T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OPERATÖR GEOMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Murat Caner KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2018

TEZ ONAY

Murat Caner KAYA tarafından hazırlanan "Operatör Geometrik Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 25.06.2018 tarihinde yapılmış ve jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Jüri Başkanı Dr. Öğr. Üyesi Kerim BEKAR Giresun Üniversitesi	....
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL Ordu Üniversitesi	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Mehmet KORKMAZ Ordu Üniversitesi	....

26/ 06/ 2018 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 28/ 06/ 2018 tarih ve 2018... /321 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Murat Caner KAYA

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

OPERATÖR GEOMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMRAD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Murat Caner KAYA

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2018
Yüksek Lisans Tezi, 32s.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL

Bu tez çalışmasında, literatürde var olan, bir Hilbert uzayında pozitif lineer veya özeşlenik operatörler için operatör geometrik konveks fonksiyonların kavramının inşaası, tanımı, temel teoremleri ve bazı cebirsel özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelendi.

Anahtar Kelimeler: Hermite-Hadamard eşitsizliği, operatör geometrik konveks fonksiyon, Üstel fonksiyon, norm fonksiyon.

ABSTRACT

HERMITE-HADAMRAD TYPE INEQUALITIES FOR OPERATOR GEOMETRICALLY CONVEX FUNCTION

Murat Caner KAYA
Ordu University
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2018

MSc. Thesis, 32p.

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

In this thesis, it is detail investigated the concept, definition, basic theorems, and some algebraic properties of operator geometrically convex function, which existed in the literature, for positive linear or selfadjoint operators in a Hilbert space. Then, it is proved some Hermite-Hadamard type inequalities for these functions. Finally, it is obtained trace inequalities for positive linear operators.

Key Words: Hermite-Hadamard inequality, operator geometrically convex function, exponential function, norm function.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca bilgilerinde ve tecrübelerinden faydalandığım yanında çalışmaktan onur duyduğum, ihtiyacım olduğu her anda sabır ve anlayış ile yardımlarını esirgemeyen bu tezin konusu, yürütülmesi ve yazım aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı çok değerli tez danışmanım

Sn. Dr. Öğretim Üyesi Erdal ÜNLÜYOL'a,

lisans üstü ders aldığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür ederim..

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR

$\mathbb{R}^+$	:Pozitif reel sayılar
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$L_1[a,b]$	: $[a,b]'$ den $[a,b]'$ ye tanımlı 1. mertebeden integrallenebilen fonksiyonların sınıfı
$G(a,b)$	:a,b pozitif reel sayılarının geometrik ortalaması
$L(a,b)$	:a,b pozitif reel sayılarının logaritmik ortalaması
$A(a,b)$	:a,b pozitif reel sayılarının aritmetik ortalaması
$exp(.)$	:Üstel Fonksiyon
$log(.)$	:Logaritma Fonksiyon
o	:Bileşke Fonksiyon
$Sp(A)$	: A operatörünün spektrumu

1. GİRİŞ

Eşitsizlik Teorisi'nin temellerini XVIII. ve XIX. yüzyıllarda K. F. Gauss (1775-1855), A. L. Cauchy (1785-1857) ve P. L. Chebyshev (1821-1894) gibi matematikçiler atmışlardır. Fakat modern anlamda "Eşitsizlik Teorisi" alanında yapılan ilk çalışma 1934 yılında G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Polya tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır. Bu çalışmayı 1961 yılında E. F. Beckenbach ve R. Bellman'ın yine aynı ismi taşıyan "Inequalities" kitabı takip eder. Daha sonra 1965 yılında J. Szarski'nin "Differantial Inequalities", 1991 yılında Mitrinovic ve ark. "Inequalities Involving Functions and Their Derivatives", 1963 yılında yine Mitrinovic ve ark.'ın "Classical and New Inequalities in Analysis" isimli kitapları izler. Bunların dışında S. S. Dragomir, R. P. Agarwal, G. V. Milovanovic, C. P. Niculescu, C. E. M. Pearce, J. E. Pecaric, A. M. Fink, M. E. Özdemir, M. Z. Sarıkaya, E. Set, İ. İşcan, A. O. Akdemir, M. Tunç gibi bilim insanlarının da birçok çalışması literatürde mevcut.

Konvekslik kavramının ortaya çıkışı Arşimet'in, çemberin içine ve etrafına çizdiği düzgün çokgenler yardımıyla yaptığı π sayısı hesabına kadar dayanır. Bu çalışmaları sırasında Arşimet, herhangi bir konveks şeklin çevresinin, etrafına çizilen bütün diğer konveks şekillerin çevresinden daha küçük olduğunu fark etmiştir. Böylece konvekslik kavramı konveks şekiller etrafında gelişmiştir. Euler ve Descartes konveks çokgenler ile ilgili formüller üzerinde çalışmıştır. Daha sonra 1841'de Cauchy, konvekslik hakkında bazı özellikler vermiştir. Konveksliğin modern tanımı eşitsizlik tanımı içerdiğinden konveksliğin eşitsizliklerle birlikte çalışılması da doğal bir sonuç olmuştur.

Konveks fonksiyonların tarihi çok eskiye dayanmakla birlikte XIX. yüzyılın sonları olarak gösterilebilir. 1893'de Hadamard'ın çalışmasında açıkça belirtilmese de bu türden fonksiyonların temellerinden bahsedilmektedir. Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları ima eden sonuçlara rastlanılmasına rağmen, konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J. L. W. V. Jensen tarafından çalışılmıştır. Jensen'in bu, çalışmalarından itibaren Konveks Fonksiyonlar Teorisi hızlı bir gelişme göstermiştir. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak 1987 yılında Pecaric tarafından yazılan "Convex Functions: Inequalities" isimli kitaptır. Ayrıca 1973 yılında A. W. Roberts ve B. E. Vorberg "Convex Functions", 1992 yılında Pecaric ve ark. "Convex Functions, Partial Ordering and Statistical Applications", 2006 yılında C. Niculescu ve L. E. Persson "Convex Functions and Their Applications, A Contempoarary Approach" gibi eserler konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizlikle ilgili yapılan çalışmalardır. Bu çalışmaların bir kısmını integral eşitsizlikleri oluşturmaktadır.

Niculescu ve Persson'a göre konveksliğin teorik ve uygulamalı matematik alanlarında geniş yer bulmasının iki önemli sebebi vardır:

1. Sınır değerlerinin birinde bir maksimum değeri vardır,

2. Her yerel minimum aynı zamanda global minimumdur.

Ayrıca kesin konveks bir fonksiyonunun en fazla bir minumumu vardır.

Yukarıda, gerek konvekslik gerekse eşitsizliklerin doğuşu hakkında genel bilgi verilmiştir. Bu yüksek lisans tezinde ise, literatürde var olan Hilbert uzayında sınırlı özeşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için “operatör geometrik konveks” lik kavramının nasıl inşaa edildiği, tanımı, temel teoremleri ve bazı cebirsel özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelenmeye çalışılmıştır. Bunu yaparken ise İ. İŞCAN [2] ve A. Taghavi ve ark. [8] çalışmaları temel kaynak olarak kullanılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.0.1 (**Lineer Uzay**) L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+ : L \times L \to L$ ve $. : F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A) L, "+" işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.
G2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$dir.
G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.
G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.
G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ omak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha x \in L$ dir.
L2. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.
L3. $(\alpha + \beta)x = \alpha.x + \beta.x$ dir.
L4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta.x)$ dir.
L5. $1.x = x$ dir. (Burada 1, F nin birim elemanıdır).

$F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye karmaşık lineer uzay adı verilir.

Tanım 2.0.2 Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

Tanım 2.0.3 F bir cisim ve V ve W, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T : V \to W$ dönüşümü,
a $T(u + v) = T(u) + T(v)$
b $T(cu) = cT(u)$ şartlarını sağlıyorsa T ye V üzerinde lineer dönüşüm denir .

Tanım 2.0.4 (**Konveks Küme**): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)y,\ \ 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğindeki x ve y nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1-\alpha$ yerine $\alpha+\beta=1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir.

Tanım 2.0.5 (**Konveks Fonksiyon**): I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y) \quad \leq \quad \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y) \tag{2.0.1}$$

şartını sağlayan, f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer (2.0.1) eşitsizliği $x \neq y$ ve $\alpha \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir.

Tanım 2.0.6 X, F cisimi üzerinde bir vektör uzayı olsun. X üzerinde bir norm aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyondur. Her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için
a $\|x\| > 0,$
b $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
c $\|ax\| = |a|\|x\|,$
d $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
üzerinde bir $\|.\|$ normu tanımlanmış olan bir X vektör uzayına "normlu vektör uzay" denir.

Tanım 2.0.7 (**İç-çarpım uzayı**): $F(\mathbb{R}\,\text{veya}\,\mathbb{C})$ olmak üzere, X bir vektör uzayı olsun. $\langle \cdot,\cdot \rangle : X \times X \rightarrow F$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise " $\langle \cdot,\cdot \rangle$" dönüşümüne X üzerinde bir iç-çarpım, $(X, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ ikilisine de "iç-çarpım uzayı" denir:

1. $\forall x \in X$ için $\langle x, x\rangle \geq 0$ ve $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$;

2. $\forall x, y \in X$ için $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;

3. $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$;

4. $\forall x, y, z \in X$ için $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

Not 2.0.1 $F = \mathbb{R}$ olması halinde 2. özellik $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ olur. İç-çarpım tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu kolayca görebiliriz.

1. $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$,

2. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$;

3. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$.

Tanım 2.0.8 (**Hilbert Uzayı**): $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç-çarpım uzayı içindeki her Cauchy Dizisi yakınsak ise bu iç çarpıma bir "Hilbert Uzayı" denir.

Tanım 2.0.9 Lineer uzaylar arasındaki dönüşüme operatör denir.

Tanım 2.0.10 (**Birim Operatör**): $A : X \to X$ operatörü verilsin. Eğer her $x \in X$ için $Ax = x$ ise A operatörüne birim(özdeşlik) operatör denir. 1_X, I, E ve I_X sembollerinden biriyle gösterilir.

Tanım 2.0.11 (**Sınırlı Operatör**): X ve Y iki normlu uzay olsun. A ise tanım kümesi $D(A) \subset X$ ve görüntü kümesi $R(A) \subset Y$ olan bir operatör olsun. Eğer A operatörü $D(A)$ 'nın X' de sınırlı her kümesine $R(A)$'nın Y de sınırlı bir kümesini karşılık getiriyorsa A' ya "sınırlı bir operatör" denir. Başka bir deyişle her $x \in D(A)$ için

$$\| Ax \|_Y \leq c \| x \|_X,$$

olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa, A'ya "sınırlı bir operatör"denir.

Tanım 2.0.12 (**Lineer Operatör**): X ve Y aynı F cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A : X \to Y$ operatörü verilsin. $D(A)$, X' in bir alt uzayı olsun. Her $x, y \in D(A)$ ve her $\alpha, \beta \in F$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y),$$

ise A'ya "lineer operatör"denir.

Tanım 2.0.13 (**Eşlenik ve Öz-eşlenik Operatör**): A, H Hilbert uzayında sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer her $f, g \in D(A) \subset H$ için

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, A^* g \rangle$$

sağlanıyorsa A^* a A'nın "eşlenik operatörü"denir.

Eğer $D(A) = D(A^*)$ ve $A = A^*$ ise bu A' ya özeşlenik operatör denir.

Tanım 2.0.14 (**Projeksiyon Operatör**): V bir vektör uzayı ve $P : V \longrightarrow V$ lineer bir operatör olsun. Bu durumda $P^2 = P$ oluyorsa, buna "projeksiyon" veya "izdüşüm öperatörü" denir.

Tanım 2.0.15 (**Rezolventa**): H bir Hilbert uzayı ve $A : D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör olsun.

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E)^{-1} \in L(H)\}$$

kümesine A operatörünün "regüler değerler kümesi" veya "rezolvent kümesi" denir.

$\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda; A) = (A - \lambda E)^{-1}$ operatorüne A operatorünün "rezolventası" veya "çözücü operatörü" adı verilir.

Tanım 2.0.16 (**Spektrum**): H bir Hilbert uzayı olsun.

$$Sp(A) = \sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

kümesine A operatörünün "spektrumu " denir. A operatörünün spektrum kümesini "$\sigma(A)$" veya "$Sp(A)$" ile göstereceğiz.

Tanım 2.0.17 $\mathbb{A}$, $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ kompleks Hilbert uzayı üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer operatörlerin değişmeli C^*-cebri için $B(H)$-ın bir alt cebri olsun. Bu durumda, $A \in \mathbb{A}$ ve her $x \in H$ için

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0$$

oluyorsa, bu A operatörüne pozitiftir denir ve $A \geq 0$ şeklinde gösterilir. $\mathbb{A}^+$ ise $\mathbb{A}$-daki tüm kesin pozitif operatörlerin kümesini göstermektedir.

A kompleks bir Hilbert uzayı üzerinde keyfi özeşlenik lineer bir operatör olsun. $C(Sp(A))$ ise A operatörünün spektrumu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesini göstersin. Gelfand dönüşümü, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir Φ fonksiyonu ile $C(Sp(A))$ arasında bir *-izometrik izomorfizmi kurar.

Keyfi $f, g \in C(Sp(A))$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

1. $\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g)$;
2. $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ ve $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$;
3. $\|\Phi(f)\| := \|f\| := \sup_{t \in Sp(A)} |f(t)|$;
4. $\Phi(f_0) = 1_H$ ve $\Phi(f_1) = A$

Burada $t \in Sp(A)$ için $f_0(t) = 1$ ve $f_1(t) = t$.

Şimdi bir operatörün, bir fonksiyon altındaki görüntüsünün ne anlama geldiğini ifade edelim.

Tanım 2.0.18 A, $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı üzerinde keyfi bir özeşlenik lineer operatör olsun. $C\big(Sp(A)\big)$, A operatörünün spektrumu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesini ve Φ de tanım (2.0.17) deki fonksiyon olsun. Bu durumda her $f \in C\big(Sp(A)\big)$ için

$$f(A) := \Phi(f)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme keyfi bir A özeşlenik operatörünün sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsü denir.

Tanım 2.0.19 (**Operatörlerde Sıralama**): A ve B, H Hilbert uzayı üzerinde iki özeşlenik operatör olsun. Her $x \in H$ için

1. $A \leq B \Leftrightarrow \langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle$;
2. $A \geq 0$ ise A operatörüne pozitiftir denir.

Not 2.0.2 Eğer A özeşlenik bir operatör ve f de $Sp(A)$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon ise, bu durumda $t \in Sp(A)$ için

$$f(t) \geq 0$$

dır. Buradan

$$f(A) \geq 0,$$

yani $f(A), H$ Hilbert uzayı üzerinde pozitif bir operatördür. f ve $g, Sp(A)$ üzerinde iki fonksiyon olsun. Bu durumda her $t \in Sp(A)$ için

$$f(t) \geq g(t)$$

ise, o zaman

$$f(A) \geq g(A).$$

Teorem 2.0.1 A, H Hilbert uzayı üzerinde sınırlı özeşlenik bir operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

$$m := \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle = \max\Big\{\alpha \in \mathbb{R} | \alpha E \leq A\Big\};$$

$$M := \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle = \min\Big\{\alpha \in \mathbb{R} | A \leq \alpha E\Big\};$$

ve

$$\|A\| = \max\{\|m\|, \|M\|\}.$$

Ayrıca $m, M \in Sp(A)$ ve $Sp(A) \subset [m, M]$.

Tanım 2.0.20 (**Operatör Konveks**): A ve B, spektrumları $I \subset \mathbb{R}$ da olan keyfi özeşlenik operatörler ve $\lambda \in [0,1]$ olsun. Bu durumda,

$$f((1-\lambda)A + \lambda B) \leq (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B)$$

eşitsizliğini sağlayan, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reel değerli sürekli f fonksiyonuna operatör konveks denir.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

3.1 Geometrik Konveks Fonksiyonlar ve Bazı Özellikleri

Bu kısımda, klasik anlamda geometrik konveks fonksiyonlar ve bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 3.1.1 [1] I, $\mathbb{R}^+$ da bir aralık ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, eğer her $a, b \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(a^{\lambda}b^{1-\lambda}) \leq f(a)^{\lambda} f(b)^{\lambda}$$

eşitsizliğini sağlanıyorsa, bu f-fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon veya çarpımsal (multiplicatively) konveks fonksiyon denir.

Teorem 3.1.1 [2] $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ geometrik konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda, eğer her $a, b \in I$, $a < b$ için $f \in L_1[a,b]$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} f(\sqrt{a.b}) &\leq \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{1}{t}\sqrt{f(t)f\left(\frac{a.b}{t}\right)}dt \\ &\leq \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(t)}{t}dt \\ &\leq \frac{f(b)-f(a)}{\ln f(b) - \ln f(a)} \\ &\leq \frac{f(b)+f(a)}{2} \end{aligned}$$

eşitliği doğrudur. Ayrıca $t := a^{\lambda}b^{1-\lambda}$ için

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^1 f(a^{\lambda}b^{1-\lambda})d\lambda$$

eşitliği elde edilir.

Not 3.1.1 $a, b \in \mathbb{R}^+$ için,

$$\min\{a,b\} \leq G(a,b) = \sqrt{ab} \leq L(a,b) = \frac{b-a}{\ln b - \ln a} \leq A(a,b) = \frac{a+b}{2} \leq \max\{a,b\}$$

eşitsizliklerinin doğru olduğunu biliyoruz.

Teorem 3.1.2 [3] f, $\mathbb{R}^+$'nın bir I alt aralığı üzerinde tanımlı bir geometrik konveks fonksiyon olsun. Bu durumda, her $a, b \in I$ için

$$f(\sqrt{a.b}) \leq \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{1}{t}\sqrt{f(t)f\left(\frac{a.b}{t}\right)}dt \leq \sqrt{f(a).f(b)}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. İddiaya göre f geometrik konveks olduğundan her $\lambda \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} f(\sqrt{a.b}) &= f\big(\sqrt{(a^{\lambda}b^{1-\lambda})(a^{1-\lambda}b^{\lambda})}\big) \\ &\leq \sqrt{f(a^{\lambda}b^{1-\lambda})f(a^{1-\lambda}b^{\lambda})} \\ &\leq \sqrt{f(a)^{\lambda}f(b)^{1-\lambda}f(a)^{1-\lambda}f(b)^{\lambda}} \\ &= \sqrt{f(a).f(b)} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Yani

$$f(\sqrt{a.b}) \leq \sqrt{f(a^{\lambda}b^{1-\lambda})f(a^{1-\lambda}b^{\lambda})} \leq \sqrt{f(a).f(b)} \tag{3.1.1}$$

eşitsizliği doğrudur. (3.1.1) eşitsizliğini $[0,1]$ üzerinden integralini alırsak

$$f(\sqrt{a.b}) \leq \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{1}{t}\sqrt{f(t)f\left(\frac{a.b}{t}\right)}dt \leq \sqrt{f(a)f(b)}$$

olup, böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.1.1 [1] $I \subseteq \mathbb{R}^+$ bir aralık ve $f : I \longrightarrow (0,\infty)$ bir geometrik konveks fonksiyon olsun. Bu durumda

$$F := \log o f o exp : \log(I) \longrightarrow \mathbb{R}$$

bir konveks fonksiyondur. Tersine olarak, eğer $J, exp(J)$ $\mathbb{R}^+$'nın alt aralığı olacak şekilde bir aralık ve $F : J \longrightarrow \mathbb{R}$ konveks ise, bu durumda

$$f := expoFo\log : exp(J) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

bir geometrik konveks fonksiyondur.

Teorem 3.1.3 [1] $f, 0 < a < b$ olacak şekilde $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı bir geometrik konveks fonksiyon olsun. Bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\begin{aligned} f(\sqrt{a.b}) &\leq \sqrt{f(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{4}})f(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}})} \\ &\leq exp\left(\frac{1}{\log b - \log a}\int_a^b \frac{\log f(t)}{t}dt\right) \\ &\leq \sqrt{f(\sqrt{ab})}.\sqrt[4]{f(a)}\sqrt[4]{f(b)} \\ &\leq \sqrt{f(a).f(b)} \end{aligned}$$

İspat. İddiaya göre $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ geometrik konveks bir fonksiyon ve Lemma (3.1.1)' e göre

$$F(x) := \log o f o exp(x) : [\log a, \log b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

bir konveks fonksiyondur. Dolayısıyla [[4], Remark 1.9.3]'ten

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\log a+\log b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{3\log a+\log b}{4}\right)+F\left(\frac{\log a+3\log b}{4}\right)\right] \\ &\leq \frac{1}{\log b-\log a}\int_{\log a}^{\log b} F(x)dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{\log a+\log b}{2}\right)+\frac{F(\log a)+F(\log b)}{2}\right] \\ &\leq \frac{F(\log a)+F(\log b)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. F'nin tanımından

$$\begin{aligned} \log o f exp(\sqrt{a.b}) &\leq \frac{1}{2}\left[\log o f exp\left(\log a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{3}{4}}\right)+\log o f exp\left(\log a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{3}{4}}\right)\right] \\ &\leq \frac{1}{\log b-\log a}\int_{\log a}^{\log b} \log o f exp(x)dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\log o f exp\left(\log a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{\log o f exp(\log a)+\log o f exp(\log b)}{2}\right] \\ &\leq \frac{\log o f exp(\log a)+\log o f exp(\log b)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliğini buluruz. Yukarıda gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \log f(\sqrt{a.b}) &\leq \frac{1}{2}\left[\log f\left(a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{4}}\right)+\log f\left(a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{3}{4}}\right)\right] \\ &\leq \frac{1}{\log b-\log a}\int_{\log a}^{\log b} \log o f exp(x)dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\log f\left(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{\log f(a)+\log f(b)}{2}\right] \\ &= \frac{\log f(a)+\log f(b)}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $exp(x)$ üstel fonksiyonu artan olduğu için aşağıdaki eşitsizliği yazabil iriz.

$$\begin{aligned} f(\sqrt{a.b}) &\leq \sqrt{f\left(a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{4}}\right) f\left(a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{3}{4}}\right)} \\ &\leq exp\left(\frac{1}{\log b-\log a}\int_{\log a}^{\log b} \log o f\big(exp(x)\big)\right)dx \\ &\leq \sqrt{f(\sqrt{ab})}.\sqrt[4]{f(a)}\sqrt[4]{f(b)} \\ &\leq \sqrt{f(b).f(a)} \end{aligned}$$

Son olarak $t := exp(x)$ değişken değiştirilmesi yapılarak, ispat tamamlanmış olur.

Niculescu ve Persson [4], katsayısı negatif olmayan her $P(x)$ polinomunun, $[0,+\infty)$ aralığı üzerinde geometrik konveks olduğunu göstermiştir. Daha genel olarak, katsayısı negatif olmayan her reel $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ analitik fonksiyonunun $(0, R)$ aralığı üzerinde geometrik konveks fonksiyon olduğunu ispatlamışlar. Burada R, verilen serinin yakınsaklık yarıçapıdır. Bu ise bize farklı geometrik konveks fonksiyon örneklerinin varlığını göstermektedir. Hemen bir örnek vermek gerekirse $exp(.)$ üstel fonksiyonu bir geomertik konveks fonksiyondur.

3.2 Operatör Geometrik Konveks Fonksiyon

Bu kısımda operatör geometrik konveks fonksiyon tanımı verilecektir.

Dragomir [5], operatör konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin operatör versiyonunu ifade ve ispat etmiştir. Ayrıca yeni eşitsizlikler de elde edilmiştir. Yani $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bir operatör konveks fonksiyon olsun. Bu durumda spektrumları I'da olan her A, B öz eşlenik operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{A+B}{2}\right) &\leq 2\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(tA + (1-t)B)dt \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3A+B}{4}\right) + f\left(\frac{A+3B}{4}\right)\right] \\ &\leq \int_0^1 f((1-t)A + tB)dt \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{A+B}{2}\right) + \frac{f(A)+f(B)}{2}\right] \\ &\leq \frac{f(A).f(B)}{2}. \end{aligned}$$

Operatör geometrik konveks tanımı verebilmek için ilk önce aaşağıdaki Lemmalara ihtiyacımız vardır.

Lemma 3.2.1 ([6],Lemma 3) $A, B \in \mathbb{A}^+$ iki operatör ve f de $Sp(A)$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$AB = BA \text{ olması } f(A)B = Bf(A)$$

anlamına gelmektedir.

Buna göre $\lambda \in [0, 1]$ için $f(t) = t^\lambda$ sürekli bir fonksiyon ve $\mathbb{A}$ da bir komütativ C^* cebri olduğu için

$$A^\lambda B = BA^\lambda$$

yazabiliriz. Ayrıca $f(t) = t^{1-\lambda}$ için de yine yukarıdaki Lemmayı uygularsak, $A, B \in \mathbb{A}^+$

$$A^\lambda B^{1-\lambda} = B^{1-\lambda} A^\lambda$$

yazabiliriz. Bu ise bize A^λ ile $B^{1-\lambda}$ operatörlerinin, A ve B komütativ olduğu sürece birbirleriyle komütativ olduğunu gösterir.

Lemma 3.2.2 ([6]) A ve B, $\mathbb{A}^+$ da iki operatör olsun. Bu durumda

$$\{A^\lambda B^{1-\lambda} : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

konvekstir.

İspat. Keyfi A ve B operatörleri için

$$\{\lambda A + (1-\lambda)B : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

kümesinin konveks olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$\{\lambda log A + (1-\lambda)\log B : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

kümesi de konvekstir. Ayrıca A, B komütativ ve f de konveks olmak üzere e^f konveks olduğu için,

$$\begin{aligned} e^{(\lambda \log A + (1-\lambda)\log B)} &= e^{\lambda \log A}.e^{(1-\lambda)\log B} \\ &= A^\lambda B^{1-\lambda} \end{aligned}$$

olup, sonuç olarak $\lambda \in [0,1]$ için, $A^\lambda B^{1-\lambda}$ konvekstir.

Lemma 3.2.3 ([7], Teorem 5.3) A ve B, $AB = BA$ şartını sağlayan bir Banach cebrinin elemanları olsun. Bu durumda aşağıdaki bağıntı doğrudur.

$$Sp(AB) \subset Sp(A) \subset Sp(B).$$

Spektrumları I'da olan iki A ve B operatörleri için $A, B \in \mathbb{A}$ olsun. Şimdi Lemma 3.2.1 ve [[7], Teorem 10.3.(c)]' yi kullanırsak, her $\lambda \in [0,1]$ için

$$Sp(A^\lambda B^{1-\lambda}) \subset Sp(A^\lambda)Sp(B^{1-\lambda}) = Sp(A)^\lambda Sp(B)^{1-\lambda} \subseteq I$$

bağıntısı doğrudur.

Tanım 3.2.1 ([8]) I, $\mathbb{R}^+$'nın bir alt aralığı ve $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, spektrumları I'da olan her $A, B \in \mathbb{A}^+$ operatörleri ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(A^\lambda B^{1-\lambda}) \leq f(A)^\lambda f(B)^{1-\lambda}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f-ye operatör geometrik konveks fonksiyon denir.

3.3 Operatör Geometrik Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Teorem 3.3.1 ([8]) f bir operatör geometrik fonksiyon olsun. Bu durumda $t \in [0,1]$ ve $Sp(A), Sp(B) \subseteq I$ olacak şekilde $A, B \in \mathbb{A}^+$ için

$$\log f(\sqrt{AB}) \leq \int_0^1 logf(A^t B^{1-t})dt \leq \log \sqrt{f(A)f(B)} \tag{3.3.1}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. f operatör geometrik konveks fonksiyon olduğu için,

$$f(\sqrt{AB}) \leq \sqrt{f(A)f(B)}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Şimdi A yerine $A^t B^{1-t}$ ve B yerine de $A^{1-t}B^t$ alalım. $''\log t''$, $(0,\infty)$ aralığı üzerinde operatör monoton fonksiyon olduğundan [9], yani

$$A \leq B \text{ ise } \log A \leq \log B,$$

olup,

$$f(\sqrt{AB}) \leq \sqrt{f(A^t B^{1-t})f(A^{1-t}B^t)} \tag{3.3.2}$$

eşitliği doğrudur. (3.3.2)'den

$$\begin{aligned} \log f(\sqrt{AB}) &\leq \log \sqrt{f(A^t B^{1-t})f(A^{1-t}B^t)} \\ &= \frac{1}{2}\log(f(A^t B^{1-t})f(A^{1-t}B^t)) \\ &= \frac{1}{2}[\log f(A^t B^{1-t}) + \log f(A^{1-t}B^t)] \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\log f(\sqrt{AB}) \leq \frac{1}{2}[\log f(A^t B^{1-t}) + \log f(A^{1-t}B^t)] \tag{3.3.3}$$

eşitsizliği sağlanır. (3.3.3) eşitsizliği $[0,1]$ aralığı üzerinde t'ye göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log f(\sqrt{AB})dt &\leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \log f(A^t B^{1-t}) + \int_0^1 \log f(A^{1-t}B^t)\right] \\ &= \int_0^1 \log f(A^t B^{1-t})dt \end{aligned}$$

olup, doğru olan

$$\int_0^1 \log f(A^t B^{1-t})dt = \int_0^1 \log f(A^t B^{1-t})dt$$

eşitliğini de kullanırsak, (3.3.1)'nın sol eşitsizliğini, yani

$$\log f(\sqrt{AB}) \leq \int_0^1 \log f(A^{1-t}B^t)dt$$

ispatlamış oluruz.

Diğer taraftan,

$$f(A^tB^{1-t}) \leq f(A)^t f(B)^{1-t}$$

olduğunu biliyoruz. Yine, log fonksiyonunun operatör monotonluğundan

$$\begin{aligned} \log f(A^tB^{1-t}) &\leq \log f(A)^t f(B)^{1-t} \\ &= \log f(A)^t + \log f(B)^{1-t} \\ &= t \log f(A) + (1-t) \log f(B) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla

$$\log f(A^tB^{1-t}) \leq t \log f(A) + (1-t) \log f(B) \tag{3.3.4}$$

eşitsizliği doğrudur. Şimdi (3.3.4)'ün her iki tarafı $[0,1]$ aralığı üzerinde t-ye göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log f(A^tB^{1-t})dt &\leq \int_0^1 t \log f(A)dt + \int_0^1 (1-t) \log f(B)dt \\ &= \log f(A) \int_0^1 tdt + \log f(B) \int_0^1 (1-t)dt \\ &= \frac{1}{2}[\log f(A) + \log f(B)] \\ &= \log \sqrt{f(A).f(B)} \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.1 ([8]) f bir operatör geometrik konveks fonksiyon olduğu zaman,

$$\begin{aligned} f(\sqrt{AB}) &= f(\sqrt{A^tB^{1-t}A^{1-t}B^t}) \\ &\leq \sqrt{f(A^tB^{1-t})f(A^{1-t}B^t)} \\ &\leq \sqrt{f(A)^t f(B)^{1-t} f(A)^{1-t} f(B)^t} \\ &= \sqrt{f(A)f(B)} \end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Dolayısıyla

$$f(\sqrt{AB}) \leq \sqrt{f(A^tB^{1-t})f(A^{1-t}B^t)} \leq \sqrt{f(A)f(B)} \tag{3.3.5}$$

eşitsizliği doğrudur. (3.3.5)'in her iki tarafı $[0,1]$ aralığı üzerinde t-ye göre integrali alınırsa, sprektrumları I-da olan $A, B \in \mathbb{A}^+$ operatörleri için

$$\begin{aligned} f(\sqrt{AB}) &\leq \int_0^1 \sqrt{f(A^tB^{1-t})f(A^{1-t}B^t)}dt \\ &= \sqrt{f(A)f(B)} \end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

3.4 Üstel ve Norm Operatör Geometrik Konveks Fonksiyonu

Bu kısımda üstel ve norm operatör geometrik konveks fonksiyonla kavramı [8] incelenecektir.

3.4.1 Üstel Fonksiyon [8]

$A, B \in \mathbb{A}$ ve $A \leq B$ olsun. [7]' nin Teorem 10.3(b)' den

$$exp(A) \leq exp(B)$$

olduğu kolayca elde edilir. Bu ise bize, $exp(t)$ fonksiyonunun $A, B \in \mathbb{A}$ için $[0,\infty)$ aralığı üzerinde operatör monoton olduğu anlamına gelir.

Klasik durumda olduğu gibi, $B(H)$-daki komütativ olmayan pozitif operatörler için de operatörlerdeki sıralamaya göre

$$A^{\frac{1}{2}}\left(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}}\right)^t \leq (1-t)A + tB,\ t \in [0,1] \tag{3.4.1}$$

aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğini yazabiliriz. Ayrıca, eğer A ve B birbiriyle komütativ ise, bu durumda (3.4.1) eşitsizliği

$$A^{1-t}B^t \leq (1-t)A + tB,\ t \in [0,1] \tag{3.4.2}$$

haline dönüşür. $exp(t)$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığı üzerinde operatör monoton fonksiyon olduğundan, (3.4.2)-den $t \in [0,1]$ ve $A, B \in \mathbb{A}^+$ için,

$$\begin{aligned} exp(A^{1-t}B^t) &\leq exp\big((1-t)A + tB\big) \\ &= exp((1-t)A)exp(tB) \\ &= exp(A)^{1-t}exp(B)^t \end{aligned}$$

yazabiliriz. Sonuç olarak, bu durumda $exp(t)$, $[0, \infty)$ aralığı üzerinde bir operatör geometrik konveks fonksiyondur. Şimdi bu üstel fonksiyon için bir eşitsizlik elde edelim. Teorem (3.3.1)-de f yerine $exp(.)$ fonksiyonunu alırsak,

$$\begin{aligned}
\log exp(\sqrt{AB}) &\leq \int_0^1 logexp(A^t B^{1-t})dt \leq \log \sqrt{exp(A)exp(B)} \\
&= \frac{1}{2}\log(exp(A)exp(B)) \\
&= \frac{1}{2}[\log exp(A) + \log exp(B)]
\end{aligned}$$

olur, dolayısıyla $A, B \in \mathbb{A}^+$ için

$$\sqrt{AB} \leq \int_0^1 A^t B^{1-t} dt \leq \frac{A+B}{2}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

3.4.2 Norm Fonksiyonu [8]

$f(x) := \|x\|$, şeklinde alışılmış operatör normuyla tanımlanan f fonksiyonu operatör geometrik fonksiyondur. Gerçekten de her $A, B \in \mathbb{A}^+$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(A^t B^{1-t}) = \|A^t B^{1-t}\| \leq \|A^t\| \|B^{1-t}\| = f(A)^t f(B)^{1-t} \tag{3.4.3}$$

olup, $f(x) = \|x\|$ fonksiyonu bir operatör geometriktir. (3.4.3) eşitsizliği McIntosh eşitsizliğinin bir özel halidir.

3.5 Operatör Geometrik Fonksiyonların Bazı Cebirsel Özellikleri

Teorem 3.5.1 ([8]) Eğer $f(t)$ bir operatör geometrik fonksiyon ise, bu durumda

$$g(t) = tf(t)$$

olacak şekilde bir g operatör geometrik fonksiyon vardır.

İspat. $g(t) := tf(t)$ olsun. Her $\alpha \in [0, 1]$ ve $A, B \in \mathbb{A}^+$ için

$$g(A^\alpha B^{1-\alpha}) = A^\alpha B^{1-\alpha} f(A^\alpha B^{1-\alpha})$$

yazabiliriz. f bir operatör geometrik fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} g(A^{\alpha}B^{1-\alpha}) &= A^{\alpha}B^{1-\alpha}f(A^{\alpha}B^{1-\alpha}) \\ &\leq A^{\alpha}B^{1-\alpha}f(A)^{\alpha}f(B)^{1-\alpha} \\ &\leq A^{\alpha}f(A)^{\alpha}B^{1-\alpha}f(B)^{1-\alpha} \\ &= g(A)^{\alpha}g(B)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

olup, g de bir operatör geometrik fonksiyondur.

Not 3.5.1 ([8]) $A, B, C, D \in \mathbb{A}^{+}$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$A^{\alpha}B^{1-\alpha} + C^{\alpha}D^{1-\alpha} \leq (A+C)^{\alpha} + (B+D)^{1-\alpha} \tag{3.5.1}$$

eşitsizliği doğrudur.

Teorem 3.5.2 ([8]) f ve g iki operatör geometrik fonksiyon olsun. Bu durumda $''f+g''$ de operatör geometrik fonksiyondur.

İspat. $A, B \in \mathbb{A}^{+}$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$(f+g)(A^{\alpha}B^{1-\alpha}) = f(A^{\alpha}B^{1-\alpha}) + g(A^{\alpha}B^{1-\alpha})$$

yazabiliriz. İddiaya göre f ve g operatör geometrik fonksiyon olduğu için

$$\begin{aligned} (f+g)(A^{\alpha}B^{1-\alpha}) &= f(A^{\alpha}B^{1-\alpha}) + g(A^{\alpha}B^{1-\alpha}) \\ &\leq f(A)^{\alpha}f(B)^{1-\alpha} + g(A)^{\alpha}g(B)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

olup (3.5.1)'den

$$\begin{aligned} (f+g)(A^{\alpha}B^{1-\alpha}) &= f(A^{\alpha}B^{1-\alpha}) + g(A^{\alpha}B^{1-\alpha}) \\ &\leq f(A)^{\alpha}f(B)^{1-\alpha} + g(A)^{\alpha}g(B)^{1-\alpha} \\ &\leq \big[f(A)+g(A)\big]^{\alpha} + \big[f(B)+g(B)\big]^{1-\alpha} \\ &= (f+g)(A)^{\alpha} + (f+g)(B)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.5.3 ([8]) f bir operatör geometrik fonksiyon olsun. Bu durumda m bir sabit olmak üzere $''mf''$ de bir operatör geometrik fonksiyondur.

İspat. $A, B, C, D \in \mathbb{A}^+$, $\alpha \in [0,1]$ ve m sabiti için

$$(mf)(A^\alpha B^{1-\alpha}) = mf(A^\alpha B^{1-\alpha})$$

yazabiliriz. f operatör geometrik fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} mf(A^\alpha B^{1-\alpha}) &\leq mf(A^\alpha)f(B)^{1-\alpha} \\ &= [mf(A)]^\alpha [mf(B)]^{1-\alpha} \end{aligned}$$

olup, ispat tamamlanır.

Teorem 3.5.4 ([8]) f ve g iki operatör geometrik konveks fonksiyon olsun. Bu durumda $''fg''$ de operatör geometrik fonksiyondur.

İspat. $h := fg$, $A, B, C, D \in \mathbb{A}^+$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} h(A^\alpha B^{1-\alpha}) &= (fg)(A^\alpha B^{1-\alpha}) \\ &= f(A^\alpha B^{1-\alpha})g(A^\alpha B^{1-\alpha}) \end{aligned}$$

yazabiliriz. f ve g operatör geometrik fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} f(A^\alpha B^{1-\alpha})g(A^\alpha B^{1-\alpha}) &\leq f(A)^\alpha f(B)^{1-\alpha} g(A)^\alpha g(B)^{1-\alpha} \\ &= [f(A)g(A)]^\alpha [f(B)g(B)]^{1-\alpha} \\ &= (fg)(A)^\alpha (fg)(B)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu ise

$$h(A^\alpha B^{1-\alpha}) \leq h(A)^\alpha h(B)^{1-\alpha}$$

olup ispat tamamlanır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Derleme olarak yapılan yapılan bu yüksek lisans tezi, klasik anlamda önemli bir konvekslik çeşidi olan geometrik konvekslik kavramını, Hilbert uzayında sınırlı öz eşlenik operatörler için ayrıntılı bir şekilde incelenmesi yapılarak meydana gelmiştir. Bunu yaparken [2] ve [8] temel kaynak olarak kullanılmıştır.

Sonuç olarak, bu tez Hilbert uzayında sınırlı öz eşlenik operatörler için literatürde var olan operatör geometrik konveks fonksiyonların kurulması için gerekli olan teorik alt yapıyı, tanımı, temel özellikleri ve bazı cebirsel özellikleri detaylı bir şekilde araştırılmıştır. Dolayısıyla bu alanda çalışma yapmak isteyen bilim insanlarına iyi bir kaynak olacağını düşünüyoruz.

KAYNAKLAR

[1] Niculescu C. P., *Convexity according to the geometric means*, Math. Inequal. Appl., 3, 155–167(2000).

[2] İscan İ., *Some new Hermite-Hadamard type inequalities for geometrically convex function* , Math. Stot. 1, 86-91(2013).

[3] İscan İ., *On some new Hermite-Hadamard type inequalities for s-geometrically convex function* , Int. J. Math. Sci., (2014) (article ID: 163901, 8 pages).

[4] Niculescu C. P., Persson L. E., *Convex functions and their apllications* A Contemporary Approach, Springer, New York(2006).

[5] Dragomir S. S., *Hermite-Hadamard type inequality for operator convex fuctions*, Appl. Math. Comput. 218, 766-772(211).

[6] Nagisa M., Veda M., Weda S., *Commutativity of operators*, Nihonkai Math. I., 17, 1-8(2006).

[7] Zhu K., *An Introduction to Operator Algebras*, CRC Press, Boca Raton(1993).

[8] Taghavi A., Darvish V., Nazari H. M., Dragomir S. S., *Hermite-Hadamard type inequalities for operator geometrically convex functions*, Monatsh Math, 181, 187-203(2016).

[9] Zhan X., *Matrix Inequalities*, Springer, Berlin(2002).

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	MURAT CANER KAYA
Doğum Yeri	:	ORDU
Doğum Tarihi	:	11.02.1980
Medeni Hali	:	Evli
Bildiği Yabancı Dil	:	İngilizce
İletişim Bilgileri	:	Ordu
	:	mcanerk@hotmail.com
Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Edebiyat Matematik Bölümü 1998-2002
Çalıştığı Yer	:	Ankara Kızılay Final Dergisi Dershanesi 2006-2014 Ordu Özel Final Fen Lisesi 2014