T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# HİLBERT UZAYINDA ÖZEŞLENİK OPERATÖRLERİN SÜREKLİ FONKSİYONLARI İÇİN TRAPEZOİDAL TİPLİ EŞİTSİZLİKLERİ

SİBEL BURCU SERDAROĞLU

Bu tez,
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans
derecesi için hazırlanmıştır

ORDU 2018

**TEZ ONAY**

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Sibel Burcu SERDAROĞLU tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL danışmanlığında yürütülen "Hilbert Uzayında Özeşlenik Operatörlerin Sürekli Fonksiyonları İçin Trapezoidal Tipli Eşitsizlikler" adlı bu tez, jürimiz tarafından 31 / 01 / 2018 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

| | | | |
|---|---|---|---|
| Başkan | : | Doç. Dr. İmdat İŞCAN<br>Giresun Üniversitesi, Matematik | İmza : |
| Üye | : | Doç. Dr. Selahattin MADEN<br>Ordu Üniversitesi, Matematik | İmza : |
| Üye | : | Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL<br>Ordu Üniversitesi, Matematik | İmza : |

ONAY:

01 / 02 / 2018 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 01../02../ 2018 tarih ve 2018/32 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

... / ... / 2018

Enstitü Müdürü

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Sami Güler

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Sibel Burcu SERDAROĞLU

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

# ÖZET

## HİLBERT UZAYINDA ÖZEŞLENİK OPERATÖRLERİN SÜREKLİ FONKSİYONLARI İÇİN TRAPEZOİDAL TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

**Sibel Burcu SERDAROĞLU**

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2018
Yüksek Lisans Tezi, 54s.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

Bu tezde, kompleks Hilbert uzayında özeşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için Trapezoidal eşitsizliği ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Ayrıca kuvvet, logaritmik ve üstel fonksiyonlar gibi bazı elementer fonksiyonlar için uygulaması verilmiştir.



**Anahtar Kelimeler:** Kompleks Hilbert uzayı, özeşlenik operatörler, özeşlenik, operatörlerin sürekli fonksiyonları, Tropezoidal eşitsizlik

## ABSTRACT

**TRAPEZOIDAL TYPE INEQUALITIES FOR CONTINUOUS FUNCTIONS OF SELFADJOINT OPERATORS IN HILBERT SPACE**

**Sibel Burcu SERDAROĞLU**
Ordu University
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2018
MSc. Thesis, 54p.

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

In this thesis, it is extensive researched Trapezoidal inequality for continuous functions of selfadjoint operator in complex Hilbert space. Besides, ıt is given the application of some basic function such power, logarithmic and exponential.

**Key Words:** Complex Hilbert space, selfadjoint operators, continuous functions of selfadjoint operators, Trapezoidal inequality.

## TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bilgi ve deneyimleriyle her türlü yanımda olan danışman hocam

Sayın

Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL'a

en iç duygularımla teşekkürlerimi iletiyorum.

Yüksek lisans eğitim-öğretim süresince değerli bilgilerinden istifade ettiğim Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri ve araştırma görevlilerine teşekkür ederim.

Eğitim hayatım süresince maddi-manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

## SİMGELER ve KISALTMALAR

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | **:** | Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{C}$ | **:** | Kompleks sayılar kümesi |
| $sgn(\cdot)$ | **:** | İşaret fonksiyonu |
| $Sp(A), \sigma(A)$ | : | $A$ operatörünün spektrumu |
| $<\cdot,\cdot>$ | : | İç çarpım fonksiyonu |
| $H$ | : | Hilbert uzayı |
| $L(H)$ | : | $H$' dan $H$' a lineer operatörlerin kümesi |
| $B(H)$ | : | $H$' dan $H$' a sınırlı operatörlerin kümesi |
| $L_p(\cdot)$ | : | $p \in [1, \infty)$ için, $p$-inci mertebeye kadar integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı |
| $L_\infty(\cdot)$ | : | $ess\ sup$' u sonlu olan integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı |

# 1. GİRİŞ

Trapezoidal eşitsizliği, Riemann integraline yaklaşımda hata sınırlarını elde etmede öncü bir rol oynar. Bu tarz eşitsizliklerin, yani Ostrowski ve midpoint eşitsizliği gibi, bir çok genişlemeleri literatürde mevcuttur. Bu alanda yapılan genişlemeler daha çok, zaman skalası üzerinde $n$-defa differansiyellenebilir fonksiyonlar ve vektör değerli fonksiyonlar ya da katlı integraller için yapılmıştır. Bu eşitsizliğin nümerik analiz, olasılık teorisi ve matematiğin diğer alanlarında uygulama yerleri mevcuttur.

Bu tezde, kompleks Hilbert uzaylarında özeşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için Trapezoidal eşitsizliği ayrıntılı bir şekilde incelenecektir. Ayrıca kuvvet, logaritmik ve üstel fonksiyon gibi operatörlerin bazı elementer fonksiyonları için uygulamarı da ele alınacakır.

Bu tez hazırlanırken S. S. Dragomir tarafından 2012 yılında basılan "Operator Inequality of Ostrowski and Trapezoidal Type" isimli kitabı temel kaynak olarak kullanılmıştır.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

**Tanım 2.0.1** (**Lineer Uzay**) $L$ boş olmayan bir küme ve $F$ bir cisim olsun. $+ : L \times L \to L$ ve $. : F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $L$ ye $F$ cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir.

**A)** $L$, "+" işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.
G2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$dir.
G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.
G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.
G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

**B)** $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ omak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha x \in L$ dir.
L2. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.
L3. $(\alpha + \beta)x = \alpha.x + \beta.x$ dir.
L4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta.x)$ dir.
L5. $1.x = x$ dir. (Burada 1, $F$ nin birim elemanıdır).

$F = \mathbb{R}$ ise $L$ ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise $L$ ye kompleks lineer uzay adı verilir.

**Tanım 2.0.2** Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

**Tanım 2.0.3** $F$ bir cisim, $V$ ve $W$ ise $F$ cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T : V \to W$ dönüşümü,
**a** $T(u + v) = T(u) + T(v)$
**b** $T(cu) = cT(u)$
şartlarını sağlıyorsa $T$ ye $V$ üzerinde lineer dönüşüm denir .

**Tanım 2.0.4** (**Konveks Küme**): $L$ bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \;\; 0 \le \alpha \le 1\} \subseteq A$$

ise $A$ kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki $x$ ve $y$ nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1-\alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan $\alpha, \beta$ reel sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak $B$ kümesi uç noktaları $x$ ve $y$ olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir.

**Tanım 2.0.5** (**Konveks Fonksiyon**): $I$, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \;\leq\; \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \tag{2.0.1}$$

şartını sağlayan, $f$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer (2.0.1) eşitsizliği $x \neq y$ ve $\alpha \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda $f$ fonksiyonuna kesin konvekstir denir.

**Tanım 2.0.6 ([1],p.215)** $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $[a,b]$ kapalı aralığının bir parçalanışı

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

ve

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

olsun. Bu durumda tüm $V-$lerin toplamının kümesinin en küçük üst sınırına $f$ fonksiyonun $[a,b]$ aralığı üzerinde "total varyasyonu" denir ve $\bigvee_a^b(f)$ şeklinde gösterilir. $\bigvee_a^b(f) < \infty$ ise, $f$-ye $[a,b]$ aralığı üzerinde "sonlu varyasyonlu bir fonksiyon" adı verilir. Aynı zamanda $f(x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde sonlu varyasyona sahip de diyebiliriz.

Şimdi önemli olan bu fonksiyon sınıfının bazı özelliklerini ispatsız olarak vereceğiz.

**Teorem 2.0.1 ([1],p.215)** $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı bir monoton fonksiyon $[a,b]$ üzerinde sonlu varyasyona sahiptir.

**Teorem 2.0.2 ([1],p.216)** $[a,b]$ kapalı aralığı üzerindeki her sonlu varyasyonlu fonksiyon $[a,b]$ aralığında sınırlıdır.

**Teorem 2.0.3 ([1],p.216)** Sonlu varyasyonlu iki fonksiyonun toplamı, farkı ve çarpımları da sonlu varyasyonlu bir fonksiyondur.

**Teorem 2.0.4 ([1],p.217)** $f(x)$, $[a,b]$ üzerinde tanımlı sonlu varyasyonlu bir fonksiyon ve $a < c < b$ olsun. Bu durumda

$$\bigvee_a^b(f) = \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f)$$

eşitliği doğrudur.

**Sonuç 2.0.1 ([1],p.218)** $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $a < c < b$ olsun. Eğer $f$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sonlu varyasyona sahip ise, bu durumda $f$, $[a,b]$'nin herbir $[a,c]$ ve $[c,b]$ aralığı üzerinde de sonlu varyasyona sahiptir. Tersi de doğrudur.

**Teorem 2.0.5 ([1],p.218)** $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sonlu bir $f$ fonksiyonunun sonlu varyasyonlu olabilmesi için gerek ve yeter koşul bu fonksiyonun azalan iki fonksiyonun farkı olarak yazılabilmesidir.

**Sonuç 2.0.2 ([1],p.219)** Eğer bir $f$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sonlu varyasyonlu ise, bu durumda $[a,b]$'nin her noktasında $f'$ türevi mevcuttur ve sonludur.

**Tanım 2.0.7 ([1],p.243)** $f$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sonlu varyasyonlu bir fonksiyon olsun. Her $\epsilon > 0$ için, $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_n < b_n$ ve

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$$

şartını sağlayan

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(b_k) - f(a_k)\right| < \epsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ var ise, bu durumda $f(x)$ fonksiyonuna "mutlak süreklidir" denir. Bu fonksiyon sınıfı, sınırlı varyasyonlu fonksiyonların önemli bir alt kümesidir.

**Tanım 2.0.8 (İç-çarpım uzayı)**: $F(\mathbb{R} \,\text{veya}\, \mathbb{C})$ olmak üzere, $X$ bir vektör uzayı olsun. $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to F$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise " $\langle\cdot,\cdot\rangle$" dönüşümüne $X$ üzerinde bir iç-çarpım, $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ikilisine de bir "iç-çarpım" uzayı denir:

1. $\forall x \in X$ için $\langle x, x\rangle \geq 0$ ve $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$;

2. $\forall x, y \in X$ için $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;

3. $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$;

4. $\forall x, y, z \in X$ için $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

**Not 2.0.1** $F = \mathbb{R}$ olması halinde 2. özellik $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ olur. İç-çarpım tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu kolayca görebiliriz.

1. $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$,

2. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$;

3. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle$.

**Tanım 2.0.9** $(X, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ bir iç çarpım uzayı olsun. Bir $x \in X$ vektörünün normu

$$\| x \| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \tag{2.0.2}$$

şeklinde tanımlanan reel sayıya denir.

**Tanım 2.0.10** (**Hilbert Uzayı**): $(X, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer bu iç-çarpım uzayı (2.0.2) normuna göre tam ise, yani $(X, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ iç-çarpım uzayı içindeki her Cauchy dizisi (2.0.2) norma göre yakınsak ise bu iç çarpıma bir "Hilbert Uzayı" denir.

**Tanım 2.0.11** (**Birim Operatör**): $A : X \to X$ operatörü verilsin. Eğer her $x \in X$ için $Ax = x$ ise $A$ operatörüne birim(özdeşlik) operatör denir. $I$, $E$ ve $I_X$ sembollerinden biriyle gösterilir.

**Tanım 2.0.12** (**Sınırlı Operatör**): $X$ ve $Y$ iki normlu uzay olsun. $A$ ise tanım kümesi $D(A) \subset X$ ve görüntü kümesi $R(A) \subset Y$ olan bir operatör olsun. Eğer $A$ operatörü $D(A)$ 'nın $X$' de sınırlı her kümesine $R(A)$'nın $Y$ de sınırlı bir kümesini karşılık getiriyorsa $A$' ya "sınırlı bir operatör" denir. Başka bir deyişle

$$\| Ax \|_Y \leq c \| x \|_X, \text{ her } x \in D(A)$$

olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa, $A$'ya "sınırlı bir operatör"denir.

**Tanım 2.0.13** (**Lineer Operatör**): $X$ ve $Y$ aynı $F$ cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A : X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer $D(A)$, $X$' in bir alt uzayı ve

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \ \forall x, y \in D(A) \ ve \ \forall \alpha, \beta \in F$$

ise $A$'ya "lineer operatör"denir.

**Tanım 2.0.14** (**Eşlenik ve Öz-eşlenik Operatör**): $A$, $H$ Hilbert uzayında sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer her $f, g \in D(A) \subset H$ için

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, A^* g \rangle$$

sağlanıyorsa $A^*$ a $A$'nın "eşlenik operatörü"denir.

Eğer $D(A) = D(A^*)$ ve $A = A^*$ ise bu $A$' ya özeşlenik operatör denir.

**Tanım 2.0.15** (**Projeksiyon Operatör**): $V$ bir vektör uzayı ve $P : V \longrightarrow V$ lineer bir operatör olsun. Bu durumda $P^2 = P$ oluyorsa, buna "projeksiyon veya izdüşüm operatörü" denir.

**Tanım 2.0.16** (**Rezolventa**): $H$ bir Hilbert uzayı ve $A : D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör olsun.

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E)^{-1} \in L(H)\}$$

kümesine $A$ operatörünün "regüler değerler kümesi" veya "rezolvent kümesi" denir.

$\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda; A) = (A - \lambda E)^{-1}$ operatorüne $A$ operatorünün "rezolventası" veya "çözücü operatörü" adı verilir.

**Tanım 2.0.17** (**Spektrum**): $H$ bir Hilbert uzayı olsun.

$$Sp(A) = \sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

kümesine $A$ operatörünün "spektrumu " denir. $A$ operatörünün spektrum kümesi "$\sigma(A)$" veya "$Sp(A)$" ile göstereceğiz.

Şimdi özeşlenik operatörlerin spektral gösterimi ile ilgili teorem ve sonuçları verelim.

$A \in B(H)$ özeşlenik bir operatör ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\varphi_\lambda(s) = \begin{cases} 1, & -\infty < s \leq \lambda \\ 0, & \lambda < s < \infty \end{cases}$$

şeklinde bir $\varphi_\lambda(.)$ fonksiyonu olsun. Bu durumda her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $E_\lambda := \varphi_\lambda(A)$ operatörü $A$-ya indirgenen bir projeksiyondur.

**Teorem 2.0.6** (**Spektral Gösterim Teoremi**):[9]

$A$, bir $H$ Hilbert uzayında sınırlı, özeşlenik bir operatör ve

$$m = \min \big\{ \lambda : \lambda \in Sp(A) \big\} := \min Sp(A)$$

$$M = \max\left\{\lambda : \lambda \in Sp(A)\right\} := \max Sp(A)$$

olsun. Bu durumda, $a)\lambda_1 \leq \lambda_2$ için $E_{\lambda_1} \leq E_{\lambda_2}$; $b)$Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $E_{m-0} = 0, E_m = I$ ve $E_{\lambda \neq 0} = E_\lambda$ $c)A = \int_{m-0}^{M} \lambda dE_\lambda$

özelliklerini sağlayan ve $A$ operatörünün spektral ailesi adı verilen bir $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ projeksiyon ailesi vardır.

**Sonuç 2.0.3** [10] Spektral gösterim teoreminden

$$\varphi(A) = \int_{m-0}^{M} \varphi(\lambda) dE_\lambda$$

Riemann-Stieltjes integralini elde ederiz.

**Sonuç 2.0.4** [10] Spektral gösterim teoreminden, her $x \in H$ için

$$\varphi(A)x = \int_{m-0}^{M} \varphi(\lambda) dE_\lambda x$$

ve her $x, y \in H$ için

$$\langle \varphi(A)x, y\rangle = \int_{m-0}^{M} \varphi(\lambda) d\langle E_\lambda x, y\rangle.$$

dir. Özel olarak, her $x \in H$ için

$$\langle \varphi(A)x, x\rangle = \int_{m-0}^{M} \varphi(\lambda) d\langle E_\lambda x, x\rangle.$$

ve buna ilaveten her $x \in H$ için

$$\|\varphi(A)x\|^2 = \int_{m-0}^{M} |\varphi(\lambda)|^2 d\|E_\lambda x\|^2.$$

eşitliği yazılabilir.

**Teorem 2.0.7** (**Total Varyasyonlu Schwarz Eşitsizliği** ):[10] $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, sınırlı, öz eşlenik $A$ operatörlerinin spektral ailesi ve $m = \min Sp(A)$, $M = \max Sp(A)$ olsun. Bu durumda keyfi $x, y \in H$ için

$\lambda \longrightarrow \langle E_\lambda x, y\rangle$fonksiyonu keyfi $\delta > 0$ için $[m - s, M]$ üzerinde sınırlı varyasyonludur ve

$$\bigvee_{m-0}^{M} (\langle E_{(.)}x, y\rangle) \leq \|x\|.\|y\|$$

eşitsizliği gerçeklenir. Literatürde bu eşitsizliğe "Total Varyasyonlu Schwarz Eşitsizliği" (TVSI) denir.

**Tanım 2.0.18** $A$, $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı üzerinde keyfi bir özeşlenik lineer operatör olsun. $C\big(Sp(A)\big)$, $A$ operatörünün spektrumu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesini göstersin. Gelfand dönüşümü yardımıyla aşağıdaki özellikleri yazılan $\Phi$ ile $C\big(Sp(A)\big)$ kümesi arasında bir $*$-izometrik izomorfizim vardır. Ayrıca $H$ üzerinde $1_H$ birim operatörü ve $A$ operatörü tarafından üretilen bir $C^*(A)$ cebiri vardır. Keyfi $f, g \in C\big(Sp(A)\big)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

1. $\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g)$;
2. $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ ve $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$;
3. $\|\Phi(f)\| := \|f\| := \sup_{t\in Sp(A)} |f(t)|$ ;
4. $\Phi(f_0) = 1_H$ ve $\Phi(f_1) = A$ burada $t \in Sp(A)$ için $f_0(t) = 1$ ve $f_1(t) = t$.

Şimdi bir operatörün, bir fonksiyon altındaki görüntüsünün ne anlama geldiğini ifade edelim.

**Tanım 2.0.19** $A$, $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı üzerinde keyfi bir özeşlenik lineer operatör olsun. $C\big(Sp(A)\big)$, $A$ operatörünün spektrumu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesi ve $\Phi$ de Tanım (2.0.18) deki fonksiyon olsun. Bu durumda her $f \in C\big(Sp(A)\big)$ için

$$f(A) := \Phi(f)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye keyfi bir $A$ özeşlenik operatörünün sürekli fonksiyonel hesabı denir.

**Tanım 2.0.20** (**Operatörlerde Sıralama**): $A$ ve $B$, $H$ Hilbert uzayı üzerinde iki özeşlenik operatör olsun.

1. $A \leq B \Leftrightarrow \langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle \ \forall x \in H$;
2. $A \geq 0$ ise $A$ operatörüne pozitiftir denir.

**Not 2.0.2** Eğer $A$ özeşlenik bir operatör ve $f$ de $Sp(A)$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon ise, bu durumda $t \in Sp(A)$ için $f(t) \geq 0$ dır. Buradan $f(A) \geq 0$, yani $f(A)$ $H$ Hilbert uzayı üzerinde pozitif bir operatördür. Ayrıca eğer $f$ ve $g$, $Sp(A)$ üzerinde iki fonksiyon ise ve her $t \in Sp(A)$ için

$$f(t) \geq g(t) \text{ dir. Buradan da } f(A) \geq g(A)$$

elde edilir.

**Teorem 2.0.8** [2] $A$, $H$ Hilbert uzayı üzerinde sınırlı özeşlenik bir operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

$$m := \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle = \max\{\alpha \in \mathbb{R} | \alpha E \leq A\};$$

$$M := \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle = \min\{\alpha \in \mathbb{R} | A \leq \alpha E\};$$

ve

$$\|A\| = \max\{\|m\|, \|M\|\}.$$

Ayrıca $m, M \in Sp(A)$ ve $Sp(A) \subset [m, M]$ dir.

**Tanım 2.0.21** (**Operatör Konveks**): $A$ ve $B$, spektrumları $I \subset \mathbb{R}$ aralığında olan keyfi özeşlenik operatörler ve $\lambda \in [0, 1]$ olsun. Bu durumda,

$$f((1-\lambda)A + \lambda B) \leq (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B)$$

eşitsizliğini sağlayan, $I$ aralığı üzerinde tanımlı, reel değerli sürekli fonksiyona operatör konveks denir.

# 3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

## 3.1 Skaler Durumda Trapezoidal Tipli Eşitsizlikler

Klasik analizde, bir Trapezoidal tip eşitsizlik,

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)-\int_a^b f(t)dt$$

işleminin üst veya alt sınırlarını hesaba katan bir eşitsizliktir ki bu da kompakt $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı çeşitli integrallenebilir fonksiyon sınıfları için yapılmıştır.

Bu kısımda literatürde iyi bilinen sonuçlar ve Hilbert uzayında özeşlenik operatör fonksiyonlar için benzer problemleri anlayabilmemizi sağlayacak olan teoremleri ispatsız olarak vereceğiz.

**Teorem 3.1.1** [2] $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ sonlu varyasyonlu bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right|\leq\frac{1}{2}(b-a)\bigvee_a^b(f), \tag{3.1.1}$$

burada $\bigvee_a^b(f)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde $f$ nin total varyasyonunu göstermektedir. Ayrıca $\frac{1}{2}$ bulunabilecek en iyi sabittir.

**Teorem 3.1.2** [2] $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton azalmayan olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(t)dt-\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right| \qquad (3.1.2)\\ \leq\ &\frac{1}{2}(b-a)[f(b)-f(a)]\int_a^b sgn\left(t-\frac{a+b}{2}\right)f(t)dt\\ \leq\ &\frac{1}{2}(b-a)[f(b)-f(a)].\end{aligned}$$

**Teorem 3.1.3** [2] $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde L-Lipschitzian fonksiyon olsun yani her $L>0$ için

$$|f(s)-f(t)|\leq L|s-t|,\ \text{ her }\ s,t\in[a,b] \qquad (L)$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right|\leq\frac{1}{4}(b-a)^2L, \tag{3.1.3}$$

buradaki $\frac{1}{4}$ yaklaşılabilecek en iyi sabittir.

**Teorem 3.1.4** [2] $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| \int_a^b f(t) - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \right| \tag{3.1.4}$$

$$\leq \begin{cases} \frac{1}{4}(b-a)^2 \parallel f^{'} \parallel_\infty, & \text{eğer } f^{'} \in L_\infty[a,b] \\ \frac{1}{2(q+1)^{\frac{1}{q}}}(b-a)^{1+\frac{1}{q}} \parallel f^{'} \parallel_p, & \text{eğer } f^{'} \in L_p[a,b] \;\; p>1, \;\; \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \\ \frac{1}{2}(b-a) \parallel f^{'} \parallel_1, & \end{cases}$$

burada $p \in [1,\infty]$ için $\|.\|_p$ Lebesque normunu göstermektedir, yani $p=\infty$ için

$$\|f^{'}\|_\infty := ess \sup_{s\in[a,b]} |f^{'}(s)|$$

ve $p \geq 1$ için

$$\|f^{'}\|_p := \left( \int_a^b |f^{'}(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir.

**Teorem 3.1.5** [2] $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ $[a,b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8}(a-b)^2 \left[ f_+^{'}\left(\frac{a+b}{2}\right) - f_-^{'}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \\ \leq \; & \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a) - \int_a^b f(t)dt \\ \leq \; & \frac{1}{8}(a-b)^2 \left[ f_-^{'}(b) - f_+^{'}(a) \right], \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

burada $\frac{1}{8}$ bulunabilecek en iyi sabittir.

**Not 3.1.1** Diğer Skaler Trapezoidal Tipi Eşitsizlikler için P.Cerone ve S.S.Dragomir'in [3] çalışmasına bakılabilir.

## 3.2 Trapezoidal Vektör Eşitsizlikleri

### 3.2.1 Bazı Genel Sonuçlar

İlk olarak üretilen notasyonlarla, $\frac{f(M)+f(m)}{2}\langle x,y\rangle$, trapezoidal tipli formulü tarafından $\langle f(A)x,y\rangle$ yaklaşımında

$$\frac{f(M)+f(m)}{2}\langle x,y\rangle - \langle f(A)x,y\rangle$$

hata sınırının problemi verilmiştir. Burada $x, y$ Hilbert uzayında vektörler ve $f$, $[m, M]$ reel sayıların kompakt aralığında spektrum ile $A$ özeşlenik operatörlerinin sürekli bir fonksiyonudur. Bazı özel basit fonksiyonlar için uygulamalar ayrıca ispatlanmıştır.

**Teorem 3.2.1** [7] $A$, $m < M$ bazı reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ spektrumu ile $H$ Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör ve $E_\lambda$ onun spektral ailesi olsun. Eğer $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m, M]$ üzerinde sonlu varyasyonlu sürekli bir fonksiyon ise, herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(M)+f(m)}{2} \langle x, y \rangle - \langle f(A)x, y \rangle \right| \qquad (3.2.1) \\ \leq\ & \frac{1}{2} \max_{\lambda \in [m,M]} \Big[ \langle E_\lambda x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle E_\lambda y, y \rangle^{\frac{1}{2}} \\ +\ & \langle (1_H - E_\lambda)x, x \rangle^{\frac{1}{2}} + \langle (1_H - E_\lambda)y, y \rangle^{\frac{1}{2}} \Big] \bigvee_{m-0}^{M} (f) \\ \leq\ & \frac{1}{2} \parallel x \parallel \parallel y \parallel \bigvee_{m-0}^{M} (f) \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

**İspat.** Eğer $f$, $u : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$, fonksiyonları için $\int_a^b f(t)du(t)$ Riemann-Stieltjes integrali varsa, o zaman basit bir kısmi integrasyon alarak

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(t)du(t) = \frac{f(a)+f(b)}{2} \big[ u(b) - u(a) \big] \\ -\ & \int_a^b \left[ u(t) - \frac{u(a)+u(b)}{2} \right] df(t) \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir.

Eğer $u(\lambda) = \langle E_\lambda x, y \rangle$ eşitliği için (3.2.2) eşitliği kullanılırsa, o zaman herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} &\frac{f(M)+f(m)}{2} \langle x, y \rangle - \langle f(A)x, y \rangle \qquad (3.2.2) \\ =\ & \frac{1}{2} \int_{m-0}^{M} [(\langle E_\lambda x, y \rangle + \langle (E_\lambda - 1_H)x, y \rangle] df(\lambda) \end{aligned}$$

yazılabiliriz.

$$\int_{m-0}^{M} f(\lambda)d(\langle E_\lambda x, y\rangle) = \frac{f(M)+f(m)}{2}.\langle x, y\rangle$$
$$- \int_{m-0}^{M} \left(\langle E_\lambda x, y\rangle - \frac{1}{2}\langle x, y\rangle\right) df(\lambda)$$

Bildiğimiz gibi, eğer $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon ve $v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sonlu varyasyonlu ise, o zaman $\int_a^b p(t)dv(t)$ Riemann-Stieltjes integrali mevcuttur ve

$$\left| \int_a^b p(t)dv(t) \right| \leq \max_{t\in[a,b]} |p(t)| \bigvee_a^b (v) \tag{3.2.3}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada $\bigvee_a^b(v)$, $[a, b]$ üzerinde $v$ nin total varyasyonunu gösterir. (3.2.3) özelliğini kullanarak, (3.2.2) den

$$\left| \frac{f(m)+f(M)}{2}\langle x, y\rangle - \langle f(A)x, y\rangle \right| \tag{3.2.4}$$
$$\leq \frac{1}{2} \max_{\lambda\in[m,M]} |\langle E_\lambda x, y\rangle + \langle E_\lambda - 1_H)x, y\rangle| \bigvee_{m-0}^{M} (f)$$
$$\leq \frac{1}{2}\left[ \max_{\lambda\in[m,M]} [|\langle E_\lambda x, y\rangle| + |\langle(1 - H - E_\lambda)x, y\rangle|] \right] \bigvee_{m-0}^{M} (f)$$

eşitsizliğini yazabilir.

Eğer $P$, $H$ üzerinde negatif olmayan operatör, yani herhangi $x \in H$ için $\langle Px, x\rangle \geq 0$ ise, o zaman aşağıdaki eşitsizliği yani, herhangi $x, y \in H$ Hilbert uzayında Schwarz eşitsizliğinin bir genelleştirilmesini elde etmiş oluruz.

$$|\langle Px, y\rangle|^2 \leq \langle Px, x\rangle\langle Py, y\rangle \tag{3.2.5}$$

(3.2.5) eşitsizliğinden

$$|\langle E_\lambda x, y\rangle| \leq \langle E_\lambda x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle E_\lambda y, y\rangle^{\frac{1}{2}}$$

ve dolayısıyla

$$|\langle(1_H - E_\lambda)x, y\rangle| \leq \langle(1_H - E_\lambda)x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle(1_H - E_\lambda)y, y\rangle^{\frac{1}{2}}, \tag{3.2.6}$$

elde edilir. Öte yandan $a, b, c, d \geq 0$ için

$$ab + cd \leq (a^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}(b^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}$$

basit eşitsizliğiyle, her $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} & |\langle E_\lambda x, y\rangle| + |\langle(1_H - E_\lambda)x, y\rangle| \\ \leq\ & \langle E_\lambda x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle E_\lambda y, y\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle(1_H - E_\lambda)x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle(1_H - E_\lambda)y, y\rangle^{\frac{1}{2}} \\ \leq\ & (\langle E_\lambda x, x\rangle + \langle(1_H - E_\lambda)x, x\rangle)(\langle E_\lambda y, y\rangle + \langle(1_H - E_\lambda)y, y\rangle) \\ =\ & \| x \|\| y \| \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

olduğu görülür.

(3.2.4) eşitsizliği kullanılarak ve (3.2.7) de maksimum alarak istenilen (3.2.1) eşitsizliği elde ederiz.

Lipshitzian fonksiyon durumunda aşağıdaki teorem kullanışlı olabilir.

**Teorem 3.2.2** [7] $A$, $Sp(A) \subseteq [m, M]$ olan $H$ Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör ve $E_\lambda$ $A$ operatörünün spektral ailesi olsun. Eğer $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m, M]$ üzerinde sonlu varyasyonlu sürekli bir fonksiyon ise, herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} & \left|\frac{f(M) + f(m)}{2}\langle x, y\rangle - \langle f(A)x, y\rangle\right| \\ \leq\ & \frac{1}{2}L\int_{m-0}^{M}\Big[\langle E_\lambda x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle E_\lambda y, y\rangle^{\frac{1}{2}} \\ +\ & \langle(1_H - E_\lambda)x, x\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle(1_H - E_\lambda)y, y\rangle^{\frac{1}{2}}\Big]d\lambda \\ \leq\ & \frac{1}{2}(M - m)\| x \|\| y \| \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat.** Bilindiği gibi, eğer $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ Riemann integrallenebilir fonksiyon ve $v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ $L > 0$ sabiti ile Lipschitzian, yani herhangi $t, s \in [a, b]$ için

$$|v(s) - v(t)| \leq L|s - t|$$

ise, o zaman $\int_a^b p(t)dv(t)$ Riemann-Stieltjes integrali mevcuttur ve

$$\left|\int_a^b p(t)dv(t)\right| \leq L\int_a^b |p(t)|d(t)$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece Riemann-Stieltjes integralinin bu özelliğini kullanarak, (3.2.2) den herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(m)+f(M)}{2}\langle x, y\rangle - \langle f(A)x, y\rangle \right| \\ \leq\ & \frac{1}{2}L\int_{m-0}^{M} |\langle E_\lambda x, y\rangle + \langle (E_\lambda - 1_H)x, y\rangle| d\lambda, \\ \leq\ & \frac{1}{2}L\int_{m-0}^{M} [|\langle E_\lambda x, y\rangle| + |\langle (1_H - E_\lambda)x, y\rangle|] d\lambda \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

olduğu görülür.

Dolayısıyla (3.2.7) de $[m, M]$ üzerinde integral alınırsa

$$\begin{aligned} \leq\ & \int_{m-0}^{M} [|\langle E_\lambda x, y\rangle| + |\langle (1_H - E_\lambda)x, y\rangle|] d\lambda \\ \leq\ & \int_{m-0}^{M} \Big[ \langle E_\lambda x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle E_\lambda y, y\rangle^{\frac{1}{2}} d\lambda \\ +\ & \langle (1_H - E_\lambda)x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle (1_H - E_\lambda)y, y\rangle^{\frac{1}{2}} \Big] d\lambda \\ \leq\ & (M-m) \parallel x \parallel \parallel y \parallel \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

eşitsizliği elde edilir.(3.2.9) ile beraber, istenilen (3.2.8) eşitsizliği sağlanmış olur.

### 3.2.2 Diğer Trapezoidal Vektör Eşitsizlikleri

**Teorem 3.2.3** [7] $A$, $m < M$ olan reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ ile $H$ Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör ve $E_\lambda$ onun spektral ailesi olsun. Varsayalım ki $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m, M]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman herhangi $x, y \in H$ için

$$\left| \frac{f(M)+f(m)}{2}\langle x, y\rangle - \langle f(A)x, y\rangle \right| \tag{3.2.11}$$

$$\leq \begin{cases} \max_{\lambda\in[m,M]} |\langle E_\lambda x - \frac{1}{2}x, y\rangle| \bigvee_{m-0}^{M}(f), & f \text{ sonlu varyasyonlu ise,} \\ L\int_{m-0}^{M} |\langle E_\lambda x - \frac{1}{2}x, y\rangle| d\lambda, & f \text{ Lipschitzian ise,} \\ \int_{m-0}^{M} |\langle E_\lambda x - \frac{1}{2}x, y\rangle| df(\lambda), & f \text{ azalmayan ise} \end{cases}$$

$$\leq \frac{1}{2} \parallel x \parallel\parallel y \parallel \begin{cases} \bigvee_{m-0}^{M}(f), & f \text{ sonlu varyasyonlu ise,} \\ L(M-m), & f \text{ Lipschitzian ise,} \\ (f(M)-f(m)), & f \text{ azalmayan ise} \end{cases}$$

eşitsizliği seğlanır.

**İspat.** (3.2.4) dan, herhangi $x, y \in H$ için

$$\left|\frac{f(m)+f(M)}{2}\langle x, y\rangle - \langle f(A)x, y\rangle\right| \tag{3.2.12}$$
$$\leq \frac{1}{2}\max_{\lambda\in[m,M]} |\langle E_\lambda x, y\rangle + \langle (E_\lambda - 1_H)x, y\rangle| \bigvee_{m-0}^{M}(f)$$
$$= \max_{\lambda\in[m,M]} \left|\left\langle E_\lambda x - \frac{1}{2}x, y\right\rangle\right| \bigvee_{m-0}^{M}(f)$$

yazılabilir. $H$ da Schwarz eşitsizliğini ve $E_\lambda$ nın projektör olmasını kullanarak herhangi $x, y \in H$ için

$$|\langle E_\lambda x - \frac{1}{2}x, y\rangle| \leq \| E_\lambda x - \frac{1}{2}x, y \|\| y \| \tag{3.2.13}$$
$$= \frac{1}{2} \| x \|\| y \|$$

elde edilir. Böylece (3.2.11) nin birinci kısmı ispatlanmış olur.

Şimdi ikinci kısmını (3.2.9) dan ispatlayalım.

Riemann-Stieltjes integral teoreminden, eğer $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sonlu varyasyonlu, $v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sürekli monoton azalmayan ise, o zaman $\int_a^b p(t)dv(t)$ Riemann-Stieltjes integrali vardır ve $\int_a^b |p(t)|dv(t)$ dan

$$\left|\int_a^b p(t)dv(t)\right| \leq \int_a^b |p(t)|dv(t). \tag{3.2.14}$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.2.2) ten, herhangi $x, y \in H$ için

$$\left|\frac{f(m)+f(M)}{2}\langle x, y\rangle - \langle f(A)x, y\rangle\right| \tag{3.2.15}$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_{m-0}^{M} |\langle E_\lambda x, y\rangle + \langle (E_\lambda - 1_H)x, y\rangle| df(\lambda)$$
$$= \int_{m-0}^{M} \left|\left\langle E_\lambda x - \frac{1}{2}x, y\right\rangle\right| df(\lambda)$$

elde edilir. Böylece (3.2.11) nın son kısmı da ispatlanmış olur.

Bilindiği üzere, eğer herhangi $t, s \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(s)| \leq H|t - r|^r$$

ise, o zaman $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $H > 0$ ve $r \in (0,1]$ sabiti ile sürekli r-H-Hölder olarak adlandırılır. Bu fonksiyonların sınıfı ile ilgili teorem aşağıdadır.

**Teorem 3.2.4** [7] $A$, $m < M$ bazı reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m,M]$ ile $H$ Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör ve $E_\lambda$ onun spektral ailesi olsun. Eğer $f : [m,M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m,M]$ üzerinde sürekli r-H-Hölder bir fonksiyon ise, o zaman herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(m)+f(M)}{2} \langle x,y \rangle - \langle f(A)x,y \rangle \right| \\ \leq \; & \frac{1}{2^r} H(M-m)^r \bigvee_{m-0}^{M} (\langle E_{(.)}x,y \rangle) \\ \leq \; & \frac{1}{2^r} H(M-m)^r \parallel x \parallel \parallel y \parallel \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

eşitliği gerçeklenir.

**İspat.** Herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} & \frac{f(m)+f(M)}{2} \langle x,y \rangle - \langle f(A)x,y \rangle \\ = \; & \int_{m-0}^{M} \left[ \frac{f(M)+f(m)}{2} - f(\lambda) \right] d(\langle E_\lambda x,y \rangle) \end{aligned}$$

eşitliği gerçeklenir. Bu durumda $\langle E_{(.)}x,y \rangle$ herhangi $x, y \in H$ sonlu varyasyonlu olduğu için, (3.2.3) eşitsizliğini uygulayarak, herhangi $x, y \in H$ için,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(m)+f(M)}{2} \langle x,y \rangle - \langle f(A)x,y \rangle \right| \\ \leq \; & \max_{\lambda \in [m,M]} \left| \frac{f(M)+f(m)}{2} - f(\lambda) \right| \bigvee_{m-0}^{M} (\langle E_{(.)}x,y \rangle) \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Dolayısıyla eğer $f : [m,M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m,M]$ üzerinde sürekli r-H-Hölder bir fonksiyon ise, o zaman herhangi $\lambda \in [m,M]$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(M)+f(m)}{2} \langle x,y \rangle - f(\lambda) \right| \\ \leq \; & \frac{1}{2} |f(M)-f(\lambda)| + \frac{1}{2} |f(\lambda)-f(m)| \\ \leq \; & \frac{1}{2^r} H[(M-m)^r + (\lambda-m)^r] \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

yazılabilir. Kesin bir şekilde $r \in (0,1)$, $g_r(\lambda) := (M-\lambda)^r + (\lambda - m)^r$ fonksiyonu

$$\max_{\lambda \in [m,M]} g_r(\lambda) := g_r\left(\frac{m+M}{2}\right) = 2^{1-r}(M-m)^r$$

özelliğine sahiptir. O zaman (3.2.17) den, (3.2.16) in ilk kısmı ispatlanmış olur. Son kısmı Total Varyasyonlu Schwarz's eşitsizliğinden elde edilir.

## 3.3 Genelleştirilmiş Trapezoidal Eşitsizlikler

### 3.3.1 Bazı Vektör Eşitsizlikler

Bu bölümde genelleştirilmiş trapezoidal formulü olan herhangi $x, y \in H$ için,

$$\frac{1}{M-m}[f(m)(M\langle x,y\rangle - \langle Ax,y\rangle) + f(M)(\langle Ax,y\rangle - m\langle x,y\rangle)] \tag{3.3.1}$$

niteliği ile $\langle f(A)x,y\rangle$ yaklaşımı için hata sınırlarının ispatıyla ilgilenilecektir. Ayrıca bazı özel fonksiyonlar için uygulamaları da verilecektir.

**Lemma 3.3.1** [8] $A$, $m < M$ reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m,M]$ ile $H$ Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör ve $E_\lambda$ onun spektral ailesi olsun. Eğer $f : [m,M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m,M]$ üzerinde sürekli fonksiyon ise, o zaman herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[\frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M-m}\right]x, y\right\rangle - \langle f(A)x,y\rangle \qquad (3.3.2) \\ = & \int_{m-0}^{M} \langle E_t x, y\rangle df(t) - \frac{f(M)-f(m)}{M-m}\int_{m-0}^{M}\langle E_t x,y\rangle dt \\ = & \int_{m-0}^{M}\left[\langle E_t x,y\rangle - \frac{1}{M-m}\int_{m-0}^{M}\langle E_s x,y\rangle ds\right] df(t) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat.** Herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} & \int_{m-0}^{M}\langle E_t x,y\rangle df(t) \\ = & \ f(M)\langle x,y\rangle - \int_{m-0}^{M} f(t)d\langle E_t x,y\rangle \\ = & \ f(M)\langle x,y\rangle - \langle f(A)x,y\rangle \end{aligned}$$

ve

$$\int_{m-0}^{M} \langle E_t x, y\rangle dt = M\langle x, y\rangle - \langle Ax, y\rangle$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan, herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned}
&= \int_{m-0}^{M} \langle E_t x, y\rangle df(t) - \frac{f(M)-f(m)}{M-m}\int_{m-0}^{M} \langle E_t x, y\rangle dt \\
&= f(M)\langle x, y\rangle - \langle f(A)x, y\rangle - \frac{f(M)-f(m)}{M-m}(M\langle x, y\rangle - \langle Ax, y\rangle) \\
&= \frac{1}{M-m}[f(m)(M\langle x, y\rangle - \langle Ax, y\rangle) + f(M)(\langle Ax, y\rangle - m\langle x, y\rangle)] - \langle f(A)x, y\rangle
\end{aligned}$$

dir. Böylece (3.3.2) nin ilk eşitliği ispatlanmış olur. Diğerinin ispatı ise açıktır.

**Teorem 3.3.1** [8] $A$, $m < M$ bazı reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ spektrumu ile $H$ Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör ve $E_\lambda$ onun spektral ailesi olsun.

1. Eğer $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m, M]$ üzerinde sonlu varyasyonlu ise, o zaman herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \left[\frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M-m}\right] x, y \right\rangle - \langle f(A)x, y\rangle\right| \qquad (3.3.3) \\
\leq &\sup_{t\in[m,M]} \left[\frac{t-m}{M-m}\bigvee_{m-0}^{M}(\langle E_{(.)}x, y\rangle) + \frac{M-t}{M-m}\bigvee_{m-0}^{M}(\langle E_{(.)}x, y\rangle)\right]\bigvee_{m-0}^{M}(f) \\
\leq &\bigvee_{m-0}^{M}(\langle E_{(.)}x, y\rangle)\bigvee_{m-0}^{M}(f) \leq \| x \|\| y \| \bigvee_{m-0}^{M}(f)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. 2. Eğer $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m, M]$ üzerinde $L > 0$ sabiti ile Lipshitzian ise, o zaman herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \left[\frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M-m}\right] x, y \right\rangle - \langle f(A)x, y\rangle\right| \qquad (3.3.4) \\
\leq &L\int_{m-0}^{M} \left[\frac{t-m}{M-m}\bigvee_{m-0}^{M}(\langle E_{.}x, y\rangle) + \frac{M-t}{M-m}\bigvee_{m-0}^{M}(\langle E_{.}x, y\rangle)\right] dt \\
\leq &L(M-m)\bigvee_{m-0}^{M}(\langle E_{(.)}x, y\rangle) \leq L(M-m) \| x \|\| y \|
\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçeklenir. 3. Eğer $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m, M]$ üzerinde monoton azalmayan ise, o zaman herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} & \left|\left\langle\left[\frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M - m}\right]x, y\right\rangle - \langle f(A)x, y\rangle\right| \qquad (3.3.5) \\ \leq\ & \int_{m-0}^{M}\left[\frac{t-m}{M-m}\bigvee_{m-0}^{M}(\langle E_{.}x, y\rangle) + \frac{M-t}{M-m}\bigvee_{m-0}^{M}(\langle E_{.}x, y\rangle)\right]df(t) \\ \leq\ & \bigvee_{m-0}^{M}(\langle E_{(.)}x, y\rangle)[f(M) - f(m)] \leq \| x \| \| y \| [f(M) - f(m)] \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat.** Bilindiği gibi, eğer $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sınırlı fonksiyon, $v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ $L > 0$ sonlu varyasyonlu ve $\int_a^b p(t)dv(t)$ Riemann-Stieltjes integral varsa, o zaman

$$\left|\int_a^b p(t)dv(t)\right| \leq \sup_{t\in[a,b]} |p(t)| \bigvee_a^b(v) \qquad (3.3.6)$$

dir, burada $\bigvee_a^b(v)$, $[a, b]$ üzerinde $v$ nin total varyasyonunu gösterir.

(3.3.2) eşitliğine bu özelliği uygularsak, herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} & \left|\left\langle\left[\frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M - m}\right]x, y\right\rangle - \langle f(A)x, y\rangle\right| \qquad (3.3.7) \\ =\ & \sup_{t\in[m,M]}\left|\langle E_t x, y\rangle - \frac{1}{M-m}\int_{m-0}^{M}\langle E_s x, y\rangle ds\right| \bigvee_{m-0}^{M}(f) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, Riemann-Stieltjes integralin de basit kısmi integrasyon alınırsa, herhangi $t \in [m, M]$ ve $x, y \in H$ için,

$$\begin{aligned} & \left|\langle E_t x, y\rangle - \frac{1}{M-m}\int_{m-0}^{M}\langle E_s x, y\rangle ds\right| \qquad (3.3.8) \\ =\ & \frac{1}{M-m}\left[\int_{m-0}^{t}(s-m)d\langle E_s x, y\rangle + \int_t^M (s-M)d\langle E_s x, y\rangle\right] \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir.

$v(s) := \langle E_s x, y\rangle$ fonksiyonu herhangi $x, y \in H$ için $[m, M]$ üzerinde sonlu varyasyonlu olduğu için, (3.3.6) eşitsizliğine uygularsak, herhangi $x, y \in H$ ve herhangi $t \in [m, M]$ için

$$\begin{aligned} & \left| \langle E_t x, y\rangle - \frac{1}{M-m} \int_{m-0}^{M} \langle E_s x, y\rangle \right| ds \qquad (3.3.9) \\ \leq \;& \frac{1}{M-m} \left[ \left| \int_{m-0}^{t} (s-m) d\langle E_s x, y\rangle \right| + \left| \int_{t}^{M} (s-M) d\langle E_s x, y\rangle \right| \right] \\ \leq \;& \frac{t-m}{M-m} \bigvee_{m-0}^{t} (\langle E_{(.)} x, y\rangle) + \frac{M-t}{M-m} \bigvee_{t}^{M} (\langle E_{(.)} x, y\rangle) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Burada, (3.3.9) da supremum alınır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa herhangi $x, y \in H$ ve herhangi $t \in [m, M]$ için

$$\bigvee_{m-0}^{t} (\langle E_{(.)} x, y\rangle), \bigvee_{t}^{M} (\langle E_{(.)} x, y\rangle) \leq \bigvee_{m-0}^{M} (\langle E_{(.)} x, y\rangle)$$

yazılabilir. Böylece (3.3.3) de birinci ve ikinci eşitsizlik elde edilmiş oluruz.

(3.3.3) nin son kısmını gerekli işlemlerle ve Total Varyasyon Schwarz eşitsizliği ile elde etmek mümkündür.

Şimdi, eğer $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ Riemann integrallenebilir fonksiyon ve $v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $L > 0$ sabiti ile Lipschitz ise yani, herhangi $t, s \in [a, b]$ için,

$$|f(s) - f(t)| \leq L|s - t|$$

ise, o zaman $\int_a^b p(t) dv(t)$ Riemann-Stieltjes integrali mevcut olup

$$\left| \int_a^b p(t) dv(t) \right| < L \int_a^b |p(t)| dt$$

eşitsizliği elde edilir.

Riemann-Stieltjes integralinin bu özellikleri kullanılırsa ve (3.3.2) dan herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \left[ \frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M-m} \right] x, y \right\rangle - \langle f(A) x, y\rangle \right| \qquad (3.3.10) \\ = \;& L \int_{m-0}^{M} \left| \langle E_t x, y\rangle - \frac{1}{M-m} \int_{m-0}^{M} \langle E_s x, y\rangle ds \right| dt \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

(3.3.8) kullanılarak, herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned}
&L \int_{m-0}^{M} \left| \langle E_t x, y\rangle - \frac{1}{M-m} \int_{m-0}^{M} \langle E_s x, y\rangle ds \right| dt \\
\leq\ & \frac{1}{M-m} \int_{m-0}^{M} \left[ \left| \int_{m-0}^{t} (s-m) d\langle E_s x, y\rangle \right| + \left| \int_{t}^{M} (s-M) d\langle E_s x, y\rangle \right| \right] \\
\leq\ & \int_{m-0}^{M} \left[ \frac{t-m}{M-m} \bigvee_{m-0}^{t} (\langle E_{(.)} x, y\rangle) + \frac{M-t}{M-m} \bigvee_{t}^{M} (\langle E_{(.)} x, y\rangle) \right] dt \\
\leq\ & (M-m) \bigvee_{m-0}^{M} (\langle E_{(.)} x, y\rangle)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece istenen (3.3.4) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Riemann-Stieltjes intregral teoreminden, eğer $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sonlu varyasyonlu, $v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sürekli ve monoton azalmayan ise, $\int_a^b p(t) dv(t)$, $\int_a^b |p(t)| dv(t)$ Riemann-Stieltjes integralleri mevcut olup

$$\left| \int_a^b p(t) dv(t) \right| < \int_a^b |p(t)| dv(t)$$

eşitsizliği sağlanır.

(3.3.2) eşitsizliğinden, herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned}
&\left| \left\langle \left[ \frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M-m} \right] x, y \right\rangle - \langle f(A) x, y\rangle \right| \qquad (3.3.11) \\
\leq\ & \int_{m-0}^{M} \left| \langle E_t x, y\rangle - \frac{1}{M-m} \int_{m-0}^{M} \langle E_s x, y\rangle ds \right| df(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan, (3.3.8) eşitliği kullanılarak herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned}
&\int_{m-0}^{M} |\langle E_t x, y\rangle - \frac{1}{M-m} \int_{m-0}^{M} \langle E_s x, y\rangle ds \Big| df(t) \\
\leq\ & \frac{1}{M-m} \int_{m-0}^{M} \left[ \left| \int_{m-0}^{t} (s-m) d\langle E_s x, y\rangle \right| + \left| \int_{t}^{M} (s-M) d\langle E_s x, y\rangle \right| \right] df(t) \\
\leq\ & \int_{m-0}^{M} \left[ \frac{t-m}{M-m} \bigvee_{m-0}^{t} (\langle E_{(.)} x, y\rangle) + \frac{M-t}{M-m} \bigvee_{t}^{M} (\langle E_{(.)} x, y\rangle) \right] df(t) \\
\leq\ & (f(M) - f(m)) \bigvee_{m-0}^{t} (\langle E_{(.)} x, y\rangle)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece istenilen (3.3.5) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Lipshitzian fonksiyonlar için farklı bir yaklaşım aşağıdaki teoremde verilmiştir.

**Teorem 3.3.2** [8] $A$, $m < M$ reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ ile $H$ Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör ve $E_\lambda$ onun spektral ailesi olsun. Eğer $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m, M]$ üzerinde $L > 0$ sabiti ile sürekli Lipshitzian ise, o zaman herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \left[ \frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M - m} \right] x, y \right\rangle - \langle f(A)x, y \rangle \right| \qquad (3.3.12) \\ \leq \; & L \parallel y \parallel \int_{m-0}^{M} \parallel E_t x - \frac{1}{M-m} \int_{m-0}^{M} E_s x ds \parallel dt \\ \leq \; & \frac{1}{2} L(M - m) \parallel x \parallel \parallel y \parallel \end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur.

**İspat.** Farklı bir üst sınır sağlayan (3.3.10) eşitsizliğini bulalım.

$H$ da Schwarz eşitsizliğinden, herhangi $x, y \in H$ için,

$$\begin{aligned} & \int_{m-0}^{M} \left| \langle E_t x, y \rangle - \frac{1}{M-m} \int_{m-0}^{M} \langle E_s x, y \rangle ds \right| dt \qquad (3.3.13) \\ = \; & \int_{m-0}^{M} \left| \left[ \left\langle E_t x - \frac{1}{M-m} \int_{m-0}^{M} E_s x ds \right], y \right\rangle \right| dt \\ \leq \; & \parallel y \parallel \int_{m-0}^{M} \left\| E_t x - \frac{1}{M-m} \int_{m-0}^{M} E_s x ds \right\| dt \end{aligned}$$

elde eldilir. Böylece

Cauchy-Buniakovski-Schwarz integral eşitsizliğini kullanarak, herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} & \int_{m-0}^{M} \left\| E_t x - \frac{1}{M-m} \int_{m-0}^{M} E_s x ds \right\| dt \qquad (3.3.14) \\ \leq \; & (M - m)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{m-0}^{M} \left\| E_t x - \frac{1}{M-m} \int_{m-0}^{M} E_s x ds \right\|^2 dt \right)^2 \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılbilir..

Gerekli hesaplamaları yapılırsa, herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{M-m}\int_{m-0}^{M}\left\|E_t x - \frac{1}{M-m}\int_{m-0}^{M}E_s x ds\right\|^2 dt \\ = \; & \frac{1}{M-m}\int_{m-0}^{M}\|E_t x\|^2 dt - \left\|\frac{1}{M-m}\int_{m-0}^{M}E_s x ds\right\|^2 dt \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{M-m}\int_{m-0}^{M}\|E_t x\|^2 dt - \left\|\frac{1}{M-m}\int_{m-0}^{M}E_s x ds\right\|^2 dt \\ = \; & \frac{1}{M-m}\int_{m-0}^{M}\left\langle E_t x - \frac{1}{M-m}\int_{m-0}^{M}E_s x ds, E_t x - \frac{1}{2}x\right\rangle dt \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

elde edilir.

(3.3.15) ve (3.3.15) eşitsizliklerini kullanarak, herhangi $x \in H$ için,

$$\begin{aligned} & \int_{m-0}^{M}\left\|E_t x - \frac{1}{M-m}\int_{m-0}^{M}E_s x ds\right\| dt \\ = \; & (M-m)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{m-0}^{M}\left\langle E_t x - \frac{1}{M-m}\int_{m-0}^{M}E_s x ds, E_t x - \frac{1}{2}x\right\rangle dt\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca Schwarz eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} & \int_{m-0}^{M}\left\langle E_t x - \frac{1}{M-m}\int_{m-0}^{M}E_s x ds, E_t x - \frac{1}{2}x\right\rangle dt \\ \leq \; & \int_{m-0}^{M}\left\|E_t x - \frac{1}{M-m}\int_{m-0}^{M}E_s x ds\right\|\left\|E_t x - \frac{1}{2}x\right\| dt \\ = \; & \frac{1}{2}\|x\|\int_{m-0}^{M}\left\|E_t x - \frac{1}{M-m}\int_{m-0}^{M}E_s x ds\right\| dt \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

yazabiliriz. Burada $E_t$ projectörlerdir. Bu durumda herhangi $x \in H$ ve $t \in [m, M]$ için,

$$\|E_t x - \frac{1}{2}x\|^2 = \|E_t x\|^2 - \langle E_t x, x\rangle + \frac{1}{4}\|x\|^2 = \frac{1}{4}\|x\|^2$$

dir. (3.3.16) ve (3.3.16) den

$$\begin{aligned} & \int_{m-0}^{M}\left\|E_t x - \frac{1}{M-m}\int_{m-0}^{M}E_s x\right\| dt \\ \leq \; & (M-m)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\|x\|\int_{m-0}^{M}\left\|E_t x - \frac{1}{M-m}\int_{m-0}^{M}E_s x ds\right\| dt\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

ve

$$\int_{m-0}^{M} \left\| E_t x - \frac{1}{M-m} \int_{m-0}^{M} E_s x \right\| dt \leq \frac{1}{2} \|x\| (M-m) \tag{3.3.18}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Böylece (3.3.12) nin son kısmını ispatlanmış olur.

## 3.4 Daha Genelleştirilmiş Trapezoidal Eşitsizliği

### 3.4.1 Diğer Vektör Eşitsizlikleri

Genel olarak sürekli fonksiyonlar için aşağıdaki teoremi verilecektir.

**Teorem 3.4.1** [9] $A$, $m < M$ reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ ile $H$ Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör ve $E_\lambda$ onun spektral ailesi olsun. Eğer $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m, M]$ üzerinde sürekli ise, o zaman herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \left[ \frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M-m} \right] x, y \right\rangle - \langle f(A)x, y \rangle \right| \qquad (3.4.1) \\ \leq & \left[ \max_{t \in [m,M]} f(t) - \min_{t \in [m,M]} f(t) \right] \bigvee_{m-0}^{M} (\langle E_{.} x, y \rangle) \\ \leq & \left[ \max_{t \in [m,M]} f(t) - \min_{t \in [m,M]} f(t) \right] \| x \| \| y \| \end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur.

**İspat.** Spektral teoreminden, herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \left[ \frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M-m} \right] x, y \right\rangle - \langle f(A)x, y \rangle \right| \qquad (3.4.2) \\ = & \int_{m-0}^{M} \Phi_f(t) d(\langle E_t x, y \rangle) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada $\Phi_f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\Phi_f(t) = \frac{1}{M-m} [(M-t)f(m) + (t-m)f(M)] - f(t)$$

şeklindedir.

Bilindiği gibi, eğer $p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sonlu varyasyonlu, $v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sürekli monoton azalmayan ise o zaman $\int_a^b p(t)dv(t)$ Riemann-Stieltjes integrali mevcut olup ve

$$\left| \int_a^b p(t)dv(t) \right| \leq \sup_{t\in[a,b]} |p(t)| \bigvee_a^b (v), \tag{3.4.3}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Burada $\bigvee_a^b(v)$, $[a,b]$ üzerinde $v$ nin total varyasyonunu gösterir.

Öte yandan, eğer $\gamma := \min_{t\in[m,M]} f(t)$ ve $\Gamma := \max_{t\in[m,M]} f(t)$ alınırsa, o zaman herhangi $t \in [m,M]$ için

$$\gamma(M-t) \leq (M-t)f(m) \leq \Gamma(M-t),$$

$$\gamma(t-m) \leq (t-m)f(M) \leq \Gamma(t-m)$$

ve

$$-(M-m)\Gamma \leq -(M-m)f(t) \leq -\gamma(M-t)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Böylece herhangi $t \in [m,M]$ için

$$|\Phi_f(t)| \leq \Gamma - \gamma \tag{3.4.4}$$

şartıyla

$$-(M-m)(\Gamma-\gamma) \leq -(M-m)\Phi_f(t) \leq (M-m)(\Gamma-\gamma)$$

yazılabiliriz.

(3.4.3) eşitsizliğine (3.4.2) eşitsizliğini uygulayarak (3.4.4) den, herhangi $x, y \in H$ için

$$\left| \int_{m-0}^{M} \Phi_f(t)d(\langle E_t x, y\rangle) \right| \leq (\Gamma-\gamma) \bigvee_{m-0}^{M} (\langle E_{(.)}x, y\rangle)$$

elde edilir. Böylece (3.4.1) in ilk tarafı ispatlanmış olur. (3.4.1) in son kısmı gerekli işlemlerle ve Total Varyasyon Schwarz eşitsizliğiyle aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

Sürekli fonksiyonlar sonlu varyasyonlu olduğu zaman, aşağıdaki teoremler verilebilir.

**Teorem 3.4.2** [9] $A$, $m < M$ reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ ile $H$ Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör ve $E_\lambda$ onun spektral ailesi olsun. Eğer $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$ sürekli ve $[m, M]$ üzerinde sonlu varyasyonlu ise, o zaman herhangi $x, y \in H$ için

$$\left| \left\langle \left[ \frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M - m} \right] x, y \right\rangle - \langle f(A)x, y\rangle \right| \tag{3.4.5}$$

$$\leq \max_{t\in[m,M]} \left[ \frac{M-t}{M-m} \bigvee_{m-0}^{t}(f) + \frac{t-m}{M-m} \bigvee_{m-0}^{t}(f) \right] \bigvee_{m-0}^{M}(\langle E_{(.)}x, y\rangle)$$

$$\leq \bigvee_{m-0}^{M}(\langle E_{(.)}x, y\rangle) \bigvee_{m-0}^{M}(f) \leq \bigvee_{m-0}^{M}(f) \parallel x \parallel\parallel y \parallel$$

eşitsizliği doğrudur.

**İspat.** İlk olarak, herhangi $t \in [m, M]$ için

$$(M - m)\Phi_f(t) = (t - M)[f(t) - f(m)] + (t - m)[f(M) - f(t)] \tag{3.4.6}$$

$$= (t - M) \int_{m-0}^{t} df(s) + (t - m) \int_{t}^{M} df(s)$$

yazılabilir. Böylece

$$\max_{t\in[m,M]} |\Phi_f(t)| \leq \max_{t\in[m,M]} \left[ \frac{M-t}{M-m} \bigvee_{m-0}^{t}(f) + \frac{t-m}{M-m} \bigvee_{m-0}^{t}(f) \right] \tag{3.4.7}$$

$$\leq \left[ \max_{t\in[m,M]} \frac{1}{2} + \frac{|t - \frac{m+M}{2}|}{M - m} \right] \bigvee_{m-0}^{M}(f) = \bigvee_{m-0}^{M}(f).$$

eşitsizliği gözönüne alınarak

$$|\Phi_f(t)| \leq \left[ \frac{M-t}{M-m} \int_{m-0}^{t} df(s) + \frac{t-m}{M-m} \int_{m-0}^{t} df(s) \right] \tag{3.4.8}$$

$$\leq \frac{M-t}{M-m} \bigvee_{m-0}^{t}(f) + \frac{t-m}{M-m} \bigvee_{m-0}^{t}(f) \Big]$$

$$\leq \left[ \frac{1}{2} + \frac{|t - \frac{m+M}{2}|}{M - m} \right] \bigvee_{m-0}^{M}(f)$$

elde edilir. (3.4.3) eşitsizliğine (3.4.2) eşitsizliğini uygulayarak, (3.4.8) den herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} & \left| \int_{m-0}^{M} \Phi_f(t) d(\langle E_{\cdot} x, y \rangle) \right| && (3.4.9) \\ \leq & \left[ \max_{t \in [m,M]} \left[ \frac{M-t}{M-m} \bigvee_{m-0}^{t}(f) + \frac{t-m}{M-m} \bigvee_{m-0}^{t}(f) \right] \bigvee_{m-0}^{M} (\rangle E_{\cdot} x, y \langle) \right. \\ \leq & \bigvee_{m-0}^{M}(f) \bigvee_{m-0}^{M} (\langle E_{\cdot} x, y \rangle) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Böylece istenilen (3.4.5) eşitsizliği elde edilir.

**Teorem 3.4.3** [9] $A$, $m < M$ olan $m$, $M$ reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ ile $H$ Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör ve $E_\lambda$ onun spektral ailesi olsun. Eğer $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m, M]$ üzerinde $L > 0$ sabiti ile Lipschitz ise, o zaman herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \left[ \frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M-m} \right] x, y \right\rangle - \langle f(A)x, y \rangle \right| && (3.4.10) \\ \leq & \bigvee_{m-0}^{M} (\langle E_{\cdot} x, y \rangle) \max_{t \in [m,M]} \left[ \frac{M-t}{M-m} |f(t) - f(m)| + \frac{t-m}{M-m} |f(M) - f(t)| \right] \\ \leq & \frac{1}{2}(M-m)L \bigvee_{m-0}^{M} (\langle E_{\cdot} x, y \rangle) \leq \frac{1}{2}(M-m)L \parallel x \parallel \parallel y \parallel \end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur.

**İspat.** (3.4.6) eşitliğinin ilk kısmından herhangi $t \in [m, M]$ için,

$$\begin{aligned} |\Phi_f(t)| \leq & \left[ \frac{M-t}{M-m} |f(t) - f(m)| + \frac{t-m}{M-m} |f(M) - f(t)| \right] \\ \leq & \frac{2L}{M-m}(M-t)(t-m) \leq \frac{1}{2}(M-m)L \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu durumda Teorem (3.4.2) dekine benzer işlemlerle istenilen (3.4.10) eşitsizliği ispatlanmış olur.

**Önerme 3.4.1** [9] $A$, $m < M$ olan $m$, $M$ reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ ile $H$ Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör ve $E_\lambda$ onun spektral ailesi olsun. Eğer $I, L \in \mathbb{R}$, $L > I$ ve

$f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m, M]$ üzerinde $(I, L)$-Lipschitz ise, o zaman herhangi $x, y \in H$ için

$$\left|\left\langle\left[\frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M - m}\right]x, y\right\rangle - \langle f(A)x, y\rangle\right| \tag{3.4.11}$$
$$\leq \frac{1}{4}(M - m)(L - I)\bigvee_{m-0}^{M}(\langle E_{(.)}x, y\rangle) \leq \frac{1}{4}(M - m)(L - I) \parallel x \parallel\parallel y \parallel$$

eşitsizliği doğrudur.

**Teorem 3.4.4** [9] $A$, $m < M$ olan $m$, $M$ reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ ile $H$ Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör ve $E_\lambda$ onun spektral ailesi olsun. Eğer $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $f'_-(M)$ ve $f'_+(m)$ sonlu türevleri ile $[m, M]$ üzerinde sürekli konveks ise, o zaman herhangi $x, y \in H$ için

$$\left|\left\langle\left[\frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M - m}\right]x, y\right\rangle - \langle f(A)x, y\rangle\right| \tag{3.4.12}$$
$$\leq \frac{1}{4}(M - m)[f'_-(M) - f'_+(M)]\bigvee_{m-0}^{M}(\langle E_{(.)}x, y\rangle)$$
$$\leq \frac{1}{4}(M - m)[f'_-(M) - f'_+(m)] \parallel x \parallel\parallel y \parallel$$

eşitsizliği doğrudur.

**İspat.** $f$, $[m, M]$ üzerinde sürekli konveks olduğundan eşitsizliği yazabiliriz:

$$f(t) - f(M) \geq f'_-(M)(t - M)$$

Böylece $t - m > 0$ olduğundan, herhangi $t \in [m, M]$ için

$$(t - m)f(t) - (t - m)f(M) \geq f'_-(M)(M - t)(t - m) \tag{3.4.13}$$

yazılabilir.

Benzer şekilde herhangi $t \in [m, M]$ için

$$(M - t)f(t) - (M - t)f(m) \geq f'_+(m)(M - t)(t - m) \tag{3.4.14}$$

eşitsizliği de sağlanır.

Yukarıdaki eşitsizliği ve $M - m$ bölersek, herhangi $t \in [m, M]$ için

$$\Phi_f(t) \leq \frac{(M - t)(t - m)}{M - m}[f'_-(M) - f'_+(m)] \tag{3.4.15}$$
$$\leq \frac{1}{4}(M - t)[f'_-(M) - f'_+(m)]$$

elde edilir.

Ayrıca $f$ nin konveksliğini kullanarak herhangi $t \in [m, M]$ için

$$\|\Phi_f(t)\| \geq 0 \tag{3.4.16}$$

şartıyla

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(M-t)}[(M-m)f(m) + (t-m)f(M)] \\ \geq \; & f\left(\frac{(M-t)m + (t-m)M}{M-m}\right) = f(t)] \end{aligned} \tag{3.4.17}$$

yazılabilir.

(3.4.3) eşitsizliğinde, (3.4.2) yi kullanarak, (3.4.15) ve (3.4.16) istenilen (3.4.12) eşitizliğini elde etmiş oluruz.

## 3.5 Operatör Sıralamasında Eşitsizlikler

**Teorem 3.5.1** [9] $A$, $m < M$ bazı reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ spektrumu ile $H$ Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör olsun.

1. Eğer $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m, M]$ üzerinde sürekli ise, o zaman

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M-m} - f(A) \right| \\ \leq \; & \left[ \max_{t\in[m,M]} f(t) - \min_{t\in[m,M]} f(t) \right] 1_H \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

eşitsizliği doğrudur.

2. Eğer $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m, M]$ üzerinde sonlu varyasyonlu ve sürekli ise, o zaman

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M-m} - f(A) \right| \\ \leq \; & \frac{M1_H - A}{M-m} \bigvee_{m-0}^{M} (f) + \frac{A - M1_H}{M-m} \bigvee_{m-0}^{M} (f) \\ \leq \; & \left[ \frac{1}{2} + \frac{|A - \frac{m+M}{2} 1_H|}{M-m} \right] \bigvee_{m-0}^{M} (f) \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $\bigvee_{m-0}^{A}(f)$, $[m,M] \longrightarrow \bigvee_{A}^{M}(f) \in \mathbb{R}$ skaler fonksiyonu tarafından üretilen operatörleri gösterir. Aynı formül $\bigvee_{A}^{M}(f)$ için de uygulanır.

3. Eğer $f:[m,M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m,M]$ üzerinde $L>0$ sabiti ile Lipschitz ise, o zaman

$$\begin{aligned} & \left|\frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M-m} - f(A)\right| \\ \leq\ & \frac{M1_H - A}{M-m}|f(A) - f(m1_H)| + \frac{A - M1_H}{M-m}|f(M)1_H - f(A)| \\ \leq\ & \frac{1}{2}(M-m)L1_H \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

eşitsizliği doğrudur.

4. Eğer $f:[m,M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m,M]$ $f_{-}^{'}(M)$ ve $f_{+}^{'}(m)$ sonlu türevleri ile $[m,M]$ üzerinde sürekli konveks ise, o zaman

$$\begin{aligned} & 0 \leq \frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M-m} - f(A) \\ \leq\ & \frac{(M1_H - A)(A - M1_H)}{M-m}[f_{-}^{'}(M) + f_{+}^{'}(m)] \\ \leq\ & \frac{1}{4}(M-m)[f_{-}^{'}(M) + f_{+}^{'}(m)]1_H \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

eşitsizliği doğrudur.

**Önerme 3.5.1** [9] $A$, $m<M$ bazı reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m,M]$ spektrumu ile $H$ Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör olsun. Eğer $I, L \in \mathbb{R}$, $L>I$ ve $f:[m,M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m,M]$ üzerinde $(I,L)$-Lipschitz ise, o zaman herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} & \frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M-m} - f(A)\Bigg| \\ \leq\ & \frac{1}{4}(M-m)(L-I)1_H \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

eşitsizliği doğrudur.

## 3.6 Diferensiyellenebilen Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler

**Teorem 3.6.1** [9] $A$, $m<M$ bazı reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m,M]$ spektrumu ile $H$ Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör olsun. Farzedelim ki $[m,M] \subset I^{\circ}$(I-nın içi) $f: I \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $I^{\circ}$ üzerinde differansiyellenebilir olsun.

1. Eğer $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m, M]$ üzerinde sonlu varyasyonlu ve sürekli ise, o zaman herhangi $x, y \in H$ için

$$\left| \left\langle \left[ \frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M - m} \right] x, y \right\rangle - \langle f(A)x, y \rangle \right| \tag{3.6.1}$$
$$\leq \frac{1}{4}(M - m) \bigvee_{m-0}^{M} (f') \bigvee_{m-0}^{M} (\langle E_{(.)}x, y \rangle) \leq \frac{1}{4}(M - m) \bigvee_{m-0}^{M} (f') \parallel x \parallel \parallel y \parallel$$

eşitsizliği sağlanır.

2. Eğer $f'$ türevi, $[m, M]$, $K > 0$ sabiti ile Lipschitz ise, o zaman herhangi $x, y \in H$ için

$$\left| \left\langle \left[ \frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M - m} \right] x, y \right\rangle - \langle f(A)x, y \rangle \right| \tag{3.6.2}$$
$$\leq \frac{1}{4}(M - m)^2 K \bigvee_{m-0}^{M} (\langle E_{(.)}x, y \rangle) \leq \frac{1}{8}(M - m)^2 K \parallel x \parallel \parallel x \parallel$$

eşitsizlikleri doğrudur.

**İspat.** İlk olarak, eğer $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m, M]$ üzerinde kesin sürekli ve $f'$, $[m, M]$ üzerinde Riemann integrallenebilir ise, o zaman Riemann-Stieltjes integrali ve $t \in [m, M]$ için

$$\Phi_f(t) = \frac{1}{M - m} \int_{m-0}^{M} K(t, s) df'(s) \tag{3.6.3}$$

yazılabiliriz. Burada $K : [m, M]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ile

$$K(t, s) = \begin{cases} (M - t)(s - m) & \text{eğer } m \leq s \leq t \\ (t - m)(M - s) & \text{eğer } t \leq s \leq M \end{cases} \tag{3.6.4}$$

fonksiyonun çekirdeğidir.

Aslında, $f'$, $[m, M]$ üzerinde Riemann integrallenebilir olduğu için, herhangi $t \in [m, M]$ için, $\int_{m-0}^{t} (s - m) df'(s)$ ve $\int_{t}^{M} (m - s) df'(s)$ Riemann-Stieltjes integrali vardır. Dolayısıyla, Riemann-Stieltjes integralinde kısmı integrasyon uygulanarak, herhangi $t \in [m, M]$ için,

$$\begin{aligned} & \int_{m-0}^{M} K(t, s) df'(s) \\ = & \ (M - t) \int_{m-0}^{t} (s - m) df'(s) + (t - m) \int_{t}^{M} (M - s) df'(s) \\ = & \ (M - t) \left[ (s - m) f'(s)|_{m-0}^{t} - \int_{m-0}^{t} f'(s) ds \right] \\ + & \ (t - m) \left[ (M - s) f'(s)|_{t}^{M} - \int_{t}^{M} f'(s) ds \right] \\ = & \ (M - m) \Phi_f(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (3.6.3) eşitliğini sağlar.

Şimdi, (3.6.3) kullanarak ve (3.4.3) özelliğinden herhangi $t \in [m, M]$ için,

$$\begin{aligned}
&|\Phi_f(t)| \qquad\qquad (3.6.5)\\
= &\frac{1}{(M-t)}\left|\int_{m-0}^{t}(s-m)df'(s)+(t-m)\int_{t}^{M}(M-s)df'(s)\right|\\
\leq &\frac{1}{(M-t)}\left[(M-t)\left|\int_{m-0}^{t}(s-m)df'(s)\right|+(t-m)\left|\int_{t}^{M}df'(s)\right|\right]\\
\leq &\frac{1}{(M-t)}\left[(M-t)\bigvee_{m-0}^{t}(f')\sup_{s\in[m,t]}(s-m)+(t-m)\bigvee_{t}^{M}(f')\sup_{s\in[m,t]}(M-s)\right]\\
= &\frac{(t-m)(M-t)}{(M-m)}\bigvee_{m-0}^{M}(f')\leq\frac{1}{4}(M-m)\bigvee_{m-0}^{M}(f')
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir.

(3.4.2) gösterimini kullanarak istenilen (3.6.1) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Ayrıca, $p : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ $L-$Lipschitz fonksiyon ve $v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ Riemann integrallenebilir foknksiyon olduğundan $\int_\alpha^\beta p(s)dv(s)$ Riemann-Stieltjes integrali, $\int_a^b |p(t)|dv(t)$ Riemann-Stieltjes integrali mevcut ve

$$\left|\int_\alpha^\beta p(s)dv(s)\right| < L\int_\alpha^\beta |p(s)|ds$$

eşitsizliği vardır.

Buradan (3.6.5) eşitsizliği gözönüne alınırsa $t \in [m, M]$ için,

$$\begin{aligned}
&|\Phi_f(t)| \qquad\qquad (3.6.6)\\
= &\frac{1}{(M-t)}\left[(M-t)\left|\int_{m-0}^{t}(s-m)df'(s)\right|+(t-m)\left|\int_{t}^{M}(M-s)df'(s)\right|\right]\\
\leq &\frac{K}{(M-t)}\left[(M-t)\left|\int_{m-0}^{t}(s-m)ds\right|+(t-m)\left|\int_{t}^{M}(M-s)ds\right]\right.\\
= &\frac{1}{2}(M-m)(t-m)K\leq\frac{1}{8}(M-m)^2K
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.4.2) gösterimi kullanılarak istenilen (3.6.2) eşitsizliği sağlanmış olur.

**Teorem 3.6.2** [9] $A$, $m < M$ bazı reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ spektrumu ile $H$ Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör olsun. Farzedelim ki $[m, M] \subset I^\circ$(I-nın içi) $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $I^\circ$ üzerinde differansiyellenebilir olsun.

1. Eğer $f'$ türevi, $[m, M]$ üzerinde sonlu varyasyonlu ise,

$$\left|\frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M - m} - f(A)\right| \tag{3.6.7}$$
$$\leq \frac{(A - m)(M1_H - A)}{M - m} \bigvee_{m-0}^{M} (f') \leq \frac{1}{2}(M - m) \bigvee_{m-0}^{M} (f')1_H$$

eşitsizliği doğrudur.

2. Eğer $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m, M]$ üzerinde sonlu varyasyonlu ve sürekli ise,

$$\left|\frac{f(m)(M1_H - A) + f(M)(A - m1_H)}{M - m} - f(A)\right| \tag{3.6.8}$$
$$\leq \frac{1}{2}(M - m)(A - m1_H)(M1_H - A)K \leq \frac{1}{8}(M - m)^2 K1_H$$

eşitsizliği doğrudur.

## 3.7 Çarpımsal Eşitsizlikler

### 3.7.1 Birkaç Vektör Eşitsizlik

**Lemma 3.7.1** [10] $A$, $m < M$ bazı reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ spektrumu ile $H$ Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör ve $E_\lambda$ onun spektral ailesi olsun. Eğer $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(M) \neq f(m)$ ile $[m, M]$ üzerinde sürekli fonksiyon ise, o zaman

$$\frac{1}{[f(M) - f(m)]^2}[f(M)1_H - f(A)][f(A) - f(m)1_H] \tag{3.7.1}$$
$$= \frac{1}{f(M) - f(m)} \int_{m-0}^{M} \left(E_t - \frac{1}{f(M) - f(m)} \int_{m-0}^{M} E_s df(s)\right)\left(E_t - \frac{1}{2}1_H\right) df(t)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat.** Bilindiği üzere

$$\frac{1}{f(M)-f(m)}\int_{m-0}^{M}\left(E_t-\frac{1}{f(M)-f(m)}\int_{m-0}^{M}E_s df(s)\right)\left(E_t-\frac{1}{2}1_H\right)df(t)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{f(M)-f(m)}\int_{m-0}^{M}E_t^2 df(t) && (3.7.2)\\ &- \frac{1}{f(M)-f(m)}\int_{m-0}^{M}E_s df(s)\frac{1}{f(M)-f(m)}\int_{m-0}^{M}E_t df(t)\\ &- \frac{1}{2}\int_{m-0}^{M}E_t df(t)+\frac{1}{2}\int_{m-0}^{M}E_s df(s)\\ &= \frac{1}{f(M)-f(m)}\int_{m-0}^{M}E_t^2 df(t)-\left[\frac{1}{f(M)-f(m)}\int_{m-0}^{M}E_t df(t)\right]^2 \end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz.

$E_t$ projeksiyon olduğu için, $t \in [m, M]$ için $E_{t^2} = E_t$ ve

$$\begin{aligned} &\frac{1}{f(M)-f(m)}\int_{m-0}^{M}E_t^2 df(t)-\left[\frac{1}{f(M)-f(m)}\int_{m-0}^{M}E_t df(t)\right]^2 && (3.7.3)\\ &= \frac{1}{f(M)-f(m)}\int_{m-0}^{M}E_t df(t)-\left[\frac{1}{f(M)-f(m)}\int_{m-0}^{M}E_t df(t)\right]^2\\ &= \frac{1}{f(M)-f(m)}\int_{m-0}^{M}E_t df(t)\left[1_H-\frac{1}{f(M)-f(m)}\int_{m-0}^{M}E_t df(t)\right. \end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz.

Riemann-Steltjes integralinde kısmı integrasyon alarak ve spektral gösterim teoremini kullanarak

$$\int_{m-0}^{M}E_t df(t) = f(M)1_H - f(A)$$

ve

$$1_H-\frac{1}{f(M)-f(m)}\int_{m-0}^{M}E_t df(t)=\frac{f(A)-f(m)1_H}{f(M)-f(m)}$$

eşitliklerini yazabiliriz.

Böylece (3.7.3) ve (3.7.2) den istenilen (3.7.1) eşitsizliğini elde etmiş oluruz.

**Sonuç 3.7.1** [10] Lemma 3.7.1 in şartları altında, herhangi $x, y \in [m, M]$ için

$$\begin{aligned} &\langle[f(M)1_H-f(A)][f(A)-f(m)1_H]x,y\rangle=[f(M)-f(m)] && (3.7.4)\\ &\times \int_{m-0}^{M}\left\langle\left(E_t-\frac{1}{f(M)-f(m)}\int_{m-0}^{M}E_s df(s)\right)x,\left(E_t-\frac{1}{2}1_H\right)y\right\rangle df(t) \end{aligned}$$

dir.

**Teorem 3.7.1** [10] $A$, $m < M$ bazı reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ spektrumu ile $H$ Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör ve $E_\lambda$ onun spektral ailesi olsun. Eğer $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(M) \neq f(m)$ ile $[m, M]$ üzerinde sonlu varyasyonlu ise, o zaman herhangi $x, y \in H$ için aşağıdaki eşitliği yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
& |\langle [[f(M)1_H - f(A)][f(A) - f(m)1_H]x, y\rangle| \qquad (3.7.5)\\
= \; & \frac{1}{2}|f(M) - f(m)| \bigvee_{m-0}^{M} \\
\times \; & \sup \| \Big( E_t x - \frac{1}{f(M) - f(m)} \int_{m-0}^{M} E_s df(s) \| \leq \frac{1}{2} \parallel x \parallel\parallel y \parallel \left[ \bigvee_{m-0}^{M} (f) \right]^2
\end{aligned}
$$

**İspat.** Bilindiği gibi, eğer $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sınırlı fonksiyon, $v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sonlu varyasyonlu ve $\int_a^b p(t)dv(t)$ Riemann-Stieltjes integrali mevcut ise

$$
\left| \int_a^b p(t)dv(t) \right| \leq \sup_{t\in[a,b]} |p(t)| \bigvee_a^b (v) \qquad (3.7.6)
$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $\bigvee_a^b(v)$, $[a, b]$ üzerinde $v$ nin total varyasyonunu gösterir.

Bu özelliği ve (3.7.4) gösterimini kullanarak, $H$ Hilbert uzayında Schwarz eşitsizliği yardımıyla herhangi $x, y \in H$

$$
\begin{aligned}
& |\langle [[f(M)1_H - f(A)][f(A) - f(m)1_H]x, y\rangle| \leq |f(M) - f(m)| \bigvee_{m-0}^{M} \qquad (3.7.7)\\
\times \; & \sup \left| \left\langle \left( E_t - \frac{1}{f(M) - f(m)} \int_{m-0}^{M} E_s df(s) \right) x, \left( E_t - \frac{1}{2} 1_H \right) y \right\rangle \right| \\
\leq \; & |f(M) - f(m)| \bigvee_{m-0}^{M} (f) \\
\times \; & \sup_{t\in[m,M]} \left[ \left\| E_t x - \frac{1}{f(M) - f(m)} \int_{m-0}^{M} E_s x df(s) \right\| \left\| E_t y - \frac{1}{2} y \right\| \right]
\end{aligned}
$$

yazılabilir.

$E_t$ projeksiyon olduğundan,

$$\left\|E_t y - \frac{1}{2}y\right\|^2 = \|E_t y\|^2 - \langle E_t y, y\rangle + \frac{1}{4}\|y\|^2$$
$$= \langle E_t^2 y, y\rangle - \langle E_t y, y\rangle + \frac{1}{4}\|y\|^2 = \frac{1}{4}\|y\|^2$$

olacaktır.

O zaman (3.7.7) den (3.7.5) nin birinci kısmı ispatlanmış olur.

Şimdi, (3.7.6) özelliği tarafından Hilbert uzaylarda $p$ değerleri ile vektör değerli fonksiyonlar tarafından, herhangi $t \in [m, M]$ ve $x \in H$ için,

$$\left\|[f(M) - f(m)]E_t x - \int_{m-0}^{M} E_s x df(s)\right\| \tag{3.7.8}$$
$$= \left\|\int_{m-0}^{M}(E_t x - E_s)df(s)\right\| \leq \bigvee_{m-0}^{M}(f) \sup_{t\in[m,M]}\left\|E_t x - E_s x\right\|$$

yazabiliriz. Operatörlerde sıralamaya göre, $0 \leq E_t \leq 1_H$ olduğu için, bu durumunda $-\|x\|^2 \leq \langle(E_t - E_s x, x)\rangle \leq \|x\|^2$ şartları ile $1_H \leq E_t - E_s \leq 1$ dir. Yani $t, s \in [m, M]$ için $\|E_t - E_s\| \leq 1$ şartı ile herhangi $x \in H$ için, $|\langle(E_t - E_s)x, x\rangle| \leq \|x\|^2$ dir. Bu yüzden, $\sup_{s\in[m,M]}\|E_t - E_s)x\| \leq \|x\|^2$ dir. Böylece 3.7.8 ile beraber 3.7.5 nin son kısmını ispatlanmış olur.

**Teorem 3.7.2** [10] $A$, $m < M$ olan $m$, $M$ reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m, M]$ ile $H$ Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör ve $E_\lambda$ onun spektral ailesi olsun. Eğer $f : [m, M] \longrightarrow \mathbb{C}$, $[m, M]$ üzerinde $L > 0$ sabiti ile Lipschitz bir fonksiyon ve $f(M) \neq f(m)$ ise, herhangi $x, y \in H$ için,

$$|\langle[[f(M)1_H - f(A)][f(A) - f(m)1_H]x, y\rangle| \leq \frac{1}{2}L\|y\||f(M) - f(m)| \tag{3.7.9}$$
$$\times \int_{m-0}^{M}\int_{m-0}^{M}\left\|E_t x - \frac{1}{f(M) - f(m)}\int_{m-0}^{M} E_s x df(s)\right\|dt$$
$$\leq \frac{1}{2}L^2\|y\|\int_{m-0}^{M}\|E_t x - E_s x\|dsdt$$
$$\leq \frac{\sqrt{2}}{2}L^2\|y\|(M - m)(Ax - mx, Mx - Ax)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}L^2 \parallel y \parallel\parallel x \parallel (M - m)^2$$

eşitsizliği doğrudur.

**İspat.** Eğer $p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ Riemann integrallenebilir fonksiyon ve $v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ $L > 0$ sabiti ile Lipschitz yani $t, s \in [a,b]$ için, $|f(s) - f(t)| \leq L|s-t|$ ise $\int_a^b p(t)dv(t)$ Riemann-Stieltjes integrali mevcut olup

$$\left| \int_a^b p(t)dv(t) \right| \leq L \int_a^b |p(t)|dt \tag{3.7.10}$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi, Riemann-Stieltjes integralinin bu özeliği kullanılırsa, (3.7.10) gösteriminden herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned}
& |\langle[[f(M)1_H - f(A)][f(A) - f(m)1_H]x, y\rangle| \leq |f(M) - f(m)| \qquad (3.7.11)\\
\times & \int_{m-0}^{M} \left| \left\langle \left( E_t - \frac{1}{f(M) - f(m)} \int_{m-0}^{M} E_s df(s) \right) x, \left( E_t - \frac{1}{2} 1_H \right) y \right\rangle \right| df(t) \\
\leq & \; L|f(M) - f(m)| \\
\times & \int_{m-0}^{M} \left\| E_t x - \frac{1}{f(M) - f(m)} \int_{m-0}^{M} E_s df(s) \right\| \left\| E_t y - \frac{1}{2} y \right\| dt \\
= & \; \frac{1}{2} L\|y\||f(M) - f(m)| \\
\times & \int_{m-0}^{M} \| E_t x - \frac{1}{f(M) - f(m)} E_s x df(s) \Big\| dt
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Böylece (3.7.9) un ilk kısmı ispatlanmış olur.

Ayrıca $x \in H$ için,

$$\begin{aligned}
& |f(M) - f(m)| \int_{m-0}^{M} \left\| E_t x - \frac{1}{f(M) - f(m)} \int_{m-0}^{M} E_s x df(s) \right\| dt \qquad (3.7.12)\\
= & \int_{m-0}^{M} \left\| [f(M) - f(m)] E_t x - \int_{m-0}^{M} E_s x df(s) \right\| dt \\
= & \int_{m-0}^{M} \left\| \int_{m-0}^{M} (E_t x - E_s x) df(s) \right\| dt
\end{aligned}$$

dir. Eğer (3.7.10) özelliğinin vektör değerli versiyonu kullanılırsa, herhangi $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned}
&\int_{m-0}^{M}\left\|\int_{m-0}^{M}(E_t x - E_s x)df(s)\right\|dt \qquad (3.7.13)\\
\leq\ & L\int_{m-0}^{M}\int_{m-0}^{M}\|E_t x - E_s x)\|dsdt
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece (3.7.9) ün ikinci kısmı da ispatlanmış olur.

Burada, Cauchy-Buniakowski-Schwarz eşitsizliğini iki katlı integraller için uygularsak, herhangi $x \in H$ için,

$$\begin{aligned}
&\int_{m-0}^{M}\int_{m-0}^{M}\left\|(E_t x - E_s x)\right\|^2 d(s)dt \qquad (3.7.14)\\
\leq\ & (M-m)\left(\int_{m-0}^{M}\int_{m-0}^{M}\|E_t x - E_s dt\|^2 dsdt\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Şimdi, herhangi $s \in [m, M]$ için $E_s$ projeksiyonu göz önüne alınırsa, herhangi $x \in H$ için,

$$\begin{aligned}
&\int_{m-0}^{M}\int_{m-0}^{M}\left\|(E_t x - E_s x)\right\|^2 d(s)dt \qquad (3.7.15)\\
\leq\ & 2\left[(M-m)\int_{m-0}^{M}\|E_t x\|^2 dt - \left\|\int_{m-0}^{M} E_t dt\right\|^2\right]\\
\leq\ & 2\left[(M-m)\int_{m-0}^{M}\langle E_t x, x\rangle dt - \left\|\int_{m-0}^{M} E_t dt\right\|^2\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer kısmı integrasyon ve spektral gösterim teoremi kullanılırsa

$$\int_{m-0}^{M}\langle E_t x, x\rangle dt = \langle Mx - Ax, x\rangle$$

ve

$$\int_{m-0}^{M}\langle E_t x dt = Mx - Ax$$

eşitliklerini kullanarak ve (3.7.15) ten

$$\int_{m-0}^{M}\int_{m-0}^{M}\left\|(E_t x - E_s x)\right\|^2 d(s)dt = 2\langle Ax - mx, Mx - Ax\rangle \qquad (3.7.16)$$

eşitliğini yazabiliriz.

(3.7.16) ve (3.7.14) i kullanarak (3.7.9) in üçüncü eşitsizliğini de ispatlamış oluruz.

Son olarak iç çarpım uzayında basit eşitsizlikleri kullanarak

$$Re\langle a,b\rangle \leq \frac{1}{4}(M-m)^2\|x\|^2 \tag{3.7.17}$$

ve ayrıca herhangi $x \in H$ için

$$\langle Ax-mx, Mx-Ax\rangle \leq \frac{1}{4}(M-m)^2\|x\|^2$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece (3.7.9) ün son eşitsizliği de ispatlanmış oluruz.

**Teorem 3.7.3** [10] $A$, $m < M$ bazı reel sayılar için $Sp(A) \subseteq [m,M]$ spektrumu ile $H$ Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör ve $E_\lambda$ onun spektral ailesi olsun. Eğer $f : [m,M] \longrightarrow \mathbb{R}$, $[m,M]$ üzerinde monoton azalmayan ise, herhangi $x,y \in H$ için,

$$\begin{aligned}
& |\langle[[f(M)1_H - f(A)][f(A)-f(m)1_H]x,y\rangle| \\
\leq\ & \frac{1}{2}\|y\|[f(M)-f(m)] \\
\times\ & \int_{m-0}^{M}\left\|E_tx - \frac{1}{f(M)-f(m)}\int_{m-0}^{M}E_sxdf(s)\right\|df(t) \\
\leq\ & \frac{1}{2}\|y\|[f(M)-f(m)] \\
\times\ & \langle[[f(M)1_H - f(A)][f(A)-f(m)1_H]x,x\rangle^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ & \|y\|\|x\|[f(M)-f(m)]^2
\end{aligned} \tag{3.7.18}$$

eşitsizliği gerçeklenir. **İspat.** (3.7.4) in gösteriminden herhangi $x,y \in H$ için,

$$\begin{aligned}
& |\langle[[f(M)1_H - f(A)][f(A)-f(m)1_H]x,y\rangle| \\
\times\ & \int_{m-0}^{M}\left|\left\langle\left(E_tx - \frac{1}{f(M)-f(m)}\int_{m-0}^{M}E_sxdf(s)\right)x, (E_t - \frac{1}{2}1_H\right)y\right\rangle\right|df(t) \\
\leq\ & [f(M)-f(m)] \\
\times\ & \int_{m-0}^{M}\left\|E_tx - \frac{1}{f(M)-f(m)}\int_{m-0}^{M}E_sxdf(s)\right\|\left\|E_ty - \frac{1}{2}\right\|df(t) \\
=\ & \frac{1}{2}\|y\|[f(M)-f(m)] \\
\times\ & \int_{m-0}^{M}\left\|E_tx - \frac{1}{f(M)-f(m)}\int_{m-0}^{M}E_sxdf(s)df(t)\right.
\end{aligned} \tag{3.7.19}$$

yazılabiliriz. Böylece (3.7.18) de ilk eşitsizlik ispatlanmış olur.

Riemann Stieltjes integralleri için monoton azalmayan integrasyonların Cauchy-Buniakowski-Schwarz tipli eşitsizliğini kullanarak herhangi $x, y \in H$ için

$$\int_{m-0}^{M} \left\| E_t x - \frac{1}{f(M)-f(m)} \int_{m-0}^{M} E_s x df(s) \right\| df(t) \leq \left[ \int_{m-0}^{M} df(s) \right] \quad (3.7.20)$$
$$\times \quad \left[ \int_{m-0}^{M} \left\| E_t x - \frac{1}{f(M)-f(m)} \int_{m-0}^{M} E_s x df(s) \right\|^2 df(t) \right]^2$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\int_{m-0}^{M} \left\| E_t x - \frac{1}{f(M)-f(m)} \int_{m-0}^{M} E_s x df(s) \right\|^2 df(t) \quad (3.7.21)$$
$$= \int_{m-0}^{M} \left[ \|E_t x\|^2 - 2Re \left\langle E_t x, \frac{1}{f(M)-f(m)} \int_{m-0}^{M} E_s x df(s) \right\rangle \right.$$
$$+ \left. \left\| \frac{1}{f(M)-f(m)} \int_{m-0}^{M} E_s x df(s) \right\|^2 \right] df(t)]$$
$$= [f(M)-f(m)] \left[ \frac{1}{f(M)-f(m)} \int_{m-0}^{M} \|E_t x\|^2 df(t) - \left\| \frac{1}{f(M)-f(m)} \int_{m-0}^{M} E_s x df(s) \right\|^2 \right]$$

ve Riemann-Stieltjes integraline kısmı integrasyon uygulanırsa

$$\int_{m-0}^{M} \|E_t x\|^2 df(t) = \int_{m-0}^{M} \langle E_t x, E_t x \rangle df(t) = \int_{m-0}^{M} \langle E_t x, x \rangle df(t) \quad (3.7.22)$$
$$= f(M)\|x\|^2 - \int_{m-0}^{M} f(t) d\langle E_t x, x \rangle$$
$$= f(M)\|x\|^2 - \langle f(A)x, x \rangle = \langle [f(M)1^H - f(A)]x, x \rangle$$

ve herhangi $x, y \in H$ için

$$\int_{m-0}^{M} \|E_s x\|^2 df(s) = f(M)x - f(A)x \quad (3.7.23)$$

olduğu görülür.

(3.7.22) ve (3.7.24) eşitliklerini kullanarak, gerekli hesaplanmalar yapılırsa, herhangi $x, y \in H$ için

$$\frac{1}{f(M)-f(m)} \int_{m-0}^{M} \|E_t x\|^2 df(t) \quad (3.7.24)$$
$$- \left\| \frac{1}{f(M)-f(m)} \int_{m-0}^{M} \|E_s x df(s) \right\|^2$$
$$= \frac{\langle f(M)x - f(A)x, f(A)x - f(m)x \rangle}{[f(M)-f(m)]^2}$$

elde edilir. (3.7.20) eşitsizliğini kullanarak, (3.7.18) deki ikinci eşitsizlik elde edilmiş olur. Böylece (3.7.17) eşitsizliği elde etmiş olur.

# 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez, literatürde var olan Trapezoidal Tipli Operatör Eşitsizlikleri tanıtan, özelliklerini veren ve önemli sonuçları bir araya getiren S. S. Dregomir'in 2012 yılında Springer tarafından basılan "Operator Inequalities of Ostrowski and Trapezoidal Type" isimli kitabından faydalanılarak hazırlanmıştırq. Yani, yabancı dilde yazılmış olan bu önemli operatör eşitsizliği, kendi dilimizde yazarak ve gerekli kısımları genişleterek bu alanda çalışma yapmak isteyen bilim insanlarına sunduk. Dolayısıyla kendi dilimizde yazılan bir çalışmanın önemli bir kaynak olacağını düşünüyoruz.

# KAYNAKLAR


[1] Natanson I. P., *Theory of Functions of a Real Varible*, Frederick Unjar Publishing Co. 277 pp.,

[2] S. S. Dragomir, *Operator Inequalites of Ostrowski and Trapezoidal-Type* , Springer Science + Business Media, 2012, 135 pp.

[3] P. Cerone and S. S. Dragomir, *Trapezoidal-type rules from an inequalities point of view*, in Handbook of Analytic-Computational Methods in Applied Mathematics, G. A. Anastassiou (Ed), Chapman Hall CRC Press, New York, 2000, 65–134.

[4] P. Cerone, S. S. Dragomir and C. E. M. Pearce, *A generalised trapezoid inequality for functions of bounded variation, M. Rubinov* Turkish J. of Math., 24(2) (2000), 65–134.

[5] S. S. Dragomir, *On the trapeziod quadrature formula for Lipschitzian mappings and applications,*, Tamkang J. of Math., 30(2) (1999), 133–138.

[6] S. S. Dragomir,, *An inequality improving the second Hermite-Hadamard inequality for convex function defined on linear space and applications for semi- product*, J Inequal. Pure Appl. Math. 3(2002), No.3, Article 2002.

[7] S. S. Dragomir, *Some trapeziodal vector inequalities for continuous function of sedlfadjoint operators in Hilbert Space*, Preprint RGMIA Res. Rep. Coll. 13(2010), No.2, Art. 14...

[8] S. S. Dragomir, *Some generalized trapeziodal vector inequalities for continuous functions of sedlfadjoint operators in Hilbert Space*, Preprint RGMIA Res. Rep. Coll. 13(2010), Sup., Art. 14...

[9] S. S. Dragomir, *Vector and operator trapeziodal type inequalities for continuous functions of sedlfadjoint operators in Hilbert Space*, Preprint RGMIA Res. Rep. Coll. 14(2011), Art. 10..

[10] S. S. Dragomir, *Some vector inequalities for continuous functions of sedlfadjoint operators in Hilbert Space*, Preprint RGMIA Res. Rep. Coll. 13(2010), Sup., Art. 13..

# ÖZGEÇMİŞ

| | | |
|---|---|---|
| **Adı-Soyadı** | : | SİBEL BURCU SERDAROĞLU |
| **Doğum Yeri** | : | Keşap, Giresun |
| **Doğum Tarihi** | : | 01.04.1984 |
| **Medeni Hali** | : | Bekar |
| **Bildiği Yabancı Dil** | : | İngilizce |
| **İletişim Bilgileri** | : | Güneyköy Uzunkum Mevki Kesap Giresun<br>sibelburcuserdaroglu@hotmail.com |
| **Lisans** | : | Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Sinop Fen-Edebiyat Fakültesi<br>Matematik Bölümü, 2007 |
| **Çalıştığı Yer** | : | Güce Çok Programlı Lisesi 2007-2008<br>Giresun Uğur Dershanesi 2008-2015<br>Giresun Bilim Dershanesi 2015-2016<br>Giresun Final Etüt Merkezi 2016-2017<br>Giresun Özel Yavuz Koleji 2017- |