T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TANJANT DEMET İÇERİSİNDE YAPILAR VE BUNLARA UYGULANAN KOVARYANT TÜREVLER

SELİN ALTI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2018

T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TANJANT DEMET İÇERİSİNDE YAPILAR VE BUNLARA UYGULANAN KOVARYANT TÜREVLER

SELİN ALTI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2018

TEZ ONAY

Selin ALTI tarafından hazırlanan "**TANJANT DEMET İÇERSİNDE YAPILAR VE BUNLARA UYGULANAN KOVARYANT TÜREVLER**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 04.05.2018 tarihinde yapılmış ve jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT	....
İkinci Danışman Dr. Öğr. Üyesi Haşim ÇAYIR Giresun Üniversitesi	....
Üye Doç. Dr. Selahattin MADEN Ordu Üniversitesi	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Özcan BEKTAŞ Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi	....

20/06/2018 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 21/06/2018 tarih ve 2018.../306. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin düzenlenmesinde bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden faydalanılması durumunda bilimsel normlara uygun şekilde atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir bölümünün bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

S. Altı

SELİN ALTI

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

TANJANT DEMET İÇERİSİNDE YAPILAR VE BUNLARA UYGULANAN KOVARYANT TÜREVLER

SELİN ALTI

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ 32 SAYFA

TEZ DANIŞMANI: Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT

İKİNCİ TEZ DANIŞMANI: Dr. Öğr. Üyesi Haşim ÇAYIR

Bu çalışma altı bölüm halinde düzenlenmiştir. Giriş bölümünde çalışmanın amacı ve konunun ele alınma nedeni tartışıldı. Önceki çalışmalar bölümünde tanjant demet üzerinde yapılan çalışmalara ve genel bilgilere yer verildi. Materyal ve metod bölümünde tanjant demette dikey (vertikal) ve tam (komple) lift ile ilgili temel kavramlar anlatılmıştır.

Bulgular bölümü çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde almost kontakt ve almost parakontakt yapılar tanımlanarak bunların $T(M)$ tanjant demeti üzerindeki X^C ve X^V ye göre kovaryant türevleri incelendi. Ek olarak, elde edilen bu kovaryant türevler almost kontakt ve almost parakontakt yapıda bazı özel değerler için hesaplandı.

Anahtar Kelimeler: Almost Kontakt Yapılar, Almost Parakontant Yapılar, Dikey Lift, Kovaryant Türev, Tam Lift, Tanjant demeti

ABSTRACT

STRUCTURES AND THE COVARIENT DERIVATIVES APPLIED THEM ON TANGENT BUNDLE

SELİN ALTI

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

TYPE OF THE THESIS, 32 NUMBER OF PAGE

SUPERVISOR: Assist. Prof. Dr. Süleyman ŞENYURT

CO-SUPERVISOR: Assist. Prof. Dr. Haşim ÇAYIR

This work is arranged in six different parts. In the introductory part, the purpose of this work and the reason why theme was dealt with are discussed. In the previous works parts, general information about tanjant bundle and works done on this field appears.

In the materials and method part, basic concepts about vertical and complete lifts in tanjant bundle are explained. The findings parts forms the original setion of this work. In this part, almost contact and almost paracontact structures are identified and their covarient derivatives according to X^C and X^V on tangent bundle $T(M)$. In addition, these obtained covarient derivatives are examined for some special rates in almost contact and almost paracontact structures.

Keywords: Almost Contact Structure, Almost Paracacontact Sturcture, Complete Lifts, Covarient Derivative, Tangent Bundle, Vertical Lifts

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalışılması ve hazırlanması aşamalarında desteklerini ve yardımlarını esirgemeyen; disiplin ve bilgilerini örnek aldığım danışman hocalarım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT' a ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Haşim ÇAYIR' a sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca tüm eğitim öğretim boyunca her zaman yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

C^k	:	k Sınıfından Diferensiyellenebilen Cümleler Kümesi
F	:	$(1,1)$ Tipli Tensör Alanı
J	:	Almost Kontakt Yapı
$\tilde{J}$	:	Almost Parakontakt Yapı
L_X	:	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
M	:	n Boyutlu Manifold
X^C	:	Vektör Alanının Komple Lifti
X^V	:	Vektör Alanının Vertikal Lifti
$T(M)$	:	Tanjant Demet
$[X,Y]$	:	X ve Y Vektör Alanlarının Lie Parantezi
ξ	:	Vektör Alanı
X^V	:	Vektör Alanının Vertikal Lifti
X^C	:	Vektör Alanının Komple Lifti
$T(M)$	:	Tanjant Demet
$[X,Y]$	:	X ve Y Vektör Alanlarının Lie Parantezi
L_X	:	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
ω	:	$1-$Form
ω^V	:	$1-$Formun Vertikal Lifti
ω^C	:	$1-$Formun Komple Lifti
η	:	$1-$Form
φ	:	$(1,1)$ Tipli Tensör Alanı
F	:	$(1,1)$ Tipli Tensör Alanı

1.GİRİŞ

17. yüzyılda Descartes ve Fermat tarafından keşfedilen koordinat metodu ile ortaya çıkan ve önemi gittikçe artan diferensiyel geometri, diferensiyel ve integral hesabını kullanarak çözüm elde etmeye çalışan matematiğin bir alt bilim dalıdır. Düzlem, uzay eğrileri ve yüzey teorisi 18. ve 19. yüzyıllarda bu alanların temellerini oluşturmuştur. 19. yüzyılın sonlarında ise diferensiyel geometri daha çok diferensiyellenebilir manifoldlar ve bu manifoldlar üzerine inşa edilen geometrik yapılarla ilgilenilmiştir.

Diferensiyel geometride önemli bir yere sahip olan tensör kavramı fizikçi Woldemar Veoight tarafından ilk defa 1898 yılında çalışılmıştır.

Diferensiyel geometride lift kavramı "genişleme" anlamında kullanılmıştır. Geometrik objelerin tensör demetlere genişlemeleri diferensiyel geometrinin en önemli alana sahip problemlerinden biridir. Özel bir tensör demet olan tanjant demet ilk kez 1958 yılında Sasaki tarafından çalışılmıştır. Daha sonra 1962 yılında Dombrowski tarafından tanjant demetteki geometrilerin genişlemesi sağlanmış ve ilk çalışma 1965 yılında yapılmıştır." Tanjant Demette Tensör Alanının ve Konneksiyonların Tam (complete) ve Dikey (vertical) Liftleri " adlıçalışma Kobayashi ve Yano tarafından yapılmıştır.

Hazırlanan bu tez çalışmasında tanjant demette tam ve dikey liftler yardımıyla ifade edilen almost kontakt ve almost parakontakt yapılar ile bunlara uygulanan kovaryant türevler üzerinde durulmuş ve bu doğrultuda bazı genel bağıntılar elde edilmiştir. Daha sonra bu genel bağıntılar için almost kontakt ve almost parakontakt yapının özelliği kullanılarak bu bağıntıların özel halleri elde edilmiş ve sıkça bahsedilecek olan alan kavramlarının tanımları da yapılmıştır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Tanjant demet ve üzerindeki yapılarla ilgili yapılmış olan birçok çalışma mevcuttur:

Sasaki, (1958), M diferensiyellenebilir manifoldunun $T(M)$ tanjant demetinde Riemannian metriği yardımıyla yeni bir metrik elde etmiştir.

Kandatu, (1966), lineer olmayan bir manifoldda tanjant demetini tanımlamıştır.

Yano ve Ishıhara, (1967), tanjant demette konneksiyonların ve tensör alanlarının yatay liftleri ile ilgili teoriyi geliştirmişlerdir.

Yano ve Ishihara, (1973), tanjant ve kotanjant demette dikey, tam, yatay ve diagonal lifftlerle ilgili öenmli sonuçlar elde etmiştir.

Talantove ve Shirokov, (1975), tanjant demetile dual cebir üzerine kurulan holomof manifoldlar arasında bir bağıntı elde etmiştir. Bu bağıntı ile birlikte Synectic Lift kavramı incelenmeye başlanmıştır.

Vishnevsky, (1983), tanjant demet üzerinde incelenen yapıları yarım tanjant demet üzerinde incelemiştir.

Çayır, (2016), $T(M)$ tanjant demeti üzerindeki X^C ve X^V ye uygulanan Tachibana ve Vishnevsky operatörlerini incelemiştir.

Çayır ve Köseoğlu, (2016), tanjant demet içerisindeki almost kontakt ve almost parakontakt yapılar ile bunlara uygulanan Lie türevlerini incelemiştir.

2.1. Genel Bilgiler

Tanım 2.1.1. X bir Hausdorff uzayı olmak üzere $U \subset X$ açık kümesinden $V \subset R^n$ kümesine tanımlı

$$\varphi : U \to V$$

homeomorfizm dönüşümüne X de n boyutlu koordinat sistemi ya da harita adı verilir. U kümesine de φ haritasının koordinat komşuluğu ya da koordinat bölgesi adı verilir ve (U,φ) şeklinde ifade edilir. $x \in U$ olması durumunda ise

$$\varphi(x) = (x^1, x^2, ..., x^n) \in R^n$$

olur. $x^1,..., x^n$ reel sayı değerlerine φ haritasında x noktasının koordinatları adı verilir.

Tanım 2.1.2. X Hausdorff uzayında n - boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgelerinin bu uzayı örtmesi durumunda, yani

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha , \quad (A - \text{indisler kümesi})$$

olması durumunda X uzayına $n-$boyutlu topolojik manifold yada yalnızca $n-$boyutlu manifold adı verilir.

Tanım 2.1.3. X bir Hausdorff uzayı ve k da $0 \le k$ şartını sağlayan bir tam sayı değeri olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \subset X\}$ lokal koordinatlar ailesine X üzerinde C^k sınıfından $n-$boyutlu atlas denir

(Yano ve Ishihara, 1973).

1. Lokal haritaların U_α bölgesi X 'i örter, yani X, $n-$boyutlu topolojik manifolddur.

2. Keyfi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \ne \phi$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu koşula bazen $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ ve (U_β,φ_β) haritalarının C^k uzlaşması koşulu da denir.

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü $\left(u_\beta^i = u_\beta^i\left(u_\alpha^j\right), i, j = 1, \ldots, n\right)$ denir. Burada u_β^i, $\left(U_\beta, \varphi_\beta\right)$ haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatları, u_α^j ise $\left(U_\alpha, \varphi_\alpha\right)$ haritasındaki x noktasının koordinatlarını belirtmektedir.

$U_\alpha \cap U_\beta = \phi$ ise bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tanımlanamaz. Ancak, bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2. koşul, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından difeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jakobian matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir.

Tanım 2.1.4. Sayılabilir bir baza sahip olan Hausdorff uzayı M olsun. M kümesi içerisinde $n-$ boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmişse M uzayına $n-$ boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold yada düzgün manifold adı verilir ve M_n şeklinde ifade edilir (Çayır, 2013).

2.2. Vektör Alanı

M_n diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $\forall p \in M_n$ noktasını bir ve yalnız bir $X_p \in T_p$ vektörüne karşılık getiren $X : p \to X_p$ dönüşümüne M_n üzerinde vektör alanı denir. Burada T_p, $p \in M_n$ noktasındaki vektör uzayıdır. Eğer f, M_n üzerinde tanımlanan bir fonksiyon ise Xf de M_n üzerinde $(Xf)(p) = X_p f$ biçiminde tanımlanan bir fonksiyondur. Eğer, her bir diferensiyellenebilen f fonksiyonu için Xf de diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise X vektör alanına diferensiyellenebilir vektör alanı denir. M_n üzerindeki (U, φ) lokal koordinat sisteminde X vektör alanını

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \partial_i$$

biçiminde gösterebiliriz (Salimov ve Çayır,2013). Burada $X^i = X^i(x^i)$ ler U koordinat komşuluğundaki x^i lokal koordinatlarının fonksiyonlarıdır. X^i lere X vektör alanının ∂_i çatısındaki koordinatları denir. X vektör alanının diferensiyellenebilmesi için gerek ve yeter koşul $X^i = X^i(x^i)$ lerin diferensiyellenebilir olmasıdır.

M_n üzerindeki (U,φ) koordinat sisteminde bir başka $Y = Y^i\partial_i$ vektör alanı ve $f \in \Im_0^0(M_n)$ fonksiyonu için

$$X(f) = X^i\partial_i f, \quad Y(f) = Y^i\partial_i f$$
$$XY(f) = X(Y^i\partial_i f) = X^i(\partial_i Y^j\delta_j f + Y^j\partial_{ji}^2 f)$$
$$YX(f) = Y(X^i\partial_i f) = Y^j(\partial_j X^i\partial_i f + X^i\partial_{ij}^2 f)$$

bulunur. Buradan da

$$XY(f) - YX(f) = (X^i\partial_i Y^j - Y^i\partial_i X^j)\partial_j f$$

yazılır. Böylece

$$XY - YX = [X,Y]$$

şeklinde ifade edilen yeni bir vektör alanı tanımlanmış olur. Elde edilen vektör alanını ∂_i doğal çatısı türünden gösterimi ise

$$[X,Y] = XY - YX = (X^i\partial_i Y^j - Y^i\partial_i X^j)\partial_j$$

(2.1)

biçiminde olur. ∂_i'nin $[X,Y]$ katsayısına vektör alanının ∂_i çatısındaki koordinatları denir.

Tanım 2.2.1. (2.1) eşitliği olarak belirtilen $[X,Y]$ vektör alanına X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi denir.

Özel olarak $\partial_i = \delta_i^k\partial_k$, $\partial_j = \delta_j^k\partial_k$ vektör alanları alınırsa, (2.1) formülünden

$$[\partial_i, \partial_j] = 0$$

sonucu elde edilir. (2.1) eşitliğinin yardımıyla Lie parantezinin aşağıdaki özellikleri sağladığı gösterilebilir (Çayır, 2013) :

1. $[X,Y] = -[Y,X]$,
2. $[X, fY] = X(f)Y + f[X,Y]$,

3. $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0,$

4. $[X,Y+Z]=[X,Y]+[X,Z]$

$\Im_0^1(M_n)$ ile M_n üzerindeki tüm diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesini gösterelim. Bu kümede toplama ve $\Im_0^0(M_n)$'nin elemanları ile çarpma işlemlerini

1. $(X+Y)(f)=X(f)+Y(f),\ \ \forall X,Y\in\Im_0^1(M_n),\ \forall f\in\Im_0^0(M_n)$
2. $(gX)(f)=gX(f),\ \ \forall X\in\Im_0^1(M_n),\ \forall f,g\in\Im_0^0(M_n)$

biçiminde tanımlayalım. Bu işlemlere göre $\Im_0^1(M_n)$'nin, birimli, komutatif $\Im_0^0(M_n)$ cebiri üzerinde bir modül olduğu kolaylıkla gösterilebilir. (Modül anlamı R üzerinde vektör uzayı anlamının genelleşmesidir). $\Im_0^1(M_n)$'ye bir başka cebirsel yapı da dahil edebiliriz. $\Im_0^1(M_n)$'ye R reel cebiri üzerinde bir vektör uzayı gibi de bakabiliriz. Bu vektör uzayında çarpma işlemi olarak vektör alanlarının Lie parantezini alırsak, bu kümeye R üzerinde Lie cebiri gibi de bakmak mümkündür. Bu cebirin sonsuz boyutlu olduğu kolayca gösterilebilir. Vektör alanlarının tanımına benzer olarak kovektör alanı (veya $1-$form) tanımlanır.

2.3. Kovektör Alanı

Her bir $p\in M_n$ noktası için bir ve yalnız bir $\omega_p\in T_p^*$ ($T_p^*, p\in M_n$ noktasındaki kovektör uzayıdır) kovektörünü karşılık getiren $\omega: p\to\omega_p$ dönüşümüne M_n üzerindeki kovektör alanı adı verilir.

Eğer ω kovektör alanı ise, herhangi bir U koordinat komşuluğunda $\omega=\omega_i dx^i$ yazılabilir. Burada dx^i koçatıdır. ω kovektörünün C^∞ sınıfından olması için gerek ve yeter şart $\omega_i=\omega_i(x^i)$ nin C^∞ sınıfından olmasıdır. Burada x^i ler U koordinat komşuluğundaki lokal koordinatlardır. Tüm kovektör alanlarının kümesi $\Im_0^0(M_n)$ üzerinde bir modüldür.

2.4. Tensör Alanı

Keyfi $p\in M_n$ noktası için bir ve yalnız bir $t_p\in T_p^q(P)$ tensörünü karşılık getiren $t: p\to t_p$ dönüşümü M_n üzerinde (p,q) tipli tensör alanıdır. Burada $T_p^q(P),\ p\in M_n$ noktasındaki tensör uzayıdır.

x^i lokal koordinatlarının verildiği U koordinat komşuluğundaki (p,q) tipli tensör alanı

$$t = t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p}$$

biçiminde ifade edilir. Buradaki $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ lere t tensör alanının U koordinat komşuluğundaki lokal koordinat sisteminde koordinatları denir.Eğer $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x)$ fonksiyonları C^∞ sınıfından ise t tensör alanı da C^∞ sınıfındandır denir.

$\Im^p_q(M_n)$ ile M_n üzerindeki tüm (p,q) tipli tensör alanlarının R üzerindeki vektör uzayını gösterelim. $\Im^p_q(M_n)$'nin $\Im^0_0(M_n)$ üzerinde bir modül olduğu kolayca gösterilebilir.

$$\Im(M_n) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \Im^p_q(M_n)$$

biçiminde gösterirsek, $\Im(M_n)$' nin R üzerinde bir cebir olduğuda gösterilebilir.

Burada $\otimes$ işlemi noktasal olarak

$$t_1 \otimes t_2 = (t_1)_x \otimes (t_2)_x, \quad \forall x \in M_n, \forall t_1, t_2 \in \Im(M_n)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.4.1. Aşağıdaki koşulları sağlayan $D : \Im(M_n) \to \Im(M_n)$ dönüşümüne $\Im(M_n)$ cebirinin tensör diferensiyellenmesi işlemi (veya sadece diferensiyellemesi) denir.

1. D sabit katsayılara göre lineerdir, yani

   $D(at + bs) = aDt + bDs, \quad \forall a, b \in R$

2. D tipi korur, yani $D(\Im^p_q(M_n)) \subset \Im^p_q(M_n)$ dir.
3. $D(t \otimes s) = Dt \otimes s + t \otimes Ds$
4. D işlemi tensörlerin kontraksiyon işlemi ile yer değiştirebilir.

Tanım 2.4.2. $D = L_X$, $X \in \Im^1_0(M_n)$ diferensiyelleme işlemi aşağıdaki şartları sağlarsa buna X vektör alanı yönündeki Lie diferensiyellemesi adı verilir:

1. $L_X f = Xf, \forall f \in \Im_0^0(M_n)$,

2. $L_X Y = [X,Y], \quad \forall X,Y \in \Im_0^1(M_n)$.

Burada $[X,Y]$ Lie parantezidir. $L_X Y$ ‘nin lokal koordinatlardaki ifadesi

$$L_X Y = X^k \partial_k Y^i - Y^k \partial_k X^i$$

biçiminde yazılır. Lie diferensiyellenmesi işlemi neticesinde elde edilen sonuca ise Lie türevi adı verilir. X vektör alanına göre $(1,1)$ tipli bir tensör alanı F'nın Lie türevi $L_X F$

$$(L_X F)Y = [X, FY] - F[X,Y]$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi sıradan bir tensör alanı için Lie türevi formülünü bulalım. Önce $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ kovektör alanını inceleyelim. $\forall Y \in \Im_0^1(M_n)$ için $\omega(Y) \in \Im_0^0(M_n)$ olduğu açıktır. L_X türevinin özelliklerine göre

$$L_X(\omega(Y)) = (L_X \omega)Y + \omega(L_X Y)$$

ve buradan da

$$(L_X \omega)Y = L_X(\omega(Y)) - \omega(L_X Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X,Y]) \qquad (2.2)$$

yazılır.

Eğer, $Y = \delta_j$ alırsak (2.2) eşitliğinin U komşuluğundaki lokal koordinatlar ile ifade edilişi

$$L_X \omega_j = X^k \partial_k \omega_j + \omega_k \partial_j X^k \qquad (2.3)$$

şeklinde olur.

Şimdi keyfi (p,q) tipli tensör alanını ele alalım. $t \in \Im_q^p(M_n)$ için

$$t(X_1,\ldots,X_q,\omega^1,\ldots,\omega^p) \in \Im_0^0(M_n), \forall X_1,\ldots,X_q \in \Im_0^1(M_n) \quad \forall \omega^1,\ldots,\omega^p \in \Im_1^0(M_n)$$

yazılabilineceği aşikardır. Buradan L_X ’in özelliklerine göre

$$L_X(t(X_1,...,X_q,\omega^1,...,\omega^p)) = (L_X t)(X_1,...,X_q,\omega^1,...,\omega^p)$$
$$+\sum_{i=1}^{q} t(X_1,...,L_X X_i,...X_q,\omega^1,...,\omega^p)$$
$$+\sum_{j=1}^{q} t(X_1,...,X_q,\omega^1,...,L_X\omega^j,...,\omega^p)$$

ve buradan da

$$(L_X t)(X_1,...,X_q,\omega^1,...,\omega^p) = X(t(X_1,...,X_q,\omega^1,...,\omega^p))$$
$$-\sum_{i=1}^{q} t(X_1,...,L_X X_i,...X_q,\omega^1,...,\omega^p) \qquad (2.4)$$
$$-\sum_{j=1}^{q} t(X_1,...,X_q,\omega^1,...,L_X\omega^j,...,\omega^p)$$

bulunur. L_X in türevi $dx^i(\partial_j) = \delta^i_j$ için uygulanırsa

$$0 = L_X\delta^j_i = L_X(dx^i(\partial_j)) = (L_X dx^i)\partial_j + dx^i(L_X\partial_j)$$

sonucuna varılır. Lie parantezinin özellikleri düşünüldüğünde,

$$(L_X dx^i)\partial_j = -dx^i[X,\partial_j] = -dx^i[X^k\partial_k,\partial_j] = dx^i[\partial_j, X^k\partial_k]$$
$$= dx^i\partial_j X^k\partial_k = \partial_j X^k\delta^i_k = \partial_j X^i$$

ya da $(L_X dx^i) = (\partial_j X^i)dx^j$ bulunur. Bu değer ve $(L_X\partial_i) = -\partial_i X^k\partial_k$ olduğu kullanılırsa,

$$L_x t^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} = X^k\partial_k t^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{q}(\partial_{j\lambda}X^k)t^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} - \sum_{\mu=1}^{p}(\partial_k X^{i\mu})t^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} \qquad (2.5)$$

eşitliği elde edilir. Burada $L_X t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ ile $(L_X t)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ gösterilmiştir. Özel bir durum olarak $p=0, q=1$ ve $p=1, q=0$ olduğu zaman ise (2.5) eşitliğinden (2.1) ve (2.3) eşitlikleri elde edilir.

3.MATERYAL VE METOD

3.1. Kovaryant Türev

Tanım 3.1.1. $n-$boyutlu diferensiyellenebilir bir M_n manifoldu için

$$D:\nabla_X : T(M_n) \to T(M_n)$$

ile tanımlanan $T(M_n)$ cebirinin tensördiferensiyellenmesi işlemi

$$\nabla_{fX+gY}T = f\nabla_X t + g\nabla_Y t,$$
$$\nabla_X f = Xf,$$

şartlarına sahip ise bu ∇_x ' e X vektör alanına göre kovaryant türev denir.

Diğer yandan

$$\nabla : \Im_0^1(M_n)\times\Im_0^1(M_n)\to\Im_0^1(M_n)$$

ile tanımlanan dönüşüm afin konneksiyon olarak tanımlanır. (Yano ve Ishihara, 1973).

Kabul edelim ki M_n ∇ afin konneksiyonlu bir manifold olsun. O zaman $T(M_n)$ de herhangi $X,Y\in\Im_0^1(M),$ için

$$\nabla_{X^C}^C Y^C = (\nabla_X Y)^C$$

şartını sağlayan ∇^C afin konneksiyonu mevcuttur. Bu afin konneksiyon $T(M_n)$ de ∇ afin konneksiyonunun tam lifti olarak adlandırılır ve ∇^C ile gösterilir (Yano ve Ishihara, 1973).

Önerme 3.1.1. Herhangi $X\in\Im_0^1(M),$ $f\in\Im_0^0(M)$ ve $T(M_n)$ de ∇ afin konneksiyonunun tam lifti ∇^C için

$$i)\nabla_{X^V}^C f^V = 0,$$
$$ii)\nabla_{X^V}^C f^C = (\nabla_X f)^V,$$
$$iii)\nabla_{X^C}^C f^V = (\nabla_X f)^V,$$
$$iv)\nabla_{X^C}^C f^C = (\nabla_X f)^C.$$

özellikleri mevcuttur.

Önerme 3.1.2. $X,Y\in\Im_0^1(M)$ ve $T(M_n)$ de ∇ afin konneksiyonunun tam lifti ∇^C için

$i)\nabla^C_{X^V}Y^V=0,$
$ii)\nabla^C_{X^V}Y^C=\left(\nabla_X Y\right)^V,$
$iii)\nabla^C_{X^C}Y^V=\left(\nabla_X Y\right)^V,$
$iv)\nabla^C_{X^C}Y^C=\left(\nabla_X Y\right)^C.$

özellikleri mevcuttur.

3.2.Tanjant Demet

$T_p(M)$, C^∞ sınıfından ve $n-$boyutlu diferensiyellenebilir bir M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayını belirtmek üzere

$$T(M)=\bigcup_{p\in M}T_p(M)$$

şeklinde ifade edilen $T(M)$ kümesine tanjant demeti adı verilir

(Yano ve Ishihara, 1973).

$T(M)$' nin keyfi bir $\tilde{p}\in T_p(M)$ noktası M üzerinde $T(M)$ doğal demet yapısını doğuran $\pi:T(M)\to\pi(\tilde{p})=p$ doğal demet izdüşümünü tanımlar. $\pi^{-1}(p)=\tilde{p}\in T_p(M)$ kümesine M baz uzayının p noktasındaki fibresi denir.

(x^h), U koordinat komşuluğunda lokal koordinatlar olmak üzere M baz uzayı $\{U;x^h\}$ kordinat komşuluk sistemiyle örtülmüş olsun. R^n ise R de $n-$boyutlu bir vektör uzayı olsun. $\tilde{p}\in T_p(M)(p\in U)$ noktası (p,X) sıralı ikili ile gösterildiğinden ve $X\in R^n$ vektörünün bileşenleri $T_p(M)$ tanjant uzayında $\{\partial_h\}(\partial_h=\dfrac{\partial}{\partial x^h})$ doğal bazına göre $\tilde{p}$ 'nin y^h kartezyen koordinatları olduğu için $\pi^{-1}(U)\subset T(M)$ açık kümesi $U\times R^n$ direk çarpımına diffeomorfik olacaktır. U komşuluğunda

$p=\pi(\tilde{p})$ 'nin koordinatları x^h ile gösterilip $(x^h, y^h) \to \tilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ olduğu dikkate alınırsa, $\pi^{-1}(U) \subset T(M)$ açık kümesinde (x^h, y^h) lokal koordinatlar sistemi elde edilmiş olur ve (x^h, y^h)' ye $(x^h)'$ dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}(U)$ daki koordinatlar denir.

C^∞ sınıfından C^∞ manifoldu üzerinde (r,s) tipli tüm tensör alanlarının kümesi $\Im_s^r(M)$ ve bunların direkt toplamı ise

$$\Im(M) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \Im_s^r(M) \tag{3.1}$$

ile gösterilir. Benzer şekilde $T(M)$ tanjant demetindeki uygun kümeler sırasıyla $\Im_s^r(T(M))$ ve $\Im(T(M))$ ile gösterilir.

3.3. Vertikal Liftler

3.3.1. Bir Fonksiyonun Vertikal Lifti

f, M 'de bir fonksiyon ve $T(M)$ tanjant demetindeki f^V fonksiyonu $f: M \to R$ ve $\pi: T(M) \to M$ olmak üzere

$$f^V = f \circ \pi \tag{3.2}$$

olsun. $f^V: T(M) \to R$ fonksiyonuna f fonksiyonunun vertikal lifti denir (Omran ve ark., 1984). Burada (x^h, y^h) koordinatlı $\tilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ noktasında f^V fonksiyonu

$$f^V(\tilde{p}) = f^V(x,y) = f \circ \pi(\tilde{p}) = f(p) = f(x) \tag{3.3}$$

olup $f^V(\tilde{p})$ değeri fibre boyunca sabittir ve $f(p)$ değerine eşittir.

3.3.2. Vektör Alanının Vertikal Lifti

Kabul edelim ki $\tilde{X} \in \Im_0^1(T(M))$ öyle ki tüm $f \in \Im_0^0(M)$ için $\tilde{X} f^V = 0$ olsun. O zaman $\tilde{X}$'e vertikal vektör alanı denir. $\tilde{X}$ vertikal vektör alanına göre indirgenmiş koordinatlar $\begin{bmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{bmatrix}$ olmak üzere $\tilde{X}$'nın vertikal olması için onun $\pi^{-1}(U)$ bileşenlerinin

$$X^V = \begin{bmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

şartını sağlaması gerekir.

M içerisinde bir vektör alanı $X \in \Im_0^1(M)$ olsun. $T(M)$ içerisindeki bir X^V vektör alanı, M deki keyfi bir ω için

$$X^V(\iota\omega) = (\omega(X))^V \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır. X^V vektör alanına X vektör alanının dikey (vertikal) lifti denir (Çayır,2013).

3.3.3. 1-Formun Vertikal Lifti

Tüm $X \in \Im_0^1(M)$ için $\tilde{\omega}(X^V) = 0$ olacak şekilde $\tilde{\omega} \in \Im_1^0(T(M))$ olsun. O zaman $\tilde{\omega}$ ye $T(M)$ içerisinde vertikal $1-$form denir. $(U; x^h)$, M içerisinde koordinat komşuluğu ve ω ise U içerisinde $\omega = \omega_i dx^i$ olmak üzere ω 1-formunun ω^V vertikal lifti her bir açık $\pi^{-1}(U)$ içinde

$$\omega^V = (\omega_i)^V (dx^i)^V \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır (Salimov, 2013). $T(M)$ içerisindeki indirgenmiş koordinatlara göre $\omega = \omega_i dx^i$ lokal ifadesi ile ω nin ω^V vertikal liftinin bileşenleri

$$\omega^V : (\omega^i, 0) \tag{3.7}$$

şeklindedir.

Burada vertikal liftler $\Im(M)$ 'nin keyfi P, Q, R elemanları için

$$(P \otimes Q)^V = P^V \otimes Q^V, \quad (P + R)^V = P^V + R^V \tag{3.8}$$

şartlarıyla sabit katsayılara göre $\Im(T(M))$ tensör cebiri içerisinde $\Im(M)$ cebirinin tek izomorfizmleridir.

F_i^h lokal ifadesi ile $F \in \Im_1^1(M)$ elemanının F^V vertikal lifti

$$F^V : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_i^h & 0 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir.

$f \in \Im_0^0(M),\ X, Y \in \Im_0^1(M),\ \eta \in \Im_1^0(M),\ \varphi \in \Im_1^1(M),\ I = id_M$

verilsin. Vertikal liftler için

$$\begin{aligned} &(fX)^V = f^V X^V, \quad I^V X^V = 0, \quad \eta^V (X)^V = 0 \\ &(f\eta)^V = f^V \eta^V, \quad [X^V, Y^V] = 0, \quad \varphi^V X^V = 0 \\ &\qquad\qquad X^V f^V = 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

eşitlikleri sağlanır (Çayır, 2015).

3.4. Komple Liftler

3.4.1. Fonksiyonun Komple Lifti

f, M manifoldundaki bir fonksiyon olsun. $T(M)$ tanjant demetinde

$$f^C = (\imath df)$$

şeklinde tanımlanan f^C fonksiyonuna f fonksiyonunun komple lifti denir.

$T(M)$ demetindeki indirgenmiş koordinatlara göre, bu koordinatlarda ∂f ifadesi $y^i \partial_i f$ gösterilir. f fonksiyonunun komple lifti olan f^C fonksiyonunun lokal ifadesi

$$f^C = y^i \partial_i f = \partial f \tag{3.11}$$

şeklindedir (Yano ve Ishihara, 1973).

3.4.2. Vektör Alanının Komple Lifti

$X \in \Im_0^1(M)$ olsun. f, M manifoldunda keyfi bir fonksiyon olmak üzere $T(M)$ tanjant demetindeki bir X^C vektör alanını

$$X^C f^C = (Xf)^C \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlanır ve X^Cye X vektör alanının $T(M)$ tanjant demet içerisindeki komple lifti denir. $T(M)$ tanjant demetindeki indirgenmiş koordinatlara göre X vektör alanının komple lifti X^C nin M manifoldundaki X^h bileşenleri

$$X^C = \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

şeklindedir (Çayır, 2013).

3.4.3 1-Formların Komple Lifti

$\omega \in \Im_1^0(M)$ olsun X, M manifoldundaki keyfi bir vektör alanı olmak üzere, $T(M)$ tanjant demetindeki ω^C $1-$formu

$$\omega^C X^C = (\omega X)^C \tag{3.14}$$

şeklinde tanımlanır (Yano ve Ishihara, 1973). ω^C' ye ω $1-$formunun komple lifti denir.

$T(M)$ tanjant demetindeki indirgenmiş koordinatlara gore;

ω $1-$formunun komple lifti olan ω^C'nın M manifoldundaki ω_i bileşenleri

$$\omega^C : (\partial_i \omega_i, \omega_i) \tag{3.15}$$

şeklindedir.

Burada P, Q, R $\Im(M)$'nın keyfi elemanları olmak üzere

$$(P \otimes Q)^C = P^C \otimes Q^V + P^V \otimes Q^C, \quad (P+R)^C = P^C + R^C \tag{3.16}$$

şartıyla sabit katsayılara göre $\Im(T(M))$ tensör cebiri içerisinde $\Im(M)$ cebirinin tek izomorfizmleridir. F_i^h lokal ifadesi ile $F \in \Im_1^1(M)$ elemanının F^C komple lifti

$$F^C : \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ \partial F_i^h & F_i^h \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

şeklinde bileşenlerine sahiptir. Ek olarak komple liftler için

$$\begin{aligned}
&(fX)^C = f^C X^V + f^V X^C = (Xf)^C, \\
&X^C f^V = (Xf)^V, \quad \eta^V(X^C) = (\eta(X))^V, \\
&X^V f^C = (Xf)^V, \quad \varphi^V X^C = (\varphi X)^V, \\
&\varphi^C X^V = (\varphi X)^V, \quad (\varphi X)^C = \varphi^C X^C, \\
&\eta^V(X)^C = (\eta(X))^C, \quad \eta^C(X)^V = (\eta(X))^V, \\
&[X^V, Y^C] = [X,Y]^V, \quad I^C = I, \quad I^V X^C = X^V, [X^C, Y^C] = [X,Y]^C
\end{aligned} \tag{3.18}$$

eşitlikleri sağlanır (Çayır, 2015).

4.BULGULAR

4.1.Almost Kontakt Yapı

M_n, n boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold , φ, $(1,1)$ tipli bir tensör alanı; ξ M_n manifoldu üzerinde bir vektör alanı, η M_n de $1-$form ve I özdeşlik (birim) tensörü olsun. Eğer bunlar

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad \varphi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad \eta(\xi) = 1. \tag{4.1}$$

şartlarını sağlıyorsa, bu durumda (φ, ξ, η) M_n de almost kontakt yapı tanımlar. (4.1) deki eşitliklerin tam ve dikey liftlerini alarak

$$\begin{aligned}
&\left(\varphi^C\right)^2 = -I + \eta^v \otimes \xi^c + \eta^c \otimes \xi^v, \\
&\varphi^c \xi^v = 0, \varphi^c \xi^c = 0, \eta^v \circ \varphi^c = 0, \\
&\eta^c \circ \varphi^c = 0, \eta^v\left(\xi^v\right) = 0, \eta^v\left(\xi^c\right) = 1 \\
&\eta^c\left(\xi^v\right) = 1, \eta^c\left(\xi^c\right) = 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

elde ederiz. (Çayır ve Köseoğlu, 2016).

$T(M_n)$ de $(1,1)$ tipli bir J tensör alanı

$$J = \varphi^c - \xi^v \otimes \eta^v + \xi^c \otimes \eta^c \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlanır.

O zaman J, $T(M_n)$ de bir almost kontakt yapı olmak üzere $J^2 X^v = -X^v$ ve $J^2 X^c = -X^c$ kolayca gösterilebilir. (4.3) eşitliğinde herhangi $X \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$J X^v = (\varphi X)^v + (\eta(X))^v \xi^c$$

$$J X^c = (\varphi X)^c - (\eta(X))^v \xi^v + (\eta(X))^c \xi^c$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1. ∇_x, X' e göre kovaryant türev operatörü (4.3) şartını sağlayacak şekilde $J \in \Im_1^1(T(M_n))$ ve $\eta(Y)=0$ için

$$i)\,(\nabla^c_{X^v} J)Y^v = 0,$$
$$ii)\,(\nabla^c_{X^v} J)Y^c = ((\nabla_X \varphi)Y)^v + ((\nabla_X \eta)Y)^v \xi^c,$$
$$iii)\,(\nabla^c_{X^c} J)Y^v = ((\nabla_X \varphi)Y)^v + ((\nabla_X \eta)Y)^v \xi^c,$$
$$iv)\,(\nabla^c_{X^c} J)Y^c = ((\nabla_X \varphi)Y)^c - ((\nabla_X \eta)Y)^v \xi^v + ((\nabla_X \eta)Y)^c \xi^c,$$

elde ederiz. Burada $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$, $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve $\eta \in \Im_0^1(M_n)$ 1- form dur.

İspat. $J = \varphi^c - \xi^v \otimes \eta^v + \xi^c \otimes \eta^c$ ve $\eta(Y)=0$ için

$$\begin{aligned}
i)\,(\nabla^c_{X^v} J)Y^v &= \nabla^c_{X^v}(\varphi^c - \xi^v \otimes \eta^v + \xi^c \otimes \eta^c)Y^v - (\varphi^c - \xi^v \otimes \eta^v + \xi^c \otimes \eta^c)\nabla^c_{X^v} Y^v \\
&= \nabla^c_{X^v}(\varphi Y)^v - \nabla^c_{X^v}(\eta^v (Y)^v)\xi^v + \nabla^c_{X^v}(\eta(Y))^v \xi^c \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ii)\,(\nabla^c_{X^v} J)Y^c &= \nabla^c_{X^v}(\varphi^c - \xi^v \otimes \eta^v + \xi^c \otimes \eta^c)Y^c - (\varphi^c - \xi^v \otimes \eta^v + \xi^c \otimes \eta^c)\nabla^c_{X^v} Y^c \\
&= \nabla^c_{X^v}\varphi^c Y^c - \nabla^c_{X^v}(\eta Y)^v \xi^v + \nabla^c_{X^v}(\eta(Y))^c \xi^c - \varphi^c \nabla^c_{X^v} Y^c \\
&\quad + \eta^v(\nabla_X Y)^v \xi^v - (\eta(\nabla_X Y))^v \xi^c \\
&= (\nabla^c_{X^v}\varphi^c)Y^c + \varphi^c(\nabla^c_{X^v} Y^c) - \varphi^c \nabla^c_{X^v} Y^c - (\nabla_X(\eta(Y)))^v \xi^v \\
&\quad + ((\nabla_X \eta)Y)^v \xi^c \\
&= ((\nabla_X \varphi)Y)^v + ((\nabla_X \eta)Y)^v \xi^c,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iii)\,(\nabla^c_{X^c} J)Y^v &= \nabla^c_{X^c}(\varphi^c - \xi^v \otimes \eta^v + \xi^c \otimes \eta^c)Y^v - (\varphi^c - \xi^v \otimes \eta^v + \xi^c \otimes \eta^c)\nabla^c_{X^c} Y^v \\
&= \nabla^c_{X^c}\varphi^c Y^v - \nabla^c_{X^c}(\eta^v (Y)^v)\xi^v + \nabla^c_{X^c}(\eta(Y))^v \xi^c - \varphi^c \nabla^c_{X^c} Y^v \\
&\quad + \eta^v(\nabla_X Y)^v \xi^v - (\eta(\nabla_X Y))^v \xi^c \\
&= (\nabla^c_{X^c}\varphi^c)Y^v + \varphi^c(\nabla^c_{X^c} Y^v) - \varphi^c \nabla^c_{X^c} Y^v - (\nabla_X(\eta(Y)))^v \xi^c \\
&\quad + ((\nabla_X \eta)Y)^v \xi^c \\
&= ((\nabla_X \varphi)Y)^v + ((\nabla_X \eta)Y)^v \xi^c,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
iv)\ \left(\nabla^c_{X^c} J\right)Y^c &= \nabla^c_{X^c}\left(\varphi^c - \xi^v \otimes \eta^v + \xi^c \otimes \eta^c\right)Y^c - \left(\varphi^c - \xi^v \otimes \eta^v + \xi^c \otimes \eta^c\right)\nabla^c_{X^c} Y^c \\
&= \nabla^c_{X^c}\varphi^c Y^c - \nabla^c_{X^c}\left((\eta Y)^v\right)\xi^v + \nabla^c_{X^c}\left(\eta(Y)^c\right)\xi^c - \varphi^c \nabla^c_{X^c} Y^c \\
&+ \left(\eta(\nabla_X Y)\right)^v \xi^v - \left(\eta(\nabla_X Y)\right)^c \xi^c \\
&= \left(\nabla^c_{X^c}\varphi^c\right)Y^c + \varphi^c\left(\nabla^c_{X^c} Y^c\right) - \varphi^c \nabla^c_{X^c} Y^c + \left(\nabla_X (\eta(Y))\right)^v \xi^v \\
&- \left((\nabla_X \eta)Y\right)^v \xi^v - (\nabla_X (\eta(Y)))^c\ \xi^c + \left((\nabla_X \eta)Y\right)^c \xi^c \\
&= \left((\nabla_X \varphi)Y\right)^c - \left((\nabla_X \eta)Y\right)^v \xi^v + \left((\nabla_X \eta)Y\right)^c \xi^c .
\end{aligned}
$$

elde ederiz.

Sonuç 4.1.1. Eğer Y yerine (4.1) şartlarını sağlayan ξ yı kullanırsak $(\eta(\xi)=1)$

o zaman

$$
\begin{aligned}
&i)\ \left(\nabla^c_{X^v} J\right)\xi^v = (\nabla_X \xi)^v, \\
&ii)\ \left(\nabla^c_{X^v} J\right)\xi^c = ((\nabla_X \varphi)\xi)^v + (((\nabla_X \eta))\xi)^v \xi^c \\
&iii)\ \left(\nabla^c_{X^c} J\right)\xi^v = ((\nabla_X \varphi)\xi)^v + (\nabla_X \xi)^c + ((\nabla_X \eta)\xi)^v \xi^c, \\
&iv)\ \left(\nabla^c_{X^c} J\right)\xi^c = ((\nabla_X \varphi)\xi)^c - (\nabla_X \xi)^v - ((\nabla_X \eta)\xi)^v \xi^v + ((\nabla_X \eta)\xi)^c \xi^C .
\end{aligned}
$$

sonuçlarını elde ederiz.

4.2. Almost Parakontakt Yapı

$(1,1)$ tipli φ tensör alanı, ξ vektör alanı , η 1- formu , I özdeşlik (birim) tensörü ile verilen n boyutlu M_n diferensiyellenebilir manifoldu

$$
\varphi^2 = I - \eta \otimes \xi,\ \varphi(\xi) = 0,\ \eta \circ \varphi = 0,\ \eta(\xi) = 1. \tag{4.4}
$$

şartlarını sağlasın. O zaman (φ, ξ, η) almost parakontakt yapı tanımlar.

(4.4) deki eşitliklerin tam ve dikey liftlerini alarak

$$
\begin{aligned}
&\left(\varphi^c\right)^2 = I - \eta^v \otimes \xi^c - \eta^c \otimes \xi^v, \\
&\varphi^c \xi^v = 0, \varphi^c \xi^c = 0, \eta^v \circ \varphi^c = 0, \\
&\eta^c \circ \varphi^c = 0, \eta^v\left(\xi^v\right) = 0, \eta^v\left(\xi^c\right) = 1, \\
&\eta^c\left(\xi^v\right) = 1, \eta^c\left(\xi^c\right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

sonuçları elde edilir.

$T(M_n)$ de bir $(1,1)$ tipli $\tilde{J}$ tensör alanını

$$\tilde{J} = \varphi^c - \xi^v \otimes \eta^v - \xi^c \otimes \eta^c. \tag{4.6}$$

şeklinde tanımlarız. O zaman $\tilde{J}$, $T(M_n)$ de bir almost parakontakt yapı olmak üzere $\tilde{J}^2 X^v = X^v$ ve $\tilde{J}^2 X^c = X^c$ olduğu kolayca gösterilebilir. (4.6) eşitliğinden her $X \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$\tilde{J}X^v = (\varphi X)^v - (\eta(X))^v \xi^c,$$
$$\tilde{J}X^c = (\varphi X)^c - (\eta(X))^v \xi^v - (\eta(X))^c \xi^c$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1. ∇_X, X e göre kovaryant türev operatörü (4.6) şartını sağlayacak şekilde $J \in \Im_1^1(T(M_n))$ ve $\eta(Y) = 0$ için

$$i)\ \left(\nabla^c_{X^v} \tilde{J}\right)Y^v = 0,$$
$$ii)\ \left(\nabla^c_{X^v} \tilde{J}\right)Y^c = ((\nabla_X \varphi)Y)^v - ((\nabla_X \eta)Y)^v \xi^c,$$
$$iii)\ \left(\nabla^c_{X^c} \tilde{J}\right)Y^v = ((\nabla_X \varphi)Y)^v - ((\nabla_X \eta)Y)^v \xi^c,$$
$$iv)\ \left(\nabla^c_{X^c} \tilde{J}\right)Y^c = ((\nabla_X \varphi)Y)^c - ((\nabla_X \eta)Y)^v \xi^v - ((\nabla_X \eta)Y)^c \xi^c,$$

elde edilir.Burada $X, Y \in \Im_0^1(M)$, $\varphi \in \Im_1^1(M)$ bir tensör alanı**,** ξ bir vektör alanı ve $\eta \in \Im_1^0$ bir 1-formdur.

İspat. $\tilde{J} = \varphi^c - \xi^v \otimes \eta^v - \xi^c \otimes \eta^c$ ve $\eta(Y) = 0$ için

$$\begin{aligned} i)\ \left(\nabla^c_{X^v} \tilde{J}\right)Y^v &= \nabla^c_{X^v}\left(\varphi^c - \xi^v \otimes \eta^v - \xi^c \otimes \eta^c\right)Y^v - \left(\varphi^c - \xi^v \otimes \eta^v - \xi^c \otimes \eta^c\right)\nabla^c_{X^v} Y^v \\ &= \nabla^c_{X^v}(\varphi Y)^v - \nabla^c_{X^v}\left(\eta^v (Y)^v\right)\xi^v - \nabla^c_{X^v}(\eta(Y))^v \xi^c \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$ii)\ \left(\nabla^c_{X^v}\tilde{J}\right)Y^c = \nabla^c_{X^v}\left(\varphi^c - \xi^v \otimes \eta^v - \xi^c \otimes \eta^c\right)Y^c - \left(\varphi^c - \xi^v \otimes \eta^v - \xi^c \otimes \eta^c\right)\nabla^c_{X^v}Y^c$$
$$= \nabla^c_{X^v}\varphi^c Y^c - \nabla^c_{X^v}(\eta Y)^v \xi^v - \nabla^c_{X^v}(\eta(Y))^c \xi^c - \varphi^c \nabla^c_{X^v}Y^c$$
$$+ \eta^v(\nabla_X Y)^v \xi^v + (\eta(\nabla_X Y))^v \xi^c$$
$$= \left(\nabla^c_{X^v}\varphi^c\right)Y^c + \varphi^c\left(\nabla^c_{X^v}Y^c\right) - \varphi^c\nabla^c_{X^v}Y^c + (\nabla_X(\eta(Y)))^v \xi^c$$
$$- ((\nabla_X \eta)Y)^v \xi^c$$
$$= ((\nabla_X \varphi)Y)^v - ((\nabla_X \eta)Y)^v \xi^c,$$

$$iii)\ \left(\nabla^c_{X^c}\tilde{J}\right)Y^v = \nabla^c_{X^c}\left(\varphi^c - \xi^c \otimes \eta^v - \xi^c \otimes \eta^c\right)Y^v - \left(\varphi^c - \xi^v \otimes \eta^v - \xi^c \otimes \eta^c\right)\nabla^c_{X^c}Y^v$$
$$= \nabla^c_{X^c}\varphi^c Y^v - \nabla^c_{X^c}\left(\eta^v(Y)^v\right)\xi^v - \nabla^c_{X^c}(\eta(Y))^v \xi^c - \varphi^c\nabla^c_{X^c}Y^v$$
$$+ \eta^v(\nabla_X Y)^v \xi^v + (\eta(\nabla_X Y))^v \xi^c$$
$$= \left(\nabla^c_{X^c}\varphi^c\right)Y^v + \varphi^c\left(\nabla^c_{X^c}Y^v\right) - \varphi^c\nabla^c_{X^c}Y^v + (\nabla_X(\eta(Y)))^v \xi^c$$
$$- ((\nabla_X \eta)Y)^v \xi^c$$
$$= ((\nabla_X \varphi)Y)^v - ((\nabla_X \eta)Y)^v \xi^c,$$

$$iv)\ \left(\nabla^c_{X^c}\tilde{J}\right)Y^c = \nabla^c_{X^c}\left(\varphi^c - \xi^v \otimes \eta^v - \xi^c \otimes \eta^c\right)Y^c - \left(\varphi^c - \xi^v \otimes \eta^v - \xi^c \otimes \eta^c\right)\nabla^c_{X^c}Y^c$$
$$= \nabla^c_{X^c}\varphi^c Y^c - \nabla^c_{X^c}\left((\eta Y)^v\right)\xi^v - \nabla^c_{X^c}\left(\eta(Y)^c\right)\xi^c - \varphi^c\nabla^c_{X^c}Y^c$$
$$+ (\eta(\nabla_X Y))^v \xi^v + (\eta(\nabla_X Y))^c \xi^c$$
$$= \left(\nabla^c_{X^c}\varphi^c\right)Y^c + \varphi^c\left(\nabla^c_{X^c}Y^c\right) - \varphi^c\nabla^c_{X^c}Y^c + ((\nabla_X \eta)Y)^v \xi^v$$
$$- ((\nabla_X \eta)Y)^v \xi^v - ((\nabla_X(\eta(Y))))^c \xi^c - ((\nabla_X \eta)Y)^c \xi^c$$
$$= ((\nabla_X)Y)^c - ((\nabla_X \eta)Y)^v \xi^v - ((\nabla_X \eta)Y)^c \xi^c.$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.1. Eğer Y yerine (4.4) şartlarını sağlayan ξ'yi kullanırsak $(\eta(\xi)=1)$ o zaman

$$i)\ \left(\nabla^c_{X^v}\tilde{J}\right)\xi^v = -(\nabla_X \xi)^v,$$
$$ii)\ \left(\nabla^c_{X^v}\tilde{J}\right)\xi^c = ((\nabla_X \varphi)\xi)^v - ((\nabla_X \eta)\xi)^v \xi^c,,$$
$$iii)\ \left(\nabla^c_{X^c}\tilde{J}\right)\xi^v = ((\nabla_X \varphi)\xi)^v - (\nabla_X \xi)^c - ((\nabla_X \eta)\xi)^v \xi^c,$$
$$iv)\ \left(\nabla^c_{X^c}\tilde{J}\right)\xi^c = ((\nabla_X \varphi)\xi)^c - (\nabla_X \xi)^v - ((\nabla_X \eta)\xi)^v \xi^v - ((\nabla_X \eta)\xi)^c \xi^c.$$

sonuçları elde edilir.

5. SONUÇ

Bu çalışma içerisinde tanjant demette tam ve dikey liftlerle ifade edilen almost kontakt ve almost parakontakt yapılar ile bunlara uygulanan kovaryant türevler üzerinde durulmuş ve bu doğrultuda bazı genel bağıntılar elde edilmiştir. Daha sonra bu genel bağıntılar için almost kontakt ve almost parakontakt yapının $\eta(\xi)=1$ özelliği kullanılarak bu bağıntıların özel halleri elde edilmiştir.

6. KAYNAKLAR

Çayır, H. (2013). Almost Parakontakt Yapılar,Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, Erzurum, 108.

Çayır, H. (2015). Some Notes on Lifts of Almost Paracontact Structures. *American Rewiew of Mathematics and Statistics, 3*(1), 52-60.

Çayır, H., & Akdağ, K.(2016). Some Notes on Almost Paracomplex Structures Associated with The Diagonal Lifts and Operators on Cotangent Bundle. *New Trends in Mathematical Sciens*, 4(4), 42-50.

Çayır, H., & Köseoğlu, G. (2016). Lie Derivatives of Almost Contact Structure and Almost Paracontact Structures with respect to on Tangent Bundle. *New Trends in Mathematical Sciences, 4*(1), 153-159.

Omran, T., Sharffuddin, A., & Husain, S. I. (1984). Lift of Structures on Manifolds. *Publications De 1' Instıtut Mathematıque, 360*(50), 93-97.

Salimov, A.A. (2013). Tensor Operators and Their Applications. *Nova Science Publ*. New York.

Salimov, A.A., & Çayır, H. (2013). Some Notes on Almost Paracontact Sturctures. *Comptes Rendus de 1' Acedemie Bulgare Des Sciences, 66*(3), 331-338.

Sasaki, S. (1958). On The Differantial Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifolds. *Tohoku Math.J*, 10, 338-358.

Yano, K., & Ishihara , S. (1973). *Tangent and Cotangent Bundles*. New York: Marcel Dekker Inc.New York.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Selin ALTI
Doğum Yeri	GİRESUN
Doğum Tarihi	02.07.1991
Uyruğu	☒ T.C. ❒Diğer:
Telefon	0537 967 7879
E-Posta Adresi	selin_alti@hotmail.com

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fakülte	Fen-Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	03.06.2012