T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT UZAYINDA OPERATÖRLER VE HİLBERT UZAYLARININ BAZI SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

AYHAN GÜNDÜZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2018

T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT UZAYINDA OPERATÖRLER VE HİLBERT UZAYLARININ BAZI SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Ayhan Gündüz

Bu tez,

Matematik Anabilim Dalında

Yüksek Lisans

derecesi için hazırlanmıştır

ORDU 2018

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Ayhan GÜNDÜZ tarafından hazırlanan ve Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL danışmanlığında yürütülen "Hilbert Uzayında Operatörler ve Hilbert Uzaylarının Bazı Spektral Özellikleri" adlı bu tez, jürimiz tarafından 16 / 03 / 2018 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman	:	Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL	
Başkan	:	Doç. Dr. Murat BEŞENK Pamukkale Üniversitesi, Matematik Bölümü	İmza :
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Mehmet KORKMAZ Ordu Üniversitesi, Matematik Bölümü	İmza :
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL Ordu Üniversitesi, Matematik Bölümü	İmza :

ONAY:

21 / 03/ 2018 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 22/03 / 2018 tarih ve 2018 / 167 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Yrd. Doç. Dr. Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Ayhan GÜNDÜZ

<u>Not</u>: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

HİLBERT UZAYINDA OPERATÖRLER VE HİLBERT UZAYLARININ BAZI SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Ayhan GÜNDÜZ
Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2018
Yüksek Lisans Tezi, 70s.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL

Bu tezde, ilk olarak Hilbert uzayındaki operatörler tanıtıldı. Daha sonra ise bu uzaydaki operatörlerin bazı spektral özellikleri incelendi..

Anahtar Kelimeler: Kompleks Hilbert uzayı, eşlenik operatörler, özeşlenik operatörler, normal operatörler, üniter operatörler, sınırlı operatörler, izometrik operatörler.

ABSTRACT

OPERATORS ON HİLBERT SPACE AND SOME SPECTRAL PROPERTIES OF HİLBERT SPACES

Ayhan GÜNDÜZ
Ordu University
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2018
MSc. Thesis, 70p.

Supervisor: Dr. Assist. Prof. Erdal ÜNLÜYOL

In this dissertation, firstly it is introduced the operators in Hilbert space. And then it is researched its some spectral properties.

Key Words: Complex Hilbert space, adjoint operators self adjoint operators, normal operators, ünitar operators, bounded operators, izometric operators.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL’ a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan elleri öpülesi annem, babam ve teyzem Leyla Parlak'a teşekkürlerimi borç bilirim.

Çalışmalarım boyunca her zaman sabırla beni destekleyen sevgili eşim Mediha Gündüz ve sevgili kızım Aslı Gündüz’ e teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$<.,.>$	:	İç-çarpım fonksiyonu
$\|\|.\|\|$	:	Norm fonksiyonu
$\oplus$	:	Direkt toplam
$\perp$	:	Diklik
$Im(A)$	:	A operatörünün görüntüsü
$Sp(A), \sigma(A)$	:	A operatörlerinin spekturumu
$Ker(A)$	:	A operatörünün çekirdeği
$L(H)$	:	H' dan H' a lineer operatörlerin kümesi

1. GİRİŞ

Normlu bir uzayda, elemanter vektör cebirinde olduğu gibi, vektörleri toplayabilir ve skalerle çarpabiliriz. Ayrıca norm kavramı, böyle bir uzay üzerinde, vektörün elemanter uzunluk kavramını genelleştirir. Bununla birlikte, genel bir normlu uzayda, yine de eksik olan, ya da, eğer mümkün ise yapmayı istediğimiz şey, bilinen

$$a.b = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

skaler çarpımının benzerini tanımlamak ve bunun sonucu olarak da,

$$\|a\| = \sqrt{a.a}$$

formülünü ve ortogonallik (diklik) için

$$a.b = 0$$

koşulunu elde edebilmektedir. Bu durumda, skaler çarpım ve diklik kavramlarının keyfi vektör uzaylara genelleştirilip, genelleştirilemeyeceği sorusu ortaya çıkmaktadır. Gerçekte, bu genelleştirmeler yapılabilmekte ve biz iç çarpım uzayı ve daha sonra da, Hilbert uzayı adı verilen tam iç çarpım uzaylarına götürmektedir.

İç çarpım uzayları, özel nomlu uzaylar olup, genel normlu uzaylardan daha eski bir tarihe sahiptir. Teorileri de daha zengin olup, Euclid uzaylarında büyük benzerlik göstermekte ve ana kavram diklik olmaktadır. Aslında iç çarpım uzayları Euclid uzaylarının en doğal genişlemesi olup, bu alandaki kavram ve ispatlardaki büyük uyum ve güzelliği sezinleyecektir. Teorinin tümü D. Hilbert'in integral denklemler hakkındaki bir çalışmasından kaynaklanmaktadır [1]. Bugün kullanılmakta olan gösterim ve deyimler, Euclid geometrisindekilere benzer olup, G. Kowalewski'nin önerileri doğrultusunda, E. Schmidt tarafından ortaya atılmıştır[2]. Söz konusu uzaylar, günümüze değin, fonksiyonel analizin pratik uygulamalarında en yararlı uzay olma özelliğini hala korumaktadır.

Bir iç çarpım uzayı üzerinde bir $\langle x, y\rangle$ iç çarpımı tanımlı olan bir X vektör uzayıdır. İç çarpım, üç boyutlu uzaylarda vektörlerin skaler çarpımı kavramını genelleştiren ve

i) $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ ile bir $\|x\|$ normu,

ii) $\langle x, y\rangle = 0$ ile dikliği tanımlamakta kullanılır.

Bir H Hilbert uzayı , tam olan bir iç çarpım uzayıdır. İç çarpım ve Hilbert uzayları teorisi, genel normlu uzaylar ve Banach uzayları teorisinden daha zengindir. Bu zenginliği ortaya çıkaran hususlar,

i) H'ın, kapalı bir alt uzayı ile bu alt uzayın dik tümleyeninin direkt toplamı olarak belirlenmesi,

ii) ortonormal kümeler, diziler ve H'ın elemanlarının bunlara karşılık gelen gösterimleri,

iii) sınırlı lineer fonksiyonellerin iç çarpım yardımıyla Riesz gösterimi,

iv) sınırlı lineer bir T operatörünün T Hilbert-eşlenik operatörünün

bulunmasıdır.

Ortonormal kümeler ve diziler, total olmaları halinde gerçekten ilginçtir. Hilbert-adjoint operatörler, uygulamada büyük önem taşıyan operatör sınıflarının (öz eşlenik, üniter, normal) operatör sınıflarının tanımlanmasında kullanılabilir $[3, 4]$.

Yukarıdaki açıklamaya bakıldığında bu uzayın ne kadar önemli olduğu açıktır. Dolayısıyla, derleme olarak hazırlanan bu tez, lisanüstü seviyede bilim insanlarına temel kaynak olacağını düşünüyoruz. Bu tez, Tsoy-Wa Na'nın [5] kitabı temel kaynak alınarak hazırlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.0.1 (**Lineer Uzay**) L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+ : L \times L \to L$ ve $. : F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A) L, "+" işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.
G2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$dir.
G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.
G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.
G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ omak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha x \in L$ dir.
L2. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.
L3. $(\alpha + \beta)x = \alpha.x + \beta.x$ dir.
L4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta.x)$ dir.
L5. $1.x = x$ dir. (Burada 1, F nin birim elemanıdır).

$F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye karmaşık lineer uzay adı verilir.

Tanım 2.0.2 Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

Tanım 2.0.3 F bir cisim ve V ve W, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T : V \to W$ dönüşümü,
a $T(u + v) = T(u) + T(v)$
b $T(cu) = cT(u)$ şartlarını sağlıyorsa T ye V üzerinde lineer dönüşüm denir .

Tanım 2.0.4 X, F cisimi üzerinde bir vektör uzayı olsun. X üzerinde bir norm aşağıdaki özellikleri sağlan bir

$$\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyondur. Her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için

a $\|x\| > 0$,

b $\|x\| = 0$ ancak ve ancak $x = 0$

c $\|ax\| = |a|\|x\|0$,

d $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

üzerinde bir $\|.\|$ normu tanımlanmış olan bir X vektör uzayına "normlu vektör uzay" denir.

Tanım 2.0.5 (**Birim Operatör**): $A : X \to X$ operatörü verilsin. Eğer her $x \in X$ için $Ax = x$ ise A operatörüne birim(özdeşlik) operatör denir. I, E ve I_X sembollerinden biriyle gösterilir.

Tanım 2.0.6 (**Sınırlı Operatör**): X ve Y iki normlu uzay olsun. A ise tanım kümesi $D(A) \subset X$ ve görüntü kümesi $R(A) \subset Y$ olan bir operatör olsun. Eğer A operatörü $D(A)$ 'nın X' de sınırlı her kümesine $R(A)$'nın Y de sınırlı bir kümesini karşılık getiriyorsa A' ya "sınırlı bir operatör" denir. Başka bir deyişle

$$\| Ax \|_Y \leq c \| x \|_X, \text{ her } x \in D(A)$$

olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa, A'ya "sınırlı bir operatör"denir.

Tanım 2.0.7 (**Lineer Operatör**): X ve Y aynı F cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A : X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer $D(A)$, X' in bir alt uzayı ve

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \ \forall x, y \in D(A) \ ve \ \forall \alpha, \beta \in F$$

ise A'ya "lineer operatör"denir.

Tanım 2.0.8 (**Eşlenik ve Öz-eşlenik Operatör**): A, H Hilbert uzayında sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer her $f, g \in D(A) \subset H$ için

$$\langle Af, g\rangle = \langle f, A^* g\rangle$$

sağlanıyorsa A^* a A'nın "eşlenik operatörü"denir.

Eğer $D(A) = D(A^*)$ ve $A = A^*$ ise bu A' ya özeşlenik operatör denir.

Tanım 2.0.9 (**Projeksiyon Operatör**): V bir vektör uzayı ve $P : V \longrightarrow V$ lineer bir operatör olsun. Bu durumda $P^2 = P$ oluyorsa, buna "projeksiyon veya izdüşüm öperatörü" denir.

Tanım 2.0.10 (**Rezolventa**): H bir Hilbert uzayı ve $A : D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör olsun.

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E)^{-1} \in L(H)\}$$

kümesine A operatörünün "regüler değerler kümesi" veya "rezolvent kümesi" denir.

$\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda; A) = (A - \lambda E)^{-1}$ operatorüne A operatorünün "rezolventası" veya "çözücü operatörü" adı verilir.

Tanım 2.0.11 (**Spektrum**): H bir Hilbert uzayı olsun.

$$Sp(A) = \sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

kümesine A operatörünün "spektrumu " denir. A operatörünün spektrum kümesi "$\sigma(A)$" veya "$Sp(A)$" ile göstereceğiz.

Şimdi özeşlenik operatörlerin spektral gösterimi ile bazı teoremler ve sonuçları verelim.

$A \in B(H)$ özeşlenik bir operatör ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\varphi_\lambda(s) = \begin{cases} 1, & -\infty < s \leq \lambda \\ 0, & \lambda < s < \infty \end{cases}$$

şeklinde bir $\varphi_\lambda(.)$ fonksiyonu olsun. Bu durumda her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $E_\lambda := \varphi_\lambda(A)$ operatörü A-ya indirgenen bir projeksiyondur.

Teorem 2.0.1 (**Spektral Gösterim Teoremi**):[6]

A, H bir Hilbert uzayında sınırlı, özeşlenik bir operatör ve

$$m = \min\left\{\lambda/\lambda \in Sp(A)\right\} := \min Sp(A)$$

$$M = \max\left\{\lambda/\lambda \in Sp(A)\right\} := \max Sp(A)$$

olsun. Bu durumda,

$$a)\lambda_1 \leq \lambda_2 \text{ için } E_{\lambda_1} \leq E_{\lambda_2};$$

$$b)\text{Her } \lambda_1 \in \mathbb{R} \text{ için } E_{m-0} = 0, E_m = I \text{ ve } E_{\lambda \neq 0} = E_\lambda$$

$$c)A = \int_{m-0}^{M} \lambda dE_\lambda$$

özelliklerini sağlayan ve A operatörünün spektral ailesi adı verilen bir $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ projeksiyon ailesi vardır.

Sonuç 2.0.1 [7] Spektral gösterim teoreminden

$$\varphi(A) = \int_{m-0}^{M} \varphi(\lambda) dE_\lambda$$

Riemann-Stieltjes integralini elde ederiz.

Sonuç 2.0.2 [7] Spektral gösterim teoreminden, her $x \in H$ için

$$\varphi(A)x = \int_{m-0}^{M} \varphi(\lambda) dE_\lambda x$$

ve her $x, y \in H$ için

$$\langle \varphi(A)x, y \rangle = \int_{m-0}^{M} \varphi(\lambda) d\langle E_\lambda x, y \rangle.$$

Özel olarak, her $x \in H$ için

$$\langle \varphi(A)x, x \rangle = \int_{m-0}^{M} \varphi(\lambda) d\langle E_\lambda x, x \rangle.$$

ilaveten her $x \in H$ için

$$\|\varphi(A)x\|^2 = \int_{m-0}^{M} |\varphi(\lambda)|^2 d\|E_\lambda x\|^2.$$

eşitliği yazılabilir.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Biz bu bölümde literatürde var olan bazı temel operatörleri ve özelliklerini açık bir şekilde vereceğiz. Operatörlerde sıralama, öz değerler bir operatörün spektrumu, köşegen operatör, kompakt operatör ve operatörler teorisinin diğer bazı özelliklerini vermeye çalışacağız bunu yaparken Tsoy-Wo Ma'nın 2002 yılında World Scientific Publishing tarafından basılan *Banach Hilbert Spaces, Vector Measures and Group Representations* isimli kitabı temel kaynak olarak kullanılmıştır.

3.1 Hilbert Uzayında Operatörler

Tanım 3.1.1 (İç çarpım uzayı) H, $\mathbb{C}$ sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer $\langle .,. \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa bu fonksiyona H üzerinde bir iç çarpım denir.

a) Her $x, y, z \in H$ için $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ (toplamsallık),

b) Her $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\langle \lambda x, z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ (homojenlik),

c) Her $x, y \in H$ için $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (eşleniklik özelliği),

d) Her $x, \in H$ için $\langle x, x \rangle \geq 0$ (pozitiflik),

e) Her $x, y \in H$ için $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Tanım 3.1.2 $\langle .,. \rangle$, H üzerinde bir iç çarpım foksiyonu olsun. Bu durumda $(H, \langle .,. \rangle)$ ikilisine bir iç çarpım uzayı denir.

Not 3.1.1 H bir vektör uzayı olmak üzere her $x \in H$ için

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

yazabiliriz.

Tanım 3.1.3 $H := (H, \langle .,. \rangle)$, bir iç çarpım uzayı olsun. Her $x, y, z \in H$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki eşitlikler doğtudur.

a) $\langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \overline{\alpha} \langle z, x \rangle + \overline{\beta} \langle z, y \rangle$ (eşlenik lineerlik), *b)* $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (paralel kenar kuralı),

c) $4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 = \sum_{n=0}^{3} i^n \|x+i^n y\|^2$ (kutupsal ayrılış).

Not 3.1.2 Burada $i \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$ dir.

Teorem 3.1.1 Her $x, y \in H$ için

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizliğe özel olarak Cauchy-Schwartz eşitsizliği denir. İlaveten

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \Longleftrightarrow x = \lambda y \ \text{ veya } y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{C}$$

İspat. Eğer $y = 0$ ise bu durumda ispat açıktır. Şimdi kabul edelim ki $y \neq 0$ olsun. Bu durumda $\langle y, y\rangle \neq 0$ dır.

$$\lambda := \frac{\langle x, x\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle &= \langle x, x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda\langle x, y\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle y, y\rangle && (3.1.1) \\ &= \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} && (3.1.2) \end{aligned}$$

olup

$$|\langle x, y\rangle|^2 = \langle x, y\rangle\langle y, x\rangle \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

elde edilir. Son olarak (3.1.1)'in sıfıra eşit olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\| \Longleftrightarrow x - \lambda y = 0.$$

Teorem 3.1.2 Her H iç çarpım uzayı, her $x \in H$ için $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ normu altında bir norm uzayıdır.

İspat. Bu teoremin ispatı için norm aksiyomlarının üçgen eşitsizliği hariç diğerlerinin sağlandığı açıktır. Dolayısıyla biz şimdi sadece üçgen eşitsizliğini ispatlayacağız. $x, y \in H$ verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2Re\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leq \langle x, x\rangle + 2|\langle x, y\rangle| + \langle y, y\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

olup

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

üçgen eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Not 3.1.3 Bir sonuç olarak yakınsak diziler ve süreklilik gibi topolojik özellikler H iç çarpım uzayında da elde edilebilir.

Tanım 3.1.4 Tam olan bir iç çarpım uzayına bir Hilbert uzayı denir.

Teorem 3.1.3 $\langle .,. \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ iç çarpım fonksiyonu süreklidir.

İspat. $\{x_n\} \subset H$ ve $\{y_n\} \subset H$, H'da iki dizi olsun. Kabul edelim ki $x_n \longrightarrow a$, $y_n \longrightarrow b$ yakınsasın. Bu durumda

$$\begin{aligned} |\langle x_n, x_n\rangle - \langle a, b\rangle| &= |\langle x_n - a, y_n - b\rangle| + |\langle x_n - a, b\rangle| + |\langle a, y_n - b\rangle| \\ &\leq \|x_n - a\|.\|y_n - a\| + \|x_n - a\|.\|b\| + \|a\|.\|y_n - a\| \longrightarrow 0,\ n \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

olup bu ise ispatı tamamlar.

3.2 Ortogonallik

$H := (H, \langle .,. \rangle)$, bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer H'da bulunan iki x ve y vektörü için $\langle x, y\rangle = 0$ oluyorsa bu iki vektöre ortogonal denir. $B \subset N$ olsun. Eğer x vektörü B'deki her vektöre dik ise bu x'e B kümesine diktir denir. $B \subset N$ olsun. Eğer B deki farklı vektörler ortogonal ise bu B alt kümesine ortogonaldir denir. H'nın keyfi bir alt kümesi eğer sadece birim vektörleri içeren ortogonal bir küme ise buna ortonormal denir.

Not 3.2.1 H uzayındaki iki vektörün ortogonalliğini $'' \perp ''$ sembolü ile göstereceğiz.

Teorem 3.2.1 (Pisagor Teoremi): Eğer $x, y \in H$ için $x \perp y$ ise, bu durumda

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Teorem 3.2.2 Sıfırdan farklı vektörlerin her ortogonal B kümesi lineer bağımsızdır.

İspat. $b_1, b_1, .., b_n$ B'de ayrık vektörler olsunlar. $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1,n}$ için $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her bir k için

$$0 = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j, b_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle b_j, b_k\rangle = \lambda_k \langle b_k, b_k\rangle$$

$b_k \neq 0$ olduğu için $\lambda_k \neq 0$ dır. Buradan $b_1, b_1, .., b_n$'ler lineer bağımsızdır.

Sonuç olarak B kümesi lineer bağımsızdır.

Teorem 3.2.3 $e_1, e_1, .., e_n$ ortonormal bir küme ve $x \in H$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

a) Tüm kompleks $\lambda_1, \lambda_2, ..\lambda_n$ sayıları için

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j\rangle - \lambda_j|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j\rangle|^2$$

b)

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

yani Bessel Eşitsizliği

Teorem 3.2.4 B bir iç çarpım H uzayında ortonormal bir küme olsun. Bir $x \in H$ için aşağıdaki doğrudur.

a) $\{b \in B : \langle x, b\rangle \neq 0\}$ kümesi sayılabilirdir.

b) $\sum_{b\in B} |\langle x, b\rangle|^2 \leq \|x\|^2$

Teorem 3.2.5 (Ortonormalleştirme Yöntemi) $\{x_n\}$ bir H iç çarpım uzayında lineer bağımsız vektörlerin sonlu veya sonsuz bir dizisi olsun. Bu durumda her bir k için hem $\{x_1, x_2, ..x_k\}$ hem de $\{e_1, e_1, .., e_k\}$ H'nın aynı vektör alt uzayını üreten bir H'da bir $\{e_n\}$ ortonormal dizisi vardır.

İspat. $G(z_1, z_2, ..z_k)$ ile $z_1, z_2, ..z_k \in H$ vektörleri tarafından gerilen vektör alt uzayını göstersin. Kabul edelim ki $e_1, e_2, .., e_k$'lar indüksiyon tarafından elde edilmiş olun.

$$a_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle x_{k+1}, e_j\rangle e_j$$

olduğunu kabul edelim. Şimdi kabulümüzün aksine $a_{k+1} = 0$ olsun. Buradan $x_{k+1} \in (e_1, e_2, .., e_k) = G(x_1, x_2, .., x_k)$ bir daralma ile $x_1, x_2, .., e_k$, x'_{k+1}in lineer bağımsız oluğunu verir. Buradan $a_{k+1} \neq 0$ dır. Bu ise ikinci kabulümüzle çelişir dolayasıyla $e_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{\|a_{k+1}\|}$, burada $\|e_{k+1}\| = 1$ dir. Ayrıca $1 \leq p \leq k$ için

$$\langle e_{k+1}, e_p\rangle = \langle x_{k+1}, e_p\rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_j\rangle.$$

$$\langle e_j, e_p\rangle = \langle x_{k+1}, e_p\rangle - \sum_{j=1}^{k}\langle x_{k+1}, e_j\rangle\delta_{jp} = \langle x_{k+1}, e_p\rangle - \langle x_{k+1}, e_p\rangle = 0.$$

yazabiliriz. Buradan $e_1, e_2, ..e_k, e_{k+1}$ ortonormaldir. Şimdi aşağıdaki hesaplamayı yapalım.

$$\begin{aligned} G(e_1, e_2, ..e_k, e_{k+1}) &= G[G(e_1, e_2, ..e_k), e_{k+1}] \\ &= G[G(e_1, e_2, ..e_k), x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k}\langle x_{k+1}, e_j\rangle e_j] \\ &= G[G(e_1, e_2, ..e_k), x_{k+1}] = G[G(x_1, x_2, ..x_k), x_{k+1}] \\ &= G(x_1, x_2, ..x_k, x_{k+1}). \end{aligned}$$

Bu hesaplamadan da ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.6 (Minimum Uzaklık Teoremi) M, H'nın bir tam konveks alt kümesi olsun. Bu durumda her $x \in H$ için x'ten M kümesine olan $\|x - y\|$ uzaklığı olacak şekilde bir tek $y \in M$ vardır.

Teorem 3.2.7 M, H'nın bir tam alt vektör uzayı ve $x \in H$, $y \in M$ olsun. Bu durumda $x - y$'nin M'ye ortogonal olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul x vektörünün M'ye uzaklığının $\|x - y\|$ olmasıdır.

İspat. "$\Longleftarrow$"Kabul edelim ki $\|x - y\|$, x vektöründen M'ye d uzaklığı olduğunu kabul edelim. $z := x - y$ olsun. Bu durumda sıfırdan farklı her $a \in M$ için

$$d^n \leq \|x - (y + \frac{\langle z, a\rangle}{\|a\|^2}a)\|^2 = \|z - \frac{\langle z, a\rangle}{\|a\|^2}a\|^2 = \|z\|^2 - |\langle z, a\rangle|^2 = a^2 - |\langle z, a\rangle|^2$$

yazabiliriz. Buradan $\langle z, a\rangle = 0$ elde ederiz. Sonuç olarak $x = y = z$, M kümesine otogonaldir.

"$\Longrightarrow$" Kabul edelim ki $x - y$ M tam konveks kümesine ortogonal olsun. Bu durumda $\|x - y\| = d$ olacak şekilde $z \in M$ vardır. İddiadan $(x - z) \perp M$ yazabiliriz. Şimdi aşağıdaki hesaplamaları yapıp taraf tarafa toplarsak,

$$\|x - y\|^2 = \|(x - y) + (y - z)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2$$

$$\|x - y\|^2 = \|(x - z) + (z - y)\|^2 = \|x - z\|^2 + \|z - y\|^2$$

$\|y - z\|^2 = 0$ buluruz. Yani $y = z$ dir. Buradan x vektörünün M'ye uzaklığı $\|x - y\| = \|y - z\| = d$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.8 M, N'nın H'nın tam alt uzayları olsun. Eğer $M \perp N$ ise, bu durumda $M + N$ kümesi de tamdır.

İspat. $\{x_n\}$, $M+N$'de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $x_n = a_n + b_n$ olacak şekilde $a_n \in M$ ve $b_n \in N$ vardır. Her $\varepsilon > 0$ için tüm $m, n \geq p$ olacak şekilde bir p tamsayısı vardır öyle ki $\|x_m - x_n\| \leq \varepsilon$. Çünkü $a_m - a_n$, $b_m - b_n$'ye ortogonaldir. Buradan

$$\varepsilon^2 \geq \|x - m - x_n\|^2 = \|(a_m - a_n) + (b_m - b_n)\| = \|a_m - a_n\|^2 + \|b_m - b_n\|^2$$

olup bu ise, hem $\{a_n\}$ hem de $\{b_n\}$'nin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. M, N iddiaya göre tam olduğu için $a := \lim a_n \in M$ ve $b := \lim b_n \in N$ vardır. Buradan,

$$\lim x_n = \lim a_n + \lim b_n = a + b \in M + N$$

dir. Sonuç olarak $M+N$'de tamdır.

3.3 Hilbert Uzayının Ortonormal Bazları

Bir H iç çarpım uzayında ortonormal bir B kümesine, B'yi içeren her bir ortonormal S kümesi varsa bu B'ye maksimaldir denir ve $S = B$ dir. Bir maksimal ortonormal kümeye aynı zamanda bir ortonormal baz adı verilir. Şimdi B, H'nın bir ortonormal bazı olsun. Her bir $x \in H$ için $\{\langle x, b\rangle : b \in B\}$ bu sayılarına Fourier katsayıları adı verilir. Ayrıca $\sum_{b\in B}\langle x, b\rangle b$ toplamına da Fourier serisi denir.

Teorem 3.3.1 Bir H iç çarpım uzayındaki her ortonormal S kümesi ortonormal bir baza genişletilebilir.

İspat. $\mathbb{P}$, H'nın tüm ortonormal alt kümelerinin ailesi olsun. Bu durumda $\mathbb{P}$ kısmı sıralı bir küme olur. $\mathbb{P}$ de bulunan her C zinciri, C'deki tüm kümelerin birleşimi $\mathbb{P}$ için de C'nin bir üst sınırıdır. Böylece Zorn Lemma'sına göre her ortonormal küme bir maksimal ortonormal küme içerisindedir.

Teorem 3.3.2 (Sonsuz seriler için Pythagora teoremi) $\{x_n\}$, bir H Hilbert uzayında ortonormal bir dizi olsun.

a) Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < b$ ise, bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisi H'da yakınsaktır. İlaveten $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ toplamı sıralamadan bağımsızdır.

b) Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisi $x \in H$ yakınsak ise bu durumda

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2.$$

İspat. (a) İddiaya göre $\{x_n\}$ ortogonal olduğundan,

$$\begin{aligned}\|x_{m+1}+x_{m+2}+...+x_{m+p}\|^2 &= \|x_{m+1}\|^2+\|x_{m+2}\|^2+...+\|x_{m+p}\|^2\\ &\leq \sum_{n=m+1}^{\infty}\|x_n\|^2 \longrightarrow 0,\ m\longrightarrow\infty\end{aligned}$$

olduğundan yazabiliriz. Böylece $\sum_{j=1}^{n} x_j$ kısmı toplamı H Hilbert uzayında bir Cauchy dizisidir bu yüzden $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ serisi yakınsaktır. Ayrıca $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty$ serisinin sıralamasını yeniden düzenliyebiliriz. Dolayısıyla teoremin ikinci kısmın ispatı tamamlanmış olur. İddiaya göre aşağıdaki hesaplamayı yaparsak ispat tamamlanır.

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \lim\|x_1+x_2+...+x_n\|^2\\ &= \lim(\|x_{m+1}\|^2+\|x_{m+2}\|^2+...+\|x_{m+p}\|^2)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2.\end{aligned}$$

Teorem 3.3.3 B, bir H Hilbert uzayında ortonormal bir küme olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

a) B ortonormal bir bazdır, yani maksimal ortonormal kümedir.

b) Her $x\in H$ için $x\perp H$ ise, o zaman $x=0$.

c) Her $x,y\in H$ için

$$x=\sum_{b\in B}\langle x,b\rangle b.$$

d) Her $x,y\in H$ için

$$\langle x,y\rangle=\sum_{b\in B}\langle x,b\rangle\langle b,y\rangle.$$

e) Her $x\in H$ için

$$\|x\|^2=\sum_{b\in B}|\langle x,b\rangle|^2$$

(Parseval Eşitsizliği)

f) B tarafından gerilen vektör alt uzayı H'da yoğundur.

3.4 Ortogonal Tümleme

H, bir Hilbert uzayı olsun.

$$M^{\perp} = \{x \in H : x \perp M\}$$

şeklinde tanımlanan H'nın bir M alt kümesine ortogonal tümleyen denir.

Teorem 3.4.1 M, N bir H Hilbert uzayında boştan farklı iki küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

a) $M^{\perp}$ H'nın kapalı bir alt vektör uzayıdır.

b) Her $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$.

c) Eğer $M \subset N$ ise, bu durumda $N^{\perp} \subset M^{\perp}$.

d) $M^{\perp\perp\perp} = M^{\perp}$.

e) $M \cap M^{\perp} \subset \{0\}$.

İspat. (a) Her $a \in H$ için her $x \in H$ olmak üzere

$$f_a(x) = \langle x, a \rangle$$

olsun. Cauchy Schwartz eşitsizliğinden herbir f_a, H üzerinde sürekli lineer bir dönüşümdür. Bu yüzden

$$M^{\perp} = \cap\{ker(f_a) : a \in M\}$$

H'nın kapalı bir alt vektör uzayıdır. Bu ise ispatı tamamlar.

(b) ve (c)'nin ispatı tanımdan açıktır.

(d) (b) ve (c)'nin sonucundan (d) açıktır.

(e) Her $x \in M \cap M^{\perp}$ için $x \in M$ ve $x \in M^{\perp}$ yazabiliriz. Buradan $\langle x, x \rangle = 0$, yani $x = 0$ dır.

Teorem 3.4.2 M, bir H Hilbert uzayınının kapalı bir alt vektör uzayı olsun. Bu durumda

a) $H = M \oplus M^{\perp}$.

b) $M^{\perp\perp} = M$.

İspat. (a) $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ olduğundan $H = M \oplus M^{\perp}$ olduğunu göstermek için sadece $H = M + M^{\perp}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi keyfi bir $x \in H$ alalım. İddiaya göre M, bir H Hilbert uzayının kapalı bir alt vektör uzayı olduğundan M bir tam konveks kümedir. Bu durumda x'nin M'ye olan $\|x - y\|$, olacak şekilde bir tek $y \in M$ vardır. Buradan $x-y$, M'ye ortogonaldir. Yani $(x-y) \in M^{\perp}$ dolayısıyla $x = y+(x-y) \in M+M^{\perp}$ dir. Sonuç olarak H, M ve $M^{\perp}$'nin cebirsel toplamıdır. Bu ise ispatı tamamlar.

(b) $M \subset M^{\perp}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $M^{\perp\perp} \subset M$ olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi keyfi bir $x \in M^{\perp\perp}$ alalım. Bu durumda $x = a + b$ olacak şekilde $a \in M$ ve $b \in M^{\perp}$ vardır. $M^{\perp\perp}$ bir alt uzay olduğundan $b = x - a \in M^{\perp\perp} - M = M^{\perp\perp}$ buradan $b \in M^{\perp} \cap M^{\perp\perp}$ buradan $b = 0$ dır. Böylece $x = a \in N$ elde edilir. Sonuç olarak keyfi alınan $x \in M^{\perp\perp}$, $x \in M$ oldu bu ise $M^{\perp\perp} \subset M$ dir.

Teorem 3.4.3 H, M ve N iki vektör alt uzayının cebirsel toplamı olsun. Eğer $M \perp N$ ise $M = N^{\perp}$ ve $N = M^{\perp}$ dir. Ayrıca özel olarak M ve N'nin her ikiside kapalıdır.

İspat. İddiaya göre $M \perp N$ olduğundan, $M \subset N^{\perp}$ dir. Şimdi keyfi bir $x \in N^{\perp}$ alalım. Yine iddiaya göre H, M ve N vektör alt uzaylarının cebirsel toplamı olduğundan $H = M + N$ dir. Dolayısıyla $a \in M$ ve $b \in N$ için $x = a + b$ yazabiliriz. Buradan $b = x - a \in N^{\perp} - M = N^{\perp}$ olup ya $b \in N \cap N^{\perp}$ ya da $b = 0$ dır. Dolayısıyla $x = a \in M$ sonuç olarak $N^{\perp} \subset M$ dır.

Teorem 3.4.4 (Riesz gösterim teoremi) f, bir H Hilbert uzayında sürekli lineer bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $x \in H$ için $f(x) = \langle x, a\rangle$ olacak şekilde bir tek $a \in H$ vardır. Ayrıca

$$\|f\| = \|a\|.$$

İspat. Birinci durum kabul edelim ki $f = 0$ olsun bu durumda $a = 0$ olup ispat tamamlanır.

İkinci durum kabul edelim ki $f \neq 0$ olsun. Şimdi $f(b) \neq 0$ olacak şekilde keyfi bir $b \in H$ alalım. İddiaya göre f sürekli olduğundan $M = ker(f)$ kümesi H'nın kapalı bir vektör alt uzayıdır. Bu durumda $u \in M$ ve $v \in M^{\perp}$ olacak şelilde $b = u + v$ yazabiliriz.

Buradan

$$f(v) = f(b) - f(u) = f(b) \neq 0$$

ve özel olarak $v \neq 0$ elde ederiz. $a := \frac{f(v)}{\|v\|^2}$ şeklinde tamımlayalım. Keyfi $x \in H$ için $f\left(x - \frac{f(x)}{f(v)}v\right) = 0$ olduğundan $x - \frac{f(x)}{f(v)}.v \in ker(f) = M$. $v \in M^{\perp}$ olduğundan

$$\left\langle x - \frac{f(x)}{f(v)}v, v \right\rangle = 0$$

yani

$$\langle x, v\rangle - \frac{f(x)}{f(v)}\langle v, v\rangle = 0$$

ya da

$$f(x) = \frac{f(x)\langle x, v\rangle}{\|v\|^2} = \langle x, a\rangle$$

olup, bu bize $f(x) = \langle x, a\rangle'$ nın varolduğunu gösterir. Şimdi tekliğini gösterelim. $a, b \in H$, $f(x) = \langle x, a\rangle$ ve $f(x) = \langle x, b\rangle$ her $x \in H$ için sağlansın bu durumda her $x \in H$ için $\langle x, a-b\rangle = 0$ x keyfi olduğundan özel olarak $x := a-b$ alabiliriz. Bu durumda $\|a-b\|^2 = 0$ olup $a = b$ dir. Dolayısıyla bu gösterim tektir. Son olarak normlarının birbirine eşit olduğunu gösterelim.

$$|f(x)| = |\langle x, a\rangle| = \|x\|\|a\|,$$

x keyfi seçildiğinde $\|f\| \leq \|a\|$ dur.

Şimdi, eğer $a = 0$ ise $\|f\| = \|a\| = 0$ olup ispat açıktır. Eğer $a \neq 0$ ise bu durumda

$$\|a\| = \left\langle \frac{a}{\|a\|}, a \right\rangle = \left| f\left(\frac{a}{\|a\|}\right)\right| \leq \|f\|,$$

olup $\|f\| = \|a\|$ dur.

3.5 Eşlenikler

Tanım 3.5.1 G, H Hilbert uzayı olsunlar. $\varphi : G \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa buna $G \times H$ üzerinde bir seskü lineer (sesquilinear form) dönüşümdür.

a) Her $a, b \in G$, her $x \in H$ için

$$\varphi(a+b, x) = \varphi(a, x) + \varphi(b, x)$$

b) Her $a \in G$, her $x \in H$ için

$$\varphi(\lambda a, x) = \lambda\varphi(a, x)$$

c) Her $a \in G$, her $x, y \in H$ için

$$\varphi(a, x + y) = \varphi(a, x) + \varphi(a, y)$$

d) Her $a \in G$, her $x \in H$, her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\varphi(a, \lambda x) = \overline{\lambda}\varphi(a, x)$$

$G \times H$ üzerinde tanımlı bir φ sesku lineer dönüşümün normu

$$\|\varphi\| := \sup\{|\varphi(x)| : \|a\| \leq 1, \|x\| \leq 1\}$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak $G = H$ olarak alınırsa biz kısaca φ'ye $H \times H$ üzerinde demek yerine sadece H üzerinde bir sesku lineer dönüşüm diyeceğiz.

Teorem 3.5.1 φ, $G \times H$ üzerinde bir sesku lineer dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

a) φ, $G \times H$ üzerinde süreklidir.

b) φ, $(0, 0) \in G \times H$ noktasında süreklidir.

c) $\|\varphi\| < \infty$.

Not 3.5.1 Bu durumda her $a \in G$, her $x \in H$ için

$$|\varphi(a, x)| = \|\varphi\|.\|a\|.\|x\|$$

Teorem 3.5.2 $B : H \longrightarrow H$ bir sürekli lineer dönüşüm olsun. $\varphi : G \times H \longrightarrow \mathbb{C}$, her $a \in G$, her $x \in H$ için

$$\varphi(a, x) = \langle Ba, x \rangle$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda φ, $G \times H$ üzerinde bir sürekli sesku lineer dönüşümdür ayrıca $\|\varphi\| = \|b\|$ bu durumda φ'ye sürekli lineer b dönüşümüyle bağıntılı sesku lineer dönüşüm denir.

Teorem 3.5.3 φ, $G \times H$ üzerinde bir sürekli sesku lineer dönüşüm olsun. Bu durumda her $a \in G$, her $x \in H$ için

$$\varphi(a, x) = \langle Ba, x \rangle$$

olacak şeklide $B : G \longrightarrow H$ bir tek sürekli lineer vardır.

Teorem 3.5.4 Her bir $B : G \longrightarrow H$ sürekli lineer dönüşüm için her $a \in G$, $x \in H$ olmak üzere

$$\langle Ba, x\rangle = \langle a, B^*x\rangle$$

olacak şekilde $B^* : H \longrightarrow G$ bir tek sürekli lineer dönüşümü vardır. Bu dönüşüme B'nin eşleniği denir. Ayrıca $\|B^*\| = \|B\|$ vardır.

İspat. $\varphi(a, x) = \langle x, Ba\rangle$, her $x \in H$, $a \in G$ olsun. Bu durumda biz biliyoruz ki φ, $H \times G$ üzerinde bir sürekli sesku lineer dönüşümdür. Bu durumda her $a \in G$, $x \in H$ için $B^* : G \longrightarrow H$ gibi sürekli bir lineer dönüşüm vardır. Yani

$$\varphi(a, x) = \langle B^*a, x\rangle$$

$$\langle x, Ba\rangle = \langle B^*a, x\rangle$$

ya da

$$\langle Ba, x\rangle = \langle a, B^*x\rangle.$$

$\|\varphi\| = \|B^*\|$ olduğunu göstermek hiç de zor değildir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\|\varphi\| &= \sup\{|\varphi(a, x)| : \|a\| \leq 1,\ \|x\| \leq 1\}\\ &= \sup\{|\langle x, Ba\rangle| : \|a\| \leq 1,\ \|x\| \leq 1\}\\ &= \sup\{|\langle Ba, x\rangle| : \|a\| \leq 1,\ \|x\| \leq 1\} = \|B\|\end{aligned}$$

olup $\|B^*\| = \|B\|$. Bu dönüşümün tekliği açıktır.

Lemma 3.5.1 A, $B : G \longrightarrow H$ gibi tüm sürekli lineer dönüşümler için aşağıdakiler doğrudur.

a) $(A + B)^* = A^* + B^*$.

b) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.

c) $A^{**} = A$.

d) $I^* = I$, I birim dönüşümdür.

Teorem 3.5.5 G, H , K birer Hilbert uzayı olsunlar. $A : G \longrightarrow H$ ve $B : H \longrightarrow G$ sürekli lineer dönüşüm olsunlar. Bu durumda $(BA)^* = A^*B^*$. Ayrıca, eğer A bijektif ise bu durumda A^{-1} de aynı zamanda $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ şartını sağlayan bir sürekli lineer dönüşümdür.

İspat. Verilen iddaya göre her $a \in G$ ve $y \in K$ için

$$\langle a, (AB)^* y\rangle = \langle BAa, y\rangle = \langle Aa, B^* y\rangle = \langle a, A^* B^* y\rangle$$

yani $(AB)^* = A^* B^*$. Yine iddiaya göre A bijektif olduğundan açık dönüşüm teoremine göre A^{-1}'de aynı zamanda bir sürekli lineer dönüşümdür. I_G, I_H sırasıyla G, H üzerinde birim dönüşümü göstersin. $AA^{-1} = I_H$ olduğundan

$$(A^{-1})^* A^* = (AA^{-1})^* = I_H^* = I_H.$$

Benzer şekilde $A^*(A^{-1})^* = I_G$ gösterilebilir. Dolayısıyla $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ dır.

Teorem 3.5.6 G, H Hilbert uzayı ve $B : G \longrightarrow H$ bir sürekli lineer dönüşüm olsunlar. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) $\|B^* B\| = \|B\|^2 = \|BB^*\|$.

ii) $B^* B = 0 \Longleftrightarrow B = 0$.

İspat. (i) G'de her $\|a\| \leq 1$ için

$$\|Ba\|^2 = \langle Ba, Ba\rangle = \langle a, B^* Ba\rangle = |\langle a, B^* Ba\rangle| \leq \|a\|.\|BB^* a\| \leq \|a\|.\|BB^*\|\|a\| \leq \|BB^*\|$$

yani $\|Ba\| = \sqrt{\|BB^*\|}$. $\|a\| \leq 1$ üzerinde supremum alınırsa $\|B\| = \sqrt{\|BB^*\|}$ ya da $\|B\|^2 = \sqrt{\|BB^*\|}$ yazabiliriz. Diğer taraftan

$$\|BB^*\| \leq \|B^*\|.\|B\| = \|B\|^2$$

olduğundan dolayı $\|BB^*\| = \|B\|^2$ yazabiliriz. B^* ve B'nin yerini değiştirirsek $\|BB^*\| = \|B^*\|^2 = \|B\|^2$.

(ii)

$$\|BB^*\| = 0 \Longleftrightarrow \|B\|^2 = 0 \Longleftrightarrow \|B\| = 0 \Longleftrightarrow B = 0$$

Teorem 3.5.7 $B : G \longrightarrow H$ bir sürekli lineer dönüşüm ve M, N sırasıyla G, H'nın vektör altuzayları olsun.

i) Eğer $B(M) \subset N$ ise bu durumda $B^*(N^\perp) \subset M^\perp$

ii) Eğer M, N her ikisi de kapalı ise bu durumda tersi de aynı zamanda doğrudur.

İspat. (i) Kabul edelim ki $B(M) \subset N$ olsun. Ve keyfi bir $x \in N^{\perp}$ alalım. Bu durumda $x \in (B(M))^{\perp}$ dir. Her $a \in M$ için

$$\langle a, B^*x \rangle = \langle Ba, x \rangle = 0.$$

Buradan $B^*x \in M^{\perp}$ dir. Sonuç olarak $B^*(N^{\perp}) \subset M^{\perp}$.

(ii) Şimdi $B^*(N^{\perp}) \subset M^{\perp}$. olduğunu kabul edelim. İddiaya göre M, N her ikisi de kapalı olduğundan $(M^{\perp})^{\perp} = M$ ve $N^{\perp\perp} = N$ dir. (i) şıkkından $B(M) = B(M^{\perp\perp}) \subset N^{\perp\perp} = N$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.5.8 $B : G \longrightarrow H$ bir sürekli lineer dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) $Ker(B) = (ImB^*)^{\perp}$.

ii) $[Ker(B)]^{\perp} = \overline{ImB^*}$.

İspat. (i) Tanımdan $B(Ker(B)) \subset \{0\}$ dır. Buradan

$$B^*(H) = B^*(\{0\}^{\perp}) \subset (ker(B))^{\perp}.$$

Böylece

$$ker(B) = ker(B)^{\perp\perp} \subset (B^*(H))^{\perp} = (ImB^*)^{\perp}$$

tersine olarak yine tanımdan $B^*(H) \subset ImB^*$. Buradan

$$B((ImB^*)^{\perp}) \subset H^{\perp} = \{0\}$$

olup $(ImB^*)^{\perp} \subset kerB$ elde ederiz. Sonuç olarak $kerB = (ImB^*)^{\perp}$.

(ii) $(kerB)^{\perp} = (ImB^*)^{\perp\perp} = \overline{ImB^*}$.

3.6 Kuadratik Formlar

H bir Hilbert uzayı olsun. Her $x \in H$ için $g(x) = \varphi(x, x) \in \mathbb{C}$ olacak şekilde H üzerinde bir φ sesku lineer dönüşüm var ise, bu $q : H \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonuna kuadratik form denir. Bu durumda q, φ sesku lineer ile ilişkili kuadratik form olarakta söylenebilir. H üzerinde bir kuadratik formun normu

$$\|q\| = \sup\{|q(x)| : \|x\| = 1\}$$

şeklinde tanımlanır. Biz bu kısımda operatörler sesku lineer dönüşümler (sesku lineer formlar) ve quadratik formlar arasında ilişki kuracağız.

Lemma 3.6.1 Her H için

$$|q(x)| \leq \|q\|\|x\|^2$$

İspat. Eğer $x = 0$ ise durum ise durum açıktır. Şimdi $x \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$|q(x)| = \left|\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right)\right|.\|x\|^2 \leq \|q\|\|x\|$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.6.1 (Kutupsallaştırma formülü) p, q H üzerinde sırasıylaiçin α, β sesku lineer formla bağlantılı iki kuadratik form olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) Her $x, y \in H$ için $4\alpha(x, y) = q(x + y) - q(x - y) + iq(x + iy) - iq(x - iy)$.

ii) $p = q \Longleftrightarrow \beta = \alpha$.

Tanım 3.6.1 φ, H Hilbert uzayında bir sesku lineer form olsun. Bu durumda

i) Eğer her $x \in H$ için $\varphi(x, x)$ reel ise, φ' ye reel veya hermityen denir.

ii) Eğer her $x \in H$ için $\varphi(x, x) \geq 0$ oluyorsa φ' ye pozitif denir.

iii) Eğer her $x \in H$ için $\varphi(x, x) = 0$ için $x = 0$ oluyorsa φ' ye dejenere olmayan denir.

Lemma 3.6.2 Bir sesku lineer form olan φ'nin, H üzerinde reel olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul her $x, y \in H$ için

$$\varphi(x, x) = \overline{\varphi(y, x)}$$

olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki φ reel olsun. Her $x, y \in H$ için $\alpha(x, x) = \overline{\varphi(y, x)}$ olsun. Bu durumda α'nın H üzerinde bir sesku lineer form olduğu açıktır. Dahası $\alpha(x, x) = \varphi(x, x)$, her $x \in H$. Burdadan $\alpha = \varphi$ dir. Sonuç olarak her $x, y \in H$ için $\overline{\varphi(y, x)} = \varphi(x, y)$ dir. Tersinin doğruluğu açıktır.

Teorem 3.6.2 φ, H Hilbert uzayında bir sesku lineer form olsun. Bu durumda eğer φ pozitif ise, her $x, y \in H$ için

$$|\varphi(x,y)|^2 = \varphi(x,x)\varphi(y,y).$$

İspat. Eğer $\varphi(x,x) = 0$ veya $\varphi(y,y) = 0$ ise ispat Cauchy Schwartz eşitsizliğinden açıktır. Şimdi kabul edelim ki

$$\varphi(x,x) = \varphi(y,y) = 0$$

olsun. $\lambda := \varphi(x,y)$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi(x-\lambda y, x-\lambda y) = \varphi(x,x) - \lambda\varphi(y,x) - \overline{\lambda}\varphi(x,y) + \lambda\overline{\lambda}\varphi(y,y) \\ &= -\varphi(x,y).\varphi(y,x) - \overline{\varphi(x,y)}\varphi(y,x) = -2|\varphi(y,x)|^2 \end{aligned}$$

yani

$$|\varphi(x,y)|^2 = 0 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y).$$

Teorem 3.6.3 q, H Hilbert uzayında φ sesku lineer ile bağlantılı bir kuadratik form olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) q, H üzerinde süreklidir.

ii) $\|q\| < \infty$.

iii) φ, H üzerinde süreklidir. Bu durumda

$$\|q\| \leq \|\varphi\| = 2\|q\|.$$

İspat. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Kabul edelim ki q, H'da sürekli olsun. $\varepsilon = 1$ için $|q(y)| \leq 1$ sağlayan $\|y\| \leq \delta$ şartını sağlayan $\delta > 0$ sayısı vardır. Böylece her $\|x\| \leq 1$ için,

$$|q(y)| = |\varphi(\delta x, \delta x)|\delta^2|| = |q(\delta x)||\delta^2| \leq \frac{1}{\delta^2}$$

$\|x\| \leq 1$ üzerindeki supremum alınırsa

$$\|q\| \leq \frac{1}{\delta^2} < \infty$$

dur.

(ii)$\Longrightarrow$ (iii): Kabul edelim ki $\|q\| \leq \infty$ olsun. H'da $\|x\| \leq 1$ ve $\|y\| \leq 1$ için kutupsallaştırma formulüne göre

$$\begin{aligned}
|\varphi(x,y)| &= \frac{1}{4}|q(x+y) - q(x-y) + iq(x+iy) - iq(x-iy)| \\
&\leq \frac{1}{4}\|q\|(\|(x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2) \\
&= \frac{1}{4}\|q\|(2(\|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\|^2 + \|iy\|^2)) \\
&= \frac{1}{4}\|q\|(4(\|x\|^2 + \|y\|^2)) \leq \|q\|(1+1) = 2\|q\|.
\end{aligned}$$

$\|x\| \leq 1$ ve $\|y\| \leq 1$ üzerinde supremum alırsak $\|\varphi\| \leq 2\|q\|$ dur. Buradan φ, H üzerinde süreklidir.

(iii)$\Longrightarrow$ (i): Kabul edelim ki φ, H üzerinde sürekli olsun. Bu durumda q'nunda sürekli olduğu açıktır. Ayrıca tüm $\|x\| \leq 1$ için

$$|q(x)| = |\varphi(x,x)| \leq \|\varphi\|\|x\|^2 \leq \|\varphi\|.$$

Dolayısıyla $\|q\| \leq \|\varphi\|$ dur.

Teorem 3.6.4 q, H Hilbert uzayında bir sesku lineerle ilişkili bir kuadratik form olsun. Bu durumda eğer, φ reel ise

$$\|\varphi\| \leq \|q\|$$

İspat. Biz bir önceki teoremdan $\|q\| \leq \|\varphi\|$ olduğunu biliyoruz. Şimdi H'da keyfi $\|x\| \leq 1$ ve $\|y\| \leq 1$ alalım. $\varphi(x,x) = r.e^{iQ}$, $r \geq 0$ ve $Q \geq 0$ olsun. Buradan kutupsallaştırma formülüne göre

$$4r = 4\varphi(e^{iQ}x, y) = q(e^{-iQ}x + y) - q(e^{-iQ}x - y) + iq(e^{-iQ}x + iy) - iq(e^{-iQ}x - iy)$$

yazabiliriz. İddiaya göre φ reel olduğu için q'da reeldir. Buradan imajiner kısımlar sıfırlanır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
|\varphi(x,y) = r &= \frac{1}{4}(q(e^{-iQ}x + y) - q(e^{-iQ}x - y))) \\
&\leq \frac{1}{4}\|q\|(\|e^{-iQ}x + y\|^2 + \|e^{-iQ}x - y\|^2) \\
&= \frac{1}{4}\|q\|2(\|(x\|^2 + \|y\|^2) \leq \|q\|.
\end{aligned}$$

Şimdi $\|x\| \leq 1$ ve $\|y\| \leq 1$ üzerinde supremum alırsak $\|\varphi\| \leq \|q\|$ olur. Bu ise ispatı tamamlar.

3.7 Normal Operatörler

H, bir Hilbert uzayı olsun. Normlu uzaylarda H'da H'da tanımlı sürekli lineer dönüşüme bir operatör denir. H üzerindeki birim operatörü I, E sembollerinden biriyle göstereceğiz. A^*, A operatörünün eşleniği olduğunu biliyoruz. Buna göre şimdi aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım 3.7.1 H bir Hilbert uzayı ve A'da H üzerinde tanımlı bir operatör olsun.

i) Eğer $A^*A = I$ ise, A izometrik veya izometri denir.

ii) $A^*A = AA^* = I$ ise, A'ya üniter operatör denir.

iii) $A^*A = AA^*$ ise, A'ya normal operatör denir.

iv) $A^* = A$ ise, A'ya özeşlenik operatör denir.

v) $A^* = -A$ ise, A'ya anti eşlenik operatör denir.

Lemma 3.7.1 A ve B, H üzerinde iki operatör olsun. Eğer her $x \in H$ için

$$\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle$$

ise bu durumda $A = B$ dir.

İspat. Kuadratik formlardan biliyoruz ki her $x, y \in H$ için $\langle Ax, y\rangle = \langle Bx, y\rangle$ ise bu durumda $A = B$ dir.

Teorem 3.7.1 H Hilbert uzayı üzerindeki her operatör için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) A bir izometridir yani $A^*A = I$,

ii) Her $x \in H$ için $\|Ax\| = \|x\|$,

iii) Her $x, y \in H$ için $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$.

İspat. $i \Longrightarrow iii$: Her $x, y \in H$ için $\langle Ax, Ay\rangle = \langle A^*Ax, y\rangle = \langle Ix, y\rangle = \langle x, y\rangle$

$iii \Longrightarrow ii$: iddaya göre $x, y \in H$'da keyfi alındığından $x = y$ seçebiliriz. Dolayısıyla ispat açıktır.

$ii \Longrightarrow i$: Her $x \in H$ için $\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$

Lemma 3.7.2 Eğer A, H üzerinde bir izometri ise, bu durumda $Im(A)$ H'nın kapalı bir alt uzayıdır.

İspat. Bunu ispatı için $Im(A)$'nın tam olduğunu göstermek yeterlidir. İddiaya göre A, H Hilbert uzayında bir izometri olduğundan $Im(A)$ tamdır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.7.2 H üzerinde tanımlı her A operatörü için aşağıdakilere denktir.

i) A üniterdir, yani $A^*A = AA^* = I$,

ii) A^* üniterdir,

iii) A ve A^* izometriktir,

iv) A izometrik ve A^* injektiftir,

v) A izometrik ve surjektiftir,

vi) A bijektiftir ve $A^{-1} = A^*$.

İspat. $i \Longrightarrow ii$: $A^{**} = A$ dan açıktır.

$i \Longrightarrow iii$: A üniter operatör olduğundan A ve A^* ın izometrik olduğu açıktır.

$iii \Longrightarrow iv$: Her izometri injektiftir.

$vi \Longrightarrow v$: İddiaya göre A izometrik olduğuğu için Lemma 3.7.2 e göre $Im(A)$ H'da kapalıdır. Buradan

$$Im(A) = \overline{Im(A)} = (ker(A)^*)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H$$

böylece A surjektiftir.

$v \implies vi$: iddiaya göre A izometrik olduğundan injektiftir. Hem injektif hem de surjektif olduğundan A bijektiftir. Dolayısıyla A^{-1} var ve H'da bir operatördür. A izometri yani $AA^* = I$ olup A^*, A'nın bir sol tersidir. Buradan $A^{-1} = A^*$ elde edilir.

$vi \implies i$: İddiada verilenlere göre

$A^*A = A^{-1}A = I$ ve $AA^* = AA^{-1} = I$ olup ispat tamamlar.

Teorem 3.7.3 H üzerinde tanımlı her A operatörü için aşağıdakiler denktir.

i) A normaldir, yani $A^*A = AA^*$,

ii) A^* normaldir,

iii) Her $x \in A$ için $\|A^*x\| = \|Ax\|$,

iv) Her $x, y \in H$ için $\langle A^*x, A^*y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle$.

İspat. $i \implies ii$: $A^{**} = A$ dan açıktır.

$i \implies iv$: Her $x, y \in H$ için $\langle A^*x, A^*y\rangle = \langle AA^*x, Ay\rangle = \langle A^*Ax, y\rangle = \langle x, y\rangle$

$iv \implies iii$: İddiaya göre x, y H'da keyfi alındığından $x = y$ seçebiliriz. Dolayısıyla ispat açıktır.

$iii \implies i$: Her $x \in H$ için

$$\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2 = \|A^*x\|^2 = \langle A^*x, A^*x\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle.$$

Böylece $A^*A = AA^*$. Dolayısıyla A normalidir.

Sonuç 3.7.1 Eğer A, H üzerinde bir normal operatör ise bu durumda $\|A^2\| = \|A\|^2$ dir.

İspat. Teorem 3.7.3'den iii şıkkından x'in yerine Ax alarak

$$\begin{aligned} \|A^*x\| = \|Ax\| \implies \|A^*(Ax)\| &= \|A(A(X))\| \\ \|(A^*A)x\| &= \|A^2x\|, \end{aligned}$$

her $x \in H$ $\|x\| \leq 1$ üzerinde supremum alınırsa $\|A^*A\| = \|A^2\|$.

$\|A^*A\| = \|A\|^2$ daima doğru olduğu için $\|A^2\| = \|A\|^2$.

Teorem 3.7.4 A, B H üzerinde iki normal operatör olsun. Eğer $AB^* = B^*A$ ise bu durumda $A+B$, AB ve BA'larda normaldir.

İspat. $AB^* = B^*A$ ifadesinin her iki tarafının eşleniği alınırsak $BA^* = A^*B$ elde ederiz. Buradan

$$(A+B)^*(A+B) = A^*A+B^*A+A^*B+B^*B = AA^*+AB^*+BA^*+BB^* = (A+B)(A+B)^*$$

ve

$$(AB)^*(AB) = B^*A^*AB = B^*AA^*B = AB^*A^*B = AB^*BA^* = ABB^*A^* = (AB)(AB)^*$$

Dolayısıyla $A+B$ ve AB normaldir. BA'nın normal olduğu benzer şekilde gösterilir.

Şimdi Bu Kısımda Operatörün Bazı Özelliklerini Verelim:

1) Normal operatörlerin skalerle çarpımı normaldir.

2) İki izometrik operatörün çarpımı izometriktir.

3) İki üniter operatörün çarpımı iüniterdir.

4) $\{e_n : n \in j\}$ H'da bir ortonormal baz olsun. Bu durumda bir A operatörünün H'da üniter olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $\{Ae_n : n \in j\}$ kümesinin ortonormal bir baz olmasıdır.

5) Bir izometrik operatörün normu 1 dir.

Lemma 3.7.3 Her A normal operatörü için e^{A^*-A} üniterdir.

Gerçekten

$$(e^{A^*-A})^* = e^{A-A^*} = e^{-(A^*-A)} = (e^{A^*-A})^{-1}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.7.5 (Fuqlede Teoremi) A, B normal operatörü olsunlar. Bu durumda her T operatörü için eğer $AT = TB$ ise $TA^* = TR^*$ dir.

İspat. $n \in \mathbb{N}$ için iddiya göre $AT = TB$ olduğundan $A^nT = TB^n$ nin indiksiyonla doğru olduğu açıktır. Normda yakınsamaya göre

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3....$$

yazabildiğimiz için $e^A T = Te^B$ ya da $T = e^{-A}Te^B$ olduğu doğrudur. Buradan $p = e^{A^*-A}$ ve $Q = e^{B-B^*}$ olmak üzere

$$e^{A^*}Te^{-B^*} = PTQ$$

elde ederiz. P, Q Lemma 3.7.3 e göre üniter olduğundan

$$e^{A^*}Te^{-B^*} \leq \|P\|\|T\|\|Q\| \leq \|T\|$$

olduğu görülür. $\lambda \in \mathbb{C}$ için $f(\lambda) = e^{\lambda A^*}Te^{-\lambda B^*}$ olsun. Bu durumda $f : \mathbb{C} \longrightarrow L(H)$ bir tam dönüşümdür.

A, B operatörlerini sırasıyla $\overline{\lambda A}$, $\overline{\lambda B}$ yerdeğiştirelim. Bu durumda her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\|f(\lambda)\| \leq \|T\|$ yazılabilir. Bu ise Liouville'nin Teoremine göre f sabit bir dönüşümdür. Yani

$$f^{'}(\lambda) = e^{\lambda A^*}A^*Te^{-\lambda B^*} + e^{\lambda A^*}Te^{-\lambda B^*}(-B^*) = 0$$

$\lambda = 0$ olup bu ise ispatı tamamlar.

3.8 Öz Eşlenik Operatörler

Teorem 3.8.1 Bir H Hilbert uzayı üzerindeki her H operatörü için aşağıdakiler denktir.

i) A öz eşleniktir, yani $A^* = A$.

ii) Her $x, y \in H$ için $\langle Ax, y\rangle = \overline{\langle Ay, x\rangle}$, yani bir Hermityen formdur.

iii) Her $x \in H$ için $\langle Ax, x\rangle$ iç çarpımı reeldir, yani bir reel değerli kuadrik formdur.

İspat. ii$\Longrightarrow$iii: olduğu açıktır. Her $x \in H$ için $\langle A^*x, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}$. Buradan $A^* = A$ olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in H$

$$\langle Ax, x\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}$$

yani her $x \in H$ için

$$\langle Ax, x\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}$$

ya da $\langle Ax, x\rangle$ reeldir. Bu ise ii$\Longrightarrow$iii olduğunu ispatlar.

Teorem 3.8.2 A, B H üzerinde iki öz eşlenik operatör olsun.

i) $A+B$ öz eşleniktir.

ii) Her λ reel sayısı için λA öz eşleniktir.

iii) AB öz eşlenik olabilmesi için gerek ve yeterli koşul $AB = BA$ olmasıdır.

İspat. (iii) : Eğer AB bir öz eşlenik ise, o zaman $AB = (AB)^* = B^*A^* = BA$.

Tersine olarak eğer $AB = BA$ ise bu durumda

$$(AB)^* = (BA)^* = A^*B^* = AB$$

yani AB öz eşleniktir.

i ve ii'nin ispatı tanımdan açıktır.

Teorem 3.8.3 A, H kompleks Hilbert uzayında bir operatör olmak üzere $B = \frac{1}{2}(A+A^*)$ ve $C = \frac{1}{2i}(A - A^*)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) B ve C'nin her ikisi de öz eşleniktir. Aynı zamanda $A = B + iC$.

ii) Eğer $M, N,\ A = M + iN$ şartını sağlayan iki öz eşlenik opertaör ise bu durumda $M = B$ ve $N = C$ dir.

iii) A'nın normal olabilmesi için gerek ve yeterli koşul $BC = CB$ olmasıdır..

İspat. (iii): İddiya göre A normal olduğundan $A^*A = AA^*$ dır. Bu durumda $A = B+iC$ olsun. Buradan $A^* = B^* - iC^* = B - iC$, B, C öz eşleniktir.

$$A^*A = (B - iC)(B + iC) = B^2 - iCB + iCB + C^2$$

yani

$$AA^* = B^2 + iCB - iBC + C^2$$

olup, $A^*A = AA^*$ eşitliğinden

$$B^2 = iBC + iBC + C^2 = B^2 + iCB - iBC + C^2$$

elde edilir. Dolayısıyla A operatörünün normal olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $BC = CB$ olmasıdır.

Lemma 3.8.1 A, H Hilbert uzayında bir normal operatör olsun. B, C'de A operatörünün sırasıyla reel ve imajiner kısmı ise her $x \in H$ için

$$\|AX\|^2 = \|BX\|^2 + \|CX\|^2$$

dir.

İspat. A, H'da bir normal operatör ve B, C de A'nın reel ve sanal kısmı olduğundan Teorem 3.8.3 den

$$A = B + iC$$

yazabilir. Buradan her $x \in H$ için

$$\begin{aligned} \|AX\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle &= \langle (B+iC)x, (B+iC)x\rangle \\ &= (B+iC)\overline{(B+iC)}\langle x, x\rangle \\ &= (B+iC)(B-iC)\langle x, x\rangle \\ &= (B^2+C^2)\langle x, x\rangle \\ &= \langle Bx, Bx\rangle + \langle Cx, Cx\rangle \\ &= \|Bx\|^2 + \|Cx\|^2 \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.8.4 A, H Hilbert uzayında bir öz eşlenik operatör olsun. Bu durumda, aşağıdakiler doğrudur.

i) $\|A\| = sup|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| \leq 1$.

ii) Her $n \geq 1$ tamsayısı için $\|A^n\| = \|A\|^n$ için C operatörleri için $A = iC$ olmasıdır.

İspat. (i) Q ve q A operatörü ile bağıntılı sıraısyla sesku lineer ve quadrik form olsun. Buradan $\|A\| = \|Q\| = \|q\|$ böylece ispat tamamlanır.

(ii) $n \geq 1$ tamsayısı için $\|A^n\| = \|A\|^n$ olduğunu biliyoruz. Bunun için geriye $\|A\|^n = \|A^n\|$ olduğunu göstermek yeterlidir. H'da keyfi $\|x\| \leq 1$ alalım buradan her $m \geq 1$

tamsayıları için

$$\begin{aligned}\|A^m x\|^2 = \langle A^m x, A^m x\rangle &= \langle A^x A^m x, A^{m-1}x\rangle \\ &= \langle A^{m+1}x, A^{m-1}x\rangle \\ &\leq \|A^{m+1}x, A^{m-1}x\|\end{aligned}$$

dır. Şimdi $Ax \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $m \geq 1$ tamsayıları ve her $k \geq 1$ için $A^k x \neq 0$ dır. Buradan

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^2x\|}{\|Ax\|} \leq \frac{\|A^3x\|}{\|A^2x\|} \leq ...... \leq \frac{\|A^nx\|}{\|A^{n-1}x\|}$$

veya

$$\left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)^n \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.\frac{\|A^2x\|}{\|Ax\|}.\frac{\|A^3x\|}{\|A^2x\|}....\frac{\|A^nx\|}{\|A^{n-1}x\|} = \frac{\|A^nx\|}{\|x\|}$$

Yani $\|Ax\| \leq \|A^nx\|\|x\|^{n-1} \leq \|A^n\|$

Eğer $Ax = 0$ ise ispat açıktır. $\|x\| \leq 1$ üzerinde supremum alırsak $\|A\|^n \leq \|A^n\|$ olup ispat tamamlanır.

Lemma 3.8.2 H Hilbert uzayı üzerindeki tüm öz eşlenik operatörlerin kümesi $L(H)$ üzerinde kapalıdır.

3.9 Projeksiyonlar ve Kapalı Alt Vektör Uzaylar

Bu kısımda projektörlerin kümesi ile kapalı vektör uzayları arasında bijeksiyon kurulacaktır.

Tanım 3.9.1 H bir Hilbert uzayı ve A'da H'da bir operatör olsun. Eğer $A^* = A = A^2$ ise, A'ya bir projektör veya bir ortogonal projeksiyon denir.

Teorem 3.9.1 M, bir H Hilbert uzayının kapalı vektör alt uzayı olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i M üzerinde bir tek P projektörü vadır.

ii $M = P(H) = \{x \in H : Px = x\} = \{x \in H : \|Px\| = \|x\|\}$

İspat. (i) Aksini varsayalım, yani $M = P(H) = Q(H)$ olacak şekilde iki tane P, Q projektörü olsun. Keyfi $x \in H$ için $Px \in M = Q(H)$ olup başka bir ifadeyle bazı $y \in H$ için $Px = Qy$ dir. P ve Q projektör olduğundan

$$QPx = Q^2y = Qy = Px$$

yazabiliriz. $x \in H$ keyfi olduğundan $QP = P$ dir. Benzer şekilde $PQ = Q$ elde edilir. Buradan projektörlerin varlığı ispat edilmiştir. Şimdi tekliğini gösterelim. Teoremin iddiasına göre

$$P = P^* = (QP)^* = P^*Q^* = PQ = Q$$

olup bu ise bizim iddiamızla çelişir. Dolayısıyla P'nin tekliği ispat edilmiş olur.

(ii) İlk önce H'dan M üzerinde bir projektör yapısı kurmaya çalışalım. M kapalı olduğundan $H = M \oplus M^\perp$ keyfi $x \in H$ için $x = a + b$ olacak şekilde bir tek $a \in M$, $b \in M^\perp$ vardır. Şimdi $Px := a$ tanımlayalım P'nin H'dan M'ye bir lineer dönüşüm, ayrıca $P^2 = P$, $M = P(H) = \{x \in H : Px = x\}$ olduğu açıktır. $a \perp b$ olduğundan

$$\|Px\|^2 = \|a\|^2 \leq \|a\|^2\| + \|b\|^2 = \|x\|^2 \Longrightarrow \|Px\| \leq \|x\|.$$

Buradan P, H üzerinde süreklidir ve dolayısıyla bir operatördür. Şimdi P'nin bir projektör olduğunu gösterelim. Her $x \in H$ için

$$\langle P^*x, x\rangle = \langle x, Px\rangle = \langle a + b, a\rangle = \langle a, a\rangle = \langle a, a + b\rangle = \langle Px, x\rangle$$

olup $P^* = P$ elde edilir. Eğer $Px = x$ ise, $\|Px\| = \|x\|$ olduğu açıktır.

Tersine bazı $x \in H$ için $\|Px\| = \|x\|$ kabul edelim. Bu durumda

$$\|a\|^2 = \|Px\|^2 = \|x\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$$

olup ya $\|b\| = 0$ ya da $b = 0$ dır. Böylece $x = a \in M$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.9.2 P, H'da bir projektör, $Q = I - P$, $M = P(H)$ ve $N = Q(H)$ olsun bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i Q da bir projektördür, dahası $PQ = QP = 0$.

ii $M = ker(Q) = N^\perp$; $N = ker(P) = M^\perp$ $W = M \oplus N$.

iii M ve N'nin her ikisi H'nın kapalı vektör alt uzayıdır.

Not 3.9.1 Q operatörü $P^{\perp}$ şeklinde de gösterilir.

İspat. (i) Teoremde verilenlere göre

$$Q^2 = (I - P)^2 = I - P - P + P^2 = I - P = Q$$

ve

$$Q^x = (I - P)^* = I^* - P^* = I - P = Q$$

olup Q'nun projektör olduğu elde edilir. Şimdi iddianın diğer kısmını ispat edelim.

$$PQ = P(I - P) = P - P^2 = P - P = O$$

ve

$$QP = (I - P)P = P - P^2 = P - P = 0$$

olup ispat tamamlanır.

(ii) $x \in M$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda bazı $y \in H$ için $x = Py$ yazabiliriz. Buradan $Qx = QPy = 0$ olup $M \subset ker(Q)$. Şimdi $Qx = 0$ olduğunu kabul edelim buradan $x = Ix = (P + Q)x = Px$ yani $x \in P(H) = M$ olup $ker(Q) \subset M$. Buradan $M = ker(Q)$. Sonuç olarak M bir kapalı vektör alt uzayıdır. Son olarak keyfi $x \in H$ alalım. Buradan $x = Px + Qx \in M + N$ buradan $H = M + N$. $M \cap N = kerQ \cap Q(H) = \{0\}$ dan dolayı $H = M \oplus N$ dir. Şimdi $x \in M^{\perp}$ olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul her $y \in H$ için $\langle x, Px\rangle > 0$ yani $\langle Px, y\rangle = 0$ ya da $Px = 0$ olmasıdır. Buradan $M^{\perp} = ker(P)$. P, Q simetrik olduğu için ispat tamamlanır.

(iii) M ve N'nin H'nın kapalı vektör alt uzayı (ii) de gösterildi.

Teorem 3.9.3 P, H üzerinde bir operatör olsun. Bu durumda P'nin projektör olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $x \in H$ için

$$\|Px\|^2 = \langle Px, x\rangle$$

olmasıdır.

İspat. "$\Longrightarrow$" P'nin projeksiyon olduğunu kabul edelim. $M = P(H)$ ve $N = \ker(P)$ olsun. $H = M \oplus N$ ispat edildi. Bu durumda her $x \in H$ için $x = a + b$, $a \in M$, $b \in N$ yazabiliriz. $M \perp N$ olduğunda

$$\|Px\|^2 = \langle Px, Px\rangle = \langle a, a\rangle = \langle a, a + b\rangle = \langle Px, x\rangle$$

olup istenen elde edilmiş oldu.

"$\Longleftarrow$" $\|Px\|^2 = \langle Px, x\rangle$, her $x \in H$ olsun. Bu durumda

$$\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2 = \langle Px, Px\rangle = \langle P^x Px, x\rangle$$

olup $P = P^*P$ dir. Buradan

$$P^x = (P^*P)^* = P^*P^{**} = P^*P = P$$

ve

$$P = P^*P = P^2$$

elde edilir. Bu ise P'nin projeksiyon olduğunu ispatlar. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Sonuç 3.9.1 Her P projektörü için $\|P\| = 1$ ya da $\|P\| = 0$ dır.

Teorem 3.9.4 P, Q H'da iki projeksiyon olsun. Bu durumda PQ'nun projeksiyon olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $PQ = QP$ olmasıdır. Bu durumda $PQ(H) = P(H) \cap Q(H)$ dır.

İspat. "$\Longrightarrow$" PQ'nun projeksiyon olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$PQ = (PQ)^* = Q^*P^* = QP$$

dir.

"$\Longleftarrow$" $PQ = QP$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$(PQ)^2 = PQPQ = PPQQ = PQ$$

ve

$$(PQ)^* = Q^*P^* = QP = PQ$$

olup buradan PQ projeksiyondur. Şimdi $PQ(H) = P(H) \cap Q(H)$ olduğunu gösterelim. Bunun için PQ'nun projeksiyon olduğunu kabul edelim. Keyfi $x \in PQ(H)$ seçelim. Bazı $y \in H$ için $x = PQy$ yazabiliriz. Bu durumda $x = P(Qy)$ ve $x = P(Qx) \in Q(H)$ yani $x \in P(H) \cap Q(H)$. Diğer taraftan keyfi $x \in P(H) \cap Q(H)$ alalım. Bu durumda $x = Px$ ve $x = Qx$ yazabiliriz. Buradan $x = P(Qx) \in PQ(H)$. Sonuç olarak $PQ(H) = P(H) \cap Q(H)$ tır.

Teorem 3.9.5 P, Q, H'da iki projektör, $M = P(H)$ ve $N = Q(H)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

i $P + Q$ bir projeksiyondur.

ii $M \perp N$.

iii $P(N) = 0$.

iv $PQ = 0$.

Not 3.9.2 Bu durumda $P + Q$, $M + N$ üzerinde bir projektördür.

İspat. (i$\Longrightarrow$ii): $x \in M$ olsun. Bu durumda $Px = x$ ve

$$\begin{aligned} \|x\|^2 + \|Qx\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2 &= \langle Px, x\rangle + \langle Qx, x\rangle \\ &\leq \langle (P+Q)x, x\rangle \leq \|P+Q\|.\|x\|^2 \leq \|x\|^2 \end{aligned}$$

Buradan $\|Qx\| = 0$ olup $x \in \ker(Q)$. Böylece $M \subset \ker Q = N^{+}$ olup $M \perp N$ elde edilir.

(ii$\Longrightarrow$iii) : $M \perp N$ olduğundan $N \subset M^{\perp} = \ker(P)$ olup $P(N) = 0$

(iii$\Longrightarrow$iv) : $P(N) = 0$ olduğundan $PQ(H) = P[Q(H)] = P(N) = 0$, yani $PQ = 0$ dır.

(iv$\Longrightarrow$i) : $PQ = 0$ olduğundan $QP = Q^*P^* = (PQ)^* = 0$ ve buradan

$$(P+Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2 = P + Q$$

elde ederiz. $P + Q$'nun öz eşlenik olduğu açıktır. $P + Q$ aynı zamanda projektördür.

Şimdi $P + Q$'nun $M + N$ üzerinde bir projeksiyon olduğunu göseterelim. Keyfi $x \in P(H) + Q(H)$ alalım. Bu durumda $a = Pa \in P(H)$ ve $b = Qb \in Q(H)$ olacak şekilde $x = a + b$ yazabiliriz. Buradan

$$(P+Q)x = Pa + Pb + Qa + Qb = a + PQb + QPa + b = x$$

yani

$$x = (P+Q)x \in (P+Q)(H)$$

olup $P(H) + Q(H) \subset (P+Q)(H)$ elde edilir. Benzer şekilde ters durum da gösterilebilir. Yani $(P+Q)(H) \subset P(H) + Q(H)$ elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.9.6 $P_1, P_2, ..., P_n$ bir H Hilbert uzayında projektörler ve $P = P_1+P_2+....+P_n$ olsun. Bu durumda P'nin bir projektör olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul her $1 \leq j \neq k \leq n$ için $P_j.P_k = 0$ olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki P bir projektör ve $j \neq k$ olsun. Bu durumda her $x \in H$ için

$$\sum_{j=1}^{n} \|P_j x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle P_j x, x\rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} P_j x, x\rangle = \langle Px, x\rangle \leq \|P\|\|x\|^2 = \|x\|^2$$

x yerine $P_k x$ alarak,

$$\sum_{j=1}^{n} \|P_j.P_k\|^2 \leq \|P_k x\|^2 \text{ yani } \sum_{j\neq k} \|P_j.P_k x\|^2 \leq 0.$$

Buradan $P_j.P_k x = 0$. $x \in H$ keyfi alındığından $j \neq k$ için $P_j.P_k = 0$ dır. Tersi durumun doğruluğu açıktır.

Şimdi projektör operatörün bazı özeliklerini verelim:

1) A'nın projektör olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $A = A^*A$ olmasıdır.

2) Her kompakt projektör sonlu boyutludur.

3) Eğer A bir izometri ise bu durumda AA^* bir projektördür.

4) A, B iki projektör olsun. $A + B - AB'$nin projektör olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $AB = BA$ olmasıdır.

Tanım 3.9.2 A, H'da bir operatör ve N de H'ın bir vektör alt uzayı olsun. Eğer $A(N) \subset N$ oluyorsa N'ye A altında invaryanttır denir. Aynı zamanda eğer hem N hem de $N^{\perp}A$ altında invaryant ise N'ye A'ya indirgenir denir.

Teorem 3.9.7 A, H üzerinde bir operatör ve P de H'dan $N \subset H$ bir vektör alt uzayına tanımlı bir projeksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i) N, A'nın bir invaryant alt uzayıdır.

ii) $AP = PAP$.

iii) $N^{\perp}$, A^* bir invaryant alt uzayıdır.

İspat. (i$\Longrightarrow$ii) : Kabul edelim ki N, A'nın bir invaryant alt uzayı olsun. Bu durumda keyfi bir $x \in H$ alalım. İnvaryanttın tanımına göre $Px \in N$ olacaktır. N, A altında invaryant olduğundan $APx \in N$ ve buradan $PAPx = APx$ tır. x keyfi seçildiğindan $PAP = AP$.

(iv$\Longrightarrow$i) : Kabul edelim ki $PAP = AP$ olsun. Bu durumda $A(N) = AP(H) = PAP(H) \subset N$ ve böylece N, A altında invaryanttır.

(iii$\Longrightarrow$ii): $N^{\perp}$, A^* bir invaryant olabilmesi için gerekli yeterli koşul

$$A^*P^{\perp} = P^{\perp}A^*P^{\perp} \Longleftrightarrow A^*(I-P) = (I-P)A^*(I-P) \Longleftrightarrow PA^* = PA^*P \Longleftrightarrow AP = PAP$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.9.8 A, H üzerinde bir operatör ve P de H'dan $N \subset H$ bir vektör alt uzayına tanımlı bir projeksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i) N, A'ya indirgenir.

ii) $AP = PAP$.

iii) $N^{\perp}$, hem A hem de A^* altında invaryanttır.

iv) $N^{\perp}$, hem A indirgenir.

İspat. (i$\Longrightarrow$ii) : $P^{\perp} = I - P$ nin $N^{\perp}$ üzerinde projektör olduğu açıktır. İddiaya göre N, A altında invaryanttır. Bu durumda

$$AP^{\perp} = P^{\perp}AP^{\perp} \text{ yani } A(I-P) = (I-P)A(I-P)$$

ya da

$$PA = PAP$$

N aynı zamanda A altında invaryant olduğundan $PA = PAP$ olup $PA = PA$ elde ederiz.

(ii$\Longrightarrow$iii) : $PAP = (PA)P = (AP)P = AP$ olduğundan N, A altında invaryanttır. Benzer şekilde

$$PAP = P(AP) = P(PA) = PA$$

yazabiliriz. Buradan eşlenik alınırsa $PA^*P = A^*P$ olup N aynı zamanda A^* altında invaryanttır.

(iii$\Longrightarrow$i) : İddiaya göre N, A^* altında invaryant olduğu için $N^{\perp}$, de aynı zamanda $A^{**} = A$ altında invaryanttır. Böylece N, A'ya indirgenmiş olur.

(iii$\Longrightarrow$iv) : N kapalı olduğu için $N^{\perp\perp} = N$ dir. Dolayısıyla istenilen sonuç tanımdan açıktır.

Sonuç 3.9.2 A, H'da bir operatör ve N'de H' nın bir kapalı vektör alt uzayı olsun. Bu durumda :

i) Eğer A öz eşlenik ise bu durumda N'nin A'ya indirgenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul $A(N) \subset N$ olmasıdır.

ii) Eğer A üniter ise bu durumda N'nin A'ya indirgenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul $A(N) \subset N$ olmasıdır.

İspat. (i) : Verilen iddialara ve uygun tanımlar altında ispat açıktır.

(ii) : Kabul edelim ki N'nin A'ya indirgensin. Bu durumda $A^*(N)$ yani $N = AA^*(N) \subset A(N)$ yazabiliriz. N, A'ya indirgendiği için A altında invaryanttır. Sonuç olarak $A(N) = N$ dir. Tersine, $A(N) = N$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$A^*(N) = A^*A(N) = I(N) = N.$$

Böylece N, A^* altında invaryanttır. Dolayısıyla N, A'ya indirgenir.

3.10 Operatörlerde Sıralama

Tanım 3.10.1 A, B bir Hilbert uzayında iki öz eşlenik operatör olsun. Bu durumda eğer her $x \in H$ için $\langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle$ ise $A \leq B$ olup A'ya B'den küçük ve eşit operatör denir.

Lemma 3.10.1 A, B ve C, H üzerinde birer özeşlenik operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) $A \leq A$.

ii) Eğer $A \leq B$ ve $B \leq C$ ise, o zaman $A \leq C$ dir.

iii) Eğer $A \leq B$ ve $B \leq A$ ise, o zaman $A = B$.

iv) Eğer $A \leq B$ ise, o zaman $A + C \leq B + C$ ve $-B \leq -A$ dir.

v) Eğer $A \leq B$ ve $\lambda \geq 0$ ise, o zaman $\alpha A < \alpha B$.

vi) Eğer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\alpha \leq \beta$ ve $A \geq 0$ ise o zaman $\lambda A \leq \beta A$.

Teorem 3.10.1 Eğer $A \geq 0$ ise o zaman her $x, y \in H$ için aşağıdakiler doğrudur.

i) Eğer $| \langle Ax, y \rangle |^2 \leq \langle Ax, x \rangle . \langle Ay, y \rangle$,

ii) Eğer $\|Ax\|^2 \leq \|A\| \langle Ax, x \rangle$.

Teorem 3.10.2 *i)* Eğer $A \leq B$ ise bu durumda her T operatörü için

$$T^*AT \leq T^*BT$$

ii) Eğer $0 \leq A \leq B$ ise bu durumda $\|A\| \leq \|B\|$

İspat. (i): Aşağıdaki eşitsizlikten her $x \in H$ için

$$\langle T^*ATx, x \rangle = \langle ATx, Tx \rangle \leq \langle BTx, Tx \rangle = \langle T^*BTx, x \rangle$$

$$T^*AT \leq T^*BT$$

bulunur.

(ii): Eğer $A = 0$ ise açıktır. Farzedelim ki $\|A\| \neq 0$ olsun. Bu durumda H'da herbir $\|x\| \leq 1$ için

$$\|Ax\|^2 \leq \|A\| \langle Ax, x \rangle \leq \|A\| \langle Bx, x \rangle \leq \|A\| \|B\| \|x\|^2 \leq \|A\| \|B\|.$$

Şimdi $\|x\| \leq 1$ üzerinden supremum alınırsa $\|A\|^2 \leq \|A\| \|B\|$ olup her iki tarafı $\|A\|'$na bölersek $\|A\| \leq \|B\|$ buluruz.

Teorem 3.10.3 $A_n \leq B_{n+1}$ H' da öz eşlenik operatörlerinin bir artan dizisi olsun. Eğer bu operatör bir üst sınıra sahip ise yani her $n \in N$ için $B \geq A_n$ olan bir öz eşlenik operatör bulunursa her $x \in H$, $n \in H$ için $A_n x \longrightarrow Ax$ ve $A = sup_{n \in N} A_n$ olacak şekilde bir A öz eşlenik operatörü vardır. Benzer şekilde bu sonuç azalan dizi için de yapılabilir.

İspat. A_n ve B operatörleri yerine sırasıyla $A_n - A_1$ ve $B - A_1$ alalım ve $A_n \geq 0$ olduğunu kabul edelim. Herbir $x \in H$ için reel sayılarının bir sınırlı artan dizisi olan

$$\langle A_n x, x\rangle \leq \langle A_{n+1}x, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu ise dizinin yakınsak olduğunu gösterir. Şimdi keyfi $m > n \geq 1$ alalım. İddiaya göre $0 \leq A_n \leq B$ olduğu için $\|A_n\| \leq \|B\|$ yazabiliriz.

$$\|A_m x - A_n x\|^2 \leq \|A_m - A_n\|\langle (A_m - A_n)x, x\rangle \leq 2\|B\|(\langle A_m x, x\rangle - \langle (A_n)x, x\rangle)\xrightarrow[m,n\longrightarrow\infty]{} 0$$

Olup $\{A_n x\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Banach-Steinhaus Teoremine göre $Ax := \lim_{n\to\infty} Anx$ H'da bir operatör tanımlar. Her $x \in H$ için $\langle Ax, x\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle A_n x, x\rangle$ reel olduğu için A operatörü öz eşlenirtir. Her $m > n$ için $\langle A_n x, x\rangle \leq \langle A_m x, x\rangle$ yazabiliriz. $m \longrightarrow \infty$ iken $\langle A_n x, x\rangle \leq \langle Ax, x\rangle$ olup her $n \in N$ için $A_n \leq A$ dır. Bu yüzden A, $\{A_n\}$ kümesinin bir üst sınırı olsun. Başka bir ifadeyle U, An kümesinin keyfi bir üst sınırı olsun. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\langle A_n x, x\rangle \leq \langle Ux, x\rangle$$

yazabiliriz. $n \to \infty$ iken, her $x \in H$ için

$$\langle Ax, x\rangle \leq \langle Ux, x\rangle, \ A \leq U$$

elde ederiz.

Tanım 3.10.2 M ve N, H'nın iki vekör alt uzayı olsun. Bu durumda $N \cap N^{\perp}$'ye N'de M'nin ortogonal tümleyeni adı verilir ve $N \ominus M$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.10.4 P ve Q, H'da iki projektör olsun. Ayrıca $M = P(H)$ ve $N = Q(H)$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) $M \subset N$

ii) $QP = P$.

iii) $PQ = P$.

iv) $Q - P$ bir projektördür.

v) Her $x \in H$ için $\langle (Q - P)x, x\rangle \geq 0$.

vi) Her $x \in H$ için $\|Px\| \leq \|Qx\|$.

vii) $P \leq Q$. Bu durumda $Q - P$ de $N \ominus M$ üzerinde bir projektördür.

İspat. (i$\Longrightarrow$ii) : H' da keyfi bir $x \in H$ alalım. Bu durumda $Px \in M \subset N$. Bu yüzden $QPx = Px$ dir. x keyfi olduğundan $QP = P$ elde ederiz.

(ii$\Longrightarrow$iii) :

$$P = P^* = (QP)^* = P^*Q^* = PQ.$$

(iii$\Longrightarrow$iv) : Farzedelim ki $PQ = P$. Bu durumda $P = P^* = (QP)^* = P^*Q^* = QP$. Buradan $(Q-P)^2 = Q^2 - PQ - QP + P^2 = Q - P - P + P = Q - P$. $Q - P$'nin öz eşlenik olduğu açıktır. Dolayısıyla $Q - P$ bir projektördür.

(iv$\Longrightarrow$v) : $Q-P$ projektör olduğundan her $x \in H$ için $\langle (Q-P)x, x\rangle = \|(Q-P)x\|^2 \geq 0$

(v$\Longrightarrow$vi) : Her $x \in H$ için $\langle (Q-P)x, x\rangle \geq 0$ olup $\langle Qx, x\rangle \geq \langle Px, x\rangle$ yazabilir. Yani $\|Qx\|^2 \geq \|Px\|^2$ veya $\|Qx\| \geq \|Px\|$.

(vi$\Longrightarrow$i) : Herhangi bir $x \in M$ için $\|x\| \leq \|Px\| \leq \|Qx\| \leq \|Q\|.\|x\| \leq \|x\|$ yani $\|Qx\| \geq \|x\|$ veya $x \in N$ dir. Bu durumda $M \subset N$.

(v$\Longrightarrow$vii) : Tanımdan direk açıktır..

Son olarak $Q - P$ bir projektör olsun. Bu durumda

$$QP^{\perp} = Q(I - P) = Q - QP = Q - P.$$

Böylece $QP^{\perp}$ de bir projektör olduğunu elde ederiz. Buradan

$$(Q - P)(H) = QP^{\perp}(H) = Q(H) \cap P^{\perp}(H) = Q(H) \cap [P(H)]^{\perp} = N \cap M^{\perp} = N \ominus M.$$

Sonuç 3.10.1 Eğer A, H üzerinde bir pozitif operatör ise bu durumda

i) Her $x \in H$ için $\langle Ax, x\rangle$ pozitiftir.

ii) A öz eşleniktir.

Sonuç 3.10.2 A, B pozitif operatör olsun. Bu durumda eğer $A + B = 0$ ise $A = B = 0$ dır.

Tanım 3.10.3 Her $n \in N$ için A_n, B H'da operatör olsunlar. Bu durumda

i) Eğer

$$\lim_{n\to\infty} sup_{\|x\|\leq 1}\|A_n x - Bx\| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|A_n - B\| = 0$$

oluyorsa $A_n \longrightarrow B$ ye düzgün veya norm anlamınnda yakınsaktır denir. $B = \lim A_n = U - \lim A_n$ şeklinde gösterilir.

ii) Eğer her $x \in H$ için $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|A_n x - Bx\| = O$ oluyorsa $A_n \longrightarrow B$ veya $B = s - \lim A_n$ güçlü yakınsaktır.

iii) Eğer her $x, y \in H$ için $\lim_{n\longrightarrow\infty}\langle A_n x - Bx, y\rangle = O$ oluyorsa $A_n \longrightarrow B$ veya $B = s - \lim A_n$ zayıf yakınsaktır.

Uyarı 3.10.1 Yukarıdaki tanımı kullanarak düzgün yakınsak ise güçlü yakınsak ve güçlü yakınsak ise zayıf yakınsak olduğunu göstermek hiç de zor değildir. Fakat tersi genelde doğru değildir.

Teorem 3.10.5 Eğer $A_n \longrightarrow A$, $B_n \longrightarrow B$ güçlü yakınsak ise bu durumda $A_n B_n \longrightarrow AB$ güçlü yakınsaktır.

İspat. Her $x \in H$ için $A_n x \longrightarrow Ax$, $B_n x \longrightarrow Bx$ yazabiliriz. Düzgün sınırlılık teoremini kullanarak $M = sup_n\|A_n\| < \infty$ yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} \|A_n B_n x - ABx\| &\leq \|A_n\|\|B_n x - Bx\| + \|A_n Bx - ABx\| \\ &\leq M\|A_n x - Bx\| + \|A_n(Bx) - A(Bx)\| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

olup güçlü yakınsaklık tanımına göre $A_n B_n \longrightarrow AB$ güçlü yakınsak olduğunu elde ederiz.

3.11 Özdeğerler

Tanım 3.11.1 H bir Hilbert uzayı olsun. Kabul edelim ki A, H'da bir operatör ve bir $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı olsun. Eğer $Ax = \lambda x$ olan sıfırdan farklı bir $x \in H$ vektörüvarsa bu λ'ya A operatörünün bir özdeğeri denir. Bu durumda $Ax = \lambda x$ şartını sağlayan sıfırdan farklı bir x vektörü için bir $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına karşılık $x \in H$ vektörüne A'nın bir öz vektörü denir. λ'nın tüm vektörlerinin kümesine λ'nın öz uzayı adı verilir.

Teorem 3.11.1 Her bir öz uzayı kapalı bir alt uzaydır. Farklı özdeğerlerin sıfırdan farklı öz vektörleri lineer bağımsızdır.

Teorem 3.11.2 A, H'da bir normal operatör olsun. Bu durumda

i) Eğer $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $x \in H$ için $Ax = \lambda x$ ise $A^*x = \overline{\lambda}x$.

ii) A operatörlerünün farklı öz değerlerinin öz vektörleri ortoganaldir.

İspat. (i): İddiaya göre A normal operatör olduğundan $A - \lambda I$ da normaldir. Buradan

$$\|A^*x - \overline{\lambda}x\| = \|(Ax - \lambda I)^*x\| = \|(Ax - \lambda I)x\| = 0$$

olup ispat tamamlanır.

(ii): $\lambda \neq \mu$ A'nın özdeğerleri, x, y ise sırasıyla λ, μ'nün öz vektörleri olsunlar. Bu durumda

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \lambda\langle x, \overline{\mu}y\rangle = \mu\langle x, y\rangle$$

yani $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$ ve $\langle x, y\rangle$. Bu yüzden $x \perp y$.

Teorem 3.11.3 A, H Hilbert uzayında bir operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) Eğer A öz eşlenik ise onun tüm öz değerleri reeldir.

ii) Eğer A anti eşlenik ise onun tüm öz değerleri tamamen sanaldır.

iii) Eğer A izometrik ise bu durumda her bir öz değerinin mutlak değeri birdir. Ayrıca her üniter operatör izometriktir.

iv) Eğer A pozitif ise tüm öz değerlerde pozitiftir.

İspat. λ, A' nın bir öz değeri ve x te λ'nın sıfırdan farklı öz vektörü olsun. Bu durumda

(i): $\lambda\|x\|^2 = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle x, A^*x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda}\|x\|^2.$

$\lambda = \overline{\lambda}$. Buradan λ reeldir.

(ii): $\lambda\|x\|^2 = \langle x, A^*x\rangle = \langle x, -Ax\rangle = \langle x, -\lambda x\rangle = -\overline{\lambda}\|x\|^2.$

$\lambda = -\overline{\lambda}$. Buradan λ tamamen sanaldır.

(iii): $\|x\|^2 = \|Ax\|^2 = \|\lambda x\|^2 = |\lambda|^2.\|x\|^2$

yani $|\lambda| = 1$.

(iv): A pozitif olduğundan

$$0 \leq \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\|x\|^2$$

buradan $\lambda \geq 0$ dır.

Lemma 3.11.1 A, B H Hilbert uzayında iki operatör olsun. Eğer $AB = BA$ ise bu durumda B'nin her öz uzayı A altında invaryanttır.

İspat. $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\mu = ker(B - \lambda I)$ B'nin öz uzayı olsun.Bu durumda her $x \in \mu$ için

$$(B - \lambda I)Ax = A(B - \lambda I)x = A0 = 0.$$

Yani $Ax \in ker(B - \lambda I) = \mu$ dolayısıyla μ, A altında invaryanttır.

Teorem 3.11.4 Eğer A, H Hilbert uzayında normal operatör ise her öz uzayı A'ya indirgenir.

İspat. A, normal olduğundan AA^*, A^*A birleşmeli olup A'nın her öz uzayı hem A hem de A^* altında invaryanttır.

Not 3.11.1 A bir operatör ve x de sıfırdan farklı bir vektör olsun. Bu durumda eğer $|\langle Ax, x\rangle| = \|Ax\|\|x\|$ ise, x, A'nın bir öz vektörüdür.

3.12 Hilbert Uzaylarının Spektral Özellikleri

3.12.1 Bir Operatörün Spektrumu

Biz bu kısımda Hilbert Uzayında bir operatörün özelliklerini, cebirsel işlemler yardımıyla elde edilen öz değerler yardımıyla açıklamaya çalışacağız.

Lemma 3.12.1 A, H Hilbert uzayında bir operatör olsun. Eğer A ve A^*'ın her ikisi de alttan sınırlı ise, bu durumda A tersinirdir.

İspat. İddiaya göre A^* alttan sınırlı olduğu için A^*'ın injektiftir. Yani $ker(A^*) = \{0\}$. Böylece $Im(A) = [ker(A^*)]^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H$. Buradan $Im(A)$ H'da yoğundur. Yine iddiaya göre A alttan sınırlı olduğundan terslenebilirdir.

Teorem 3.12.1 H Hilbert uzayındaki her A operatörü için $I + A^*A$ terslenebilirdir.

İspat. Her $x \in H$ için

$$\|(I+(A^*A))x\|^2 = \langle x+A^*Ax, x+A^*Ax\rangle = \|x\|^2+\langle x, A^*Ax\rangle+\langle A^*Ax, x\rangle+\|A^*Ax\|^2 \geq \|x\|^2$$

Buradan A operatörü alttan sınırlıdır. $A^* = A$ da aynı zamanda alttan sınırlı olduğu için A terslenebilirdir.

Lemma 3.12.2 $\sigma(A^*) = \overline{[\sigma(A)]}$ kompleks eşlenik

İspat. $\{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}$ sağ taraf olarak kabul edersek bu durumda biz biliyoruz ki $A - \lambda I$ tersinir olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $A^* - \overline{\lambda} I$'nın tersinir olmasıdır. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.12.2 Eğer A öz eşlenik ise bu durumda bu operatörün spektrumu sadece reel sayılardan oluşur.

İspat. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\beta \neq 0$ için $\lambda = \alpha + i\beta$ olun. Eğer biz $\lambda \notin \sigma(A)$ olduğunu göterirsek veya başka bir ifadeyle $A - \lambda I$ tersinir ise ispat tamamlanmış olur. Buradan her $x \in H$ için

$$\begin{aligned}
\|(A - \alpha I \pm \beta i I)x\|^2 &= \langle (A - \alpha I \pm \beta i I)x, (A - \alpha I \pm \beta i I)\rangle \\
&= \|(A - \alpha I)x\|^2 + \langle \pm\beta i x, (A - \alpha I)x\rangle + \langle (A - \alpha I)x, \pm\beta i x\rangle + \|\beta i x\|^2 \\
&= \|(A - \alpha I)x\|^2 \pm \beta i\langle x, (A - \alpha I)x\rangle \pm \beta i\langle (A - \alpha I)x, x\rangle + \beta^2\|x\|^2 \\
&= \|(A - \alpha I)x\|^2 \pm \beta i\langle (A - \alpha I)x, x\rangle \pm \beta i\langle (A - \alpha I)x, x\rangle + \beta^2\|x\|^2 \\
&\geq \beta^2\|x\|^2
\end{aligned}$$

$\beta \neq 0$ için $A - \lambda I = A - \lambda I - \beta i I$ ve $(A - \lambda I)^* = A - \alpha I + \beta i I$ alttan sınırlıdır. Sonuç olarak $A - \lambda I$ terslenebilirdir yani $\lambda \notin \sigma(A)$.

Teorem 3.12.3 Eğer A pozitif operatör ise bu durumda onun spektrumu sadece pozitif sayılardan oluşur.

İspat. A öz eşlenik olduğu için Teorem (3.12.2) ten dolayı $\sigma(A)$ sadece reel sayılardan oluşur. Kabul edelim ki $\lambda < 0$ olsun. Keyfi $x \in H$ alalım. İddiaya göre A pozitif olduğu için $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ dır.

$$\|(A-\lambda I)x\|^2 = \|Ax\|^2 - 2\lambda\langle Ax, x\rangle + \lambda^2\|x\|^2 \geq \lambda^2\|x\|^2$$

Buradan $A - \lambda I$ alttan sınırlıdır. $A - \lambda I$ öz eşlenik olduğu için terslenebilirdir. Böylece $\lambda \notin \sigma(A)$ elde edilir. Sonuç olarak $\sigma(A)$ sadece pozitif sayılar içerir.

Teorem 3.12.4 Eğer A üniter operatör ise bu durumda onun spektrumu kompleks düzlemin birim dairesinin kompakt bir alt kümesidir.

İspat. İddiaya göre A üniter olduğu için aynı zamanda bir izometridir. Dolayısıyla $\|A\| = 1$ dir.Buradan her $\lambda \in \sigma(A)$ için $|\lambda| \leq \|A\| = 1$ elde ederiz. Şimdi keyfi $|\lambda| < 1$ alalım. $B = A - \lambda I$ olsun. O zaman

$$\|A - B\| = \|A - (A - \lambda I)\| = \|\lambda I\| = |\lambda| < 1 = \frac{1}{\|A^*\|} = \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

A tersinir olduğu için B de tersinirdir. Bu ise bize $\lambda \notin \sigma(A)$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

3.13 Yaklaşım Spektrumu:

Tanım 3.13.1 A, H Hilbert uzayında bir operatör olsun. Eğer $\|Ax_n - \lambda x_n\| \longrightarrow 0$ olacak şekilde H'da $\|x\| = 1$ dizisi var ise bu $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına A operatörünün yaklaşık öz değeri denir.

Tanım 3.13.2 Tüm yaklaşık özdeğerlein kümesine A operatörünün yaklaşık noktasal spekturumu denir ve $\alpha(A)$ ile göterilir.

Tanım 3.13.3 A, H Hilbert uzayında bir operatör olsun. Bu operatörün tüm özdeğerlerinin kümesine A'nın noktasal spektrumu adı verilir ve $\pi(A)$ ile gösterilir.

Lemma 3.13.1 Bir $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısının bir yaklaşık öz değer olmaması için gerekli ve yeterli koşul $A - \lambda I$'nın alttan sınırlı olmasıdır.

Teorem 3.13.1 A, H Hilbert uzayında bir operatör olsun. Bu durumda

$$\pi(A) \subset \alpha(A) \subset \sigma(A).$$

İspat. A, H Hilbert bir operatör ve λ'da A'nın bir özdeğeri olsun. Bu durumda sıfırdan farklı bir λ'ya uygun bir y öz vektörü vardır. $x_n := \frac{y}{\|y\|}$ olarak tanımlayalım. Buradan $\|x_n\| = 1$ ve $\|Ax_n - \lambda x_n\| = 0$ dır. Bu ise bize λ'nın bir yaklaşım öz değeri olduğunu gösterir. Yani $\pi(A) \subset \alpha(A)$. Daha sonra keyfi $\lambda \notin \sigma(A)$ alalım. Buradan $A - \lambda I$ tersinirdir. Böylece $A - \lambda I$ alttan sınırlıdır. Bu ise bize λ'nın bir yaklaşım özdeğeri olmadığını gösterir. Yani $\lambda \notin \alpha(A)$. Sonuç olarak $\alpha(A) \subset \sigma(A)$

Teorem 3.13.2 A, H Hilbert uzayında bir normal operatör olsun. A ise $\alpha(A) = \sigma(A)$.

İspat. $\lambda \notin \alpha(A)$ olsun. Buradan $A - \lambda I$ alttan sınırlıdır va dolayısıyla onun değer kümesi H'da kapalıdır. Şimdi $Im(A - \lambda I)$'nın H'da yoğun olmadığını kabul edelim. Bu durumda

$$Im(A - \lambda I) = \overline{Im(A - \lambda I)} \neq H.$$

Böylece $x \in [Im(A - \lambda I)]^{\perp} = ker(A - \lambda I)^*$ olacak şekilde $x \neq 0$ vektörü vardır. İddiaya göre A normal olduğu için $(A - \lambda I)$ da normaldir. Buradan

$$\|(A - \lambda I)x\| = \|(A - \lambda I)^* x\| = 0.$$

$(A - \lambda I)$ alttan sınırlı olduğu için $\|x\| = 0$ dır.Yani $x = 0$ dır. Fakat bu ise $Im(A - \lambda I)$ tersinirdir. Bu ise bize $\lambda \notin \alpha(A)$ olduğunu gösterir. Böylece $\sigma(A) \subset \alpha(A)$ elde ederiz. Teorem (3.13.1)'den $\alpha(A) \subset \sigma(A)$ olup eğer A operatörü normal ise $\sigma(A) = \alpha(A)$ olduğunu göstermiş oluruz.

Teorem 3.13.3 Eğer A, H Hilbert uzayında bir öz eşlenik operatör ise bu durumda ya $\|A\|$ ya da $-\|A\|$ spektrumdadr. Dahası

$$\|A\| = \sup\{|\lambda : \lambda \in \sigma(A)|\}$$

spektral yarıçaptır.

İspat. $\lambda := \|A\|$ olsun. Bu durumda $\|Ax_n\| \longrightarrow \lambda$ olacak şekilde H'da $\|x_n\| = 1$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned}
\|A^2 x_n - \lambda^2 x_n\| &= \langle A^2 x_n - \lambda^2 x_n, A^2 x_n - \lambda^2 x_n \rangle \\
&= \|A^2 x_n\|^2 - \langle \lambda^2 x_n, A^2 x_n \rangle - \langle A^2 x_n - \lambda^2 x_n \rangle + \lambda^4 \|x_n\|^2 \\
&\leq \|A^2\| \|x_n\|^2 - 2\lambda^2 \langle Ax_n, Ax_n \rangle + \lambda^4 \|x_n\|^2
\end{aligned}$$

A öz eşlenik olduğu için

$$\leq \|A\|^4 - 2\lambda^2 \|Ax_n\|^2 + \lambda^4 = 2\lambda^2(\lambda^2 - \|Ax_n\|^2) \longrightarrow 0.$$

Buradan λ^2, A^2'nın bir yaklaşım öz değeridir. Başka bir ifadeyle $\sigma(A)^2 = [\sigma(A)]^2$. Buradan $\lambda^2 = \mu^2$ olan $\mu \in \sigma(A)$ vardır. Bu ise bize $\mu = \pm\|A\|$ olduğunu gösterir.

Sonuç olarak $\|A\|$ veya $-\|A\|$ spektrumdadır. Ayrıca spektral yarıçap için

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)|\} \leq \|A\|$$

daima doğrudur. Bu ise ispatı tamamlar.

Not 3.13.1 Eğer A, operatörü $|\lambda| = \|A\|$ olacak şekilde bir yaklaşım öz değere sahipse bu durumda

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Ax, x\rangle|$$

spektral yarıçaptır.

Not 3.13.2 Eğer λ bir A normal operatörünün bir yaklaşım öz değeri ise bu durumda $\overline{\lambda}$ de A^* ın bir yaklaşım öz değeridir.

Not 3.13.3

$$M := \sup\{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1\}$$

ve

$$m := \inf\{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1\}$$

şeklinde tanımlayalım.

Lemma 3.13.2 Eğer A, H Hilbert uzayında bir öz eşlenik operatör ise bu durumda

i) $-\|A\|I \leq A \leq \|A\|I$.

ii) $M := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : A \leq \lambda I\}$.

iii) $M := \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda I \leq A\}$.

iv) $mI \leq A \leq MI$.

İspat. A bir öz eşlenik operatör ve her $x \in H$ için

(3.13.1): $\langle Ax, x\rangle \leq |\langle Ax, x\rangle| \leq \|A\|\|x\|^2 = \langle \|A\|Ix, x\rangle$.

Bu yüzden $A \leq \|A\|I$ dır. Şimdi A yerine $-A$ getirelim.

$$-A \leq \| - A\|I = \|A\|I$$

yani

$$-\|A\|I \leq A.$$

(ii, iv) Eğer $A \leq \lambda I$ ise, her $\|x\| = 1$ den $\langle Ax, x\rangle \leq \langle \lambda Ix, x\rangle = \lambda$ yani $M \leq \lambda$. Dolayısıyla $M \leq \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : A \leq \lambda I\}$. Diğer taraftan M'nin tanımından her $x \neq 0$ için $\langle A\big(\frac{x}{\|x\|}\big), \frac{x}{\|x\|}\rangle \leq M$ yazabilir. Buradan her $x \in H$ için

$$\langle Ax, x\rangle \leq M\|x\|^2 = \langle MIx, x\rangle.$$

Böylece $A \leq MI$ dır. Bu ise bize $\inf\{\lambda \in \mathbb{R} : A \leq \lambda I\} \leq N$

Eğer $A \geq \lambda I$ bu durumda her $\|x\| = 1$ için $\langle Ax, x\rangle \geq \langle \lambda Ix, x\rangle = \lambda$ yani $m \geq \lambda$. Buradan $m \geq \sup\{\lambda \in \mathbb{R}A > \lambda I\}$. Diğer taraftan m'nin tanımından, her $x \neq 0$ için $\langle A\big(\frac{x}{\|x\|}\big), \frac{x}{\|x\|}\rangle \geq m$ yazabilir. Buradan her $x \in H$ için

$$\langle Ax, x\rangle \geq m\|x\|^2 = \langle mIx, x\rangle.$$

Böylece $A \geq mI$ yazabiliriz. Bu ise $\sup\{\lambda \in \mathbb{R} : A \geq \lambda I\} \geq m$ olduğunu gösterir.

Teorem 3.13.4 $\sigma(A)$ bir A öz eşlenik operatörünün spektrumunu göstersin. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

i) $M := \sup \sigma(A)$.

ii) $m := \inf \sigma(A)$.

iii) $\|A\| = \max\{|m|, |M|\}$.

İspat.

(i): Her $\lambda > M$ ve her $x \neq 0$ için

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - A)x\|.\|x\| \geq \langle(\lambda I - A)x, x\rangle &= \|x\|^2|\langle(\lambda I - A)\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\rangle| \\ &= \|x\|^2(\lambda - \langle\|A\|\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\rangle) \\ &\geq \|x\|^2(\lambda - M) \end{aligned}$$

ya da

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq (\lambda - M)\|x\|.$$

Bu ise bize $\lambda I - A$ alttan sınırlı olduğunu gösterir. Yani $\lambda \notin \alpha(A)$ A nın bir yaklaşım spekturumudur. A normal olduğu için $\alpha(A) = \sigma(A)$ dır. Dolayısıyla $\lambda \notin \sigma(A)$. Buradan $\sup \sigma(A) \leq M$. Diğer taraftan M'nin tanımından $M - \frac{1}{n} \leq \langle Ax_n, x_n \rangle$ olacak şekilde $\|x\| = 1$ vardır. Şimdi M'nin spektrumda olmadığını kabul edelim. Bu durumda $MI - A$ tersinirdir. Buradan

$$\begin{aligned}
1 = \|x_n\|^2 &= \|(\lambda I - A)^{-1}(MI - A)x_n\|^2 \\
&\leq \|(MI - A)^{-1}\|^2 \|(MI - A)x_n\|^2 \\
&\leq \|(MI - A)^{-1}\|^2 \|(MI - A)\| \langle (MI - A)x_n, x_n \rangle \\
&= \|(MI - A)^{-1}\|^2 . \|(MI - A)\| . [M - \langle Ax_n, x_n \rangle] \\
&\leq \|(MI - A)^{-1}\|^2 . \|(MI - A)\| . [M - (M - \frac{1}{n})] \\
&= \|(MI - A)^{-1}\|^2 . \|(MI - A)\| . \frac{1}{n} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Bu ise M'nin spektrumda olmadığı kabulümüz ile çelişir. Dolayısıyla $M \in \sigma(A)$ dır. Sonuç olarak $M = \sup \sigma(A)$

(ii): Uygun tanımlar doğrultusunda,

$$m = \inf\{\langle Ax, x \rangle : \|x\| = 1\} = -\sup\{\langle -Ax, x \rangle : \|x\| = 1\}$$
$$= -\sup \sigma(-A) = -\sup[-\sigma(A)] = \inf \sigma(A)$$

(iii): $\sigma(A)$ kompakt olduğu için $m, M \in \sigma(A)$ dır. Bu durumda ya $|m|, |M| \leq \|A\|$ ya da $\max\{|m|, |M|\} \leq \|A\|$. Her $0 < \|x\| \leq 1$ için m ve M'nin tanımından

$$m \leq \left\langle A\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \leq M$$

yazabiliriz. Buradan,

$$\left| \langle A\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \rangle \right| \leq \max\{|m|, |M|\}$$

ya da

$$|\langle Ax, x \rangle| \leq \|x\|^2 \max\{|m|, |M|\} \leq \max\{|m|, |M|\}$$

elde ederiz. iddiaya göre A öz eşlenik olduğu için $\|x\| \leq 1$ üzerinde supremum alınırsa $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| \leq 1\} \leq \max\{|m|, |M|\}$ elde ederiz ki bu ise ispatı tamamlanır.

Sonuç 3.13.1 Bir pozitif A operatörünün tersinir olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $A \geq \delta I$ olacak şekilde $\delta \geq 0$ sayısı var olmasıdır.

İspat. $'' \Longrightarrow''$ A tersinir olduğu için $0 \notin \sigma(A)$. Ayrıca iddiaya göre $A \geq 0$ olduğu için $\sigma(A) \geq 0$ dır. Buradan

$$m = \inf \sigma(A) > 0$$

ve

$$A \geq mI.$$

$"\Longleftarrow"$ $\delta\|x\|^2 = \langle \delta Ix, x\rangle \leq \langle Ax, x\rangle \leq \|A\|\|x\|$ den $\|Ax\| \geq \delta\|x\|$. A, pozitif olduğu için hem A, hem de A^* alttan sınırlıdır. Sonuç olarak A tersinirdir.

3.14 Zayıf Yakınsaklık

Banach uzaylarında zayıf yakınsaklık Hilbert uzaylarında da uygulanabilirdir.

Teorem 3.14.1 *H Hilbert uzayı olsun. Eğer $x_n \longrightarrow a$ H'da zayıf yakınsak ve $\|x\| \longrightarrow \|a\|$ ise bu durumda $x_n \longrightarrow a$ güçlü yakınsaktır.*

İspat. Verilen iddialara göre aşağıdaki hesaplamadan kolay bir şekilde görülmektedir.

$$\begin{aligned} \|x_n - a\|^2 &= \langle x_n - a, x_n - a\rangle = \|x_n\|^2 - \langle a, x_n\rangle - \langle x_n, a\rangle + \langle a, a\rangle \\ &\longrightarrow \|a\|^2 - \langle a, a\rangle - \langle a, a\rangle + \langle a, a\rangle = 0 \end{aligned}$$

Lemma 3.14.1 Her $m, n \geq 1$ tamsayılar için $\{a_{m,n} : n \geq 1\}$ dizisi her bir m için sınırlı bir dizi olacak şekilde a_{mn} kompleks sayıları göstersin. Bu durumda her m tamsayısı için $\{a_{mn(j)} : j \geq 1\}$ dizisi yakınsak olacak şekilde $1 \leq n(1) \leq n(2) \leq n(3) \leq ..$ dizisi vardır.

Teorem 3.14.2 *H Hilbert uzayında her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi zayıf yakınsak bir alt dizi içerir.*

İspat. $\{x_n\}$ H Hilbert uzayında sınırlı bir dizi ve M'de $\{x_n : n \geq 1\}$ tarafından gerilen bir kapalı vektör alt uzayı olsun. Eğer M sonlu boyutlu ise bu durumda $\{x_n\}$ dizisi zayıf yakınsak olan bir güçlü yakınsak alt diziye sahiptir. Bu durumda bu teoremin ispatı için bizim sadece sonlu boyutlu durumunu incelememiz yeterlidir. Şimdi $\{x_n\}$ dizisine ortonormalleştirme sürecini uygular ve ardışık terimlerin üzerinde lineer bağımlı olan bazı x_k'ları silersek M için bir $\{e_m : m \geq 1\}$ ortonormal bazı kurarız. İddiaya göre x_n sınırlı olduğu için $\{\langle e_m, \{x_n\}\rangle\}$ dizisi verilmiş olan m için sınırlıdır. Bu durumda her m için $\{\langle e_m, x_{n(j)}\rangle : j \geq 1\}$ yakınsak olacak şekilde $1 \leq n(1) \leq n(2) \leq n(3) \leq ..$ tamsayıları mevcuttur. Şimdi keyfi $u \in M$ alalım. İddiamız $\{\langle u, \{x_{n(j)}\rangle : j \geq 1\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu göstermektir. Gerçekten de verilmiş bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\|u-y\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde $y = \Sigma_{k=1}^{p} \alpha_k e_k$ sonlu bir lineer kombinasyonu vardır. Bu durumda $\langle y, x_{n(j)}\rangle = \Sigma_{k=1}^{p} \alpha_k \langle e_k, x_n\rangle$ tarafından verilen dizi $j \longrightarrow \infty$ yakınsaktır. Buradan $\{\langle y, x_{n(j)}\rangle : j \geq 1\}$ dizisi Cauchy dizisidir. Her $i, j \geq j_o$ için bir j_o tamsayısı vardır. Bu durumda

$$|\langle y, \{x_{n(j)}\rangle - \langle y, x_{n(j)}\rangle| \leq \varepsilon,$$

yazabiliriz x_n dizisi sınırlı olduğdan her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| \leq \lambda$ olacak şekilde $\lambda > 0$ sayısı vardır. Her $i, j \geq j_0$ için

$$\begin{aligned}
|\langle u, x_{n(i)}\rangle - \langle u, x_{n(j)}\rangle| &= |\langle u, x_{n(i)} - x_{n(j)}\rangle| \\
&\leq |< u - y, x_{n(i)} - x_{n(j)}\rangle| + |< y, x_{n(i)} - x_{n(j)}\rangle| \\
&\leq \|u - y\|\|x_{n(i)} - x_{n(j)}\| + \|\langle y, x_{n(i)} - x_{n(j)}\rangle| \\
&\leq \varepsilon(\lambda + \lambda) + \varepsilon = (2\lambda + 1)\varepsilon.
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu ise bize $\{\langle u, x_{n(j)}\rangle : j \geq 1\}$ dizisini Cauchy olduğunu ve dolayısıyla $\mathbb{C}$ de yakınsadığını gösterir. Şimdi keyfi bir $z \in H$ alalım. Bu durumda $u \in M$ ve $v \in M^{\perp}$ olacak şekilde $z = u + v$ yazabiliriz. $x_{n(j)} \in M$ olduğu için

$$\langle z, x_{n(j)}\rangle = \langle u, x_{n(j)}\rangle + \langle v, x_{n(j)}\rangle = \langle u, x_{n(j)}\rangle$$

dizisi $j \longrightarrow \infty$ yakınsaktır. Buradan onun $\{\langle x_{n(j)}, z\rangle : j \geq 1\}$ kompleks eşleniğide yakınsaktır. Sonuç olarak $\{x_{n(j)}\}$ dizisi zayıf yakınsaktır.

Sonuç 3.14.1 *H Hilbert uzayının kapalı birim topu içindeki her dizi kapalı birim topun bazı noktalarında zayıf yakınsak olan bir diziye sahiptir. Başka bir ifadeyle bir Hilbert uzayının kapalı birim topu zayıf dizisel kompaktır.*

İspat. Kapalı birim top içindeki bir $\{x_n\}$ dizisi sınırlıdır. Dolayısıyla bazı $a \in H$'ya zayıf yakınsak olan bir alt diziye sahiptir. Buradan her bir $z \in H$ için $\langle z, y_n\rangle \longrightarrow \langle z, a\rangle$ vardır. Banach-Steinhaus Teoreminden $\|a\| \leq \liminf \|y_n\| \leq 1$ yani a kapalı birim top üzerindedir.

3.15 Diagonal Operatörler

$\{u_n\}$ ve $\{e_n\}$ sırasıyla H, G Hilbert Uzaylarında ortonormal dizi ve $\{\lambda : n \geq 1\}$ kompleks sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu dizi sıfır olacak ve sonlu veya sonsuz bir dizide olabilir. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in H$ için

$$u_n \otimes e_n(x) := \langle x, u_n \rangle e_n$$

şeklinde tanımlayalım. Her bir $u_n \otimes e_n$ H'tan G'ye bir boyutlu sürekli lineer dönüşüm olduğu açıktır. Biz bu kısımda $A = \sum_{n\geq 1} \lambda_n u_n \otimes e_n$ serisini göz önünde bulunduracağız.

Lemma 3.15.1 A, H Hilbert uzayında sürekli lineer operatör olsun. Bu durumda $Au_n = \lambda_n e_n$, $\lambda_n = \langle Au_n, e_n \rangle$ ve $\|A\| = \sup |\lambda_n|$

İspat. $t := \sup |\lambda_n|$ olsun. Bessel eşitsizliğinden

$$\sum_{n\geq 1} \|\lambda_n \langle x, u_n \rangle e_n\|^2 \leq t^2 \sum_{n\geq 1} |\langle x, u_n \rangle|^2 \leq t^2 \|x\|^2.$$

Buradan $Ax = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle x, u_n \rangle e_n$ serisi normda yakınsak ve onun toplamı, toplamın sırasından bağımsızdır. A'nın lineer olduğu açıktır. Buradan

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n\geq 1} \|\lambda_n \langle x, u_n \rangle e_n\|^2 \leq t^2 \|x\|^2.$$

olduğu için A süreklidir ve $\|A\| \leq t$. Diğer taraftan her bir $j \geq 1$ için

$$Au_j = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle u_j, u_n \rangle e_n = \lambda_j e_j$$

elde ederiz. Burada $\lambda_j = \langle \lambda_j e_j, e_j \rangle = \langle Au_j, e_j \rangle$ olduğu açıktır. Böylece

$$\|A\| \geq \|Au_j\| = |\lambda_j|.\|u_j\| = |\lambda_j|$$

olup j keyfi olduğundan $\|A\| \geq t$. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 3.15.2 $A = \sum_{n\geq 1} \lambda_n u_n \otimes e_n$ ve $B = \sum_{n\geq 1} v_n u_n \otimes e_n$ olsun. Eğer $A = B$ ise bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n = v_n$ dir.

İspat. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n = \langle Au_n, e_n \rangle = \langle Bu_n, e_n \rangle = V_n$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.15.1 $A = \sum_{n\geq 1} \lambda_n u_n \otimes e_n$ olsun. Bu durumda

$$A^* = \sum_{n\geq 1} \overline{\lambda}_n e_n \otimes u_n.$$

İspat. $\{\overline{\lambda}_n\}$ sınırlı olduğu için, $B = \sum_{n\geq 1} \overline{\lambda}_n e_n \otimes u_n$ G'den H'da sürekli lineer bir dönüşümdür. Her $n \in H$ ve $y \in G$ için

$$\begin{aligned} \langle x, A^*y\rangle = \langle Ax, y\rangle &= \left\langle \sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle x, u_n\rangle e_n, y \right\rangle \\ &= \sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle x, u_n\rangle \langle e_n, y\rangle = \left\langle x, \sum_{n\geq 1} \overline{\lambda_n} \langle y, e_n\rangle u_n \right\rangle \\ &= \langle x, By\rangle. \end{aligned}$$

olup $A^* = B$ dir.

Lemma 3.15.3 $A = \sum_{n\geq 1} \lambda_n u_n \otimes e_n$ ve $B = \sum_{n\geq 1} v_n u_n \otimes e_n$ olsun. $\{w_n\}$ dizisi bir K Hilbert uzayında ortonormal dizisi ve $\{v_n\}$ kompleks sayılarının sınırlı bir dizisi olmak üzere

$$BA = \sum_{n\geq 1} \lambda_n v_n u_n \otimes w_n$$

dir.

İspat. Verilen iddiaya göre aşağıdaki ifadelerin doğru olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} BAx &= \sum_{n\geq 1} v_n \langle Ax, e_n\rangle \omega_n \\ &= \sum_{n\geq 1} v_n \left\langle \sum_{n\geq 1} \lambda_k \langle x, u_k\rangle e_k, e_n \right\rangle w_n \\ &= \sum_{n\geq 1} v_n \sum_{n\geq 1} \lambda_k \langle x, u_k\rangle \langle e_k, e_n\rangle w_n \\ &= \sum_{n\geq 1} v_n \sum_{n\geq 1} \lambda_k \langle x, u_k\rangle \delta_{nk} w_n \\ &= \sum_{n\geq 1} v_n \lambda_n \langle x, u_n\rangle \omega_n. \end{aligned}$$

Not 3.15.1 Bu kısmın geri kalanında $H = G$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = e_n$ olarak alacağız. A köşegen operatörünü

$$A = \sum_{n\geq 1} \lambda_n e_n \otimes e_n$$

şeklinde göstereceğiz. Burada $\{e_n\}$, H'da bir ortonormal dizi ve λ_n ise kompleks sayıların sınırlı bir dizisidir. Bu dizi sonlu veya sonsuz bir dizi olabilir. Bir diagonal operatör olarak gösterilebilen operatöre diagonalebilir denir. Bu kısımdan itirabaren biz yukarıda verilen diagonal operatörle çalışacağız.

Teorem 3.15.2 Her diagonal operatör normaldir.

İspat. Diagonal operatör tanımından,

$$A^*Ax = \sum_{n\geq 1} \overline{\lambda_n}\lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n = \sum_{n\geq 1} \lambda_n\overline{\lambda_n} \langle x, e_n\rangle e_n = AA^*x.$$

Lemma 3.15.4 A operatörünün her sıfırdan farklı öz değeri bazı λ_n'lerdir.

İspat. $\|x\| = 1$ sıfırdan farklı bir x öz değerine uygun bir öz vektör olsun. Bu durumda $Ax = \alpha x$ yani

$$\sum_{j\geq 1} \lambda_j \langle x, e_j\rangle e_j = \alpha x.$$

$\alpha x \neq 0$ olduğundan bazı n'ler için $\langle x, e_n\rangle \neq 0$ dır. Buradan

$$\alpha\langle x, e_n\rangle = \langle \alpha x, e_n\rangle = \langle Ax, e_n\rangle = \langle \sum_j \lambda_j \langle x, e_j\rangle e_j, e_n\rangle = \langle \sum_j \lambda_j \langle x, e_j\rangle e_j, e_n\rangle = \lambda_n\langle x, e_n\rangle.$$

Bazı n'ler için $\langle x, e_n\rangle \neq 0$ olduğu için $\alpha = \lambda_n$ olarak bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.15.3 Bir diagonallenebilir operatörün öz eşlenik (anti eşlenik) olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul tüm öz değerlerinin reel(sadece imajineer) olmasıdır.

İspat. A diagonallenebilir bir operatör olsun. Bu durumda $A = \sum_{n\geq 1} \lambda_n e_n \otimes e_n$ ve $A^* = \sum_{n\geq 1} \overline{\lambda_n} e_n \otimes e_n$ olduğunu biliyoruz. Bir operatörün öz eşlenik olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $A = A^*$ olmasıdır. $A^* = A$ ise $\overline{\lambda_n} = \lambda_n$ olması gerekir. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $\overline{\lambda_n} = \lambda_n$ ise λ_n reeldir. Bu ise ispatı tamamlar. Anti simetrik operatör için de benzer ispat yapılır.

Teorem 3.15.4 Bir diagonallenebilir operatörün pozitif olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul bu operatörün tüm özdeğerlerinin pozitif olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \geq 0$ olsun. Bu durumda $\{\sqrt{\lambda_n}\}$ de aynı zamanda sınırlı bir dizidir. $B = \sum_{n\geq 1} \sqrt{\lambda_n} e_n \otimes e_n$ yardımıyla bir operatör tanımlayalım. Bu durumda $A = B^*B$ hesaplanırsa A'nın pozitif olduğu açıktır. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.15.5 Her diagonallenebilir A operatörü için aşağıdakiler birbirine denktir.

i) A projektördür.

ii) A idempotentir.

iii) Tüm öz değerler ya sıfırdır ya da 1 dir.

(ii$\Longrightarrow$ iii) Eğer $A^2 = A$ ise bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n^2 = \lambda_n$ yani $\lambda_n = 0$ veya $\lambda_n = 1$.

3.16 Kompakt Operatörler

Bu kısımda kompakt normal operatörlerin diagonallenebilir olduğu ve her kompakt operatörün sonlu boyutlu operatör tarafından norm içinde yaklaşılabileceğini göstereceğiz. Bu bölüm boyunca H ve G Hilbert uzayını gösterecektir.

kompakt operatörler veya tamamen sürekli operatörler, lineer sürekli operatörlerin önemli bir sınıfıdır. Bu sınıfın önemli olmasının sebebi sonlu boyutlu uzaylarda operatörlerin birçok özelliklerini üzerinde taşımasıdır. Ayrıca uygulamalarda kullanılan bir çok önemli operatör kompaktır. Özel olarak söylemek gerekirse çekirdekli integral operatörlerini verebiliriz.

Tanım 3.16.1 $S \subset H$ kümesinin kapanışı kompakt ise bu kümeye ön kompakt denir.

Tanım 3.16.2 E_1 ve E_2 iki lineer normlu uzay olsun. $A : E_1 \longrightarrow E_2$ lineer operatörü eğer E_1 içerisindeki her sınırlı kümeyi E_2 uzayında bir ön kompakt kümeye dönüştürüyorsa bu operatöre kompakt operatör denir.

Teorem 3.16.1 $A : H \longrightarrow G$ sürekli lineer bir dönüşümün kompakt olabilmesi için gerkli ve yeterli koşul bu dönüşümün her zayıf yakınsak dizisinin bir güçlü yakınsak diziye dönüştürülmesidir.

İspat. "$\Longrightarrow$" A, H Hilbert uzayında kompakt bir operatör ve $\{x_n\}$ de bazı $x \in H$'a zayıf yakınsak bir dizi olsun. Şimdi iddianın tersini kabul edelim. Yani $\|Ax_n - Ax\| \nrightarrow 0$ olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\|Ay_n - Ax\| > 0$ olacak şekilde $\{x_n\}$'ın bir $\{y_n\}$ alt dizisi mevcuttur. İddiaya göre $\{x_n\}$ dizisi zayıf yakınsak olduğu için sınırlıdır. Yine iddiaya göre A'nın kompaktlığından $n \longrightarrow \infty$ $\|Az_n - b\| \longrightarrow 0$ olacak şekilde $\{y_n\}$ dizisinin bir $\{z_n\}$ alt dizisi ve $b \in G$ elemanı mevcuttur. $x_n \longrightarrow x'$e zayıf yakınsadığından $z_n \longrightarrow x'$de zayıf yakınsaktır ve sonuç olarak $Az_n \longrightarrow Ax$ zayıftır. Buradan $b = Ax$ tir.

Fakat bu ise $\varepsilon > 0$ için $\|Az_n - Ax\| > \varepsilon$ ve $\|Az_n - b\| \longrightarrow 0$ ile çelişir. Bu çelişki ispatı tamamlar.

”$\Longleftarrow$” x_n H Hilbert uzayında keyfi sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ dizisinin zayıf yakınsak olan bir $\{y_n\}$ alt dizisi mevcuttur. Böylece $\{Ay_n\}$ güçlü yakınsaktır. Böylece A kompakt bir operatördür.

Lemma 3.16.1 Eğer H Hilbert uzayında $x_n \longrightarrow a$ zayıf ve $y_n \longrightarrow b$ güçlü yakınsak ise bu durumda $\langle x_n, y_n\rangle \longrightarrow \langle a, b\rangle$ dir.

İspat. İddiaya göre $\{x_n\}$ dizisi H'da yakınsak olduğu için sınırlıdır. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| \leq \lambda$ olacak şekilde $\lambda > 0$ mevcuttur. Buradan

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle a, b\rangle| &\leq |\langle x_n, y_n - b\rangle| + |\langle x_n, b\rangle - \langle a, b\rangle| \\
&\leq \|x_n\|\|y_n - b\| + |\langle x_n - a, b\rangle| \\
&\leq \lambda\|y_n - b\| + |\langle x_n - a, b\rangle| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.16.2 Eğer $A : H \longrightarrow G$ kompakt bir operatör ise bu durumda $A^* : G \longrightarrow H$ kompaktır.

İspat. A kompakt operatör olduğundan $x_n \longrightarrow b$ G'de zayıf yakınsak ve AA^* kompaktır. Buradan $AA^*x_n \longrightarrow AA^*b$ güçlü yakınsaktır. Böylece $\langle AA^*x_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle AA^*b, b\rangle$ yani

$$\|A^*x_n\|^2 \longrightarrow \|A^*b\|^2$$

veya

$$\|A^*x_n\| \longrightarrow \|A^*b\|.$$

$A^*x_n \longrightarrow A^*b$ zayıf yakınsak olduğu için $A^*x_n \longrightarrow A^*b$ güçlü yakınsaktır. Sonuç olarak A^{**} kompaktır.

Teorem 3.16.3 A, bir $H \neq \{0\}$ Hilbert uzayı üzerinde kompakt normal bir operatör olsun. Bu durumda A operatörünün $|\lambda| = \|A\|$ olacak şekilde bir λ öz değeri vardır.

İspat. Eğer $A = 0$ ise $\lambda = 0$ olup ispat tamamdır. Şimdi $A \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$ şeklinde tanımlandığında H’da $\|x_n\| = 1$ ve $\lim\{\|Ax_n\| =$

$\|A\|\}$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisi mevcuttur. İddiaya göre A kompakt olduğundan y'ler için $Ax_n \longrightarrow y$ güçlü yakınsadığını kabul edebiliriz. Yine iddiaya göre A normal operatör olduğu için $B := AA^*$ ve $\beta := \|B\|$ tanımlayabiliriz bu durumda

$$\beta = \|B\| = \|A^*A\| = \|A\|^2 \neq 0$$

yazabiliriz. Kolay bir heaplama ile

$$\begin{aligned}
\|Bx_n - \beta x_n\|^2 &= \|Bx_n\|^2 - 2\langle Bx_n, x_n\rangle + \beta^2\|x_n\|^2 \\
&\leq \|B\|^2\|x_n\|^2 - 2\langle AA^*x_n, x_n\rangle + \beta^2 \\
&= \beta^2 - 2\|Ax_n\|^2 + \beta \longrightarrow 0, \ (n \longrightarrow \infty \text{için})
\end{aligned}$$

Böylece $Bx_n - \beta x_n \longrightarrow 0$ olur. Şimdi $z := A^*y$ şeklinde tanımlayalım. $Ax_n \longrightarrow y$ olduğu için $Bx_n = A^*(Ax_n) \longrightarrow A^*y = z$ yazabiliriz. Buradan $\beta x_n = (\beta x_n - \beta x_n) + \beta x_n \longrightarrow 0 + z = z$ elde ederiz. Böylece $\beta = \lim \|\beta x_n\| = \|z\|$ yani $z \neq o$ dır. Aynı zamanda $\beta = \beta(\lim \beta x_n) = \beta \lim \beta x_n = \beta z$ olup buradan β, B'nin bir öz değeridir.

$N := ker(\beta I - \beta)$ şeklind tanımlayalım $z \neq 0$, N'de olduğu için $N \neq \{0\}$ dır. $B = A^*A$ kompakt ve $\beta \neq 0$ olduğundan $dimN < \infty$. A'nın normalliğinden $AB = BA$ yazabiliriz ve buradan $A(N) \subset N$ dir. Şimdi $A|'_{\mathbb{N}}$nin karakteristik polinomunu göz önüne alalım. Bu durumda $\|u\| = 1$ ve bazı $\lambda \in \mathbb{C}'$ler için $Au = \lambda u$ olacak şelilde $u \in N$ vardır. Diğer taraftan

$$Bu = AA^*u = A^*(\lambda u) = \lambda A^*u = \lambda\overline{\lambda}u.$$

Bu durumda

$$\beta u = \lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2 = \beta = \|\beta\| = \|B\| = \|A\|^2 = |\lambda| = \|A\|.$$

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu derleme tez çalışması,

1) Lisansüstü seviyede,

2) Literatürde ispatsız olan bazı teoremlerin ispatı,

3) Bilim insanlarına Hilbert uzayı, Hilbert uzayında operatörler ve spektrum hakkında Türkçe bir kaynak

olmasından dolayı büyük bir önem taşıdığı düşünmekteyiz. Bu alanda çalışma yapmak isteyen bilim insanlarına, bu alanla ilgili diğer kavramları daha kolay anlayabileceğini öneriyoruz.

KAYNAKLAR

[1] Hilbert D.(1912), *Grundzüge einer allgemeinen theorie der linearen integralgleichungen.* Repr. 1953. New York.

[2] Schmidt E., (1978) *Über die Auflösug Gleichung Mit unendlich vielen unbekannten.*, Rend Circ. Mat. Palermo 25, 53-77

[3] Kreyszig E. (1978) *Intoductory functional analysis with applications,* John Wiley and Sons, printed in USA.

[4] Çakar Ö., (2007) *Fonksiyonel Analize Giriş-I*, A. Ü Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No:13, Ankara, Türkiye.

[5] Ma T.W., (2002) *Banach-Hilbert space, vector measures and Group Representation*, printed in Singapore by World Scientific Printers (S) Pte. Ltd.

[6] S. S. Dragomir, (2011) *Vector and operator trapeziodal type inequalities for continuous functions of sedlfadjoint operators in Hilbert Space*, Preprint RGMIA Res. Rep. Coll. 14, Art. 10..

[7] S. S. Dragomir, (2010) *Some vector inequalities for continuous functions of sedlfadjoint operators in Hilbert Space*, Preprint RGMIA Res. Rep. Coll. 13, Sup., Art. 13..

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	Ayhan GÜNDÜZ
Doğum Yeri	:	Osmaniye
Doğum Tarihi	:	05.11.1987
Medeni Hali	:	Evli
Bildiği Yabancı Dil	:	İngilizce
İletişim Bilgileri	:	ayhan8053@hotmail.com
Lisans	:	Ordu Üniversitesi Fen-Ed. Fak. Matematik Böl. 2013