T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK KESİŞİMSEL YARI GRUPLAR VE İDEALLER

ZARİFE ZÜHAL AYDOĞAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2018

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Zarife Zühal AYDOĞAN tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK danışmanlığında yürütülen "Esnek Kesişimsel Yarı Gruplar ve İdealler" adlı bu tez, jürimiz tarafından 25 / 07 / 2018 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK

Başkan	:	Doç. Dr. Murat BEŞENK Matematik, Pamukkale Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

14 / 08 / 2018 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 27/08 / 2018 tarih ve 2018.. / 380 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Zarife Zühal AYDOĞAN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

ESNEK KESİŞİMSEL YARI GRUPLAR VE İDEALLER

Zarife Zühal AYDOĞAN

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2018
Yüksek Lisans Tezi, 39s.

Danışman: Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK

Bu tezin amacı, esnek kümeler yardımıyla, klasik yarı grup teorisine yeni bir yaklaşım olarak literatürde mevcut olan esnek kesişimsel yarı grup ve esnek kesişimsel ideal kavramlarını vermek, bunlara ait temel özellikleri değerlendirmek ve bu yapılardan elde edilen sonuçları sunmaktır.

Bu çalışma iki ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde çalışmanın temeli olan yarı gruplar, idealler ve esnek kümeler hakkında bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Ayrıca esnek kesişimsel çarpım ve esnek karakteristik fonksiyon kavramları ele alınmıştır. İkinci bölüm ise beş kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda esnek kesişimsel yarı grup kavramı, ikinci kısımda esnek kesişimsel sol (sağ, iki yönlü) ideal kavramı, üçüncü kısımda esnek kesişimsel bi-ideal kavramı, dördüncü kısımda esnek kesişimsel iç ideal kavramı, beşinci kısımda ise esnek kesişimsel yarı ideal kavramları verilerek bunlara ait özellikler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Esnek yarı grup, Esnek kesişimsel yarı grup, Esnek ideal, Esnek kesişimsel ideal.

ABSTRACT

SOFT INTERSECTION SEMIGROUPS AND IDEALS

Zarife Zühal AYDOĞAN

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Natural and Technology
Department of Mathematics, 2018
MSc. Thesis, 39p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yıldıray ÇELİK

The aim of the present thesis is to give the concepts of soft intersection semigroup and soft intersection ideal which are available in the litarature as a new approach to semigroup theory with the help of soft sets, to evaluate the basic properties of them, and is to present the results obtained from these structures.

This study consists of two main chapters. In first chapter, some definitions and theorems which are crucial for study such as semigroups, ideals and soft sets are stated. Also, the notions of soft intersection product and soft characteristic function have been examined. In second chapter contains five parts. In the first part, the notion of soft intersection semigroup, in the second part, the notion of soft intersection left (right, two sided) ideal, in the third part, the notion of soft intersection bi ideal, in the fourth part, the notion of soft intersection interior ideal, the fifth part, the notion of soft intersection quasi ideal are given and algebraic properties belonging to these are presented.

Key Words: Soft semigroup, Soft intersection semigroup, Soft ideal, Soft intersection ideal.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı süresince yardımlarını esirgemeyen başta danışman hocam Sayın Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK olmak üzere Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine ve Doç. Dr. Cemal BELEN'e teşekkür ederim.

Aynı zamanda, manevi desteklerini her zaman üzerimde hissettiğim aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$P(\mathrm{U})$	: U kümesinin güç kümesi
EK-yarı grup	: Esnek kesişimsel yarı grup
EK-ideal	: Esnek kesişimsel ideal
EK-bi-ideal	: Esnek kesişimsel bi-ideal
EK-iç ideal	: Esnek kesişimsel iç ideal
EK-yarı ideal	: Esnek kesişimsel yarı ideal
S_X	: X'in karakteristik fonksiyonu
$\mathbb{S}$	: Bütün EK-yarı gruplar
$\subseteq$	: Esnek alt küme
$\cap$	: Esnek kümelerin arakesiti
$\cup$	: Esnek kümelerin birleşimi
$\vee$	: Esnek kümelerin $\vee$ -birleşimi
$\wedge$	: Esnek kümelerin $\wedge$ -arakesiti
$\circ$	: Esnek kesişimsel çarpım

1. GİRİŞ

Belirsizliği anlamak ve buna uygun çözümler bulmak için birçok teori geliştirilmiştir. Bu teorilerden bazıları olasılık teorisi, bulanık küme teorisi, yaklaşımlı kümeler teorisidir. Bu teoriler ortaya atıldıktan kısa bir zaman sonra birçok araştırmacının dikkatini çekmiş ve birçok alana uygulanmıştır.

Belirsizliklerle başa çıkabilmede kullanılan yeni bir matematiksel model olan esnek küme teorisi ise ilk olarak D. Molodtsov (1999) tarafından ortaya konuldu. Molodtsov (1999, 2004) sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, oyun teori, yöneylem araştırması, Rienmann integrali, Peron integrali, olasılık teori, ölçüm teori gibi birçok alana esnek küme teoriyi uyguladı.

Daha sonra Maji ve ark. (2003) esnek küme işlemlerini tanımladı. Maji ve ark. (2002, 2003), Pawlak (1982)'ın yaklaşımlı küme teorisi yardımıyla, bir karar verme probleminde esnek kümelerin bir uygulamasını yaptı ve esnek kümelerde bazı işlemleri tanımladı. Chen ve ark. (2003,2005) ile Kong ve ark. (2008) esnek kümelerde parametre indirgemesi üzerine çalışmalar yaptı. Pei ve Miao (2005), esnek tabanlı bilgi sistemleri üzerine çalışmalar sundular. Kovkov ve ark. (2007) esnek küme teorisi üzerine dayalı bir analizi optimizasyon teorisi ile ilgili problemlere uyguladılar.

Esnek küme teorisi, özellikle esnek karar verme gibi birçok alanda geniş kapsamlı uygulamalarla ilerleme göstermiştir (Ali ve ark., 2009, 2011; Kong ve ark., 2009; Çağman ve Enginoğlu, 2010; Ali, 2011; Feng ve ark., 2010, 2011, 2013; Sezgin ve Atagün, 2011). Esnek küme, hem teori hem de pratiğin dengeli bir kapsamını öne çıkarır. Günümüzde, bilişim bilimleri, akıllı sistemler, karar verme sistemleri ve bilgi modelleme gibi alanlarda geniş bir uygulama imkanı buldu.

Daha sonrasında esnek kümelerin cebirsel özellikleri de bazı araştırmacılar tarafından çalışılmaya başlandı. İlk olarak Aktaş ve Çağman (2007) esnek grup kavramını vererek, bu kavramın temel özelliklerini ortaya koydular. Daha sonra birçok araştırmacı esnek küme kavramını farklı cebirsel yapılar üzerinde ele aldılar ve bu yapılar üzerindeki etkisini incelediler.

Jun (2008) esnek kümeleri BCK/BCI-cebirlerine uygulayarak, BCK/BCI-cebirlerinde esnek kümelerin cebirsel özeliklerini tartıştı. Park ve ark. (2008), esnek

WS-cebirleri üzerine bir çalışma yaptı. Feng ve ark. (2008) esnek küme teorisini kullanarak esnek yarı halka kavramını ortaya koydular ve bunlarla ilgili bazı özelikleri incelediler. Sun ve ark. (2008) esnek modülleri tanımlayarak buna ait bazı temel özellikleri elde ettiler. Jun ve Park (2008) esnek kümelerin ideal teorisindeki uygulamalarını ele aldılar. Jun ve ark. (2009) esnek BCI cebirlerinin esnek p-idealleri kavramını incelediler ve bunlarla ilgili özellikleri ortaya koydular. Acar ve ark. (2010) esnek halkaları tanımladılar ve esnek halkaların bazı temel özelliklerini incelediler. Babitha ve Sunil (2009) esnek küme bağıntısı kavramını ele aldılar ve bu kavramla ilgili birçok özelliği tartıştılar. Çağman ve Enginoğlu (2010) esnek matrisleri ve onlara ait işlemleri tanımladılar. Ayrıca bir esnek maksimum-minimum karar verme metodunu oluşturdular. Majumdar ve Samanta (2010) esnek dönüşüm kavramını verdiler ve onların bazı özellikleri üzerinde çalıştılar. Üstelik esnek dönüşüm altında bir esnek kümenin resmi ve ters resmi gibi yeni kavramlar verdiler. Liu ve ark. (2012) esnek halkaların bazı sınıflarını tanımlayarak esnek halkalarda birinci, ikinci ve üçüncü izomorfi teoremlerini verdiler. Qin ve Hong (2010) esnek kümelerin kafes yapısını inşaa ettiler, esnek eşitlik kavramını incelediler ve bunlarla ilgili bazı özellikler elde ettiler. Atagün ve Sezgin (2011) Molodtsov'un esnek kümelerle ilgili tanımını kullanarak bir halkanın esnek alt halkaları ve esnek idealleri üzerinde çalıştılar. Ayrıca bir cismin esnek alt cismi ve bir sol R-modülün esnek alt modüllerini ele alarak halkalar, cisimler ve modüllerin esnek alt yapıları arasındaki ilişkiyi ortaya koydular. Türkmen ve Pancar (2012) esnek kümelerdeki ikili işlemlerin modül yapısı üzerindeki etkisini araştırdılar ve esnek modüllerle ilgili bir takım özellikleri incelediler. Yamak ve ark. (2011) esnek hypergrupoid kavramını verdiler ve esnek hypergrupoidlerin L-alt hypergrupoidlerle olan ilişkisini incelediler. Ayrıca esnek hypergupoidlerin bazı yeni özelliklerini elde ettiler. Çelik ve ark. (2011) esnek kümeler üzerinde yeni ikili işlemler verdiler ve esnek halkalarla ilgili yeni özellikler elde ettiler. Sezer (2012) esnek kümeler yardımıyla klasik halka teorisine yeni bir yaklaşım sundu. Esnek birleşimsel halka, ideal ve bi-ideal kavramlarını inceledi, bunlara ait özellikleri ortaya koydu.

Ali ve ark. (2010) bir S yarı grubunun üzerinde esnek ideal, esnek yarı ideal ve esnek bi ideal kavramlarını vererek bu ideallerin bazı temel özelliklerini incelediler. Sezer ve ark. (2015) yarı gruplar üzerinde esnek kesişimsel yarı grup, esnek kesişimsel sol (sağ, iki yönlü) ideal, esnek kesişimsel bi-ideal kavramlarını verdiler ve bunlara ait özellikleri incelediler. Sezer ve ark. (2014) yarı grupların esnek kesişimsel iç ideali ve esnek kesişimsel yarı ideali kavramlarını verdiler ve bu kavramlara ait olan özellikleri araştırdılar. Biz bu çalışmada Sezer ve ark. (2014, 2015) tarafından ele alınmış olan esnek kesişimsel yarı grup, esnek kesişimsel ideal kavramlarını, bu kavramlara ait özellikleri ve elde edilen sonuçları derledik.

Bu çalışma iki ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde çalışmanın temeli olan yarı gruplar, idealler ve esnek kümeler hakkında bazı tanım ve önermeler ifade edilmiştir. Ayrıca esnek kesişimsel çarpım ve esnek karakteristik fonksiyon kavramları ele alınmıştır. İkinci bölüm ise beş kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda esnek kesişimsel yarı grup kavramı, ikinci kısımda esnek kesişimsel sol (sağ, iki yönlü) ideal kavramı, üçüncü kısımda esnek kesişimsel bi-ideal kavramı, dördüncü kısımda esnek kesişimsel iç ideal kavramı, beşinci kısımda ise esnek kesişimsel yarı ideal kavramları verilerek bunlara ait özellikler sunulmuştur.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Yarı gruplar ve İdealler

Tanım 2.1.1. (Clifford and Preston, 1961) $S \neq \emptyset$ ve ‘’*’’ S üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Eğer her $a, b, c \in S$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ ise S’ye bir yarı grup denir.

Ayrıca $(a * e) = (e * a) = a$ olacak şekilde $e \in S$ varsa S yarı grubuna monoid denir.

Tanım 2.1.2. (Clifford and Preston, 1961) $(S,*)$ bir yarı grup ve $\emptyset \neq A \subseteq S$ olsun. Eğer $A * A \subseteq A$ ise A’ya S’nin bir alt yarı grubu denir. Eğer $A * S \subseteq A$ ise A’ya S’nin sağ ideali, $S * A \subseteq A$ ise A’ya S’nin sol ideali denir.

Tanım 2.1.3. (Howie, 1995) $(S,*)$ bir yarı grup ve $\emptyset \neq T \subseteq S$ olsun. T’ye S’nin bi-ideali denir $\Leftrightarrow S * T * S \subseteq T$ dir.

Tanım 2.1.4. (Howie, 1995) S bir yarı grup olsun. $\emptyset \neq A \subseteq S$ olmak üzere eğer $SAS \subseteq A$ ise A’ya S’nin bir iç ideali denir. Eğer $AS \cap SA \subseteq A$ oluyorsa A’ya S’nin yarı ideali denir.

Tanım 2.1.5. (Petrich, 1973) S bir yarı grup olsun. Her $a \in S$ için $a = axa$ veya $a \in aSa$ olacak şekilde $x \in S$ varsa A’ya regüler yarı grup denir.

2.2. Esnek Kümeler

Tanım 2.2.1. (Çağman and Enginoğlu, 2010) $U \neq \emptyset$ bir evren $E \neq \emptyset$ ve $A \subseteq E$ olsun. U üzerinde f_A: $E \to \mathrm{P}(U)$ dönüşümü ile verilen (f_A, E) ikilisine U üzerinde bir esnek küme denir.

$$f_A = \{(x, f_A(\mathrm{x})) : x \in E,\ f_A(x) \in P(U)\}$$

U üzerinde tanımlı tüm esnek kümeler $S(U)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2. (Çağman and Enginoğlu, 2010) f_A, $f_B \in S(U)$ olsun. Her $x \in E$ için $f_A(x) \subseteq f_B(x)$ ise f_A’ya f_B’nin bir esnek alt kümesi denir ve $f_A \subseteq f_B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.3. (Çağman and Enginoğlu, 2010) f_A, $f_B \in S(U)$ olsun. Her $x \in E$ için $f_{A\cup B}(x) = f_A(x) \cup f_B(x)$ olmak üzere $f_A \cup f_B = f_{A\cup B}$ şeklinde tanımlı $f_A \cup f_B$ esnek kümesine f_A ve f_B nin birleşimi denir.

Tanım2.2.4. (Çağman and Enginoğlu, 2010) f_A, $f_B \in S(U)$ olsun. Her $(x,y) \in E$xE için $f_{A\vee B}$(x,y)= $f_A(x) \cup f_B(y)$ olmak üzere $f_A \vee f_B$=$f_{A\vee B}$ şeklinde tanımlı $f_A \vee f_B$ esnek kümesine f_A ve f_B nin $\vee$-birleşimi denir.

Tanım 2.2.5. (Çağman and Enginoğlu, 2010) f_A, $f_B \in S(U)$ olsun. Her $x \in E$ için $f_{A\cap B}(x)$=$f_A(x) \cap f_B(x)$ olmak üzere $f_A \cap f_B = f_{A\cap B}$ şeklinde tanımlı $f_A \cap f_B$ esnek kümesine f_A ve f_B nin arakesiti denir.

Tanım 2.2.6. (Çağman and Enginoğlu, 2010) f_A, $f_B \in S(U)$ olsun. Her $(x,y) \in E$xE için $f_{A\wedge B}(x,y)$= $f_A(x) \cap f_B(y)$ olmak üzere $f_A \wedge f_B$=$f_{A\wedge B}$ şeklinde tanımlı $f_A \wedge f_B$ esnek kümesine f_A ve f_B nin $\wedge$- arakesiti denir.

Tanım 2.2.7. (Feng ve ark., 2008) $f_A, f_B \in S(U)$ olsun. Her $(x,y) \in E$xE için $f_{A\times B}(x,y) = f_A(x) \times f_B(y)$ olmak üzere $f_A \times f_B$=$f_{A\times B}$ şeklinde tanımlı $f_A \times f_B$ esnek kümesine f_A ve f_B nin çarpımı denir.

Tanım 2.2.8. (Çelik ve ark., 2011) f_A, f_B ∈S(U) ve $\varphi: A \to B$ bir fonksiyon olsun. f_A nın φ dönüşümü altındaki görüntüsü $\varphi(f_A)$ ile gösterilir ve her $b \in B$ için

$$(\varphi(f_A))(\mathrm{b})=\begin{cases} \cup\{f_A(a): a \in \mathrm{A} \text{ ve } \varphi(a) = b\}, & \text{eğer } \varphi^{-1}(b) \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

f_B nin φ altındaki ters görüntüsü $\varphi^{-1}(f_B)$ ile gösterilir ve her $a \in A$ için $(\varphi^{-1}(f_B))(a)$ = $f_B(\varphi(a))$ şeklinde tanımlanır.

2.3. Esnek Kesişimsel Çarpım ve Esnek Karakteristik Fonksiyon

Tanım 2.3.1. (Sezer ve ark., 2015) f_s ve g_s U üzerinde esnek kümeler olsunlar. Her $x, y, z \in S$ için

$$(f_s \circ g_s)(x) = \begin{cases} \cup_{x=yz}\{f_s(y) \cap g_s(z)\} & x = yz \; ise \\ \emptyset & diğer\; durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f_s \circ g_s$ ye f_s ve g_s'nin esnek kesişimsel çarpımı denir.

Tanım 2.3.2. (Sezer ve ark., 2015) $X \subseteq S$ olsun.

$$S_X(x) = \begin{cases} U, & x \in X \\ \emptyset, & x \notin X \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan S_X fonksiyonuna X'in karakteristik fonksiyonu denir.

Açıkça görülüyor ki S_X:$S \longrightarrow$P(U) ile verilen esnek karakteristik fonksiyon U üzerinde bir esnek kümedir.

Önerme 2.3.1. (Sezer ve ark., 2015) S bir yarı grup ve $X, Y \subseteq S$ olsun. Bu takdirde;

i) $X \subseteq Y$ ise $S_X \subseteq S_Y$ dir.

ii) $S_X \cap S_Y$=$S_{X\cap Y}$ ve $S_X \cup S_Y$=$S_{X\cup Y}$

iii) $S_X \circ S_Y$=S_{XY}

İspat:

i) Tanım 2.3.2 ile ispatı açıktır.

ii) $s\epsilon S$ olsun. Eğer $s \in X \cap Y$ ise $s \in X$ ve $s \in Y$ dir. Buradan $(S_X \cap S_Y)(s) = S_X(s) \cap S_Y(s) = U \cap U = U = S_{X\cap Y}(s)$ dir. Eğer $s \notin X \cap Y$ ise $s \notin X \; veya \; s \notin Y$ dir. Buradan $(S_X \cap S_Y)(s) = S_X(s) \cap S_Y(s) = \emptyset = S_{X\cap Y}(s)$ dir.

Eğer $s \in X \cup Y$ ise $s \in X$ veya $s \in Y$ dir. Buradan $(S_X \cup S_Y)(s) = S_X(s) \cup S_Y(s) = U = S_{X\cup Y}(s)$ dir. Eğer $s \notin X \cup Y$ ise $s \notin X \; ve \; s \notin Y$ dir. Buradan $(S_X \cup S_Y)(s) = S_X(s) \cup S_Y(s) = \emptyset = S_{X\cup Y}(s)$ dir.

iii) $s\epsilon S$ olsun. Eğer $s \in XY$ ise $\exists x \in X$ ve $\exists y \in Y$ öyleki $s = xy$ dir. Üstelik $S_X \circ S_Y(s) = \bigcup_{s=xy} S_X(x) \cap S_Y(y) \supseteq S_X(x) \cup S_Y(y) = U$ dir. Yani $(S_X \circ S_Y)(s) = U$. $s = xy \in XY$ olduğundan S_{XY}(s)=U dur. Buradan $S_X \circ S_Y$=S_{XY} dir. Eğer $s \notin XY$ ise her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $s \neq xy$ dir. Üstelik $S_X \circ S_Y(s) = \bigcup_{s=xy} S_X(x) \cap S_Y(y) = \emptyset = S_{XY}(s)$ dir. Böylece $S_X \circ S_Y$=S_{XY} elde edilir.

3. ESNEK KESİŞİMSEL YARI GRUPLAR VE İDEALLER

3.1. Esnek Kesişimsel Yarı Gruplar

Tanım 3.1.1. (Sezer ve ark., 2015) S bir yarı grup ve f_s, U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x, y \in S$ için $f_s(xy) \supseteq f_s(x) \cap f_s(y)$ ise f_s ye S'nin esnek kesişimsel yarı grubu denir. Esnek kesişimsel yarı grubu kısaca EK-yarı grup olarak gösterilir.

Örnek 3.1.1. $S = \{a, b, c, d\}$ yarı grubu aşağıdaki gibi tanımlansın.

.	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	b	a
d	a	a	b	b

U üzerinde f_S esnek kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$f_S(a) = \{a, b, c, d\}$,

$f_S(b) = \{b, c, d\}$,

$f_S(c) = \{c, d\}$,

$f_S(d) = \{b, d\}$

Açıkca f_S esnek kümesi U üzerinde bir EK-yarı gruptur.

Şimdi, $U = \left\{\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & x \end{bmatrix} : x\epsilon\mathbb{Z}_5\right\}$ şeklinde 2x2 türünde matrislerin kümesini ele alalım.

U üzerinde g_S esnek kümesi aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$g_S(a) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right\}$

$g_S(b) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\}$

$g_S(c) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right\}$

$g_S(d) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right\}$

$g_S(dc) \not\supseteq g_S(d) \cap g_S(c)$ olduğundan g_S, U üzerinde EK-yarı grup değildir.

Eğer her $x \in S$ için $f_S(x) = U$ ise f_S, U üzerinde bir EK-yarı gruptur. Bu şekildeki EK-yarı gruplar $\mathbb{S}$ ile gösterilir. Açıkca $\mathbb{S} = S_S$ dir. Yani her $x \in S$ için $\mathbb{S}(x) = U$ dur.

Önerme 3.1.1. (Sezer ve ark., 2015)

i) $\mathbb{S} \circ \mathbb{S} \subseteq \mathbb{S}$

ii) $f_S \circ \mathbb{S} \subseteq \mathbb{S}$ ve $\mathbb{S} \circ f_S \subseteq \mathbb{S}$

iii) $f_S \cup \mathbb{S} = \mathbb{S}$

iv) $f_S \cap \mathbb{S} = f_S$

İspat:

i) $f_s \in \mathbb{S}$ ve $x, y, z \epsilon S$ alalım öyle ki $x = yz$ olsun. Açıkça $(f_s \circ f_s)(x) = \bigcup_{x=yz}\{f_s(y) \cap f_s(z)\} \subseteq \bigcup_{x=yz} f_s\,(yz) = f_s(x)$ dir. Buradan $f_s(x) \supseteq f_s \circ f_s(x)$ elde edilir. Böylece $\mathbb{S} \supseteq \mathbb{S} \circ \mathbb{S}$ dir.

ii) i)'nin ispatına benzer şekilde yapılır.

iii) $g_s \epsilon \mathbb{S}$ alalım. $(f_s \cup g_s)(x) = f_s(x) \cup g_s(x) = U = g_s(x)$ dir. Yani $f_s \cup g_s = g_s$ olur. Buradan $f_s \cup \mathbb{S} = \mathbb{S}$ dir.

iv) iii)'nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.1.1. (Sezer ve ark., 2015) f_s, U üzerinde esnek bir küme olsun. f_s, U üzerinde EK-yarı gruptur $\Leftrightarrow f_s \circ f_s \subseteq f_s$.

İspat: f_s, U üzerinde EK-yarı grup olsun. $a \epsilon S$ alalım. Eğer $(f_s \circ f_s)(a) = \emptyset$ ise $(f_s \circ f_s)(a) \subseteq f_s(a)$ dır. Böylece $f_s \circ f_s \subseteq f_s$ dir. Diğer durumlarda $x, y \in S$ alalım öyleki $a = xy$ olsun. f_s, EK-yarı grup olduğundan,

$$(f_s \circ f_s)(a) = \bigcup_{a=xy} (f_s(x) \cap f_s\,(y))$$
$$\subseteq \bigcup_{a=xy} f_s\,(xy)$$
$$= \bigcup_{a=xy} f_s\,(a)$$
$$= f_s(a) \text{ dır.}$$

Böylece, $f_s \circ f_s \subseteq f_s$ elde edilir.

Tersine, $f_s \circ f_s \subseteq f_s$ olsun. $x, y \in S$ ve $a = xy$ alalım.

$$f_s(xy) = f_s(a)$$
$$\supseteq (f_s \circ f_s)(a)$$
$$= \bigcup_{a=xy} (f_s(x) \cap f_s\,(y))$$
$$\supseteq f_s(x) \cap f_s(y) \text{ dir.}$$

Böylece $f_s(xy) \supseteq f_s(x) \cap f_s(y)$ olduğundan f_s , U üzerinde EK-yarı gruptur.

Teorem 3.1.2. (Sezer ve ark., 2015) S bir yarı grup ve $\emptyset \neq X \subseteq S$ olsun. X, S'nin alt yarı grubudur $\Leftrightarrow S_X$, S nin EK-yarı grubudur.

İspat: X, S nin alt yarı grubu olsun. O halde $XX \subseteq X$ dir. Önerme 2.3.1 ve Önerme 3.1.1 ile $S_X \circ S_X = S_{XX} \subseteq S_X$ yazabiliriz. Böylece Teorem 3.1.1'den S_X, U üzerinde EK-yarı gruptur.

Şimdi S_X, S nin EK-yarı grubu olsun. Teorem 3.1.1 ile $S_X(x) \supseteq (S_X \circ S_X)(x) = S_{XX}(x) = U$ dir. Buradan $S_X(x) = U$ ve $x \epsilon X$ dir. Böylece $XX \subseteq X$ dir. Yani X, S nin alt yarı grubudur.

Teorem 3.1.3. (Sezer ve ark., 2015) f_S ve f_T U üzerinde EK-yarı gruplar olsun. Bu takdirde $f_S \wedge f_T$ de U üzerinde EK-yarı gruptur.

İspat: (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in S \times T$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} f_{S \wedge T}((x_1, y_1)(x_2, y_2)) &= f_{S \wedge T}(x_1 x_2, y_1 y_2) \\ &= f_S(x_1 x_2) \cap f_T(y_1 y_2) \\ &\supseteq \big(f_S(x_1) \cap f_S(x_2)\big) \cap \big(f_T(y_1) \cap f_T(y_2)\big) \\ &= (f_S(x_1) \cap f_T(y_1)) \cap (f_S(x_2) \cap f_T(y_2)) \\ &= f_{S \wedge T}(x_1, y_1) \cap f_{S \wedge T}(x_2, y_2) \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Böylece $f_{S \wedge T}$ U üzerinde EK-yarı gruptur.

Teorem 3.1.4. (Sezer ve ark., 2015) f_S ve f_T U üzerinde EK-yarı gruplar ise $f_S \times f_T$ de $U \times U$ üzerinde EK-yarı gruptur.

İspat: (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in S \times T$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} f_{S \times T}((x_1, y_1)(x_2, y_2)) &= f_{S \times T}(x_1 x_2, y_1 y_2) \\ &= f_S(x_1 x_2) \times f_T(y_1 y_2) \\ &\supseteq \big(f_S(x_1) \cap f_S(x_2)\big) \times \big(f_T(y_1) \cap f_T(y_2)\big) \\ &= \big(f_S(x_1) \times f_T(y_1)\big) \cap (f_S(x_2) \times f_T(y_2)) \\ &= f_{S \times T}(x_1, y_1) \cap f_{S \times T}(x_2, y_2) \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Böylece $f_S \times f_T = f_{S \times T}$ $U \times U$ üzerinde bir EK-yarı gruptur.

Teorem 3.1.5. (Sezer ve ark., 2015) f_s ve h_s U üzerinde EK-yarı gruplar ise $f_s \cap h_s$ de U üzerinde EK-yarı gruptur.

İspat: $x, y \in S$ alalım. Buradan

$$\begin{aligned} (f_s \cap h_s)(xy) &= f_s(xy) \cap h_s(xy) \\ &\supseteq (f_s(x) \cap f_s(y)) \cap (h_s(x) \cap h_s(y)) \\ &= (f_s(x) \cap h_s(x)) \cap (f_s(y) \cap h_s(y)) \end{aligned}$$

$= (f_s \cap h_s)(x) \cap (f_s \cap h_s)(y)$ elde edilir.

Teorem 3.1.6. (Sezer ve ark., 2015) f_S ve f_T U üzerinde esnek kümeler, φ, S'den T ye bir yarı grup izomorfizması olsun. Eğer f_S, U üzerinde EK-yarı grup ise $\varphi(f_S)$ de EK-yarı gruptur.

İspat: $t_1, t_2 \in T$ olsun. φ örten olduğundan $\exists s_1, s_2 \in S$ öyleki $\varphi(s_1) = t_1$, $\varphi(s_2) = t_2$ dir. Buradan,

$\varphi(f_S)(t_1 t_2)$

$= \bigcup \{f_S(s) : s \in S, \quad \varphi(s) = t_1 t_2\}$

$= \bigcup \{f_S(s) : s \in S, \quad s = \varphi^{-1}(t_1 t_2)\}$

$= \bigcup \{f_S(s) : s \in S, \quad s = \varphi^{-1}(\varphi(s_1 s_2)) = s_1 s_2\}$

$= \bigcup \{f_S(s_1 s_2) : s_i \in S, \ \varphi(s_i) = t_i, i = 1,2\}$

$\supseteq \bigcup \{f_s(s_1) \cap f_s(s_2) : s_i \in S, \ \varphi(s_i) = t_i, i = 1,2\}$

$= \left(\bigcup \{f_s(s_1) : s_1 \in S, \varphi(s_1) = t_1\}\right) \cap \left(\bigcup \{f_s(s_2) : s_2 \in S, \varphi(s_2) = t_2\}\right)$

$= (\varphi(f_s))(t_1) \cap (\varphi(f_s))(t_2)$ elde edilir.

Böylece $\varphi(f_s)$, U üzerinde EK-yarı gruptur.

Teorem 3.1.7. (Sezer ve ark., 2015) f_S ve f_T U üzerinde esnek kümeler olsun. φ, S den T ye bir yarı grup homomorfizması olsun. Eğer f_T, U üzerinde EK-yarı grup ise $\varphi^{-1}(f_T)$ de EK-yarı gruptur.

İspat: $s_1, s_2 \in S$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}
\left(\varphi^{-1}(f_T)\right)(s_1 s_2) &= f_T(\varphi(s_1 s_2)) \\
&= f_T(\varphi(s_1)\varphi(s_2)) \\
&\supseteq f_T(\varphi(s_1)) \cap f_T(\varphi(s_2)) \\
&= (\varphi^{-1}(f_T)(s_1) \cap \left(\varphi^{-1}(f_T)\right)(s_2) \text{ elde edilir.}
\end{aligned}$$

Böylece $\varphi^{-1}(f_T)$ U üzerinde EK-yarı gruptur.

3.2. Esnek Kesişimsel İdealler

Tanım 3.2.1. (Sezer ve ark., 2015) f_S, U üzerinde esnek küme olsun. Eğer her $a, b\epsilon S$ için $f_S(ab) \supseteq f_S(b)$ ise f_S'ye U üzerinde S'nin EK-sol ideali denir. Her $a, b\epsilon S$ için $f_S(ab) \supseteq f_S(a)$ ise f_S' ye U üzerinde S'nin EK-sağ ideali denir. Her $a, b\epsilon S$ için f_S , U üzerinde S'nin EK-sol ideali ve EK-sağ ideali ise f_S'ye U üzerinde S'nin hem EK-sol ideali hem EK-sağ ideali (iki yönlü ideali) denir.

Örnek 3.2.1. $S = \{a, b, c\}$ yarı grubu aşağıdaki tablodaki işlem ile tanımlı olsun.

.	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	c

S üzerinde f_S esnek kümesi aşağıdaki gibi verilsin.

$f_S(a) = \{a, b, c\}$, $f_S(b) = \{a, b\}$, $f_S(c) = \{b\}$

f_S'nin U üzerinde S'nin EK- ideali olduğu açıktır.

Şimdi de S üzerinde g_S esnek kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$g_S(a) = \{c\}$, $\quad g_S(b) = \{b, c\}$, $\quad g_S(c) = \{a, b, c\}$

Açıkça $g_S(bc) = g_S(b) \not\supseteq g_S(c)$ olduğundan g_S, S'nin esnek kesişimsel sol ideali değildir.

Teorem 3.2.1. (Sezer ve ark., 2015) f_S, U üzerinde esnek küme olsun. f_S, U üzerinde S'nin EK-sol idealidir $\Leftrightarrow$ $\mathbb{S} \circ f_S \subseteq f_S$ dir.

İspat: f_S, U üzerinde S'nin EK-sol ideali olsun. $s \in S$ alalım. Eğer $(\mathbb{S} \circ f_S)(s) = \emptyset$ ise $\mathbb{S} \circ f_S \subseteq f_S$ olduğu açıktır.

Diğer durumlarda; $x, y \in S$ alalım öyleki $s = xy$ olsun. f_S, EK-sol ideal olduğundan

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{S} \circ f_S)(s) &= \bigcup_{s=xy} (\mathbb{S}(x) \cap f_S(y)) \\
&\subseteq \bigcup_{s=xy} \big(U \cap f_S(xy)\big) \\
&= \bigcup_{s=xy} \big(U \cap f_S(s)\big)
\end{aligned}
$$

$= f_S(s)$ dir.

Böylece $\mathbb{S} \circ f_S \subseteq f_S$ elde edilir.

Tersine, $\mathbb{S} \circ f_S \subseteq f_S$ olsun. $s = xy$ olacak şekilde $x, y \in S$ alalım. Açıkça,

$$\begin{aligned} f_S(xy) &= f_S(s) \\ &\supseteq (\mathbb{S} \circ f_S)(s) \\ &= \bigcup_{s=xy} (\mathbb{S}(x) \cap f_S\,(y)) \\ &\supseteq \mathbb{S}(x) \cap f_S(y) \\ &= f_S(y) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Böylece f_S, U üzerinde S'nin EK-sol idealidir.

Teorem 3.2.2. (Sezer ve ark., 2015) f_S, U üzerinde esnek küme olsun. f_S, U üzerinde S'nin EK-sağ idealidir $\Leftrightarrow f_S \circ \mathbb{S} \subseteq f_S$ dir.

İspat: Teorem 3.2.1'in ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.2.3. (Sezer ve ark., 2015) f_S, U üzerinde esnek küme olsun. f_S U üzerinde S'nin EK-idealidir$\Leftrightarrow$ $f_S \circ \mathbb{S} \subseteq f_S$ ve $\mathbb{S} \circ f_S \subseteq f_S$ dir.

Sonuç 3.2.1. (Sezer ve ark., 2015) $\mathbb{S}$, S'nin hem EK-sağ hem de EK-sol idealidir.

Teorem 3.2.4. (Sezer ve ark., 2015) S bir yarı grup ve $\emptyset \neq X \subseteq S$ olsun. X, S nin sol (sağ, iki yönlü) idelidir $\Leftrightarrow S_X$, U üzerinde S'nin EK-sol (sağ, iki yönlü) idealidir.

İspat: İspatı EK-sol ideal için yapalım. X, S'nin sol ideali olsun. Buradan $SX \subseteq X$ dir. Böylece $\mathbb{S} \circ S_X = S_S \circ S_X = S_{SX} \subseteq S_X$ dir. Teorem 3.2.1 ile S_X, U üzerinde S'nin EK-sol idealdir.

Tersine, $x \in SX$ ve S_X, U üzerinde S'nin EK-sol ideali olsun. Açıkça $S_X(x) \supseteq (\mathbb{S} \circ S_X)(x) = (S_S \circ S_X)(x) = S_{SX}(x) = U$ dir. Buradan $S_X(x) = U$ olduğu görülür. Böylelikle $x \in X$ dir. Buradan $SX \subseteq X$ ve X, S nin sol idealidir.

Teorem 3.2.5. (Sezer ve ark., 2015) f_S, U üzerinde esnek küme olsun. f_S, U üzerinde S'nin EK-idealidir $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in S$ $için$ $f_S(xy) \supseteq f_S(x) \cup f_S(y)$ dir.

İspat: f_S, U üzerinde S nin EK-ideali olsun. Her $x, y \in S$ için $f_S(xy) \supseteq f_S(x)$ ve $f_S(xy) \supseteq f_S(y)$ olduğundan $f_S(xy) \supseteq f_S(x) \cup f_S(y)$ dir.

Tersine, Her $x, y \in S$ için $f_S(xy) \supseteq f_S(x) \cup f_S(y)$ olsun. $f_S(xy) \supseteq f_S(x) \cup f_S(y) \supseteq f_S(x)$ ve $f_S(xy) \supseteq f_S(x) \cup f_S(y) \supseteq f_S(y)$ dir.
Böylece, f_S, U üzerinde S'nin EK-idealidir.
Açıkça görülüyor ki S'nin her sol (sağ, iki yönlü) ideali S'nin bir alt yarı grubudur.

Teorem 3.2.6. (Sezer ve ark., 2015) f_S, U üzerinde esnek küme olsun. Eğer f_S, S'nin U üzerinde EK-sol (sağ, iki yönlü) ideali ise f_S, U üzerinde EK-yarı gruptur.

İspat: İspatı EK-sol ideal için yapalım. f_S, S'nin EK-sol ideali olsun. Buradan her $x, y \in S$ için $f_S(xy) \supseteq f_S(y)$dir.
Üstelik $f_S(xy) \supseteq f_S(y) \supseteq f_S(x) \cap f_S(y)$ yani $f_S(xy) \supseteq f_S(x) \cap f_S(y)$ dir. Böylece f_S, U üzerinde EK-yarı gruptur.

Teorem 3.2.7. (Sezer ve ark., 2015) f_S, S'nin EK-sağ ideali olsun ve g_S, S'nin U üzerinde EK-sol ideali olsun. Bu takdirde $f_S \circ g_S \subseteq f_S \cap g_S$ dir.

İspat: Sırasıyla f_S ve g_S S'nin U üzerinde EK-sağ ve EK-sol idealleri olsunlar. Açıkça f_S, $g_S \subseteq S$ olduğundan, $f_S \circ g_S \subseteq f_S \circ \mathbb{S} \subseteq f_S$ ve $f_S \circ g_S \subseteq \mathbb{S} \circ g_S \subseteq g_S$ dir. Buradan $f_S \circ g_S \subseteq f_S \cap g_S$ dir.

Teorem 3.2.8. (Sezer ve ark., 2015) f_S ve h_S, U üzerinde S'nin EK-sol (sağ) ideali olsunlar. Bu takdirde $f_S \circ h_S$ de U üzerinde S'nin EK-sol (sağ) idealidir.

İspat: f_S ve h_S, S'nin EK-sol ideali olsunlar. $x, y \in S$ alalım. f_S ve h_S' nin esnek kesişimsel çarpımı $(f_S \circ h_S)(y) = \bigcup_{y=pq}\big(f_S(p) \cap h_S(q)\big)$ şeklindedir. Burada eğer $y = pq,\ xy = x(pq) = (xp)q$ olarak alırsak, f_S S'nin EK-sol ideali olduğundan $f_S(xp) \supseteq f_S(p)$ dir. Böylece,

$$\begin{aligned}(f_S \circ h_S)(y) &= \bigcup_{y=pq}\big(f_S(p) \cap h_S(q)\big)\\ &\subseteq \bigcup_{xy=xpq}\big(f_S(xp) \cap h_S(q)\big) = (f_S \circ h_S)(xy)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $(f_S \circ h_S)(xy) \supseteq (f_S \circ h_S)(y)$ dir. Eğer $y, y = pq$ şeklinde ifade edilemezse $(f_S \circ h_S)(y) = \emptyset \subseteq (f_S \circ h_S)(xy)$ dir. Böylece $f_S \circ h_S$ S'nin EK-sol idealidir.

Önerme 3.2.1. (Sezer ve ark., 2015) f_S ve f_T U üzerinde S'nin EK-sol (sağ) idealleri olsun. Bu takdirde $f_S \wedge f_T$ de U üzerinde $S \times T$'nin EK-sol (sağ) idealidir.

İspat: f_S ve f_T U üzerinde S'nin EK-sol idealleri olsunlar. $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S \times T$ alalım. Açıkça

$$\begin{aligned} f_{S \wedge T}((x_1, y_1)(x_2, y_2)) &= f_{S \wedge T}(x_1 x_2, y_1 y_2) \\ &= f_S(x_1 x_2) \cap f_T(y_1 y_2) \\ &\supseteq f_S(x_2) \cap f_T(y_2) \\ &= f_{S \wedge T}(x_2, y_2) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Böylece $f_S \wedge f_T$ de U üzerinde EK-sol idealdir. Sağ ideal içinde benzer şekilde yapılabilir.

Önerme 3.2.2. (Sezer ve ark., 2015) Eğer f_S ve f_T U üzerinde S'ninEK-sol (sağ) idealleri ise $f_S \times f_T$ de $U \times U$ üzerinde $S \times T$'nin EK-sol (sağ) idealidir.

İspat: f_S ve f_T U üzerinde S'nin EK-sol idealleri olsunlar. $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S \times T$ alalım. Açıkça

$$\begin{aligned} f_{S \times T}((x_1, y_1)(x_2, y_2)) &= f_{S \times T}(x_1 x_2, y_1 y_2) \\ &= f_S(x_1 x_2) \times f_T(y_1 y_2) \\ &\supseteq f_S(x_2) \times f_T(y_2) \\ &= f_{S \times T}(x_2, y_2) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Böylece $f_S \times f_T$ de $U \times U$ üzerinde EK-sol idealdir. Sağ ideal içinde benzer şekilde yapılabilir.

Önerme 3.2.3. (Sezer ve ark., 2015) f_S ve h_S U üzerinde S'nin EK-sol (sağ) idealleri ise $f_S \cap h_S$ de U üzerinde S'nin EK-sol (sağ) idealidir.

İspat: f_S ve h_S U üzerinde S'nin EK-sol idealleri olsunlar. $x, y \in S$ alalım. Açıkça

$$\begin{aligned} (f_S \cap h_S)(xy) &= f_S(xy) \cap h_S(xy) \\ &\supseteq f_S(y) \cap h_S(y) \\ &= (f_S \cap h_S)(y) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Yani $f_S \cap h_S$ de U üzerinde S'nin EK-sol idealidir. Sağ ideal içinde benzer şekilde yapılabilir.

Önerme 3.2.4. (Sezer ve ark., 2015) f_S, U üzerinde esnek küme ve φ, S'den T'ye bir yarı grup izomorfizması olsun. Eğer f_S, U üzerinde S'nin EK-sol (sağ) ideali ise $\varphi(f_S)$ de U üzerinde T'nin EK-sol (sağ) idealidir.

İspat: f_S, U üzerinde S'nin EK-sol ideali olsun. $t_1, t_2 \in T$ alalım. φ örten olduğundan $\exists s_1, s_2 \in S$ öyleki $\varphi(s_1) = t_1,\ \varphi(s_2) = t_2$ dir. Açıkça

$\varphi(\, f_S)(\, t_1 t_2)$

$= \bigcup\{f_S(s): s \in S, \quad \varphi(s) = t_1 t_2\}$

$= \bigcup\{f_S(s): s \in S, \quad s = \varphi^{-1}(t_1 t_2)\}$

$= \bigcup\{f_S(s): s \in S, \quad s = \varphi^{-1}\big(\varphi(\, s_1 s_2)\big) = \ s_1 s_2\}$

$= \bigcup\{f_S(s_1 s_2): s_i \in S,\ \ \varphi(s_i) = t_i\,, i = 1,2\,\}$

$\supseteq \left(\bigcup\{f_s(s_2): s_2 \in S, \varphi(s_2) = t_2\}\right)$

$= (\varphi(f_s))(t_2)$ dir.

Böylece $\varphi(f_s)$ de U üzerinde T'nin EK-sol idealidir. Sağ ideal içinde benzer şekilde yapılabilir.

Önerme 3.2.5. (Sezer ve ark., 2015) f_T U üzerinde esnek küme ve φ, S'den T'ye yarı grup homorfizması olsun. Eğer f_T, U üzerinde T'nin EK-sol (sağ) ideali ise $\varphi^{-1}(f_T)$ de U üzerinde S'nin EK-sol (sağ) idealidir.

İspat: f_T, U üzerinde T'nin EK-sol ideali olsun. $s_1, s_2 \in S$ alalım. Açıkça

$$\begin{aligned}\big(\varphi^{-1}(f_T)\big)(s_1 s_2) &= \ f_T\big(\varphi(s_1 s_2)\big) \\ &= f_T(\varphi(s_1)\varphi(s_2)) \\ &\supseteq f_T(\varphi(s_2)) \\ &= \big(\varphi^{-1}(f_T)\big)(s_2) \text{ elde edilir.}\end{aligned}$$

Böylece $\varphi^{-1}(f_T)$ U üzerinde S'nin EK-sol idealidir. Sağ ideal içinde benzer şekilde yapılabilir.

3.3. Esnek Kesişimsel Bi-İdealler

Tanım 3.3.1. (Sezer ve ark., 2015) f_s, U üzerinde esnek kesişimsel yarı grup olsun. Eğer her $x, y, z \in S$ için $f_s(xyz) \supseteq f_s(x) \cap f_s(z)$ oluyorsa f_s'ye U üzerinde esnek kesişimsel bi-ideal denir. Esnek kesişimsel bi-idealler kısaca EK-bi-ideal olarak yazılır.

Örnek 3.3.1. $S = \{0,1,2,3\}$ yarı grubu aşağıdaki tablodaki gibi tanımlansın.

+	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	1	2	0
3	0	3	0	0

$U = \mathbb{Z}_4$ kümesi üzerinde f_s esnek kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$f_s(0) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, $f_s(1) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, $f_s(2) = \{\bar{0}\}$, $f_s(3) = \{\bar{1}, \bar{2}\}$

f_s'nin U üzerinde S'nin EK-bi-ideali olduğu kolaylıkla görülebilir.

Teorem 3.3.1. (Sezer ve ark., 2015) f_s, U üzerinde esnek küme olsun. f_s, U üzerinde S'nin EK-bi-idealidir $\Leftrightarrow$ $f_s \circ f_s \subseteq f_s$ ve $f_s \circ \mathbb{S} \circ f_s \subseteq f_s$ dir.

İspat: f_s, U üzerinde S'nin EK-bi-ideali olsun. f_s, U üzerinde EK-yarı grup olduğundan Teorem 3.1.1 ile $f_s \circ f_s \subseteq f_s$ dir. $s \in S$ olsun. Eğer $(f_s \circ \mathbb{S} \circ f_s)(s) = \emptyset$ ise $f_s \circ \mathbb{S} \circ f_s \subseteq f_s$ olduğu açıktır.

Diğer durumlarda, $x, y, p, q \in S$ olmak üzere $s = xy \ ve \ x = pq$ olsun. f_s, U üzerinde S'nin EK-bi-ideali olduğundan $f_s(s) = f_s(xy) = f_s((pq)y) \supseteq f_s(p) \cap f_s(y)$ ve

$$
\begin{aligned}
&(f_s \circ \mathbb{S} \circ f_s)(s) \\
&= [(f_s \circ \mathbb{S}) \circ f_s](s) \\
&= \bigcup_{s=xy} [(f_s \circ \mathbb{S})(x) \cap f_s(y)] \\
&= \bigcup_{s=xy} \left[\left(\bigcup_{x=pq} \big(f_s(p) \cap \mathbb{S}(q)\big) \cap f_s(y) \right) \right] \\
&= \bigcup_{s=xy} \left[\left(\bigcup_{x=pq} (f_s(p) \cup U) \cap f_s(y) \right) \right] \\
&= \bigcup_{s=pqy} \big(f_s(p) \cap f_s(y)\big) \\
&\subseteq \bigcup_{s=pqy} f_s(pqy) \\
&= f_s(xy)
\end{aligned}
$$

$= f_s(s)$ elde edilir.

Buradan $f_s \circ \mathbb{S} \circ f_s \subseteq f_s$ dir. Eğer x=pq şeklinde yazılamazsa $(f_s \circ \mathbb{S})(x) = \emptyset$ olur ve buradan $f_s \circ \mathbb{S} \circ f_s(s) = \emptyset \subseteq f_s(s)$ dir.

Tersine $f_s \circ f_s \subseteq f_s$ olsun. Teorem 3.1.1. ile f_s, S'nin EK-yarı grubudur. $x, y, z \in S$ olmak üzere $s = xyz$ olsun. $f_s \circ \mathbb{S} \circ f_s \subseteq f_s$ olduğundan,

$f_s(xyz)$

$= f_s(s)$

$\supseteq (f_s \circ \mathbb{S} \circ f_s)(s)$

$= [(f_s \circ \mathbb{S}) \circ f_s](s)$

$$= \bigcup_{s=mn} [(f_s \circ \mathbb{S})(m) \cap f_s(n)]$$

$\supseteq (f_s \circ \mathbb{S})(xy) \cap f_s(z)$

$$= \left[\bigcup_{xy=pq} (f_s(p) \cap \mathbb{S}(q)\right] \cap f_s(z)$$

$\supseteq ((f_s(x) \cap \mathbb{S}(y)) \cap f_s(z)$

$= ((f_s(x) \cap U) \cap f_s(z)$

$= f_s(x) \cap f_s(z)$ elde edilir.

Buradan f_s, U üzerinde S'nin EK-bi-idealidir.

Teorem 3.3.2. (Sezer ve ark., 2015) S yarı grup ve $\emptyset \neq X \subseteq S$ olsun. X, S'nin bi-idealidir $\Leftrightarrow$ S_X, U üzerinde S'nin EK-bi idealidir.

İspat: X, S nin bi-ideali olsun. Buradan $XX \subseteq X$ ve $XSX \subseteq X$ dir. Üstelik $S_X \circ S_X = S_{XX} \subseteq S_X$ dir. Böylece, S_X, U üzerinde EK-yarı gruptur. Ayrıca,

$S_X \circ \mathbb{S} \circ S_X = S_X \circ S_S \circ S_X = S_{XSX} \subseteq S_X$ elde edilir. Buradan S_X S'nin bi-idealidir.

Tersine S_X, U üzerinde S'nin EK-bi-ideali olsun. Açıkca S_X, U üzerinde EK-yarı gruptur. Şimdi $x \in XX$ olsun. Buradan $S_X(x) \supseteq (S_X \circ S_X)(x) = S_{XX}(x) = U$ ve $x \in X$ dir. Böylece $XX \subseteq X$ dir. Yani X, S'nin bir alt yarı grubudur.

Şimdi $y \in XSX$ olsun. Buradan, $S_X(y) \supseteq (S_X \circ \mathbb{S} \circ S_X)(y) = (S_X \circ S_S \circ S_X)(y) = S_{XSX}(y) = U$ yani $y \in X$ dir. Böylece $XSX \subseteq X$ elde edilir ve böylece X, S'nin bi-idealidir.

Teorem 3.3.3. (Sezer ve ark., 2015) S yarı grubunun U üzerindeki her EK-sol (sağ, iki yönlü) ideali S'nin U üzerinde EK-bi-idealidir.

İspat: f_s, S'nin U üzerinde EK-sol (sağ, iki yönlü) ideali ve $x, y, z \in S$ olsun. Teorem 3.2.6'dan f_s, EK-yarı gruptur. Üstelik $f_s(xyz) = f_s((xy)z) \supseteq f_s(z) \supseteq f_s(x) \cap f_s(z)$ dir. Böylelikle f_s, S'nin EK-bi-idealidir.

Teorem 3.3.4. (Sezer ve ark., 2015) f_s, S yarı gubunun esnek alt kümesi ve g_s de S'nin U üzerinde EK-bi-ideali olsun. Bu takdirde $f_s \circ g_s$ de S'nin U üzerinde EK-bi-idealidir.

İspat: $f_s \circ g_s$'nin U üzerinde EK-bi-ideal olduğunu göstermek için öncelikle $f_s \circ g_s$' nin U üzerinde EK-yarı grup olduğunu göstermeliyiz. Açıkça,

$$\begin{aligned}(f_s \circ g_s) \circ (f_s \circ g_s) &= f_s \circ (g_s \circ (f_s \circ g_s)) \\ &\subseteq f_s \circ (g_s \circ (\mathbb{S} \circ g_s)) \\ &= f_s \circ (g_s \circ \mathbb{S} \circ g_s) \subseteq f_s \circ g_s \text{ dir.}\end{aligned}$$

Böylece teorem 3.1.1 ile $f_s \circ g_s$ U üzerinde EK-yarı gruptur. Üstelik,

$$\begin{aligned}(f_s \circ g_s) \circ \mathbb{S} \circ (f_s \circ g_s) &= f_s \circ (g_s \circ (\mathbb{S} \circ f_s) \circ g_s) \\ &\subseteq f_s \circ (g_s \circ \mathbb{S} \circ g_s) \subseteq f_s \circ g_s \text{ dir.}\end{aligned}$$

Böylelikle $f_s \circ g_s$, U üzerinde S'nin EK-bi-idealidir.

Önerme 3.3.1. (Sezer ve ark., 2015) f_S ve f_T U üzerinde sırasıyla S ve T'nin EK-bi-idealleri ise $f_S \wedge f_T$ de U üzerinde $S \times T$'nin EK-bi-idealidir.

Önerme 3.3.2. (Sezer ve ark., 2015) f_S ve f_T U üzerinde sırasıyla S ve T'nin EK-bi-idealleri ise $f_S \times f_T$ de $U \times U$ üzerinde $S \times T$'nin EK-bi-idealidir.

Önerme 3.3.3. (Sezer ve ark., 2015) f_S ve h_s U üzerinde S'nin EK-bi-idealleri ise $f_s \cap h_s$ de U üzerinde S'nin EK-bi-idealidir.

Önerme 3.3.4. (Sezer ve ark., 2015) f_S ve f_T U üzerinde esnek kümeler ve φ S'den T'ye yarı grup izomorfizması olsun. Eğer, f_S U üzerinde S'nin EK-bi-ideali ise $\varphi(f_s)$ de U üzerinde T nin EK-bi-idealidir.

Önerme 3.3.5. (Sezer ve ark., 2015) f_S ve f_T U üzerinde esnek kümeler ve φ S'den T'ye yarı grup homomorfizması olsun. Eğer f_T, U üzerinde T nin EK-bi-ideali ise $\varphi^{-1}(f_T)$ de U üzerinde S'nin EK-bi-idealidir.

3.4. Esnek Kesişimsel İç İdealler

Tanım 3.4.1. (Sezer ve ark., 2014) f_s, U üzerinde bir EK-yarı grup olsun. Her $x, y, a \in S$ için $f_s(xay) \supseteq f_s(a)$ ise f_s'ye S'nin esnek kesişimsel iç ideali denir. Esnek kesişimsel iç idealler kısaca EK-iç ideal olarak yazılır.

Örnek 3.4.1. (Sezer ve ark., 2014) $S = \{a, b, c, d\}$ yarı grubu aşağıdaki tablodaki gibi verilsin.

.	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	b	b
d	a	a	b	b

$U = D_3 = \{< x, y >: x^3 = y^2 = e, xy = yx^2\} = \{e, x, x^2, y, xy, yx^2\}$ kümesi üzerinde f_s esnek kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$f_s(a) = \{e, x, y, yx\}$, $f_s(b) = \{e\}$, $f_s(c) = \{e, x\}$, $f_s(d) = \{e\}$

Açıkça f_s'nin U üzerinde EK-iç ideal olduğu gösterilebilir.

Şimdi $U = S_3$ simetrik grubunu ele alalım. U üzerinde bir g_s esnek kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$g_s(a) = \{(1), (123)\}$, $g_s(b) = \{(1), (2), (123)\}$

$g_s(c) = \{(1), (12), (123)\}$, $g_s(d) = \{(123)\}$

Açıkça $g_s(dcb) = g_s(a) \not\supseteq g_s(c)$ olduğundan g_s , U üzerinde EK-iç ideal değildir.

Eğer her x$\in S$ için $f_s(x) = U$ ise f_s U üzerinde EK-iç idealdir. Bu şekildeki bütün EK-iç idealler $\widetilde{\mathbb{S}}$ ile gösterilir. Açıkca $\widetilde{\mathbb{S}} = S_s$ dir. Yani her $x \epsilon S$ için $\mathbb{S}(x) = U$ dur.

Teorem 3.4.1. (Sezer ve ark., 2014) f_s, U üzerinde esnek küme olsun. f_s , U üzerinde EK-iç idealdir$\Leftrightarrow$ $\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}} \subseteq f_s$ dır.

İspat: f_s, U üzerinde EK-iç ideal olsun. $a \in S$ alalım.

Eğer $\left(\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}}\right)(a) = \emptyset$ ise $\left(\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}}\right)(a) \subseteq f_s(a)$ dır. Böylece $\left(\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}}\right) \subseteq f_s$ dir. Eğer $y, z, u, v \in S$ olmak üzere x=yz ve y=uv ise f_s, S'nin EK-iç-ideali olduğundan

$f_s(x) = f_s(yz) = f_s(uvz) \supseteq f_s(v)$ dir. Ayrıca,

$$\left(\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}}\right)(x) = \left(\left(\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s\right) \circ \widetilde{\mathbb{S}}\right)(x)$$

$$= \{\bigcup_{x=yx} \left(\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s\right)(y) \cap \widetilde{\mathbb{S}}(z)\}$$

$$= \bigcup_{x=yz} \{\left((\bigcup_{y=uv} (\widetilde{\mathbb{S}}(u) \cap f_s(v))) \cap \widetilde{\mathbb{S}}(z) \right)\}$$

$$= \bigcup_{x=yz} \{(\bigcup_{y=uv} \left(U \cap f_{s(v)})\right) \cap U)\}$$

$$\subseteq \bigcup_{x=yz} \{(\bigcup_{y=uv} (U \cap f_s(uvz))) \cap U\}$$

$= f_s(x)$ elde edilir.

Buradan $\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}} \subseteq f_s$ dır.

Eğer $y \neq uv \ ise \ \left(\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s\right) = \emptyset$ dur. Böylece $\left(\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}}\right) = \emptyset \subseteq f_s(x)$ dir. Buradan $\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}} \subseteq f_s$ dır.

Şimdi $\left(\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}}\right) \subseteq f_s(x)$ olsun. $x, a, y \in S$ alalım. Buradan,

$f_s(xay) \supseteq \left(\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}}\right)(xay)$

$$= \bigcup_{xay=pq} \{\left(\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s\right)(p) \cap \widetilde{\mathbb{S}}(q)\}$$

$\supseteq \left(\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s\right)(xa) \cap \widetilde{\mathbb{S}}(y)$

$= \left(\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s\right)(xa) \cap U$

$$= \bigcup_{xa=mn} (\widetilde{\mathbb{S}}(m) \cap f_s(n)\}$$

$\supseteq \widetilde{\mathbb{S}}(x) \cap f_s(a)$

$= f_s(a)$ elde edilir.

Buradan f_s, U üzerinde EK-iç idealdir.

Teorem 3.4.2. (Sezer ve ark., 2014) X, S yarı grubunun boştan farklı bir alt kümesi olsun. X, S'nin bir iç idealidir. $\Leftrightarrow$ S_X, S'nin bir EK-iç idealidir.

İspat: X, S'nin bir iç ideali olsun. Bu taktirde $SXS \subseteq X$ yazabiliriz. Buradan, $\widetilde{\mathbb{S}} \circ S_X \circ \widetilde{\mathbb{S}} = S_S \circ S_X \circ S_S = S_{SXS} \subseteq S_X$ dir. Böylece S_X, U üzerinde bir EK-iç idealdir.

Şimdi $x \in SXS$ ve S_X, S'nin bir EK- iç ideali olsun. Böylece Teorem 3.4.1 ile $S_X(x) \supseteq (\mathbb{S} \circ S_X \circ \mathbb{S})(x) = (S_S \circ S_X \circ S_S)(x) = S_{SXS}(x) = U$ dur. Böylece $x \in X$ dir. Buradan $SXS \subseteq X$ ve X, S'nin bir iç idealidir.

Önerme 3.4.1. (Sezer ve ark., 2014) f_s, U üzerinde esnek küme olsun. f_s, U üzerinde S'nin EK-ideali ise f_s, U üzerinde S'nin EK-iç idealidir.

İspat: f_s, U üzerinde S'nin EK-ideali ve $x, y \in S$ olsun. Buradan $f_s(xyz) = f_s((xy)z) \supseteq f_s(xy) \supseteq f_s(y)$ dir. Açıkça f_s , U üzerinde S'nin EK-iç idealidir.

Örnek 3.4.2. (Sezer ve ark., 2014) f_s EK iç ideali Örnek 3.4.1 deki gibi olsun. $f_s(dc) = f_s(b) \not\supseteq f_s(c)$ olduğundan f_s, S'nin EK-sol ideali değildir. Dolayısıyla, f_s, S'nin bir EK-ideali değildir.

Aşağıdaki teorem Önerme 3.4.1 in tersinin regüler bir yarı grup için geçerli olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.4.3. (Sezer ve ark., 2014) f_s , U üzerinde esnek küme ve S regüler yarı grup olsun. Bu taktirde;

i) f_s , U üzerinde S'nin EK-idealidir.

ii) f_s , U üzerinde S'nin EK-iç idealidir.

İspat: Önerme 3.4.1 ile i) ifadesinden ii) ifadesi elde edilir. Şimdi f_s, U üzerinde S'nin EK-iç ideali olsun. $a, b \in S$ alalım. S regüler yarı grup olduğundan $a = axa$ ve $b = byb$ olacak şekilde $x, y \in S$ mevcuttur. f_s, S'nin bir iç ideali olduğundan $f_s(ab) = f_s\ (axa)b) = f_s\ ((ax)a(b)) \supseteq f_s\ (a)$ ve
$f_s(ab) = f_s\big(a(byb)\big) = f_s((a)b(yb)) \supseteq f_s(b)$ elde edilir. Buradan f_s'nin S üzerinde EK-ideal olduğu görülür. Yani ii) ifadesinden i) ifadesi elde edilir.

Önerme 3.4.2. (Sezer ve ark., 2014) S bir monoid ve f_s, U üzerinde esnek küme olsun. f_s, S'nin EK-idealidir $\Leftrightarrow$ f_s, S'nin EK-iç idealidir.

İspat: f_s, S'nin EK-ideali olsun. Teorem 3.4.3 ile f_s, S'nin EK-iç idealidir. Şimdi f_s, S'nin EK-iç ideali olsun. $x, y \in S$ için $f_s(xy) = f_s(xye) \supseteq f_s(y)$ ve $f_s(xy) = f_s(exy) \supseteq f_s(x)$ dir. Buradan, f_s S'nin EK-idealidir.

Önerme 3.4.3. (Sezer ve ark., 2014) f_s ve f_T sırasıyla S ve T'nin U üzerinde EK-iç idealleri olsun. Bu takdirde $f_s \wedge f_T$ de U üzerinde $S \times T$'nin EK-iç idealidir

İspat: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in S \times T$ alalım. Buradan,

$$
\begin{aligned}
f_{S \wedge T}\big((x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3)\big) &= f_{S \wedge T}(x_1 x_2 x_3, y_1 y_2 y_3) \\
&= f_S(x_1 x_2 x_3) \cap f_T(y_1 y_2 y_3) \\
&\supseteq f_S(x_2) \cap f_T(y_2) \\
&= f_{S \wedge T}(x_2, y_2) \text{ elde edilir.}
\end{aligned}
$$

$f_S \wedge f_T$, U üzerinde $S \times T$'nin EK-iç idealidir.

Önerme 3.4.4. (Sezer ve ark., 2014) Eğer f_S ve f_T sırasıyla S ve T'nin EK-iç idelleri ise $f_S \times f_T$ de UxU üzerinde $S \times T$'nin EK-iç idealidir.

İspat: f_S ve f_T sırasıyla S ve T'nin EK-iç idelleri olsun.

Her $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in S \times T$ için

$$
\begin{aligned}
f_{S \times T}\big((x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3)\big) &= f_{S \times T}(x_1 x_2 x_3, y_1 y_2 y_3) \\
&= f_S(x_1 x_2 x_3) \times f_T(y_1 y_2 y_3) \\
&\supseteq f_S(x_2) \times f_T(y_2) \\
&= f_{SxT}(x_2, y_2) \text{ elde edilir.}
\end{aligned}
$$

Buradan, $f_S \times f_T = f_{S \times T}$ $U \times U$ üzerinde $S \times T$'nin EK-iç idealidir.

Önerme 3.4.5. (Sezer ve ark., 2014) f_S ve h_S, U üzerinde S'nin EK-iç ideali ise $f_S \cap h_S$ de U üzerinde S'nin EK-iç idealidir.

İspat: $x, y, z \in S$ alalım.

$(f_S \cap h_S)(x, y, z) = f_S(xyz) \cap h_S(xyz) \supseteq f_S(y) \cap h_S(y) = (f_S \cap h_S)(y)$ elde edilir.

Buradan $f_S \cap h_S$ U üzerinde S'nin EK-iç idealidir.

Önerme 3.4.6. (Sezer ve ark., 2014) f_S ve f_T U üzerinde esnek kümeler, ψ, S'den T'ye yarı grup izomorfizması olsun. Eğer f_S, U üzerinde S'nin EK-iç ideali ise $\psi(f_S)$ de U üzerinde T'nin EK-iç idealidir.

İspat: $t_1, t_2, t_3 \in T$ olsun. ψ örten olduğundan $\psi(s_1) = t_1$, $\psi(s_2) = t_2$, $\psi(s_3) = t_3$ olacak şekilde $s_1, s_2, s_3 \in S$ mevcuttur. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
&(\psi(f_S))(t_1 t_2 t_3) \\
&= \bigcup \{f_S(s) : s \in S, \quad \psi(s) = t_1 t_2 t_3\} \\
&= \bigcup \{f_S(s) : s \in S, \quad s = \psi^{-1}(t_1 t_2 t_3)\}
\end{aligned}
$$

$= \bigcup\{f_s(s): s \in S, \quad s = \psi^{-1}\big(\psi(s_1 s_2 s_3)\big) = s_1 s_2 s_3\}$

$= \bigcup\{f_s(s_1 s_2 s_3): s_i \in S, \psi(s_i) = t_i, i = 1,2,3\}$

$\supseteq (\cup\{f_s(s_2): s_2 \in S, \psi(s_2) = t_2\}) = \big(\psi(f_s)\big)(t_2)$ dir.

Buradan $\psi(f_s), U$ üzerinde S'nin EK-iç idealidir.

Önerme 3.4.7. (Sezer ve ark., 2014) f_s ve f_T U üzerinde esnek kümeler ψ, S'den T'ye bir yarı grup homomorfizması olsun. Eğer f_T, U üzerinde T'nin EK-iç ideali ise $\psi^{-1}(f_T)$ de U üzerinde S'nin EK-iç idealidir.

İspat: $s_1, s_2, s_3 \in S$ alalım. Açıkça,

$$
\begin{aligned}
(\psi^{-1}(f_T))(s_1 s_2 s_3) &= f_T(\psi(s_1 s_2 s_3)) \\
&= f_T(\psi(s_1)\psi(s_2)\psi(s_3)) \\
&\supseteq f_T(\psi(s_2)) \\
&= \big(\psi^{-1}(f_T)\big)(s_2) \text{ dir.}
\end{aligned}
$$

Buradan $\psi^{-1}(f_T)$ U üzerinde S'nin EK-iç idealidir.

3.5. Esnek Kesişimsel Yarı İdealler

Tanım 3.5.1. (Sezer ve ark., 2014) f_S U üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer $(f_S \circ \widetilde{\mathbb{S}}) \cap (\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_S) \subseteq f_s$ oluyorsa f_s'ye U üzerinde S'nin esnek kesişimsel yarı ideali denir. Esnek kesişimsel yarı idealler kısaca EK-yarı ideal olarak yazılır.

Önerme 3.5.1. (Sezer ve ark., 2014) S'nin her EK-yarı ideali S'nin EK-yarı grubudur.

İspat: f_s, S'nin EK-yarı ideali olsun. $f_s \subseteq \widetilde{\mathbb{S}}$ olduğundan $f_S \circ f_S \subseteq \widetilde{\mathbb{S}} \circ f_S$ ve $f_S \circ f_S \subseteq f_S \circ \widetilde{\mathbb{S}}$ dir. Buradan f_s, S'nin EK-yarı ideali olduğu için $f_S \circ f_S \subseteq (\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_S) \cap (f_S \circ \widetilde{\mathbb{S}}) \subseteq f_S$ dir. Açıkça f_S, U üzerinde EK-yarı gruptur.

Önerme 3.5.2. (Sezer ve ark., 2014) S'nin her tek yönlü EK-idealleri S'nin EK-yarı idealleridir.

İspat: f_S, S'nin EK-sol ideali olsun. $(\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_S) \subseteq f_s$ olduğundan $(\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_S) \cap (f_S \circ \widetilde{\mathbb{S}}) \subseteq (\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_S) \subseteq f_s$ dir. Buradan f_s, S'nin EK-yarı idealidir.

Önerme 3.5.2'nin tersinin her zaman sağlamadığını aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek 3.5.1. (Sezer ve ark., 2014) S={$0, a, b, c$} yarı grubu aşağıdaki tablodaki işlem ile verilsin.

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	b	0
b	0	0	0	0
c	0	c	0	0

U=D_3=$\{< x, y >: x^3 = y^2 = e, xy = yx^2\} = \{e, x, x^2, y, yx, yx^2\}$ kümesi üzerinde f_S esnek kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$f_S(0)$={e,x,y,yx} $f_S(a)$={e,x,y,yx} $f_S(b)$={yx} $f_S(c)$={yx}

Açıkça buradan f_S, S'nin EK-yarı idealidir. Fakat, $f_S(ca)$= $f_S(c) \not\supseteq f_S(a)$ olduğundan f_S, S'nin EK-sol ideal değildir. Böylece, f_S S'nin EK ideali değildir.

Önerme 3.5.3. (Sezer ve ark., 2014) S'nin her EK-yarı ideali S'nin EK-bi-idealidir.

İspat: f_S, S'nin EK-yarı ideali olsun. Buradan,

$f_S \circ \widetilde{\mathbb{S}} \circ f_S \subseteq \widetilde{\mathbb{S}} \circ \widetilde{\mathbb{S}} \circ f_S \subseteq \widetilde{\mathbb{S}} \circ f_S$ ve $f_S \circ \widetilde{\mathbb{S}} \circ f_S \subseteq f_S \circ \widetilde{\mathbb{S}} \circ \widetilde{\mathbb{S}} \subseteq f_S \circ \widetilde{\mathbb{S}}$ dir. Böylece $f_S \circ \widetilde{\mathbb{S}} \circ f_S \subseteq \left(\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_S\right) \cap (f_S \circ \widetilde{\mathbb{S}}) \subseteq f_S$ elde edilir.

Açıkça f_S, S'nin EK-yarı ideali olduğundan $f_S \circ \widetilde{\mathbb{S}} \circ f_S \subseteq f_S$ dir. Buradan f_S, S'nin EK-bi-idealidir.

Önerme 3.5.3'ün tersi genellikle sağlanmaz. Bunu aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek 3.5.2. (Sezer ve ark., 2014) S={0,1,2,3} yarı grubu aşağıda tablodaki işlem ile verilsin.

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	0	0	1
3	0	0	1	2

$U = S_3$ evrensel kümesi üzerinde f_S esnek kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$f_S(0)$={(1), (12), (123), (132)}

$f_s(1)$={(1), (132)}
$f_s(2)$={(1), (123), (132)}
$f_s(3)$={(1)}
f_s, S'nin EK-bi-idealidir. Açıkça,

$(f_s \circ f_s)(0)$ = {(1), (12), (123), (132)}
$(f_s \circ f_s)(1)$ ={(1)}
$(f_s \circ f_s)(2)$ ={(1)}
$(f_s \circ f_s)(3)$ =∅ böylece, $f_s \circ f_s \subseteq f_s$ dir.
Üstelik,

$(f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s)(0)$={(1),(12),(123),(132)}
$(f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s)(1)=\emptyset$
$(f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s)(2)=\emptyset$
$(f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s)(3)=\emptyset$ ve böylece $f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s \subseteq f_s$ dir.
Fakat f_s, S'nin EK-yarı ideali değildir. Açıkca,
$(f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}})(1)$={ (1), (123), (132)} ve $(\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s)(1)$={ (1), (123), (132)} dir. Buradan, $(f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}}) \cap (\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s)(1)$={ (1), (123), (132)} $\nsubseteq$ $(f_s)(1)$={(1),(132)} dir. Böylece f_s, S'nin EK-yarı ideali değildir.

Teorem 3.5.1. (Sezer ve ark., 2014) S bir regüler yarı grup olmak üzere f_s, U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir.
i) f_s, U üzerinde S'nin EK-yarı idealidir.
ii) f_s, U üzerinde S'nin EK-bi-idealidir.

Teorem 3.5.2. (Sezer ve ark., 2014) S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq X \subseteq S$ olsun. X, S'nin yarı idealidir ⇔ S_X, S'nin EK-yarı idealidir.

İspat: X, S nin yarı ideali yani $XS \cap SX \subseteq X$ olsun. Buradan, $(S_X \circ \widetilde{\mathbb{S}}) \cap (\widetilde{\mathbb{S}} \circ S_X)= (S_X \circ S_S) \cap (S_S \circ S_X)= S_{XS} \cap S_{XS} = S_{XS \cap XS} \subseteq S_X$ dir. Yani S_X, S'nin yarı grubudur.

Şimdi S_X, S'nin EK-yarı ideali olsun. $x \in XS \cap XS$ alalım. Buradan,
$S_X(x) \supseteq ((S_X \circ \widetilde{\mathbb{S}}) \cap (\widetilde{\mathbb{S}} \circ S_X))(x)$
$=((S_X \circ S_S) \cap (S_S \circ S_X))(x)$
$=(S_{XS} \cap S_{SX})(x)$

$= S_{XS\cap XS}=U$ dur.

Böylece $x\epsilon X$ dir. Buradan $XS \cap XS \subseteq X$ dir ve X, S'nin yarı idealidir.

Teorem 3.5.3. (Sezer ve ark., 2014) S bir regüler yarı grup, f_s ve g_s S'nin U üzerindeki EK-yarı idealleri olsun. Bu durumda $f_s \circ g_s$, S'nin U üzerinde bir EK-yarı idealidir.

İspat: f_s, S'nin EK-yarı ideali olsun. Buradan $f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s \subseteq \widetilde{\mathbb{S}} \circ \widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s \subseteq \widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s$ ve $f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s \subseteq f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}} \circ \widetilde{\mathbb{S}} \subseteq f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}}$ dir. Üstelik $f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s \subseteq \left(\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s\right) \cap (f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}}) \subseteq f_s$ dir. f_s S'nin EK-yarı ideali olduğu için $f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s \subseteq f_s$ dir. Ayrıca,

$(f_s \circ g_s) \circ (f_s \circ g_s)= (f_s \circ g_s \circ f_s) \circ g_s \subseteq (f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s) \circ g_s \subseteq f_s \circ g_s$ ve

$(f_s \circ g_s) \circ \widetilde{\mathbb{S}} \circ (f_s \circ g_s)= (f_s \circ (g_s \circ \widetilde{\mathbb{S}}) \circ f_s) \circ g_s \subseteq (f_s \circ (\widetilde{\mathbb{S}} \circ \widetilde{\mathbb{S}}) \circ f_s) \circ g_s \subseteq (f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s) \circ g_s \subseteq f_s \circ g_s$ dir.

Böylece $f_s \circ g_s$ U üzerinde S'nin EK-bi-idealidir. Teorem 3.5.1 ile $f_s \circ g_s$ U üzerinde S'nin EK-yarı idealisir.

Önerme 3.5.4. (Sezer ve ark., 2014) f_s ve g_s S'nin EK-yarı idealleri ise $f_s \cap g_s$ de S'nin EK-yarı idealidir.

İspat: f_s ve g_s S'nin EK-yarı idealleri olsun. Buradan,

$((f_s \cap g_s) \circ \widetilde{\mathbb{S}}) \cap (\widetilde{\mathbb{S}} \circ (f_s \cap g_s)) \subseteq (f_s \circ \widetilde{\mathbb{S}}) \cap (\widetilde{\mathbb{S}} \circ f_s) \subseteq f_s$ ve

$((f_s \cap g_s) \circ \widetilde{\mathbb{S}}) \cap (\widetilde{\mathbb{S}} \circ (f_s \cap g_s)) \subseteq (g_s \circ \widetilde{\mathbb{S}}) \cap (\widetilde{\mathbb{S}} \circ g_s) \subseteq g_s$ dir.

Böylece, $(f_s \cap g_s) \circ \widetilde{\mathbb{S}}) \cap (\widetilde{\mathbb{S}} \circ (f_s \cap g_s) \subseteq f_s \cap g_s$ elde edilir. Yani $f_s \cap g_s$ S'nin EK-yarı idealidir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yarı gruplar matematiğin birçok alanında önemli bir yere sahiptir. Uygulamalı matematikte, yarı gruplar zamanla değişmeyen doğrusal sistemler için temel modellerdir. Kısmi diferansiyel denklemlerde, bir yarı grup zamandan bağımsız herhangi bir denklemle ilişkilidir. Sonlu yarı gruplar arasındaki doğal bağlantı nedeniyle 1950'lerden beri sonlu yarı gruplar teorisi teorik bilgisayar bilimlerinde özel bir öneme sahip olmuştur. Olasılık teorisinde, yarı gruplar Markov süreçleri ile ilişkilidir.

Bu tez çalışmasında, Sezer ve ark. (2014, 2015) tarafından incelenmiş olan esnek kesişimsel yarı grup, esnek kesişimsel ideal, esnek kesişimsel bi-ideal, esnek kesişimsel iç ideal ve esnek kesişimsel yarı ideal kavramlarını, bu kavramlara ait temel özellikleri ve elde edilen sonuçları derledik.

Bu sonuçlara dayanarak, matematikte geniş bir uygulama alanına sahip olan yarı grupların karakterize edilmesinde de faydalı olabilecek diğer esnek kesişimsel ideal yapılarının özellikleri üzerine de bazı çalışmalar yapılabilir.

5. KAYNAKLAR

Acar, U., Koyuncu, F., Tanay, B. 2010. Soft sets and soft rings. Computers and Mathematics with Applications, 59(11): 3458-3463.

Aktaş, H., Çağman, N. 2007. Soft sets and soft groups. Information sciences, 177(2007): 2726-2735.

Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., Shabir, M. 2009. On some new operations in soft set theory. Computers and Mathematics with Applications, 57(9): 1547-1553.

Ali, M. I., Shabir, M., Naz, M. 2011. Algebraic structures of soft sets associated with new operations. Computers and Mathematics with Applications, 61(9): 2647-2654.

Ali, M. I. 2011. A note on soft sets, rough soft sets and fuzzy soft sets. Applied Soft Computing, 11(4): 3329-3332.

Ali, M. I., Shabir, M., Shum, K. P. 2010. On soft ideals over semigroups. South east Asian Bulletin of Mathematics, 34(2010): 595-610.

Atagün, A. O., Sezgin, A. 2011. Soft substructures of rings, fields and modules. Computers and Mathematics with Applications, 61(3): 592-601.

Babitha, K. V., Sunil, J. J. 2009. Soft set relations and functions, Computers and Mathematics with Applications, 60: 1840-1849.

Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S. 2003. Some notes on the parameterization reduction of soft sets, International Conference on Machine Learning and Cybernetics 3, China, 1442-1445.

Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S., Wang, X.,2005. The parameterization reduction of soft sets and its applications, Computers and Mathematics with Applications, 49(1): 757-763.

Clifford, A. H., Preston, G. B. 1961. The algebraic theory of semigroups. American Mathematical Society.

Çağman, N., Enginoğlu, S. 2010. Soft matrix theory and its decision making. Computers and Mathematics with Applications, 59(10): 3308-3314.

Çağman, N., Enginoğlu, S. 2010. Soft set theory and uni–int decision making. European Journal of Operational Research, 207: 848-855.

Çelik, Y., Ekiz, C., Yamak, S. 2011. A new view on soft rings. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 40(2): 273-286.

Feng, F., Jun, Y. B., Zhao, X. 2008. Soft semirings. Computers and Mathematics with Applications, 56(10): 2621-2628.

Feng, F., Jun, Y. B., Liu, X., Li, L. 2010. An adjustable approach to fuzzy soft set based decision making. Journal of Computational and Applied Mathematics, 234: 10-20.

Feng, F., Li, C., Davvaz, B., Ali, M. I. 2010. Soft sets combined with fuzzy set sandrough sets: a tentative approach. Soft Computing, 14(6): 899-911.

Feng, F., Liu, X., Leoreanu-Fotea, V., Jun, Y. B. 2011. Soft sets and soft rough sets. Information Sciences, 181(6): 1125-1137.

Feng, F., Ali, M. I., Shabir, M. 2013. Soft relations applied to semigroups. Filomat, 27(7): 1183-1196.

Howie, J. M. 1995. Fundamentals of semigroup theory, Oxford University Press.

Jun, Y. B. 2008. Softbck/bci-algebras. Computers and Mathematics with Applications, 56(5): 1408-1413.

Jun, Y. B., Park, C. H. 2008. Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras. Information Sciences, 178(11): 2466-2475.

Jun, Y. B., Lee, K. J., Zhan, J. 2009. Soft p-ideals of soft BCI-algebras. Computers and Mathematics with Applications, 58(10): 2060-2068.

Kong, Z., Gao, L., Wang, L. 2009. Comment on "A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems", Journal of Computational and Applied Mathematics, 223: 540-542

Liu, X., Xiang, D., Zhan, J. 2012. Fuzzy isomorphism theorems of soft rings, Neural Computing and Applications, 21: 391-397.

Maji, P. K., Roy, A. R., Biswas, R. 2002. An application of softsets in a decision making problem. Computers and Mathematics with Applications, 44(8-9): 1077-1083.

Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. 2003. Soft set theory. Computers and Mathematics with Applications, 45(4-5): 555-562.

Majumdar, P., Samanta ,S. K. 2010. On soft mappings, Computers and Mathematics with Applications, 60: 2666-2672

Molodtsov, D. 1999. Soft set theory-first results. Computers and Mathematic swith Applications, 37(4-5): 19-31.

Molodtsov, D. 2004. The Theory of Soft Sets, URSS Publishers, Moscow.

Pawlak, Z. 1982. Rough sets, International Journal of Information and Computer Sciences, 11(1): 341-356.

Pei, D., Miao, D. 2005. From Soft Sets to Information Systems, International Conference on Granular Computing, China, 617-621.

Petrich, M. 1973. Introduction to semigroups. Merrill Research and Lecture Series, Columbus, Ohio.

Qin, K., Hong, Z. 2010. On soft equality, Journal of Computational and Applied Mathematics, 234: 1347-1355.

Sezer, A. S. 2012. A new view to ring theory via soft union rings, ideals and bi-ideals. Knowledge-Based Systems, 36: 300-314.

Sezer, A. S., Çağman, N., Atagün A. O. 2014. Soft Intersection Interior Ideals, Quasi-ideals and Generalized Bi-ideals; A New Approach to Semigroup Theory II. Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing, 23(1-2): 161-207.

Sezer, A. S., Çağman, N., Atagün, A. O., Ali, M. I., Türkmen, E. 2015. Soft Intersection Semigroups, Ideals and Bi-ideals; a New Application on Semigroup Theory I. Filomat, 29(5): 917-946.

Sezgin, A., Atagün, A. O. 2011. On operations of soft sets. Computers and Mathematics with Applications, 61(5): 1457-1467.

Sun, Q-M., Zhang, Z-L., Liu J. 2008. Soft Sets and Soft Modules, Rough Sets and Knowledge Technology, Springer, China, 403-409.

Türkmen, E., Pancar, A. 2012. Some New Operations in Soft Module Theory, Neural Computing and Applications. doi: 10.1007/s00521-012-0893-6.

Yamak, S., Kazancı, O., Davvaz, B. 2011. Soft hyperstructure. Computers and Mathematics with Applications, 62: 797–803.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Zarife Zühal AYDOĞAN

Doğum Yeri : İzmir

Doğum Tarihi : 23/07/1992

Yabancı Dili : İngilizce

E-mail : zuzu_295@hotmail.com

İletişim Bilgileri : Ordu Üniv. Fen Edebiyat Fak. Matematik Böl. ORDU

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/ Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik Öğretmenliği	Ondokuz Mayıs Üniversitesi	2015