T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OPERATÖR PREİNVEKS, OPERATÖR α-PREİNVEKS VE OPERATÖR s-PREİNVEKS FONKSİYONLAR

DURMUŞ AYDIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2018

T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OPERATÖR PREİNVEKS, OPERATÖR α-PREİNVEKS VE OPERATÖR s-PREİNVEKS FONKSİYONLAR

Durmuş AYDIN

Bu tez,
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans
derecesi için hazırlanmıştır

ORDU 2018

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Durmuş AYDIN tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL danışmanlığında yürütülen "Operatör Preinveks, Operatör α-Preinveks ve Operatör s-Preinveks Fonksiyonlar" adlı bu tez, jürimiz tarafından 27 / 02 / 2018 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman	:	Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL	
İkinci Danışman	:	Doç. Dr. İmdat İŞCAN	
Başkan	:	Yrd. Doç. Dr. Sercan TURHAN Giresun Üniversitesi, Matematik	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Mehmet KORKMAZ Ordu Üniversitesi, Matematik	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL Ordu Üniversitesi, Matematik	İmza :

ONAY:

13./03./2018.. tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 15/03/2018... tarih ve 2018... /167. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Durmuş AYDIN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

OPERATÖR PREİNVEKS, OPERATÖR α-PREİNVEKS VE OPERATÖR s-PREİNVEKS FONKSİYONLAR

Durmuş AYDIN
Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2018
Yüksek Lisans Tezi, 48s.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

II. Danışman: Doç. Dr. İmdat İŞCAN

Bu tezde, Hilbert uzayında özeşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için operatör preinveks, operatör α-preinveks, operatör s-preinveks fonksiyonlar sınıfı ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kompleks Hilbert uzayı, özeşlenik operatörler, özeşlenik operatörlerinsürekli fonksiyonları, operatör preinveks, operatör α -preinveks, operatör s-preinveks

ABSTRACT

OPERATOR PREINVEX, OPERATOR α -PREINVEX AND OPERATOR s-PREINVEX FUNCTIONS

Durmuş AYDIN
Ordu University
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2018
MSc. Thesis, 48p.

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

II. Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İmdat İŞCAN

In this dissertation, it is researched in detail what into the class of operator preinvex, operator \alpha-preinvex and operator s-preinvex functions for continuous functions of self-adjoint operator in Hilbert space.

Key Words: Complex Hilbert space, selfa-djoint operators, continuous functions of self-adjoint operators, operator preinvex, operator α -preinvex and operator s-preinvex

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bilgi ve deneyimleriyle her türlü yanımda olan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL'a en iç duygularımla teşekkürlerimi iletiyorum.

Yüksek lisans eğitim-öğretim süresince değerli bilgilerinden istifade ettiğim Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri ve araştırma görevlilerine teşekkür ederim.

Eğitim hayatım süresince maddi-manevi desteklerini esirgemeyen başta annem Emine AYDIN ve babam Ali AYDIN olmak üzere aileme teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi, yani $(-\infty, +\infty)$ aralığı
$\mathbb{R}_0$	:	$[0, \infty)$ aralığı
$\mathbb{R}^m$	:	m-boyutlu Reel sayılar kümesi, $m \in \mathbb{N}$
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$<.,.>$	:	İç-çarpım fonksiyonu
$Sp(A), \sigma(A)$	:	A operatörlerinin spekturumu
$\Delta f(.)$	:	f fonksiyonunun diverjansı
$\mathrm{L}[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$	:	$[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı
$H - H$	:	Hermite-Hadamard
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$B(H)$	:	H'dan H' ya sınırlı operatörlerin kümesi
$B(H)^+$	:	H'dan H' ya pozitif sınırlı operatörlerin kümesi
$B(H)^+_{sa}$	:	H'dan H' ya pozitif sınırlı özeşlenik operatörlerin kümesi

1. GİRİŞ

Elster ve Neshse [1], konveksel fonksiyonlar sınıfını, yani $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu için $x, y \in S$ ve $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere

$$f(z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{1.0.1}$$

eşitsizliğini sağlayan $z \in S$ noktalarını içeren fonksiyonlara konveksel denir, incelemişlerdir. Eğer S bir konveks küme ve f de konveks bir fonksiyon ise, bu durumda f'nin konveksel olduğu açıktır. Aslında Elster ve Nehse konveksel matematiksel programlama için optimal şart altında bir eyer(büküm) noktası elde etmişlerdir.
Hayaski ve Komiya [2] hem konveksel fonksiyonları hem de konveksel fonksiyonlar için bir Gordan tipi teorem geliştirmişler. İlaveten, konveksel programlar için Lograngion dualliğini araştırmışlardır.
Hanson [4], her $x, y \in S \subseteq \mathbb{R}$ için

$$f(x) - f(u) \geq [\eta(x, u)]^T \nabla f(u) \tag{1.0.2}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir n-boyutlu $\eta(x, u)$ vektör fonksiyona sahip $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlarını göz önüne almıştır. Burada "Δ" sembolü diverjansı göstermektedir. Bu tarz fonksiyonlar Craven [4] tarafından inveks olarak isimlendirilmiştir. Bu terim ise "invariant convex" ifadesinden kısaltılmıştır.
Craven ve Glover [5], Ben-Israel ve Mond [6], ayrıca Martin [7] invex fonksiyonlar sınıfının, sabit noktası ($f'(x) = 0$) global minimum olan fonksiyonlar sınıfına denk olsuğunu göstermişlerdir.
Ben-Israel ve Mond [6], Hanson ve Mond [8] daha genel olan yani, S üzerinde diferansiyellenmeyen fonksiyonların, her $x, u \in S$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(u + \lambda\eta(x, u)) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(u) \tag{1.0.3}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir n-boyutlu $\eta(x, u)$ vektör fonksiyonunun varlığını ispat etmişlerdir. ayrıca diferansiyellenebilen fonksiyonların hem (1.0.2) yi hem de (1.0.3)'ü sağladığını göstermişerdir. Bu koşullar altında (1.0.3) eşitsizliğini sağlayan bu fonksiyonlara V. Jeyakumar tarafından "pre-invex" ismi verilmiştir. Ayrıca, $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ m-boyutlu vektör değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, eğer f'nin bileşenlerinin her biri, η-ya göre S üzerinde pre-invex ise, bu f'ye η'ya göre S üzeinde preinvextir denir. Her $x, u \in S$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$u + \lambda\eta(x, u) \in S$$

olup, buradan preinvex fonksiyonlar konvekseldir.

Yukarıdaki açıklamalardan da anlaşılacağı üzere, invekslik ve preinveksliğin nasıl ortaya çıktığının özetini verdik. Şimdi bu fonksiyon sınıfının "neden" ortaya çıktığını kısaca söyleyelim. Konveksliğin bu yeni genelleştirmesi, optimizasyon poblemleri, statik ve dinamik problemleri, Pareto veya çoklu-amaç programlama problemleri vb. konularının daha iyi anlaşılması ve çözülmesi için matematikçiler tarafından elde edilmiştir. Bu tezin, bir çok uygulama alanına sahip olan preinveks fonksiyonlar sınıfını literatürde var olan ve temel kaynak olarak kullandığımız Ghazanfari'nin [9], [14], [26] bilimsel çalışmalarını ayrıntılı bir şekilde inceleyip, operatör preinvekslik alanında çalışma yapmak isteyen bilim insanlarına Türkçe bir kaynak olacağını düşünüyoruz.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.0.1 (**Lineer Uzay**) L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+ : L \times L \to L$ ve $. : F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A) L $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.
G2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$dir.
G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.
G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.
G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ omak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha x \in L$ dir.
L2. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.
L3. $(\alpha + \beta)x = \alpha.x + \beta.x$ dir.
L4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta.x)$ dir.
L5. $1.x = x$ dir. (Burada 1, F nin birim elemanıdır). $F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye karmaşık lineer uzay adı verilir.

Tanım 2.0.2 Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

Tanım 2.0.3 F bir cisim ve V ve W, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T : V \to W$ dönüşümü,
a $T(u + v) = T(u) + T(v)$
b $T(cu) = cT(u)$ şartlarını sağlıyorsa T ye V üzerinde lineer dönüşüm denir .

Tanım 2.0.4 (**İç-çarpım uzayı**): $F(\mathbb{R}\text{veya}\mathbb{C})$ olmak üzere, X bir vektör uzayı olsun. $(.,.) : X \times X \to F$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise " $(.,.)$" dönüşümüne X üzerinde bir iç-çarpım, $(X, (.,.))$ ikilisine de "iç-çarpım" uzayı denir:

1. $\forall x \in X$ için $(x, x) \geq 0$ ve $(x, x) = 0 \longleftrightarrow x = 0_X$;

2. $\forall x, y \in X$ için $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

3. $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;

4. $\forall x, y, z \in X$ için $(x + y, z) = (x, y) + (y, z)$.

Remark 2.0.1 $F = R$ olması halinde 2. özellik $(x, y) = (y, x)$ olur. İç-çarpım tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu kolayca görebiliriz.

1. $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, y) + \beta(y, z)$,

2. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \in F$ için $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$;

3. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(y, z)$.

Tanım 2.0.5 (**Norm**): $(X, (.,.))$ bir iç çarpım uzayı olsun. Bir $x \in X$ vektör normu

$$\| x \| = (x, x)^{\frac{1}{2}} \tag{2.0.1}$$

şeklinde tanımlanan reel sayıya denir.

Tanım 2.0.6 (**Hilbert Uzayı**): $(X, (.,.))$ bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer bu iç-çarpım uzayı (2.0.1) normuna göre tam ise, yani $(X, (.,.))$ iç-çarpım uzayı içindeki her Cauchy Dizisi (2.0.1) norma göre yakınsak ise bu iç çarpıma bir "Hilbert Uzayı" denir.

Tanım 2.0.7 (**Birim Operatör**): $A : X \to X$ operatörü verilsin. Eğer her $x \in X$ için $Ax = x$ ise A operatörüne birim(özdeşlik) operatör denir. I, E ve I_X sembollerinden biriyle gösterilir.

Tanım 2.0.8 (**Sınırlı Operatör**): X ve Y iki normlu uzay olsun. A ise tanım kümesi $D(A) \subset X$ ve görüntü kümesi $R(A) \subset Y$ olan bir operatör olsun. Eğer A operatörü $D(A)$ 'nın X' de sınırlı her kümesi $R(A)$'nın Y de sınırlı bir kümesine karşılık getiriyorsa A' ya "sınırlı bir operatör" denir. Başka bir deyişle

$$\| Ax \|_Y \leq c \| x \|_X, \text{ her } x \in D(A)$$

olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa, A'ya "sınırlı bir operatör"denir.

Tanım 2.0.9 (**Lineer Operatör**): X ve Y aynı F cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A : X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer $D(A)$, X' in bir alt uzayı ve

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \; \forall x, y \in D(A) \; ve \; \forall \alpha, \beta \in F$$

ise A'ya "lineer operatör"denir.

Tanım 2.0.10 (**Eşlenik ve Öz-eşlenik Operatör**): A, H Hilbert uzayında sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer her $f, g \in D(A) \subset H$ için

$$(Af, g) = (f, A^* g)$$

sağlanıyorsa A^* a A'nın "eşlenik operatörü"denir.

Eğer $D(A) = D(A^*)$ ve $A = A^*$ ise bu A' ya özeşlenik operatör denir.

Tanım 2.0.11 (**Rezolventa**): H bir Hilbert uzayı ve $A : D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör olsun.

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E)^{-1} \in L(X)\}$$

kümesine A operatörünün "regüler değerler kümesi" veya "rezolvent kümesi" denir.

$\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda; A) = (A - \lambda E)^{-1}$ operatorüne A operatorünün "rezolventası" veya "çözücü operatörü" adı verilir.

Tanım 2.0.12 (**Spektrum**): H bir Hilbert uzayı olsun.

$$Sp(A) = \sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

kümesine A operatörünün "spektrumu " denir. A operatörünün spektrum kümesi "$\sigma(A)$" veya "$Sp(A)$" ile göstereceğiz.

Aşağıdaki eşitsizliği, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan herhangi bir konveks f fonksiyonu için yazabiliriz.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \tag{2.0.2}$$

Buradaki iki eşitsizlik eğer yön değiştirirse $[a, b]$ üzerinde konkav olur. (2.0.2) eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir. Biz Hermite Hadamard eşitsizliğini, Jensen eşitsizliğinden ve konvekslik tanımından kolayca elde edebiliriz. Klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir konveks fonksiyonun ortalama değerini verir. Dragomir ve Agarwal [15] konveks fonksiyonları içeren Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafını elde etmişlerdir.

Teorem 2.0.1 [15] Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{'}$, $[a, b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)(|f^{'}(a)| + |f^{'}(b)|)}{8} \tag{2.0.3}$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.0.13 [27] Bazı $s \in (0, 1]$ sabiti için, eğer her $x, y \in \mathbb{R}_0$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda^s f(x) + (1-\lambda)^s f(y) \tag{2.0.4}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f : \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks denir.

Dragomir ve Fitzpatrick [23] ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar için Hadamard eşitsizliğinin ispatını yaptılar.

Teorem 2.0.2 [23] Kabul edelim ki $f : \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}_0$ ikinci anlamda s-konveks fonksiyon olsun. Eğer $f \in L[a, b]$ ise, o zaman $s \in (0, 1]$, $a < b$ ve $a, b \in \mathbb{R}_0$ için

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1} \tag{2.0.5}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradaki $\frac{1}{s+1}$ sabiti (2.0.5) eşitsizliği için bulunabilecek en iyi sabittir.

Alomori ve ark.[22] s-konveks fonksiyonlar için Hadamard eşitsizliğinin sol yanını elde ettiler.

Teorem 2.0.3 [22] $f : I \subseteq \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, I üzerinde diferansiyellenbilir bir dönüşüm ve $a, b \in I$, $a < b$ için $f^{'} \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f^{'}|$, $s \in (0, 1]$ sabiti için $[a, b]$ üzerinde s-konveks ise, o zaman

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{b-a}{2(s+1)}\left[\frac{|f^{'}(a)| + 2(s+1)|f(\frac{a+b}{2})| + |f^{'}(b)|}{2(s+2)}\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

Kırmacı ve ark.[29] s-konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafını elde ettiler.

Teorem 2.0.4 [22] $f : I \subseteq \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, I üzerinde diferansiyellenbilir ve $a, b \in I$, $a < b$ olsun. $f' \in L[a,b]$ ve $|f'|$, $s \in (0,1]$ sabiti için $[a,b]$ üzerinde s-konveks ise, o zaman

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)(2^{(s+1)}+1)}{2^s(s+1)(s+2)}\left[\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2}\right]. \tag{2.0.6}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kikikanty [28], Banach uzaylarının geometrisinde Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde etmiştir. Konveks fonksiyonların özel bir genelleştirmesi olan inveks ve preinvekslik, Hanson [3] tarafından çalışılmıştır.

X bir vektör uzayı ve $x, y \in X$, $x \neq y$ olsun. $t \in [0,1]$ için

$$[x,y] := (1-t)x + ty$$

parçasını tanımlayalım.

$f : [x,y] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu ve

$$g(x,y) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

,

$$g(x,y)(t) := f((1-t)x+ty), \ t \in [0,1]$$

fonksiyonunu düşünelim.

f in, $[x,y]$ üzerinde konveks olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $g(x,y)$ nin $[0,1]$ üzerinde konveks olmasıdır. Bir $[x,y] \in X$ parçası üzerinde tanımlanan herhangi bir konveks fonksiyon için, $g(x,y) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyonundan

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \int_0^1 f((1-t)x+ty)dt \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{2.0.7}$$

Hermite-Hadamard integral eşitsizliğini yazabiliriz. Dragomir[24],[25] operatör preinveks ve operatör konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin operatör versiyonunu elde etmiştir.

Şimdi, sınırlı özeşlenik operatörlerin sürekli foksiyonları için bir $(H, \langle .,. \rangle)$ Hilbert uzayı üzerinde tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi olan $B(H)$ da operatörlerde sıralamayı inceleyelim. $A, B \in B(H)$ özeşlenik operatörleri ve her $x \in H$ vektörü için eğer $\langle Ax, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle$ ise, o zaman $A \leq B$ yazabiliriz. Buna operatörlerde sıralama denir.

A, bir $(H;\langle .,.\rangle)$ kompleks Hilbert uzayı üzerinde sınırlı özeşlenik bir operatör olsun. Gelfand dönüşümü, A tarafından üretilen $C^*(A)$ C^*-cebiri, H üzerinde 1_H birim operatör, $Sp(A)$ olarak gösterilen A nın spektrumu üzerinde tanımlanan kompleks değerli tüm fonksiyonların $C(Sp(A))$ kümesi arasında Φ izomorfizm $*$-izometriği ile şekilde kuruldu. Herhangi $f, g \in C(Sp(A))$ ve herhangi $\alpha, \beta, \in \mathbb{C}$ için, ([19], s.3)

(i) $\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g)$;

(ii) $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ ve $\Phi(f^*) = \Phi(f)^*$;

(iii) $\|\Phi(f)\| = \|f\| := sup_{t\in Sp(A)}|f(t)|$;

(iv) $\Phi(f_0) = 1_H$ ve $\Phi(f_1) = A$, burada $t \in Sp(A)$ için $f_0(t) = 1$ ve $f_1(t) = t$;

yazabiliriz.

Bu notasyonla, biz tüm $f \in C(Sp(A))$ için

$$f(A) := \Phi(f) \tag{2.0.8}$$

tanımlayabiliriz ve bu da bize bir A sınırlı özeşlenik operatörlerünün bir f-fonksiyonu altındaki görüntüsünün ne anlama geldiğini gösterir.

Eğer A, sınırlı özeşlenik bir operatör ve f, $Sp(A)$ üzerinde reel değerli sürekli bir fonksiyon ise, o zaman herhangi bir $t \in Sp(A)$ için $f(t) \geq 0$ olması, $f(A) \geq 0$ demektir, yani $f(A)$, H üzerinde pozitif bir operatördür. Dahası, f ve g, $Sp(A)$ üzerinde reel değerli sürekli iki fonksiyon olsun. Her $t \in Sp(A)$ için

$$(P) \quad f(t) \leq g(t)$$

ise, o zaman $B(H)$ daki operatör sıralamasına göre $f(A) \leq g(A)$ dir. Spektrumları $I \subseteq \mathbb{R}$ de olan her $A, B \in B(H)$ için

$$(OC) \quad f((1-\lambda)A + \lambda B) \leq (\geq)(1-\lambda)f(A) + \lambda f(B)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde f reel değerli sürekli bu fonksiyona operatör konveks(operatör konkav) denir.

Operatör konveks (operatör konkav) ve operatör monoton fonksiyonlar üzerinde bazı temel sonuçlar [19] de verilmiştir.

Dragomir [18] operatör konveks fonksiyonlar için aşağıdaki şekilde Hermit-Hadamard tipi eşitsizliği ispatlamıştır.

Teorem 2.0.5 [18] $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I aralığı üzerinde operatör konveks olsun. O halde spekturumları I'da olan her özeşlenik A ve B operatörleri için

$$\begin{aligned} &\left(\left(f(\frac{A+B}{2})\right) \leq \right)\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3A+B}{4}\right)+f\left(\frac{A+3B}{4}\right)\right] \\ \leq\ & \int_0^1 f((1-t)A+tB)dt \\ \leq\ & \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{A+B}{2}\right)+\frac{f(A)+f(B)}{2}\right]\left(\leq \frac{f(A)+f(B)}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.0.9}$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.0.14 [26] I, $\mathbb{R}_0$ da bir aralık ve $S \subseteq B(H)^+$ ın konveks bir alt kümesi olsun. Eğer tüm $\lambda \in [0,1]$ ve $s \in [0,1]$ için spektrumları I-da olan S spekturumunda her A ve B pozitif operatörleri için

$$f(\lambda A+(1-\lambda)B) \leq \lambda^s f(A)+(1-\lambda)^s f(B) \tag{2.0.10}$$

ise, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonuna I üzerinde operatör s-konveks denir.

Teorem 2.0.6 [26] $f : I \subseteq \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, $S \subseteq B(H)^+$ operatörleri için I aralığı üzerinde $s \in (0,1]$ sabiti için operatör s-konveks bir fonksiyon olsun. O halde, I da S spekturumu içinde tüm A ve B pozitif operatörleri için

$$2^{s-1}f\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq \int_0^1 f((1-t)A)+tB)dt \leq \frac{f(A)+f(B)}{s+1} \tag{2.0.11}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

3.1 Operatör Preinveks Fonksiyonlar için H-H Tipli Eşitsizlikler

Bu kısım hazırlanırken Ghazanfari'nin [9], [14] çalışmasından faydalanılmıştır.

3.1.1 Operatör Preinveks Fonksiyonlar

Tanım 3.1.1 X bir reel vektör uzayı, $S \subseteq X$ bir küme olsun. Eğer her $x, y \in S$ ve $t \in [0,1]$ için

$$y + t\eta(x,y) \in S \tag{3.1.1}$$

ise S kümesine $\eta : S \times S \to X$ dönüşümüne göre invekstir. Her konveks küme

$$\eta(x,y) = x - y$$

dönüşümüyle invekstir. Fakat her inveks küme konveks değildir [13]. S, $\eta : S \times S \to X$ dönüşümüne göre inveks bir küme olsun. Her $x, y \in S$ için x ve $v := x + \eta(y,x)$ olmak üzere, P_{xv} η-yolu

$$P_{xv} := z : z = x + t\eta(y,x) : t \in [0,1]$$

şeklinde tanımlanır. Eğer her $x, y \in S$ ve $t \in [0,1]$ için

$$(C) \;\; \eta(y, y + t\eta(x,y)) = -t\eta(x,y) \tag{3.1.2}$$

$$\eta(x, y + t\eta(x,y)) = (1-t)\eta(x,y) \tag{3.1.3}$$

ise η dönüşümü (C) koşulunu sağlar denir. Eğer η, (C) koşulunu sağlarsa, her $x, y \in S$ ve $\forall t_1, t_2 \in [0,1]$ için

$$\eta(y + t_2\eta(x,y), y + t_1\eta(x,y)) = (t_2 - t_1)\eta(x,y) \tag{3.1.4}$$

eşitliği sağlanır. Bunun ispatı için [20] ve [21]'ye bakabilirsiniz.

Tanım 3.1.2 $S \subseteq B(H)_{sa}$ kümesi $\eta : S \times S \to B(H)_{sa}$ ya göre inveks bir küme olsun. Eğer, her $A, B \in S$ ve $t \in [0,1]$ için sürekli olan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(A + t\eta(B,A)) \leq (1-t)f(A) + tf(B) \tag{3.1.5}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu fonksiyona S üzerinde η ya göre operatör preinvekstir denir.

Her operatör konveks fonksiyon $\eta(A,B)=A-B$ dönüşümüne göre operatör preinvekstir fakat tersi doğru değildir. Şimdi η dönüşümüne göre (C) koşulunu sağlayan bazı operatör preinveks fonksiyon ve inveks küme örnekleri verelim.

Örnek 3.1.1 Varsayalım 1_H H Hilbert uzayı üzerinde bir birim operatörü,

$$\begin{aligned} T := (-3\times 1_H, -1\times 1_H) &= \{A\in B(H)_{sa} : -3\times 1_H < A < -1\times 1_H\} \\ U := (1_H, 4\times 1_H) &= \{A\in B(H)_{sa} : 1_H < A < 4\times 1_H\} \\ S := T\cup U &\subseteq B(H)_{sa} \end{aligned}$$

ve $\eta_1 : S\times S \to B(H)_{sa}$ fonksiyonu

$$\eta_1(A,B) = \begin{cases} A-B & A,B\in U \\ A-B, & A,B\in T \\ 1_H - B, & A,B\in T \\ -1_H - B, & A\in U, B\in T \end{cases}$$

olsun. η_1'in (C) koşulunu sağladığı ve S kümesinin η_1 fonksiyonuna göre inveks olduğu açıktır. $f(t)=t^2$ reel fonksiyonu S kümesi üzrinde η_1 e göre preinvekstir. Fakat $a,b\in\mathbb{R}$ için $g(t)=a+bt$ fonksiyonu S kümesi üzerinde η_1 e göre preinveks değildir.

Örnek 3.1.2 $V := (-2\times 1_H, 0)$, $W := (0, 2\times 1_H)$, $S := V\cup W \subseteq B(H)_{sa}$ ve $\eta_2 : S\times S \to B(H)_{sa}$ fonksiyonu

$$\eta_2(A,B) \begin{cases} A-B, & A,B\in V \text{ veya } A,B\in W \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. η_2, (C) koşulunu sağlar ve S kümesi η_2 ye göre invekstir. $a\in\mathbb{R}$ için $f(t)=a$ sabit fonksiyonu S üzerinde η_2 ye göre sadece preinveks fonksiyondur.

Örnek 3.1.3 $f(t) = -\mid t\mid$ fonksiyonu

$$\eta_3(A,B) \begin{cases} A-B, & A,B\geq 0 \text{ veya } A,B\leq 0 \\ B-A, & \text{diğer} \end{cases}$$

fonksiyonuna göre konveks olmayan fakat preinveks olan bir fonksiyondur.

Önerme 3.1.1 $S\subseteq B(H)_{sa}$ kümesi $\eta : S\times S\to B(H)_{sa}$ ye göre inveks bir küme ve $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki η, S üzerinde C koşılunu sağlasın. O halde her $A,B\in S$ ve $V = A+\eta(B,A)$ için f fonksiyonun P_{AV} η yolu üzerinde η ye göre preinveks olması için gerekli ve yeterli koşul her $x\in H$, $\parallel x\parallel = 1$ için

$$\varphi_{x,A,B}(t) = \langle f(A+t\eta(B,A))x, x\rangle \tag{3.1.6}$$

şeklinde tanımlanan $\varphi_{x,A,B} : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[0,1]$ üzerinde konveks olmasıdır.

İspat. "$\Rightarrow$" Kabul edelim ki $x \in H$, $\| x \| = 1$ ve $\varphi_{x,A,B}$, $[0,1]$ üzerinde konveks olsun.

$$C_1 \;:=\; A + t_1\eta(B,A) \in P_{AV}$$

ve

$$C_2 \;:=\; A + t_2\eta(B,A) \in P_{AV}$$

$\lambda \in [0,1]$ olmak üzere (3.1.6) ile

$$\begin{aligned}
\langle f(C_1 + \lambda\eta(C_2, C_1))x, x\rangle &= \langle f(A + ((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2)\eta(B,A))x, x\rangle \qquad (3.1.7)\\
&= \varphi_{x,A,B}((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2)\\
&\leq (1-\lambda)\varphi_{x,A,B}(t_1 + \lambda\varphi_{x,A,B}(t_2))\\
&= (1-\lambda)\langle f(C_1)x, x\rangle + \lambda\langle f(C_2)x, x\rangle
\end{aligned}$$

Böylece f fonksiyonu P_{AV} η yolu üzerinde η ye göre operatör preinvekstir.

"$\Leftarrow$" Tersine, $A, B \in S$ ve f fonksiyonu P_{AV} η yolu üzerinde η ye göre operatör operatör preinveks ve $t_1, t_2 \in [0,1]$ olsun. O halde her $\lambda \in [0,1]$, $x \in H$, $\| x \| = 1$ için

$$\begin{aligned}
\varphi_{x,A,B}((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) &= f(A + ((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2)\eta(B,A))x, x\rangle \qquad (3.1.8)\\
&= \langle f(A + t_1\eta(B,A) + \lambda\eta(A + t_2\eta(B,A)), A + t_1\eta(B,A))x, x\rangle\\
&\leq \lambda\langle f(A + t_2\eta(B,A)x, x\rangle + (1-\lambda)\langle f(A + t_1\eta(B,A)x, x\rangle\\
&= \lambda\varphi_{x,A,B}(t_2) + (1-\lambda)\varphi_{x,A,B}(t_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\varphi_{x,A,B}$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde konvekstir.

Teorem 3.1.1 $S \subseteq B(H)_{sa}$, $\eta : S \times S \to B(H)_{sa}$ dönüşümüne göre inveks bir küme ve η, (C) koşulunu sağlasın. Eğer her $A, B \in S$ ve $V = A + \eta(B,A)$ için $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu A ve V operatörleriyle P_{AV} η yolu üzerinde η ye göre preinveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned}
f(\frac{A+V}{2}) &\leq \frac{1}{2}\Big[f(\frac{3A+V}{4}) + f(\frac{A+3V}{4})\Big] \qquad (3.1.9)\\
&\leq \int_0^1 f(A + t\eta(B,A))dt\\
&\leq \frac{1}{2}\Big[f(\frac{A+V}{2}) + \frac{f(A)+f(V)}{2}\Big]\\
&\leq \frac{f(A)+f(B)}{2}
\end{aligned}$$

İspat. : $\langle Ax, x\rangle \in Sp(A)$, $\langle Vx, x\rangle \in Sp(V)$ olmak üzere $x \in H$, $\| x \| = 1$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\langle (A + t\eta(B,A))x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle + t\langle \eta(B,A)x, x\rangle \in I \qquad (3.1.10)$$

yazabiliriz. f fonksiyonunun sürekliliğinden ve (3.1.10) eşitliğinden

$$\int_0^1 f(A + t\eta(B,A))dt$$

operatör değerli integrali vardır. η, (C) koşulunu sağladığından her $t \in [0,1]$ için

$$A + \frac{1}{2}\eta(B,A) = A + t\eta(B,A) + \frac{1}{2}\eta(A + (1-t)\eta(B,A), A + t\eta(B,A)). \qquad (3.1.11)$$

eşitliği doğrudur. f fonksiyonu η'ye göre preinveks olduğundan

$$\begin{aligned} f(A + \frac{1}{2}\eta(B,A)) &\leq \frac{1}{2}f(A + t\eta(B,A)) + \frac{1}{2}f(A + (1-t)\eta(B,A)) \qquad (3.1.12) \\ &\leq \frac{1}{2}[(1-t)f(A) + tf(B)] + \frac{1}{2}[tf(A) + (1-t)f(B)] \\ &\leq \frac{f(A) + f(B)}{2} \end{aligned}$$

Buradan (3.1.12)'nin her iki tarafını $[0,1]$ üzerinde t'ye göre integrali alınır ve doğru olan

$$\int_0^1 f(A + t\eta(B,A))dt = \int_0^1 f(A + (1-t)\eta(B,A))dt \qquad (3.1.13)$$

integral eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{A + (A + \eta(B,A))}{2}\Big) &\leq \int_0^1 f(A + t\eta(B,A))dt \\ &\leq \frac{f(A) + f(B)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece her $A, B \subseteq I$ özeşlenik operatörler ve preinveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde ederiz.
Reel değerli $\varphi_{x,A,B} : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\varphi_{x,A,B}(t) = \langle f(A + t\eta(B,A))x, x\rangle$$

şeklinde tanımlansın. Bir önceki önermeden ile f operatör preinveks olduğundan $\varphi_{x,A,B}$, [0,1] üzerinde konveks fonksiyondur. Reel değerli konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini kullanırsak

$$\varphi\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(s)ds \leq \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2}$$

Burada $a=0,b=\frac{1}{2}$ alırsak

$$\Big\langle f\Big(\frac{3A+V}{4}\Big)x,x\Big\rangle \;\leq\; 2\int_0^{\frac{1}{2}}\varphi_{x,A,B}(t)dt \leq \Big\langle \frac{f(A)+f(\frac{A+V}{2})}{2}x,x\Big\rangle$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Eğer $a=\frac{1}{2},b=1$ olarak seçersek

$$\Big\langle f\Big(\frac{A+3V}{4}\Big)x,x\Big\rangle \;\leq\; 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\varphi_{x,A,B}(t)dt \leq \langle \frac{f(V)+f(\frac{A+V}{2})}{2}x,x\rangle$$

Yukarıdaki (3.1.14) ve (3.1.14) eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned}\Big\langle \frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{3A+V}{4}\Big)+f\Big(\frac{A+3V}{4}\Big)\Big]x,x\Big\rangle &\leq \int_0^1 \langle f(A+t\eta(B,A))x,x\rangle dt\\ &\leq \Big\langle \frac{1}{2}\Big[f(\frac{A+V}{2})+\frac{f(A)+f(V)}{2}\Big]x,x\Big\rangle\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde etmiş oluruz. Son olarak f fonksiyonunun sürekliliğinden

$$\int_0^1 \langle f(A+t\eta(B,A))x,x\rangle dt \;=\; \Big\langle \int_0^1 f(A+t\eta(B,A))dtx,x\Big\rangle$$

ve (3.1.11) eşitliğinden

$$f\Big(\frac{A+V}{2}\Big) \;\leq\; \frac{1}{2}\Big[f(\frac{3A+V}{4})+f(\frac{A+3V}{4})\Big] \leq \frac{f(A)+f(B)}{2}$$

Böylece ispat tamamlanır. Bu teoremin bir sonucu olarak

Sonuç 3.1.1 Teorem 3.1.1'in varsayımları altında,

$$0 \;\leq\; \int_0^1 f(A+t\eta(B,A))dt - f\Big(\frac{A+V}{2}\Big) \leq \frac{f(A)+f(V)}{2} - \int_0^1 f(A+t\eta(B,A))dt$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Örnek 3.1.4 Örnek (3.1.1) deki şartlar altında Her $A,B\in S$ ve $V=A+\eta_1(B,A)$ için

$$\begin{aligned}\Big(\frac{A+V}{2}\Big)^2 &\leq \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{3A+V}{4}\Big)^2+\Big(\frac{A+3V}{4}\Big)^2\Big]\\ &\leq \int_0^1 (A+t\eta_1(B,A))^2dt\\ &\leq \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{A+V}{2}\Big)^2+\Big(\frac{A^2+V^2}{2}\Big)\Big]\\ &\leq \frac{A^2+B^2}{2}\end{aligned}$$

sağlanır. Aşağıda vereceğimiz Teorem, [14] deki Teorem 3.1'in genelleşmiş halidir.

Teorem 3.1.2 $f : I \to \mathbb{R}^+$ sürekli bir fonksiyon, $S \subseteq B(H)_{sa}$ kümesi $\eta : S \times S \to B(H)_{sa}$ ye göre inveks bir açık küme ve η, (C) koşulunu sağlasın. Her $A, B \in S$ ve $V = A + \eta(B, A)$ için f fonksiyonu, spektrumları I'da olan A ve V operatörleri ile P_{AV} η yolu üzerinde η ye göre operatör preinveks olsun. O zaman her $a, b \in (0, 1)$, $a < b$ ve her $x \in H$, $\| x \| = 1$ için

$$\begin{aligned} & \Big|\frac{1}{2}\Big\langle \int_0^a f(A + s\eta(B, A))dsx, x\Big\rangle + \frac{1}{2}\Big\langle \int_0^b f(A + s\eta(B, A))dsx, x\Big\rangle \\ - \; & \frac{1}{b-a}\int_a^b \Big\langle \int_0^t f(A + s\eta(B, A))dsx, x\Big\rangle\Big| \\ \leq \; & \frac{b-a}{8}\{\langle f(A + a\eta(B, A))x, x\rangle + \langle f(A + b\eta(B, A))x, x\rangle\} \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

ve

$$\begin{aligned} & \Big\|\frac{1}{2}\Big\langle \int_0^a f(A + s\eta(B, A))dsx, x\Big\rangle + \frac{1}{2}\Big\langle \int_0^b f(A + s\eta(B, A))dsx, x\Big\rangle \\ - \; & \frac{1}{b-a}\int_a^b \Big\langle \int_0^t f(A + s\eta(B, A))dsx, x\Big\rangle\Big\| \\ \leq \; & \frac{b-a}{8} \| f(A + a\eta(B, A)) + f(A + b\eta(B, A)) \| \\ \leq \; & \frac{b-a}{8}[\| f(A + a\eta(B, A)) \| + \| f(A + b\eta(B, A)) \|] \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $A, B \in S$ ve $a, b \in (0, 1)$, $a < b$ olsun. $s, t \in [0, 1]$ ve $x \in H$, $\| x \| = 1$ için

$$\varphi(t) := \Big\langle \int_0^t f(A + s\eta(B, A))dsx, x\Big\rangle$$

şeklinde $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlayalım. f fonksiyonunun, iç çarpım fonksiyonunun sürekliliğini ve operatör değerli fonksiyonların integral özelliklerini kullanarak

$$\Big\langle \int_0^t f(A + s\eta(B, A))dsx, x\Big\rangle = \int_0^t \langle f(A + s\eta(B, A))dsx, x\rangle$$

$f(A + s\eta(B, A)) \geq 0$ olduğundan her $t \in [0, 1]$ için $\varphi(t) \geq 0$ dır.
Her $t \in (0, 1)$ için

$$\varphi^{'}(t) = \langle f(A + s\eta(B, A))x, x\rangle \geq 0$$

Böylece $\mid \varphi^{'}(t) \mid = \varphi^{'}(t)$. f fonksiyonu P_{AV} η yolu η yoluna göre preinveks olduğundan ve Önerme 1 den $\varphi^{'}$ fonksiyonu konvekstir. (**??**) numaralı eşitsizliğine göre φ fonksiyonu

$$\Big|\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(s)ds\Big| \quad \leq \quad \frac{(b-a)(\varphi^{'}(a)+\varphi^{'}(b))}{8}$$

ve (3.1.14) elde edilir. Her $x \in H$, $\parallel x \parallel = 1$ için (3.1.14) eşitsizliğinin her iki tarafının supremumu alınırsa (3.1.15) eşitsizliği elde edilir. Eğer Teorem 3.1.1 de $\eta(B, A) = B - A$ olarak düşünülürse o zaman $f : I \to \mathbb{R}$ bir operatör konveks fonksiyon ve $V = B$ olabilir. Böylece Teorem 3.1.2 ün sonucundan Teorem 2.0.5 hesaplanabilir. Teorem 3.1.2'ün bir uygulaması olarak aşağıda, [14] de Teorem 2.1'in bir genelleştirmesi olan teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.1.3 $f : I \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu I aralığı üzerinde bir operatör konveks fonksiyon olsun. O halde spektrumları I'da olan her özeşlenik A, B operatörleri ve $a, b \in (0,1)$,$a < b$ için

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{2}\Big\langle \int_0^a f((1-s)A+sB)dsx, x\Big\rangle + \frac{1}{2}\Big\langle \int_0^b f((1-s)A+sB)dsx, x\Big\rangle \\
-&\quad \frac{1}{b-a}\int_a^b \Big\langle \int_0^t f((1-s)A+sB)dsx, x\Big\rangle\Big| \\
\leq&\quad \frac{b-a}{8}\{\langle f((1-a)A+aB)x, x\rangle + \langle f((1-b)A+bB)x, x\rangle\}
\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\Big\|\frac{1}{2}\Big\langle \int_0^a f((1-s)A+sB)dsx, x\Big\rangle + \frac{1}{2}\Big\langle \int_0^b f((1-s)A+sB)dsx, x\Big\rangle \\
-&\quad \frac{1}{b-a}\int_a^b \Big\langle \int_0^t f((1-s)A+sB)dsx, x\Big\rangle\Big\| \\
\leq&\quad \frac{b-a}{8} \parallel f((1-a)A+aB) + f((1-b)A+bB) \parallel \\
\leq&\quad \frac{b-a}{8}[\parallel f((1-a)A+aB) \parallel + \parallel f((1-b)A+bB) \parallel]
\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

3.2 Operatör α-Preinveks Fonksiyonlar İçin H-H Tipli Eşitsizlikler

Bu kısmın yazılmasında Wang'ın [11] çalışmasınan faydalanılmıştır.

3.2.1 Operatör α-Preinveks Fonksiyonlar

Tanım 3.2.1 I, $\mathbb{R}_0$ da bir aralık ve $S \subseteq B(H)^+_{sa}$ kümesi $\eta : S \times S \to B(H)^+_{sa}$ ye göre inveks bir küme olsun. Eğer her $t \in [0,1]$, $\alpha \in [0,1]$ ve spektrumları I'da olan her pozitif A, B operatörleri için

$$f(A + t\eta(B,A)) \leq (1 - t^\alpha)f(A) + t^\alpha f(B) \quad (3.2.1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa sürekli $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna η ye göre α-preinveks fonksiyon denir.

Her operatör 1-preinveks fonksiyon operatör preinvekstir ve $\eta(A,B) = B-A$ dönüşümüne göre her operatör α-preinveks fonksiyon operatör α-konvekstir.

Tanım 3.2.2 I, $\mathbb{R}_0$ da bir aralık olsun ve her $t \in [0,1]$, $\alpha \in [0,1]$ olsun. Bu durumda her $A, B \in B(H)^+_{sa}$ pozitif operatörleri için

$$f(tA + (1-t)B) \leq t^\alpha f(A) + (1 - t^\alpha)f(B) \quad (3.2.2)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa sürekli $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna operatör α-konveks fonksiyon denir.

Lemma 3.2.1 $S \subseteq B(H)^+_{sa}$ kümesi $\eta : S \times S \to B(H)^+_{sa}$ ye göre inveks bir küme ve $f : I \subseteq \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Varsayalım η, S üzerinde (C) koşılunu sağlasın. O halde her $A, B \in S$, $\alpha \in [0,1]$ ve $V = A + \eta(B,A)$ için f fonksiyonun P_{AV} η yolu üzerinde η ye göre operatör α-preinveks olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in H, \|x\| = 1$ için

$$\varphi_{x,A,B}(t) = \langle f(A + t\eta(B,A))x, x\rangle \quad (3.2.3)$$

şeklinde tanımlanan $\varphi_{x,A,B} : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun α-konveks olmasıdır.

İspat. "$\Rightarrow$" $x \in H$, $\alpha \in [0,1]$ ve $\varphi_{x,A,B}$, $[0,1]$ üzerinde α-konveks olsun.

$$C_1 := A + t_1\eta(B,A) \in P_{AV}$$

ve

$$C_2 := A + t_2\eta(B,A) \in P_{AV}$$

$\lambda \in [0,1]$ olmak üzere (3.2.3) ile

$$\begin{aligned}
\langle f(C_1 + \lambda\eta(C_2, C_1))x, x\rangle &= \langle f(A + ((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2)\eta(B, A))x, x\rangle \qquad (3.2.4)\\
&= \varphi_{x,A,B}((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2)\\
&\leq (1-\lambda^\alpha)\varphi_{x,A,B}(t_1 + \lambda^\alpha \varphi_{x,A,B}(t_2))\\
&= (1-\lambda^\alpha)\langle f(C_1)x, x\rangle + \lambda^\alpha \langle f(C_2)x, x\rangle
\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece f fonksiyonu P_{AV} η yolu üzerinde üzerinde η ye göre operatör α-preinvekstir. "$\Leftarrow$" Tersine, $A, B \in S$ ve f fonksiyonu P_{AV} η yolu üzerinde üzerinde η ye göre operatör α- preinveks ve $t_1, t_2 \in [0,1]$, $\alpha \in [0,1]$ olsun. O halde her $\lambda \in [0,1]$, $x \in H$ $\| x \| = 1$ için

$$\begin{aligned}
\varphi_{x,A,B}((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) &= f(A + ((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2)\eta(B, A))x, x\rangle \qquad (3.2.5)\\
&= \langle f(A + t_1\eta(B, A) + \lambda\eta(A + t_2\eta(B, A)), A + t_1\eta(B, A))x, x\rangle\\
&\leq \lambda^\alpha \langle f(A + t_2\eta(B, A)x, x\rangle + (1-\lambda^\alpha)\langle f(A + t_1\eta(B, A)x, x\rangle\\
&= \lambda^\alpha \varphi_{x,A,B}(t_2) + (1-\lambda^\alpha)\varphi_{x,A,B}(t_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\varphi_{x,A,B}$ fonksiyonunun $[0,1]$ üzerinde α-konveks olduğunu gösterir.

3.2.2 Operatör α-Preinveks Fonksiyonlar İçin H-H Tipli Eşitsizlikler

Teorem 3.2.1 $S \subseteq B(H)^+_{sa}$ kümesi $\eta : S \times S \to B(H)^+_{sa}$ ye göre inveks bir küme ve $f : I \subseteq \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. η'nın S üzerinde (C) koşılunu sağladığını kabul edelim. O halde her $A, B \in S$, $\alpha \in [0,1]$ ve $V = A + \eta(B, A)$ için eğer $f : I \subseteq \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu P_{AV} η yolu üzerinde η ye göre operatör α-preinveks ise her $x \in H$ için

$$f\Big(\frac{A+V}{2}\Big) \leq \int_0^1 f(A + t\eta(B, A))dt \leq \frac{\alpha f(A) + f(B)}{\alpha + 1} \qquad (3.2.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. : Her $x \in H$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\langle (A + t\eta(B, A))x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle + t\langle \eta(B, A)x, x\rangle \in I \qquad (3.2.7)$$

yazabiliriz. Burada $\langle Ax, x\rangle \in Sp(A) \subseteq I$ ve $\langle Vx, x\rangle \in Sp(V) \subseteq I$. f fonksiyonun sürekliliğinden ve (3.2.7) eşitsizliğinden $\int_0^1 f(A+t\eta(B,A))$ integrali vardır. η, (C) koşulunu sağladığından ve f fonksiyonu η ye göre α-preinveks olduğundan her $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
& f\Big(A + \frac{1}{2}\eta(B,A)\Big) && (3.2.8)\\
= \;& f\Big(A + t\eta(B,A) + \frac{1}{2}\eta(A + (1-t)\eta(B,A), A + t\eta(B,A))\Big) \\
\leq \;& (1 - \frac{1}{2^\alpha})f(A + t\eta(B,A)) + \frac{1}{2^\alpha}f(A + (1-t)\eta(B,A)) \\
\leq \;& \Big\{1 - t^\alpha + \frac{1}{2^\alpha}[t^\alpha - (1-t)^\alpha]\Big\}f(A) \\
+ \;& \Big\{t^\alpha - \frac{1}{2^\alpha}[t^\alpha - (1-t)^\alpha]f(B)\Big\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.2.8) eşitsizliğinin her iki tarafının $t \in [0,1]$'ye göre integrali alınırsa (3.2.6) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır. Ayrıca bu ispatı yaparken

$$\int_0^1 f(A + t\eta(B,A))dt = \int_0^1 f(A + (1-t)\eta(B,A))dt \qquad (3.2.9)$$

eşitliğide kullanılmıştır.

Remark 3.2.1 Yukarıda verilen Teoremde $\alpha = 1$ alınırsa Teorem **??** elde edilir. $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ için $f : I \subseteq \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ operatör α_1-preinveks ve $g : I \subseteq \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ operatör α_2-preinveks fonksiyon olsun. Her A, B pozitif operatörleri ve $x \in H$ için H üzerinde $M(A,B)$ ve $N(A,B)$ fonksiyonlarını tanımlayalım;

$$\begin{aligned}
M(A,B)(x) &= \langle f(A)x, x\rangle\langle g(A)x, x\rangle + \langle f(B)x, x\rangle\langle g(B)x, x\rangle && (3.2.10)\\
N(A,B)(x) &= \langle f(A)x, x\rangle\langle g(B)x, x\rangle + \langle f(B)x, x\rangle\langle g(A)x, x\rangle
\end{aligned}$$

Teorem 3.2.2 $S \subseteq B(H)^+_{sa}$ kümesi $\eta : S \times S \to B(H)^+_{sa}$ ye göre inveks bir küme ve $f : I \subseteq \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. η'nın S üzerinde (C) koşulunu sağladığını kabul edelim. Eğer her $A, B \in S$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ ve $V = A + \eta(B,A)$ için sürekli $f : I \subseteq \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ ve $g : I \subseteq \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları P_{AV} η yolu üzerinde η ye göre sırasıyla operatör

α_1, α_2-preinveks ise bu durumda her $x \in H$ ve (3.2.10) de verilen $M(A,B)$, $N(A,B)$ için

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \langle f(A+t\eta(B,A))x,x\rangle\langle g(A+t\eta(B,A))x,x\rangle dt \qquad (3.2.11)\\
\leq\ & \frac{\alpha_1\alpha_2-1}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\\
&+\frac{1}{\alpha_2+1}\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\\
&+\frac{1}{\alpha_1+1}\langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\\
&+\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+1}[M(A,B)(x)-N(A,B)(x)]
\end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. : Her $x \in H$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\langle (A+t\eta(B,A))x,x\rangle \ = \ \langle Ax,x\rangle + t\langle \eta(B,A)x,x\rangle \in I. \qquad (3.2.12)$$

Burada $\langle Ax,x\rangle \in Sp(A) \subseteq I$ ve $\langle Vx,x\rangle \in Sp(V) \subseteq I$. f,g fonksiyonlarının sürekliliğinden $\int_0^1 f(A+t\eta(B,A))$,$\int_0^1 g(A+t\eta(B,A))$ ve $\int_0^1 fg(A+t\eta(B,A))$ integralleri vardır. $f: I \to \mathbb{R}$ operatör α_1-preinveks ve $g: I \to \mathbb{R}$ operatör α_2-preinveks olduğundan $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
&\langle f(A+t\eta(B,A))x,x\rangle\langle g(A+t\eta(B,A))x,x\rangle \qquad (3.2.13)\\
\leq\ & (1-t^{\alpha_1})(1-t^{\alpha_2})\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\\
&+(1-t^{\alpha_1})t^{\alpha_2}\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\\
&+t\alpha_1(1-t^{\alpha_2})\langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\\
&+t^{\alpha_1+\alpha_2}\langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle
\end{aligned}$$

doğru olan eşitsizliğini yazabiliriz. (3.2.13)'n her iki tarafının $t \in [0,1]$'ye göre integrali alınırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.1 Teorem 3.2.2'nin koşulları altında

(i) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \langle f(A+t\eta(B,A))x,x\rangle\langle g(A+t\eta(B,A))x,x\rangle dt \qquad (3.2.14)\\
&\leq \frac{\alpha-1}{\alpha+1}\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\\
&+\frac{1}{2\alpha+1}M(A,B)(x)+\frac{\alpha}{(\alpha+1)(2\alpha+1)}N(A,B)(x)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

(ii) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \langle f(A+t\eta(B,A))x,x\rangle\langle g(A+t\eta(B,A))x,x\rangle dt \\ \leq \; & \frac{2M(A,B)(x)+N(A,B)(x)}{6} \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Sonuç 3.2.2 Teorem 3.2.2'nin koşulları altında $\eta(B,A) = B - A$ alınırsa o zaman,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \langle f(tB+(1-t)\eta(B,A))x,x\rangle\langle g(tB+(1-t)\eta(B,A))x,x\rangle dt \\ \leq \; & \frac{\alpha_1\alpha_2-1}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle \\ & +\frac{1}{\alpha_2+1}\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle \\ & +\frac{1}{\alpha_1+1}\langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle \\ & +\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+1}[M(A,B)(x)-N(A,B)(x)] \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.2.3 $S \subseteq B(H)^+_{sa}$ kümesi $\eta : S \times S \to B(H)^+_{sa}$ ye göre inveks bir küme ve η, S üzerinde (C) koşulunu sağlasın. Eğer her $A, B \in S$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ ve $V = A + \eta(B,A)$ için $f : I \subseteq \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ ve $g : I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonları sırası ile P_{AV} η yolu üzerinde η ye göre operatör α_1, α_2-preinveks ise her $x \in H$ için

$$\begin{aligned} \frac{2^{\alpha_1+\alpha_2}}{(2^{\alpha_1}-1)(2^{\alpha_2}-1)+1} \quad \times \quad & \Big\langle f\Big(\frac{A+V}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle g\Big(\frac{A+V}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\ \leq \quad & \int_0^1 \langle f(A+t\eta(B,A))x,x\rangle\langle g(A+t\eta(B,A))x,x\rangle dt \\ & +\frac{\alpha_1-1}{(2^{\alpha_1}-1)(2^{\alpha_2}-1)+1}\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle \\ & +\frac{\alpha_2-1}{(2^{\alpha_1}-1)(2^{\alpha_2}-1)+1}\langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. : $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ için $f : I \subseteq \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu operatör α_1-preinveks ve $g : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu operatör α_2-preinveks olduğundan her $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
& \Big\langle f\Big(\frac{A+V}{2}\Big)x, x\Big\rangle \Big\langle g\Big(\frac{A+V}{2}\Big)x, x\Big\rangle \qquad (3.2.18) \\
= \; & \Big\langle f\Big(A + t\eta(B,A) + \frac{1}{2}\eta(A + (1-t)\eta(B,A), A + t\eta(B,A))\Big)x, x\Big\rangle \\
& \times g\Big(A + t\eta(B,A) + \frac{1}{2}\eta(A + (1-t)\eta(B,A), A + t\eta(B,A))\Big)x, x\Big\rangle \\
\leq \; & \Big\langle \Big[\Big(1 - \frac{1}{2^{\alpha_1}}\Big) f(A + t\eta(B,A)) + \frac{1}{2^{\alpha_1}} f(A + (1-t)\eta(B,A))\Big]x, x\Big\rangle \\
& \times \Big\langle \Big[\Big(1 - \frac{1}{2^{\alpha_2}}\Big) g(A + t\eta(B,A)) + \frac{1}{2^{\alpha_2}} g(A + (1-t)\eta(B,A))\Big]x, x\Big\rangle \\
\leq \; & \Big(1 - \frac{1}{2^{\alpha_1}}\Big)\Big(1 - \frac{1}{2^{\alpha_2}}\Big)\langle f(A + t\eta(B,A))x, x\rangle \times \langle g(A + t\eta(B,A))x, x\rangle \\
& + \frac{1}{2^{\alpha_1+\alpha_2}}\langle f(A + (1-t)\eta(B,A))x, x\rangle \\
& \times \langle g(A + (1-t)\eta(B,A))x, x\rangle \\
& + \Big(1 - \frac{1}{2^{\alpha_1}}\Big)\frac{1}{2^{\alpha_2}}\langle f(A)x, x\rangle\langle g(B)x, x\rangle \\
& + \Big(1 - \frac{1}{2^{\alpha_2}}\Big)\frac{1}{2^{\alpha_1}}\langle f(B)x, x\rangle\langle g(A)x, x\rangle
\end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buradan (3.2.18)'nin $t \in [0,1]$'ye göre heriki tarafının integralini alırsak ispat tamamlanır. Burada ispatı yaparken

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \langle f(A + t\eta(B,A))x, x\rangle\langle g(A + t\eta(B,A))x, x\rangle dt \\
= \; & \int_0^1 \langle f(A + (1-t)\eta(B,A))x, x\rangle \times \langle g(A + (1-t)\eta(B,A))x, x\rangle dt
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden de faydalandık.

Sonuç 3.2.3 Teorem 3.2.3 koşulları altında

(i) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ seçilirse

$$\begin{aligned}
& \frac{4^\alpha}{(2^\alpha - 1)^2 + 1}\Big\langle f\Big(\frac{A+V}{2}\Big)x, x\Big\rangle \Big\langle g\Big(\frac{A+V}{2}\Big)x, x\Big\rangle \qquad (3.2.19) \\
\leq \; & \int_0^1 \langle f(A + t\eta(B,A))x, x\rangle\langle g(A + t\eta(B,A))x, x\rangle dt \\
& + \frac{\alpha - 1}{(2^\alpha - 1)^2 + 1}\langle N(A,B)x, x\rangle
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $N(A,B)$, (3.2.10)'da tanımlanmıştır.

(ii) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ seçilirse

$$\begin{aligned} & 2\Big\langle f\Big(\frac{A+V}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle g\Big(\frac{A+V}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\ \leq & \int_0^1 \langle f(A+t\eta(B,A))x,x\rangle\langle g(A+t\eta(B,A))x,x\rangle dt \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 3.2.4 Teorem 3.2.3'te eğer $\eta(B,A) = B - A$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{2^{\alpha_1+\alpha_2}}{(2^{\alpha_1}-1)(2^{\alpha_2}-1)+1} \times & \Big\langle f\Big(\frac{A+V}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle g\Big(\frac{A+V}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\ \leq & \int_0^1 \langle f(tB+(1-t)A)x,x\rangle\langle g(tB+(1-t)B)x,x\rangle dt \\ & +\frac{\alpha_1-1}{(2^{\alpha_1}-1)(2^{\alpha_2}-1)+1}\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle \\ & +\frac{\alpha_2-1}{(2^{\alpha_1}-1)(2^{\alpha_2}-1)+1}\langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.2.5 Teorem 3.2.3'in koşulları altında

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2^{\alpha_1}-1)(2^{\alpha_2}-1)+1}\Big[2^{\alpha_1+\alpha_2}\Big\langle f\Big(\frac{A+V}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\ & \times\Big\langle g\Big(\frac{A+V}{2}\Big)x,x\Big\rangle \\ - & (\alpha_1-1)\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle - (\alpha_2-1)\langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\Big] \\ \leq & \int_0^1 \langle f((1-t)A+tB)x,x\rangle\langle g((1-t)A+tB)x,x\rangle dt \\ \leq & \frac{\alpha_1\alpha_2-1}{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)}\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle \\ & +\frac{1}{\alpha_2+1}\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle \\ & +\frac{1}{\alpha_1+1}\langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle \\ & +\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+1}[M(A,B)(x)-N(A,B)(x)] \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Burada $N(A,B)$ ve $M(A,B)$ (3.2.10) numaralı denklemde tanımlanan fonksiyonlardır.

3.2.3 Operatör s-Preinveks Fonksiyonlar İçin H-H Tipli Eşitsizlikler

Tezin bu kısmını hazırlarken Wang[12]'ın çalışmasından faydalandık.

Tanım 3.2.3 I, $\mathbb{R}_0$ da bir aralık ve $S \subseteq B(H)^+_{sa}$, $\eta : S \times S \longrightarrow B(H)^+_{sa}$ dönüşümüne göre inveks bir küme $s \in (0,1]$ olsun. Sprekturumları I-da olan her A ve B pozitif operatörleri ve tüm $t \in [0,1]$ için,

$$f(A + t\eta(B,A)) \leq (1-t)^s f(A) + t^s f(B) \tag{3.2.23}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonuna η-ya göre operatör s-preinveks denir.

Açıkça görebiliriz ki, her operatör 1-preinveks fonksiyon, operatör preinveks ve her operatör s-konveks fonksiyon $\eta(A,B) = A - B$ dönüşümüne göre operatör s-preinvekstir.

Lemma 3.2.2 [31] $A, B \in B(H)^+$ olsun. $\mathbb{R}_0$ üzerinde negatif olmayan tüm operatör monoton f fonksiyonlar için $f(A+B) \leq f(A) + f(B)$ olması için gerek ve yeter koşul $AB + BA$-nın pozitif olmasıdır.

Şimdi operatör s-preinveks fonksiyonun bir örneğini verelim.

Örnek 3.2.1 Kabul edelim ki, 1_H, H Hilbert uzayı üzerinde birim operatör ve

$$S := (1_H, 5.1_H) = \{A \in B(H)^+_{sa} : 1_H < A < 5.1_H\}$$

olsun. $\eta : S \times S \longrightarrow B(H)^+_{sa}$ dönüşümünü, tüm $A > B \geq 0$ için $\eta(A,B) = A - B$ şeklinde tanımlayalım. O halde η-nın (C) koşulunu sağladığı ve S-nın η-ya göre inveks bir küme olduğu açıktır. Lemma 3.2.2 ve [9]-de Teorem 1.7 nin (1.12) den $f(t) = t^s(0 < s \leq 1)$ sürekli fonksiyonu $C(H)$ içindeki operatörler için S üzerinde η ya göre operatör s-preinvekstir.

Aşağıdaki Lemma, [9] de Önerme 1 in bir genişletilmesidir.

Lemma 3.2.3 $S \subseteq B(H)^+_{sa}$, $\eta : S \times S \longrightarrow B(H)^+_{sa}$ dönüşümüyle bir inveks küme ve $f : I \subseteq \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, I aralığı üzerinde sürekli bir fonksion olsun. η-nın S üzerinde (C) şartını sağladığını kabul edelim. Bu durumda her $A, B \in S$, $V = A + \eta(B,A)$ ve $s \in (0,1]$

sabiti için f sürekli fonksiyonun, P_{AV} η-yolu üzerinde η ya göre operatör s-preinveks olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\varphi_{x,A,B}(t) := \langle f(A + t\eta(B,A))x, x\rangle \tag{3.2.24}$$

şeklinde tanımlanan $\varphi_{x,A,B} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun, her $x \in H$, $||x|| = 1$ için $[0,1]$ üzerinde s-konveks olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki her $x \in H$ $||x|| = 1$ ve $\varphi_{x,A,B} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $s \in (0,1]$ sabiti için $[0,1]$ üzerinde s-konveks olsun. Her $C_1 := A + t_1\eta(B,A) \in P_{AV}$, $C_2 := A + t_2\eta(B,A) \in P_{AV}$, $\lambda \in [0,1]$ ve (3.2.24) ten

$$\begin{aligned}\langle f(C_1 + \lambda\eta(C_2, C_1))x, x\rangle &= \langle f(A + ((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2)\eta(B,A))x, x\rangle \\ &= \varphi_{x,A,B}((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) \\ &\leq (1-\lambda)^s\varphi_{x,A,B}(t_1) + \lambda^s\varphi_{x,A,B}(t_2) \\ &= (1-\lambda)^s\langle f(C_1)x, x\rangle + \lambda^s\langle f(C_2)x, x\rangle\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla, f, P_{AV} η-yolu üzerinde η ya göre operatör s-preinvekstir.

Tersine, $A, B \in S$ ve $s \in [0,1]$ sabiti için P_{AV} η-yolu üzerinde η ya göre operatör s-preinveks ve $t_1, t_2 \in [0,1]$ olsun. O zaman her $\lambda \in [0,1]$ ve $x \in H$, $||x|| = 1$ için

$$\begin{aligned}&\varphi_{x,A,B}((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) \\ =\ &\langle f(A + t_1\eta(B,A) + \lambda\eta(A + t_2\eta(B,A), A + t_1\eta(B,A)))x, x\rangle \\ \leq\ &(1-\lambda)^s\langle f(A + t_1\eta(B,A))x, x\rangle + \lambda^s\langle f(A + t_2\eta(B,A))x, x\rangle \\ =\ &(1-\lambda)^s\varphi_{x,A,B}(t_1) + \lambda^s\varphi_{x,A,B}(t_2)\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla, $\varphi_{x,A,B}$, $[0,1]$ üzerinde s-konvekstir. Yani Lemma 3.2.3 nin ispatını tamamlamış oluruz.

Aşağıdaki teorem, operatör s-preinveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir genişlemesidir.

Teorem 3.2.4 $S \subseteq B(H)^+_{sa}$, $\eta : S \times S \longrightarrow B(H)^+_{sa}$ dönüşümüyle inveks bir küme ve η, S üzerinde (C) şartını sağlasın. Eğer her $A, B \in S$, $V = A + \eta(B,A)$ ve $s \in (0,1]$ sabiti için $f : I \subseteq \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu, P_{AV} η-yolu üzerinde η ya göre operatör s-preinveks ise, o zaman

$$2^{s-1}f\left(\frac{A+V}{2}\right) \leq \int_0^1 f(A + t\eta(B,A))dt \leq \frac{f(A) + f(B)}{s+1} \tag{3.2.27}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

İspat. $< Ax, x > \in Sp(A) \subset I$ ve $< Vx, x > \in Sp(V) \subset I$ olduğu için $x \in H$, $||x|| = 1$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\langle (A + t\eta(B,A))x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle + t\langle \eta(B,A)x, x\rangle \in I \tag{3.2.28}$$

eşitliğini yazabiliriz. f nin sürekliliği ve (3.2.28) eşitliğinden $\int_0^1 f(A+t\eta(B,A))dt$ operatör değerli integral vardır.

η, (C) şartını sağladığı ve f, her $t \in [0,1]$ için η-ya göre s-preinveks olduğu için

$$\begin{aligned} & f\left(A + \frac{1}{2}\eta(B,A)\right) \\ \leq\ & \frac{1}{2^s} f(A + t\eta(B,A)) + \frac{1}{2^s} f(A + (1-t)\eta(B,A)) \\ \leq\ & \frac{1}{2^s}[(1-t)^s + t^s][f(A) + f(B)] \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

yazabiliriz.

(3.2.29)'un her iki tarafını t ye göre $[0,1]$ üzerinde integral alıp,

$$\int_0^1 f(A + t\eta(B,A))dt = \int_0^1 f(A + (1-t)\eta(B,A))dt$$

eşitliğini göz önüne alırsak, (3.2.27) eşitsizliğini elde etmiş oluruz. Böylece Teorem 3.2.4 in ispatını tamamlamış oluruz.

Remark 3.2.2 Sırasıyla Teorem 3.2.4'te $s = 1$ ve $\eta(A,B) = B - A$ seçersek, biz [9]-daki Teorem 1.7 ve [26]-teki Teorem 1.9 u elde ederiz.

Şimdi Hilbert uzayında özeşlenik operatörlerin s-preinveks konveks fonksiyonlar için Hermit Hadamard tipli eşitsizliğinin iki yanını elde edelim.

Teorem 3.2.5 $f : I \subseteq \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $S \subseteq B(H)^+_{sa}$, $\eta : S \times S \longrightarrow B(H)^+_{sa}$ dönüşümüyle inveks bir küme ve η, S üzerinde (C) şartını sağlasın. Eğer her $A, B \in S$, $V = A + \eta(B,A)$ ve $s \in (0,1]$ sabiti için, f fonksiyonu P_{AV} η-yolu üzerinde η ya göre operatör s-preinveks ise, o zaman her $a < b$, $a, b \in (0,1)$ ve $x \in H$, $||x|| = 1$ için

$$\begin{aligned} & \left|\left\langle \int_0^{\frac{(a+b)}{2}} f(A + u\eta(B,A))du x, x\right\rangle \right. \\ -\ & \left. \frac{1}{b-a}\int_a^b \left\langle \int_0^t f(A + u\eta(B,A))du x, x\right\rangle dt \right| \\ \leq\ & \frac{b-a}{4(s+1)(s+2)}\Bigg[\langle f(A + a\eta(B,A))x, x\rangle \\ +\ & 2(s+1)\left\langle f\left(A + \frac{a+b}{2}\eta(B,A)\right)x, x\right\rangle + \langle f(A + b\eta(B,A))x, x\rangle\Bigg] \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

ve

$$\left\| \int_0^{\frac{(a+b)}{2}} f(A+u\eta(B,A))du - \frac{1}{b-a}\int_a^b \int_0^t f(A+u\eta(B,A))dudt \right\| \tag{3.2.31}$$
$$\leq \frac{b-a}{2(s+1)}\left[\frac{\| f(A+a\eta(B,A)) \| + 2(s+1)\|f(A+\frac{a+b}{2}\eta(B,A))\| + \|f(A+b\eta(B,A))\|}{2(s+2)}\right]$$

eşitsizliklerini yazabiliriz.

İspat. $A, B \in S$ ve $a, b \in (0,1)$, $a < b$ olsun. $x \in H$, $||x|| = 1$ için $\varphi : [a,b] \subseteq [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_0$ fonksiyonunu

$$\varphi(t) := \left\langle \int_0^1 f(A+u\eta(B,A))dux, x \right\rangle$$

şeklinde tanımlayalım.

f nin sürekliliğini, iç çarpımının süreklilik özelliğini ve operatör değerli fonksiyonların integral özelliklerini kullanarak,

$$\left\langle \int_0^1 f(A+u\eta(B,A))dux, x \right\rangle = \int_0^1 \langle f(A+(1-t)\eta(B,A))x, x\rangle dt$$

eşitliğini yazabiliriz.

$f(A+u\eta(B,A)) \geq 0$ olduğundan her $t \in [a,b]$ için $\varphi(t) \geq 0$ dır. Açıkça görüldüğü gibi her $t \in [a,b]$ için,

$$\varphi^{'}(t) = \langle f(A+t\eta(B,A))x, x\rangle \geq 0$$

yazabiliriz. Bu yüzden, $|\varphi^{'}(t)| = \varphi^{'}(t)$.

f, $s \in (0,1]$ sabiti için P_{AV} η-yolu üzerinde η ya göre operatör s-preinveks olduğu için, Lemma 3.2.3 ten $\varphi^{'}$, s-konvekstir.

φ fonksiyonuna [22]-deki Teorem 1.3 uygulayarak

$$\left|\varphi\left(\frac{(a+b)}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)dt\right| \tag{3.2.32}$$
$$\leq \frac{b-a}{4(s+1)(s+2)}\left[\varphi^{'}(a) + 2(s+1)\varphi^{'}\left(\frac{a+b}{2}\right) + \varphi^{'}(b)\right]$$

eşitsizliğini elde ederiz ve böylece (3.2.30) eşitsizliğini elde ederiz. (3.2.30) eşitsizliğini, her $x \in H$, $\|x\| = 1$ için iki yanının supremumunu alırsak (3.2.31) eşitsizliğini elde etmiş oluruz. Böylece Teorem 3.2.5 ın ispatı tamamlanır.

Sonuç 3.2.6 Teorem 3.2.5 ün şartları altında,

$$\begin{aligned} &\left|\left\langle \int_0^{\frac{(a+b)}{2}} f(A+u\eta(B,A))dux, x\right\rangle \right. \\ &- \left.\frac{1}{b-a}\int_a^b \left\langle \int_0^t f(A+u\eta(B,A))dux, x\right\rangle dt\right| \\ &\le \frac{(2^{2-s}+1)(b-a)}{2(s+1)(s+2)}\left[\frac{\langle f(A+a\eta(B,A))x,x\rangle + \langle f(A+b\eta(B,A))x,x\rangle}{2}\right] \end{aligned} \tag{3.2.33}$$

ve

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^{\frac{(a+b)}{2}} f(A+u\eta(B,A))du \right. \\ &- \left.\frac{1}{b-a}\int_a^b \int_0^t f(A+u\eta(B,A))dudt\right\| \\ &\le \frac{(2^{2-s}+1)(b-a)}{2(s+1)(s+2)}\left[\frac{\| f(A+a\eta(B,A) \| + \| f(A+b\eta(B,A))\|}{2}\right] \end{aligned} \tag{3.2.34}$$

yazabiliriz.

İspat. Teorem 3.2.5 ispatı gibi, φ nin ve (3.2.32) in s-konveksliğini kullanarak Sonuç 3.2.6 i ispatlamış oluruz.

Sonuç 3.2.7 Teorem 3.2.5 ün şartları altında, eğer $s = 1$ olarak seçilirse, o zaman

$$\begin{aligned} &\left|\left\langle \int_0^{\frac{(a+b)}{2}} f(A+u\eta(B,A))dux, x\right\rangle \right. \\ &- \left.\frac{1}{b-a}\int_a^b \left\langle \int_0^t f(A+u\eta(B,A))dux, x\right\rangle dt\right| \\ &\le \frac{(b-a)}{4}\left[\frac{\langle f(A+a\eta(B,A))x,x\rangle + 4\langle f(A+\frac{a+b}{2}\eta(B,A))x,x\rangle + \langle f(A+b\eta(B,A))x,x\rangle}{6}\right] \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

ve

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^{\frac{(a+b)}{2}} f(A+u\eta(B,A))du - \frac{1}{b-a}\int_a^b \int_0^t f(A+u\eta(B,A))dudt\right\| \\ &\le \frac{(b-a)}{4}\left[\frac{\| f(A+a\eta(B,A)) \| + 4 \| f(A+\frac{a+b}{2}\eta(B,A)) \| + \| f(A+b\eta(B,A))\|}{6}\right] \end{aligned} \tag{3.2.36}$$

.

yazabiliriz.

Sonuç 3.2.8 Teorem 3.2.5 ün şartları altında, eğer $\eta(B,A) = B - A$ ise, o zaman

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \int_0^{\frac{(a+b)}{2}} f(A+u\eta(B,A))dux, x\right\rangle\right. \qquad (3.2.37)\\
-&\left.\frac{1}{b-a}\int_a^b \left\langle \int_0^t f(A+u\eta(B,A))dux, x\right\rangle dt\right|\\
\leq&\ \frac{(b-a)}{4(s+1)(s+2)}\Big[\langle f((1-a)A+aB)x,x\rangle\\
+&\ 2(s+1)\left\langle f\left(\frac{2-a-b}{2}A+\frac{a+b}{2}B\right)x,x\right\rangle + \langle f((1-b)A+bB)x,x\rangle\Big]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^{\frac{(a+b)}{2}} f((1-u)A+uB)du - \frac{1}{b-a}\int_a^b\int_0^t f((1-u)A+uB))dudt\right\| \qquad (3.2.38)\\
\leq&\ \frac{(b-a)}{2(s+1)}\left[\frac{\|f((1-a)A+aB)\| + 2(s+1)\|f(\frac{2-a-b}{2}A+\frac{a+b}{2}B)\| + \|f((1-b)A+bB)\|}{2(s+2)}\right]
\end{aligned}$$

yazabiliriz.

Remark 3.2.3 Sonuç 3.2.6, Sonuç 3.2.7, Sonuç 3.2.8, sırasıyla [22] deki Teorem 5 ve [32] deki Teorem 2.2 nin genelleştirmesidir.

Teorem 3.2.6 $f : I \subseteq \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}_0$ sürekli fonksiyon, $S \subseteq B(H)^+_{sa}$, $\eta : S\times S \longrightarrow B(H)^+_{sa}$ dönüşümüne göre inveks bir küme ve η, S üzerinde (C) şartını sağlasın. Eğer her $A, B \in S$, $V = A+\eta(B,A)$ ve $s \in (0,1]$ sabiti için, f fonksiyonu P_{AV} η-yolu üzerinde η ya göre operatör s-preinveks ise, o zaman her $a < b$, $a, b \in (0,1)$ ve $x \in H$, $||x|| = 1$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2}\left\langle \int_0^a f(A+u\eta(B,A))dux, x\right\rangle\right. \qquad (3.2.39)\\
+&\ \frac{1}{2}\left\langle \int_0^b f(A+u\eta(B,A))dux, x\right\rangle\\
-&\left.\frac{1}{b-a}\int_a^b \left\langle \int_0^t f(A+u\eta(B,A))dux, x\right\rangle dt\right|\\
\leq&\ \frac{(b-a)(2^{s+1}+1)}{2^s(s+1)(s+2)}\left[\frac{\langle f(A+a\eta(B,A))x,x\rangle + \langle f(A+b\eta(B,A))x,x\rangle}{2}\right]
\end{aligned}$$

ve

$$\left\| \frac{1}{2}\int_0^a f(A+u\eta(B,A))du + \frac{1}{2}\int_0^b f(A+u\eta(B,A))du \right. \tag{3.2.40}$$
$$- \left. \frac{1}{b-a}\int_a^b \int_0^t f(A+u\eta(B,A))dudt \right\|$$
$$\leq \frac{(b-a)(2^{s+1}+1)}{2^s(s+1)(s+2)}\left[\frac{\| f(A+a\eta(B,A)) \| + \|f(A+b\eta(B,A))\|}{2}\right]$$

eşitsizliklerini yazabiliriz.

İspat. [29]-de Teorem 1.4 deki (1.5) eşitsizliği ile Teorem 3.2.5 nin ispatına benzer bir yaklaşımla ispatı tamamlanır.

Sonuç 3.2.9 Teorem 3.2.6 ün şartları altında, eğer $s = 1$, o zaman

$$\left| \frac{1}{2}\left\langle \int_0^a f(A+u\eta(B,A))dux, x \right\rangle \right. \tag{3.2.41}$$
$$+ \frac{1}{2}\left\langle \int_0^b f(A+u\eta(B,A))dux, x \right\rangle$$
$$- \left. \frac{1}{b-a}\int_a^b \left\langle \int_0^t f(A+u\eta(B,A))dux, x \right\rangle dt \right|$$
$$\leq \frac{5(b-a)}{12}\left[\frac{\langle f(A+a\eta(B,A))x, x\rangle + \langle f(A+b\eta(B,A))x, x\rangle}{2}\right]$$

ve

$$\left\| \frac{1}{2}\int_0^a f(A+u\eta(B,A))du + \frac{1}{2}\int_0^b f(A+u\eta(B,A))du \right. \tag{3.2.42}$$
$$- \left. \frac{1}{b-a}\int_a^b \int_0^t f(A+u\eta(B,A))dudt \right\|$$
$$\leq \frac{5(b-a)}{12}\left[\frac{\|f(A+a\eta(B,A))\| + \|f(A+b\eta(B,A))\|}{2}\right]$$

eşitsizliklerini yazabiliriz.

Sonuç 3.2.10 Teorem 3.2.6 ün şartları altında, eğer $\eta(B,A) = B - A$ ise, o zaman

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2}\left\langle \int_0^a f((1-u)A+uB)dux, x\right\rangle\right. \\
+&\ \frac{1}{2}\left\langle \int_0^b f((1-u)A+uB)dux, x\right\rangle \\
-&\ \left.\frac{1}{b-a}\int_a^b \left\langle \int_0^t f((1-u)A+uB)dux, x\right\rangle dt\right| \\
\le&\ \frac{(b-a)(2^{s+1}+1)}{2^s(s+1)(s+2)}\left[\frac{\langle f((1-a)A+aB)x,x\rangle + \langle f((1-b)A+bB)x,x\rangle}{2}\right]
\end{aligned} \tag{3.2.43}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{2}\int_0^a f((1-u)A+uB)du + \frac{1}{2}\int_0^b f((1-u)A+uB)du\right. \\
-&\ \left.\frac{1}{b-a}\int_a^b \int_0^t f((1-u)A+uB)dudt\right\| \\
\le&\ \frac{(b-a)(2^{s+1}+1)}{2^s(s+1)(s+2)}\left[\frac{\|f((1-a)A+aB)x,x\| + \|f((1-b)A+bB)x,x\|}{2}\right]
\end{aligned} \tag{3.2.44}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz.

Remark 3.2.4 Sonuç 3.2.9 ve Sonuç 3.2.10 sırasıyla [29]-de Teorem 1.4 ün geneleştirmesidir.

$s_1, s_2 \in (0,1]$ sabitleri için, $f : I \subseteq \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ operatör s_1-preinveks bir fonksiyon ve $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, operatör s_2-preinveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $A, B \in B(H)^+$ operatörleri için

$$\begin{aligned}
M(A,B)(x) &= \langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle + \langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle,\ x\in H, \\
N(A,B)(x) &= \langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle + \langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle,\ x\in H
\end{aligned} \tag{3.2.45}$$

eşitlikleriyle, H üzerinde $M(A,B)$ ve $N(A,B)$ reel foksiyonları tanımlayabiliriz. Beta fonksiyonu $x > 0$, $y > 0$ için

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{3.2.46}$$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıdaki iki teorem, sırasıyla [26]-teki Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 nin genelleştirilmesidir.

Teorem 3.2.7 $S \subseteq B(H)^+_{sa}$, $\eta : S \times S \longrightarrow B(H)^+_{sa}$ dönüşümüyle inveks bir küme ve η, S üzerinde (C) şartını sağlasın. Eğer her $A, B \in S$, $V = A + \eta(B, A)$ ve $s \in (0, 1]$ sabiti için, $f, g : I \subseteq \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonları P_{AV} η-yolu üzerinde sırasıyla operatör s_1 ve s_2 preinveks olsun. O zaman her $x \in H$, $||x|| = 1$ için

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \langle f(A + t\eta(B, A))x, x\rangle \langle g(A + t\eta(B, A))x, x\rangle dt \\ \leq\ & \frac{1}{s_1 + s_2 + 1}\Big[M(A, B)(x) + s_1\beta(s_1, s_2 + 1)N(A, B)(x)\Big] \end{aligned} \tag{3.2.47}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buradaki $M(A, B)$ ve $N(A, B)$ (3.2.45) te ve Beta fonksiyonu (3.2.46) da tanımladık.

İspat. $< Ax, x > \in Sp(A) \subseteq I$ ve $< Vx, x > \in Sp(V) \subseteq I$ olduğu için $x \in H$, $||x|| = 1$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$\langle (A + t\eta(B, A))x, x\rangle = \langle (Ax, x\rangle + t\langle \eta(B, A)x, x\rangle \in I \tag{3.2.48}$$

eşitliğini yazabiliriz.

f, g nin sürekli ve (3.2.48) eşitliğinden $\int_0^1 f(A + t\eta(B, A))dt$, $\int_0^1 g(A + t\eta(B, A))dt$ ve $\int_0^1 (fg)(A + t\eta(B, A))dt$ operatör değerli integral vardır.

$s_1, s_2 \in (0, 1]$ sabitleri için $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, operatör s_1-preinveks bir fonksiyon ve $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, operatör s_2-preinveks bir fonksiyon olduğundan her $t \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} &\langle f(A + t\eta(B, A)x, x\rangle \langle g(A + t\eta(B, A))x, x\rangle dt \\ \leq\ & (1 - t)^{s_1+s_2}\langle f(A)x, x\rangle \langle g(A)x, x\rangle + (1 - t)^{s_1} t^{s_2}\langle f(A)x, x\rangle \langle g(B)x, x\rangle \\ +\ & t^{s_1}(1 - t)^{s_2}\langle f(B)x, x\rangle \langle g(A)x, x\rangle + t^{s_1+s_2}\langle f(B)x, x\rangle \langle g(B)x, x\rangle \end{aligned} \tag{3.2.49}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (3.2.49)-u t-ye göre $[0, 1]$ üzerinde integralini alırsak, istenilen (3.2.47)-in ispatı tamamlanır.

Sonuç 3.2.11 Teorem 3.2.7 ün şartları altında, eğer $s_1 = s_2 = s$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \langle f(A + t\eta(B, A))x, x\rangle \langle g(A + t\eta(B, A))x, x\rangle dt \\ \leq\ & \frac{1}{2s + 1}\Big[M(A, B)(x) + s\beta(s, s + 1)N(A, B)(x)\Big] \end{aligned} \tag{3.2.50}$$

ve eğer $s_1 = s_2 = 1$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \langle f(A+t\eta(B,A))x,x\rangle\langle g(A+t\eta(B,A))x,x\rangle dt \\ \leq \quad & \frac{2M(A,B)(x)+N(A,B)(x)}{6} \end{aligned} \tag{3.2.51}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz.

Sonuç 3.2.12 Teorem 3.2.7 ün şartları altında, eğer $\eta(B,A) = B - A$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \langle f((1-t)A+tB)x,x\rangle\langle g((1-t)A+tB)x,x\rangle dt \\ \leq \quad & \frac{1}{s_1+s_2+1}\Big[M(A,B)(x)+s_1\beta(s_1,s_2+1)N(A,B)(x)\Big] \end{aligned} \tag{3.2.52}$$

yazabiliriz.

Teorem 3.2.8 $S \subseteq B(H)^+_{sa}$, $\eta : S \times S \longrightarrow B(H)^+_{sa}$ dönüşümüyle inveks bir küme ve η, S üzerinde (C) şartını sağlasın. Eğer her $A, B \in S$, $V = A + \eta(B,A)$ ve $s \in (0,1]$ sabiti için, $f, g : I \subseteq \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonları P_{AV} η-yolu üzerinde sırasıyla operatör s_1 ve s_2 preinveks olsun. O zaman her $x \in H$, $||x|| = 1$ için

$$\begin{aligned} & 2^{s_1+s_2+1}\left\langle f\left(\frac{A+V}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+V}{2}\right)x,x\right\rangle \\ \leq \quad & \int_0^1 \langle f(A+t\eta(B,A))x,x\rangle\langle g(A+t\eta(B,A))x,x\rangle dt \\ \leq \quad & \frac{1}{s_1+s_2+1}\Big[M(A,B)(x)+s_1\beta(s_1,s_2+1)N(A,B)(x)\Big] \end{aligned} \tag{3.2.53}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buradaki $M(A,B)$ ve $N(A,B)$ (3.2.45) ve Beta fonksiyonu (3.2.46) de tanımladık.

İspat. $s_1, s_2 \in (0,1]$ sabitleri için $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, operatör s_1-preinveks bir fonksiyon ve $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, operatör s_2-preinveks bir fonksiyon olduğu için, her $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} & \left\langle f\left(\frac{A+V}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+V}{2}\right)x,x\right\rangle \qquad (3.2.54)\\ \leq\; & \frac{1}{2^{s_1}}\langle[f(A+t\eta(B,A))+f(A+(1-t)\eta(B,A))]x,x\rangle \\ \times\; & \frac{1}{2^{s_2}}\langle[g(A+t\eta(B,A))+g(A+(1-t)\eta(B,A))]x,x\rangle \\ \leq\; & \frac{1}{2^{s_1+s_2}}[\langle f(A+t\eta(B,A))x,x\rangle\langle g(A+\eta(B,A))x,x\rangle \\ +\; & \langle f(A+(1-t)\eta(B,A))x,x\rangle\langle g(A+(1-t)\eta(B,A))x,x\rangle] \\ +\; & \frac{1}{2^{s_1+s_2}}\{[t^{s_1+s_2}+(1-t)^{s_1+s_2}][\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle+\langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle] \\ +\; & [t^{s_1}(1-t)^{s_2}+t^{s_2}(1-t)^{s_1}][\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle+\langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle]\} \end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. 3.2.54-ü t-ye $[0,1]$ üzerinde integralini alır ve aşağıdaki eşitliği kullanırsak istenilen (3.2.53) eşitsizliğini elde etmiş oluruz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \langle f(A+t\eta(B,A))x,x\rangle\langle g(A+t\eta(B,A))x,x\rangle dt \\ =\; & \int_0^1 \langle f(A+(1-t)\eta(B,A))x,x\rangle\langle g(A+(1-t)\eta(B,A))x,x\rangle dt \end{aligned}$$

Sonuç 3.2.13 Teorem 3.2.8 ün şartları altında, eğer $s_1 = s_2 = s$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} & 2^{2s-1}\left\langle f\left(\frac{A+V}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+V}{2}\right)x,x\right\rangle \qquad (3.2.55)\\ \leq\; & \int_0^1 \langle f(A+t\eta(B,A))x,x\rangle\langle g(A+t\eta(B,A))x,x\rangle dt \\ +\; & \frac{1}{s+1}[N(A,B)(x)+s\beta(s,s+1)N(A,B)(x)] \end{aligned}$$

ve eğer $s_1 = s_2 = 1$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} & 2\left\langle f\left(\frac{A+V}{2}\right)x,x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+V}{2}\right)x,x\right\rangle \qquad (3.2.56)\\ \leq\; & \int_0^1 \langle f(A+t\eta(B,A))x,x\rangle\langle g(A+t\eta(B,A))x,x\rangle dt \\ +\; & \frac{2M(A,B)(x)+N(A,B)(x)}{6} \end{aligned}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz.

Sonuç 3.2.14 Teorem 3.2.8 ün şartları altında, eğer $\eta(B, A) = B - A$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} & 2^{s_1+s_2-1}\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle \\ & \int_0^1 \langle f((1-t)A + t(B, A))x, x\rangle\langle g((1-t)A + t(B, A))x, x\rangle dt \\ \leq\ & \frac{1}{s_1+s_2+1}\Big[M(A, B)(x) + s_1\beta(s_1, s_2+1)N(A, B)(x)\Big] \end{aligned} \tag{3.2.57}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Sonuç 3.2.15 Teorem 3.2.8 ün şartları altında, eğer $\eta(B, A) = B - A$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} & 2^{s_1+s_2-1}\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle \\ \leq\ & \int_0^1 \langle f((1-t)A + tB)x, x\rangle\langle g((1-t)A + tB)x, x\rangle dt \\ \leq\ & \frac{1}{s_1+s_2+1}\Big[M(A, B)(x) + s_1\beta(s_1, s_2+1)N(A, B)(x)\Big] \end{aligned} \tag{3.2.58}$$

eşitsizliği yazabiliriz.

Sonuç 3.2.16 Teorem 3.2.7 ve Teorem 3.2.8 şartı altında, biz

$$\begin{aligned} & 2^{s_1+s_2-1}\left\langle f\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle\left\langle g\left(\frac{A+B}{2}\right)x, x\right\rangle \\ -\ & \frac{1}{s_1+s_2+1}\Big[M(A, B)(x) + s_1\beta(s_1, s_2+1)N(A, B)(x)\Big] \\ -\ & \int_0^1 \langle f((1-t)A + tB)x, x\rangle\langle g((1-t)A + tB)x, x\rangle dt \\ \leq\ & \frac{1}{s_1+s_2+1}\Big[M(A, B)(x) + s_1\beta(s_1, s_2+1)N(A, B)(x)\Big] \end{aligned} \tag{3.2.59}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışması literatürde var olan operatör preinveks [9], operatör α-preinveks [11] ve operatör s-preinveks [12] bilimsel çalışmalarının ayrıntılı bir şekilde incelenip yazılmasıyla meydana gelmiştir. Bu çalışmalarda elde edilen yeni tanım, lemma, teorem ve eşitsizlikler ışığı altında Hilbert uzayında sınırlı özeşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için operatör preinveks sınıfı alanında çalışmak isteyen bilim insanlarına Türkçe bir kaynak olacağını düşünürüz.

KAYNAKLAR

[1] Elster K. H., Neshe R. 1980 *Optimality conditions fo some non-convex problems*, Springer-Verlog, New York,

[2] Hayaski M., Komiya H., 1980 *Perfect duality for convexlike programs*, J. Optim. Theory Appl. 38: 179-189.

[3] Hanson M. A. , 1981 *On sufficency of the Kuhn-Tucker conditions*, J. Math. Anal. Appl., 80: 545-550.

[4] Craven B. D., 1981 *Invex fonctions and constrained local minima*, Bull. Austral. Math. Soc. 24: 357-366.

[5] Craven B. D., Glover B. M. 1985 *Invex fonctions and duality*, J. Austral Math. Soc. Ser. A. 39: 1-20.

[6] Ben-Israel A., Mond B., 1986 *What is invexity?*, J. Austral Math. Soc. Ser. B. 28: 1-29.

[7] Martin D. H., 1985 *The essence of invexity*, J.Optim. Theory Appl. 47: 65- 76.

[8] Hanson M. A., Mond B. 1987 *Convex Transformable Probamming Problems and Invexity*, J. Inf. Opt. Sci. 8: 201- 207.

[9] Ghazanfari A. G. ,Shakoori M. ,Barani A. ,Dragomir S. S., *Hermite-Hadamard type inequality for operator preinvex functions*, math. FA, 4(2013); Available online at http://arXiv:1306.0730vl.

[10] Wang S. H., 2017 *New integral inequalities of Hermite-Hadamard type for operator m-convex and* (α, m)*-convex functions*, J. Comput.Anal. Appl., , in press.

[11] Wang S. H. and Liu X. M.,2017 *Hermite-Hadamard type inequalities for operator* α*-preinvex functions*, J. Ana. Num. Theor. 5, No. 1, 13-17

[12] Wang S. H. and Liu X. M.,2015 *Hermite-Hadamard type inequalities for operator s-preinvex functions*, J. Nonlinear Sci. Appl., 8, 1070-1081.

Hermite-Hadamard type inequalities for operator s-preinvex functions, J. Nonlinear Sci. Appl., 8, 1070-1081.

Hermite-Hadamard type inequalities for operator s-preinvex functions, J. Nonlinear Sci. Appl., 8, 1070-1081.

[13] Antczak T. , 2005 *Mean value in invexity analysis*, Nonlinear Anal., 60: 1473-1484.

[14] Barani A., Ghazanfari A.G. , Dragomir S.S., 2012 *Hermite-Hadamard inequality for functions whose derivatives absolute values are preinvex*, J. Inequal. Appl. Vol: Article ID 247.

[15] Dragomir S.S. , and Agarwal R.P., 1998 *Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezodial formula*, Appl. Math. Lett. 11(5), 91-15.

[16] Dragomir S. S., 2002 *An inequality improving the first Hermite Hadamard inequality for convex functions defined on linear spaces and applcations for semi-inner products*, J. Inequal. Pure Appl. Math., 3: No:2, Article 31.

[17] Dragomir S. S. , 2002 *An inequality improving the second Hermite Hadamard inequality for convex functions defined on linear spaces and applcations for semi-inner products*, J. Inequal. Pure Appl. Math., 3: No:3, Article 35.

[18] Dragomir S. S., 2011 *the Hermite Hadamard type inequalities for operator convex functions*, Appl. Math. Comput. 218(3): 766-772.

[19] Furuta T. , Mićić Hot J., Pečarić J. , Seo Y., Mond-Pečarić, 2015 *Method in Operator Inequalities*, Monograhs in Inequalities, Element, Zagreb.

[20] Mohan S. R., Neogy S. K., 1995 On invex sets and preinvex function, J. Math. Anal. Appl., 189: 901-908; Available online at http://dx.doi.org/10.1006/jmaa. 1995-1057.

[21] Yang X. M., Li D. 2001 *On properties of preinvex functions*, J. Math. Anal. Appl., 256: 229-241

[22] Alomori M. W., Darus M., Kirmaci U. S., 2011 *Some inequalities of Hermite-Hadamard type for s-convex functions*, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed., 31, 1643-1652.

[23] Dragomir S. S., Fitzpatrick S. , 1999 *The Hadamard's inequality for s-convex fuctions in the second sense*, Demonstratio Math., 32: 687-696.

[24] Dragomir S. S., 2002 *An inequality improving the first Hermite Hadamard inequality for convex functions defined on linear spaces and applcations for semi-inner products*, J. Inequal. Pure Appl. Math., 3: 8 pages.

[25] Dragomir S. S., 2002 *An inequality improving the second Hermite Hadamard inequality for convex functions defined on linear spaces and applcations for semi-inner products*, J. Inequal. Pure Appl. Math., 3: 8 pages.

[26] Ghazanfari A. G., 2014 *The Hermite Hadamard's type inequality for operator s-convex fuctions in the second sense*, J. Adv. Res. Pure Math., 6: 52-61.

[27] Hudzik H., Maligranda L., 1994 *Some remaks on s-convex fuctions*, Anequtiones Math., 48: 100-111.

[28] E. Kikianty, 2010 *Hermite Hadamard inequality in the geometry of Banach spaces*, Victoria University.

[29] Kirmacı U. S, Bakula M. K., Özdemir M. E., Pečarić J., Seo Y. , Mond-Pečarić, 2007 *Hadamard's type inequality for s-convex fuctions* , Appl. Math. Comput., 193: 26-35.

[30] Mohan S. R., Neogy S. K. , 1995 *On invex sets and preinvex function*, J. Math. Anal. Appl., 89: 901-908.

[31] Moslehian M. S., Najafi H., 2011 *Around operator monotone functions*, Integr. Equ. Oper. Theory., 71: 575-582.

[32] Sarıkaya M. Z., Alp N., Bozkurt H., 2013 *On Hermite-Hadamard type integral inequality inequalities for preinvex and loq-preinvex functions*, Contemporaray Anal. Appl. Math., 1: 237-252.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	DURMUŞ AYDIN
Doğum Yeri	:	Dereli, Giresun
Doğum Tarihi	:	13.05.1987
Medeni Hali	:	Bekar
Bildiği Yabancı Dil	:	İngilizce
İletişim Bilgileri	:	Gemiler Çekeği Mah. Tozlu Sok. No:15 D:2 Merkez Giresun daydın_87@hotmail.com
Lisans	:	KTÜ Fen-Ede. Fak. Matematik Bölümü, 2008
Yüksek Lisans	:	OMÜ OFMA Matematik Eğitimi, 2010
Çalıştığı Yer	:	Espiye Çok Programlı Lisesi, 2010 – 2013,
		Yağlıdere Anadolu İmam Hatip Lisesi, 2013 – 2017,
		Giresun Bilim ve Sanat Merkezi, 2017–