\right\} \cup \left\{n \in M : f^2(x) \geq f_n(x) + \frac{1}{n^3}\right\}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece $k^{'} = \left[\frac{1}{\lambda}\right] + 1$ olmak üzere

$$\left|\left\{n \in M : g_n(x) = \frac{1}{n}, \left|g_n(x) - f^2(x)\right| \geq \frac{1}{n^3}\right\}\right| \leq k^{'} + k = k_1$$

dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\left\{n \in M : |g_n(x) - f^2(x)| \geq \frac{1}{n^3}\right\} \ = \ & \left\{n \in M : g_n(x) = f_n(x), |g_n(x) - f^2(x)| \geq \frac{1}{n^3}\right\} \\
& \cup \left\{n \in M : g_n(x) = \frac{1}{n}, |g_n(x) - f^2(x)| \geq \frac{1}{n^3}\right\}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\left|\left\{n \in M : \left|g_n(x) - f^2(x)\right| \geq \frac{1}{n^3}\right\}\right| \leq k_1 + k =: k_2$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned}\left|\left\{n\in M:\left|\frac{1}{g_n(x)}-\frac{1}{f^2(x)}\right|\geq\frac{1}{n^3}.n.\frac{1}{\lambda}\right\}\right| &= \left|\left\{n\in M:\frac{|f^2(x)-g_n(x)|}{|g_n(x)|\,|f^2(x)|}\geq\frac{1}{n^3}.n.\frac{1}{\lambda}\right\}\right| \\ &\leq \left|\left\{n\in M:|g_n(x)-f^2(x)|\geq\frac{1}{n^3}\right\}\right| \\ &\leq k_2\end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı $f^{-2}\in\Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ue}$ ve böylece $f.f^{-2}=f^{-1}\in\Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ue}$ olur. Dolayısıyla ispat biter. □

Aşağıdaki tanım Papanastassiou (2002) tarafından verilen düzgün ayrık yakınsaklık kavramının $\mathcal{I}^*$ benzeridir.

Tanım 3.1.9 Eğer her $x\in X$ için

$$|\{n\in M:|f_n(x)-f(x)|>0\}|\leq k$$

olacak şekilde $M\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi ve $k\in\mathbb{N}$ sayısı varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna $\mathcal{I}^*$-düzgün ayrık yakınsaktır denir ve bu durum $f_n\overset{\mathcal{I}^*\text{-}ud}{\longrightarrow}f$ ile gösterilir (Das ve Dutta, 2013).

Φ sınıfına ait olan fonksiyon dizilerinin $\mathcal{I}^*$-düzgün ayrık limiti olan X üzerinde tanımlı fonksiyonların sınıfı $\Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ud}$ ile gösterilecektir.

Tanım 3.1.9 ve Teorem 3.1.11'deki ispat yöntemi kullanılarak aşağıdaki teorem kolayca ispatlanabilir.

Teorem 3.1.13 Φ, X deki tüm fonksiyonların sınıfı olsun. Eğer Φ bir latis, bir öteleme latisi, bir eş latis, bir zayıf afin latis, bir afin latis veya bir subtractive latis ise bu durumda $\Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ud}$ sınıfıda aynı özelliklere sahiptir (Das ve Dutta, 2013).

Teorem 3.1.14 Φ, X üzerinde tanımlı fonksiyonların bir adi sınıfı olsun. Bu durumda $f,g\in\Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ud}$ ise $f.g\in\Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ud}$ dir. Ayrıca f, $\Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ud}$ sınıfına ait sıfırdan farklı bir fonksiyon ve X üzerinde $\frac{1}{f}$ sınırlı ise $\frac{1}{f}\in\Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ud}$ dir (Das ve Dutta, 2013).

İspat. $f,g\in\Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ud}$ olsun. O zaman Φ sınıfına ait öyle (f_n) ve (g_n) dizileri vardır ki $f_n\overset{\mathcal{I}^*\text{-}ud}{\to}f$ ve $g_n\overset{\mathcal{I}^*\text{-}ud}{\to}g$ dir. $\mathcal{I}^*$-düzgün ayrık yakınsaklık tanımı kullanılarak Teorem 3.1.9'daki gibi $f_n.g_n\overset{\mathcal{I}^*\text{-}ud}{\to}f.g$ olduğu gösterilebilir. f, $\Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ud}$ sınıfına ait sıfırdan farklı bir fonksiyon ve X üzerinde $\frac{1}{f}$ sınırlı olsun. Her $x\in X$ için $f^2(x)>\mu>0$ olacak şekilde bir μ sayısı seçelim. (f_n) ise Φ sınıfına ait $f_n\overset{\mathcal{I}^*\text{-}ud}{\to}f$ özelliğinde bir dizi olsun. Φ bir adi sınıf olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n^2 \in \Phi$ dir. (λ_n) pozitif reel sayıların sıfıra yakınsak bir dizisi ve $g_n = \max\{f_n^2, \lambda_n\}$ olsun. Bu durumda $g_n \in \Phi$ dir. $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ud}{\to} f$ olduğundan tanımdan her $x \in X$ için

$$|\{n \in M : f_n(x) \neq f(x)\}| \leq k$$

olacak şekilde $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve $k \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $f_n^2 \xrightarrow{\mathcal{I}^*\text{-}ud} f^2$ olduğundan her $x \in X$ için

$$\left|\left\{n \in M : f_n^2(x) \neq f^2(x)\right\}\right| \leq k$$

ve böylece her $x \in X$ için

$$\left|\left\{n \in M : g_n(x) \neq \max\left\{f^2(x), \lambda_n\right\}\right\}\right| \leq k$$

olur. Buradan ise her $x \in X$ için

$$\left|\left\{n \in M : \frac{1}{g_n(x)} \neq \frac{1}{\max\{f^2(x), \lambda_n\}}\right\}\right| \leq k \tag{3.1.3}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\lim_n \lambda_n = 0$ olduğundan öyle bir $k' \in \mathbb{N}$ vardır ki $n > k'$ olacak şekildeki her $n \in M$ için $\lambda_n < \mu$ dür. Böylece her $x \in X$ için

$$\left|\left\{n \in M : \frac{1}{\max\{f^2(x), \lambda_n\}} \neq \frac{1}{f^2(x)}\right\}\right| \leq k' \tag{3.1.4}$$

olur. O halde (3.1.3) ve (3.1.4)'den her $x \in X$ için

$$\left|\left\{n \in M : \frac{1}{g_n(x)} \neq \frac{1}{f^2(x)}\right\}\right| \leq k + k'$$

bulunur. Bu durumda $f^{-2} \in \Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ud}$ ve sonuç olarak $f.f^{-2} = f^{-1} \in \Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}ud}$ bulunur. Böylece ispat biter. □

Tanım 3.1.10 Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ olacak şekilde pozitif reel sayıların bir (ε_n) dizisi, bir $M = M(\varepsilon_n) \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi ve bir $k = k(\varepsilon_n) \in \mathbb{N}$ sayısı var öyleki her $x \in X$ için $|\{n \in M : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\}| \leq k$ oluyorsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna $\mathcal{I}^*$-kuvvetli düzgün eş yakınsaktır denir ve bu durum $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*\text{-}sue} f$ biçiminde gösterilir (Das ve Dutta, 2013).

Φ sınıfına ait olan fonksiyon dizilerinin $\mathcal{I}^*$-kuvvetli düzgün ayrık limiti olan X üzerinde tanımlı fonksiyonların sınıfı $\Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}sue}$ ile gösterilecektir.

Örnek 3.1.6 $\mathcal{I}$ uygun bir ideal olsun. Böylece sonsuz bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi vardır. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı fonksiyoların bir (f_n) dizisi her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \in M \\ 0, & n \notin M \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ alınırsa

$$|\{n \in M : |f_n(x)| \geq \varepsilon_n\}| = \left|\left\{n \in M : \frac{1}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}\right| \leq 1$$

olacağından $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\longrightarrow} f = 0$ dır. Fakat ε_n herhangi bir pozitif reel sayı dizisi olmak üzere

$$\left|\left\{n \in M : |f_n(x)| = \frac{1}{n} \geq \varepsilon_n\right\}\right| \leq k_0$$

ise her $n > k_0$ için $\varepsilon_n > \frac{1}{n}$ olacağından $\sum \varepsilon_n$ serisi yakınsak olamaz. O halde (f_n) dizisi sıfıra $\mathcal{I}^*$-kuvvetli düzgün eş yakınsak değildir (Das ve Dutta, 2013).

Uyarı 3.1.5 Tanımdan ve yukarıdaki örnekten $\mathcal{I}^*$-kuvvetli düzgün eş yakınsaklığın $\mathcal{I}^*$-düzgün eş yakınsaklıktan daha kuvvetli olduğu söylenebilir.

$\mathcal{I}^*$-düzgün eş yakınsaklık durumunda olduğu gibi aşağıdaki sonuçlar kolayca ispatlanabilir.

Lemma 3.1.3 $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : X \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}sue}{\longrightarrow} 0$ ise $f_n^2 \overset{\mathcal{I}^*\text{-}sue}{\longrightarrow} 0$ dır (Das ve Dutta, 2013).

Lemma 3.1.4 $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : X \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer f sınırlı ve $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}sue}{\longrightarrow} f$ ise $f_n.f \overset{\mathcal{I}^*\text{-}sue}{\longrightarrow} f^2$ dir (Das ve Dutta, 2013).

Teorem 3.1.15 Eğer $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}sue}{\longrightarrow} f$ ve $g_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}sue}{\longrightarrow} g$ ise f ve g sınırlı olduğunda $f_n.g_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}sue}{\longrightarrow} f.g$ dir (Das ve Dutta, 2013).

Teorem 3.1.16 Φ, X üzerindeki fonksiyonların bir sınıfı olsun. Eğer Φ bir latis, bir öteleme latisi, bir eş latis, bir zayıf afin latis, bir afin latis veya bir subtractive latis ise bu durumda $\Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}sue}$ sınıfıda aynı özelliklere sahiptir (Das ve Dutta, 2013).

İspat. Φ bir latis olsun. Φ tüm sabit fonksiyonları içerdiğinden $\Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}sue}$ sabit fonksiyonları içerir. $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}sue}{\longrightarrow} f$ olsun. Buradan $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ olacak şekilde pozitif reel sayıların bir (ε_n) dizisi ve her $x \in X$ için $|\{n \in M : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\}| \leq k$ olacak şekilde bir $M = M(\varepsilon_n) \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi ve bir $k = k(\varepsilon_n) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $|f_n|\,|(x) - |f(x)|| \leq |f_n(x) - f(x)|$ yazılabildiğinden her $x \in X$ için

$$|\{n \in M : |f_n|\,|(x) - |f(x)|| \geq \varepsilon_n\}| \leq k,$$

yani $|f_n| \overset{\mathcal{I}^*\text{-}ue}{\to} |f|$ dir. Eğer $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}sue}{\longrightarrow} f$, $g_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}sue}{\longrightarrow} g$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ise $\alpha f_n + \beta g_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}sue}{\longrightarrow} \alpha f + \beta g$ olduğunu gösterelim. Tanımdan $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ olacak şekilde (ε_n) ve (λ_n) dizileri vardır öyleki her $x \in X$ için

$$|\{n \in M_f : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\}| \leq n_f$$

ve

$$|\{n \in M_g : |g_n(x) - g(x)| \geq \lambda_n\}| \leq n_g$$

sağlanacak biçimde $M_f, M_g \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümeleri ve $n_f = n_f(\{\varepsilon_n\})$, $n_g = n_g(\{\lambda_n\}) \in \mathbb{N}$ sayıları mevcuttur. $\theta_n = \max\{2|\alpha|\varepsilon_n, 2|\beta|\lambda_n\}$ ve $k = n_f + n_g$ olsun. Dolayısıyla

$$|\{n \in M_f \cap M_g : |\alpha(f_n - f)(x) + \beta(g_n - g)(x)| \geq \theta_n\}| \leq k$$

dır. Burada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \max\{2|\alpha|\varepsilon_n, 2|\beta|\lambda_n\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (2|\alpha|\varepsilon_n + 2|\beta|\lambda_n) < \infty$$

ve $M_f \cap M_g \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ dır. Bundan dolayı $\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*\text{-}sue} \alpha f + \beta g$ dir. Böylece $f, g \in \Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}sue}$, $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*\text{-}sue} f$ ve $g_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*\text{-}sue} g$ olması

$$\frac{f_n + g_n}{2} + \frac{|f_n - g_n|}{2} \xrightarrow{\mathcal{I}^*\text{-}ue} \frac{f + g}{2} + \frac{|f - g|}{2} = \max(f, g)$$

olmasını gerektirir. Yani $\max(f, g) \in \Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}sue}$. Benzer şekilde $\min(f, g) \in \Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}sue}$ olduğu gösterilebilir. Böylece $\Phi^{\mathcal{I}^*\text{-}sue}$ bir latistir. Geriye kalan iddiaların doğruluğu da kolayca gösterilebilir. □

Not 3.1.2 X bir küme ve S, X kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir ailesi olsun. Eğer

(i) $X \in S$, *(ii)* $A \in S \Rightarrow X \setminus A \in S$, *(iii)* Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in S \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in S$

özellikleri varsa S ye bir σ-cebir denir. S bir σ-cebir olmak üzere bir $\mu : S \to [0, \infty]$, fonksiyonu, $\mu(\emptyset) = 0$ ve aralarında ayrık sayılabilir her $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi için

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

özelliğine sahip ise μ ye bir ölçü denir. (X, S, μ) üçlüsüne de bir ölçü uzayı denir. (X, S, μ) bir ölçü uzayı ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere eğer her $a \in \mathbb{R}$ için $\{x \in X : f(x) > a\} \in S$ oluyorsa f fonksiyonuna ölçülebilir bir fonksiyon denir (Kolmogorov ve Fomin, 1970)

Aşağıdaki iki tanım ve teoremde (X, S, μ) ile bir ölçü uzayı gösterilecek ve (f_n), f fonksiyonlarının X üzerinde tanımlı reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar olduğu kabul edilecektir.

Tanım 3.1.11 Eğer pozitif reel sayıların bir (ε_n) sıfır dizisi ve bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi mevcut öyleki her $\delta > 0$ için $\mu(A_\delta) < \delta$ olan bir $A_\delta \in S$ ve bir $k = k((\varepsilon_n), \delta) \in \mathbb{N}$ sayısı her $x \in X \setminus A_\delta$ için

$$|\{n \in M : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\}| \leq k$$

sağlanacak biçimde varsa o zaman (f_n) dizisi f fonksiyonuna $\mathcal{I}^*$-hemen hemen düzgün eş yakınsaktır denir (Das ve ark., 2014).
X üzerinde her n için f_n, f ölçülebilir fonksiyonlar ve (ε_n) pozitif reel sayıların bir dizisi olsun.

$$\begin{aligned} A_x^f((\varepsilon_n))_M &= \{n \in M : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\}, \ M \subset \mathbb{N}, \ x \in X \\ B_k^f((\varepsilon_n))_M &= \left\{x \in X : \left|A_x^f((\varepsilon_n))_M\right| > k\right\}, \ M \subset \mathbb{N}, \ k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

kümelerini tanımlayalım. Burada $\left|A_x^f((\varepsilon_n))_M\right|$ gösterimi $A_x^f((\varepsilon_n))_M$ kümesinin kardinal sayısı anlamına gelmektedir. Sabit bir $M \subset \mathbb{N}$ için $k_1 < k_2$ iken $B_{k_1}^f((\varepsilon_n))_M \supset B_{k_2}^f((\varepsilon_n))_M$ olacağından $\left\{B_k^f((\varepsilon_n))_M\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ ölçülebilir kümelerin azalan bir dizisidir. Ayrıca, $M_1 \subset M_2$ ise her $x \in X$, $k = 1, 2, \ldots$ için

$$A_x^f((\varepsilon_n))_{M_1} \subset A_x^f((\varepsilon_n))_{M_2}, \quad B_k^f((\varepsilon_n))_{M_1} \subset B_k^f((\varepsilon_n))_{M_2}$$

dir.

Tanım 3.1.12 $\lim_k \mu\left(B_k^f(\varepsilon_n)_M\right) = 0$ olacak biçimde $\lim_n \varepsilon_n = 0$ özelliğinde pozitif reel sayıların bir (ε_n) dizisi ve bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ varsa (f_n) dizisi f ye göre $\mathcal{I}^*$-quasi sıfırlama kısıtlamasını sağlar denir (Das ve ark., 2014).

(X, S, μ) bir ölçü uzayı ve $E \subset S$, $\mu(E) < \infty$ olan ölçülebilir bir küme olsun. (f_n) dizisi E de ölçülebilir reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer (f_n) dizisi reel değerli ve ölçülebilir olan f fonksiyonuna hemen hemen her yerde yakınsak (yani ölçüsü sıfır olan küme dışında noktasal yakınsak ise) her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\mu(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ ve E_ε üzerinde (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak olacak şekilde bir $E_\varepsilon \subset E$ kümesi vardır. Bu teorem Egorov (Egoroff) teoremi olarak bilinir.

Aşağıdaki teorem bir Egorov tipi teoremdir.

Teorem 3.1.17 Aşağıdakiler denktir:
(i) (f_n) dizisi f fonksiyonuna $\mathcal{I}^*$-hemen hemen düzgün eş yakınsaktır.
(ii) (f_n) dizisi f fonksiyonuna $\mathcal{I}^*$-eş hemen hemen heryerde yakınsaktır ve pozitif reel sayıların bir (γ_n) sıfır dizisi, bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi ve bir $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki

$$\mu\left(B_{m_0}^f(\gamma_n)_M\right) < \infty$$

dur.
(iii) (f_n) dizisi f ye göre $\mathcal{I}^*$-quasi sıfırlama kısıtlamasını sağlar (Das ve ark., 2014).

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: (f_n) dizisi f fonksiyonuna $\mathcal{I}^*$-hemen hemen düzgün eş yakınsak olsun. Yani pozitif reel sayıların bir (ε_n) sıfır dizisi ve bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi mevcut öyleki her $\delta > 0$ için $\mu(A_\delta) < \delta$ olan bir $A_\delta \in S$ ve bir $k = k((\varepsilon_n), \delta) \in \mathbb{N}$ sayısı her $x \in X \setminus A_\delta$ için

$$|\{n \in M : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\}| \leq k((\varepsilon_n), \delta)$$

sağlanacak şekilde vardır. Yani her $x \in X \setminus A_\delta$ için $\left|A_x^f((\varepsilon_n))_M\right| \leq k$ dır. Dolayısıyla $B^f_{k((\varepsilon_n),\delta)}((\varepsilon_n))_M \subset A_\delta$ ve böylece $\mu\left(B^f_{k((\varepsilon_n),\delta)}((\varepsilon_n))_M\right) \leq \mu(A_\delta) < \delta$ dır. O halde (ii)'nin ikinci kısmı kanıtlanmış olur. İlk kısmı ispatlayalım. (f_n) dizisi f fonksiyonuna $\mathcal{I}^*$-hemen hemen düzgün eş yakınsak ise (ε_n) pozitif reel sayıların bir sıfır dizisi ve $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(A_n) < 1/n$ olan bir $A_n \in S$ ve bir $k = k((\varepsilon_n), n)$ sayısı, her $x \in X \setminus A_n$ için

$$|\{n \in M : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\}| \leq k \tag{3.1.5}$$

sağlanacak şekilde vardır. $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ dersek her n için $A_n \in S$ ve S bir σ-cebir olduğundan $A \in S$ dir. Ayrıca her n için $\mu(A) \leq \mu(A_n) < 1/n$ olduğundan $\mu(A) = 0$ olur. Eğer $x \in X \setminus A$ ise en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $x \in X \setminus A_n$ dir. Bu durumda (3.1.5)'den her $n \in M \setminus P_x$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$ sağlanacak şekilde sonlu bir $P_x \subset M$ kümesi mevcuttur. Bu ise (f_n) dizisinin f fonksiyonuna $\mathcal{I}^*$-eş hemen hemen heryerde yakınsak olmasıdır.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: (ii)'deki koşulların sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $\mu(G) = 0$ olacak şekilde bir $G \in S$ kümesine karşılık pozitif reel sayıların bir (ε_n) sıfır dizisini, bir $M_1(\{\varepsilon_n\}) \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesini ve her $x \in X \setminus G$ için öyle bir sonlu $P_x \subset M_1$ kümesini bulabiliriz ki her $n \in M_1 \setminus P_x$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$ sağlanır. $\lambda_n = \max\{\varepsilon_n, \gamma_n\}$ olarak belirleyelim. Bu durumda $0 \leq \varepsilon_n,\ \gamma_n \leq \lambda_n$ ve $\lim_n \lambda_n = 0$ dır. Buna göre, $x \in X \setminus G$ olduğunda her $n \in M_1 \setminus P_x$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \lambda_n \tag{3.1.6}$$

olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \geq \gamma_n \geq 0$ olduğundan

$$\{n \in M : |f_n(x) - f(x)| \geq \lambda_n\} \subset \{n \in M : |f_n(x) - f(x)| \geq \gamma_n\}$$

olur. Bu ise her $k = 1, 2, \ldots$ için $B^f_k(\lambda_n)_M \subset B^f_k(\gamma_n)_M$ olmasını gerektirir. Burada $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi varsayımımızdan gelen kümedir. Ayrıca yine varsayımımıza göre $\mu\left(B^f_{m_0}(\gamma_n)_M\right) < \infty$ olacak şekilde $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $\mu\left(B^f_{m_0}(\lambda_n)_M\right) < \infty$ olur. $M_0 = M \cap M_1$ dersek $M_0 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olur. Ayrıca $B^f_{m_0}(\lambda_n)_{M_0} \subset B^f_{m_0}(\lambda_n)_M$ olduğundan dolayı $\mu\left(B^f_{m_0}(\lambda_n)_{M_0}\right) < \infty$ olmalıdır. Ayrıca (3.1.6) her $n \in M_0 \setminus P_x$ için $|f_n(x) - f(x)| < \lambda_n$ olduğu açıktır. Buna göre $|P_x| = l(x)$ dersek,

$$|\{n \in M_0 : |f_n(x) - f(x)| \geq \lambda_n\}| \leq l(x)$$

olur. Yani $x \notin B^f_{l(x)}(\lambda_n)_{M_0}$ dır ve bu nedenle $x \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} B^f_k(\lambda_n)_{M_0}$ dır. Bu her $x \in X \setminus G$ için doğru olduğundan $\bigcap_{k=1}^{\infty} B^f_k(\lambda_n)_{M_0} \subset G$ bulunur. Böylece $\mu(G) = 0$ olduğundan $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B^f_k(\lambda_n)_{M_0}\right) = 0$ olur. Ancak $\left(B^f_k(\lambda_n)_{M_0}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ölçülebilir kümelerin azalan bir dizisi ve $\mu\left(B^f_{m_0}(\lambda_n)_{M_0}\right) < \infty$ olduğundan ölçümün süreklilik özelliğine göre

$$\lim_k \left(\mu\left(B^f_k(\lambda_n)_{M_0}\right)\right) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B^f_k(\lambda_n)_{M_0}\right) = 0$$

elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Son olarak (f_n) dizisinin f ye göre $\mathcal{I}^*$-quasi sıfırlama kısıtlamasını sağladığını kabul edelim. Yani $\lim_k \mu\left(B^f_k(\varepsilon_n)_M\right) = 0$ olacak biçimde $\lim \varepsilon_n = 0$ özelliğinde pozitif reel sayıların bir (ε_n) dizisi ve bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi mevcut olsun. Dolayısıyla $\delta > 0$ verildiğinde $\mu\left(B^f_k(\varepsilon_n)_M\right) < \delta$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ bulabiliriz. $A_\delta = B^f_k(\varepsilon_n)_M$ alırsak $\mu(A_\delta) < \delta$ olur. Ayrıca eğer $x \in X \setminus A_\delta$ ise $x \notin B^f_k(\varepsilon_n)_M$ ve bundan dolayı

$$|\{n \in M : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\}| \leq k$$

dır. Bu (f_n) dizisinin f ye $\mathcal{I}^*$-hemen hemen düzgün eş yakınsak olduğunu gösterir. □

Tanım 3.1.13 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ üzerinde

$$f \leq^* g \Leftrightarrow \{n : f(n) > g(n)\} \text{ sonlu}$$

şeklinde tanımlı $\leq^*$ bağıntısı bir pre-sıralama bağıntısıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} &= \min\left\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ ve } \mathcal{F},\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ de sınırsız}\right\} \\ &= \min\left\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ ve } \neg\left(\exists g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \forall f \in \mathcal{F},\ f \leq^* g\right)\right\} \end{aligned}$$

kardinal sayısına sınırlama sayısı (bounding number) denir. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ kümesinin kendisi $\leq^*$ bağıntısına göre sınırsız olduğundan $\mathfrak{b}$ sayısı mevcuttur. Diğer taraftan $\aleph_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{c}$ geçerlidir.

Gerçekten, $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = \mathfrak{c}$ olduğundan $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{c}$ dir. $\aleph_1 \leq \mathfrak{b}$ olduğunu gösterelim. $\mathcal{A} = \left\{f_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sayılabilir ailesini alalım. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$g(k) = \max\{f_n(k) : n \leq k\}$$

dersek g fonksiyonu $\mathcal{A}$ ailesi için bir üst sınırdır. Çünkü, $i \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $k \geq i$ için $g(k) = \max\{f_n(k) : n \leq k\} \geq f_i(k)$ olup $\{k \in \mathbb{N} : f_n(k) > g(k)\}$ kümesinin eleman sayısı en fazla i olur. Diğer bir ifadeyle her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \leq^* g$ olur. Sonuç olarak sayılabilir olan $\mathcal{A}$ ailesi sınırsız olamaz. Bu, $\aleph_0 < \mathfrak{b}$ olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla $\aleph_1 \leq \mathfrak{b}$ dir (Bukovský, 2011, sh.196).

Teorem 3.1.18 $\mathcal{I}$ bir AP-ideal ve $|S| < \mathfrak{b}$ olmak üzere $X = \bigcup_{s\in S} X_s$ olsun. Eğer her X_s kümesi üzerinde (f_n) dizisi f fonksiyonuna $\mathcal{I}$-eş yakınsak ise X üzerinde de $\mathcal{I}$-eş yakınsaktır.

İspat. $s \in S$ olmak üzere X_s kümesi üzerinde $f_n \stackrel{\mathcal{I}\text{-}e}{\to} f$ olsun. Bu durumda $\mathcal{I}$-eş yakınsaklığın gerçeklendiği sıfıra $\mathcal{I}$-yakınsak (ε_n^s) dizisi mevcuttur. $\mathcal{I}$, AP-ideal olduğundan (ε_n^s) dizisi sıfıra $\mathcal{I}^*$-yakınsaktır. Dolayısıyla (ε_n^s) dizisini pozitif reel sayıların azalan bir dizisi olacak şekilde seçebiliriz. Şimdi

$$h_s\left(k\right) = \min\left\{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n^s \leq \frac{1}{k+1}, n > h_s(k-1)\right\}$$

tanımlayalım. $\{h_s : s \in S\}$ ailesinin kardinalitesi $\mathfrak{b}$ den küçük olduğu için öyle bir $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu vardır ki $\{n \in \mathbb{N} : h_s\left(n\right) > g\left(n\right)\}$ kümesi sonludur. Üstelik g nin kesin artan bir fonksiyon olduğunu varsayabiliriz. Şimdi

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n < g\left(1\right) \\ \\ \dfrac{1}{k+1}, & g\left(k\right) \leq n < g\left(k+1\right) \end{cases}$$

dizisini tanımlayalım. Eğer $x \in X$ ise en az bir $s \in S$ için $x \in X_s$ olur. X_s üzerinde $f_n \stackrel{\mathcal{I}\text{-}e}{\to} f$ olduğundan

$$A = \{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n^s\} \in \mathcal{I}$$

dır. Sonuç olarak $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ dır ve $n \in \mathbb{N} \setminus A$ iken $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n^s$ dir. Ayrıca her $n \geq k$ için $h_s\left(n\right) \leq g\left(n\right)$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. (ε_n^s) dizisinin sıfıra $\mathcal{I}^*$-yakınsak olduğundan $(\varepsilon_n^s)_{n\in B_s}$ sıfıra yakınsak olacak şekilde $B_s \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi vardır. Buna göre, eğer $n \in (\mathbb{N} \setminus A) \cap B_s$ ve $n \geq g\left(k\right)$ ise en az bir $l \geq k$ için $g\left(l\right) \leq n < g\left(l+1\right)$ dir. $g\left(l\right) \geq h_s\left(l\right)$ olduğundan $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n^s \leq \frac{1}{l+1} \leq \varepsilon_n$ olur. Böylece X kümesi üzerinde $f_n \stackrel{\mathcal{I}\text{-}e}{\to} f$ olur. $\square$

3.2 Fonksiyon dizilerinin ($\mathcal{I}$,$\mathcal{J}$)-eş yakınsaklığı

Bu kısmın ana fikri, birinci kısımda verilen tanımları ve sonuçları $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ ideallerini kullanarak genelleştirmek olup burada Filipów ve Staniszewski (2014) tarafından elde edilen kavramlar ve sonuçlar kullanılacaktır.

Bu kısımda ele alınan bütün ideallerin tüm sonlu kümeleri içerdiği yani bir uygun ideal olduğu kabul edilecektir. Ayrıca $\mathcal{F}\left(\mathcal{I}\right)$ süzgeci yerine kısalık olsun diye $\mathcal{I}^*$ gösterimi kullanılacaktır.

Tanım 3.2.1 $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ de iki ideal olsun. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{I}$ herhangi kümeler olmak üzere eğer her n için $A_n \setminus A \in \mathcal{J}$ olacak şekilde $A \in \mathcal{I}$ varsa $\mathcal{I}$ ya bir $P(\mathcal{J})$-ideal denir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Özel olarak $P(\mathcal{I}_f)$-ideal, Tanım 2.1.9'da verilen P-ideal kavramı ile çakışır. Ayrıca her n için $A_n \setminus \emptyset \in \mathcal{I}$ olduğundan her $\mathcal{I}$ ideali bir $P(\mathcal{I})$-idealdir.

Tanım 3.2.2 $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ de iki ideal ve (x_n) bir reel sayı dizisi olsun. Eğer $(x_n)_{n\in F}$ alt dizisi x sayısına $\mathcal{J}$-yakınsak olacak şekilde bir $F \in \mathcal{I}^*$ varsa (x_n) dizisi x sayısına $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-yakınsaktır denir. Bu durum $x_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})} x$ ile gösterilir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Özel olarak $(\mathcal{I}^*, \mathcal{I}_f)$-yakınsaklık $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık ile çakışır.

Teorem 3.2.1 $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ de iki ideal olsun. Aşağıdakiler denktir.
(i) Her (x_n) reel sayı dizisi için $x_n \xrightarrow{\mathcal{I}} x$ ise $x_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})} x$ dir.
(ii) $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-idealdir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Tanım 3.2.3 $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ de iki ideal, f_n $(n \in \mathbb{N})$ ve f, bir X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$$

olacak biçimde $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ koşulunu sağlayan bir (ε_n) pozitif reel sayı dizisi varsa (f_n) dizisi f ye $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-eş yakınsaktır denir. Bu durum $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ biçiminde gösterilir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Bu tanımda özel olarak $\mathcal{I} = \mathcal{J} = \mathcal{I}_f$ alınırsa Tanım 3.1.2 ile verilen eş yakınsaklık tanımı elde edilir. Ayrıca $(\mathcal{I}, \mathcal{I})$-eş yakınsaklık Tanım 3.1.3 ile verilen ideal eş yakınsaklık ile ($\mathcal{I}$-eş yakınsaklık ile), $(\mathcal{I}, \mathcal{I}_f)$-eş yakınsaklık ise Uyarı 3.1.2'de belirtilen Filipów ve Szuca (2012) anlamında ideal eş yakınsaklık ile çakışır.

Teorem 3.2.2 (f_n), bir X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1$ ise $\mathbb{N}$ üzerinde idealler olsun.
(i) $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}_1$ ise bu durumda $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}_0,\mathcal{J})\text{-}e} f$ iken $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}_1,\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir.
(ii) $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}_1$ ise $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J}_0)\text{-}e} f$ iken $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J}_1)\text{-}e} f$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

İspat. (i) $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}_0,\mathcal{J})-e} f$ ise her $x \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}_0$$

olacak şekilde pozitif reel sayıların $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ özelliğinde bir (ε_n) dizisi vardır. $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}_1$ olduğundan $\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}_1$ ve böylece $f_n \overset{(\mathcal{I}_1,\mathcal{J})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ dir.

(ii) $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}_1$ olsun. $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{J}_0)\text{-}e}{\longrightarrow} f$ ise $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}_0} 0$ olmak üzere her $x \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$$

dır. $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}_0} 0$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n \geq \varepsilon\} \in \mathcal{J}_0$ ve böylece $\{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n \geq \varepsilon\} \in \mathcal{J}_1$ dir. O halde $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}_1} 0$ olur. Böylece $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{J}_1)\text{-}e}{\longrightarrow} f$ dir. $\square$

Teorem 3.2.3 X boş olmayan bir küme, $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde iki ideal ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Aşağıdakiler denktir.
(i) $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ ise $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{I})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ dir.
(ii) $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ dır (Filipów ve Staniszewski, 2014).

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: (i) nin sağlandığını kabul edelim ve $A \in \mathcal{J}$ olsun.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & n \in A \\ 0, & n \notin A \end{cases}$$

ile tanımlı (f_n) dizisini alalım. Bu durumda her $x \in X$ için $f(x) = 0$ olmak üzere $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ dir. Gerçekten,

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2, & n \in A \\[2ex] \dfrac{1}{n+1}, & n \notin A \end{cases}$$

ile tanımlı (ε_n) dizisi için $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ olup her $x \in X$ için $\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} = \emptyset \in \mathcal{I}$ dır. Böylece hipotezden $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{I})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ dir. Böylece $\eta_n \xrightarrow{\mathcal{I}} 0$ olmak üzere her $x \in X$ için $\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta_n\} \in \mathcal{I}$ dır. Bu durumda $B = \{n : \eta_n \geq 1\} \in \mathcal{I}$ dır. Ayrıca $A \backslash B \subset \{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta_n\}$ olduğundan $A \backslash B \in \mathcal{I}$ dır. Böylece $A \subset (A \setminus B) \cup B = A \cup B \in \mathcal{I}$ yani $A \in \mathcal{I}$ dır.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Teorem 3.2.2'nin (ii) şıkkından açıktır. $\square$

Bu kısımda ele aldığımız ideallerin $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu alt kümelerini içerdiğini varsaydığımız için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.1 $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir ideal ve (f_n), bir X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer $f_n \overset{(\mathcal{I}_f,\mathcal{I})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ ise $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{I})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Teorem 3.2.4 X boş olmayan bir küme, $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde iki ideal ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Aşağıdakiler denktir.
(i) $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{I})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ ise $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ dir.
(ii) $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-idealdir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: $B_k \in \mathcal{I}$, $k \in \mathbb{N}$, olsun. $A_1 = B_1$ ve $k > 1$ için

$$A_k = B_k \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1})$$

olsun. Bu durumda A_k kümeleri aralarında ayrık, her $k \in \mathbb{N}$ için $A_k \in \mathcal{I}$ ve $A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_k = B_1 \cup B_2 \cdots \cup B_k$ olur.

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1}, & \exists k \text{ için } n \in A_k \\ 0, & \forall k \text{ için } n \notin A_k \end{cases}$$

ile $f_n : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını tanımlayalım ve her $x \in X$ için $f(x) = 0$ olsun. Bu durumda $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{I})\text{-}e} f$ dir. Gerçekten,

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & \exists k \text{ için } n \in A_k \\ \dfrac{1}{n}, & \forall k \text{ için } n \notin A_k \end{cases}$$

ile tanımlı (ε_n) dizisi için $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{I}} 0$ olup $\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} = \emptyset \in \mathcal{I}$ dır. Böylece varsayımımızdan $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ dır. Dolayısıyla $\eta_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ olmak üzere her $x \in X$ için $\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta_n\} \in \mathcal{I}$ olur. Sabit bir $x \in X$ elemanını alalım ve

$$A = \{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta_n\} \in \mathcal{I}$$

olsun. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için

$$A_k \setminus A = \{n \in A_k : |f_n(x) - f(x)| < \eta_n\} = \left\{n \in A_k : \frac{1}{k+1} < \eta_n\right\} \in \mathcal{J}$$

dir. O halde $B_1 \setminus A = A_1 \setminus A \in \mathcal{J}$ ve

$$B_k \setminus A \subset (A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_k) \setminus A = \bigcup_{i=1}^{k} (A_i \setminus A) \in \mathcal{J}$$

olur. Böylece $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-idealdir.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-ideal ve $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{I})\text{-}e} f$ olsun. Bu durumda $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{I}} 0$ olmak üzere her $x \in X$ için $\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$ olur. $\mathcal{I}$, $P(\mathcal{J})$-ideal olduğundan Teorem 3.2.1'den $\varepsilon_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})} 0$ dır. Dolayısıyla $(\varepsilon_n)_{n \in F} \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ olacak şekilde bir $F \in \mathcal{I}^*$ vardır. Bir (η_n) dizisini

$$\eta_n = \begin{cases} \varepsilon_n, & n \in F \\ \dfrac{1}{n}, & n \notin F \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\eta_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ olduğu açıktır. Ayrıca her $x \in X$ için

$$\begin{aligned}\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta_n\} &= \{n \in F : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \cup \left\{n \notin F : |f_n(x) - f(x)| \geq \tfrac{1}{n}\right\} \\ &\subset \{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \cup (\mathbb{N} \setminus F)\end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki içermenin sağ tarafındaki iki küme $\mathcal{I}$ idealine ait olduğundan

$$\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta_n\} \in \mathcal{I}$$

olur. Böylece $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir. □

Teorem 3.2.1'de $\mathcal{J} = \mathcal{I}_f$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.2 X boş olmayan bir küme, $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir ideal ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Aşağıdakiler denktir.
(i) $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{I})\text{-}e} f$ ise $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{I}_f)\text{-}e} f$ dir.
(ii) $\mathcal{I}$ bir P-idealdir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Bu sonuca göre Das ve ark. (2014) tarafından tanımlanan $\mathcal{I}$-eş yakınsaklık ile Filipów ve Szuca (2012) tarafından tanımlanan $\mathcal{I}$-eş yakınsaklığın denk olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{I}$ nın bir P-ideal olmasıdır.

Önerme 3.2.1 X boş olmayan bir küme, $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde iki ideal ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Aşağıdakiler denktir.
(i) $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}u} f$ ise $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir.
(ii) $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-idealdir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: $B_k \in \mathcal{I}$, $k \in \mathbb{N}$, olsun. $A_1 = B_1$ ve $k > 1$ için

$$A_k = B_k \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1})$$

olsun. Bu durumda A_k kümeleri aralarında ayrık, her $k \in \mathbb{N}$ için $A_k \in \mathcal{I}$ ve $A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_k = B_1 \cup B_2 \cdots \cup B_k$ olur.

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1}, & \exists k \text{ için } n \in A_k \\ 0, & \forall k \text{ için } n \notin A_k \end{cases}$$

ile $f_n : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını tanımlayalım ve her $x \in X$ için $f(x) = 0$ olsun. Bu durumda $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}u} f$ dir. Gerçekten, herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $K \in \mathbb{N}$ vardır ki her $k > K$ için $\frac{1}{k+1} < \varepsilon$ olur. Bu durumda her $x \in X$ için $\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \subset$

$A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_k \in \mathcal{I}$ dır. Yani $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}u} f$ dir. Böylece varsayımımızdan $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ olur. Dolayısıyla Teorem 3.2.4'ün ispatındaki gibi ilerleyerek $\mathcal{I}$ nın bir $P(\mathcal{J})$-ideal olduğu gösterilir.
$(ii) \Rightarrow (i)$: $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$ ve $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}u} f$ olsun. Bu durumda Teorem 3.1.1'den $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{I})\text{-}e} f$ dir. Böylece Teorem 3.2.4'ten $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir. □

Sonuç 3.2.3 X boş olmayan bir küme, $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir ideal ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Aşağıdakiler denktir.
(i) $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}u} f$ ise $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{I}_f)\text{-}e} f$ dir.
(ii) $\mathcal{I}$ bir P-idealdir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Aşağıdaki örnek $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-eş yakınsaklığın genel olarak $\mathcal{I}$-düzgün yakınsaklığı gerektirmediğini göstermektedir.

Örnek 3.2.1 $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde iki ideal ve X sonsuz bir küme olsun. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x_n \in X$, X kümesinin farklı elemanları olsun. (f_n) dizisini $x \in X$ olmak üzere

$$f_n(x) = \chi_{\{x_n\}}(x) = \begin{cases} 1, & \exists n \text{ için } x = x_n \\ 0, & \forall n \text{ için } x \neq x_n \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım ve her $x \in X$ için $f(x) = 0$ olsun. $A \in \mathcal{J}$ olmak üzere

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2, & n \in A \\ \dfrac{1}{n+1}, & n \notin A \end{cases}$$

ile tanımlı (ε_n) dizisi için $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ olup her $x \in X$ için

$$\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} = \emptyset \in \mathcal{I}$$

dır. Böylece $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir. Diğer taraftan $\varepsilon = 1/2$ ve $x = x_n$ için

$$\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = \mathbb{N} \notin \mathcal{I}$$

dır. O halde $f_n \overset{\mathcal{I}\text{-}u}{\nrightarrow} f$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Önerme 3.2.2 X boş olmayan bir küme, $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde iki ideal ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Aşağıdakiler denktir.
(i) $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ ise $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ dir.
(ii) $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ dır (Filipów ve Staniszewski, 2014).

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: $A \in \mathcal{J}$ olsun. $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için (f_n) dizisi

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & n \in A \\ 0, & n \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın ve $x \in X$ için $f(x) = 0$ olsun. Bu durumda Teorem 3.2.3'ün ispatından $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir. O halde varsayımdan dolayı $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ dir. Buna göre $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ve $x \in X$ için $A = \{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ dır. Böylece $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ olur.
$(ii) \Rightarrow (i)$: $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ olsun. Bu durumda $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ olacak şekilde bir (ε_n) dizisi vardır öyleki her $x \in X$ için $A_x = \{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$ olur. Sabit bir $\varepsilon > 0$ ve $x \in X$ alalım. $B_\varepsilon = \{n : \varepsilon_n \geq \varepsilon\} \in \mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ dır. $\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset A_x \cup B_\varepsilon$ olduğundan $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ dir. □

Sonuç 3.2.4 $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ de iki ideal ve (f_n), bir X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun.
(i) Eğer $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{I})\text{-}e} f$ ise $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ dir.
(ii) Eğer $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{I}_f)\text{-}e} f$ ise $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Sonuç 3.2.5 X boş olmayan bir küme, $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde iki ideal ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Aşağıdakiler denktir.
(i) Eğer $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}u} f$ ise $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ ve eğer $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ ise $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ dir.
(ii) $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ ve $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-idealdir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Örnek 3.1.2'de $\mathcal{I}$ sayılabilir üretilmiş bir ideal (veya zincir koşulunu sağlayan bir ideal) olduğunda $\mathcal{I}$-yakınsak olan fakat $\mathcal{I}$-eş yakınsak olmayan bir (f_n) dizisinin varlığı gösterilmişti. Aşağıdaki örnekte ise bu durumun $\mathcal{I}$ nın herhangi bir ideal olması durumunda da geçerli olduğu gösterilmiştir.

Örnek 3.2.2 $|X| \geq \mathfrak{c}$, $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde iki ideal, $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ ve $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$ olsun. Bu durumda X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların öyle bir (f_n) dizisi vardır ki $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ ve $\neg\left(f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f\right)$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

İspat. $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ olacak şekilde tüm (ε_n) pozitif reel sayı dizilerinin kümesinin kardinalitesi $\mathfrak{c}$ olduğundan bu kümeyi $(s_\alpha)_{\alpha<\mathfrak{c}}$ biçiminde indeksleyebiliriz. $x_\alpha \in X$, $\alpha < \mathfrak{c}$, X in farklı elemanları olsun. $f_n : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını

$$f_n(x) = \begin{cases} s_\alpha(n), & \exists \alpha < \mathfrak{c} \text{ için } x = x_\alpha \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Her $x \in X$ için $f(x) = 0$ olsun. Bir $\alpha < \mathfrak{c}$ için $s_\alpha(n) = \varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ olduğundan $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $x \in X$ için $\{n : f_n(x) \geq \varepsilon\} = \{n : s_\alpha(n) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{J} \subset \mathcal{I}$

olur. Böylece $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ dir. Şimdi $(f_n)_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ olmadığını gösterelim. Varsayalım ki $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ olsun. Buradan her $x \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} = \{n : \varepsilon_n \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$$

olacak biçimde $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ koşulunu sağlayan bir (ε_n) pozitif reel sayı dizisi vardır. $\alpha < \mathfrak{c}$ olmak üzere $s_\alpha = (\varepsilon_n)$ ise

$$\{n : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geq \varepsilon_n\} = n : \varepsilon_n \geq \varepsilon_n \mathbb{N} \notin \mathcal{I}$$

olur ki bu bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır, yani (f_n) dizisi f fonksiyonuna $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-eş yakınsak değildir. $\square$

Teorem 3.1.2'nin (ii) şıkkında kullanılan yakınsaklık kavramı σ-$\mathcal{I}$-düzgün yakınsaklık olarak ifade edilebilir:

Tanım 3.2.4 $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir ideal ve f_n $(n \in \mathbb{N})$ ve f, X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsun. $k \in \mathbb{N}$ için $X_k \subset X$ kümeleri mevcut öyleki $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için X_k üzerinde $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}-u} f$ ise bu durumda (f_n) dizisi f fonksiyonuna σ-$\mathcal{I}$-düzgün yakınsaktır denir ve $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}\text{-}u} f$ şeklinde yazılır (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Uyarı 3.2.1 (i) Tanımda $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ alınırsa Császár ve Laczkovich (1979) tarafından tanımlanan σ-düzgün yakınsaklık kavramı elde edilir ve $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}_f\text{-}u} f$ yerine $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}u} f$ gösterimi kullanılır.
(ii) $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}u} f$ ise $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}e} f$ ve böylece Teorem 3.1.2'den $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}\text{-}u} f$ olur. Ayrıca $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}\text{-}u} f$ ise $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ dir. Gerçekten, $x \in X$ ise hipotezden en az bir k için $x \in X_k$ dır. X_k üzerinde $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}u} f$ ve böylece $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $x \in X_k$ için $\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ olur. Böylece her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ sayısı için $\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ elde edilir. O halde $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ dir.

Császár ve Laczkovich (1979) eş yakınsaklık ile σ-düzgün yakınsaklığın denk olduğunu göstermiştir. Teorem 3.1.2'de ise her $\mathcal{I}$ ideali için $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}\text{-}u} f$ ise $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{I})\text{-}e} f$ olduğu gösterilmişti. Aşağıdaki teoremde ise $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-eş yakınsaklık ile σ-$\mathcal{I}$-düzgün yakınsaklık arasındaki ilişki verilmiştir.

Önerme 3.2.3 X boş olmayan bir küme, $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde iki ideal ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Aşağıdakiler denktir.
(i) $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}\text{-}u} f$ ise $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir.
(ii) $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-idealdir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: $B_k \in \mathcal{I}$, $k \in \mathbb{N}$, $A_1 = B_1$ ve $k > 1$ için $A_k = B_k \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1})$ olsun. Bu durumda A_k kümeleri aralarında ayrık, her $k \in \mathbb{N}$ için $A_k \in \mathcal{I}$ ve $A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_k = B_1 \cup B_2 \cdots \cup B_k$ olur.

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1}, & \exists k \text{ için } n \in A_k \\ 0, & \forall k \text{ için } n \notin A_k \end{cases}$$

ile $f_n : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını tanımlayalım ve her $x \in X$ için $f(x) = 0$ olsun. Önerme 3.2.1'den $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}u} f$ olduğunu biliyoruz. O halde $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}\text{-}u} f$ ve böylece varsayımdan $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir. Buna göre Teorem 3.2.4'in ispatında olduğu gibi $\mathcal{I}$ nın bir $P(\mathcal{J})$-ideal olduğu gösterilir.
$(ii) \Rightarrow (i)$: $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-ideal ve $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}\text{-}u} f$ olsun. Teorem 3.1.2'den $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{I})\text{-}e} f$ dir. O halde Teorem 3.2.4'den $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ olur. □

Sonuç 3.2.6 X boş olmayan bir küme, $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir ideal ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Aşağıdakiler denktir.
(i) $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}\text{-}u} f$ ise $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{I}_f)\text{-}e} f$ dir.
(ii) $\mathcal{I}$ bir P-idealdir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Teorem 3.1.2'de, $\mathcal{I}$ sayılabilir üretilmiş bir ideal olduğunda $\mathcal{I}$-eş yakınsaklığın σ-$\mathcal{I}$-düzgün yakınsaklığı gerektirdiği gösterilmişti. Aşağıdaki teoremde ise bu gerektirmenin bir genelleştirmesinin $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ koşulunu sağlayan idealler için mümkün olduğu gösterilmiştir.

Teorem 3.2.5 $|X| \geq \mathfrak{c}$, $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde iki ideal ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Aşağıdakiler denktir.
(i) Eğer $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ ise $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}\text{-}u} f$ dir.
(ii) $\mathcal{I}$ sayılabilir üretilmiş bir ideal ve $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ dır (Filipów ve Staniszewski, 2014).

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: $\mathcal{I} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ olsun. $x_\alpha \in X$, $\alpha < \mathfrak{c}$ olmak üzere X in farklı elemanları olsun. $f_n : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \exists \alpha < \mathfrak{c} \text{ için } n \in A_\alpha \text{ ve } x = x_\alpha \\ 0, & \exists \alpha < \mathfrak{c} \text{ için } n \notin A_\alpha \text{ ve } x = x_\alpha \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

ile tanımlayalım ve her $x \in X$ için $f(x) = 0$ olsun. Bu durumda $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir. Böylece varsayımdan $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}\text{-}u} f$ dir. Dolayısıyla $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere öyle $X_k \subset X$ kümeleri vardır ki $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için X_k üzerinde $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}-u} f$ dir. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$C_k = \left\{ n : \exists x \in X_k \text{ için } |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2} \right\}$$

kümelerini tanımlayalım. X_k kümeleri üzerinde $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}-u} f$ olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $C_k \in \mathcal{I}$ dır. Eğer $\mathcal{I}$ nın $\{C_k : k \in \mathbb{N}\}$ ailesi tarafından üretildiğini gösterirsek $\mathcal{I}$ nın sayılabilir üretilmiş bir ideal olduğu gösterilmiş olur. $A \in \mathcal{I}$ ve $\alpha < \mathfrak{c}$ olmak üzere $A = A_\alpha$ olsun. $k \in \mathbb{N}$ sayısı ise $x_\alpha \in X_k$ olacak şekilde belirlensin. Bu durumda $A = \{n : f_n(x_\alpha) = 1\} \subset C_k$ olur. Dolayısıyla $\mathcal{I}$ ideali sayılabilir olan $\{C_k : k \in \mathbb{N}\}$ ailesi tarafından üretilmiş olur. Şimdi $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ olduğunu gösterelim. Eğer her (f_n) dizisi için $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ iken $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}\text{-}u} f$ ise $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ iken $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ olur. Böylece Önerme 3.2.2'den $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ dır.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $\{C_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{I}$ olmak üzere her $A \in \mathcal{I}$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $A \subset C_k$ ve ayrıca $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ olsun. (ε_n) pozitif reel sayıların sıfıra $\mathcal{I}$-yakınsak bir dizisi olmak üzere her $x \in X$ için $A_x = \{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$ dir. O halde her $k \in \mathbb{N}$ için X_k üzerinde $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}-u} f$ dir. $k \in \mathbb{N}$ için

$$X_k = \{x \in X : \text{her } n \in \mathbb{N} \setminus C_k \text{ için } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n\}$$

kümelerini tanımlayalım. $x \in X$ olsun. Bu durumda $A_x \subset C_k$ olacak biçimde en az bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $n \in \mathbb{N} \setminus A_x$ ise $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$ dir. $\mathbb{N} \setminus C_k \subset \mathbb{N} \setminus A_x$ olduğundan $n \in \mathbb{N} \setminus C_k$ iken $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$ olur. Yani $x \in X_k$ dır. Böylece $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ dır. Son olarak her bir X_k kümesi üzerinde $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}u} f$ olduğunu gösterelim. $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ ve $B_\varepsilon = \{n : \varepsilon_n \geq \varepsilon\} \in \mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ olsun. Bu durumda her $x \in X_k$ için

$$\begin{aligned} \{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} &= \{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon,\ \varepsilon > \varepsilon_n\} \\ &\cup \{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon,\ \varepsilon \leq \varepsilon_n\} \\ &\subset C_k \cup B_\varepsilon \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla her k için X_k üzerinde $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}u} f$ dir. □

Sonuç 3.2.7 $|X| \geq c$ olsun. $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir ideal ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Aşağıdakiler denktir.
(i) Eğer $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{I})\text{-}e} f$ ise $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}\text{-}u} f$ dir.
(ii) Eğer $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{I}_f)\text{-}e} f$ ise $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}\text{-}u} f$ dir.
(iii) $\mathcal{I}$ sayılabilir üretilmiş bir idealdir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Uyarı 3.2.2 Eğer X sayılabilir bir küme ise noktasal yakınsaklığın σ-$\mathcal{I}$-düzgün yakınsaklığı gerektirdiği ve neticesinde de bu iki yakınsaklık türünün denk olduğu söylenebilir. Gerçekten, X sayılabilir ve $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ olsun. X sayılabilir olduğundan $X = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ biçiminde yazılır ve böylece $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{x_k\}$ olur. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\left\{n : \sup_{x\in X_k} |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\right\} \subset \{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

dır. O halde her bir X_k kümesi üzerinde $f_n \overset{\mathcal{I}\text{-}u}{\longrightarrow} f$ olur. Sonuç olarak $f_n \overset{\sigma\text{-}\mathcal{I}\text{-}u}{\longrightarrow} f$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Bu uyarı ve Önerme 3.2.2 dikkate alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 3.2.4 X sayılabilir bir küme, $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde iki ideal ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Aşağıdakiler denktir.
(i) $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ ise $f_n \overset{\sigma\text{-}\mathcal{I}\text{-}u}{\longrightarrow} f$ dir.
(ii) $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ dır (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Tanım 3.2.5 $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde iki ideal ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olmak üzere eğer $(f_n)_{n\in F} \overset{(\mathcal{I}_f,\mathcal{J})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ olacak şekilde bir $F \in \mathcal{I}^*$ kümesi varsa (f_n) dizisi $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $(\mathcal{I}^*, \mathcal{J})$-eş yakınsaktır denir. Bu durum $f_n \overset{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ ile gösterilir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Filipów ve Staniszewski (2014), Teorem 3.1.3 (ii)'de ifade edilen yakınsaklığı σ-$\mathcal{I}^*$-düzgün yakınsaklık olarak adlandırmıştır.

Tanım 3.2.6 $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ de bir ideal ve f_n $(n \in \mathbb{N})$ ve f, X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olsun. $k \in \mathbb{N}$ için $X_k \subset X$ olmak üzere $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için X_k üzerinde $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}u}{\longrightarrow} f$ ise bu durumda (f_n) dizisi f fonksiyonuna σ-$\mathcal{I}^*$-düzgün yakınsaktır denir ve $f_n \overset{\sigma\text{-}\mathcal{I}^*\text{-}u}{\longrightarrow} f$ şeklinde yazılır (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Önerme 3.2.5 X boş olmayan bir küme, $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde iki ideal ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}u}{\longrightarrow} f$ ise $f_n \overset{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

İspat. $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}u}{\longrightarrow} f$ olsun. O halde $(f_n)_{n\in F} \overset{u}{\longrightarrow} f$ olacak şekilde $F \in \mathcal{I}^*$ vardır. $\mathcal{I}_f$ bir $P(\mathcal{J})$ ideal olduğundan Önerme 3.2.1'den $(f_n)_{n\in F} \overset{(\mathcal{I}_f,\mathcal{J})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ dir ve bundan dolayı $f_n \overset{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ dir. $\square$

Aşağıdaki örnek bu önermenin tersinin her zaman doğru olmadığını gösterir.

Örnek 3.2.3 X boş olmayan bir küme, $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde iki ideal olmak üzere $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ ve $\mathcal{I} \neq \mathcal{J}$ olsun. Bu durumda $f_n \overset{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ olan fakat $f_n \overset{\mathcal{I}^*\text{-}u}{\longrightarrow} f$ olmayan X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir (f_n) dizisi vardır.

İspat. $A \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{I}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+2}, & n \notin A \\ \\ 1, & n \in A \end{cases}$$

ile $f_n : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını tanımlayalım ve her $x \in X$ için $f(x) = 0$ olsun. $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir. Gerçekten $F = \mathbb{N}$ ve

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & n \in A \\ \\ 2, & n \notin A \end{cases}$$

ile tanımlı (ε_n) dizisi için $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ olup her $x \in X$ için $\{n \in F : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} = \emptyset \in \mathcal{I}_f$ dir. O halde $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir. $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ olmadığını gösterelim. $G \in \mathcal{I}^*$ ve $\varepsilon = \frac{1}{2}$ olsun. $A \notin \mathcal{I}$ olduğundan $G \cap A \in \mathcal{I}^*$ dır. Ayrıca $G \cap A$ sonsuz bir küme olduğundan her $N \in \mathbb{N}$ sayısına karşılık öyle bir $n \geq N$, $n \in G \cap A$ vardır ki her $x \in X$ için $|f_n(x) - f(x)| = 1 > \varepsilon$ olur. Bu ise $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ olmadığını gösterir. □

Önerme 3.2.6 X boş olmayan bir küme, $\mathcal{I}$ herhangi bir ideal ve $\mathcal{J}$, bir P-ideal olsun. (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olmak üzere aşağıdakiler denktir.

(i) $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e} f$ ise $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*} f$ dir.

(ii) $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e} f$ ise $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ dir.

(iii) $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ dır (Filipów ve Staniszewski, 2014).

İspat. $(i) \Rightarrow (iii)$ ve $(ii) \Rightarrow (iii)$: $A \in \mathcal{J}$ olsun. (f_n) dizisi $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & n \in A \\ 0, & n \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın ve her $x \in X$ için $f(x) = 0$ olsun. Bu durumda (ε_n), $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ olan herhangi bir pozitif reel sayı dizisi olmak üzere her $x \in X$ ve her $n \notin A$ için $|f_n(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon_n$ olacağından $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir. Böylece birinci durumda (i)'den $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*} f$ olur. O halde her $x \in X$ için

$$A \cap F = A \setminus (\mathbb{N} \setminus F) = \left\{n \in F : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}\right\} \in \mathcal{I}_f$$

olacak şekilde bir $F \in \mathcal{I}^*$ vardır. $A \subset (A \setminus (\mathbb{N} \setminus F)) \cup (\mathbb{N} \setminus F) = A \cup (\mathbb{N} \setminus F) \in \mathcal{I}$ olduğundan $A \in \mathcal{I}$ olur. İkinci durumda, (ii)'den $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ dir. Buna göre $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere öyle $X_k \subset X$ kümeleri vardır ki $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için X_k üzerinde $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ dır. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ve $k \in \mathbb{N}$ olsun. $k \in \mathbb{N}$ için X_k üzerinde $(f_n)_{n\in F} \xrightarrow{u} f$ olacak şekilde

$F \in \mathcal{I}^*$ vardır. Dolayısıyla $x \in X_k$ iken $A \cap F = \left\{n \in F : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}\right\} \in \mathcal{I}_f$ elde edilir. Buradan yine $A \in \mathcal{I}$ olur.

$(iii) \Rightarrow (i)$ ve $(iii) \Rightarrow (ii)$: $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e} f$ olsun. $F \in \mathcal{I}^*$ ve $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ olmak üzere her $x \in X$ için

$$\{n \in F : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}_f \tag{3.2.1}$$

dir. $\mathcal{J}$ bir P-ideal olduğundan $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}^*} 0$ dır. Böylece $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus M} \to 0$ olacak şekilde $M \in \mathcal{J}$ vardır. $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ olduğundan $M \in \mathcal{I}$ olur. Buradan $G = \mathbb{N} \setminus M \in \mathcal{I}^*$ olmak üzere $(\varepsilon_n)_{n\in G} \to 0$ dır. O halde $F \cap G \in \mathcal{I}^*$ olup $(f_n)_{n\in F\cap G} \to f$ dir. Buradan $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*} f$ elde edilir. Böylece (i) ispatlanır.

$k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $X_k = \{x \in X : \text{her } n \geq k,\ n \in F \cap G \text{ için } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n\}$ olsun. Süzgeç tanımına göre $F \cap G \neq \emptyset$ olduğundan (3.2.1)'den her $x \in X$ için öyle bir $k \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq k$, $n \in F \cap G$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$ dir. Buradan en az bir k için $x \in X_k$ ve böylece $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ olur. X_k üzerinde $(f_n)_{n\in F\cap G} \xrightarrow{u} f$ olduğunu göstermeliyiz. $\varepsilon > 0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olsun. $(\varepsilon_n)_{n\in G} \to 0$ olduğundan öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq N$, $n \in G$ için $\varepsilon_n < \varepsilon$ dur. Buradan her $n \geq \max\{k, N\}$, $n \in F \cap G$ ve $x \in X_k$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olur. O halde $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ dir. Böylece (ii) ispatlanır. □

Teorem 3.2.6 X boş olmayan bir küme, $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir ideal, $\mathcal{J}$ bir P-ideal, $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Aşağıdakiler denktir.

(i) $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ ise $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir.

(ii) $\mathcal{I}$ bir P-idealdir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: $k \in \mathbb{N}$ için $A_k \in \mathcal{I}$ ve $\emptyset \neq X_k \subset X$, X kümesinin bir ayrışımı olsun olsun. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f_n : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_k \text{ ve } n \in A_k \\ 0, & x \in X_k \text{ ve } n \notin A_k \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım ve her $x \in X$ için $f(x) = 0$ olsun. $\mathbb{N} \setminus A_k \in \mathcal{I}^*$ olup her $\varepsilon > 0$ sayısı, her $n \in \mathbb{N} \setminus A_k$ ve her $x \in X_k$ için $|f_n(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon$ olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için X_k üzerinde $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ ve böylece $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ olur. Dolayısıyla varsayımdan $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir. O halde öyle bir $F \in \mathcal{I}^*$ ve $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ olan öyle bir (ε_n) dizisi vardır ki $\{n \in F : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}_f$ dir. $\mathcal{J}$ bir P-ideal olduğundan $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}^*} 0$ dır ve $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ olduğundan $(\varepsilon_n)_{n\in G} \to 0$ olacak şekilde $G \in \mathcal{I}^*$ vardır. $A = \mathbb{N} \setminus (F \cap G)$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $x \in X_k$ olsun. Buna göre $A_k \cap F \cap G = \{n \in F \cap G : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}_f$ elde ederiz. Buradan $A_k \cap F \cap G = A_k \setminus A \in \mathcal{I}_f$ ve böylece $\mathcal{I}$ bir P-ideal olur.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ olsun. Bu durumda $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ olacak şekilde $X_k \subset X$ $(k \in \mathbb{N})$

kümeleri ve her $k \in \mathbb{N}$ için X_k üzerinde $(f_n)_{n\in F_k} \xrightarrow{u} f$ olacak şekilde $F_k \in \mathcal{I}^*$ kümeleri vardır. $\mathcal{I}$ bir P-ideal olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $F \setminus F_k \in \mathcal{I}_f$ olacak biçimde $F \in \mathcal{I}^*$ kümesi mevcuttur. $F \setminus F_k$ sonlu ve $F = (F \setminus F_k) \cup F_k$ olduğundan $(f_n)_{n\in F} \xrightarrow{\sigma\text{-}u} f$ dir. Buradan $(f_n)_{n\in F} \xrightarrow{e} f$ veya denk olarak $(f_n)_{n\in F} \xrightarrow{(\mathcal{I}_f,\mathcal{I}_f)\text{-}e} f$ olur. O halde Teorem 3.2.2'nin (ii) şıkkında $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ alınırsa $(f_n)_{n\in F} \xrightarrow{(\mathcal{I}_f,\mathcal{J})\text{-}e} f$ yani $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e} f$ elde edilir. □

$\mathcal{J} = \mathcal{I}_f$ alınıp Önerme 3.2.6 ve Teorem 3.2.6 birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.8 X boş olmayan bir küme, $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir ideal ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Aşağıdakiler denktir.
(i) $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{I}_f)\text{-}e} f \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ dir.
(ii) $\mathcal{I}$ bir P-idealdir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Önerme 3.2.7 X boş olmayan bir küme, $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir ideal ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Aşağıdakiler denktir.
(i) $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ ise $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*} f$ dir.
(ii) $\mathcal{I}$ bir P-idealdir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: $k \in \mathbb{N}$ için A_k, X_k ve $n \in \mathbb{N}$ için f ve f_n Teorem 3.2.6'nın ispatındaki gibi olsun. Bu durumda $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ dir. Böylece varsayımımıza göre $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*} f$ olur. Dolayısıyla $(f_n)_{n\in F} \to f$ olacak şekilde $F \in \mathcal{I}^*$ vardır. $k \in \mathbb{N}$ için $x \in X_k$ olsun. Buna göre $\left\{n \in F : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}\right\} \in \mathcal{I}_f$ dir. $A = \mathbb{N} \setminus F$ dersek $A_k \setminus A = A_k \cap F \in \mathcal{I}_f$ ve böylece $\mathcal{I}$ bir P-ideal olur.
$(ii) \Rightarrow (i)$: $\mathcal{I}$ bir P-ideal ve $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ olsun. Bu durumda $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ olacak şekilde $X_k \subset X$ kümeleri ve öyle $F_k \in \mathcal{I}^*$ kümeleri vardır ki her $k \in \mathbb{N}$ için X_k üzerinde $(f_n)_{n\in F_k} \xrightarrow{u} f$ dir. $\mathcal{I}$ bir P-ideal olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $F \setminus F_k \in \mathcal{I}_f$ olacak şekilde $F \in \mathcal{I}^*$ vardır. X_k üzerinde $(f_n)_{n\in F_k} \xrightarrow{u} f$ yakınsaklığı Teorem 3.1.3'den dolayı X üzerinde $(f_n)_{n\in F_k} \xrightarrow{e} f$ olmasına denktir. Böylece X üzerinde $(f_n)_{n\in Fk} \to f$ olur. O halde her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $x \in X$ için

$$\{n \in F_k \cup (F \setminus F_k) : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = \{n \in F : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_f$$

olur. O halde $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*} f$ dir. □

Diziler için $\mathcal{I}^*$-yakınsaklığın $\mathcal{I}$-yakınsaklığı gerektirdiği Kostyrko ve ark. (2000) tarafından gösterilmişti. Benzer düşünce ile $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ ise $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}u} f$ olduğu ve $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ ise $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}\text{-}u}$

f olduğu gösterilebilir. Aşağıdaki önerme, $\mathcal{I}$ bir P-ideal olduğunda bu gerektirmelerin terslerinin doğru olduğunu göstermektedir.

Önerme 3.2.8 X boş olmayan bir küme, $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir ideal ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Aşağıdakiler denktir.
(i) $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}u} f$ ise $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ dir.
(ii) $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}\text{-}u} f$ ise $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ dir.
(iii) $\mathcal{I}$ bir P-idealdir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

İspat. $(i) \Rightarrow (iii)$ $((ii) \Rightarrow (iii))$: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $y,\ y_n \in \mathbb{R}$ ve $y_n \xrightarrow{\mathcal{I}} y$ olsun. $f,\ f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ olmak üzere her $x \in X$ için $f_n(x) = y_n$, $f(x) = y$ olarak tanımlayalım. Bu durumda açık olarak $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}u} f$ ($f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}\text{-}u} f$) dir. Böylece varsayımdan $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ ($f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}^*\text{-}u} f$) dir. Bundan dolayı $y_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*} y$ dir. Teorem 3.2.1'den $\mathcal{I}$ bir P-ideal olur.
$(iii) \Rightarrow (i)$: $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}\text{-}u} f$ ve $k \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda öyle $A_k \in \mathcal{I}$ vardır ki her $n \in \mathbb{N} \setminus A_k$ ve her $x \in X$ için $|f_n(x) - f(x)| < 1/(k+1)$ dir. $\mathcal{I}$ bir P-ideal olduğundan $A_k \setminus A \in \mathcal{I}_f$ olacak şekilde $A \in \mathcal{I}$ vardır. $F = \mathbb{N} \setminus A$ olsun ve $\varepsilon > 0$ sayısını sabitleyelim. $1/(k+1) < \varepsilon$ olacak şekilde k vardır. Buradan

$$\{n \in F : \text{her } x \in X \text{ için } |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \subset A_k \cap F = A_k \setminus (\mathbb{N} \setminus A)' = A_k \setminus A \in \mathcal{I}_f$$

elde ederiz ve bu nedenle $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ dir.
$(iii) \Rightarrow (ii)$: $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}\text{-}u} f$ olsun. $k \in \mathbb{N}$ için $X_k \subset X$ olmak üzere $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için X_k üzerinde $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ dir. Bu ise $(iii) \Rightarrow (i)$ dir. Buradan her $k \in \mathbb{N}$ için X_k üzerinde $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ dir. O halde $f_n \xrightarrow{\sigma\text{-}\mathcal{I}^*\text{-}u} f$ elde ederiz. $\square$

X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir (f_n) dizisi için eğer $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*} f$ ise $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ dir.

Önerme 3.2.9 X boş olmayan bir küme ve $\mathcal{I}$ $\mathbb{N}$ üzerinde bir ideal olsun. (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olmak üzere aşağıdakiler denktir.
(i) Eğer $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ ise $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*} f$ dir.
(ii) $\mathcal{I}$ bir P-idealdir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $y,\ y_n \in \mathbb{R}$ ve $y_n \xrightarrow{\mathcal{I}} y$ olsun. $f,\ f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ olmak üzere her $x \in X$ için $f_n(x) = y_n$, $f(x) = y$ olarak tanımlayalım. $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ olduğunu göstermek kolaydır. O halde varsayımdan $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*} f$ dir. Bundan dolayı $y_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*} y$

olur ve böylece Teorem 3.2.1'den $\mathcal{I}$ nın bir P-ideal olduğunu elde ederiz.
$(ii) \Rightarrow (i)$: $X = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ ve $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ olsun. Her $k, l \in \mathbb{N}$ için

$$A_{k,l} = \left\{ n : |f_n(x_k) - f(x_k)| \geq \frac{1}{l+1} \right\} \in \mathcal{I}$$

alabiliriz. $\mathcal{I}$ bir P-ideal olduğundan $A_{k,l} \setminus A \in \mathcal{I}_f$ olacak şekilde $A \in \mathcal{I}$ vardır. $F = \mathbb{N} \setminus A$ olsun ve $\varepsilon > 0$ sayısını sabitleyelim. O halde $\frac{1}{l+1} < \varepsilon$ olacak şekilde $l \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $\{n \in F : |f_n(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_n\} = A_{k,l} \cap F = A_{k,l} \setminus A \in \mathcal{I}_f$ olur ve bu nedenle $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*} f$ dir. $\square$

Uyarı 3.2.3 Önerme 3.2.9'daki $(ii) \Rightarrow (i)$ gerektirmesi genelleştirilebilir. Eğer $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir ideal ve $|X| < add^*(\mathcal{I})$ ise (i) sağlanır. Burada $add^*(\mathcal{I})$,

$$add^*(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subset \mathcal{I} \text{ ve her } X \in \mathcal{I} \text{ için } A \setminus X \text{ sonsuz olacak şekilde } A \in \mathcal{A} \text{ vardır }\}$$

şeklinde tanımlanan bir kardinaldir ve P-idealler için $add^*(\mathcal{I}) > \omega$ dir (Hernández-Hernández ve Hrušák, 2007).
Şimdi, $|X| < add^*(\mathcal{I})$ olduğunda (i)'nin doğruluğunu gösterelim. Eğer $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ ise her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için $B_x = \{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ dır. $|X| < add^*(\mathcal{I})$ olduğundan her $x \in X$ için $B_x \setminus B \in \mathcal{I}_f$ olacak şekilde $B \in \mathcal{I}$ vardır. Bu durumda $G = \mathbb{N} \setminus B$ olmak üzere her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\{n \in G : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = B_x \cap G = B_x \setminus B \in \mathcal{I}_f$ dir. Böylece $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*} f$ olur.

Önerme 3.2.10 X kümesi için $|X| \geq \mathfrak{c}$ olsun. $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir ideal ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olmak üzere aşağıdakiler denktir.
(i) $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ ise $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*} f$ dir.
(ii) $A \in \mathcal{I}$ ise $F \cap A$ sonlu olacak şekilde $F \in \mathcal{I}^*$ vardır (Filipów ve Staniszewski, 2014).

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: $\mathcal{I} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ olsun. $\alpha < \mathfrak{c}$ olmak üzere $x_\alpha \in X$, X in farklı elemanları olsun. $f_n : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & n \in A_\alpha \text{ ve } x = x_\alpha \\ 0, & n \notin A_\alpha \text{ ve } x = x_\alpha \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

ile tanımlayalım ve her $x \in X$ için $f(x) = 0$ olsun. Her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = A_\alpha \in \mathcal{I}$ olduğundan $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ dir. Böylece (i)'den $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*} f$ dir. O halde bir $F \in \mathcal{I}^*$ için $(f_n)_{n \in F} \to f$ dir. Sabit bir $A \in \mathcal{I}$ seçelim. O zaman bir $\alpha < \mathfrak{c}$ için $A = A_\alpha \in \mathcal{I}$ olur. $(f_n(x_\alpha))_{n \in F} \to 0$ olduğundan $F \cap A_\alpha = \{n \in F : f_n(x_\alpha) = 1\} \in \mathcal{I}_f$ dir.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $A \in \mathcal{I}$ iken $F \cap A$ sonlu olacak şekilde bir $F \in \mathcal{I}^*$ mevcut olsun. Eğer $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ ise her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\{n \in F : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_f$ olacağından $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}^*} f$ dir. □

Teorem 3.1.4'de (f_n), bir X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olmak üzere $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{I}_f)\text{-}e} f$ iken $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{I}_f)\text{-}e} f$ olduğu gösterilmişti. Aşağıdaki sonuç bunu genelleştirmektedir.

Önerme 3.2.11 $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde iki ideal ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e} f$ ise $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

İspat. $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e} f$ olsun. $F \in \mathcal{I}^*$ ve $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ olmak üzere her $x \in X$ için $\{n \in F : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}_f$ dir. Bu durumda her $x \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \subset \{n \in F : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \cup (\mathbb{N} \setminus F) \in \mathcal{I}$$

dır. Böylece $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ olur. □

Aşağıdaki önerme ise Teorem 3.1.7'nin bir genelleştirmesidir.

Önerme 3.2.12 X sonsuz bir küme ve $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde iki ideal olsun. Eğer X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların her bir (f_n) dizisi için $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ iken $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e} f$ ise $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-idealdir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

İspat. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $A_k \in \mathcal{I}$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $A_k \setminus A \in \mathcal{J}$ olacak şekilde $A \in \mathcal{I}$ olduğunu göstereceğiz. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x_k \in X$, X in farklı elemanları olsun.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & n \notin A_k \text{ ve } x = x_k,\ k \in \mathbb{N} \\ 1, & n \in A_k \text{ ve } x = x_k,\ k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

ile $f_n : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını tanımlayalım ve her $x \in X$ için $f(x) = 0$ olsun. Buna göre $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir. Gerçekten $\varepsilon_n = \frac{1}{n+2}$ seçilirse $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ olur. Eğer $x \in X \setminus \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ ise $\{n : |f_n(x) - f(x)| = 0 \geq \varepsilon_n\} = \emptyset \in \mathcal{I}$ dır. Eğer bir $k \in \mathbb{N}$ için $x = x_k$ ise $\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} = A_k \in \mathcal{I}$ olur. Böylece $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir. O halde hipotezden $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e} f$ olur. Dolayısıyla $(f_n)_{n \in F} \xrightarrow{(\mathcal{I}_f,\mathcal{J})\text{-}e} f$ olacak şekilde $F \in \mathcal{I}^*$ vardır. Buna göre pozitif reel sayıların $\eta_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ özelliğinde bir (η_n) dizisi vardır ki her $x \in X$ için $B_x = \{n \in F : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta_n\}$ sonlu olur. $A = \mathbb{N} \setminus F \in \mathcal{I}$ diyelim ve $C = \left\{n : \eta_n \geq \frac{1}{2}\right\} \in \mathcal{J}$ olsun. Bu durumda $A_k \setminus (A \cup C) \subset \{n \in F : |f_n(x_k) - f(x_k)| \geq \eta_n\} = B_{x_k}$ ve böylece $A_k \setminus A \subset C \cup B_{x_k} \in \mathcal{J}$ olur. □

Sonuç 3.2.9 X sonsuz bir küme ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir ideal olsun. Eğer X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların her bir (f_n) dizisi için $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{I}_f)\text{-}e}{\longrightarrow} f$ iken $f_n \overset{(\mathcal{I}^*,\mathcal{I}_f)\text{-}e}{\longrightarrow} f$ ise $\mathcal{I}$ bir P-idealdir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Sonuç 3.2.10 X sonsuz bir küme ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir ideal olsun. Eğer X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların her bir (f_n) dizisi için $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{I})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ iken $f_n \overset{(\mathcal{I}^*,\mathcal{I}_f)\text{-}e}{\longrightarrow} f$ ise $\mathcal{I}$ bir P-idealdir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Teorem 3.1.6'da X sayılabilir bir küme ve $\mathcal{I}$ bir P-ideal olduğunda $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{I})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ ise $f_n \overset{(\mathcal{I}^*,\mathcal{I}_f)\text{-}e}{\longrightarrow} f$ olduğu gösterilmişti. Aşağıdaki önerme X sayılamayan bir küme olduğunda bu sonucun geçerli olamayacağını göstermektedir (Ayrıca Uyarı 3.2.5'e bakınız).

Önerme 3.2.13 $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde iki ideal, X, kardinalitesi $|X| < add^*(\mathcal{I})$ koşuluna sahip bir küme ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ ise $f_n \overset{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

İspat. $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ olsun. Buradan $\varepsilon_n \overset{\mathcal{J}}{\longrightarrow} 0$ olmak üzere her $x \in X$ için $A_x = \{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$ dır. $|X| < add^*(\mathcal{I})$ olduğundan her $x \in X$ için $A_x \setminus A \in \mathcal{I}_f$ olacak şekilde $A \in \mathcal{I}$ vardır. $F = \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{I}^*$ olsun. $x \in X$ olmak üzere

$$\{n \in F : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \subset A_k \setminus A \in \mathcal{I}_f$$

olur. Bundan dolayı $f_n \overset{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ dir. □

Sonuç 3.2.11 $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir ideal, X, kardinalitesi $|X| < add^*(\mathcal{I})$ koşuluna sahip bir küme ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{I}_f)\text{-}e}{\longrightarrow} f$ ise $f_n \overset{(\mathcal{I}^*,\mathcal{I}_f)\text{-}e}{\longrightarrow} f$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Sonuç 3.2.2 ve Sonuç 3.2.11'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.12 $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir P-ideal, X, kardinalitesi $|X| < add^*(\mathcal{I})$ koşuluna sahip bir küme ve (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ ise $f_n \overset{(\mathcal{I}^*,\mathcal{I}_f)\text{-}e}{\longrightarrow} f$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Not 3.2.1 $P(\mathbb{N}) \approx 2^{\mathbb{N}}$ olduğundan $2^{\mathbb{N}}$ Cantor uzayının alt kümeleri üzerinde bir ideal tanımlanabilir. Sayılabilir sayıda açık kümelerin kesişimi şeklinde yazılabilen kümelere G_δ tipli küme denir. Eğer bir $\mathcal{I}$ ideali $2^{\mathbb{N}}$ nin G_δ tipli bir altkümesinin sürekli bir görüntüsü ise $\mathcal{I}$ idealine analitik ideal denir (Farah, 2000)

Uyarı 3.2.4 Todorčevic (1996), analitik P-idealleri için $\omega_1 < add^*(\mathcal{I}) = \mathfrak{c}$ olmasının ZFC ile tutarlı olduğunu ispatlamıştır. Buna göre, $\mathcal{I}$ analitik bir P-ideal, $|X| = \omega_1 < \mathfrak{c}$ ve X kümesi üzerinde $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ ise bu durumda $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{I}_f)\text{-}e} f$ sonucu ZFC ile tutarlıdır.

Teorem 3.2.7 X bir küme ve $|X| \geq \mathfrak{c}$ olsun. Ayrıca $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde iki ideal, $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ bir P-ideal olsun. (f_n), X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olmak üzere aşağıdakiler denktir:
(i) $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ ise $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir.
(ii) $A \in \mathcal{I}$ ise $F \cap A$ sonlu olacak şekilde $F \in \mathcal{I}^*$ vardır (Filipów ve Staniszewski, 2014).

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: $\mathcal{I} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ ve $\alpha < \mathfrak{c}$ olmak üzere $x_\alpha \in X$, X in farklı elemanları olsun. $f_n : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \exists\ \alpha < \mathfrak{c} \text{ için } n \in A_\alpha \text{ ve } x = x_\alpha \\ 0, & \exists\ \alpha < \mathfrak{c} \text{ için } n \notin A_\alpha \text{ ve } x = x_\alpha \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

ile tanımlayalım ve her $x \in X$ için $f(x) = 0$ olsun. Bu durumda $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir. Gerçekten $\varepsilon_n = \frac{1}{n+2}$ olsun. Buradan $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ dır. Her $\alpha < \mathfrak{c}$ için $x \neq x_\alpha$ ise $\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} = \emptyset \in \mathcal{I}$ dır. Eğer her $\alpha < \mathfrak{c}$ için $x = x_\alpha$ ise

$$\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} = A_\alpha \in \mathcal{I}$$

olur. (i)'den $(f_n)_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir. Böylece $F \in \mathcal{I}^*$ ve $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ olmak üzere her $x \in X$ için $\{n \in F : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\}$ kümesi sonludur. Teorem 3.2.1'den $(\varepsilon_n)_{n\in H} \to 0$ olacak şekilde $H \in \mathcal{J}^*$ vardır. Bu durumda $G = \left\{n \in H : \varepsilon_n < \frac{1}{2}\right\} \in \mathcal{J}^*$ dır. $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ olduğundan $G \in \mathcal{J}^*$ olur. Böylece $F \cap G \in \mathcal{J}^*$ olur. $(F \cap G) \cap A$ nın sonlu oluğunu göstermeliyiz. $(F \cap G) \cap A \in \mathcal{I}$ olduğundan $A_\alpha = (F \cap G) \cap A$ olacak şekilde $\alpha < \mathfrak{c}$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \{n \in F : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geq \varepsilon_n\} &\supset \{n \in F \cap G : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \\ &\supset \{n \in A_\alpha : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \\ &= A_\alpha \end{aligned}$$

dır. $\{n \in F : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geq \varepsilon_n\}$ kümesi sonlu olduğundan A_α kümesi de sonludur.
$(ii) \Rightarrow (i)$: $A \in \mathcal{I}$ iken $F \cap A$ sonlu olacak şekilde bir $F \in \mathcal{I}^*$ mevcut olsun. Eğer $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ ise $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ olmak üzere her $x \in X$ için $A_x = \{n \in F : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$ dır. Buradan her $x \in X$ için $\{n \in F : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geq \varepsilon_n\} = F \cap A_x$ sonludur. Böylece $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir. $\square$

Sonuç 3.2.13 X kardinalitesi en az $\mathfrak{c}$ olan bir küme ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir ideal olsun. Aşağıdakiler denktir:
(i) $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{I}_f)\text{-}e} f$ ise $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I}^*,\mathcal{I}_f)\text{-}e} f$ dir.
(ii) $A \in \mathcal{I}$ ise $F \cap A$ sonlu olacak şekilde $F \in \mathcal{I}^*$ vardır (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Sonuç 3.2.14 X kardinalitesi en az $\mathfrak{c}$ olan bir küme ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir P-ideal olsun. Aşağıdakiler denktir:
(i) $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{I})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ ise $f_n \overset{(\mathcal{I}^*,\mathcal{I}_f)\text{-}e}{\longrightarrow} f$ dir.
(ii) $A \in \mathcal{I}$ ise $F \cap A$ sonlu olacak şekilde $F \in \mathcal{I}^*$ vardır (Filipów ve Staniszewski, 2014).

Uyarı 3.2.5 Her sonsuz $A \subset \mathbb{N}$ kümesi için $B \subset A$ olacak şekilde sonsuz bir $B \in \mathcal{I}$ varsa $\mathcal{I}$ ya $\mathbb{N}$ üzerinde yoğun ideal denir. Eğer $\mathcal{I}$ bir yoğun ideal ise her $F \in \mathcal{I}^*$ için $A \subset F$ olacak şekilde sonsuz bir $A \in \mathcal{I}$ vardır. Dolayısıyla her yoğun P-ideal için kardinalitesi en az $\mathfrak{c}$ olan bir X kümesi üzerinde tanımlı öyle (f_n) dizisi mevcuttur ki $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{I})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ dir fakat $f_n \overset{(\mathcal{I}^*,\mathcal{I}_f)\text{-}e}{\not\longrightarrow} f$ dir.

3.3 $\mathcal{I}$-noktasal ve $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-eş yakınsaklığın karşılaştırılması

Bu kısımda bir X kümesinin tüm sonlu alt kümelerinin ideali $\mathrm{Fin}\,(X)$ ile gösterilecek ve $X = \mathbb{N}$ olduğunda $\mathrm{Fin}\,(\mathbb{N})$ yerine Fin yazılacaktır. Ayrıca $\mathcal{I}$, X üzerinde bir ideal olsun denildiğinde bu idealin X kümesinin tüm sonlu alt kümelerini kapsadığı yani bir uygun ideal olduğu varsayılacaktır.

Tanım 3.3.1 X herhangi bir küme ve $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, X üzerinde idealler olsun. Eğer $A \in \mathcal{I}$ ve $X \setminus A \in \mathcal{J}$ olacak biçimde $A \subset X$ varsa $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ ideallerine X üzerinde ortogonaldir denir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

Örnek 3.3.1
(i) İki farklı maksimal ideal ortogonaldir.
(ii) Eğer $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ ise $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ ortogonal idealler değildir.
(iii) Eğer X sonlu ise X üzerindeki ideallerin hiçbiri ortogonal değildir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. (i) $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, bir X kümesi üzerinde farklı maksimal idealler olsun. Eğer $A \in \mathcal{I}$ ise $\mathcal{I}$ maksimal olduğundan Uyarı 2.1.10'a göre $X \setminus A \notin \mathcal{I}$ dir. $\mathcal{J}$, $\mathcal{I}$ dan farklı bir maksimal olduğundan $X \setminus A \in \mathcal{J}$ olur. Böylece $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ idealleri X üzerinde ortogonaldir.
(ii) Eğer $A \in \mathcal{I}$ ise $A \in \mathcal{J}$ ve böylece $X \setminus A \notin \mathcal{J}$ olacaktır. Yani $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ olduğunda $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ ortogonal idealler değildir.
(iii) Her $\mathcal{I}$ ideali için $\mathrm{Fin}\,(X) \subset \mathcal{I}$ kabulünden dolayı (ii)'den elde edilir. □

Örnek 3.3.2 $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ sırasıyla X ve Y üzerinde idealler olsun.

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}(Y) &= \{A \subset X \times \{0\} \cup Y \times \{1\} : \{x \in X : (x,0) \in A\} \in \mathcal{I}\} \\ \mathcal{P}(X) \oplus \mathcal{J} &= \{B \subset X \times \{0\} \cup Y \times \{1\} : \{y \in Y : (y,1) \in B\} \in \mathcal{J}\} \end{aligned}$$

idealleri ortagonaldir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. $\{x \in X : (x,0) \in Y \times \{1\}\} = \emptyset \in \mathcal{I}$ olduğundan $A = Y \times \{1\} \in \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}(Y)$ dir. Buradan $(X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}) \setminus A = X \times \{0\} \in \mathcal{P}(X) \oplus \mathcal{J}$ dir.
Çünkü $\{y \in Y : (y,1) \in X \times \{0\}\} = \emptyset \in \mathcal{J}$ dir. □

Örnek 3.3.3

(*i*) Eğer $\mathcal{I}$ bir P-ideal ise $\mathcal{I}$, her $\mathcal{J}$ için $P(\mathcal{J})$-idealdir.

(*ii*) Eğer $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ ortogonal idealler ise $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-idealdir (ve $\mathcal{J}$ bir $P(\mathcal{I})$-idealdir).

(*iii*) Eğer $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ ise $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-idealdir (özel olarak her $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{I})$-idealdir) (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. (*i*) ve (*iii*) açıktır. (*ii*)'yi gösterelim. $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ ortogonal idealler yani bir $A \in \mathcal{I}$ için $X \setminus A \in \mathcal{J}$ olsun. Fakat $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-ideal olmasın. O zaman $A_n \in \mathcal{I}$ olmak üzere her $A \in \mathcal{I}$ için $A_n \setminus A \notin \mathcal{J}$ olur. Fakat bu $A_n \setminus A \subset X \setminus A$ ve $X \setminus A \in \mathcal{J}$ olması ile çelişir. □

Tanım 3.3.2 $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, X üzerinde idealler olsun. $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{J}$, X kümesinin herhangi bir ayrışımı olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \cap S \in \mathcal{I}$ olacak şekilde bir $S \notin \mathcal{I}$ mevcut ise $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ idealleri $W(\mathcal{I},\mathcal{J})$ özelliğini gerçekler denir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

Örnek 3.3.4

(*i*) Eğer $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ ortogonal olmayan idealler ve ayrıca $\mathcal{J}$ bir $P(\mathcal{I})$-ideal ise $W(\mathcal{I},\mathcal{J})$ özelliği gerçeklenir.

(*ii*) Eğer $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ farklı maksimal idealler ise $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-idealdir fakat $W(\mathcal{I},\mathcal{J})$ özelliği gerçeklenmez.

(*iii*) $W(\mathcal{I},\mathcal{I})$, $W(\mathrm{Fin},\mathcal{J})$ ve $W(\mathcal{I},\mathrm{Fin})$ özellikleri daima gerçeklenir.

(*iv*) Eğer $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ ise $W(\mathcal{I},\mathcal{J})$ gerçeklenir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. (*i*) $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{J}$, X kümesinin bir ayrışımı olsun. $\mathcal{J}$ bir $P(\mathcal{I})$-ideal olduğundan $A_n \setminus A \in \mathcal{I}$ olacak şekilde $A \in \mathcal{J}$ vardır. $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ ortogonal olmayan idealler olduğundan $X \setminus A \notin \mathcal{I}$ dır. $S = X \setminus A$ dersek $A_n \cap S \in \mathcal{J}$ olur.
(*ii*) $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ farklı iki maksimal ideal olsun. Bu durumda $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ ortogonal olur. Bu durumda Örnek 3.3.3 (*ii*)'den $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-idealdir. Kabul edelim ki $W(\mathcal{I},\mathcal{J})$ özelliği gerçeklenir. O zaman $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{J}$, X kümesinin herhangi bir ayrışımı olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \cap S \in \mathcal{I}$ olacak şekilde bir $S \notin \mathcal{I}$ mevcuttur. $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ farklı iki maksimal ideal olduğundan $S \in \mathcal{J}$ olur. Buradan $A_n \cap S \in \mathcal{J}$ olur. Ancak bu durumda hem $A_n \cap S \in \mathcal{I}$ hem de $A_n \cap S \in \mathcal{J}$ olur ki bu $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ nin farklı iki maksimal ideal olması ile çelişir.
(*iii*) ve (*iv*) açıktır. □

Örnek 3.3.5 Eğer $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ sayılabilir X kümesi üzerinde ortogonal idealler ise $W(\mathcal{I},\mathcal{J})$ özelliği gerçeklenmez (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. $A \in \mathcal{J}$ olmak üzere $X \setminus A \in \mathcal{I}$ olsun. Bu durumda $\{A\} \cup \{\{b\} : b \in X \setminus A\}$ gerekli olan ayrışımdır. $\square$

Aşağıda Örnek 3.3.5'in tersinin doğru olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 3.3.6 $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde idealler olmak üzere $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde

$$\begin{aligned} \emptyset \times \mathcal{I} &= \{A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } \{k : (n,k) \in A\} \in \mathcal{I}\}, \\ \mathcal{J} \times \emptyset &= \{A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \{n : \{k : (n,k) \in A\} \neq \emptyset\} \in \mathcal{J}\} \end{aligned}$$

ideallerini tanımlayalım. $\emptyset \times \mathcal{I}$ ve $\mathcal{J} \times \emptyset$ idealleri ortogonal değildir ve $W(\emptyset \times \mathcal{I},\mathcal{J} \times \emptyset)$ gerçeklenmez (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. Eğer $A \in \mathcal{J} \times \emptyset$ olsun. $\mathbb{N} \notin \mathcal{J}$ olduğundan en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $\{k : (n,k) \in A\} = \emptyset$ olur. Yani en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $A \cap (\{n\} \times \mathbb{N}) = \emptyset$ tur. Dolayısıyla en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $\{k : (n,k) \in A\} \in \mathcal{I}$ veya $\{k : (n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus A\} \notin \mathcal{I}$ dır. Bu nedenle $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus A \notin \emptyset \times \mathcal{I}$ olur. Böylece $\emptyset \times \mathcal{I}$ ve $\mathcal{J} \times \emptyset$ ortogonal değildir. Şimdi $W(\emptyset \times \mathcal{I},\mathcal{J} \times \emptyset)$ özelliğinin gerçeklenmediğini gösterelim. $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \{n\} \times \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda

$$\{m : \{k : (m,k) \in \{n\} \times \mathbb{N}\} \neq \emptyset\} = \{n\} \in \mathcal{J}$$

olduğundan her n için $A_n \in \mathcal{J} \times \emptyset$ olur. Ayrıca $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ olduğundan $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ gerekli olan ayrışımdır. Gerçekten, herhangi bir $S \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesine karşılık her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \cap S \in \emptyset \times \mathcal{I}$ olsun. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $\{k : (n,k) \in S\} \in \mathcal{I}$, buradan $S \in \emptyset \times \mathcal{I}$ dır. $\square$

Tanım 3.3.3 $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde idealler olsun. Eğer her $A \in \mathcal{J}$ için $\phi^{-1}[A] = \{x \in X : \phi(x) \in A\} \in \mathcal{I}$ olacak şekilde birebir ve örten bir $\phi : X \to Y$ dönüşümü varsa $\mathcal{I}$ ideali $\mathcal{J}$ idealinin izomorfik bir kopyasını içerir denir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

Önerme 3.3.1 $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde idealler olsun. Eğer $W(\mathcal{I},\mathcal{J})$ gerçeklenmez ise ya $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ idealleri ortogonaldir ya da $\mathcal{I}$, $\emptyset \times \mathrm{Fin}$ idealinin izomorfik bir kopyasını içerir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ nin bir parçalanışı olsun öyleki $S \notin \mathcal{I}$ ise bir $n \in \mathbb{N}$ için $S \cap A_n \notin \mathcal{I}$ olsun. $A = \{n : A_n \text{ sonsuz}\}$ kümesini tanımlayalım.
A nın sonlu olduğunu varsayalım. $B = \bigcup \{A_n : n \in A\} \in \mathcal{J}$ diyelim. $\mathbb{N} \setminus B \in \mathcal{I}$ olduğunu

göstereceğiz. $S = \mathbb{N} \setminus B \notin \mathcal{I}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda en az bir $n \in \mathbb{N} \setminus A$ için $S \cap A_n \notin \mathcal{I}$ dır. Fakat eğer $n \in \mathbb{N} \setminus A$ ise A_n sonlu ve böylece $S \cap A_n$ sonludur. Bu ise çelişkidir.

Şimdi A nın sonsuz olduğunu kabul edelim. A nın birebir olan bir dizilişi $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ şeklinde olsun. $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ birebir ve örten dönüşümünü

$$\phi \left[A_{a_0} \cup \bigcup \{A_n : n \in \mathbb{N} \setminus A\} \right] = \{0\} \times \mathbb{N}$$

ve $n \geq 1$ için $\phi [A_{a_n}] = \{n\} \times \mathbb{N}$ şeklinde tanımlayalım. Her $B \in \emptyset \times \mathrm{Fin}$ için $\phi^{-1}[B] \in \mathcal{I}$ olduğunu gösterelim (Bu $\mathcal{I}$ idealinin $\emptyset \times \mathrm{Fin}$ idealinin izomorfik bir kopyasını içerdiğini gösterecektir).

$B \in \emptyset \times \mathrm{Fin}$ olsun. Eğer $n \in \mathbb{N} \setminus A$ ise $A_n \cap \phi^{-1}[B] \subset A_n \in \mathrm{Fin} \subset \mathcal{I}$ dır. Şimdi de $n \in A$ olduğunu varsayalım. O zaman $n = a_k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Her $i \in \mathbb{N}$ için $B_i = \{m : (i, m) \in B\} \in \mathrm{Fin}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} A_n \cap \phi^{-1}[B] &= A_n \cap \phi^{-1}\left[\bigcup_i \{i\} \times B_i \right] &&= A_n \cap \bigcup_i \phi^{-1}[\{i\} \times B_i] \\ &= A_n \cap \phi^{-1}[\{k\} \times B_k] &&\subset \phi^{-1}[\{k\} \times B_k] \in \mathrm{Fin} \subset \mathcal{I} \end{aligned}$$

olur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \cap \phi^{-1}[B] \in \mathcal{I}$ ve buradan $\phi^{-1}[B] \in \mathcal{I}$ bulunur. □

Uyarı 3.3.1 Önerme 3.3.1'in tersi doğru değildir. Örneğin, $\mathcal{I} = \mathcal{J} = \emptyset \times \mathrm{Fin}$ için $\mathcal{I}$ ideali, $\emptyset \times \mathrm{Fin}$ idealinin izomorfik bir kopyasını içerir fakat $W(\mathcal{I},\mathcal{J})$ gerçeklenir.

Tanım 3.3.4 $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı idealler ve κ bir kardinal sayı olsun. $B(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \kappa)$ ile aşağıdaki özellik gösterilir:

$n \neq k$ ve $\alpha < \kappa$ için $E_n^\alpha \cap E_k^\alpha = \emptyset$ olmak üzere her $\{E_n^\alpha : n \in \mathbb{N}, \alpha < \kappa\} \subset \mathcal{I}$ ailesi için $\mathbb{N}$ nin öyle bir $\{A_n : n \in A\} \subset \mathcal{J}$ ayrışımı vardır ki her $\alpha < \kappa$ için

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i \leq n} E_i^\alpha \right) \in \mathcal{I}$$

dır (Filipów ve Staniszewski, 2015).

Önerme 3.3.2

(i) $B(\mathcal{I}, \mathcal{J}, 0)$ daima gerçeklenir.

(ii) Eğer $\kappa \leq \lambda$ ise $B(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \lambda) \Rightarrow B(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \kappa)$.

(iii) Eğer $\lambda \geq \mathfrak{c}$ ise $B(\mathcal{I},\mathcal{J},\lambda) \Leftrightarrow B(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathfrak{c})$.

(iv) Her κ için $B(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathfrak{c}) \Leftrightarrow B(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \kappa)$.

(v) Eğer $B(\mathcal{I}, \mathcal{J}, 1)$ gerçeklenir ise her $\kappa \leq \aleph_0$ için $B(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \kappa)$ gerçeklenir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. (i), (ii) ve (iv) açık olduğundan (iii)'yi ve (v)'i gösterelim.

(iii) İlk olarak $B(\mathcal{I},\mathcal{J},\lambda) \Rightarrow B(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathfrak{c})$ olduğunu gösterelim. $n \neq k$ ve $\alpha < \mathfrak{c}$ için $E_n^\alpha \cap E_k^\alpha = \emptyset$ olmak üzere $\{E_n^\alpha : n \in \mathbb{N}, \alpha < \mathfrak{c}\} \subset \mathcal{I}$ olsun. Bir $\{F_n^\alpha : n \in \mathbb{N}, \alpha < \lambda\}$ ailesini $\alpha < \mathfrak{c}$ için $F_n^\alpha = E_n^\alpha$ ve $\mathfrak{c} \leq \alpha < \lambda$ için $F_n^\alpha = E_n^0$ şeklinde tanımlayalım. $B(\mathcal{I},\mathcal{J},\lambda)$ özelliğinden dolayı $\mathbb{N}$ nin öyle bir $\{A_n : n \in A\} \subset \mathcal{J}$ ayrışımı vardır ki her $\alpha < \lambda$ için

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i\leq n} F_i^\alpha \right) \in \mathcal{I}$$

dır. Buradan her $\alpha < \mathfrak{c}$ için

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i\leq n} E_i^\alpha \right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i\leq n} F_i^\alpha \right) \in \mathcal{I}$$

olur. Böylece $B(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathfrak{c})$ özelliği gerçeklenir. Şimdi de $B(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathfrak{c}) \Rightarrow B(\mathcal{I},\mathcal{J},\lambda)$ gerektirmesinin doğruluğunu gösterelim. $n \neq k$ ve $\alpha < \lambda$ için $E_n^\alpha \cap E_k^\alpha = \emptyset$ olmak üzere herhangi bir $\{E_n^\alpha : n \in \mathbb{N}, \alpha < \lambda\} \subset \mathcal{I}$ ailesini alalım. $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$ olduğundan $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ içinde $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ sayıda dizi mevcuttur. Bu durumda $\{E_n^\alpha : n \in \mathbb{N}, \alpha < \lambda\}$ ailesi $\left\{F_n^\beta : n \in \mathbb{N}, \beta < \mathfrak{c}\right\}$ şeklinde yeniden indekslenebilir (Burada, tekrarlanan diziler atıldığında geriye kalanların kardinalitesi $\mathfrak{c}$ den büyük değildir). Dolayısyla $B(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathfrak{c})$ özelliğinden dolayı her $\beta < \mathfrak{c}$ için $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i\leq n} F_i^\beta \right) \in \mathcal{I}$ olacak şekilde $\mathbb{N}$ nin bir $\{A_n : n \in A\} \subset \mathcal{J}$ ayrışımı vardır. O halde aynı ayrışım ve her $\alpha < \lambda$ için

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i\leq n} E_i^\alpha \right) \in \mathcal{I}$$

olacağından $B(\mathcal{I},\mathcal{J},\lambda)$ özelliği gerçeklenir.

(v) (ii)'den $B(\mathcal{I},\mathcal{J},\aleph_0)$ özelliğinin gerçeklendiğini göstermek yeterlidir. $\alpha < \aleph_0$, $n \neq k$ için $E_n^\alpha \cap E_k^\alpha = \emptyset$ olmak üzere $\{E_n^\alpha : n \in \mathbb{N},\ \alpha < \aleph_0\} \subset \mathcal{I}$ ailesini alalım. $n \in \mathbb{N}$ için

$$F_n = \bigcup_{\alpha\leq n} \bigcup_{i\leq n} E_i^\alpha \setminus \bigcup_{i<n} F_i$$

kümelerini tanımlayalım. $n \in \mathbb{N}$ için $F_n \in \mathcal{I}$ dır ve $n \neq k$ için $F_n \cap F_k = \emptyset$ dir. Böylece $B(\mathcal{I},\mathcal{J},1)$ özelliğinden dolayı $\mathbb{N}$ nin öyle bir $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{J}$ ayrışımı mevcuttur ki

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i\leq n} F_i \right) \in \mathcal{I}$$

dır. Şimdi ise her $\alpha < \aleph_0$ için $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i\leq n} E_i^\alpha \right) \in \mathcal{I}$ olduğunu gösterelim. $\alpha < \aleph_0$ olsun. Her $n \geq \alpha$ için $\bigcup_{i\leq n} E_i^\alpha \subset \bigcup_{i\leq n} F_i$ olduğunu görmek kolaydır. Böylece

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i\leq n} E_i^\alpha \right) \subset \bigcup_{n<\alpha} \left(A_n \cap \bigcup_{i\leq n} E_i^\alpha \right) \cup \bigcup_{n\geq\alpha} \left(A_n \cap \bigcup_{i\leq n} F_i \right) \in \mathcal{I}$$

olur. O halde ispat biter. $\square$

Önerme 3.3.3 Eğer $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2$ ise her κ için $B(\mathcal{I}, \mathcal{J}_1, \kappa) \Rightarrow B(\mathcal{I}, \mathcal{J}_2, \kappa)$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. Tanımdan açıktır. $\square$

Aşağıdaki örnek, Önerme 3.3.3'deki gerektirmenin $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$ olduğunda geçerli olmadığını göstermektedir.

Örnek 3.3.7 $\mathcal{I}_1 = \mathcal{J} =$ Fin ve $\mathcal{I}_2$, P-ideal olmayan herhangi bir ideal olsun. Önerme 3.3.5'den $B(\mathcal{I}_1, \mathcal{J}, 1)$ gerçeklenir fakat $B(\mathcal{I}_2, \mathcal{J}, 1)$ gerçeklenmez.
(Filipów ve Staniszewski, 2015).

Aşağıdaki örnekte ise $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$ olduğunda $B(\mathcal{I}_2, \mathcal{J}, \kappa)$ özelliğinin $B(\mathcal{I}_1, \mathcal{J}, \kappa)$ özelliğini gerektirmediği gösterilmektedir.

Örnek 3.3.8 $\mathcal{I}_1 =$ Fin ve $\mathcal{I}_2$ ile $\mathcal{J}$ farklı iki maksimal idealler olsun. Bu durumda Örnek 3.3.4 (ii)'den $W(\mathcal{I}_2, \mathcal{J})$ gerçeklenmez. Böylece Önerme 3.3.4'ten $B(\mathcal{I}_2, \mathcal{J}, \mathfrak{c})$ gerçeklenir. Diğer taraftan Önerme 3.3.7'den $B(\mathcal{I}_1, \mathcal{J}, \mathfrak{c})$ gerçeklenmez (Filipów ve Staniszewski, 2015).

$\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2$ olduğunda benzer durum geçerlidir.

Örnek 3.3.9 $\mathcal{I}$, P-ideal olmayan herhangi bir ideal olsun. $\mathcal{J}_1 =$ Fin ve $\mathcal{J}_2 = \mathcal{I}$ alınırsa Önerme 3.3.5'den $B(\mathcal{I}, \mathcal{J}_2, 1)$ gerçeklenir fakat $B(\mathcal{I}, \mathcal{J}_1, 1)$ gerçeklenmez (Filipów ve Staniszewski, 2015).

Önerme 3.3.4 Her κ kardinali için $B(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \kappa)$ özelliğinin gerçeklenmesi için gerek ve yeter şart $W(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ özelliğinin gerçeklenmemesidir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. ($\Rightarrow$) Aralarında ayrık kümelerin her $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{I}$ ailesini $\{\{E_n^\alpha : n \in \mathbb{N}\} : \alpha < \mathfrak{c}\}$ şeklinde indeksleyelim. $B(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathfrak{c})$ özelliğinden dolayı $\mathbb{N}$ nin öyle bir $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{I}$ ayrışımı vardır ki her $\alpha < \mathfrak{c}$ için $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i\le n} E_i^\alpha\right) \in \mathcal{I}$ dır. Şimdi $W(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ özelliğinin gerçeklenmediğini gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \cap S \in \mathcal{I}$ olacak şekilde $S \subset \mathbb{N}$ alalım. $\alpha < \mathfrak{c}$ kardinali her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n^\alpha = A_n \cap S$ özelliğinde olsun. Buradan

$$S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap E_n^\alpha) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i\le n} E_i^\alpha\right) \in \mathcal{I}$$

olur. O halde $S \notin \mathcal{I}$ dır ve böylece $W(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ özelliği gerçeklenmez
($\Leftarrow$) Eğer $W(\mathcal{I},\mathcal{J})$ özelliği gerçeklenmiyorsa $\mathbb{N}$ nin öyle bir $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{J}$ ayrışımı

mevcuttur ki her $S \notin \mathcal{I}$ için $A_n \cap S \notin \mathcal{I}$ olacak biçimde $n \in \mathbb{N}$ vardır. κ herhangi bir kardinal olmak üzere $\alpha < \mathfrak{c}$, $n \neq k$ için $E_n^\alpha \cap E_k^\alpha = \emptyset$ özelliğine sahip $\{E_n^\alpha : n \in \mathbb{N},\ \alpha < \mathfrak{c}\} \subset \mathcal{I}$ ailesini alalım. Her $\alpha < \kappa$ için

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i\leq n} E_i^\alpha \right) \in \mathcal{I}$$

olduğunu göstermek istiyoruz. Aksine bir $\alpha < \kappa$ için $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i\leq n} E_i^\alpha\right) \notin \mathcal{I}$ olduğunu varsayalım. $W(\mathcal{I},\mathcal{J})$ özelliği sağlanmadığından öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki $A_{n_0} \cap S \notin \mathcal{I}$ dır. Diğer taraftan $n \neq n_0$ için $A_{n_0} \cap A_n = \emptyset$ olduğundan $A_{n_0} \cap S = A_{n_0} \cap \bigcup_{i\leq n_0} E_i^\alpha \in \mathcal{I}$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $B(\mathcal{I},\mathcal{J},\kappa)$ özelliği gerçeklenir. $\square$

Önerme 3.3.5 $B(\mathcal{I},\mathcal{J},1)$ özelliğinin gerçeklenmesi için gerek ve yeter şart $\mathcal{I}$ nın bir $P(\mathcal{J})$-ideal olmasıdır (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. ($\Rightarrow$) $E_n \in \mathcal{I}$ olsun. Genelliği bozmadan $n \neq k$ için $E_n \cap E_k = \emptyset$ olduğunu varsayalım. $B(\mathcal{I},\mathcal{J},1)$ gerçeklendiğinden $\mathbb{N}$ nin öyle bir $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{J}$ ayrışımı vardır ki

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i\leq n} E_i \right) \in \mathcal{I}$$

dır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n \setminus E \in \mathcal{J}$ olduğunu gösterelim (Bundan dolayı $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-ideal olur). $l \in E_n \setminus E$ ve $m \in \mathbb{N}$ sayısını $l \in A_m$ olacak şekilde seçelim. $l \notin E$ olduğundan $l \notin \bigcup_{i\leq m} E_i$ dir. Böylece $m < n$ olur. Dolayısıyla en az bir $i < n$ için $x \in A_i$ olacağından $E_n \setminus E \subset \bigcup_{i<n} A_i \in \mathcal{J}$ olur.
($\Leftarrow$) $\{E_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{I}$ bir ayrık aile olsun. $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-ideal olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n \setminus E \in \mathcal{J}$ olacak şekilde $E \in \mathcal{I}$ vardır. $\mathbb{N} \setminus \left(\bigcup_{n\geq 1} E_n \setminus E\right) = \{l_n : n \in \mathbb{N}\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = (E_{n+1} \setminus E) \cup \{l_n\} \in \mathcal{J}$ olsun. Buradan $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ nin bir ayrışımıolup

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i\leq n} E_i \right) &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(((E_{n+1} \setminus E) \cup \{l_n\}) \cap \bigcup_{i\leq n} E_i \right) \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\{l_n\} \cap \bigcup_{i\leq n} E_i \right) \subset E_0 \cup E \in \mathcal{I}
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $B(\mathcal{I},\mathcal{J},1)$ gerçeklenir. $\square$

Sonuç 3.3.1 $B(\mathcal{I},\mathrm{Fin},1)$ gerçeklenir $\Leftrightarrow \mathcal{I}$ bir P idealdir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

Önerme 3.3.5 ve Önerme 3.3.2 (v)'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.2 Her $\kappa \leq \aleph_0$ için $B(\mathcal{I},\mathcal{J},\kappa)$ gerçeklenir $\Leftrightarrow \mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-idealdir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

Önerme 3.3.6 Eğer $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-ideal ise her κ için $B(\mathcal{I},\mathcal{I},\kappa) \Rightarrow B(\mathcal{I},\mathcal{J},\kappa)$ dır (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. $\alpha < \kappa$, $n \neq k$ için $E_n^\alpha \cap E_k^\alpha = \emptyset$ olmak üzere $\{E_n^\alpha : n \in \mathbb{N},\ \alpha < \kappa\} \subset \mathcal{I}$ olsun. $B(\mathcal{I},\mathcal{I},\kappa)$ özelliğinden dolayı $\mathbb{N}$ nin öyle bir $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{I}$ ayrışımı vardır ki her $\alpha < \kappa$ için

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i\leq n} E_i^\alpha \right) \in \mathcal{I}$$

dır. $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-ideal olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \setminus A \in \mathcal{J}$ olacak şekilde $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{I}$ vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n = (A_n \setminus A) \cup \{a_n\}$ tanımlayalım. $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ nin bir ayrışımıdır. $\alpha < \kappa$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(B_n \cap \bigcup_{i\leq n} E_i^\alpha \right) &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(((A_n \setminus A) \cup \{a_n\}) \cap \bigcup_{i\leq n} E_i^\alpha \right) \\ &\subset A \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i\leq n} E_i^\alpha \right) \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $B(\mathcal{I},\mathcal{J},\kappa)$ gerçeklenir. $\square$

Önerme 3.3.6 ve Önerme 3.3.3'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.3 $\mathcal{I}$ bir P ideal olsun. Bu durumda $B(\mathcal{I},\mathcal{I},\kappa)$ gerçeklenir $\Leftrightarrow$ Her κ için $B(\mathcal{I},\mathrm{Fin},\kappa)$ gerçeklenir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

Aşağıdaki önermede kullanılan $\mathfrak{b}$ kardinali Tanım 3.1.13 de verilen sınırlama sayısıdır.

Önerme 3.3.7 $\mathcal{J}$ herhangi bir ideal ise $B(\mathrm{Fin},\mathcal{J},\kappa)$ geçerlidir $\Leftrightarrow$ $\kappa < \mathfrak{b}$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. ($\Rightarrow$) Aksine $\kappa \geq \mathfrak{b}$ olsun. Her $\alpha < \mathfrak{b}$ için $f_\alpha \leq^* g$ olacak şekilde $g \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ fonksiyonunun mevcut olmadığı $\left\{f_\alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : \alpha < \mathfrak{b}\right\}$ ailesini seçelim. Genelliği bozmadan her bir f_α nın kesin artan olduğunu varsayabiliriz. Her $\alpha < \mathfrak{b}$ için $E_0^\alpha = \{i \in \mathbb{N} : i \leq f_\alpha(1)\}$ ve $n \geq 1$ için $E_n^\alpha = \{i \in \mathbb{N} : f_\alpha(n) < i \leq f_\alpha(n+1)\}$ kümelerini tanımlayalım. $\kappa \geq \mathfrak{b}$ olduğundan Önerme 3.3.2 $(ii)'$den $B(\mathrm{Fin},\mathcal{J},\mathfrak{b})$ geçerlidir ve böylece $\mathbb{N}$ nin öyle bir $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{J}$ ayrışımı mevcuttur ki her $\alpha < \mathfrak{b}$ için

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i\leq n} E_i^\alpha \right) \in \mathrm{Fin}$$

dir. A_n kümeleri aralarında ayrık olduğundan her $\alpha < \mathfrak{b}$ için öyle bir $N_\alpha \in \mathbb{N}$ vardır ki buna göre, $n > N_\alpha$ için $A_n \cap \bigcup_{i\leq n} E_i^\alpha = \emptyset$ dir. (k_n) ile A_{k_n} kümelerinin boştan farklı olduğu tüm indislerin artan dizisini gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{k_n} \in A_{k_n}$ noktasını seçelim ve $g(n) = a_{k_n}$ ile $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonunu tanımlayalım. Her $\alpha < \mathfrak{b}$ için $f_\alpha \leq^* g$ olduğunu iddia ediyoruz (bu f_α nın seçimi ile çelişecektir). $\alpha < \mathfrak{b}$ olsun. $\bigcup_{i \leq n} E_i^\alpha = \{i \in \mathbb{N} : i \leq f_\alpha(n+1)\}$ ve her $n > N_\alpha$ için $A_n \cap \bigcup_{i \leq n} E_i^\alpha = \emptyset$ ve böylece her $n > N_\alpha$ için $A_{k_n} \cap \bigcup_{i \leq n} E_i^\alpha = \emptyset$ olduğundan her $n > N_\alpha$ için $g(n) > f_\alpha(n+1) > f_\alpha(n)$ olur. O halde kabulümüz yanlıştır.

($\Leftarrow$) $\kappa < \mathfrak{b}$ olsun. $n \neq k$ için $E_n^\alpha \cap E_k^\alpha = \emptyset$ ve $\alpha < \kappa$ olmak üzere $\{E_n^\alpha : n \in \mathbb{N}, \alpha < \kappa\} \subset$ Fin olsun. Her $\alpha < \kappa$ için $f_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f_\alpha(n) = \max\left(\bigcup_{i \leq n} E_i^\alpha \cup \{0\}\right)$ tanımlayalım. $\kappa < \mathfrak{b}$ olduğundan her $\alpha < \kappa$ için $f_\alpha \leq^* g$ olacak biçimde $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vardır. Genelliği bozmadan g nin kesin artan olduğunu varsayabiliriz. $A_0 = \{i \in \mathbb{N} : i \leq g(1)\}$ ve $n \geq 1$ için $A_n = \{i \in \mathbb{N} : g(n) < i \leq g(n+1)\}$ olsun. Bu durumda $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{N}$ nin bir ayrışımıdır $A_n \in \text{Fin} \subset \mathcal{J}$ dir. Her $\alpha < \kappa$ için

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i \leq n} E_i^\alpha \right) \in \text{Fin}$$

olduğunu iddia ediyoruz (bu $B(\text{Fin}, \mathcal{J}, \kappa)$ özelliğinin gerçeklendiğini gösterecektir). $\alpha < \kappa$ olsun. $f_\alpha \leq^* g$ olduğundan her $n \geq N$ için $f_\alpha(n) \leq g(n)$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır. $f_\alpha(n) = \max\left(\bigcup_{i \leq n} E_i^\alpha \cup \{0\}\right)$ ve $g(n) < \min A_n$ olduğundan $n \geq N$ için

$$A_n \cap \bigcup_{i \leq n} E_i^\alpha = \emptyset$$

olur. Böylece

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i \leq n} E_i^\alpha \right) = \bigcup_{n < N} \left(A_n \cap \bigcup_{i \leq n} E_i^\alpha \right) \in \text{Fin}$$

elde edilir. □

Önerme 3.3.8 Eğer $\mathcal{I}$ bir P-ideal ve $\mathcal{J}$ keyfi bir ideal ise her $\kappa < \mathfrak{b}$ için $B(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \kappa)$ gerçeklenir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. $\kappa < \mathfrak{b}$ olsun. $n \neq k$ için $E_n^\alpha \cap E_k^\alpha = \emptyset$ ve $\alpha < \kappa$ olmak üzere $\{E_n^\alpha : n \in \mathbb{N}, \alpha < \kappa\} \subset \mathcal{I}$ olsun. $\mathcal{I}$ bir P-ideal olduğundan her $\alpha < \kappa$ için öyle bir $E_\alpha \in \mathcal{I}$ vardır ki her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n^\alpha \setminus E_\alpha$ sonludur. Her $\alpha < \kappa$ için $f_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f_\alpha(n) = \max\left(\bigcup_{i \leq n} E_i^\alpha \setminus E_\alpha \cup \{0\}\right)$ tanımlayalım. $\kappa < \mathfrak{b}$ olduğundan her $\alpha < \kappa$ için $f_\alpha \leq^* g$ olacak biçimde $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vardır. Genelliği bozmadan g nin kesin artan olduğunu varsayabiliriz. $n \geq 1$ için $A_n = \{i \in \mathbb{N} : i \leq g(1)\}$ ve $A_n = \{i \in \mathbb{N} : g(n) < i \leq g(n+1)\}$ olsun. Bu durumda $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{N}$ nin bir ayrışımıdır ve $A_n \in \text{Fin} \subset \mathcal{J}$ dir. Her $\alpha < \kappa$ için

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i \leq n} E_i^\alpha \right) \in \mathcal{I}$$

olduğunu iddia ediyoruz (bu $B(\mathcal{I}, \mathrm{Fin}, \kappa)$ özelliğinin geçerli olduğunu gösterecektir). $\alpha < \kappa$ olsun. $f_\alpha \leq^* g$ olduğundan her $n \geq N$ için $f_n(n) \leq g(n)$ olacak biçimde $N \in \mathbb{N}$ vardır. $f_n(n)$=max $\left(\bigcup_{i \leq n} E_i^\alpha \setminus E_\alpha \cup \{0\}\right)$ ve $g(n) < \min A_n$ olduğundan $n \geq N$ için

$$A_n \cap \left(\bigcup_{i \leq n} E_i^\alpha \setminus E_\alpha\right) = \emptyset$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(A_n \cap \bigcup_{i \leq n} E_i^\alpha\right) \ &\subset \ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(A_n \cap \left(\bigcup_{i \leq n} E_i^\alpha \setminus E_\alpha\right)\right) \cup E_\alpha \\
&= \ \bigcup_{n < N} \left(A_n \cap \left(\bigcup_{i \leq n} E_i^\alpha \setminus E_\alpha\right)\right) \cup E_\alpha \in \mathcal{I}
\end{aligned}$$

dır. □

Şimdi de $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde idealler olmak üzere

$$\mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}) = \min\left(\left\{\mathfrak{c}^+\right\} \cup \{\kappa : B(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \kappa) \ \text{gerçeklenmez}\}\right)$$

kardinal katsayısını tanımlayalım.

Önerme 3.3.9

(i) $\mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}) = 1$ veya $\mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}) \geq \aleph_1$ dir.

(ii) $\mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-ideal değildir.

(iii) $\mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}) \geq \aleph_1 \Leftrightarrow \mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-idealdir.

(iv) $\mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}) = \mathfrak{c}^+ \Leftrightarrow W(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ gerçeklenmez.

(v) $\mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}) \leq \mathfrak{c} \Leftrightarrow W(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ gerçeklenir.

(vi) $\aleph_1 \leq \mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}) \leq \mathfrak{c} \Leftrightarrow \mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-idealdir ve $W(\mathcal{I},\mathcal{J})$ gerçeklenir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. (i) şıkkı Önerme 3.3.2 (i)'den ve Önerme 3.3.2 (v)'den elde edilir. (ii) şıkkı Önerme 3.3.5'den ve Önerme 3.3.2 (i)'den elde edilir. (iii) şıkkı Sonuç 3.3.2'den elde edilir. (iv) şıkkı Önerme 3.3.4' ten ve Önerme 3.3.2 (iii)'den elde edilir. (v), (iv)'ten elde edilir. (vi) şıkkı ise (iii)'den ve (iv)'ten elde edilir. □

Aşağıdaki önermeler sırasıyla Önerme 3.3.3'den ve Önerme 3.3.6'dan elde edilir.

Önerme 3.3.10 Eğer $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2$ ise $\mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}_1) \leq \mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J}_2)$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

Önerme 3.3.11 Eğer $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-ideal ise $b(\mathcal{I},\mathcal{I}) \leq \mathfrak{b}(\mathcal{I},\mathcal{J})$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

Sonuç 3.3.4 Eğer $\mathcal{I}$ bir P-ideal ise
(i) $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}(\mathcal{I},\mathcal{J})$ dir.
(ii) $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}(\mathcal{I},\mathrm{Fin}) = \mathfrak{b}(\mathcal{I},\mathcal{I}) \leq \mathfrak{c}$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. (i) şıkkı Önerme 3.3.8'den elde edilir. (ii)'deki ilk eşitsizlik Önerme 3.3.8'den, eşitlik Sonuç 3.3.3'den ve ikinci eşitsizlik Önerme 3.3.9 (v)'den ve $W(\mathcal{I},\mathcal{I})$ özelliğinin gerçeklenmesinden elde edilir. □

Önerme 3.3.12 Her $\mathcal{J}$ ideali için $\mathfrak{b}(\mathrm{Fin},\mathcal{J}) = \mathfrak{b}$ dir. Özel olarak $\mathfrak{b}(\mathrm{Fin},\mathrm{Fin}) = \mathfrak{b}$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. Önerme 3.3.7'den elde edilir. □

Uyarı 3.3.2 $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir ideal olsun. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ üzerinde

$$f \leq^{\mathcal{I}} g \Leftrightarrow \{n : f(n) > g(n)\} \in \mathcal{I}$$

ile tanımlı $\leq^{\mathcal{I}}$ bağıntısını ele alalım. Farkas ve Soukup (2009) sınırlama sayısının ideal versiyonunu aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$\mathfrak{b}(\mathcal{I}) = \min\left\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}},\ \neg\left(\exists g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}},\ \forall f \in \mathcal{F},\ f \leq^{\mathcal{I}} g\right)\right\}$$

$\mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}(\mathcal{I})$ olduğu açıktır.
Her $n \in \mathbb{N}$ için $f^{-1}(\{n\})$ ters görüntüsü sonlu olacak şekilde bir $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mevcut öyleki

$$A \in \mathcal{I} \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{J}$$

oluyorsa o zaman $\mathcal{I} \leq_{RB} \mathcal{J}$ dir denir. $\leq_{RB}$ tüm idealler üzerinde bir pre-sıralama olup bu sıralamaya Rudin-Blass sıralaması denir Farkas ve Soukup (2009), $\mathcal{I} \leq_{RB} \mathcal{J}$ iken $\mathfrak{b}(\mathcal{I}) = \mathfrak{b}(\mathcal{J})$ olduğunu, bunun sonucu olarak, $\mathcal{I}$ analitik bir P-ideal ise $\mathfrak{b}(\mathcal{I}) = \mathfrak{b}$ olduğunu ispatlamıştır. Buna göre Önerme 3.3.12'ten analitik P-idealleri için $\mathfrak{b}(\mathrm{Fin},\mathcal{J}) = \mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}(\mathcal{J})$ ve böylece $\mathfrak{b}(\mathrm{Fin},\mathcal{J}) = \mathfrak{b}(\mathcal{J})$ olur (Filipów ve Staniszewski, 2015).

Teorem 3.3.1 $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde idealler olsun. Her X kümesi için aşağıdakiler denktir:
(i) $B(\mathcal{I},\mathcal{J},|X|)$ gerçeklenir.
(ii) X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların her (f_n) dizisi için eğer $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ ise $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ olsun. $\kappa = |X|$ olmak üzere X kümesini $X = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ biçiminde yazalım. Her $\alpha < \kappa$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon_n^\alpha = |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| + 1/n$ olarak tanımlayalım. $E_0^\alpha = \{n : \varepsilon_n^\alpha \geq 1\}$ ve $k \geq 1$ için $E_k^\alpha = \{n : 1/(k+1) \leq \varepsilon_n^\alpha < 1/k\}$ olsun. Bu durumda $E_k^\alpha \in \mathcal{I}$ ve $k \neq l$ için $E_k^\alpha \cap E_l^\alpha = \emptyset$ dir. $B(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \kappa)$ gerçeklendiğinden $\mathbb{N}$ nin öyle bir $\{A_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{J}$ parçalanışı vardır ki her $\alpha < \kappa$ için

$$B_\alpha = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(A_k \cap \bigcup_{i \leq k} E_i^\alpha \right) \in \mathcal{I}$$

olur. $n \in A_k$ için $\eta_n = 1/(k+1)$ olsun. Bu durumda $\eta_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ dır. Her $\alpha < \kappa$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geq \eta_n\} \subset B_\alpha \in \mathcal{I}$$

olduğu gösterilirse $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ olacaktır. $n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geq \eta_n$ olsun. Eğer $n \in B_\alpha$ ise durum açıktır. $n \in \mathbb{N} \setminus B_\alpha$ olduğunu varsayalım. $k_0 \in \mathbb{N}$ için $n \in A_{k_0}$ olsun (Buna göre $\eta_n = 1/(k_0+1)$ olur). Buradan $n \notin \bigcup_{i \leq k_0} E_i^\alpha$ ve böylece $\varepsilon_n^\alpha < 1/(k_0+1) = \eta_n$ olur. Dolayısıyla $|f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geq \varepsilon_n^\alpha$ olur ki bu bir çelişkidir.
$(ii) \Rightarrow (i)$: $\kappa = |X|$ olmak üzere $X = \{x_a : \alpha < \kappa\}$ olsun. $n \neq k$, $\alpha < \kappa$ için $E_k^\alpha \cap E_k^\alpha = \emptyset$ olmak üzere $\{E_n^\alpha : n \in \mathbb{N}, \alpha < \kappa\} \subset \mathcal{I}$ olsun. $f_n : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & n \in E_k^\alpha \text{ ve bir } \alpha < \kappa \text{ için} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ise sıfır fonksiyonu olsun. Bu durumda $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ olup hipotezden $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ sağlanır. O halde her $\alpha < \kappa$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$$

olacak biçimde $\varepsilon_n \xrightarrow{\mathcal{J}} 0$ koşulunu sağlayan bir (ε_n) pozitif reel sayı dizisi vardır. $A_0 = \{n : \varepsilon_n \geq 1/2\}$ ve $k \geq 1$ için $A_k = \{n : 1/(k+2) \leq \varepsilon_n < 1/(k+1)\}$ olsun. Bu durumda $A_k \in \mathcal{J}$, $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \mathbb{N}$ ve $n \neq m$ için $A_n \cap A_m = \emptyset$ dir. Her $\alpha < \kappa$ için

$$\bigcup_{k \geq 1} \left(A_k \cap \bigcup_{i \leq k} E_i^\alpha \right) \in \mathcal{I}$$

olduğunu göstermek istiyoruz. $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(A_k \cap \bigcup_{i \leq k} E_i^\alpha \right) = (A_0 \cap E_0^\alpha) \cup \bigcup_{k \geq 1} \left(A_k \cap \bigcup_{i \leq k} E_i^\alpha \right)$ ve $A_0 \cap E_0^\alpha \subset E_0^\alpha$ olduğundan $\bigcup_{k \geq 1} \left(A_k \cap \bigcup_{i \leq k} E_i^\alpha \right) \in \mathcal{I}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $n \in \bigcup_{k \geq 1} \left(A_k \cap \bigcup_{i \leq k} E_i^\alpha \right)$ ise $k \geq 1$ ve $i \leq k$ için $n \in A_k \cap E_i^\alpha$ olsun. O zaman $n \in E_i^\alpha$ iken $f_n(x_\alpha) = 1/(i+1)$ olur. Diğer taraftan $n \in A_k$ iken $\varepsilon_n < 1/(k+1)$ dir. $i \leq k$ olduğundan

$$|f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| = \frac{1}{i+1} \geq \frac{1}{k+1} > \varepsilon_n$$

dir. Böylece

$$\bigcup_{k\geq 1}\left(A_k \cap \bigcup_{i\leq k} E_i^{\alpha}\right) \subset \{n \in \mathbb{N} : |f_n(x_\alpha) - f(x_\alpha)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$$

olur. $\square$

Teorem 3.3.2 $\mathbb{N}$ üzerindeki $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ idealleri için $W(\mathcal{I},\mathcal{J})$ gerçeklensin. Her X kümesi ve X kümesi üzerinde tanımlı (f_n) reel değerli fonksiyon dizisi için eğer $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ ise $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. Önerme 3.3.4'ten ve Teorem 3.3.1'den elde edilir. $\square$

Teorem 3.3.3 $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde $W(\mathcal{I},\mathcal{J})$ özelliğine sahip idealler olsun. Aşağıdakiler denktir:

(i) $|X| < \mathfrak{b}(\mathcal{I},\mathcal{J})$ dir.

(ii) X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların her (f_n) dizisi için $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ ise $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: Eğer $|X| < \mathfrak{b}(\mathcal{I},\mathcal{J})$ ise $\mathfrak{b}(\mathcal{I},\mathcal{J})$ gerçeklenir. Buna göre Teorem 3.3.1'i uygulamak yeterlidir.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Teorem 3.3.1'den $B(\mathcal{I},\mathcal{J},|X|)$ gerçeklenir. İki durum söz konusudur. Eğer $|X| \leq \mathfrak{c}$ ise $\mathfrak{b}(\mathcal{I},\mathcal{J}) \geq |X|^+ > |X|$ dir. Şimdi gösterelim ki ikinci durum yani $|X| > \mathfrak{c}$ olamaz. Eğer $|X| > \mathfrak{c}$ ise $\mathfrak{b}(\mathcal{I},\mathcal{J}) = \mathfrak{c}^+$ ve bundan dolayı $|X| < \mathfrak{c}^+$ olur ki bu bir çelişkidir. $\square$

Sonuç 3.3.5 $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde $W(\mathcal{I},\mathcal{J})$ özelliğine sahip idealler olsun. $|X| \geq \mathfrak{c}$ olan her X kümesi için X üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların öyle bir (f_n) dizisi vardır ki $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ ve $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e}{\not\longrightarrow} f$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. Eğer $W(\mathcal{I},\mathcal{J})$ gerçeklenir ise Önerme 3.3.9'dan $\mathfrak{b}(\mathcal{I},\mathcal{J}) \leq \mathfrak{c}$. Böylece Teorem 3.3.3 uygulandığında istenen sonuç elde edilir. $\square$

Sonuç 3.3.6 X boş olmayan bir küme olsun. $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde idealler olsun ve $\mathcal{I}$ bir $P(\mathcal{J})$-ideal olmasın. Bu durumda X üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların öyle bir (f_n) dizisi vardır ki $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ ve $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e}{\not\longrightarrow} f$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. Önerme 3.3.5'den $B(\mathcal{I},\mathcal{J},1)$ gerçeklenmez. Böylece Önerme 3.3.2 (ii)'den her $\kappa \geq 1$ için $B(\mathcal{I},\mathcal{J},\kappa)$ geçerli değildir. O halde Teorem 3.3.1'den istenen sonuç elde edilir. $\square$

Örnek 3.3.4 (iv)'den eğer $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ ise $W(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ gerçeklenir. Bu durumda Sonuç 3.3.5 uygulanırsa Örnek 3.2.2 tekrar elde edilmiş olur.

Teorem 3.3.3 ve Sonuç 3.3.4'ten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.7 $|X| \geq \mathfrak{c}$ ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir P-ideal olsun. X üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların her (f_n) dizisi için $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ ise $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathrm{Fin})\text{-}e} f$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

$\mathcal{I} = \mathcal{J} = \mathrm{Fin}$ alınıp Teorem 3.3.3 uygulandığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.8 Aşağıdakiler denktir.
(i) $|X| < \mathfrak{b}$ dir.
(ii) X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların her (f_n) dizisi için $f_n \to f$ ise $f_n \xrightarrow{e} f$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

Önerme 3.2.2, Teorem 3.3.3 ve Örnek 3.3.4 (iv)'den aşağıdaki sonuç çıkar.

Sonuç 3.3.9 $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde idealler olsun. Aşağıdakiler denktir.
(i) X kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların her (f_n) dizisi için $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ ise $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ dir ve X üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların öyle bir (f_n) dizisi mevcuttur ki $f_n \xrightarrow{\mathcal{I}} f$ ve $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e}{\not\longrightarrow} f$ dir.
(ii) $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ ve $|X| \geq \mathfrak{b}(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ dir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

Bu kısımda son olarak ideal eş limitlerin tekliğine ilişkin bir karekterizasyon aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 3.3.4 $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathbb{N}$ üzerinde idealler ve X boş olmayan bir küme olsun. Aşağıdakiler denktir.
(i) Eğer $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} f$ ve $f_n \xrightarrow{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e} g$ ise $f = g$ dir.
(ii) $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ idealleri ortogonal değildir (Filipów ve Staniszewski, 2015).

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$: Varsayalım ki $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ idealleri ortogonal olsun. $A \in \mathcal{I}$ elemanını $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{J}$ olacak şekilde seçelim. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ için $f_n(x) = 0$ ve $f(x) = 0$ olsun.

Açıkça $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ dir. Her $x \in X$ için $g(x) = 1$ olsun. Buradan

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & n \in A \\ \\ 2, & n \in \mathbb{N} \setminus A \end{cases}$$

ile tanımlı (ε_n) dizisi için $\varepsilon_n \overset{\mathcal{J}}{\longrightarrow} 0$ olup her $x \in X$ için $\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} = A \in \mathcal{I}$ dır. Böylece $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e}{\longrightarrow} g$ ve $g \neq f$ olur ki bu bir çelişkidir.

$\neg\,(i) \Rightarrow \neg\,(ii)$: (f_n) bir dizi ve f, g iki farklı fonksiyon olmak üzere $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e}{\longrightarrow} f$ ve $f_n \overset{(\mathcal{I},\mathcal{J})\text{-}e}{\longrightarrow} g$ olsun. $f\,(x_0) \neq g\,(x_0)$ olacak şekilde $x_0 \in X$ alalım ve $\varepsilon = |f_n(x_0) - g(x_0)|\,/3 > 0$ seçelim. $\eta_n \overset{\mathcal{J}}{\longrightarrow} 0$ ve $\zeta_n \overset{\mathcal{J}}{\longrightarrow} 0$ olmak üzere

$$A_\eta = \{n \in \mathbb{N} : |f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \eta_n\} \in \mathcal{I}$$

ve

$$A_\zeta = \{n \in \mathbb{N} : |f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \zeta_n\} \in \mathcal{I}$$

dır. Buradan $B_\eta = \{n \in \mathbb{N} : \eta_n > \varepsilon\} \in \mathcal{J}$ ve $B_\zeta = \{n \in \mathbb{N} : \zeta_n > \varepsilon\} \in \mathcal{J}$ elde ederiz. $B = B_\eta \cup B_\zeta \in \mathcal{J}$ olsun. Şimdi $\mathbb{N} \setminus B \subset A_\eta \cup A_\zeta \in \mathcal{I}$ olduğunu gösterelim (Bu $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ nin ortogonal olduğunu gösterir). $n \in \mathbb{N} \setminus B$ alalım ve $n \notin A_\eta$ ve $n \notin A_\zeta$ olduğunu varsayalım. Buradan $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \eta_n < \varepsilon$ ve $|f_n(x_0) - g(x_0)| < \zeta n < \varepsilon$ dur. Bundan dolayı $|f(x_0) - g(x_0)| \leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - g(x_0)| < 2\varepsilon$ olur. Bu $f\,(x_0) \neq g\,(x_0)$ olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. □

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, fonksiyon dizilerinin ideal eş yakınsaklığı kavramı ve bununla ilişkili olan kavramlar ayrıntılı olarak incelenmiştir. Genel olarak, Das ve Chandra (2013), Das ve Dutta (2013), Das ve ark. (2014), Filipów ve Staniszewski (2014) ve Filipów ve Staniszewski (2015) tarafından elde edilen sonuçlar incelense de bu çalışmalarda yer alan örneklerin çözümü ve teoremlerin ispatları daha anlaşılır bir matematiksel dil yardımıyla yorumlanmıştır. Das ve ark. (2014), Örnek 3.1.2'de, $\mathcal{I}$ sayılabilir üretilmiş bir ideal olduğunda $\mathcal{I}$-noktasal yakınsaklığın $\mathcal{I}$-eş yakınsaklığı gerektirmediğini göstermiş, fakat $\mathcal{I}$ herhangi bir ideal olduğunda bu sonucun geçerli olup olmayacağını açık bir problem olarak vermiştir. Filipów ve Staniszewski (2014) ise Örnek 3.2.2'de kardinalitesi $|X| \geq \mathfrak{c}$ olan bir X kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir (f_n) dizisi için bu sonucun doğruluğunu göstermiştir. Das ve ark. (2014), Teorem 3.1.2 de $\mathcal{I}$ sayılabilir üretilmiş bir ideal olduğunda $\mathcal{I}$-eş yakınsaklığın σ-$\mathcal{I}$-düzgün yakınsaklığı gerektirdiğini ispatlamış ve burada bu sonucun herhangi bir $\mathcal{I}$ ideali için geçerli olup olamayacağı sorusunu sormuşlardır. Filipów ve Staniszewski (2014), Sonuç 3.2.7'de kardinalitesi $|X| \geq \mathfrak{c}$ olan X kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların (f_n) dizisi için bu sorunun olumsuz yanıtını vermiştir. Ayrıca yine Das ve ark. (2014), Teorem 3.1.6'da X sayılabilir bir küme olduğunda P-idealler için ideal eş yakınsaklığın süzgeç eş yakınsaklığı gerektirdiğini ispatlamış ve burada bunun sayılamayan bir X kümesi üzerinde tanımlı fonksiyon dizileri için geçerli olup olmayacağı sorusunu sormuşlardır. Filipów ve Staniszewski (2014), bu sorunun olumlu cevabını yine $|X| \geq \mathfrak{c}$ olan X kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların dizisi için cevaplamıştır (Sonuç 3.2.14). Diğer taraftan Filipów ve Staniszewski (2015), özellikle yeni tanımladıkları kardinaller ve ideallerin bazı özellikleri aracılığı ile $\mathcal{I}$-noktasal yakınsaklık ile $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$-eş yakınsaklık arasındaki ilişki içeren yeni sonuçlar elde etmişlerdir.

Buna göre, fonksiyon dizilerinin yakınsaklık tipleri üzerine olan çalışmalarda fonksiyonların tanımlı olduğu kümenin kardinalitesi üzerine çeşitli koşullar konulduğunda daha iyi sonuçların elde edilebileceğini söyleyebiliriz. Ayrıca üçüncü bölümün, ikinci ve üçüncü kısmında olduğu gibi yakınsaklığın genelleştirilmesi ile ilgili problemlerin çözümlerinde küme teorisi metotlarının kullanılımı bu alanda araştırma yapan matematikçilere yeni ve önemli sonuçlar elde etmeye olanak sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Balcerzak, M., Dems, K., Komisarski, A. 2007. Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 328(1): 715–729.

[2] Bukovská, Z. 1991. Quasinormal convergence. Mathematica Slovaca, 41: 137-146.

[3] Bukovský, L. 2011. The Structure of the Real Line, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk. Monografie Matematyczne (New Series) (Mathematics Institute of the Polish Academy of Sciences. Mathematical Monographs (New Series)), vol:71, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel. 536 pp.

[4] Cartan, H. 1937. Filtres et ultrafiltres. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 205: 777-779.

[5] Császár, Á., Laczkovich, M. 1975. Discrete and equal convergence. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 10(3-4): 463-472.

[6] Császár, Á., Laczkovich, M. 1979. Some remarks on discrete Baire classes. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 33: 51-70.

[7] Das, P., Chandra, D. 2013. Spaces not distinguishing pointwise and I-quasinormal convergence, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 54(1): 83-96.

[8] Das, P., Dutta, S. 2013. On some types of convergence of sequences of functions in ideal context. Filomat, 27(1): 157-164.

[9] Das, P., Dutta, S., Pal, S.K. 2014. On I and I^*-equal convergence and an Egoroff like theorem. Matematichki Vesnik, 66(2): 165-177.

[10] Ergun, N. 2006. Kümeler teorisine giriş. 2.Baskı Nobel yayın dağıtım, Ankara, 436 pp.

[11] Farah, I. 1998. Semiselective coideals. Mathematika, 45(1): 79–103.

[12] Farah, I. 2000. Analytic quotients. Theory of lifting for quotients over analytic ideals on integers. Memoirs of the American Mathematical Society, 148(702): 1-177.

[13] Farkas, B., Soukup, L. 2009. More on cardinal invariants of analytic P-ideals. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 50(2): 281-295.

[14] Fast, H. 1951. Sur la convergence statistique. Colloquium Mathematicum, 2: 241–244.

[15] Filipów, R., Szuca, P. 2012. Three kinds of convergence and the associated I-Baire classes. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 391(1): 1–9.

[16] Filipów, R., Staniszewski, M. 2014. On ideal equal convergence. Central European Journal of Mathematics, 12(6): 896-910.

[17] Filipów, R., Staniszewski, M. 2015. Pointwise versus equal (quasi-normal) convergence via ideals. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 422: 995-1006.

[18] Furstenberg, H. 1981. Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory. Princeton University Press, Princeton, NJ, 216 pp.

[19] Gezer, F., Karakus, S. 2005. I and I^*-convergent function sequences. Mathematical Communications, 10: 71–80.

[20] Hernández-Hernández, F., Hrušák, M. 2007 Cardinal invariants of analytic P-ideals. Canadian Journal of Mathematics, 59(3): 575–595.

[21] Jech, T. 2003. Set Theory. 3d Edition, Springer, New York. 769 pp.

[22] Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V. 1970. Introductory Real Analysis, Dover Publicahtions Inc, New York, 403 pp.

[23] Koopman, B.O., von Neumann, J. 1932. Dynamical systems of continuous spectra, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 18: 255–263.

[24] Kostyrko, P., Šalát, T., Wilczyński, W. 2000/01. I-convergence. Real Analysis Exchange, 26(2): 669–685.

[25] Kostyrko, P., Mačaj, M. T., Šalát, Sleizak, M. 2005. I-convergence and extremal $I-$limit points. Mathematica Slovaca, 55: 443-464.

[26] Kuratowski, C. 1958. Topologie I, PWN, Warszava.

[27] Lahiri, B.K., Das, P. 2003. Further results on $\mathcal{I}$-limit superior and limit inferior. Mathematical Communications, 8: 151–156.

[28] Papanastassiou, N. 2002. On a new type of convergence of sequences of functions. Atti del Seminario Matematico e Fisico dell' Universit'a di Modena e Reggio Emilia, 50(2): 493–506.

[29] Steinhaus, H. 1951. Sur la convergence ordinate et la convergence asymptotique. Colloquium Mathematicum, 2: 73–74.

[30] Todorčevic, S. 1996. Analytic gaps. Fundamenta Mathematicae, 150(1): 55-66.

[31] Zygmund, A. 1959. Trigonometric Series, Cambridge University Press, Cambridge.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	**:**	Samet BEKAR
Doğum Yeri	**:**	ORDU
Doğum Tarihi	**:**	16.09.1991
Medeni Hali	**:**	Bekar
Bildiği Yabancı Dil	**:**	İngilizce
Lisans	**:**	Atatürk Üniversitesi, Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2009-2013)
Pedagojik Formasyon	**:**	Yıldız Teknik Üniversitesi, Eğitim Fakültesi (2014)