T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YENİ TİP İNTEGRAL ORTALAMALARI İÇİN BAZI EŞİTSİZLİKLER

Huriye KADAKAL

DOKTORA TEZİ

ORDU 2018

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Huriye KADAKAL tarafından hazırlanan ve Prof. Dr. Selahattin MADEN danışmanlığında yürütülen "Yeni Tip İntegral Ortalamaları İçin Bazı Eşitsizlikler" adlı bu tez jürimiz tarafından 03/10/2018 tarihinde oy birliği/ ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman :Prof. Dr. Selahattin MADEN
II. Danışman :Prof. Dr. Vedat Suat ERTÜRK, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Başkan	: Prof. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza:
Üye	: Doç. Dr. İmdat İŞCAN Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza:
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet KORKMAZ Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza:
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza:
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Sercan TURHAN Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza:

ONAY:

03/ 10/ 2018 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 11 / 10 / 2018 tarih ve 2018 / 483 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza

Huriye KADAKAL

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

YENİ TİP İNTEGRAL ORTALAMALARI İÇİN BAZI EŞİTSİZLİKLER

Huriye KADAKAL

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2018
Doktora Tezi, 95 s.

Danışman: Prof. Dr. Selahattin MADEN
II. Danışman: Prof. Dr. Vedat Suat ERTÜRK

Bu tezde, geometrik-aritmetik konveks fonksiyonlar ve n-kere diferansiyellenebilir konveks(dışbükey) ve konkav(içbükey) fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri verildi. Çalışmanın ilk bölümünde, konveks fonksiyonların tarihi gelişimi ve literatür taraması verildi. İkinci bölümde, literatürdeki konveks fonksiyon çeşitleri tanımlanarak, konveks fonksiyon sınıfları arasındaki hiyerarşi ve literatürde bulunan farklı ortalamalar verildi. Üçüncü bölümde, bu tezde kullanılan klasik eşitsizlikler ve daha sonrada tezin bulgular kısmında kullanılacak olan lemmalar ve teoremler verildi. Dördüncü bölümde ise geometrik- aritmetik(GA) konveks fonksiyonlar ile n-kere diferansiyellenebilir konveks ve konkav fonksiyonlarla ilgili yeni lemmalar, teoremler, önermeler ve sonuçlar verildi. Elde edilen bu yeni sonuçlar için çeşitli ortalamalar ve n-kere diferensiyellenebilen konveks ve konkav fonksiyonlar kullanılarak farklı uygulamalar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği, Geometrik-Aritmetik Konveks Fonksiyonlar, Hölder İntegral Eşitsizliği, Power-Mean İntegral Eşitsizliği.

ABSTRACT

SOME INEQUALITIES FOR NEW TYPE INTEGRAL MEANS

Huriye KADAKAL

University of Ordu
Institute of Science
Department of Mathematics, 2018
PhD. Thesis, 95 p.

Supervisor: Professor Selahattin MADEN
II. Supervisor: Professor Vedat Suat ERTÜRK

In this thesis, new type integral inequalities for geometrically-arithmetically convex functions and n-time differentiable convex and concave functions are stated. In the first part, the historical developments of the convex functions and the literature review have been clarified. In the second part, classes of convex functions in literature, the hierarchy of convex function classes, and different averages in the literature have been explained. In the third part, the classical inequalities used in this thesis and then the lemmas and theorems to be used in the findings of the thesis are given. In the fourth part, new identities, lemmas, theorems, propositions and results about geometrically arithmetically convex functions and n-times differentiable convex and concave functions have been presented. For these new results obtained, different applications are provided by using different means and n-time differentiable convex and concave functions.

Key Words: Hermite-Hadamard Integral Inequality, Geometrically Arithmetically Convex Functions, Hölder Integral Inequality, Power-Mean Integral Inequality.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan başta çok değerli Doktora Danışmanım Sayın Prof. Dr. Selahattin MADEN olmak üzere engin bilgisinden yararlandığım Giresun Üniversitesi Matematik Bölüm Başkanı Sayın Doç. Dr. İmdat İŞCAN'a en samimi duygularımla teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen ve her zaman yakın ilgilerini gördüğüm Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü çalışanları ile Giresun Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü çalışanlarına teşekkürü bir borç bilirim.

Öğrenim hayatım boyunca, benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen ve bugünlere gelmemde çok büyük emekleri olan anne-babama, eşime ve çocuklarım Oğuzhan Emre ve Gülsüm Rengin'e teşekkürlerimi sunuyorum.

Ayrıca Ordu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğüne B-1804 numarası ile doktora tez proje desteği verdiğinden dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET……………………………………………………………………..……………...I

ABSTRACT……………………………………..…………………………..…..……...II

TEŞEKKÜR…………………………………………………..……………..…….......III

İÇİNDEKİLER……………………………………………….…......………………..IV

ŞEKİLLER LİSTESİ……………………………….……………………….…….…..V

SİMGELER ve KISALTMALAR…………………………………………..…….VI

1. GİRİŞ……………………………………………….……...………..…………….1

2. TEMEL KAVRAMLAR………………………………….………..…………..10

2.1. Ön Bilgiler…………………………………………………….……...….….....10

2.2. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler………………..……..….12

2.3. Literatür Taraması……………………………………………………...…...….16

3. MATERYAL ve YÖNTEM………………………………….……………..............22

3.1. GA-Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler……………..…..….22

3.2. Bazı Eşitsizlikler……………………………………………………….........26

3.3. Türevinin Mutlak Değeri Konveks Olan Mutlak Sürekli Fonksiyonlar İçin İki İntegral Ortalamanın Karşılaştırılması……………….………..................29

4. BULGULAR…………………………………….…….………...…..…35

4.1. $|f'|$ Fonksiyonunun Geometrik Aritmetik-Konveks Olması Durumu………………35

4.2. $|f'|^q$ Fonksiyonunun Geometrik Aritmetik-Konveks Olması Durumu…………..…49

4.3. Özel Ortalamalara Uygulamalar…………………………..…….………......…65

4.4. n-Kere Diferensiyellenebilen Konveks ve Konkav Fonksiyonlar İçin Bazı Yeni Eşitsizlikler…………………………..………..………..….......69

5. TARTIŞMA ve SONUÇ……………………………............….….........78

6. KAYNAKLAR…………………………………………………...…..……..79

ÖZGEÇMİŞ………………………………………………………………….……...83

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil No **Sayfa**

Şekil 1.1. $y = f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ eğrisinin konveks ve konkav olduğu aralıklar……………….……..2

Şekil 1.2. $y = f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ eğrisine ait grafik…………………………………………………....2

Şekil 1.3. Konkav çokgenler …………………………………………………………….………3

Şekil 1.4. Konveks çokgenler………………………………..…………………………......3

Şekil 1.5. Güzel Sanatlarda çalışılmış konkav ve konveks cisim örnekleri………………..…....4

Şekil 1.6. Konveks Durasyon-Vade Fonksiyonu……………………………………….……..5

Şekil 1.7. Konveksite Tipleri…………………………………………………………..……..…5

Şekil 1.8. Konveks ve konkav lens………………………………………………….…..……..6

Şekil 1.9. Tümsek(konveks) ayna ve çukur(konkav) ayna…………………………...………..6

Şekil 1.10. İnsan yüzleri………………………………………………………….….………..7

Şekil 2.1. Bir aralıktaki konveks fonksiyon ($f(x) = |x|$) ……………………….……..….…..13

Şekil 2.2. Konveks fonksiyonun geometrik yorumu ….……………..………………......…..14

Şekil 2.3. Konkav fonksiyonun geometrik yorumu…………………..……………….…..…14

SİMGELER ve KISALTMALAR

$\sum$	: Toplam sembolü
$\emptyset$	: Boş küme
!	: Faktöriyel
$\forall$	: Her
$\lvert\cdot\rvert$	: Mutlak değer
$\lVert\cdot\rVert$	: Norm
lim	: Limit
inf	: İnfimum
sup	: Supremum
$ess\ sup$	: Esaslı supremum
(a,b)	: a ve b nin açık aralığı
$[a,b]$	: a ve b nin kapalı aralığı
I	: $\mathbb{R}$'de herhangi bir aralık
I°	: I'nın içi
A°	: A kümesinin içi
∞	: Sonsuz
$\lVert\cdot\rVert_{\infty}$	: Esaslı supremum
$h.h.y$	: Hemen hemen her yerde
$Ç_{x,y}$	: x ve y değişkenlerine bağlı çekirdek fonksiyonu
f'	: f fonksiyonun birinci mertebeden türevi
f''	: f fonksiyonun ikinci mertebeden türevi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{+}$	: $(0,\infty)$ aralığı
$\mathbb{R}_0^{+}$	: $[0,\infty)$ aralığı
$\mathbb{R}^{n}$	: n-boyutlu Öklidyen (Euclidean) uzay
$L[a,b]$	: $[a,b]$ Aralığında integrallenebilir fonksiyonlar kümesi
L_p	: p-logaritmik ortalama
$\lVert\cdot\rVert_p$	: L_p uzayı üzerindeki norm

1. GİRİŞ

Günümüzde matematiğe ait tanım veya kavramların birçoğu matematik dışında diğer bilim dallarında da sıklıkla kullanılmaktadır. Bunlardan birkaçına örnek verecek olursak; fizikçiler türev kavramından yararlanarak hız ve ivmeyi bulabilmektedirler, hız ivmenin zamana göre integrali olduğundan integralden yararlanarak hızı bulabilmektedirler, Diferansiyel denklemler sayesinde ısı iletim problemlerini çözebilmektedirler. Benzer örnekler mühendislikte ve diğer başka bilim alanlarında da karşımıza sıklıkla çıkmaktadır.

Matematiksel bir tanım olan konveksliğin günümüzde oldukça yaygın kullanıldığı alanlar vardır. Ne anlama geldiğini bilsin veya bilmesin, nasıl bir şekil veya cisim olduğunu görsün veya görmesin, insanlar hayatları boyunca konveks ve konkav şekillerle veya cisimlerle her zaman karşılaşmışlardır ve bunları yaşamları boyunca ister günlük işlerinde ister teknolojide, sanayide ister sanatta, tıpta, müzikte, fizikte, optimizasyonda, matematiksel programlamada, denge problemlerinde, mühendislikte isterse de diğer bilimsel alanlarda mutlaka kullanmışlardır. Yani konvekslik bir şekilde hayatımızda yer almıştır ve almaya da devam edecektir.

Kısaca hatırlatmak gerekirse, içerdiği herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası üzerinde bulunan tüm noktaları da içeren kümeler konveks kümelerdir. Bu kısa hatırlatmayı yaptıktan sonra devam etmek daha yararlı olacaktır.

Eğitim öğretim hayatımıza baktığımız zaman konveks, konkav tanımı ve örnekleri ile ilk olarak lise yıllarımızda ve üniversitede okuduğumuz yıllarda Genel Matematik ya da Analiz derslerinde karşılaştığımızı göreceğiz. Bunu biraz daha açıklamak için o yıllarda türev konusunu öğrendikten sonra grafik çiziminin nasıl yapıldığını tekrar hatırlayalım:

Verilen bir fonksiyonun grafiğini çizebilmek için aşağıdaki temel adımlar uygulanır. Şunu belirtelim ki burada bahsedilen adımlar, her türlü fonksiyonun grafiğini el yordamıyla çizmek için genel şartları içerir. Ancak fonksiyonların grafiklerini çizmek için çeşitli bilgisayar programları ve matematik yazılımları da kullanılabilir.

i. Fonksiyonun tanım kümesi bulunur. Bulunan tanım kümesi fonksiyonun grafiği çizilirken dikkate alınır.

ii. Fonksiyon periyodik bir fonksiyon ise periyodu bulunur.

iii. Varsa yatay, düşey, eğik ve eğri asimptotları bulunur.

iv. Eksenleri kestiği noktalar bulunur.

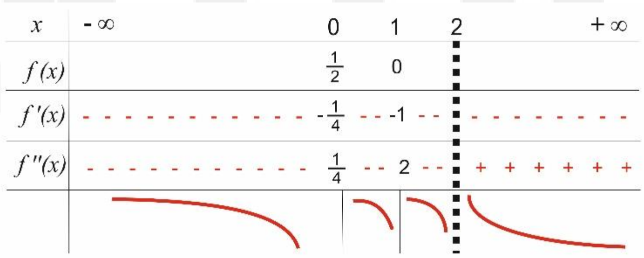
v. Fonksiyonun birinci türevi alınır. Ekstremum noktaları bulunur. Maksimum ve minimum olduğu yerler ile artan ve azalan olduğu aralıklar belirlenir.

vi. Fonksiyonun ikinci türevi alınarak büküm(dönüm) noktası varsa bulunur.

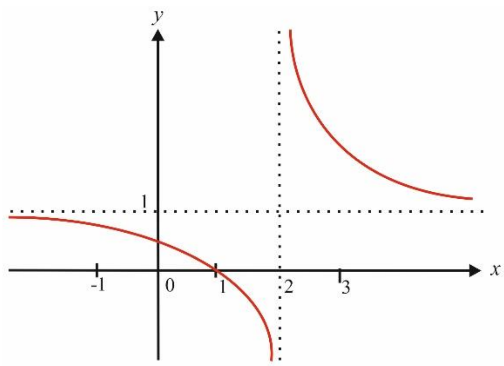
vii. Fonksiyonun birinci ve ikinci türevine göre işaret tablosu yapılarak grafiğin artan azalan olduğu aralıklar ile konveks ve konkav aralıkları bulunur.

viii. Bütün bu veriler ışığında fonksiyonun grafiği çizilir.

Örneğin eski bilgilerimizi hatırlayarak $y = f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ fonksiyonuna ait ikinci türevin köklerini gösteren aşağıdaki tabloya bakılırsa, $(-\infty, 2)$ aralığında $f''(x) < 0$ olduğundan dolayı $y = f(x)$ fonksiyonu bu aralıkta konkav ve $(2, +\infty)$ aralığında $f''(x) > 0$ olduğundan dolayı $y = f(x)$ fonksiyonu bu aralıkta konveks olacaktır.



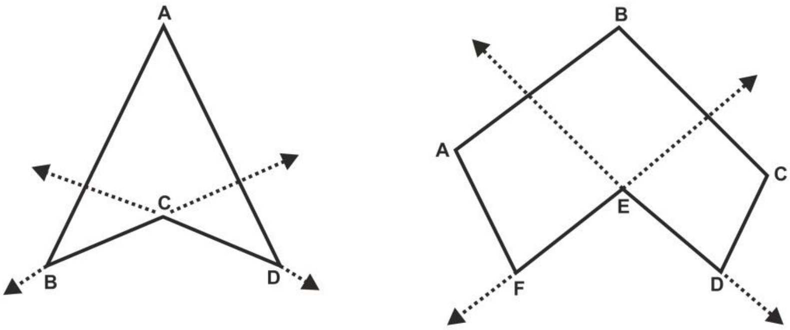
Şekil 1.1: $y = f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ eğrisinin konveks ve konkav olduğu aralıklar



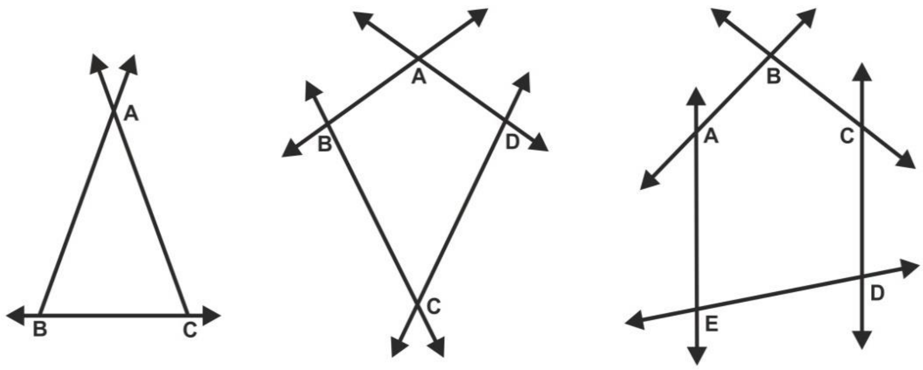
Şekil 1.2: $y = f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ eğrisine ait grafik

Bu hatırlatma ile konveks ve konkav kavramlarını ilk kez ciddi anlamda grafik çiziminde gördüğümüzü hatırlamış oluyoruz. Grafik çiziminin dışında yine hem lise hem de üniversite yıllarımızda matematik ile ilgili derslerimizde hatta özellikle geometride aşağıdaki gibi konveks ve konkav örnekleri ile de karşılaşıyoruz.

Bir düzlemde birbirinden farklı ve herhangi üçü doğrusal olmayan n tane noktayı ikişer ikişer birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu kapalı şekillere çokgen denildiğini biliyoruz. Bir çokgenin bazı kenar doğruları çokgeni kesiyorsa bu tür çokgenlere konkav çokgen, kenar doğrularının hiçbiri, çokgeni kesmiyorsa bu çokgenlere konveks çokgen denir.



Şekil 1.3: Konkav çokgenler



Şekil 1.4: Konveks çokgenler

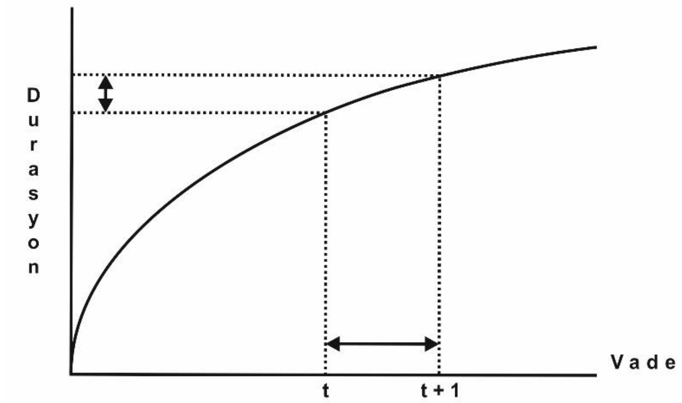
- Konveks ve konkav kavramları günlük hayatımızda matematik dışında başka nerelerde ya da hangi bilim dallarında karşımıza çıkar? Bu soruya cevap vererek aynı zamanda konveksliğin diğer bilim dallarında ne kadar önemli bir yere sahip olduğunu ve insanlığa ne kadar yararlı olduğunu da ortaya koymuş olacağız.

1. ***Güzel Sanatlarda konvekslik kavramı karşımıza çıkmaktadır:*** Güzel Sanatlar ile uğraşan öğrenciler veya sanatkârlar konvekslik ve konkavlık ile Öğrenme Kontrolü ve İncelik hakkında çalışmalar yapmaktadırlar. Bu çalışmalarda, öğrencilere,

konveks veya konkav formdaki baskın, alt hakim ve alt elementler arasındaki ince ilişkileri incelemeye yoğunlaşmaları istenir. Dikkatlice eksenel, düzlemsel ve yapılandırma eğrilerini oluşturarak, yüzey gerilimi, hacimsel hareket ve hiyerarşik ilişkilerle uygulama yapmaya başlarlar. [65].

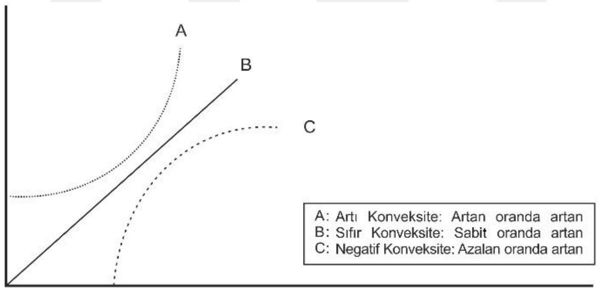
Şekil 1.5: Güzel Sanatlarda çalışılmış konkav ve konveks cisim örnekleri

2. ***Finans matematiğinde karşımıza konvekslik kavramı çıkmaktadır:*** Fiyat esnekliğinin rakamsal ölçütü olarak kullanılmak üzere modifiye durasyon (düzeltilmiş süre) kavramı geliştirilmiştir. Modifiye durasyon, pozisyonların faiz oranındaki değişim karşısında aldığı yeni değerin bulunması amacıyla kullanılmaktadır. Durasyon bir zaman ölçütü iken, modifiye durasyon bir faiz hassasiyet ölçütü olarak ortaya çıkmaktadır. Modifiye durasyon oldukça yararlı bir risk ölçütü olmasına ve faiz oranlarında meydana gelen küçük değişikler sonucu pozisyon değer değişimlerinde oldukça hassas sonuçlar vermesine karşın, özellikle faiz oranlarında meydana gelen büyük değişikliklerde hata payı yüksektir. Fiyat getiri arasındaki konveks yapıdan kaynaklanan modifiye durasyonun var olan hata payı, faiz şoku miktarı büyüdükçe daha da artmaktadır. Bu olgunun sebebi durasyonun, vadenin konveks bir fonksiyonu olmasından kaynaklanmaktadır. Diğer bir anlatımla, durasyon vade ile birlikte artmakta ancak artış değerleri aynı olmamaktadır.



Şekil 1.6: Konveks Durasyon-Vade Fonksiyonu

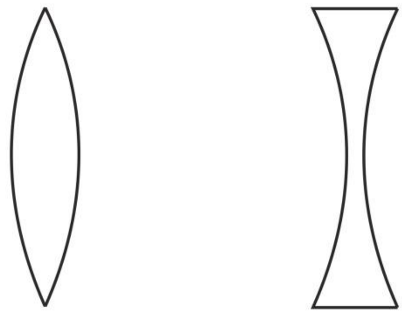
Faiz hassasiyetinin ölçümünde modifiye durasyonun hata payının azaltılması amacıyla konveksite yaklaşımı kullanılmaktadır. Konveksite, durasyonun değişim oranını gösteren bir ölçüttür. Diğer bir ifadeyle, durasyon, fiyatın faiz oranına göre birinci türevi iken, konveksite ise ikinci türevdir. Konveksite değeri artı, eksi veya sıfır olabilmektedir[2].



Şekil 1.7: Konveksite Tipleri

3. ***Sağlık alanında karşımıza konvekslik kavramı çıkmaktadır:*** Şüphesiz günümüzde en önemli yatırımlardan birisi de sağlığa yapılan yatırımdır ve tüm dünyada insan sağlığını daha mükemmel noktalara ulaştırmak için bilim insanları sürekli çalışmalar yapmaktadır ve yapmaya da devam edeceklerdir. Yapılan bu önemli çalışmalardan birisi de gözlerinden rahatsız olan insanların daha iyi görebilmelerini sağlamak için kullanılan lenslerdir.
   Bir lens, ışığı kırmak için kullanılan şeffaf kavisli bir cihazdır ve genellikle camdan yapılır. Lensler için iki farklı şekil vardır. Bunlara konveks ve konkav denir. Bu lensler sayesinde insanların daha iyi görmeleri ve yaşam standartlarını yükseltmeleri sağlanır. Göz doktorları uzağı göremeyen miyop hastalarına daha

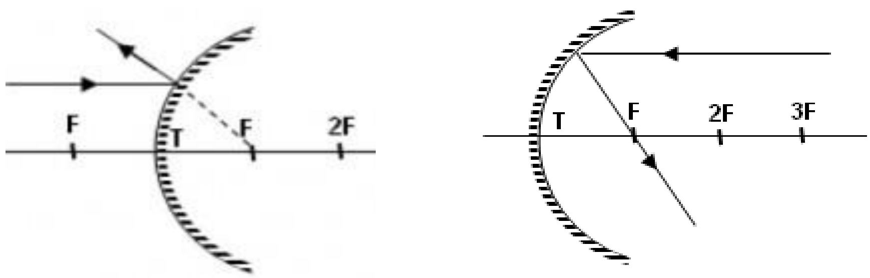
düşük konkav numaralı camlı okuma gözlüğü, yakını göremeyen hipermetrop hastalarına ise daha güçlü konveks camlı okuma gözlükleri vermektedirler.



Şekil 1.8: Konveks ve konkav lens

4. ***Fizikte karşımıza konvekslik kavramı çıkmaktadır:*** Yansıtıcı yüzeyi çukur olan aynalara çukur ayna (konkav ayna) denir. Çukur ayna, cisimlerin görüntülerini büyütebilme ve gelen paralel ışınları bir noktada toplayabilme özelliğine sahiptir. Diş hekimleri tarafından kullanılır. Güneş ışınlarının odaklanması (bir noktada toplanması) sağlanır. Bu sayede çok yüksek sıcaklıklar elde edilir. Teleskop yapımında kullanılır. Mikroskopta incelenecek cismin üzerine ışık düşürmek için kullanılır.

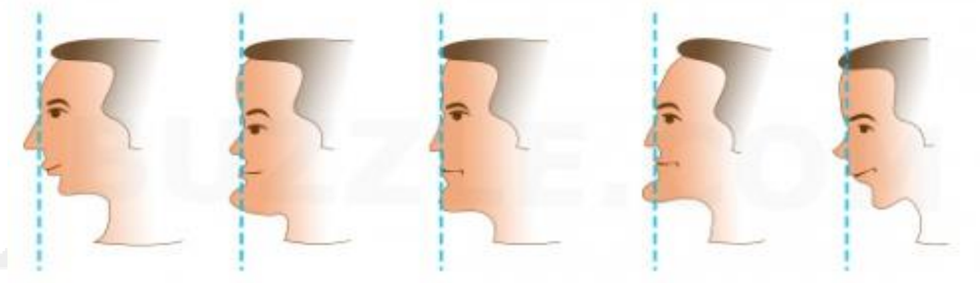
   Yansıtıcı yüzeyi tümsek olan aynalara tümsek ayna (konveks ayna) denir. Tümsek ayna, cisimlerin görüntülerini küçültebilme ve gelen paralel ışınları dağıtma özelliğine sahiptir. Arabaların yan aynalarında, büyüteçlerde kullanılır.



Şekil 1.9: Tümsek(konveks) ayna ve çukur(konkav) ayna

5. ***Endüstri alanında karşımıza konvekslik kavramı çıkmaktadır:*** Ambalajlar ve kaplamalar çeşitli alanlarda ve çeşitli kombinasyonel yapılarda düşünülmüştür ve sabit eğrilik alanlarındaki, yani Öklidyen, küresel ve hiperbolik uzayda konveks gövdelerden oluşan paketlemeler ve kaplamalar ile ilgili problemlerle daima ilgilenilmiştir. Küre biçimindeki topların ambalajlanması, çoklu paketleme ve kaplama, uçaklarda dairesel paketleme ve dairesel kaplama vs. gibi konular bunlara örnek gösterilebilir [49].

6. ***Biyoloji alanında karşımıza konvekslik kavramı çıkmaktadır:*** Biyologlar çokgenlerin konvekslik ölçümünü kullanarak yaprak sınıflandırması yapmaktadırlar [31].
7. ***Günlük yaşantımızda karşımıza konvekslik kavramı çıkmaktadır:*** Günümüzde evlerimizde, iş yerlerimizde ve konser salonlarında daha iyi ses iletimi için akustik tasarımlar uygulanmakta ve bu tasarımlarda sesi en aza indirmek ya da yükseltmek için konvekslikten yararlanılarak tasarımlar yapılmaktadır [66].
8. ***İnsan anatomisinde karşımıza konvekslik kavramı çıkmaktadır:*** Bir kişinin yüzü kim olduğunun bir parçasıdır. İnsanlar birbirlerinin şeklini yüz şekliyle tanırlar. Bunun için insan yüzleri konvekslik ve konkavlık kavramlarından yararlanarak beş temel gruba ayrılmıştır. Bunlar konveks, konkav, düzlem, konveks-konkav ve konkav-konvekstir [64,67].



Şekil 1.10: İnsan yüzleri

Yukarıda değişik bilim dallarından vermiş olduğumuz konvekslik ve konkavlık örnekleri veya uygulamaları çoğaltılabilir. Konvekslik ile ilgili değişik uygulamalara, astronomide, mühendislikte, endüstride, sağlıkta, müzikte termodinamikte, coğrafyada ve optimizasyon teorisinde vs. sıklıkla rastlanmaktadır.

Konvekslik, M. Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Archimedes bir konveks şeklin çevre uzunluğunun onu çevreleyen diğer bir şeklin çevre uzunluğundan daha küçük olduğunu önemle ifade etmiştir.

Gerçekte birçok kez konvekslik kavramıyla karşılaşıyoruz ve deneyimliyoruz. Dik pozisyonda durduğumuzda ağırlık merkezimizin dik izdüşümü ayağımızın kapladığı konveks alanın içinde kalır. Böylece dengemizi sağlayabilmekteyiz. Günlük hayatımızda konveksliğin büyük etkileri vardır, örneğin endüstri, iş, fizik, sağlık, optimizasyon, kontrol teorisi, müzik ve sanat alanlarında uygulaması vardır.

Konveks fonksiyon teorisi konveksliğin genel konularının bir parçasıdır. Çünkü konveks bir fonksiyonun görüntü kümesi konveks bir kümedir. Konveks fonksiyonlar teorisi matematiğin tüm alanlarında karşımıza çıkar. Konvekslik konusunu gerektiren matematiğin ilk konularından birisi çizgisel analizdir. İkinci türev konveksliğin bulunmasında bize sonucu veren güçlü bir araçtır.

1978 yılında düzenlenen “Proceedings of the Second International Conference on General Inequalities” isimli konferansta Richard Bellman yaptığı bir konuşmasında eşitsizlik çalışmanın pratik, teorik ve estetik olmak üzere üç nedeni olduğundan bahsetmiştir. Bunlar içerisinde estetik neden için bakan bir kimsenin ya da bir seyircinin veya bir okuyucunun gözündeki güzellik olarak ifade etmiştir. Eşitsizliğin onları cezbeden bir zarifliği olduğunu söylemiştir.

Konveks ve konkav tanımlarının temelini eşitsizlik oluşturduğundan dolayı bu tip fonksiyonlarda eşitsizliğin çok önemli bir yeri vardır. Klasik eşitsizlikle ve konvekslikle ilişkili olan Gauss, Cauchy, Schwartz, Buniakowsky, Hölder, Minkowski, Chebyshev, Lyapunov, Gram, Bessel, Hadamard, Landau, Bernstein, Hilbert, Hardy, Littlewood, Polya, Markoff, Kolmogorov, Stieltjes, Beckenbach, Bellman, Mitrinović, Pachpatte, Pečarić ve Fink gibi önemli isimler bu alanda çok sayıda kitap yazmışlardır. İlk yayını 1934 yılında yapılan ve Hardy, Littlewood ve Polya tarafından yazılan “Inequalities” isimli kitap bu alanda ilk çalışma olup temel kaynak olarak önemli bir yere sahiptir [20]. Bu kitap eşitsizlik konusunu ifade eden, farklı alanlar için kullanışlı bir rehber olarak kullanılan ilk kitaptır. Genel eşitsizlikler üzerine görülen diğer bir kitap ise E. F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961’de yazılan ”Inequalities” isimli kitaptır. Bu kitap 1934 yılından 1961 yılına kadar eşitsizlikle ilgili yapılan mükemmel araştırmaları içeren bir kitaptır. 1970 yılında Mitrinović ise “Analytic Inequalities” isimli kitapla [40] birlikte bu konuyla ilgili literatürde mihenk taşı oluşturacak üçüncü kitap olmuştur. Konveks fonksiyonlar ve ilgili eşitsizlikler için literatürde var olan diğer kitaplar ve tezlerden bazıları şunlardır: Bakınız [3, 9, 13, 18, 19, 32, 39, 41, 42, 54, 58, 59, 60].

Konveks fonksiyonlar 19. yüzyılın sonunda ortaya çıkmaya başlamıştır. Uzun bir tarihi vardır. O. Hölder (1889), O. Stolz (1893) ve J. Hadamard'ın (1893) katkılarıyla temelleri atılmıştır. Konveks Fonksiyonlar Teorisi ile ilgili olan Eşitsizlikler Teorisi ise C. F. Gauss, A. L. Cauchy ve P. L. Chebyşhev ile gelişmeye başlamıştır. 19.-20. yy'da bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler olmuşlardır. Bunların en önemlileri 1881 yılında Hermite tarafından elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliği ve 1938 yılında Ostrowski tarafından elde edilen Ostrowski eşitsizliğidir. Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili çalışmaların önemli bir kısmını S. S. Dragomir ve C. E. M. Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" isimli kitapta; Ostrowski eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı da S. S. Dragomir ve Themistocles M. Rassias tarafından 2002 yılında yazılmış olan "Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration" isimli kitapta bir araya getirilmiştir. Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler üzerine çalışan diğer matematikçiler; R. Agarval, G. Anastassiou, G. V. Milovanovic, A. M. Fink, Roberts ve Varberg, N.S. Barnett, M. E. Özdemir, U. S. Kırmacı, H. Yıldırım, M. Z. Sarıkaya, N. Ujević, S. Varosanec, P. S. Bullen, P. Cerone, E. Set ve İ. İşcan şeklinde sıralayabiliriz.

Bu tez çalışmasında, geometrik-aritmetik konveks fonksiyonlar ve n-kere diferansiyellenebilir konveks ve konkav fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. İlk bölümünde, konveks fonksiyonların tarihi gelişimi ve literatür taraması, ikinci bölümde, konveks fonksiyonlarla ilgili temel tanım ve özellikler, üçüncü bölümde, bu tezde kullanılan klasik eşitsizlikler ve daha sonrada tezin bulgular kısmında kullanılacak olan lemmalar ve teoremler, dördüncü bölümde ise geometrik-aritmetik(GA) konveks fonksiyonlar ile n-kere diferansiyellenebilir konveks ve konkav fonksiyonlarla ilgili yeni lemmalar, teoremler, önermeler ve sonuçlar verilmiştir. Elde edilen bu yeni sonuçlar için çeşitli ortalamalar ve n-kere diferansiyellenebilen konveks ve konkav fonksiyonlar kullanılarak farklı uygulamalar verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, doktora tezinin bulgular kısmında kullanılacak olan bazı temel tanım, teorem, sonuç ve kavramlara yer verilecektir. Bazı tanımların okuyucu tarafından bilindiği kabul edilmektedir.

2.1. Ön Bilgiler

Tanım 2.1.1 (Lineer Uzay) $L \neq \emptyset$ bir küme ve K bir cisim olsun. $+: L \times L \to L$ ve $\cdot : K \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye K cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir[5].

A) L kümesi $+$ işlemine göre bir gruptur.

G1. $\forall x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.

G2. $\forall x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

G3. $\forall x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $\theta \in L$ vardır.

G4. $\forall x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in L$ vardır.

G5. $\forall x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $a, b \in K$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

L1. $a.x \in L$ dir.

L2. $a.(x + y) = a.x + a.y$ dir.

L3. $(a + b).x = a.x + b.x$ dir.

L4. $(ab).x = a.(b.x)$ dir.

L5. $1.x = x$ dir. (1, K cisminin birim elemanıdır)

Tanım 2.1.2 (Bir kümenin içi) X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin kapsadığı tüm açık alt kümelerin birleşimine A kümesinin içi denir ve A° ile gösterilir.

Tanım 2.1.3 (Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Eğer

$$|x - x_0| < \delta \quad iken \;\; her \; x \in S \quad için \;\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, x_0 da süreklidir denir [12].

Tanım 2.1.4 (Lipschitz Şartı): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f, S de Lipschitz şartını sağlıyor denir [12].

Tanım 2.1.5 (Mutlak Süreklilik): I, $\mathbb{R}$'nin boştan farklı bir alt kümesi ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. I nın $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{n}$ ayrık açık alt aralıklarının bir birleşimini göz önüne alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta \quad \text{olduğunda} \quad \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu I kümesinde mutlak süreklidir denir [14].

Tanım 2.1.6 (Düzgün Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$|x_1 - x_2| < \delta \text{ şartını sağlayan her } x_1, x_2 \in S \text{ için } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, S' de düzgün süreklidir denir [12].

Sonuç 2.1.1 f, S de Lipschitz şartını sağlıyorsa f, S de düzgün süreklidir [12].

Tanım 2.1.7 (Türev) $a \in \mathbb{R}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı bir reel-değerli f fonksiyonu için eğer

$$f'(a) = Df(a) = \left.\frac{df}{dx}\right|_a := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

limiti $\mathbb{R}$'de mevcut ise f fonksiyonuna $x = a$ noktasında türevlenebilirdir denir. O zaman bu limite a noktasında f'nin türevi denir. Eğer f fonksiyonu bir E kümesinin her noktasında türevlenebilir ise o zaman f'ye E üzerinde türevlenebilirdir ve

$$f' = Df = \frac{df}{dx}$$

fonksiyonuna E üzerinde f'nin türevi denir. Eğer f' fonksiyonu E üzerinde sürekli ise o zaman E üzerinde sürekli türevlenebilirdir [23].

Teorem 2.1.1 f fonksiyonu $[a,b]$ de mutlak sürekli ise $[a,b]$ nin hemen hemen her noktasında türevlidir[10].

Teorem 2.1.2 ($\frac{0}{0}$ Belirsizliği için L'Hospital Kuralı) $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonları a noktasının herhangi bir komşuluğunda türevlenebilen iki fonksiyon, bu aralıktaki her x değeri için $f_2'(x) \neq 0$ ve $\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = 0$ ise bu durumda, eğer $\lim_{x\to a} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$ limiti mevcutsa, o halde $\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ limiti de mevcuttur ve bu limitler eşittir. Yani

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$$

dir [15].

Teorem 2.1.3 (İntegraller için Leibniz Kuralı) f, $[a,b]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve u, v, $[c,d]$ üzerinde türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Eğer u ve v sınırları $[a,b]$ aralığının içinde iseler o halde

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$$

dir [57].

Tanım 2.1.8 (Sınırlı fonksiyon) $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlanmış olsun. Her $x \in [a,b]$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa, $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlıdır denir [12].

2.2. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler

Tanım 2.2.1 (Konveks Küme): [11] L bir lineer uzay ve $A \subseteq L$ olmak üzere her $x, y \in A$ için

$$B = \{z \in L: \ z = \alpha x + (1-\alpha)y, \ 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

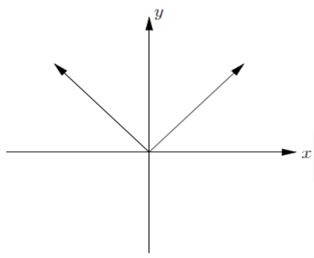
ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki x ve y nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1-\alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y

olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümesidir.

Tanım 2.2.2 (Konveks Fonksiyon): I, $\mathbb{R}$' de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Bakınız Şekil 2.1). Örneğin, $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde bir konveks fonksiyondur [48].



Şekil 2.1: Bir aralıkta konveks fonksiyon ($f(x) = |x|$)

Sonuç 2.2.1 [48]. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun I aralığında konveks olması için gerek ve yeter şart, her $x, y \in I$ için $p + q > 0$ olan her $p, q \geq 0$ için

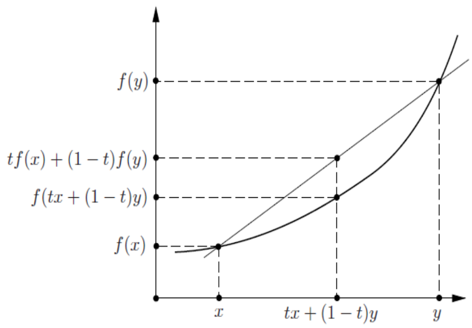
$$f\left(\frac{px + qy}{p+q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p+q}$$

olmasıdır. I üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun kesin konveksliğinin geometrik anlamı $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f'nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır. Bunu Şekil 2.2'de görmekteyiz.

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı, $[a, b]$ aralığında konveks (konkav) ve x_0 noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $x \in (a, b)$ için,

$$f(x) - f(x_0) \leq (\geq) f'(x_0)(x - x_0)$$

eşitsizliği yazılır [52].

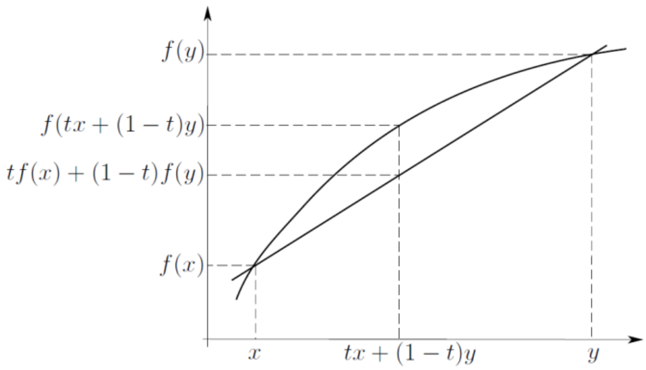


Şekil 2.2: Konveks fonksiyonun geometrik yorumu

Tanım 2.2.3 (Konkav Fonksiyon): Eğer her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise f ye konkav fonksiyon denir. Konkav fonksiyonun geometrik yorumunu aşağıdaki şekilde verebiliriz [48].



Şekil 2.3: Konkav fonksiyonun geometrik yorumu

Konvekslik, Lipschitz şartı, süreklilik ve mutlak süreklilik arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem 2.2.1 L lineer uzay, $U \in L$ bir açık küme ve $f: U \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun.

a. f, U açık kümesinde konveks olsun. Eğer f fonksiyonu U'da bir noktanın komşuluğunda üstten sınırlı bir fonksiyon ise f, U'da yerel Lipschitz' dir ve bu nedenle U'nun kompakt alt kümesinde Lipschitz şartını sağlar ve U'da süreklidir.

b. f, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde konveks ise f, U'nun her kompakt alt kümesinde Lipschitz şartını sağlar ve U' da süreklidir [48].

Teorem 2.2.2 [8] f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise, bu taktirde

a. f, (a, b) aralığında süreklidir,

b. f, $[a, b]$ aralığında sınırlıdır.

Tanım 2.2.4 (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f, I aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. $x_1 < x_2$ olan $\forall x_1, x_2 \in I$ için

i. $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,

ii. $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,

iii. $f(x_2) \geq f(x_1)$ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,

iv. $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır,

denir [1].

Teorem 2.2.3 [1]. I, $\mathbb{R}$' de bir aralık, f, I üzerinde sürekli ve I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

i. $\forall x \in I^0$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.

ii. $\forall x \in I^0$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.

iii. $\forall x \in I^0$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.

iv. $\forall x \in I^0$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır.

Sonuç 2.2.2 f ve g konveks fonksiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu da konvekstir [52].

Teorem 2.2.4 Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyonlar I°'de artandır (kesin artandır) [48].

Teorem 2.2.5 f fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart f' nün artan (kesin artan) olmasıdır [48].

Teorem 2.2.6 f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi mevcutsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart her $x \in I$ için $f''(x) \geq 0$ olmasıdır [40].

Tanım 2.2.5 (p Normu): X, $\mathbb{R}^n$'de bir küme, μ, X'in alt kümelerinin σ-cebiri üzerinde bir ölçü ve f, X üzerinde tanımlanmış ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left\{\int_X |f|^p d\mu\right\}^{1/p} , & 1 \leq p < \infty \\ sup|f| , & p = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye p-normu denir [10].

2.3. Literatür Taraması

Türk Dil Kurumu Sözlüğünde "eşitsizlik" kelimesi "*İki veya daha çok şeyin eşit olmaması durumu, müsavatsızlık*" olarak tanımlanmaktadır ve sıralayıcı ölçek olarak da "daha az (<)", "daha çok (>)", "daha az ya da eşit (≤)" ve "daha çok ya da eşit (≥)" simgeleri kullanılır.

Matematik başta olmak üzere hangi bilim dalında olursa olsun araştırmacılar veya bilim insanları elde ettikleri sonuçları, daha iyiyi elde edebilmek adına mutlaka daha önceden elde edilen sonuçlarla karşılaştırmışlardır ve karşılaştırmaya devam edeceklerdir. Yine, Türk Dil Kurumu sözlüğünde "karşılaştırma" kelimesi "*Kişi ve nesnelerin benzer veya aynı yanlarını incelemek için kıyaslama, mukayese*" şeklinde tanımlanmaktadır. Matematiği öğrenmeye başladığımız ilk yıllardan itibaren, ağırlık konusu işlenirken hangi cisim diğerlerinden daha ağırdır, uzunluk konusu işlenirken hangisi diğerlerinden daha uzun veya kısadır, hız konusu işlenirken hangisi en hızlıdır ya da hangisi en yavaştır, alan veya hacim konusu işlenirken hangi alan veya hacim diğerinden daha büyük veya küçüktür, rasyonel sayılar işlenirken hangisi daha büyük ya da küçüktür, grafik çizimi yaparken eğri maksimum ve minimum değerlerini hangi noktalarda alır, üçgenler konusu işlenirken "üçgen eşitsizliği" ile iki kenarın toplamının üçüncü kenardan büyük farklarının ise küçük olduğu gibi büyüklük ve küçüklük kavramlarını içinde bulunduran karşılaştırmaları görmüşüzdür. O halde basit anlamda eşitsizliği "*matematiksel ifadelerden ve* $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ *sembollerinden oluşan matematiksel ilişkilere eşitsizlik denir*" şeklinde tanımlayabiliriz.

Çok iyi bilinmektedir ki eşitsizlikle ifade edildiğinden dolayı günümüzde konveks fonksiyonlarda eşitsizliğin çok önemli bir yeri vardır. Dolayısıyla burada öncelikle eşitsizlikler ile ilgili olarak kısa bir literatür özeti vermeliyiz.

Eşitsizlikler, matematiksel analizin kalbinde yatmaktadır. Süreklilik ve limit tanımlarında ve dolayısıyla integral ve türev tanımlarında karşımıza çıkmaktadır. Uzunluk ve vektör büyüklüğü kavramlarını genelleştirmede önemli rol oynarlar. Fakat fizikle alakalı birçok problem, çözümleri için basit eşitsizlik kavramlarına dayanır. Mühendislikte, eşitlik açısından düşünmek her zaman iyi değildir. Burada özellikle matematikten örnek verecek olursak; sınırlı reel sayı kümelerinde, toplamlar için basit sınırlarda, reel sayılar için üçgen eşitsizliğinde, tek değişkenli reel fonksiyonlar için basit eşitsizliklerde(fonksiyonların supremumu ve infimumu, sınırlı fonksiyonlar), tek reel değişkenli eşitsizliklerin çözümünde, kompleks sayılarda ve bazı kompleks fonksiyonlarda, $\mathbb{R}^n$'de vektörler ve ilişkili eşitsizliklerde(Cauchy-Schwarz eşitsizliği), tümevarımda, homojenlikte(değişkenleri kısıtlamak veya normalleştirmek), değişkenlerin sıralanmasında, limit ve süreklilikte(reel sayıların yakınsak dizileri, tek değişkenli reel fonksiyonların Limitleri ve Sürekliliği), integraller için temel sonuçlarda(basit tahmin ve integralin mutlak değeri, integraller için birinci ve ikinci ortalama değer teoremi), diferansiyel hesapta(ortalama değer teoremi, ikinci türev testi), standart eşitsizliklerde(Bernoulli, Young, Hölder, Minkowski, Chebyshev, Jensen), diferansiyel denklemler için eşitsizliklerde vb. gibi konularda eşitsizliklerle karşılaşıldığı görülecektir[38].

Konveksliğin basit ve doğal tanımı ünlü bilim adamı Archimedes'e ve onun çok ünlü olan π(pi) değerini hesaplamasına kadar uzanmaktadır. Konvekslik tanımının matematikte yer alması 19. yüzyılın sonu ve 20. yüzyılın başları olarak gösterilebilir. 19. yüzyılın sonlarında Hermite ve Hadamard'ın çalışmalarında açıkça belirtilmese de bu türden fonksiyonlardan bahsedilmektedir. Konveks fonksiyonlar Jensen tarafından ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında çalışılmıştır. Jensen'in bu çalışmalarından sonra konveks fonksiyonlar teorisi eşitsizliklerle birlikte oldukça hızlı bir gelişme göstermiş ve bu alanda birçok kitap yazılmıştır. Konveks fonksiyonların matematiksel analiz, uygulamalı matematik, olasılık teorisi gibi matematiğin birçok alanında, bunun dışında tıp, sanat, müzik, insan anatomisi, coğrafya, finans matematiği, mühendislik, oyun teorisi, optimizasyon ve endüstri gibi diğer bilim dallarında uygulaması olduğu gibi günlük yaşantımızda da yeri vardır. Örneğin ayakta duruş pozisyonumuzda ayaklarımızın kapladığı konveks alanın içine ağırlık merkezinin dik izdüşümü boyunca dengemizi sağlamaktayız. İnsan yüzleri konvekslik kavramından yararlanılarak sınıflandırılmaktadır.

Konveks fonksiyonlar daha kapsamlı bir şekilde A.W. Roberts ve D. E. Varberg tarafından "Convex Functions" adlı eserde kaleme alındı. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler hakkında Pečarić 1987 yılında "Convex Functions: Inequalities" adlı eseri yayınlamıştır. Ayrıca okuyucu çeşitli konveks fonksiyon sınıfları için, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin detaylı anlatımını S.S. Dragomir ve C.E.M Pearce tarafından yazılan "Selected Topics on Hermite Hadamard Inequalities and Applications" [18] adlı eserde bulabilir.

Bilim insanlarının üzerinde çalışmalar yaptığı birçok konvekslik çeşidi bulunmaktadır. Bunlardan birisi de tezimizde de ele alacağımız GA-konveksliktir.

GA konvekslik ile ilgili olarak literatürde Niculescu ve Persson 2006 yılında yazmış oldukları[44] “Convex Functions and Their Applications A Contemporary Approach” isimli kitapta Geometrik-Aritmetik GA-konvekslik tanımından ve özelliklerinden bahsetmektedirler**.**

Satnoianu, [53] çalışmasında, GA-konveks fonksiyonların durumunu genelleştiren parametrelere bağlı olarak n değişkenli fonksiyonlar için cebirsel eşitsizlik sınıfını ele almıştır.

Zhang ve arkadaşları [62], Geometrik-Aritmetik (GA)-konveks fonksiyonlar için yeni bir Hermite-Hadamard tipli eşitsizliği vermişler ve uygulama olarak gamma fonksiyonu için yeni Gautschi tipli eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Zhang ve arkadaşları [61], Hölder integral eşitsizliğini kullanarak, GA-konveks fonksiyonlar için bazı Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri oluşturmuşlar ve bu eşitsizlikleri, özel ortalamalar için birkaç eşitsizlik elde etmek için uygulamışlardır.

İşcan [25], quasi-geometrik konvekslik kavramını ortaya koyarak kesirli integraller için yeni bir özdeşlik vermiştir. Bu özdeşliği kullanarak, GA-s-konveks, quasi-geometrik konveks ve (s, m)-GA-konveks fonksiyonlar için Riemann Liouville kesirli integrali ile Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli eşitsizliklerin genelleştirilmesi için yeni tahminler elde etmiştir.

Shuang ve arkadaşları [56] çalışmalarında, geometrik-aritmetik s-konveks fonksiyon kavramını ortaya koymuşlar ve geometrik-aritmetik s-konveks fonksiyonlar için bazı Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmişler ve bu eşitsizliklere özel ortalamalar uygulamalar vermişlerdir.

Park [46], Hölder integral eşitsizliği ile (α, m)-geometrik aritmetik konveks fonksiyonlar için bazı genelleştirilmiş Hermite-Hadamard integral eşitsizliklerini elde etmiştir. Ayrıca [47], sürekli iki kez türevlenebilir (α, m)-geometrik-aritmetik konveks fonksiyonlar için bazı yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri vermiştir.

Shuang ve Qi [55] çalışmalarında, (α, m)-GA-konveks fonksiyon kavramını ortaya koymuşlar ve bu tür konveks fonksiyonlar için bazı Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Qi ve Xi çalışmalarında [50], yeni bir GA-ε-konveks fonksiyon tanımı yaparak GA-ε-konveks fonksiyonlar için Simpson tipli bazı integral eşitsizlikleri vermişlerdir.

Liao ve arkadaşları [35], Geometrik-aritmetik s-konveks fonksiyonların tanımını ve birinci dereceden kesirli integral eşitliklerini kullanarak, diferansiyellenebilir GA s-konveks fonksiyonlar için bazı ilginç Riemann-Liouville kesirli Hermite-Hadamard eşitsizliklerini sunmuşlardır. İstenilen tahminlerde hem beta fonksiyonu hem de tam olmayan beta fonksiyonunu kullanmışlardır.

Liao ve arkadaşları [36], Geometrik-aritmetik s-konveks fonksiyonların tanımı ve ikinci dereceden kesirsel integral eşitlikleri yardımı ile beta fonksiyonu ve tam olmayan beta fonksiyonu ile ikinci mertebeden diferansiyellenebilir geometrik-aritmetik s-konveks fonksiyonlar için bazı ilginç Riemann-Liouville kesirsel Hermite-Hadamard eşitsizliklerini bulmuşlardır.

Latif [33] çalışmasında, GA-konveks fonksiyonları için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklerin bazı geliştirilmesini elde etmiştir ve elde edilen sonuçların özel ortalamalara uygulamasını vermiştir.

Qu ve arkadaşları [51], Geometrik-aritmetik s-konveks fonksiyon kavramından yola çıkarak geometrik-aritmetik s-konveks fonksiyonlar için sadece konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler hakkında yeni sonuçları tekrar elde etmekle kalmayıp aynı zamanda özel durumlarda yeni sonuçlar vermek üzere bazı yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri oluşturmuşlardır.

Hua ve arkadaşları [21], geometrik-aritmetik s-konveks fonksiyonların birkaç özelliği sağlamışlardır. İntegrallerin bir fonksiyonun ve türevin çarpımı olduğu bir integral eşitlik bulmuşlar ve daha sonra integrandı bir türev ve türevi GA-s konveks olan bir fonksiyonun çarpımı olan integraller için Hermite-Hadamard tipli bazı eşitsizlikleri oluşturmuşlardır.

İşcan [27] çalışmasında, P-GA fonksiyon kavramını tanımladıktan sonra GA fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliklerini vermiş ve yeni bir eşitlik tanımlamış, bu yeni eşitliği kullanarak P-GA fonksiyonlar için Hadamard ve Simpson tipli eşitsizliklerin genellemesine ilişkin yeni tahminleri elde etmiştir. Reel sayıların özel ortalamalarına yapılan bazı uygulamaları da vermiştir.

Latif [34], koordinatlarda GA-konveks fonksiyon tanımını yapmış, koordinatlarda GA-konveks fonksiyon kavramını kullanarak, Hölder integral eşitsizliği ve iki kez diferansiyellenebilir fonksiyon için elde edilen yeni bir eşitliği kullanarak bu sınıflardaki fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri elde etmiş ve son olarak, pozitif sayılar için özel ortalamalara uygulamalarını vermiştir.

Zhang ve arkadaşları [63], ilk olarak Hadamard kesirli integrallerini içeren bir kez türevlenebilir fonksiyon için genel bir integral eşitliği verdiler. İkinci olarak, bu integral eşitliğini, kuvvet ortalamaları yardımı ile GA-konveks fonksiyonları vasıtasıyla kesirli Hermite-Hadamard eşitsizliklerinin bazı yeni genelleştirmesini çıkarmak, kuvvet ortalaması ve integraller yardımı ile GG-konveks fonksiyonlarını türetmek için kullandılar. Reel sayıların özel ortalamaları için yapılan bazı uygulamaları verdiler.

İşcan ve Kunt [29], Hadamard kesirli integralleri için yeni bir eşitlik vermişlerdir. Daha sonra bu eşitliği kullanarak, (α, m)-GA-konveks fonksiyonlar için Hadamard kesirli integrali ile Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli eşitsizliklerin genelleştirilmesi üzerine yeni tahminler elde ettiler.

Avcı ve arkadaşları [7], yeni bir integral eşitliği ispatlayıp bu eşitliğe dayanarak, mutlak değerlerin türevleri GA-konveks olan fonksiyonlar için bazı integral eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Maden ve arkadaşları [37], türevlenebilir fonksiyonlar için yeni genel bir eşitlik verip bu eşitliğin bir sonucu olarak, türevlenebilir GA-konveks fonksiyonlar için bazı yeni ve genel kesirli integral eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

İşcan ve Aydin [28], GA-s-konveks fonksiyonlar ve Hadamard kesirli integralleri içeren Hadamard, Ostrowski ve Simpson eşitsizliklerinin yeni genellemesini ispatlamışlardır.

Çoban ve arkadaşları [16], türevlenebilir fonksiyonlar için yeni bir eşitlik ortaya koyarak, bu eşitliğin kullanılmasıyla bazı yeni Ostrowski tipli eşitsizlikler ve belirli kuvvetlerde mutlak değerlerdeki türevleri GA-konveks olan fonksiyonlara ait orta nokta formülü için bazı hata tahminlerini elde etmişlerdir.

Ardıç ve arkadaşları [6], yeni bir integral eşitliği yardımı ile mutlak değerlerinin türevleri GG-konveks ve GA-konveks olan fonksiyonlar için bazı Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

İşcan ve Turhan [30] çalışmalarında, türevlenebilir ve GA-konveks fonksiyonlar için yeni bir eşitlik verdiler. Bu eşitliğin bir sonucu olarak türevlenebilir GA-konveks fonksiyonlar için bazı yeni kesirli integral eşitsizliklerini elde etmişlerdir.

Hwang ve Dragomir [24], yaptıkları çalışmalarında ortaya çıkardıkları yeni lemma ve teoremleri bizde tezimizde Geometrik-Aritmetik konveks fonksiyonlar için uygulamayı, özel ortalamalara uygulamalar vermeyi ve ayrıca n-kere diferensiyellenebilen konveks ve konkav fonksiyonlar için bazı yeni eşitsizlikler elde etmeyi amaçlamaktayız.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümünün birinci kısmında, Geometrik-Aritmetik(GA)-Konveks Fonksiyonlarla ilgili temel tanım ve özelliklere, ikinci kısmında Hermite-Hadamard, Hölder ve kuvvet ortalaması (Power-Mean) integral eşitsizlikleri ile ilgili temel teoremlere ve üçüncü kısmında ise türevinin mutlak değeri konveks olan mutlak sürekli fonksiyonlar için iki integral ortalamanın karşılaştırılmasına yer verilecektir.

3.1. Geometrik-Aritmetik(GA)-Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler

Tanım 3.1.1 (GA-Konveks Fonksiyon): [43] $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu her $x, y \in I$, $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(x^\lambda y^{1-\lambda}\right) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna geometrik-aritmetik-konveks fonksiyon denir. Burada $x^\lambda y^{1-\lambda}$ ifadesi x ve y pozitif sayılarının ağırlıklı geometrik ortalaması ve $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ ifadesi ise $f(x)$ ve $f(y)$ nin ağırlıklı aritmetik ortalamasıdır.

Tanım 3.1.2 (Birinci Anlamda Geometrik-Aritmetik-s (GA-s) Konveks Fonksiyon): $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$, $s \in (0,1]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$f\left(x^\lambda y^{1-\lambda}\right) \leq (\geq) \lambda^s f(x) + (1-\lambda^s) f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda GA-s-konveks (konkav) fonksiyon denir [26].

Tanım 3.1.3 (İkinci Anlamda Geometrik-Aritmetik-s (GA-s) Konveks Fonksiyon): $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$, $s \in (0,1]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(x^\lambda y^{1-\lambda}\right) \leq (\geq) \lambda^s f(x) + (1-\lambda)^s f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda GA-s-konveks (konkav) fonksiyon denir [26].

Özel olarak Tanım 3.1.2 ve Tanım 3.1.3'de $s = 1$ alındığında Tanım 3.1.1'deki geometrik-aritmetik (GA)- konveks fonksiyon tanımı elde edilir.

Teorem 3.1.1 Kabul edelim ki $f: I \subseteq \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $s \in (0,1]$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(1) $f(x)$ fonksiyonu I üzerinde ikinci anlamda geometrik aritmetik s-konvekstir ancak ve ancak $f(e^{x})$ fonksiyonu $ln0 = -\infty$ kabul edildiğinde $lnI = \{lnx \mid x \in I\}$ aralığı üzerinde s-konvekstir.

(2) Eğer $f(x)$ fonksiyonu I üzerinde geometrik aritmetik konveks ise $f(x)$ I üzerinde ikinci anlamda geometrik aritmetik s-konvekstir.

(3) Eğer $f(x)$ fonksiyonu I üzerinde azalan ve geometrik aritmetik s-konveks ise $f(x)$ I üzerinde s-konvekstir.

(4) Eğer $f(x)$ fonksiyonu I üzerinde artan ve s-konveks ise $f(x)$ I üzerinde geometrik aritmetik s-konvekstir [21].

İspat: (1) Eğer $f(x)$ fonksiyonu I aralığında geometrik aritmetik s-konveks ise o halde

$$f\left(e^{tlnx+(1-t)lny}\right) = f(x^{t}y^{1-t}) \leq t^{s}f(x) + (1-t)^{s}f(y) = t^{s}f\left(e^{lnx}\right) + (1-t)^{s}f(e^{lny})$$

elde edilir. Bu yüzden $f(e^{x})$ fonksiyonu lnI aralığı üzerinde s-konvekstir. Tersine, eğer $f(e^{x})$, lnI aralığı üzerinde s-konveks ise

$$f(x^{t}y^{1-t}) = f\left(e^{tlnx+(1-t)lny}\right) \leq t^{s}f\left(e^{lnx}\right) + (1-t)^{s}f(e^{lny}) = t^{s}f(x) + (1-t)^{s}f(y)$$

elde edilir. Bunun anlamı $f(x)$ fonksiyonu I üzerinde geometrik aritmetik s-konveksdir.

(2) Eğer bir $f(x)$ fonksiyonu I üzerinde geometrik aritmetik konveks ise

$$f(x^{t}y^{1-t}) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \leq t^{s}f(x) + (1-t)^{s}f(y)$$

elde ederiz. Bu yüzden $f(x)$ fonksiyonu I üzerinde ikinci anlamda geometrik aritmetik s-konvekstir.

(3) Eğer $f(x)$ fonksiyonu I üzerinde azalan ve ikinci anlamda geometrik aritmetik s-konveks ise

$$f(tx+(1-t)y) \le f(x^t y^{1-t}) \le t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

elde ederiz. Bunun anlamı $f(x)$ fonksiyonu I üzerinde ikinci anlamda s-konvekstir.

(4) Eğer $f(x)$ fonksiyonu I üzerinde artan ve ikinci anlamda s-konveks ise

$$f(x^t y^{1-t}) \le f(tx+(1-t)y) \le t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

elde ederiz. Bu nedenle $f(x)$ fonksiyonu I üzerinde geometrik aritmetik s-konvekstir [21].

Sonuç olarak yukarıdaki teoremde $s=1$ alınırsa GA konvekslik ve konvekslik arasındaki ilişkiyi belirten aşağıdaki teoremi yazabiliriz:

Teorem 3.1.2 Kabul edelim ki $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(1) $f(x)$ fonksiyonu I aralığı üzerinde geometrik aritmetik konvekstir ancak ve ancak $f(e^x)$ fonksiyonu $lnI = \{lnx \mid x \in I\}$ aralığı üzerinde konvekstir.

(2) Eğer $f(x)$ fonksiyonu I üzerinde azalan ve geometrik aritmetik konveks ise $f(x)$ I üzerinde konvekstir.

(3) Eğer $f(x)$ fonksiyonu I üzerinde artan ve konveks ise $f(x)$ I üzerinde geometrik aritmetik konvekstir.

Lemma 3.1.1 Kabul edelim ki $I \subseteq (0,\infty)$ bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu I üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir ise o zaman f fonksiyonunun her $x \in I$ için GA-konveks(konkav) olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$f'(x) + xf''(x) \ge (\le) 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır[62].

İspat: Lemmanın ispatı, f fonksiyonu I üzerinde GA-konveks(konkav) ancak ve ancak $g(x) = f(e^x)$ fonksiyonu $J = \{lnx : x \in I\}$ üzerinde konvekstir(konkav) gerçeği ve konveks(konkav) fonksiyonların temel özelliklerinden kolayca elde edilir.

Örnek 3.1.1 $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = lnx$ fonksiyonu hem GA konvekstir hem de GA-konkavdır.

Örnek 3.1.2 $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=c$ (c sabit) fonksiyonu hem GA-konvekstir hem de GA-konkavdır.

Teorem 3.1.2 Eğer $f: I\to\mathbb{R}$ konveks ise o zaman f fonksiyonu I'nın I° içini kapsayan herhangi bir $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde bir Lipschitz şartını sağlar. Sonuç olarak, f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde mutlak süreklidir ve I° üzerinde süreklidir[52].

Tanım 3.1.3 (Bazı Özel Ortalamalar): Bu başlık altında a,b gibi iki pozitif reel sayı için bazı ortalamalar verilecektir [9, 13].

1. Aritmetik Ortalama:

$$A=A(a,b):=\frac{a+b}{2}$$

2. Geometrik Ortalama:

$$G=G(a,b):=\sqrt{ab}$$

3. Harmonik Ortalama:

$$H=H(a,b):=\frac{2ab}{a+b}$$

4. Logaritmik Ortalama:

$$L=L(a,b):=\begin{cases} a & , \quad a=b \\ \dfrac{b-a}{lnb-lna} & , \quad a\neq b \end{cases}$$

5. Identrik Ortalama:

$$I=I(a,b):=\begin{cases} a & , \quad a=b \\ \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} & , \quad a\neq b \end{cases}$$

6. p-Logaritmik Ortalama:

$$L_p=L_p(a,b):=\begin{cases} a & , \quad a=b \\ \left[\dfrac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}} & , \quad a\neq b \end{cases}, \quad p\neq -1,0$$

7. Seiffert Ortalama:

$$S = S(a,b) := \frac{a-b}{2arcsin\frac{a-b}{a+b}}$$

8. Bencze Ortalama:

$$B = B(a,b) := \frac{a-b}{arctg\frac{a-b}{a+b}}$$

9. Kuadratik Ortalama:

$$K = K(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \qquad a,b \geq 0$$

ortalamaları vardır. Ayrıca, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere L_p nin monoton artan olduğu bilinir ve $L_0 = I$, $L_{-1} = L$ ile gösterilir. Bu ortalamalar arasındaki ilişki literatürde, aşağıdaki gibi yer almaktadır:

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A.$$

Son olarak x,y pozitif sayılarının r-inci kuvvetlerinin genelleştirilmiş logaritmik ortalaması

$$L_r(x,y) = \begin{cases} \frac{r}{r+1}\frac{x^{r+1}-y^{r+1}}{x^r-y^r}, & r \neq 0,-1, x \neq y \\ \frac{x-y}{lnx-lny}, & r = 0, x \neq y \\ xy\frac{lnx-lny}{x-y}, & r = -1, x \neq y \\ x, & x = y \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

3.2. Bazı Eşitsizlikler

Teorem 3.2.1. (Hölder Eşitsizliği) $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ reel sayıların iki n-lisi olsun. Bu takdirde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$p > 1$ ise

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

dir [42].

Teorem 3.2.2 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [42].

Tanım 3.2.1 (Power-Mean Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilir iki fonksiyon olsun. $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.[42]

Tanım 3.2.2 (Hermite-Hadamard eşitsizliği) $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliğine Hermite-Hadamard eşitsizliği denir. Burada f fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir. Klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği bir konveks fonksiyonunun ortalama değerinin hesabını sağlar [45].

İspat: f fonksiyonu I aralığı üzerinde konveks olduğundan her $t \in [0,1]$ için

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında t değişkenine göre integralini alırsak

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \leq \int_0^1 [tf(a)+(1-t)f(b)]dt$$

$$= \int_0^1 tf(a)dt + \int_0^1 (1-t)f(b)dt = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde edilir. Diğer yandan, f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde konveks olduğundan, $t \in [0,1]$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+tb}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[f(ta+(1-t)b) + f\big((1-t)a+tb\big)\right]$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında t değişkenine göre integrali alınırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f(ta+(1-t)b) + f\big((1-t)a+tb\big)\right]dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt + \int_0^1 f\big((1-t)a+tb\big)dt\right]$$

elde edilir. Bu son elde edilen eşitsizliğin sağ tarafında bulunan ikinci integralde $1-t=s$ $(-dt=ds)$ değişken değiştirmesi yapılarak

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt + \int_0^1 f(sa+(1-s)b)ds\right]$$

$$= \int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt$$

bulunur ve buradan

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(ta+(1-t)b)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde edilir. $\int_a^b f(ta+(1-t)b)dx$ integral ifadesinde $ta+(1-t)b = x$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_a^b f(ta+(1-t)b)dx \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

olduğu kolaylıkla görülür. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Tanım 3.2.3 (Üçgen eşitsizliği) Her $x, y \in \mathbb{R}$ sayıları için

$$|x+y| \le |x| + |y|$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizliğe üçgen eşitsizliği denir [42].

Tanım 3.2.4 (Üçgen eşitsizliğinin integral formu) f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \qquad (a < b)$$

eşitsizliğine üçgen eşitsizliğinin integral formu denir [42].

3.3. Türevinin Mutlak Değeri Konveks Olan Mutlak Sürekli Fonksiyonlar İçin İki İntegral Ortalamanın Karşılaştırılması

Bu kısımda özellikle çalışmamızın bulgular kısmında yararlanacağımız, Hwang ve Dragomir [24] makalesinde ortaya çıkardıkları yeni lemma, teoremleri, sonuçları ve önermeleri vereceğiz. Bu çalışmada yazarlar, birinci türevlerinin mutlak değeri konveks olan fonksiyonlar için bazı yeni sonuçlar ortaya çıkarmışlardır. Daha sonra, birinci türevinin mutlak değerinin kuvveti ikinci anlamda s-konveks olduğu durumda uygun versiyonu bulmuşlardır. Elde ettikleri sonuçları uygulayarak, özel ortalamalar için bazı yeni eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Klasik Ostrowski tipli integral eşitsizliği, bir iç noktada değerlendirilen bir fonksiyon ile bir aralık boyunca fonksiyonun ortalaması arasındaki fark için bir sınır belirtir. Yani, her $x \in [a, b]$,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f(x)\right| \le \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\|f'\|_\infty$$

dir. Burada $f' \in L_\infty(a,b)$, yani

$$\|f'\|_\infty = ess \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)| < \infty$$

ve $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığı üzerinde türevlenebilen bir fonksiyondur. Burada, $\frac{1}{4}$ sabiti daha küçük bir sabit ile değiştirilemeyecek anlamda nettir.

Teorem 3.3.1 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f' \in L_\infty[a,b]$ özelliğine sahip mutlak sürekli fonksiyon olsun. O zaman $a \le x < y \le b$ için

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du - \frac{1}{y-x}\int_x^y f(u)du\right| \le \left\{\frac{1}{4} + \left[\frac{\frac{a+b}{2} - \frac{x+y}{2}}{b-a-y+x}\right]^2\right\}(b-a-y+x)\|f'\|_\infty$$
$$\le \frac{1}{2}(b-a-y+x)\|f'\|_\infty$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\frac{1}{4}$ sabiti birinci eşitsizlikte en iyi olası sabittir ve $\frac{1}{2}$ ikinci eşitsizlikte en iyidir.

Genellikle K_s^2 ile gösterilen ikinci anlamda s-konveks fonksiyonların sınıfı Hudzik ve Maligranda [22] tarafından aşağıdaki yöntemle tanımlanmıştır. Eğer her $x, y \in [0,\infty), \alpha, \beta \ge 0, \alpha + \beta = 1$ ve bazı sabit $s \in (0,1]$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \le \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

ise $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ikinci anlamdaki s-konveks fonksiyon olarak adlandırılır. Örneğin, $f(t) = t^s, s \in (0,1]$ şeklinde tanımlanan $f:[0,1] \to [0,1]$ fonksiyonu ikinci anlamda bir s-konveks fonksiyondur. $s = 1$ için kolayca görülebilir ki, s-konveksliği $[0,\infty)$ üzerinde tanımlanan fonksiyonlar adi konveksliğine indirgenir.

[17]'de, Dragomir ve Fitzpatrick ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar için geçerli olan Hadamard'ın eşitsizliğinin yeni bir versiyonunu ispatladılar. $a < b$ olmak üzere

$a, b \in [0, \infty)$ ve $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ ikinci anlamda s-konveks fonksiyon olsun. Eğer $f \in L[a, b]$ ise o zaman aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{s+1}.$$

Bu son ifadenin ikinci eşitsizliğindeki sabit en iyi olası sabittir.

Son zamanlarda, Alomari ve arkadaşları [4] tam değerdeki türevleri ikinci anlamda s-konveks olan fonksiyonların sınıfı için bazı Ostrowski tipli eşitsizlikleri sunmuşlardır.

Bu bölümde kolaylık sağlamak için,

$$A = \frac{(x-y)(b-a-y+x)}{b-a}, \quad B = \frac{(x-a)(y-x)}{b-a},$$

$$I(a,b,x,y) = \frac{2(x-a)^2}{b-a} + \frac{6(x-a)^2(y-x)}{(b-a)(b-a-y+x)} - \frac{2(x-a)^3(y-x)}{(b-a)(b-a-y+x)^2}$$
$$- \frac{3(x-a)(y-x)}{b-a} + \frac{(y-x)(b-a-y+x)}{b-a},$$

$$J(a,b,x,y) = \frac{2(x-a)^3(y-x)}{(b-a)(b-a-y+x)^2} - \frac{3(x-a)^2(y-x)}{b-a}$$
$$+ \frac{2(b-a-y+x)(y-x)}{b-a} - \frac{2(b-y)^2}{b-a},$$

ile göstereceğiz, burada $a \le x < y \le b$ dir.

Lemma 3.3.1 [24] $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ bir mutlak sürekli fonksiyon ve $a \le x < y \le b$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du - \frac{1}{y-x}\int_x^y f(u)du = \frac{-(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 tf'\big((1-t)a+tx\big)dt$$
$$+ \int_0^1 \left(\frac{(y-x)(b-a-y+x)}{b-a}t - \frac{(x-a)(y-x)}{b-a}\right) f'\big((1-t)a+tx\big)dt$$
$$+ \frac{(b-y)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)f'\big((1-t)y+tb\big)dt.$$

Teorem 3.3.2 [24]$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bir mutlak sürekli fonksiyon ve $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde konveks olsun. O zaman $a\le x<y\le b$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du-\frac{1}{y-x}\int_x^y f(u)du\right|$$

$$\le\frac{1}{6}\left[\frac{(x-a)^2}{b-a}|f'(a)|+I(a,b,x,y)|f'(x)|+J(a,b,x,y)|f'(y)|+\frac{(b-y)^2}{b-a}|f'(b)|\right]$$

Teorem 3.3.3 $f:I\subseteq[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $f'\in L[a,b]$ olmak üzere I° $(I\ nın\ içi)$ üzerinde mutlak sürekli olsun, burada $a<b$, $a,b\in I$ dir. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $f'\in L_\infty[a,b]$ olmak üzere bir sabit bir $s\in(0,1]$ için $[a,b]$ aralığı üzerinde ikinci anlamda s-konveks ise o zaman $a\le x<y\le b$ için

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du-\frac{1}{y-x}\int_x^y f(u)du\right|$$

$$\le\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{2}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\|f'\|_\infty\left[\frac{(x-a)^2}{b-a}+\left(\frac{B^{p+1}+(A-B)^{p+1}}{A}\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{(b-y)^2}{b-a}\right]$$

eşitsizliği elde edilir [24].

Teorem 3.3.4 $f:I\subseteq[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $f'\in L[a,b]$ olmak üzere I aralığı üzerinde mutlak sürekli olsun, burada $a<b$, $a,b\in I$ dir. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $f'\in L_\infty[a,b]$ olmak üzere bir sabit bir $s\in(0,1]$ için $[a,b]$ üzerinde ikinci anlamda s-konkav ise o zaman $a\le x<y\le b$ için

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du-\frac{1}{y-x}\int_x^y f(u)du\right|$$

$$\le\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}2^{\frac{(s-1)}{q}}\left[\frac{(x-a)^2}{b-a}\left|f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\right|\right.$$

$$\left.+\left(\frac{B^{p+1}+(A-B)^{p+1}}{A}\right)^{\frac{1}{p}}\left|f'\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|+\frac{(b-y)^2}{b-a}\left|f'\left(\frac{y+b}{2}\right)\right|\right]$$

eşitsizliği elde edilir [24]. Teorem 3.3.4'de $s=1$ için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.1 : $I \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f' \in L[a,b]$ olmak üzere I üzerinde mutlak sürekli olsun, burada $a < b$, $a,b \in I$ dir. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $p,q > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve olmak üzere $[a,b]$ üzerinde konkav ise o zaman $a \le x < y \le b$ için

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{y-x}\int_x^y f(u)du\right|$$

$$\le \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{(x-a)^2}{b-a}\left|f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\right| + \left(\frac{B^{p+1}+(A-B)^{p+1}}{A}\right)^{\frac{1}{p}}\left|f'\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|\right.$$

$$\left. + \frac{(b-y)^2}{b-a}\left|f'\left(\frac{y+b}{2}\right)\right|\right]$$

eşitsizliği elde edilir [24].

Önerme 3.3.1 $a,b,x,y \in \mathbb{R}, 0 < a \le x < y \le b$ ve $p \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$ olsun. O zaman

$$\left|L_p^p(a,b) - L_p^p(x,y)\right|$$

$$\le \frac{|p|}{6}\left[\frac{(x-a)^2a^{p-1}}{b-a} + I(a,b,x,y)x^{p-1} + J(a,b,x,y)y^{p-1} + \frac{(b-y)^2b^{p-1}}{b-a}\right]$$

elde edilir [24].

Önerme 3.3.2 Kabul edelim ki $a,b,x,y \in \mathbb{R}\ ve\ 0 < a \le x < y \le b$ olsun. O zaman

$$|L^{-1}(a,b) - L^{-1}(x,y)| \le \frac{1}{6}\left[\frac{(x-a)^2}{(b-a)a^2} + \frac{I(a,b,x,y)}{x^2} + \frac{J(a,b,x,y)}{y^2} + \frac{(b-y)^2}{(b-a)b^2}\right]$$

elde edilir [24].

Önerme 3.3.3 Kabul edelim ki $a,b,x,y \in \mathbb{R}\ ve\ 0 < a \le x < y \le b$ olsun. O zaman

$$\left|ln\left[\frac{I(a,b)}{I(x,y)}\right]\right| \le \frac{1}{6}\left[\frac{(x-a)^2}{(b-a)a} + \frac{I(a,b,x,y)}{x} + \frac{J(a,b,x,y)}{y} + \frac{(b-y)^2}{(b-a)b}\right].$$

dir [24].

Önerme 3.3.4 Kabul edelim ki $a,b,x,y \in \mathbb{R}\ ve\ 0 < a \le x < y \le b < 1, 0 < s \le 1$ ve $p,q > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. O zaman

$$\left|L_{(s+q)/q}^{(s+q)/q}(a,b)-L_{(s+q)/q}^{(s+q)/q}(x,y)\right|$$

$$\leq \frac{s+q}{q}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{2}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2}{b-a}+\left(\frac{B^{p+1}+(A-B)^{p+1}}{A}\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{(b-y)^2}{b-a}\right]$$

elde edilir [24].

Önerme 3.3.5 Kabul edelim ki $a,b,x,y\in\mathbb{R}, 0<a\leq x<y\leq b<1, 0<\alpha\leq 1$ ve $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. O zaman

$$\left|L_{(\alpha+q)/q}^{(\alpha+q)/q}(a,b)-L_{(\alpha+q)/q}^{(\alpha+q)/q}(x,y)\right|$$

$$\leq \frac{\alpha+q}{q}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{(x-a)^2}{b-a}\left|f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\right|+\left(\frac{B^{p+1}+(A-B)^{p+1}}{A}\right)^{\frac{1}{p}}\left|f'\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|\right.$$
$$\left.+\frac{(b-y)^2}{b-a}\left|f'\left(\frac{y+b}{2}\right)\right|\right]$$

elde edilir [24].

4. BULGULAR

Bu bölümde ilk olarak Geometrik-Aritmetik (GA) konveks fonksiyonlar için yeni lemmalar ve teoremler elde edilmiş, bulunan bazı sonuçlar çeşitli ortalamalara uygulanmıştır. Daha sonra hem Hölder hem de Power-Mean integral eşitsizliği ile birlikte bir integral eşitliği kullanılarak n-kere diferansiyellenebilen konveks ve konkav fonksiyonlar için bir kaç yeni eşitsizlik elde edilmiştir. Bu bölümde elde edilen bulguların bir kısmı uluslararası konferansta bildiri olarak sunulmuş, diğer bir kısmı ise uluslararası dergide yayımlanmıştır.

4.1 $|f'|$ Fonksiyonunun Geometrik Aritmetik (GA)-Konveks Olması Durumu

$f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ mutlak sürekli bir fonksiyon, $a\leq x<y\leq b$ olsun. $Ç_{x,y}:[a,b]\subseteq\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ çekirdek fonksiyonu

$$Ç_{x,y}(s)=\begin{cases}\dfrac{lna-lns}{lnb-lna} & , \quad s\in[a,x]\\ \dfrac{lns-lnx}{lny-lnx}+\dfrac{lna-lns}{lnb-lna} & , \quad s\in(x,y)\\ \dfrac{lnb-lns}{lnb-lna} & , \quad s\in[y,b]\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Aşağıdaki özdeşliğin ispatında çekirdek fonksiyonu kullanılacaktır.

Lemma 4.1.1 $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ mutlak sürekli bir fonksiyon $a\leq x<y\leq b$ ve $a,b\in\mathbb{R}^+$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b\frac{f(u)}{u}du-\frac{1}{lny-lnx}\int_x^y\frac{f(u)}{u}du=-\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\int_0^1 tf'(a^{1-t}x^t)a^{1-t}x^tdt$$

$$+\int_0^1\left(\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}t-\frac{(lnx-lna)(lny-lnx)}{lnb-lna}\right)f'(x^{1-t}y^t)x^{1-t}y^tdt$$

$$+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\int_0^1(1-t)f(y^{1-t}b^t)y^{1-t}b^tdt$$

İspat. $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ mutlak sürekli bir fonksiyon, $Ç_{x,y}:[a,b]\subseteq\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ çekirdek fonksiyonu, $a\leq x<y\leq b$ ve $a,b\in\mathbb{R}^+$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b \frac{f(u)}{u}du-\frac{1}{lny-lnx}\int_x^y \frac{f(u)}{u}du=\int_a^b Ç_{x,y}(s)f'(s)ds$$

eşitliğinden yararlanarak uygun integral alma ve değişken değiştirme işlemleri ile

$$I_1=\int_0^1 tf'(a^{1-t}x^t)a^{1-t}x^t dt=\frac{1}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\int_0^1 td\big(f(a^{1-t}x^t)\big)$$

$$=\frac{1}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left[f(x)-\int_0^1 f(a^{1-t}x^t)dt\right]$$

$$=\frac{1}{lnx-lna}f(x)-\frac{1}{(lnx-lna)^2}\int_a^x \frac{f(u)}{u}du$$

$$I_2=\int_0^1\left(\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}t-\frac{(lnx-lna)(lny-lnx)}{lnb-lna}\right)f'(x^{1-t}y^t)x^{1-t}y^t dt$$

$$=\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\int_0^1\left(\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}t-\frac{(lnx-lna)(lny-lnx)}{lnb-lna}\right)d\big(f(x^{1-t}y^t)\big)$$

$$=\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left[\frac{(lny-lnx)(lnb-lny)}{lnb-lna}f(y)+\frac{(lnx-lna)(lny-lnx)}{lnb-lna}f(x)\right.$$

$$\left.-\int_0^1 f(x^{1-t}y^t)\left(\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}\right)dt\right]$$

$$=\frac{1}{lny-lnx}\left[\frac{(lny-lnx)(lnb-lny)}{lnb-lna}f(y)+\frac{(lnx-lna)(lny-lnx)}{lnb-lna}f(x)\right.$$

$$\left.-\int_x^y f(u)\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}\frac{du}{u}\frac{1}{lny-lnx}\right]$$

$$=\frac{lnb-lny}{lnb-lna}f(y)+\frac{lnx-lna}{lnb-lna}f(x)-\frac{1}{lny-lnx}\int_x^y \frac{f(u)}{u}du+\frac{1}{lnb-lna}\int_x^y \frac{f(u)}{u}du$$

$$I_3=\int_0^1 (1-t)f(y^{1-t}b^t)y^{1-t}b^t dt=\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\int_0^1 (1-t)d\big(f(y^{1-t}b^t)\big)$$

$$= \frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\left[-f(y) + \int_0^1 f(y^{1-t}b^t)dt\right]$$

$$= -\frac{1}{lnb - lny} f(y) + \frac{1}{(lnb - lny)^2}\int_y^b \frac{f(u)}{u}du$$

bulunur. Yukarıda elde edilenlerden I_1 ifadesi $-\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}$ ile ve I_3 ifadesi ise $\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$-\frac{(lnx - lna)^2}{lnb - lna} I_1 + I_2 + \frac{(lnb - lny)^2}{lnb - lna} I_3 = -\frac{1}{lny - lnx}\int_x^y \frac{f(u)}{u}du + \frac{1}{lnb - lna}\int_a^b \frac{f(u)}{u}du$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.1 $f: [a, b] \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mutlak sürekli bir fonksiyon ve $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde GA-konveks fonksiyon olsun. O zaman $a \leq x < y \leq b$ için

$$\left|\frac{1}{lnb - lna}\int_a^b \frac{f(u)}{u}du - \frac{1}{lny - lnx}\int_x^y \frac{f(u)}{u}du\right|$$

$$\leq \left[\frac{x + a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} - \frac{2(x - a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]|f'(a)| + I(a, b, x, y)|f'(x)| + J(a, b, x, y)|f'(y)|$$

$$+\left[\frac{y + b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{2(y - b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(b)| \tag{4.1.1}$$

$$\leq \|f'\|_\infty \left\{\left[\frac{x+a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} - \frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right] + I(a, b, x, y) + J(a, b, x, y) + \left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu teoremin ispatında ve bundan sonra kolaylık sağlaması için,

$$A = \frac{(lny - lnx)(lnb - lna - lny + lnx)}{lnb - lna} \quad ve \quad B = \frac{(lnx - lna)(lny - lnx)}{lnb - lna}$$

$$I(a,b,x,y)=x\frac{ln\left(\frac{x}{a}\right)-2}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}-\frac{Bx}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{y(A-B)-x(A+B)}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$-2A\frac{(x+y)}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}+2x\frac{(A-B)}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{4Ax}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}$$

$$J(a,b,x,y)=\frac{Ay-Bx}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{Bx+By-2Ay}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}+2A\frac{x+y}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{2Bx}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}$$

$$-\frac{4Ax}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-y\frac{ln\left(\frac{b}{y}\right)+2}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(b-y)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}$$

gösterimleri kullanılmıştır.

İspat: Lemma 4.1.1'den

$$\left|\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b\frac{f(u)}{u}du-\frac{1}{lny-lnx}\int_x^y\frac{f(u)}{u}du\right|\leq\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\int_0^1 t|f'(a^{1-t}x^t)|\,a^{1-t}x^tdt$$

$$+\int_0^1\left|\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}t-\frac{(lnx-lna)(lny-lnx)}{lnb-lna}\right||f'(x^{1-t}y^t)|\,x^{1-t}y^tdt$$

$$+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\int_0^1(1-t)|f'(y^{1-t}b^t)|y^{1-t}b^tdt \tag{4.1.2}$$

elde edilir. $|f'|$'nün Geometrik-Aritmetik (GA)-konveksliğini kullanarak

$$\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\int_0^1 t|f'(a^{1-t}x^t)|\,a^{1-t}x^tdt\leq\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\int_0^1 t[(1-t)|f'(a)|+t|f'(x)|]\,a^{1-t}x^tdt$$

$$=\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\left[|f'(a)|\int_0^1 t(1-t)a^{1-t}x^tdt+|f'(x)|\int_0^1 t^2a^{1-t}x^tdt\right]$$

$$=\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\left[|f'(a)|\underbrace{\int_0^1 ta^{1-t}x^tdt}_{I}+\{|f'(x)|-|f'(a)|\}\underbrace{\int_0^1 t^2a^{1-t}x^tdt}_{II}\right] \tag{4.1.3}$$

yazılır. I ve II integralleri uygun kısmi integrasyon yöntemi ile hesaplanırsa

$$I=\int_0^1 t a^{1-t}x^t dt = a\left\{\frac{t}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{1}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t dt\right\}$$

$$=a\left\{\frac{t}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t\Bigg|_0^1-\frac{1}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\int_0^1\left(\frac{x}{a}\right)^t dt\right\}=a\left\{\frac{t}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t-\frac{1}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t\right\}\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{x}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}-\frac{x}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}+\frac{a}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)} \tag{4.1.4}$$

$$II=\int_0^1 t^2 a^{1-t}x^t dt = a\int_0^1 t^2\left(\frac{x}{a}\right)^t dt = a\left\{\frac{t^2}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t\Bigg|_0^1-\frac{2}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\int_0^1 t\left(\frac{x}{a}\right)^t dt\right\}$$

$$=a\left\{\frac{t^2}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t\Bigg|_0^1-\frac{2}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left[\frac{t}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t\Bigg|_0^1-\frac{1}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\int_0^1\left(\frac{x}{a}\right)^t dt\right]\right\}$$

$$=a\left\{\frac{t^2}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t\Bigg|_0^1-\frac{2t}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}\left(\frac{x}{a}\right)^t\Bigg|_0^1+\frac{2}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}\int_0^1\left(\frac{x}{a}\right)^t dt\right\}$$

$$=\frac{x}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}-\frac{2x}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}+\frac{2x}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)}-\frac{2a}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)} \tag{4.1.5}$$

bulunur. (4.1.4) ve (4.1.5) değerleri (4.1.3)'de yerlerine yazılırsa

$$\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\left\{|f'(a)|\left[\frac{x}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}-\frac{x}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}+\frac{a}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}\right]\right.$$
$$\left.+\{|f'(x)|-|f'(a)|\}\left[\frac{x}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}-\frac{2x}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}+\frac{2x}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)}-\frac{2a}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)}\right]\right\}$$

$$=\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\left\{|f'(a)|\left[\frac{x}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}-\frac{x}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}+\frac{a}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}-\frac{x}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}+\frac{2x}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}-\frac{2x}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2a}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)}\right]+|f'(x)|\left[\frac{x}{ln\left(\frac{x}{a}\right)}-\frac{2x}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)}+\frac{2x}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)}-\frac{2a}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)}\right]\right\}$$

$$= \frac{(lnx - lna)^2}{lnb - lna}\left\{|f'(a)|\left[\frac{a}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)} + \frac{x}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)} - \frac{2x}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)} + \frac{2a}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)}\right]\right.$$

$$\left. + |f'(x)|\left[\frac{x}{ln\left(\frac{x}{a}\right)} - \frac{2x}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)} + \frac{2x}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)} - \frac{2a}{ln^3\left(\frac{x}{a}\right)}\right]\right\}$$

$$= \left[\frac{a}{ln(\frac{b}{a})} + \frac{x}{ln(\frac{b}{a})} - \frac{2x}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln(\frac{b}{a})} + \frac{2a}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln(\frac{b}{a})}\right]|f'(a)|$$

$$+ \left[\frac{xln\left(\frac{x}{a}\right)}{ln(\frac{b}{a})} - \frac{2x}{ln(\frac{b}{a})} + \frac{2x}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln(\frac{b}{a})} - \frac{2a}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln(\frac{b}{a})}\right]|f'(x)|$$

$$= \left[\frac{x + a}{ln(\frac{b}{a})} - \frac{2(x - a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln(\frac{b}{a})}\right]|f'(a)| + \left[x\frac{ln\left(\frac{x}{a}\right) - 2}{ln(\frac{b}{a})} + \frac{2(x - a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln(\frac{b}{a})}\right]|f'(x)| \qquad (4.1.6)$$

elde edilir. Şimdi ise

$$\int_0^1 \left|\frac{(lny - lnx)(lnb - lna - lny + lnx)}{lnb - lna}t - \frac{(lnx - lna)(lny - lnx)}{lnb - lna}\right| |f'(x^{1-t}y^t)|x^{1-t}y^t dt \qquad (4.1.7)$$

integralini hesaplayalım. $|f'|$'nün GA-konveksliğini kullanarak (4.1.7) integralini

$$\int_0^1 \left|\frac{(lny - lnx)(lnb - lna - lny + lnx)}{lnb - lna}t - \frac{(lnx - lna)(lny - lnx)}{lnb - lna}\right| |f'(x^{1-t}y^t)|x^{1-t}y^t dt$$

$$\leq \int_0^1 |At - B|[(1 - t)|f'(x)| + t|f'(y)|]x^{1-t}y^t dt \qquad (4.1.8)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradaki (4.1.8) ile gösterilen son integralde mutlak değerin

$$|At - B| = \begin{cases} At - B, & t \geq \frac{B}{A} \\ B - At, & t < \frac{B}{A} \end{cases}$$

şeklindeki tanımından yararlanılırsa

$$\int_0^1 |At-B|[(1-t)|f'(x)|+t|f'(y)|]x^{1-t}y^t dt$$

$$=\int_0^{\frac{B}{A}} (B-At)[(1-t)|f'(x)|+t|f'(y)|]x^{1-t}y^t dt$$

$$+\int_{\frac{B}{A}}^1 (At-B)[(1-t)|f'(x)|+t|f'(y)|]x^{1-t}y^t dt$$

$$=\int_0^{\frac{B}{A}} (B-At)(1-t)|f'(x)|x^{1-t}y^t dt+\int_0^{\frac{B}{A}} (B-At)t|f'(y)|x^{1-t}y^t dt$$

$$+\int_{\frac{B}{A}}^1 (At-B)(1-t)|f'(x)|x^{1-t}y^t dt+\int_{\frac{B}{A}}^1 (At-B)t|f'(y)|x^{1-t}y^t dt$$

$$=Bx|f'(x)|\underbrace{\int_0^{\frac{B}{A}} (1-t)\left(\frac{y}{x}\right)^t dt}_{I}-Ax|f'(x)|\underbrace{\int_0^{\frac{B}{A}} (t-t^2)\left(\frac{y}{x}\right)^t dt}_{II}$$

$$+Bx|f'(y)|\underbrace{\int_0^{\frac{B}{A}} t\left(\frac{y}{x}\right)^t dt}_{III}-Ax|f'(y)|\underbrace{\int_0^{\frac{B}{A}} t^2\left(\frac{y}{x}\right)^t dt}_{IV}$$

$$+Ax|f'(x)|\underbrace{\int_{\frac{B}{A}}^1 (t-t^2)\left(\frac{y}{x}\right)^t dt}_{V}-Bx|f'(x)|\underbrace{\int_{\frac{B}{A}}^1 (1-t)\left(\frac{y}{x}\right)^t dt}_{VI}$$

$$+Ax|f'(y)|\underbrace{\int_{\frac{B}{A}}^1 t^2\left(\frac{y}{x}\right)^t dt}_{VII}-Bx|f'(y)|\underbrace{\int_{\frac{B}{A}}^1 t\left(\frac{y}{x}\right)^t dt}_{VIII} \qquad (4.1.9)$$

yazılabilir. I-VIII integralleri için uygun değişken değiştirme ya da kısmi integrasyon yöntemi uygulanarak

$$I=\int_0^{\frac{B}{A}} (1-t)\left(\frac{y}{x}\right)^t dt=(1-t)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\Bigg|_0^{\frac{B}{A}}+\int_0^{\frac{B}{A}}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t dt$$

$$=\left(1-\frac{B}{A}\right)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$II=\int_0^{\frac{B}{A}}(t-t^2)\left(\frac{y}{x}\right)^t dt=(t-t^2)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\Bigg|_0^{\frac{B}{A}}-\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\int_0^{\frac{B}{A}}(1-2t)\left(\frac{y}{x}\right)^t dt$$

$$=(t-t^2)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\Bigg|_0^{\frac{B}{A}}-\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left[(1-2t)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\Bigg|_0^{\frac{B}{A}}+2\int_0^{\frac{B}{A}}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t dt\right]$$

$$=\left\{(t-t^2)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t-(1-2t)\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t-2\frac{1}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\right\}\Bigg|_0^{\frac{B}{A}}$$

$$=\left(\frac{B}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}-\left(1-2\frac{B}{A}\right)\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$III=\int_0^{\frac{B}{A}}t\left(\frac{y}{x}\right)^t dt=t\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\Bigg|_0^{\frac{B}{A}}-\int_0^{\frac{B}{A}}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t dt$$

$$=\frac{B}{A}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$IV=\int_0^{\frac{B}{A}}t^2\left(\frac{y}{x}\right)^t dt=t^2\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\Bigg|_0^{\frac{B}{A}}-\frac{2}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\int_0^{\frac{B}{A}}t\left(\frac{y}{x}\right)^t dt$$

$$=t^2\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\Bigg|_0^{\frac{B}{A}}-\frac{2}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left[t\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\Bigg|_0^{\frac{B}{A}}-\int_0^{\frac{B}{A}}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t dt\right]$$

$$=\frac{B^2}{A^2}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-2\frac{B}{A}\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$V=\int_{\frac{B}{A}}^{1}(t-t^2)\left(\frac{y}{x}\right)^t dt=\left\{\frac{(t-t^2)}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t-(1-2t)\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t-2\frac{1}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\right\}\Bigg|_{\frac{B}{A}}^{1}$$

$$=\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{\left(\frac{B}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right)}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{\left(1-2\frac{B}{A}\right)}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}$$

$$VI=\int_{\frac{B}{A}}^{1}(1-t)\left(\frac{y}{x}\right)^t dt=\left[(1-t)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\right]\Bigg|_{\frac{B}{A}}^{1}$$

$$=\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\left(1-\frac{B}{A}\right)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}$$

$$VII=\int_{\frac{B}{A}}^{1}t^2\left(\frac{y}{x}\right)^t dt=\left\{t^2\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t-2t\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t+2\frac{1}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\right\}\Bigg|_{\frac{B}{A}}^{1}$$

$$=\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{2}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{\frac{B^2}{A^2}}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{2\frac{B}{A}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}$$

$$VIII=\int_{\frac{B}{A}}^{1}t\left(\frac{y}{x}\right)^t dt=\left[t\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^t\right]\Bigg|_{\frac{B}{A}}^{1}$$

$$=\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{B}{A}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}$$

elde edilir. Bulunan I-VIII integralleri (4.1.9)’da yerine yazılırsa

$$\int_0^1|At-B|[(1-t)|f'(x)|+t|f'(y)|]x^{1-t}y^t dt=$$

$$=Bx|f'(x)|\left[\left(1-\frac{B}{A}\right)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\right]-$$

$$-Ax|f'(x)|\left[\left(\frac{B}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right)\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}-\left(1-2\frac{B}{A}\right)\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\right]$$

$$+Bx|f'(y)|\left[\frac{B}{A}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\right]-$$

$$-Ax|f'(y)|\left[\frac{B^2}{A^2}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-2\frac{B}{A}\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\right]+$$

$$+Ax|f'(x)|\left[\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{\left(\frac{B}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{\left(1-2\frac{B}{A}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\right]$$

$$-Bx|f'(x)|\left[\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\left(1-\frac{B}{A}\right)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right]$$

$$+Ax|f'(y)|\left[\frac{\frac{y}{x}}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{\frac{y}{x}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{2\frac{y}{x}}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{\frac{B^2}{A^2}}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+2\frac{\frac{B}{A}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\right]$$

$$-Bx|f'(y)|\left[\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{B}{A}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right]$$

$$=Bx|f'(x)|\left[\left(1-\frac{B}{A}\right)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{B}{A}\right)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right]+$$

$$+Ax|f'(x)|\left[\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\left(\frac{B}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right.$$

$$+\left(1-2\frac{B}{A}\right)\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\left(\frac{B}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\left.+\left(1-2\frac{B}{A}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\right]+$$

$$+Bx|f'(y)|\left[\frac{\frac{B}{A}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{\frac{y}{x}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{\frac{B}{A}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\right]$$

$$+Ax|f'(y)|\left[\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{2}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{B^2}{A^2}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right]$$

$$+\frac{2\frac{B}{A}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{B^2}{A^2}\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{2\frac{B}{A}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$=Bx|f'(x)|\left[2\left(1-\frac{B}{A}\right)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}\right]+$$

$$+Ax|f'(x)|\left[\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-2\left(\frac{B}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right)\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right.$$

$$\left.+2\left(1-2\frac{B}{A}\right)\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{4}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\right]+$$

$$+Bx|f'(y)|\left[2\frac{B}{A}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{2}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}\right]+$$

$$+Ax|f'(y)|\left[\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-\frac{2}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\frac{y}{x}-2\frac{B^2}{A^2}\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right.$$

$$\left.+4\frac{B}{A}\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{4}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\right]$$

$$=\left[-\frac{Bx}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{y(A-B)-x(A+B)}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-\frac{2A(x+y)}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}+2x\frac{(A-B)}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{4Ax\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\right]|f'(x)|$$

$$+\left[\frac{Ay-Bx}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{Bx+By-2Ay}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}+2A\frac{x+y}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{2Bx}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{4Ax}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right]|f'(y)| \quad (4.1.10)$$

olur. Şimdi (4.1.2) eşitsizliğine ait

$$\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\int_0^1(1-t)|f'(y^{1-t}b^t)|y^{1-t}b^t dt \quad (4.1.11)$$

integralini hesaplayalım. Söz konusu integrali $|f'|$'nün GA-konveksliğini kullanarak

$$\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\int_0^1(1-t)|f'(y^{1-t}b^t)|y^{1-t}b^t dt$$

$$\leq \frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\int_0^1 [(1-t)^2|f'(y)|+t(1-t)|f'(b)|]y^{1-t}b^t dt$$

$$=\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\left[y|f'(y)|\int_0^1 (1-t)^2\left(\frac{b}{y}\right)^t dt+y|f'(b)|\int_0^1 t(1-t)\left(\frac{b}{y}\right)^t dt\right]$$

$$=\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\left\{y|f'(y)|\left[\underbrace{\int_0^1 \left(\frac{b}{y}\right)^t dt}_{I}-2\underbrace{\int_0^1 t\left(\frac{b}{y}\right)^t dt}_{II}+\underbrace{\int_0^1 t^2\left(\frac{b}{y}\right)^t dt}_{III}\right]\right.$$

$$\left.+y|f'(b)|\left[\underbrace{\int_0^1 t\left(\frac{b}{y}\right)^t dt}_{IV}-\underbrace{\int_0^1 t^2\left(\frac{b}{y}\right)^t dt}_{V}\right]\right\} \qquad (4.1.12)$$

şeklinde yazabiliriz. Daha önce almış olduğumuz integrallere benzer olarak kısmi integrasyon uygularsak I-V integralleri için

$$I=\int_0^1\left(\frac{b}{y}\right)^t dt=\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\left(\frac{b}{y}\right)^t\Bigg|_0^1=\frac{b}{y}\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}$$

$$II=IV=\int_0^1 t\left(\frac{b}{y}\right)^t dt=t\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\left(\frac{b}{y}\right)^t\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\left(\frac{b}{y}\right)^t dt$$

$$=\frac{b}{y}\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{b}{y}\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}$$

$$III=V=\int_0^1 t^2\left(\frac{b}{y}\right)^t dt=t^2\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\left(\frac{b}{y}\right)^t\Bigg|_0^1-\int_0^1 2t\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\left(\frac{b}{y}\right)^t dt$$

$$=\frac{b}{y}\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-2\frac{b}{y}\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+2\frac{b}{y}\frac{1}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{2}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}$$

bulunur. I-V integrallerini (4.1.12) eşitsizliğinin sağ tarafında yerine yazılırsa

$$\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\int_0^1(1-t)|f'(y^{1-t}b^t)|y^{1-t}b^t dt$$

$$\leq\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\left\{y|f'(y)|\left[\frac{b}{y}\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-2\frac{b}{y}\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{2\frac{b}{y}}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}\right.\right.$$

$$\left.-2\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{b}{y}\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-2\frac{b}{y}\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+2\frac{b}{y}\frac{1}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{2}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}\right]$$

$$+y|f'(b)|\left[\frac{b}{y}\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{b}{y}\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{b}{y}\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}+2\frac{b}{y}\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}\right.$$

$$\left.\left.-2\frac{b}{y}\frac{1}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}\right]\right\}$$

$$=\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\left\{y|f'(y)|\left[-\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-2\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+2\frac{b}{y}\frac{1}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{2}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}\right]\right.$$

$$\left.+y|f'(b)|\left[\frac{b}{y}\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}-2\frac{b}{y}\frac{1}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{2}{ln^3\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}\right]\right\}$$

$$=\frac{lnb-lny}{lnb-lna}\left\{y|f'(y)|\left[-1-2\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}+2\frac{b}{y}\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{2}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}\right]\right.$$

$$\left.+y|f'(b)|\left[\frac{b}{y}\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-2\frac{b}{y}\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{2}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]\right\}$$

$$=\frac{lnb-lny}{lnb-lna}\left\{|f'(y)|\left[-y-\frac{2y}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{2b}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{2y}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}\right]\right.$$

$$\left.+|f'(b)|\left[\frac{b}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{2b}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{2y}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{y}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]\right\}$$

$$=\frac{ln\frac{b}{y}}{ln\frac{b}{a}}\left\{\left[-y-\frac{2y}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{2b}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{2y}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(y)|\right.$$

$$\left.+\left[\frac{b}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}-\frac{2b}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{2y}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}+\frac{y}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(b)|\right\}$$

$$=\left[-y\frac{ln\frac{b}{y}}{ln\frac{b}{a}}-\frac{2y}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\frac{ln\frac{b}{y}}{ln\frac{b}{a}}+\frac{2b}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}\frac{ln\frac{b}{y}}{ln\frac{b}{a}}-\frac{2y}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}\frac{ln\frac{b}{y}}{ln\frac{b}{a}}\right]|f'(y)|$$

$$+\left[\frac{b}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\frac{ln\frac{b}{y}}{ln\frac{b}{a}}-\frac{2b}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}\frac{ln\frac{b}{y}}{ln\frac{b}{a}}+\frac{2y}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)}\frac{ln\frac{b}{y}}{ln\frac{b}{a}}+\frac{y}{ln\left(\frac{b}{y}\right)}\frac{ln\frac{b}{y}}{ln\frac{b}{a}}\right]|f'(b)|$$

$$=\left[\frac{2(b-y)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}-y\frac{ln(\frac{b}{y})+2}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]|f'(y)|+\left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(b)| \quad (4.1.13)$$

elde edilir. (4.1.6), (4.1.10) ve (4.1.13) ifadeleri (4.1.2)'de yerine yazılırsa

$$\left|\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b\frac{f(u)}{u}du-\frac{1}{lny-lnx}\int_x^y\frac{f(u)}{u}du\right|$$

$$\leq\left[\frac{x+a}{ln(\frac{b}{a})}-\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln(\frac{b}{a})}\right]|f'(a)|+\left[x\frac{ln\left(\frac{x}{a}\right)-2}{ln(\frac{b}{a})}+\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln(\frac{b}{a})}\right]|f'(x)|$$

$$+\left[-\frac{Bx}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{y(A-B)-x(A+B)}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-2A\frac{(x+y)}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}+2x\frac{(A-B)}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{4Ax}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right]|f'(x)|$$

$$+\left[\frac{Ay-Bx}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{Bx+By-2Ay}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}+2A\frac{x+y}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{2Bx}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{4Ax}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right]|f'(y)|$$

$$+\left[-y\frac{ln(\frac{b}{y})+2}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(b-y)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(y)|+\left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(b)|$$

$$=\left[\frac{x+a}{ln(\frac{b}{a})}-\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln(\frac{b}{a})}\right]|f'(a)|$$

$$+\left[x\frac{ln\left(\frac{x}{a}\right)-2}{ln(\frac{b}{a})}+\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln(\frac{b}{a})}-\frac{Bx}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{y(A-B)-x(A+B)}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}-2A\frac{(x+y)}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\right.$$

$$\left.+2x\frac{(A-B)}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}+\frac{4Ax}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}\right]|f'(x)|$$

$$+\left[\frac{Ay-Bx}{ln\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{Bx+By-2Ay}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}+2A\frac{x+y}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}+\frac{2Bx}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-\frac{4Ax}{ln^3\left(\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{B}{A}}-y\frac{ln(\frac{b}{y})+2}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{2(b-y)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(y)|+\left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(b)|$$

olur. Buradan da

$$\left|\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b\frac{f(u)}{u}du-\frac{1}{lny-lnx}\int_x^y\frac{f(u)}{u}du\right|\le$$

$$\le\left[\frac{x+a}{ln(\frac{b}{a})}-\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln(\frac{b}{a})}\right]|f'(a)|+I(a,b,x,y)|f'(x)|+J(a,b,x,y)|f'(y)|$$

$$+\left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(b)| \tag{4.1.14}$$

$$\le\|f'\|_\infty\left\{\left[\frac{x+a}{ln(\frac{b}{a})}-\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln(\frac{b}{a})}\right]+I(a,b,x,y)+J(a,b,x,y)+\left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]\right\}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

4.2 $|f'|^q$ Fonksiyonunun Geometrik Aritmetik (GA)-Konveks Olması Durumu

Teorem 4.2.1 $f: I\subseteq[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $f'\in L[a,b]$ olmak üzere I° (I *nın içi*) üzerinde mutlak sürekli olsun, burada $a<b,\, a,b\in I$ dir. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $f'\in L_\infty[a,b]$ olmak üzere $[a,b]$ üzerinde GA-konveks ise o zaman $a\le x<y\le b$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b \frac{f(u)}{u}du-\frac{1}{lny-lnx}\int_x^y \frac{f(u)}{u}du\right|$$

$$\leq \|f'\|_\infty\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\left(\frac{x^q-a^q}{lnx^q-lna^q}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\frac{B^{p+1}+(A-B)^{p+1}}{A}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{y^q-x^q}{lny^q-lnx^q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\left(\frac{b^q-y^q}{lnb^q-lny^q}\right)^{\frac{1}{q}}\right]. \qquad (4.2.1)$$

İspat: Lemma 4.1.1 ile Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\left|\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b \frac{f(u)}{u}du-\frac{1}{lny-lnx}\int_x^y \frac{f(u)}{u}du\right| \leq \frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\int_0^1 t|f'(a^{1-t}x^t)|\,a^{1-t}x^t dt$$

$$+\int_0^1 \left|\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}t\right.$$

$$\left.-\frac{(lnx-lna)(lny-lnx)}{lnb-lna}\right||f'(x^{1-t}y^t)|\,x^{1-t}y^t dt$$

$$+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\int_0^1 (1-t)|f'(y^{1-t}b^t)|y^{1-t}b^t dt$$

$$\leq \frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\left[\int_0^1 t^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1 [|f'(a^{1-t}x^t)|(a^{1-t}x^t)]^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left[\int_0^1 \left|\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}t\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(lnx-lna)(lny-lnx)}{lnb-lna}\right|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1 [|f'(x^{1-t}y^t)|(x^{1-t}y^t)]^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\left[\int_0^1(1-t)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1[|f'(y^{1-t}b^t)|(y^{1-t}b^t)]^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.2.2}$$

elde edilir. $f'\in L_\infty[a,b]$ ve $|f'|^q$ fonksiyonunun GA-konveksliği kullanılarak,

$$\int_0^1[|f'(a^{1-t}x^t)|(a^{1-t}x^t)]^q dt\leq\int_0^1[(1-t)(a^{1-t}x^t)^q|f'(a)|^q+t(a^{1-t}x^t)^q|f'(x)|^q]dt$$

$$=|f'(a)|^q\int_0^1(1-t)(a^{1-t}x^t)^q dt+|f'(x)|^q\int_0^1 t(a^{1-t}x^t)^q dt$$

$$=a^q|f'(a)|^q\int_0^1(1-t)\left[\left(\frac{x}{a}\right)^q\right]^t dt+a^q|f'(x)|^q\int_0^1 t\left[\left(\frac{x}{a}\right)^q\right]^t dt$$

$$=a^q|f'(a)|^q\left[\frac{(1-t)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)^q}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^q\right]^t+\frac{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^q\right]^t}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)^q}\right]\Bigg|_0^1+a^q|f'(x)|^q\left[\frac{t}{ln\left(\frac{x}{a}\right)^q}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^q\right]^t-\frac{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^q\right]^t}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)^q}\right]\Bigg|_0^1$$

$$=a^q|f'(a)|^q\left[-\frac{1}{ln\left(\frac{x}{a}\right)^q}+\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^q}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)^q}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)^q}\right]+a^q|f'(x)|^q\left[\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^q}{ln\left(\frac{x}{a}\right)^q}-\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^q}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)^q}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)^q}\right]$$

$$\leq a^q\|f'\|_\infty^q\left[-\frac{1}{ln\left(\frac{x}{a}\right)^q}+\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^q}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)^q}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)^q}+\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^q}{ln\left(\frac{x}{a}\right)^q}-\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^q}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)^q}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{x}{a}\right)^q}\right]$$

$$=a^q\|f'\|_\infty^q\left[\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^q}{ln\left(\frac{x}{a}\right)^q}-\frac{1}{ln\left(\frac{x}{a}\right)^q}\right]$$

$$=\|f'\|_\infty^q\left[\frac{x^q-a^q}{lnx^q-lna^q}\right] \tag{4.2.3}$$

yazılır. Burada integrallere kısmi integrasyon uygulanmıştır. Benzer şekilde

$$\int_0^1[|f'(x^{1-t}y^t)|(x^{1-t}y^t)]^q dt\leq\int_0^1[(1-t)(x^{1-t}y^t)^q|f'(x)|^q+t(x^{1-t}y^t)^q|f'(y)|^q]dt$$

$$=x^q|f'(x)|^q\int_0^1(1-t)\left[\left(\frac{y}{x}\right)^q\right]^t dt+x^q|f'(y)|^q\int_0^1 t\left[\left(\frac{y}{x}\right)^q\right]^t dt$$

$$= x^q|f'(x)|^q\left[\frac{(1-t)}{ln\left(\frac{y}{x}\right)^q}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^q\right]^t+\frac{\left[\left(\frac{y}{x}\right)^q\right]^t}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)^q}\right]\Bigg|_0^1+x^q|f'(y)|^q\left[\frac{t}{ln\left(\frac{y}{x}\right)^q}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^q\right]^t-\frac{\left[\left(\frac{y}{x}\right)^q\right]^t}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)^q}\right]\Bigg|_0^1$$

$$= x^q|f'(x)|^q\left[\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^q}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)^q}-\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)^q}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)^q}\right]+x^q|f'(y)|^q\left[\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^q}{ln\left(\frac{y}{x}\right)^q}-\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^q}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)^q}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)^q}\right]$$

$$\leq x^q\|f'\|_\infty^q\left[\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^q}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)^q}-\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)^q}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)^q}+\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^q}{ln\left(\frac{y}{x}\right)^q}-\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^q}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)^q}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{y}{x}\right)^q}\right]$$

$$= x^q\|f'\|_\infty^q\left[\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^q}{ln\left(\frac{y}{x}\right)^q}-\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)^q}\right]$$

$$= x^q\|f'\|_\infty^q\left[\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^q}{ln\left(\frac{y}{x}\right)^q}-\frac{1}{ln\left(\frac{y}{x}\right)^q}\right]$$

$$= \|f'\|_\infty^q\left[\frac{y^q-x^q}{lny^q-lnx^q}\right] \tag{4.2.4}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\int_0^1[|f'(y^{1-t}b^t)|(y^{1-t}b^t)]^q dt \leq \int_0^1[(1-t)(y^{1-t}b^t)^q|f'(y)|^q+t(y^{1-t}b^t)^q|f'(b)|^q]dt$$

$$= y^q|f'(y)|^q\int_0^1(1-t)\left[\left(\frac{b}{y}\right)^q\right]^t dt+y^q|f'(b)|^q\int_0^1 t\left[\left(\frac{b}{y}\right)^q\right]^t dt$$

$$= y^q|f'(y)|^q\left[\frac{(1-t)}{ln\left(\frac{b}{y}\right)^q}\left[\left(\frac{b}{y}\right)^q\right]^t+\frac{\left[\left(\frac{b}{y}\right)^q\right]^t}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)^q}\right]\Bigg|_0^1+y^q|f'(b)|^q\left[\frac{t}{ln\left(\frac{b}{y}\right)^q}\left[\left(\frac{b}{y}\right)^q\right]^t-\frac{\left[\left(\frac{b}{y}\right)^q\right]^t}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)^q}\right]\Bigg|_0^1$$

$$= y^q|f'(y)|^q\left[\frac{\left(\frac{b}{y}\right)^q}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)^q}-\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)^q}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)^q}\right]+y^q|f'(b)|^q\left[\frac{\left(\frac{b}{y}\right)^q}{ln\left(\frac{b}{y}\right)^q}-\frac{\left(\frac{b}{y}\right)^q}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)^q}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)^q}\right]$$

$$\leq y^q\|f'\|_\infty^q\left[\frac{\left(\frac{b}{y}\right)^q}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)^q}-\frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)^q}-\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)^q}+\frac{\left(\frac{b}{y}\right)^q}{ln\left(\frac{b}{y}\right)^q}-\frac{\left(\frac{b}{y}\right)^q}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)^q}+\frac{1}{ln^2\left(\frac{b}{y}\right)^q}\right]$$

$$= y^q \|f'\|_\infty^q \left[\frac{\left(\frac{b}{y}\right)^q}{ln\left(\frac{b}{y}\right)^q} - \frac{1}{ln\left(\frac{b}{y}\right)^q} \right]$$

$$= \|f'\|_\infty^q \left[\frac{b^q - y^q}{lnb^q - lny^q} \right] \tag{4.2.5}$$

yazılır. Burada her iki integrale daha önce yapıldığı gibi benzer şekilde kısmi integrasyon uygulanmıştır. Ayrıca basit hesaplama ile

$$\int_0^1 t^p dt = \frac{1}{p+1} \tag{4.2.6}$$

$$\int_0^1 (1-t)^p dt = \frac{1}{p+1} \tag{4.2.7}$$

$$\int_0^1 \left| \frac{(lny - lnx)(lnb - lna - lny + lnx)}{lnb - lna} t - \frac{(lnx - lna)(lny - lnx)}{lnb - lna} \right|^p dt$$

$$\leq \int_0^{B/A} (B - At)^p dt + \int_{B/A}^1 (At - B)^p dt$$

$$= \frac{1}{p+1} \left[\frac{B^{p+1} + (A-B)^{p+1}}{A} \right] \tag{4.2.8}$$

elde edilebilir. Burada A ve B bir önceki Teorem 4.1.1'de tanımlandığı gibidir. (4.2.2)-(4.2.8) eşitsizlikleri birleştirilirse,

$$\left| \frac{1}{lnb - lna} \int_a^b \frac{f(u)}{u} du - \frac{1}{lny - lnx} \int_x^y \frac{f(u)}{u} du \right| \leq \frac{(lnx - lna)^2}{lnb - lna} \left[\frac{1}{p+1} \right]^{\frac{1}{p}} \left[\|f'\|_\infty^q \left[\frac{x^q - a^q}{lnx^q - lna^q} \right] \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left[\frac{1}{p+1} \left[\frac{B^{p+1} + (A-B)^{p+1}}{A} \right] \right]^{\frac{1}{p}} \left[\|f'\|_\infty^q \left[\frac{y^q - x^q}{lny^q - lnx^q} \right] \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \frac{(lnb - lny)^2}{lnb - lna} \left[\frac{1}{p+1} \right]^{\frac{1}{p}} \left[\|f'\|_\infty^q \left[\frac{b^q - y^q}{lnb^q - lny^q} \right] \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \|f'\|_\infty \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{(lnx - lna)^2}{lnb - lna} \left(\frac{x^q - a^q}{lnx^q - lna^q} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{B^{p+1} + (A-B)^{p+1}}{A} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{y^q - x^q}{lny^q - lnx^q} \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \frac{(lnb - lny)^2}{lnb - lna} \left(\frac{b^q - y^q}{lnb^q - lny^q} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 4.2.1 Eğer $x + h \in (a, b)$ olmak üzere $y = x + h$ olarak seçer ve

$$\left\{ \frac{B^{p+1} + (A-B)^{p+1}}{A} \right\}^{\frac{1}{p}} = \frac{lny - lnx}{lnb - lna} \left\{ \frac{[(lnx - lna)]^{p+1} + [(lnb - lny)]^{p+1}}{(lnb - lna - lny + lnx)} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

olduğunu da göz önüne alırsak, o zaman (4.2.1)'den

$$\left| \frac{1}{lnb - lna} \int_a^b \frac{f(u)}{u} du - \frac{1}{lny - lnx} \int_x^y \frac{f(u)}{u} du \right| \leq$$

$$\leq \|f'\|_\infty \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{(lnx - lna)^2}{lnb - lna} \left(\frac{x^q - a^q}{lnx^q - lna^q} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{B^{p+1} + (A-B)^{p+1}}{A} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{y^q - x^q}{lny^q - lnx^q} \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \frac{(lnb - lny)^2}{lnb - lna} \left(\frac{b^q - y^q}{lnb^q - lny^q} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

$$\left| \frac{1}{lnb - lna} \int_a^b \frac{f(u)}{u} du - \frac{1}{ln(x+h) - lnx} \int_x^{x+h} \frac{f(u)}{u} du \right|$$

$$\leq \|f'\|_\infty \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{(lnx - lna)^2}{lnb - lna} \left(\frac{x^q - a^q}{lnx^q - lna^q} \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$+ \frac{ln(x+h) - lnx}{lnb - lna} \left\{ \frac{[(lnx - lna)]^{p+1} + [(lnb - ln(x+h))]^{p+1}}{lnb - lna - ln(x+h) + lnx} \right\}^{\frac{1}{p}} \left(\frac{(x+h)^q - x^q}{ln(x+h)^q - lnx^q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left. + \frac{(lnb - ln(x+h))^2}{lnb - lna} \left(\frac{b^q - (x+h)^q}{lnb^q - ln(x+h)^q} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

elde ederiz. $h \to 0^+$ için

$$\frac{\int_x^{x+h} \frac{f(u)}{u} du}{ln(x+h) - lnx}$$

integralinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği mevcut olduğundan L'Hospital kuralı uygulanırsa

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\int_x^{x+h}\frac{f(u)}{u}du}{ln(x+h)-lnx}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{f(x+h)}{x+h}(x+h)'-\frac{f(x)}{x}(x)'}{\frac{1}{x+h}-0}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{f(x+h)}{x+h}\cdot 1-\frac{f(x)}{x}\cdot 0}{\frac{1}{x+h}}$$

$$\lim_{h\to 0^+}(x+h)\frac{f(x+h)}{x+h}=(x+0)\frac{f(x+0)}{x+0}=f(x)$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left|\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b\frac{f(u)}{u}du-f(x)\right|$$

$$\le \|f'\|_\infty\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\left(\frac{x^q-a^q}{lnx^q-lna^q}\right)^{\frac{1}{q}}+\frac{(lnb-ln\,x)^2}{lnb-lna}\left(\frac{b^q-x^q}{lnb^q-lnx^q}\right)^{\frac{1}{q}}\right].$$

Teorem 4.2.2 $f: I\subseteq[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $f'\in L[a,b]$ olmak üzere I° $(I\ nın\ içi)$ üzerinde mutlak sürekli olsun, burada $a<b, a,b\in I$ dir. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $f'\in L_\infty[a,b]$ olmak üzere $[a,b]$ üzerinde GA-konveks ise o zaman $a\le x<y\le b$ için

$$\left|\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b\frac{f(u)}{u}du-\frac{1}{lny-lnx}\int_x^y\frac{f(u)}{u}du\right|$$

$$\le\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}[C_1(a,x,p)]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(a)|^q+|f'(x)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}+[C_2(x,y,p)]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(x)|^q+|f'(y)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}[C_3(y,b,p)\,]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(y)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\le\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}[C_1(a,x,p)]^{\frac{1}{p}}\left[\|f'\|_\infty^q\right]^{\frac{1}{q}}+[C_2(x,y,p)]^{\frac{1}{p}}\left[\|f'\|_\infty^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}[C_3(y,b,p)\,]^{\frac{1}{p}}\left[\|f'\|_\infty^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \|f'\|_\infty \left\{ \frac{(lnx - lna)^2}{lnb - lna} [C_1(a,x,p)]^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{lny - lnx} [C_2(x,y,p)]^{\frac{1}{p}} \right.$$

$$\left. + \frac{(lnb - lny)^2}{lnb - lna} [C_3(y,b,p)]^{\frac{1}{p}} \right\} \tag{4.2.9}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada kısalık için aşağıdaki gösterimler kullanılmıştır.

$$C_1(a,x,p) = \int_0^1 [t(a^{1-t}x^t)]^p dt \tag{4.2.10}$$

$$C_2(x,y,p) = \int_0^1 \left| \frac{(lny - lnx)(lnb - lna - lny + lnx)}{lnb - lna} t \right.$$

$$\left. - \frac{(lnx - lna)(lny - lnx)}{lnb - lna} \right|^p (x^{1-t}y^t)^p dt \tag{4.2.11}$$

$$C_3(y,b,p) = \int_0^1 [(1-t)(y^{1-t}b^t)]^p dt \tag{4.2.12}$$

İspat: Lemma 4.1.1 ile Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\left| \frac{1}{lnb - lna} \int_a^b \frac{f(u)}{u} du - \frac{1}{lny - lnx} \int_x^y \frac{f(u)}{u} du \right| \leq \frac{(lnx - lna)^2}{lnb - lna} \int_0^1 t |f'(a^{1-t}x^t)| \, a^{1-t}x^t dt$$

$$+ \int_0^1 \left| \frac{(lny - lnx)(lnb - lna - lny + lnx)}{lnb - lna} t - \frac{(lnx - lna)(lny - lnx)}{lnb - lna} \right| |f'(x^{1-t}y^t)| \, x^{1-t}y^t dt$$

$$+ \frac{(lnb - lny)^2}{lnb - lna} \int_0^1 (1-t) |f'(y^{1-t}b^t)| y^{1-t}b^t dt$$

$$\leq \frac{(lnx - lna)^2}{lnb - lna} \left[\int_0^1 [t(a^{1-t}x^t)]^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 |f'(a^{1-t}x^t)|^q dt \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left[\int_0^1 \left| \frac{(lny - lnx)(lnb - lna - lny + lnx)}{lnb - lna} t \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{(lnx - lna)(lny - lnx)}{lnb - lna} \right|^p (x^{1-t}y^t)^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 |f'(x^{1-t}y^t)|^q dt \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\left[\int_0^1[(1-t)(y^{1-t}b^t)]^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1|f'(y^{1-t}b^t)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \qquad (4.2.13)$$

elde edilir. $f' \in L_\infty[a,b]$ ve $|f'|^q$ fonksiyonunun GA-konveksliği kullanılarak,

$$\int_0^1|f'(a^{1-t}x^t)|^q dt \leq \int_0^1[(1-t)|f'(a)|^q+t|f'(x)|^q]dt$$

$$=|f'(a)|^q\int_0^1(1-t)dt+|f'(x)|^q\int_0^1 tdt$$

$$\leq \|f'\|_\infty^q \qquad (4.2.14)$$

$$\int_0^1|f'(x^{1-t}y^t)|^q dt \leq \int_0^1[(1-t)|f'(x)|^q+t|f'(y)|^q]dt$$

$$=|f'(x)|^q\int_0^1(1-t)dt+|f'(y)|^q\int_0^1 tdt$$

$$\leq \|f'\|_\infty^q \qquad (4.2.15)$$

$$\int_0^1|f'(y^{1-t}b^t)|^q dt \leq \int_0^1[(1-t)|f'(y)|^q+t|f'(b)|^q]dt$$

$$=|f'(y)|^q\int_0^1(1-t)dt+|f'(b)|^q\int_0^1 tdt$$

$$\leq \|f'\|_\infty^q \qquad (4.2.16)$$

bulunur. (4.2.10)-(4.2.16) ifadeleri birleştirilirse,

$$\left|\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b\frac{f(u)}{u}du-\frac{1}{lny-lnx}\int_x^y\frac{f(u)}{u}du\right|$$

$$\leq\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}[C_1(a,x,p)]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(a)|^q+|f'(x)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}+[C_2(x,y,p)]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(x)|^q+|f'(y)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}[C_3(y,b,p)\,]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(y)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}[C_1(a,x,p)]^{\frac{1}{p}}\left[\|f'\|_\infty^q\right]^{\frac{1}{q}}+[C_2(x,y,p)]^{\frac{1}{p}}\left[\|f'\|_\infty^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}[C_3(y,b,p)\,]^{\frac{1}{p}}\left[\|f'\|_\infty^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$=\|f'\|_\infty\left\{\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}[C_1(a,x,p)]^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{lny-lnx}[C_2(x,y,p)]^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$\left.+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}[C_3(y,b,p)]^{\frac{1}{p}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 4.2.3 $f: I\subseteq[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $f'\in L[a,b]$ olmak üzere I° $(I\ nın\ içi)$ üzerinde mutlak sürekli olsun, burada $a<b, a,b\in I$ dir. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $f'\in L_\infty[a,b]$ olmak üzere $[a,b]$ üzerinde Geometrik-Aritmetik (GA)-konveks ise o zaman $a\leq x<y\leq b$ için

$$\left|\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b\frac{f(u)}{u}du-\frac{1}{lny-lnx}\int_x^y\frac{f(u)}{u}du\right|$$

$$\leq\|f'\|_\infty\left\{\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\left[\frac{a^p}{ln\left(\frac{x}{a}\right)^p}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^p-1\right]\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{2q+3}{(q+1)(q+2)}\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\frac{1}{A^{\frac{2}{q}}}\left[\frac{x^p}{ln\left(\frac{y}{x}\right)^p}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^p-1\right]\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{A\left(\frac{B}{A}\right)^{q+1}-B}{q+1}-\frac{2\left(\frac{B}{A}\right)^{q+2}-1}{q+2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\left[\frac{y^p}{ln\left(\frac{b}{y}\right)^p}\left[\left(\frac{b}{y}\right)^p-1\right]\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{1}{q+1}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}\qquad(4.2.17)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada A ve B Teorem 4.1.1 olduğu gibidir.

İspat: Lemma 4.1.1 ile Hölder integral eşitsizliği kullanılarak

$$\left|\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b \frac{f(u)}{u}du-\frac{1}{lny-lnx}\int_x^y \frac{f(u)}{u}du\right| \le \frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\int_0^1 t|f'(a^{1-t}x^t)|\,a^{1-t}x^t dt$$

$$+\int_0^1 \left|\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}t\right.$$

$$\left.-\frac{(lnx-lna)(lny-lnx)}{lnb-lna}\right| |f'(x^{1-t}y^t)|\,x^{1-t}y^t dt$$

$$+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\int_0^1 (1-t)|f'(y^{1-t}b^t)|y^{1-t}b^t dt$$

$$\le \frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\left[\int_0^1 (a^{1-t}x^t)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1 t^q|f'(a^{1-t}x^t)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left[\int_0^1 (x^{1-t}y^t)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1 |At-B|^q|f'(x^{1-t}y^t)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\left[\int_0^1 (y^{1-t}b^t)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1 (1-t)^q|f'(y^{1-t}b^t)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \qquad (4.2.18)$$

yazılır. $f' \in L_\infty[a,b]$ ve $|f'|^q$ nun GA-konveksliği kullanılarak,

$$\int_0^1 t^q|f'(a^{1-t}x^t)|^q dt \le \int_0^1 [(1-t)t^q|f'(a)|^q + tt^q|f'(x)|^q]dt$$

$$= |f'(a)|^q\int_0^1 (t^q-t^{q+1})dt + |f'(x)|^q\int_0^1 t^{q+1}dt$$

$$\le \|f'\|_\infty^q\left[\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q+2}\right] \qquad (4.2.19)$$

bulunur. Şimdi mutlak değerin

$$|At-B| = \begin{cases} At-B, & t \ge \dfrac{B}{A} \\ B-At, & t < \dfrac{B}{A} \end{cases}$$

tanımından ve kısmi integrasyondan yararlanarak aşağıdaki integrali hesaplayalım:

$$\int_0^1 |At-B|^q |f'(x^{1-t}y^t)|^q dt \leq \int_0^1 [|At-B|^q(1-t)|f'(x)|^q + |At-B|^q t|f'(y)|^q]dt$$

$$= |f'(x)|^q \int_0^1 (1-t)|At-B|^q dt + |f'(y)|^q \int_0^1 t|At-B|^q dt$$

$$= |f'(x)|^q \int_0^{\frac{B}{A}} (1-t)(At-B)^q dt + |f'(y)|^q \int_{\frac{B}{A}}^1 t(B-At)^q dt$$

$$= \frac{|f'(x)|^q}{A^2} \int_0^{\frac{B}{A}} (A-B-u)u^q du - \frac{|f'(y)|^q}{A^2} \int_{\frac{B}{A}}^1 (B-u)u^q du$$

$$= \frac{|f'(x)|^q}{A^2} \int_0^{\frac{B}{A}} (Au^q - Bu^q - u^{q+1}) du - \frac{|f'(y)|^q}{A^2} \int_{\frac{B}{A}}^1 (Bu^q - u^{q+1}) du$$

$$= \frac{|f'(x)|^q}{A^2} \left(A\frac{u^{q+1}}{q+1} - B\frac{u^{q+1}}{q+1} - \frac{u^{q+2}}{q+2} \right)\Bigg|_0^{\frac{B}{A}} - \frac{|f'(y)|^q}{A^2} \left(B\frac{u^{q+1}}{q+1} - \frac{u^{q+2}}{q+2} \right)\Bigg|_{\frac{B}{A}}^1$$

$$= \frac{|f'(x)|^q}{A^2} \left[\frac{A\left(\frac{B}{A}\right)^{q+1}}{q+1} - \frac{B\left(\frac{B}{A}\right)^{q+1}}{q+1} - \frac{\left(\frac{B}{A}\right)^{q+2}}{q+2} \right] + \frac{|f'(y)|^q}{A^2} \left[\frac{B\left(\frac{B}{A}\right)^{q+1}}{q+1} - \frac{\left(\frac{B}{A}\right)^{q+2}}{q+2} - \frac{B}{q+1} + \frac{1}{q+2} \right]$$

$$\leq \frac{\|f'\|_\infty^q}{A^2} \left[\frac{A\left(\frac{B}{A}\right)^{q+1} - B}{q+1} - \frac{2\left(\frac{B}{A}\right)^{q+2} - 1}{q+2} \right] \tag{4.2.20}$$

Ayrıca

$$\int_0^1 (1-t)^q |f'(y^{1-t}b^t)|^q dt \leq \int_0^1 [(1-t)^q(1-t)|f'(y)|^q + t(1-t)^q|f'(b)|^q]dt$$

$$= |f'(y)|^q \int_0^1 (1-t)^{q+1} dt + |f'(b)|^q \int_0^1 t(1-t)^q dt$$

$$\leq \|f'\|_\infty^q \left[\frac{1}{q+1}\right] \tag{4.2.21}$$

olur. Yine basit hesaplama ile

$$\int_0^1 (a^{1-t}x^t)^p dt = a^p \int_0^1 \left[\left(\frac{x}{a}\right)^p\right]^t dt = \frac{a^p}{ln\left(\frac{x}{a}\right)^p}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^p\right]^t\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{a^p}{ln\left(\frac{x}{a}\right)^p}\left(\frac{x}{a}\right)^p - \frac{a^p}{ln\left(\frac{x}{a}\right)^p} \tag{4.2.22}$$

$$\int_0^1 (x^{1-t}y^t)^p dt = x^p \int_0^1 \left[\left(\frac{y}{x}\right)^p\right]^t dt = \frac{x^p}{ln\left(\frac{y}{x}\right)^p}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^p\right]^t\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{x^p}{ln\left(\frac{y}{x}\right)^p}\left(\frac{y}{x}\right)^p - \frac{x^p}{ln\left(\frac{y}{x}\right)^p} \tag{4.2.23}$$

$$\int_0^1 (y^{1-t}b^t)^p dt = y^p \int_0^1 \left[\left(\frac{b}{y}\right)^p\right]^t dt = \frac{y^p}{ln\left(\frac{b}{y}\right)^p}\left[\left(\frac{b}{y}\right)^p\right]^t\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{y^p}{ln\left(\frac{b}{y}\right)^p}\left(\frac{b}{y}\right)^p - \frac{y^p}{ln\left(\frac{b}{y}\right)^p} \tag{4.2.24}$$

elde edilebilir. (4.2.18)-(4.2.24) eşitsizlikleri birleştirilirse,

$$\left|\frac{1}{lnb - lna}\int_a^b \frac{f(u)}{u}du - \frac{1}{lny - lnx}\int_x^y \frac{f(u)}{u}du\right|$$

$$\leq \frac{(lnx - lna)^2}{lnb - lna}\left[\frac{a^p}{ln\left(\frac{x}{a}\right)^p}\left(\frac{x}{a}\right)^p - \frac{a^p}{ln\left(\frac{x}{a}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}}\left[|f'(a)|^q\left[\frac{1}{q+1}\right] + |f'(x)|^q\left[\frac{1}{q+2}\right]\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left[\frac{x^p}{ln\left(\frac{y}{x}\right)^p}\left(\frac{y}{x}\right)^p - \frac{x^p}{ln\left(\frac{y}{x}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times\left\{\frac{|f'(x)|^q}{A^2}\left[\frac{A\left(\frac{B}{A}\right)^{q+1}}{q+1}-\frac{B\left(\frac{B}{A}\right)^{q+1}}{q+1}-\frac{\left(\frac{B}{A}\right)^{q+2}}{q+2}\right]+\frac{|f'(y)|^q}{A^2}\left[\frac{B\left(\frac{B}{A}\right)^{q+1}-B}{q+1}-\frac{\left(\frac{B}{A}\right)^{q+2}-1}{q+2}\right]\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\left[\frac{y^p}{ln\left(\frac{b}{y}\right)^p}\left(\frac{b}{y}\right)^p-\frac{y^p}{ln\left(\frac{b}{y}\right)^p}\right]^{\frac{1}{p}}\left\{|f'(y)|^q\left[\frac{1}{q+2}\right]+|f'(b)|^q\left[\frac{1}{q+1}-\frac{1}{q+2}\right]\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\left\{\frac{a^p}{ln\left(\frac{x}{a}\right)^p}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^p-1\right]\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\|f'\|_\infty^q\left[\frac{2q+3}{(q+1)(q+2)}\right]\right\}^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\left\{\frac{x^p}{ln\left(\frac{y}{x}\right)^p}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^p-1\right]\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\frac{\|f'\|_\infty^q}{A^2}\left[\frac{A\left(\frac{B}{A}\right)^{q+1}-B}{q+1}-\frac{2\left(\frac{B}{A}\right)^{q+2}-1}{q+2}\right]\right\}^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\left\{\frac{y^p}{ln\left(\frac{b}{y}\right)^p}\left[\left(\frac{b}{y}\right)^p-1\right]\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\|f'\|_\infty^q\left[\frac{1}{q+1}\right]\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$=\|f'\|_\infty\left\{\frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\left[\frac{a^p}{ln\left(\frac{x}{a}\right)^p}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^p-1\right]\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{2q+3}{(q+1)(q+2)}\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\frac{1}{A^{\frac{2}{q}}}\left[\frac{x^p}{ln\left(\frac{y}{x}\right)^p}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^p-1\right]\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{A\left(\frac{B}{A}\right)^{q+1}-B}{q+1}-\frac{2\left(\frac{B}{A}\right)^{q+2}-1}{q+2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\left[\frac{y^p}{ln\left(\frac{b}{y}\right)^p}\left[\left(\frac{b}{y}\right)^p-1\right]\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{1}{q+1}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.2.4 $f: I\subseteq[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $f'\in L[a,b]$ olmak üzere I aralığı üzerinde mutlak sürekli olsun, burada $a<b, a,b\in I$ dir. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $p,q>$

1, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $f' \in L_\infty[a,b]$ olmak üzere $[a,b]$ üzerinde GA-konkav ise o zaman $a \le x < y \le b$ için

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du - \frac{1}{y-x}\int_x^y f(u)du\right| \le \frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}[C_1(a,x,p)]^{\frac{1}{p}}\left|f'\left(\sqrt{ax}\right)\right|$$

$$+[C_2(x,y,p)]^{\frac{1}{p}}\left|f'\left(\sqrt{xy}\right)\right| + \frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}[C_3(y,b,p)]^{\frac{1}{p}}\left|f'\left(\sqrt{yb}\right)\right| \qquad (4.2.25)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $C_1(a,x,p), C_2(x,y,p)$ ve $C_3(y,b,p)$ ifadeleri (4.2.10)-(4.2.12)'de tanımlandığı gibidir.

İspat. GA-konkavlık için

$$f\left(\sqrt{ab}\,\right) \ge \frac{1}{lnb-lna}\int_a^b \frac{f(u)}{u}du \ge \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliğini ve $|f'|^q$ nun GA-konkavlığını kullanarak

$$\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b \frac{|f'(x)|^q}{x}dx \le \left|f'\left(\sqrt{ab}\right)\right|^q$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Değişken değiştirerek

$$\int_0^1 |f'(a^{1-t}x^t)|^q dt$$

integralini hesaplayalım:

$$u = a^{1-t}x^t \qquad \Rightarrow \qquad u = a\left(\frac{x}{a}\right)^t$$

$$du = aln\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{x}{a}\right)^t dt \quad \Rightarrow \quad du = ln\left(\frac{x}{a}\right)udt \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{du}{ln\left(\frac{x}{a}\right)u}$$

$$t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u = a$$

$$t = 1 \qquad \Rightarrow \qquad u = x$$

$$\int_0^1 |f'(a^{1-t}x^t)|^q dt = \int_a^x |f'(u)|^q \frac{du}{ln\left(\frac{x}{a}\right)u} = \frac{1}{lnx-lna}\int_a^x \frac{|f'(u)|^q}{u}du \le \left|f'\left(\sqrt{ab}\right)\right|^q$$

$$\int_0^1 |f'(a^{1-t}x^t)|^q dt \leq \left|f'\left(\sqrt{ax}\right)\right|^q \tag{4.2.26}$$

Ayrıca benzer şekilde değişken değiştirerek

$$\int_0^1 |f'(x^{1-t}y^t)|^q dt \leq \left|f'\left(\sqrt{xy}\right)\right|^q \tag{4.2.27}$$

$$\int_0^1 |f'(y^{1-t}b)|^q dt \leq \left|f'\left(\sqrt{yb}\right)\right|^q \tag{4.2.28}$$

elde ederiz. O halde bulmuş olduğumuz (4.2.10), (4.2.14)-(4.2.16) ve (4.2.26)-(4.2.28) eşitsizliklerini birleştirerek,

$$\left|\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b \frac{f(u)}{u}du - \frac{1}{lny-lnx}\int_x^y \frac{f(u)}{u}du\right|$$

$$\leq \frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}\left[\int_0^1 [t(a^{1-t}x^t)]^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1 |f'(a^{1-t}x^t)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left[\int_0^1 \left|\frac{(lny-lnx)(lnb-lna-lny+lnx)}{lnb-lna}t\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(lnx-lna)(lny-lnx)}{lnb-lna}\right|^p (x^{1-t}y^t)^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1 |f'(x^{1-t}y^t)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}\left[\int_0^1 [(1-t)(y^{1-t}b^t)]^p dt\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1 |f'(y^{1-t}b^t)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{(lnx-lna)^2}{lnb-lna}[C_1(a,x,p)]^{\frac{1}{p}}\left[\left|f'\left(\sqrt{ax}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} + [C_2(x,y,p)]^{\frac{1}{p}}\left[\left|f'\left(\sqrt{xy}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(lnb-lny)^2}{lnb-lna}[C_3(y,b,p)]^{\frac{1}{p}}\left[\left|f'\left(\sqrt{yb}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{(lnx - lna)^2}{lnb - lna}[C_1(a,x,p)]^{\frac{1}{p}}\left|f'\left(\sqrt{ax}\right)\right| + [C_2(x,y,p)]^{\frac{1}{p}}\left|f'\left(\sqrt{xy}\right)\right|$$
$$+ \frac{(lnb - lny)^2}{lnb - lna}[C_3(y,b,p)]^{\frac{1}{p}}\left|f'\left(\sqrt{yb}\right)\right|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

4.3 Özel Ortalamalara Uygulamalar

Önerme 4.3.1 $a, b, x, y \in \mathbb{R}, 0 < a \leq x < y \leq b$ ve $p \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$ olsun. O zaman

$$|L(a^p, b^p) - L(x^p, y^p)| \leq |p|\left\{\left[\frac{x+a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} - \frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]a^{p-1}\right.$$
$$\left. + I(a,b,x,y)x^{p-1} + J(a,b,x,y)y^{p-1} + \left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]b^{p-1}\right\} \quad (4.3.1)$$

elde edilir. Burada I ve J Teorem 4.1.1'de tanımlandığı gibidir.

İspat. $f(x) = x^p, x \in \mathbb{R}^+, p \in R\backslash\{-1,0\}$ ile Teorem 4.1.1'den hemen görülür. Ancak öncelikle $f(x) = x^p$ fonksiyonunun hangi p değerlerinde artan ve konveks olduğunu inceleyelim: $G \leq A$ olduğundan dolayı

$$a^{1-t}b^t \leq (1-t)a + tb \quad \Rightarrow \quad f(a^{1-t}b^t) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

yazabiliriz. f artan ve konveks ise f fonksiyonu GA konvekstir. Bundan dolayı

$$f'(x) > 0, \qquad f''(x) \geq 0$$

$$f(x) = x^p \quad \Rightarrow \quad f'(x) = px^{p-1} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$$

$$f''(x) = p(p-1)x^{p-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 0 \ \ ve \ \ p_2 = 1$$

olur. İşaret tablosu incelenirse $p \geq 1$ olduğu görülür. Teorem 4.1.1'den yararlanarak

$$\left|\frac{1}{lnb - lna}\int_a^b \frac{f(u)}{u}du - \frac{1}{lny - lnx}\int_x^y \frac{f(u)}{u}du\right| \leq \left[\frac{x+a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} - \frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]|f'(a)|$$

$$+ I(a,b,x,y)|f'(x)| + J(a,b,x,y)|f'(y)| + \left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(b)|$$

eşitsizliği yazılabilir.

$$f(x) = x^p \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = px^{p-1}$$

yazarak düzenlersek

$$|L(a^p, b^p) - L(x^p, y^p)| \leq \left[\frac{x+a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} - \frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right) ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right] |pa^{p-1}|$$

$$+I(a,b,x,y)|px^{p-1}| + J(a,b,x,y)|py^{p-1}| + \left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right) ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right] |pb^{p-1}|$$

$$|L(a^p, b^p) - L(x^p, y^p)|$$

$$\leq |p| \left\{ \left[\frac{x+a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} - \frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right) ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right] a^{p-1} + I(a,b,x,y)x^{p-1} + J(a,b,x,y)y^{p-1} \right.$$

$$\left. + \left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right) ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right] b^{p-1} \right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada I ve J Teorem 4.1.1'de tanımlandığı gibidir.

Önerme 4.3.2 Kabul edelim ki $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ ve $0 < a \leq x < y \leq b$ olsun. O zaman

$$|L(a^{-1}, b^{-1}) - L(x^{-1}, y^{-1})| \leq \left[\frac{x+a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} - \frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right) ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right] \frac{1}{a^2}$$

$$+\frac{I(a,b,x,y)}{x^2} + \frac{J(a,b,x,y)}{y^2} + \left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right) ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right] \frac{1}{b^2} \tag{4.3.2}$$

elde edilir. Burada I ve J Teorem 4.1.1'de tanımlandığı gibidir.

İspat. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^+$ ile Teorem 4.1.1'den elde edilir. Öncelikle $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun hangi x değerlerinde GA-konveks olduğunu inceleyelim:

$$f(a^t b^{1-t}) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

olduğundan

$$\frac{1}{a^t b^{1-t}} \leq \frac{t}{a} + \frac{(1-t)}{b} = \frac{tb + (1-t)a}{ab}$$

$$ab \leq [tb + (1-t)a]a^t b^{1-t} \quad \Rightarrow \quad ab \leq ta^t b^{2-t} + (1-t)a^{1+t} b^{1-t}$$

$$1 \leq ta^{t-1} b^{1-t} + (1-t)a^t b^{-t} \quad \Rightarrow \quad ta^{t-1} b^{1-t} + (1-t)a^t b^{-t} - 1 \geq 0$$

$$t\left(\frac{b}{a}\right)^{1-t} + (1-t)\left(\frac{b}{a}\right)^{-t} - 1 \geq 0$$

yazabiliriz. $x = \frac{b}{a}$ ile gösterirsek $tx^{1-t} + (1-t)x^{-t} - 1 \geq 0$ olur. Buradan ise

$$f(x) = tx^{1-t} + (1-t)x^{-t} - 1 \geq 0$$

$$f'(x) = t(1-t)x^{-t} - (1-t)tx^{-1-t} \geq 0$$

$$t(1-t)[x^{-t} - x^{-1-t}] \geq 0 \quad \Rightarrow \quad t(1-t)x^{-t}\left[1 - \frac{1}{x}\right] \geq 0$$

olacağı için $x \geq 1$ olduğu sonucuna varılır. O halde Teorem 4.1.1'den yararlanarak

$$\left|\frac{1}{lnb - lna}\int_a^b \frac{f(u)}{u}du - \frac{1}{lny - lnx}\int_x^y \frac{f(u)}{u}du\right| \leq \left[\frac{x+a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} - \frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]|f'(a)|$$

$$+I(a,b,x,y)|f'(x)| + J(a,b,x,y)|f'(y)| + \left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(b)|$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ yazarak düzenlersek

$$|L(a^{-1}, b^{-1}) - L(x^{-1}, y^{-1})| \leq \left[\frac{x+a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} - \frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]\left|-\frac{1}{a^2}\right|$$

$$\leq +I(a,b,x,y)\left|-\frac{1}{x^2}\right| + J(a,b,x,y)\left|-\frac{1}{y^2}\right| + \left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} + \frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]\left|-\frac{1}{b^2}\right|$$

$$|L(a^{-1}, b^{-1}) - L(x^{-1}, y^{-1})| \leq \left[\frac{x+a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} - \frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]\frac{1}{a^2}$$

$$+I(a,b,x,y)\frac{1}{x^2}+J(a,b,x,y)\frac{1}{y^2}+\left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]\frac{1}{b^2}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada I ve J Teorem 4.1.1'de tanımlandığı gibidir.

Önerme 4.3.3 Kabul edelim ki $a,b,x,y \in \mathbb{R}$ ve $0 < a \leq x < y \leq b$ olsun. O zaman

$$|A(lna,lnb)-A(lnx,lny)| \leq \left[\frac{x+a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}-\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]\frac{1}{a}+\frac{I(a,b,x,y)}{x}+\frac{J(a,b,x,y)}{y}+$$

$$+\left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]\frac{1}{b} \tag{4.3.3}$$

dir. Burada I ve J Teorem 4.1.1'de tanımlandığı gibidir.

İspat. Sonuç $f(x) = lnx$ ile Teorem 4.1.1'den elde edilir. O halde Teorem 4.1.1'den yararlanarak

$$\left|\frac{1}{lnb-lna}\int_a^b \frac{f(u)}{u}du-\frac{1}{lny-lnx}\int_x^y \frac{f(u)}{u}du\right| \leq \left[\frac{x+a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}-\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]|f'(a)|$$

$$+I(a,b,x,y)|f'(x)|+J(a,b,x,y)|f'(y)|+\left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]|f'(b)|$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $f(x) = lnx \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$ yazarak düzenlersek

$$|A(lna,lnb)-A(lnx,lny)|$$

$$\leq \left[\frac{x+a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}-\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]\left|\frac{1}{a}\right|+I(a,b,x,y)\left|\frac{1}{x}\right|+J(a,b,x,y)\left|\frac{1}{y}\right|+\left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]\left|\frac{1}{b}\right|$$

$$=\left[\frac{x+a}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}-\frac{2(x-a)}{ln\left(\frac{x}{a}\right)ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right]\frac{1}{a}+\frac{I(a,b,x,y)}{x}+\frac{J(a,b,x,y)}{y}+\left[\frac{y+b}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}+\frac{2(y-b)}{ln\left(\frac{b}{a}\right)ln\left(\frac{b}{y}\right)}\right]\frac{1}{b}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

4.4 n-Kere Diferensiyellenebilen Konveks ve Konkav Fonksiyonlar İçin Bazı Yeni Eşitsizlikler

Bu bölümde, hem Hölder hem de Power-Mean integral eşitsizliği ile birlikte bir integral eşitliği kullanılarak n-kere diferansiyellenebilen konveks ve konkav fonksiyonlar için bir kaç yeni eşitsizlik elde edilmiştir. Bu kısımda esas sonuçlarımızı elde etmek için aşağıdaki lemmayı kullanacağız.

Lemma 4.4.1 $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $n \in \mathbb{N}$ için I° üzerinde n-kere diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a < b$ için $a, b \in I^{\circ}$, $f^{(n)} \in L[a,b]$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{f^{(k)}(b) b^{k+1} - f^{(k)}(a) a^{k+1}}{(k+1)!} \right) - \int_a^b f(x)dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_a^b x^n f^{(n)}(x)dx. \quad (4.4.1)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Tümevarım metodunu kullanacağız. $n = 1$ için kısmi integrasyon alarak

$$f(b)b - f(a)a - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b x f'(x)dx \quad (4.4.2)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu ise $n = 1$ için (4.4.1) ile çakışır. Benzer şekilde $n = 2$ için iki kere kısmi integrasyon alarak

$$\sum_{k=0}^{1} (-1)^k \left(\frac{f^{(k)}(b) b^{k+1} - f^{(k)}(a) a^{k+1}}{(k+1)!} \right) - \int_a^b f(x)dx = \frac{(-1)^{2+1}}{2!} \int_a^b x^2 f''(x)dx$$

$$\frac{f(b)b - f(a)a}{1!} - \frac{f'(b)b^2 - f'(a)a^2}{2!} - \int_a^b f(x)dx = -\frac{1}{2!} \int_a^b x^2 f''(x)dx \quad (4.4.3)$$

$$\int_a^b x^2 f''(x)dx = b^2 f'(b) - a^2 f'(a) - 2\left[x f(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)dx \right]$$

$$= [b^2 f'(b) - a^2 f'(a)] - 2[b f(b) - a f(a)] + 2\int_a^b f(x)dx. \quad (4.4.4)$$

elde edilir. (4.4.4) ifadesi $n = 2$ için (4.4.1) ile çakışır. Şimdi kabul edelim ki (4.4.1) eşitliği $n = t$ geçerli olsun. Yani

$$\sum_{k=0}^{t-1}(-1)^k\left(\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1}-f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!}\right)-\int_a^b f(x)dx=\frac{(-1)^{t+1}}{t!}\int_a^b x^t f^{(t)}(x)dx \quad (4.4.5)$$

olduğunu kabul edelim. Kısmi integrasyon yöntemini kullanarak

$$\frac{(-1)^{t+2}}{(t+1)!}\int_a^b x^{t+1}f^{(t+1)}(x)dx=\frac{(-1)^{t+2}}{(t+1)!}\left\{x^{t+1}f^{(t)}(x)\Big|_a^b-(t+1)\int_a^b x^t f^{(t)}(x)dx\right\}$$

$$=\frac{(-1)^{t+2}}{(t+1)!}\left[b^{t+1}f^{(t)}(b)-a^{t+1}f^{(t)}(a)\right]-(t+1)\frac{(-1)^{t+2}}{(t+1)!}\int_a^b x^t f^{(t)}(x)dx$$

$$=\frac{(-1)^{t}}{(t+1)!}\left[b^{t+1}f^{(t)}(b)-a^{t+1}f^{(t)}(a)\right]+\frac{(-1)^{t+1}}{t!}\int_a^b x^t f^{(t)}(x)dx$$

$$\frac{(-1)^{t+1}}{t!}\int_a^b x^t f^{(t)}(x)dx$$

$$=\frac{(-1)^{t+2}}{(t+1)!}\int_a^b x^{t+1}f^{(t+1)}(x)dx-\frac{(-1)^{t}}{(t+1)!}\left[b^{t+1}f^{(t)}(b)-a^{t+1}f^{(t)}(a)\right] \quad (4.4.6)$$

bulunur. (4.4.6)’yı (4.4.5)’de yerine yazarsak

$$\sum_{k=0}^{t-1}(-1)^k\left(\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1}-f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!}\right)-\int_a^b f(x)dx$$

$$=\frac{(-1)^{t+2}}{(t+1)!}\int_a^b x^{t+1}f^{(t+1)}(x)dx-\frac{(-1)^{t}}{(t+1)!}\left[b^{t+1}f^{(t)}(b)-a^{t+1}f^{(t)}(a)\right]$$

$$\sum_{k=0}^{t-1}(-1)^k\left(\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1}-f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!}\right)-\int_a^b f(x)dx$$

$$+\frac{(-1)^{t}}{(t+1)!}\left[b^{t+1}f^{(t)}(b)-a^{t+1}f^{(t)}(a)\right]=\frac{(-1)^{t+2}}{(t+1)!}\int_a^b x^{t+1}f^{(t+1)}(x)dx.$$

elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.4.1 $a < b,\ a, b \in I^{\circ}$ olmak üzere $n \in \mathbb{N}$ için $f: I \subseteq (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I°üzerinde n-kere diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ ve $q > 1$ için $\left|f^{(n)}\right|^{q}$, $[a, b]$ üzerinde konveks ise o zaman aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\left(\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1}-f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!}\right)-\int_{a}^{b} f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{1}{n!}(b-a)L_{np}^{n}(a, b)A^{\frac{1}{q}}\left(\left|f^{(n)}(a)\right|^{q}, \left|f^{(n)}(b)\right|^{q}\right) \qquad (4.4.7)$$

İspat: Eğer $q > 1$ için $\left|f^{(n)}\right|^{q}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde konveks ise Lemma 4.4.1, Hölder eşitsizliği ve

$$\left|f^{(n)}(x)\right|^{q} = \left|f^{(n)}\left(\frac{x-a}{b-a}b+\frac{b-x}{b-a}a\right)\right|^{q} \leq \frac{x-a}{b-a}\left|f^{(n)}(b)\right|^{q}+\frac{b-x}{b-a}\left|f^{(n)}(a)\right|^{q},$$

eşitsizliğini kullanarak

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\left(\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1}-f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!}\right)-\int_{a}^{b} f(x)dx\right| \leq \frac{1}{n!}\int_{a}^{b} x^{n}\left|f^{(n)}(x)\right|dx$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left(\int_{a}^{b} x^{np}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{a}^{b}\left|f^{(n)}(x)\right|^{q}dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left(\int_{a}^{b} x^{np}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{a}^{b}\left[\frac{x-a}{b-a}\left|f^{(n)}(b)\right|^{q}+\frac{b-x}{b-a}\left|f^{(n)}(a)\right|^{q}\right]dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{1}{n!}(b-a)^{\frac{1}{q}}(b-a)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{b^{np+1}-a^{np+1}}{(np+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{\left|f^{(n)}(b)\right|^{q}+\left|f^{(n)}(a)\right|^{q}}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{1}{n!}(b-a)L_{np}^{n}(a, b)A^{\frac{1}{q}}\left(\left|f^{(n)}(a)\right|^{q}, \left|f^{(n)}(b)\right|^{q}\right)$$

elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 4.4.1 Teorem 4.4.1'in şartları altında $n = 1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{f(b)b-f(a)a}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx\right| \leq L_{p}(a, b)\left[\frac{|f'(b)|^{q}+|f'(a)|^{q}}{2}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Önerme 4.4.1 $a < b$ olmak üzere $a, b \in (0, \infty)$, $q > 1$ ve $m \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty) \backslash \{-2q, -q\}$ olsun. Aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$L_{\frac{m}{q}+1}^{\frac{m}{q}+1}(a,b) \leq L_p(a,b) A^{\frac{1}{q}}(a^m, b^m).$$

İspat: Önermenin varsayımları altında, $f(x) = \frac{q}{m+q} x^{\frac{m}{q}+1}$, $x \in (0, \infty)$ olsun. O zaman $|f'(x)|^q = x^m$, $(0, \infty)$ üzerinde konveks olur ve istenilen Sonuç 4.4.1'den elde edilir. Gerçekten de verilen fonksiyon

$$\left| \frac{f(b)b - f(a)a}{b-a} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq L_p(a,b) \left[\frac{|f'(b)|^q + |f'(a)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğinde yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki elde edilir:

$$\frac{1}{b-a} \left[\frac{q}{m+q} b^{\frac{m}{q}+1} b - \frac{q}{m+q} a^{\frac{m}{q}+1} a - \int_a^b \frac{q x^{\frac{m}{q}+1}}{m+q} dx \right] \leq L_p(a,b) \left[\frac{|f'(b)|^q + |f'(a)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{\frac{q}{m+q} b^{\frac{m}{q}+2} - \frac{q}{m+q} a^{\frac{m}{q}+2}}{b-a} - \frac{1}{b-a} \frac{q}{m+q} \left[\frac{b^{\frac{m}{q}+2} - a^{\frac{m}{q}+2}}{\frac{m}{q}+2} \right] \leq L_p(a,b) \left[\frac{b^m + a^m}{2} \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{q}{m+q} \frac{1}{b-a} \left[b^{\frac{m}{q}+2} - a^{\frac{m}{q}+2} - \frac{q}{m+2q} \left(b^{\frac{m}{q}+2} - a^{\frac{m}{q}+2} \right) \right] \leq L_p(a,b) \left[\frac{b^m + a^m}{2} \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{b^{\frac{m}{q}+2} - a^{\frac{m}{q}+2}}{\left(\frac{m}{q} + 2 \right)(b-a)} \leq L_p(a,b) \left[\frac{b^m + a^m}{2} \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$L_{\frac{m}{q}+1}^{\frac{m}{q}+1}(a,b) \leq L_p(a,b) A^{\frac{1}{q}}(a^m, b^m)$$

Teorem 4.4.2 $n \in \mathbb{N}$ için $f: I \subseteq (0, \infty) \to \mathbb{R}$ n-kere diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $0 \leq a < b$ olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a,b]$ ve $q \geq 1$ için $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a,b]$ üzerinde konveks ise o zaman aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{f^{(k)}(b) b^{k+1} - f^{(k)}(a) a^{k+1}}{(k+1)!} \right) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{1}{n!} (b-a)^{1-\frac{1}{q}} L_n^{n\left(\frac{q-1}{q}\right)}(a,b)$$

$$\times \left\{ \left|f^{(n)}(b)\right|^q \left[L_{n+1}^{n+1}(a,b) - a L_n^n(a,b) \right] + \left|f^{(n)}(a)\right|^q \left[b L_n^n(a,b) - L_{n+1}^{n+1}(a,b) \right] \right\}^{\frac{1}{q}}$$

İspat: Lemma 4.4.1 ve Power-Mean integral eşitsizliğinden aşağıdaki elde edilir:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1}-f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!}\right)-\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{1}{n!}\int_a^b x^n\left|f^{(n)}(x)\right|dx$$

$$\le \frac{1}{n!}\left(\int_a^b x^n dx\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b x^n\left|f^{(n)}(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \frac{1}{n!}\left(\int_a^b x^n dx\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b x^n\left[\frac{x-a}{b-a}\left|f^{(n)}(b)\right|^q+\frac{b-x}{b-a}\left|f^{(n)}(a)\right|^q\right]dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{1}{n!}(b-a)^{1-\frac{1}{q}}\left[\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}\right]^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left|f^{(n)}(b)\right|^q\left[\frac{(b^{n+2}-a^{n+2})}{(n+2)(b-a)}-a\frac{(b^{n+1}-a^{n+1})}{(n+1)(b-a)}\right]\right.$$

$$\left.+\left|f^{(n)}(a)\right|^q\left[b\frac{(b^{n+1}-a^{n+1})}{(n+1)(b-a)}-\frac{(b^{n+2}-a^{n+2})}{(n+2)(b-a)}\right]\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{1}{n!}(b-a)^{1-\frac{1}{q}}L_n^{n\left(\frac{q-1}{q}\right)}(a,b)\times$$

$$\left\{\left|f^{(n)}(b)\right|^q\left[L_{n+1}^{n+1}(a,b)-aL_n^n(a,b)\right]+\left|f^{(n)}(a)\right|^q\left[bL_n^n(a,b)-L_{n+1}^{n+1}(a,b)\right]\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Sonuç 4.4.2 Teorem 4.4.2'nin şartları altında $n=1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{f(b)b-f(a)a}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le 6^{-\frac{1}{q}}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}[(2b+a)|f'(b)|^q+(b+2a)|f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}}.$$

Önerme 4.4.2 $a<b$ olmak üzere $a,b\in(0,\infty)$, $q\ge 1$ ve $m\in(-\infty,0]\cup[1,\infty)\backslash\{-2q,-q\}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$L_{\frac{m}{q}+1}^{\frac{m}{q}+1}(a,b)\le 3^{-\frac{1}{q}}A^{1-\frac{1}{q}}(a,b)[2A(a^2,b^2)+G^2(a,b)A(a,b)]^{\frac{1}{q}}.$$

İspat: İstenilen netice Sonuç 4.4.2'den $f(x)=\frac{q}{m+q}x^{\frac{m}{q}+1}$, $x\in(0,\infty)$ fonksiyonu için elde edilir. Gerçekten de verilen fonksiyonu

$$\left|\frac{f(b)b-f(a)a}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le 6^{-\frac{1}{q}}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}[(2b+a)|f'(b)|^q+(b+2a)|f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğinde yerine yazarak düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{\frac{q}{m+q}b^{\frac{m}{q}+1}b-\frac{q}{m+q}a^{\frac{m}{q}+1}a}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b\frac{q}{m+q}x^{\frac{m}{q}+1}dx$$

$$\le 6^{-\frac{1}{q}}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}[(2b+a)b^m+(b+2a)a^m]^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{b^{\frac{m}{q}+2}-a^{\frac{m}{q}+2}}{\left(\frac{m}{q}+2\right)(b-a)} \leq 6^{-\frac{1}{q}}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[(2b+a)b^{m}+(b+2a)a^{m}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$L_{\frac{m}{q}+1}^{\frac{m}{q}+1}(a,b) \leq 6^{-\frac{1}{q}}A^{1-\frac{1}{q}}(a,b)[2(a^{m+1}+b^{m+1})+ab(a^{m-1}+b^{m-1})]^{\frac{1}{q}}$$

$$L_{\frac{m}{q}+1}^{\frac{m}{q}+1}(a,b) \leq 6^{-\frac{1}{q}}A^{1-\frac{1}{q}}(a,b)[4A(a^{m+1},b^{m+1})+2G^{2}(a,b)A(a^{m-1},b^{m-1})]^{\frac{1}{q}}$$

Sonuç 4.4.3 Önerme 4.4.2’yi kullanarak $m=1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$L_{\frac{1}{q}+1}^{\frac{1}{q}+1}(a,b) \leq 3^{-\frac{1}{q}}A^{1-\frac{1}{q}}(a,b)[2A(a^{2},b^{2})+G^{2}(a,b)]^{\frac{1}{q}}$$

Sonuç 4.4.4 Önerme 4.4.2’yi kullanarak $q=1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$L_{m+1}^{m+1}(a,b) \leq \frac{1}{3}[2A(a^{m+1},b^{m+1})+G^{2}(a,b)A(a^{m-1},b^{m-1})].$$

Sonuç 4.4.5 Sonuç 4.4.4’ü kullanarak $m=1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$L_{2}^{2}(a,b) \leq \frac{1}{3}[2A(a^{2},b^{2})+G^{2}(a,b)].$$

Sonuç 4.4.6 Teorem 4.4.2’nin şartları altında $q=1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\left(\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1}-f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!}\right)-\int_{a}^{b}f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left\{\left|f^{(n)}(b)\right|\left[L_{n+1}^{n+1}(a,b)-aL_{n}^{n}(a,b)\right]+\left|f^{(n)}(a)\right|\left[bL_{n}^{n}(a,b)-L_{n+1}^{n+1}(a,b)\right]\right\}.$$

Teorem 4.4.3 $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $f: I\subseteq(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu n-kere diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $0\leq a<b$. Eğer $f^{(n)}\in L[a,b]$ ve $q>1$ için $\left|f^{(n)}\right|^{q}$, $[a,b]$ üzerinde konveks ise o zaman aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\left(\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1}-f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!}\right)-\int_{a}^{b}f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}}{n!}\left\{\left|f^{(n)}(b)\right|^{q}\left[L_{nq+1}^{nq+1}(a,b)-aL_{nq}^{nq}(a,b)\right]\right.$$

$$\left.+\left|f^{(n)}(a)\right|^{q}\left[bL_{nq}^{nq}(a,b)-L_{nq+1}^{nq+1}(a,b)\right]\right\}^{\frac{1}{q}}$$

İspat: $\left|f^{(n)}\right|^{q}$, $[a,b]$ üzerinde konveks olduğundan, Lemma 4.4.1 ve Hölder integral eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1}-f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!}\right)-\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{1}{n!}\int_a^b 1.x^n\left|f^{(n)}(x)\right|dx$$

$$\leq\frac{1}{n!}\left(\int_a^b 1^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b x^{nq}\left|f^{(n)}(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{1}{n!}\left(\int_a^b 1.dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b x^{nq}\left|f^{(n)}\left(\frac{x-a}{b-a}b+\frac{b-x}{b-a}a\right)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\frac{1}{n!}\left(\int_a^b 1.dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b\left[\frac{x-a}{b-a}x^{nq}\left|f^{(n)}(b)\right|^q+\frac{b-x}{b-a}x^{nq}\left|f^{(n)}(a)\right|^q\right]dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{1}{n!}(b-a)^{\frac{1}{p}}\left\{\left|f^{(n)}(b)\right|^q\left(\frac{b^{nq+2}-a^{nq+2}}{(nq+2)(b-a)}-a\frac{b^{nq+1}-a^{nq+1}}{(nq+1)(b-a)}\right)\right.$$

$$\left.+\left|f^{(n)}(a)\right|^q\left(b\frac{b^{nq+1}-a^{nq+1}}{(nq+1)(b-a)}-\frac{b^{nq+2}-a^{nq+2}}{(nq+2)(b-a)}\right)\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}}{n!}\left\{\left|f^{(n)}(b)\right|^q\left[L_{nq+1}^{nq+1}(a,b)-aL_{nq}^{nq}(a,b)\right]\right.$$

$$\left.+\left|f^{(n)}(a)\right|^q\left[bL_{nq}^{nq}(a,b)-L_{nq+1}^{nq+1}(a,b)\right]\right\}^{\frac{1}{q}}$$

Sonuç 4.4.7 Teorem 4.4.3'ün şartları altında $n=1$ için aşağıdaki elde edilir:

$$\left|\frac{f(b)b-f(a)a}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\left\{\frac{|f'(b)|^q}{b-a}\left[L_{q+1}^{q+1}(a,b)-aL_q^q(a,b)\right]+\frac{|f'(a)|^q}{b-a}\left(bL_q^q(a,b)-L_{q+1}^{q+1}(a,b)\right)\right\}^{\frac{1}{q}}$$

İspat: İspat için Teorem 4.4.3'de elde edilen eşitsizlikte $n=1$ yazarak gerekli kısaltmaları yapmak yeterlidir.

Önerme 4.4.3 $a<b$ olmak üzere $a,b\in(0,\infty)$, $q>1$ ve $m\in(-\infty,0]\cup[1,\infty)\backslash\{-2q,-q\}$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$L_{\frac{m}{q}+1}^{\frac{m}{q}+1}(a,b)\leq(b-a)^{-\frac{1}{q}}\left[(b^m-a^m)L_{q+1}^{q+1}(a,b)-G^2(a,b)(b^{m-1}-a^{m-1})L_q^q(a,b)\right]^{\frac{1}{q}}.$$

İspat: İstenen sonuç $f(x)=\frac{q}{m+q}x^{\frac{m}{q}+1}$, $x\in(0,\infty)$ fonksiyonu için Sonuç 4.4.7'den direkt olarak elde edilir. Gerçekten de istenen sonucu elde etmek için

$$\left|\frac{f(b)b-f(a)a}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\left\{\frac{|f'(b)|^q}{b-a}\left[L_{q+1}^{q+1}(a,b)-aL_q^q(a,b)\right]+\frac{|f'(a)|^q}{b-a}\left(bL_q^q(a,b)-L_{q+1}^{q+1}(a,b)\right)\right\}^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğinde verilen fonksiyonu yerine yazarak gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\frac{\frac{q}{m+q}b^{\frac{m}{q}+1}b-\frac{q}{m+q}a^{\frac{m}{q}+1}a}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b\frac{q}{m+q}x^{\frac{m}{q}+1}dx$$

$$\leq\left\{\frac{b^m}{b-a}\left[L_{q+1}^{q+1}(a,b)-aL_q^q(a,b)\right]+\frac{a^m}{b-a}\left[bL_q^q(a,b)-L_{q+1}^{q+1}(a,b)\right]\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{b^{\frac{m}{q}+2}-a^{\frac{m}{q}+2}}{\left(\frac{m}{q}+2\right)(b-a)}\leq(b-a)^{-\frac{1}{q}}\left\{b^m\left[L_{q+1}^{q+1}(a,b)-aL_q^q(a,b)\right]+a^m\left[bL_q^q(a,b)-L_{q+1}^{q+1}(a,b)\right]\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$L_{\frac{m}{q}+1}^{\frac{m}{q}+1}(a,b)\leq(b-a)^{-\frac{1}{q}}\left\{(b^m-a^m)L_{q+1}^{q+1}(a,b)+ab(b^{m-1}-a^{m-1})L_q^q(a,b)\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$L_{\frac{m}{q}+1}^{\frac{m}{q}+1}(a,b)\leq(b-a)^{-\frac{1}{q}}\left[(b^m-a^m)L_{q+1}^{q+1}(a,b)-G^2(a,b)(b^{m-1}-a^{m-1})L_q^q(a,b)\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.4.8 Önerme 4.4.3'den $m=1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$L_{\frac{1}{q}+1}^{\frac{1}{q}+1}(a,b)\leq\left[L_{q+1}^{q+1}(a,b)\right]^{\frac{1}{q}}=L_{q+1}^{\frac{q+1}{q}}(a,b)$$

Teorem 4.4.4 $n\in\mathbb{N}$ için $f:I\subseteq(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde n-kere diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a<b$ olmak üzere $a,b\in I^{\circ}$ olsun. Eğer $f^{(n)}\in L[a,b]$ ve $q>1$ için $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a,b]$ üzerinde konkav ise o zaman aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1}-f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!}\right)-\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{b-a}{n!}L_{np}^n(a,b)\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|.$$

İspat: $\left|f^{(n)}\right|^q$, $q>1$ için $[a,b]$ üzerinde konkav olduğundan Hermite-Hadamard eşitsizliğine göre

$$\int_a^b \left|f^{(n)}(x)\right|^q dx \leq (b-a)\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q$$

elde edilir. Lemma 4.4.1 ve Hölder integral eşitsizliğini kullanarak

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1}-f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!}\right)-\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{1}{n!}\int_a^b x^n\left|f^{(n)}(x)\right|dx$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left(\int_a^b x^{np}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b \left|f^{(n)}(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left(\int_a^b x^{np}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left((b-a)\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{b-a}{n!}\left[\frac{b^{np+1}-a^{np+1}}{(np+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}}\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$=\frac{b-a}{n!}L_{np}^n(a,b)\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|.$$

olur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 4.4.9 Teorem 4.4.4'ün şartları altında $n=1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{f(b)b-f(a)a}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq L_p(a,b)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

Önerme 4.4.4 $a<b$ olmak üzere $a,b\in(0,\infty)$, $q>1$ ve $m\in[0,1]$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$L_{\frac{m}{q}+1}^{\frac{m}{q}+1}(a,b) \leq L_p(a,b)A^{\frac{m}{q}}(a,b).$$

İspat: Önermenin varsayımları altında$f(x)=\frac{q}{m+q}x^{\frac{m}{q}+1}$, $x\in(0,\infty)$ olsun. O zaman $|f'(x)|^q=x^m$, $(0,\infty)$ üzerinde konkav olur ve Sonuç 4.4.9'dan elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Son yıllarda eşitsizlikler ve konvekslik üzerine çok sayıda çalışmalar yapılmaktadır. Hem eşitsizlikler hem de konvekslik sadece matematiğin değil diğer birçok bilim dalının ilgisini çeken konular olmuştur ve çekmeye de devam edecektir. Tezimizin Giriş kısmında da belirttiğimiz gibi konvekslik fizik, biyoloji, tıp, güzel sanatlar, müzik, endüstri, finans matematiği, coğrafya, mühendislik, matematiksel istatistik, oyun teorisi, termodinamik, insan anatomisi ve günlük hayatımızda karşımıza çıkmaktadır.

Biz ise bu çalışmamızın bulgular kısmında fonksiyonun türevinin mutlak değerinin GA-konveks ve yine fonksiyonun türevinin mutlak değerinin herhangi bir kuvvetinin GA-konveks olması durumlarında ele almış olduğumuz integral eşitlikleri Hölder ve Power-Mean integral eşitsizliklerinden yararlanarak konveksliğin bir çeşidi olan Geometrik-Aritmetik(GA)-konveks fonksiyonlara uygulayıp yeni eşitsizlikler elde edilmiş ve uygulama açısından çalıştığımız konuya uygun fonksiyonlar alınarak özel ortalamalar arasında eşitsizlikler bulunmuştur. Daha sonra son kısımda n-kere diferensiyellenebilen konveks ve konkav fonksiyonlar için ele almış olduğumuz integral eşitliği ile birlikte Hölder, Power-Mean ve Hermite-Hadamard integral eşitsizliklerinden yararlanarak yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Bu bölümde elde edilen bulguların bir kısmı uluslararası konferansta bildiri olarak sunulmuş, özeti bildiri olarak basılmış ve makale ise tam metin olarak yayımlanmıştır. Ayrıca tezin son kısmı da SCI-EXPANDED kapsamındaki bir dergide makale olarak basılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Adams, R. A., Essex, C. 2010. Calculus A Complete Course. Pearson Canada Inc., Toronto, Ontario, pp. 934.

[2] Akan, N. B. 2008. Yapısal Faiz Oranı Riski Ölçümü. Bankacılar Dergisi, Sayı 64.

[3] Alomari, M. W. N. 2011. Several inequalities of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson type for s-convex quasi-convex and r-convex mappings with some applications. Doktora Tezi, Universiti Kebangsaan Malaysia Bangi.

[4] Alomari, M., Darus, M., Dragomir, S.S., Cerone, P. 2010. Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are s-convex in the second sense. Applied Mathematics Letter. 23, 1071–1076.

[5] Anton, H. 2010. Elementary Linear Algebra. Wiley. 10th Ed. USA.

[6] Ardıç, M. A., Akdemir, A. O., Set, E. 2016. New Ostrowski Like Inequalities for GG–Convex and GA–Convex Functions. Mathematical Inequalities and Applications, Volume 19, Number 4, 1159–1168.

[7] Avcı, M., Akdemir, A.O., Set, E., 2015. New Integral Inequalities Via GA-convex Functions. http://rgmia.org/papers/v18/v18a103.pdf.

[8] Azpeitia, A.G. 1994. Convex functions and the Hadamard inequality. Revista Colombiana Matematicas. 28, 7-12.

[9] Bagdasar, O. 2006. Inequalities and Applications. Bachelor's Degree Thesis, Babeş Bolyai University, Cluj Napoca.

[10] Balcı, M. 2012. Reel Analiz, Sürat Yayıncılık.

[11] Bayraktar, M. 2000. Fonksiyonel Analiz. ISBN 975-442-035.

[12] Bayraktar, M. 2010. Analiz. ISBN 978-605-395-412-5.

[13] Bullen, P. S., Mitrinovic, D. S., Vasiś, P. M. 1988. Means and Their Inequalities. Springer Science+Business Media, B. V., 1 st edition.

[14] Carter, M., Van Brunt, B. 2000. The Lebesgue-Stieltjes Integral: A Practical Introduction. ISBN: 0387950125.

[15] Cengiz, N., Tarakçı, Ö., Aktaş, M., Tosun, M., Kadakal, M., Şengül, Ş., Kaplan, A., Kır, E. 2004. Genel Matematik. Pegema Yayıncılık. Ankara.

[16] Çoban, H. A., İşcan, İ., Kunt, M. 2016. New Ostrowski type inequalities for GA-convex functions, New Trends in Mathematical Sciences. NTMSCI 4, No. 4, 1-11.

[17] Dragomir, S. S., Fitzpatrick, S. 1999. The Hadamards inequality for s-convex functions in the second sense. Demonstratio Mathematica. 32 (4), 687–696.

[18] Dragomir, S. S., Pearce, C. E. M., 2000. Selected topics on Hermite-Hadamard type inequalities and applications. RGMIA Monographs. Available: http://rgmia.vu.edu.au/monographs/hermite hadamard.html.

[19] Ekinci, A. 2014. Klasik Eşitsizlikler Yoluyla Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

[20] Hardy, G. Littlewood, J.E. Polya, G. 1952. Inequalities. 2nd Ed., Cambridge University Press, 324, United Kingdom.

[21] Hua, J., Xi, B. Y., Qi, F. 2014. Hermite-Hadamard Type Inequalities For Geometric-Arithmetically s-Convex Functions. Communication of the Korean Mathematical Society. 29, No. 1, pp. 51–63.

[22] Hudzik, H., Maligranda, L. 1994. Some remarks on s-convex functions. Aequationes Mathematicae. 48, 100–111.

[23] Hugo D. Junghenn, 2015. A Course in Real Analysis. CRC Press, Taylor & Francis Group.

[24] Hwang, D. Y., Dragomir, S. S. 2014. Comparing two integral means for absolutely continuous functions whose absolute value of the derivative are convex and applications. Applied Mathematics and Computation, 230 (2014) 259–266.

[25] İşcan, İ. 2013. New General Integral Inequalities for Some GA-Convex and Quası-Geometrically Convex Functions Via Fractional Integrals. Arxiv:1307.3265v1 [Math.CA] 11 Jul 2013.

[26] İşcan, İ. 2014. Hermite-Hadamard type inequalities for GA-s-convex functions. Le Matematiche, LXIX-Fasc. II, pp. 129-146.

[27] İşcan, İ. 2014. Hermite-Hadamard and Simpson Type Inequalities for Differentiable P-GA-Functions. International Journal of Analysis, Volume 2014, Article ID 125439, 6 pages.

[28] İşcan, İ., Aydin, M. 2016. Some New Generalized Integral Inequalities for GA-s-Convex Functions via Hadamard Fractional Integrals. Chinese Journal of Mathematics Volume 2016, Article ID 4361806, 8 pages.

[29] İşcan, İ., Kunt, M. 2015. New General Integral Inequalities for (α, m)-GA-Convex Functions Via Hadamard Fractional Integrals. arXiv:1505.03318v1 [math.CA] 11 May 2015.

[30] İşcan, İ., Turhan, S. 2016. Generalized Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for GA-convex functions via fractional integral. Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis. Volume 2(1), pages 34-46.

[31] Kala, J. R., Viriri, S., Moodley, D., Tapamo, J. R. 2016. Leaf Classification Using Convexity Measure of Polygons. Image and Signal Processing, 7th International Conference, May 30-June 1, Canada.

[32] Kavurmacı, H. 2012. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

[33] Latif, M. L. 2014. New Hermite–Hadamard type integral inequalities for GA-convex functions with applications. Analysis, 34 (4):379–389.

[34] Latif, M. A. 2015. Hermite-Hadamard Type Inequalities for GA-convex Functions on the Co-ordinates with Applications. Proceedings of the Pakistan Academy of Sciences. 52 (4): 367–379.

[35] Liao, Y. M., Deng, J. H., Wang, J. R. 2013. Riemann-Liouville Fractional Hermite-Hadamard Inequalities. Part I: for Once Differentiable Geometric-Arithmetically s-convex Functions. Journal of Inequalities and Applications 2013, 2013:443.

[36] Liao, Y. M., Deng, J. H., Wang, J. R. 2013. Riemann-Liouville fractional Hermite-Hadamard inequalities, Part II: for twice differentiable geometric-arithmetically s-convex functions. Journal of Inequalities and Applications 2013, 2013:443.

[37] Maden, S., Turhan, S., İşcan, İ. 2016. New Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for GA-convex functions. AIP Conference Proceedings 1726, 020043.

[38] Michael J. C. Byron C.D. Lebedev, L.P. 2014. Inequalities with Applications to Engineering. Springer.

[39] Miheşan, V. G. 1993. A generalization of the convexity. Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity. Cluj-Napoca, Romania.

[40] Mitrinović, D. S. 1970. Analytic Inequalities. Springer-Verlang, Berlin.

[41] Mitrinović, D.S., Pečarić, J. E., Fink A. M. 1991. Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. Kluwer Academic Publishers, 587 pp, Dordrecht/Boston/London.

[42] Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., Fink, A. M. 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, 740, UK.

[43] Niculescu, C. P. 2000. Convexity according to the geometric mean. Math. Inequal. Appl. 3 (2), Available online at http://dx.doi.org/10.7153/mia-03-19, 155–167.

[44] Niculescu L. E. Persson 2006. Convex Functions and Their Applications-A Contemporary Approach. Springer Sciences.

[45] Pachpatte B. G. 2005. Mathematical inequalities. North-Holland Mathematical Library, 67.

[46] Park, J. 2013a. Some Generalized Inequalities of Hermite-Hadamard Type for (α, m)-Geometric-Arithmetically Convex Functions. Applied Mathematical Sciences, Vol. 7, no. 95, 4743-4759.

[47] Park, J. 2013b. New Hermite-Hadamard-Like Type Inequalities for Twice Differentiable (α, m)-GA-Convex Functions. International Journal of Mathematical Analysis. Vol. 7, 2013, no. 51, 2503-2515.

[48] Pečarić, J. E., Porschan, F., Tong, Y. L. 1992. Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications. Academic Press Inc.

[49] Peter M., Gruber, Jorg M., Wills, 1983. Convexity and Its Applications. Springer Basel AG.

[50] Qi, F., Xi, B. Y. 2013. Some integral inequalities of Simpson type for GA-ε-convex functions. Georgian Mathematical Jornal. Galley Proof, DOI 10.1515/gmj-2013-0043,14 pages.

[51] Qu, M., Liu, W., Park, J. 2014. Some new Hermite-Hadamard-type inequalities for geometric-arithmetically s-convex functions. Wseas Transactions on Mathematics, volume 13., 2014.

[52] Roberts, A. W., Varberg, D. E. 1973. Convex Functions. Academic Press, New York, pp 300.

[53] Satnoianu, R. A. 2000. Mproved GA−Convexity Inequalities. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Victoria University, ISSN(electronic): 1443-5756.

[54] Set, E. 2010. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

[55] Shuang, Y., Qi, F. 2017. Integral inequalities of the Hermite–Hadamard type for (α, m)-GA-convex functions. The Journal of Nonlinear Sciences and Applications, J. Nonlinear Sci. Appl., 10, no. 4, 1854–1860.

[56] Shuang, Y., Yin, H .P., Qi, F. 2013. Hermite-Hadamard type integral inequalities for geometric-arithmetically s-convex functions. Analysis 33, 197–208.

[57] Sudhir R. Ghorpade, Balmohan V. Limaye, 2010. A Course in Calculus and Real Analysis. Springer.

[58] Tunç, M. 2011. Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

[59] Wright, E. M. 1954. An inequality for convex functions. American Mathematical Monthly. 61, 620-622.

[60] Yaldız, H. 2012. Kesirli İntegraller için Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Yüksek Lisans Tezi. Düzce Üniversitesi, Düzce.

[61] Zhang T. Y., Ji, A. P., Qi, F. 2013. Some Inequalities of Hermite-Hadamard Type for GA-Convex Functions with Applıcations To Means. Le Matematiche, Vol. Lxvııı-Fasc. I, pp. 229–239.

[62] Zhang, X. M., Chu, Y. M., Zhang, X. H., 2010. The Hermite-Hadamard Type Inequality of GA-Convex Functions and Its Application. Journal of Inequalities and Applications. Volume 2010, Article ID 507560, 11 pages.

[63] Zhang, Z., Wei, W., Wang, J. R. 2015. Wang, Generalization of Hermite-Hadamard Inequalities Involving Hadamard Fractional Integrals. Filomat. 29:7, 1515–1524.

[64]http://expressingyourtruth.blogspot.com.tr/2012/08/concave-vs-convex-profile_14.html, Tuesday, June 18, 2013.

[65] https://cias.rit.edu/faculty-staff/265/student/1073

[66] http://knaufdanoline.com/wp-content/uploads/Room-shape.pdf

[67] http://positivemed.com/2016/03/01/facial-profile/, Mar 1, 2016.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Huriye KADAKAL

Doğum Yeri : Manisa

Doğum Tarihi : 11.08.1972

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-mail : huriyekadakal@hotmail.com

İletişim Bilgileri : Bahçelievler M. Latife Hanım Caddesi No: 108 Bulancak/GİRESUN

Öğrenim Durumu:

Derece	**Bölüm/ Program**	**Lise/Üniversite**	**Yıl**
Lise	Matematik	Manisa Lisesi	1989
Lisans	Matematik	Ondokuz Mayıs Üniversitesi	1993
Yüksek Lisans	Matematik	Ahi Evran Üniversitesi	2011

İş Deneyimi:

Görev	**Görev Yeri**	**Yıl**
Matematik Öğretmeni	Tomarza İmam Hatip Lisesi-KAYSERİ	1994
Matematik Öğretmeni	Yörükler İlköğretim Okulu-SAMSUN	1995
Matematik Öğretmeni	Samsun Milli Piyango Anadolu Lisesi-SAMSUN	2001
Matematik Öğretmeni	Kırşehir Sıddık Demir Anadolu Lisesi-KIRŞEHİR	2008
Matematik Öğretmeni	Bulancak Bahçelievler Anadolu Lisesi-GİRESUN	2012

Tezler:

1. **Yüksek Lisans Tezi:** Huriye Kadakal "Diferensiyel Denklemlerin Homotopi Perturbasyon Metodu İle Yaklaşık Analitik Çözümleri", Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı, Kırşehir Temmuz – 2011(Yüksek Lisans Tezi),
   Danışman: Yrd. Doç. Dr. İsmail Onur KIYMAZ.

1. YAYINLAR

1.1. Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayınlanan Makaleler:

1.1.1. Mahir KADAKAL, Huriye KADAKAL and İmdat İŞCAN "Some new integral inequalities for n-times differentiable s-convex functions in the first sense", *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 2017, Vol. 5, No. 2, 63-68.

1.1.2. Huriye KADAKAL, Mahir KADAKAL and İmdat İŞCAN "Some new integral inequalities for n-times differentiable s-convex and s-concave functions in the second sense", *Mathematics and Statistic*, 5(2): 94-98, 2017.

1.1.3. İmdat İŞCAN, Huriye KADAKAL and Mahir KADAKAL, "Some new integral inequalities for n-times differentiable log-convex functions", *New Trends in Matehematical Sciences*, 5, No. 2, 10-15 2017.

1.1.4. İmdat İŞCAN, Huriye KADAKAL and Mahir KADAKAL, "Some New Integral Inequalities for n- Times Differentiable Quasi-Convex Functions", *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 35 (3), 363-368, 2017.

1.1.5. Selahattin MADEN, Huriye KADAKAL, Mahir KADAKAL and İmdat İŞCAN, "Some new integral inequalities for n-times differentiable convex functions", *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 10 12,(2017), 6141-6148.

1.1.6. Mahir KADAKAL, İmdat İŞCAN, Huriye KADAKAL "On New Simpson Type Inequalities for The P-Quasi Convex Functions", *Turkish Journal of Inequalities*, 2(1), 30-37, 2018.

1.1.7. Mahir Kadakal, Huriye Kadakal and İmdat İşcan, "Some new integral inequalities for n- times differentiable strongly convex functions", *Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi*, 8(1):147-150, 2018.

1.1.8. Huriye KADAKAL, Mahir KADAKAL and İmdat İŞCAN, "Some New Integral Inequalities for n-Times Differentiable Godunova-Levin Functions", *Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, Vol. 38-4, Supplement (2017) 1-5.

1.1.9. İmdat İŞCAN, Huriye KADAKAL and Mahir KADAKAL, "Some New Integral Inequalities for n- Times Differentiable (α, m)-Convex Functions", *New Trends in Matehematical Sciences*, 5, No. 2, 180-185, 2017.

1.1.10. Huriye KADAKAL, İmdat İŞCAN and Mahir KADAKAL, "New Type Integral Inequalities for p -Quasi Convex Functions, *Ordu Univ. J. Sci. Tech.*, Vol:7, No:1,2017,124-130.

1.1.11. Huriye KADAKAL, "On new integral inequalities for m-logarithmically-convex function", *New Trends in Mathematical Sciences*, 6, No. 4, 1-7, 2018.

1.1.12. İmdat İşcan, Huriye Kadakal, Merve Kırömeroğlu, "Refinements of Fractional integral inequalities obtained for p-convex functions", *Journal of Abstract and Computational Analysis*, 3, No. 1, 22-32 (2018).

1.1.13. Selahattin Maden, Huriye Kadakal, Mahir Kadakal and İmdat İşcan "Some New Integral Inequalities for n- Times Differentiable P-Functions", American Institute of Physics, AIP Conference Proceedings 1833, 020015 (2017); doi: 10.1063/1.4981663.

1.1.14. Huriye KADAKAL, Mahir KADAKAL and İmdat İŞCAN, "Some New Integral Inequalities for n-Times Differentiable r-Convex and r-Concave Functions", *Miskolc Mathematical Notes*, 2017, (Submitted).

1.1.15. İmdat İŞCAN, Mahir KADAKAL and Huriye KADAKAL, "New Integral Inequalities for Differentiable Preinvex and Prequasiinvex Functions", *Siberian Mathematical Journal*, 2017, (Submitted).

1.1.16. İmdat İŞCAN, Mahir KADAKAL and Huriye KADAKAL, "New Integral Inequalities for two Times Differentiable Preinvex and Prequasiinvex Functions", *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.*, 2018, (Kabul edildi).

1.1.17. Huriye KADAKAL, Mahir KADAKAL and İmdat İşcan, "New type integral inequalities for three times differentiable preinvex and prequasiinvex functions", *Open Journal of Mathematical Analysis*, 2(1), 34-46, 2018.

1.2. Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitabında (*Proceedings)* Basılan Bildiriler:

1.2.1. Huriye Kadakal, Selahattin Maden and Sercan Turhan, "Relationships between integral averages for absolutely continuous functions whose derivative are GA convex functions", International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences, Antalya, Turkey**,** 18-21 April 2017.

1.2.2. Selahattin Maden, Huriye Kadakal, Mahir Kadakal and İmdat İşcan "Some New Integral Inequalities for n- Times Differentiable P- Functions", International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences, Antalya, Turkey**,** 18-21 April 2017.

1.2.3. Huriye KADAKAL, "Multiplicatively P-Functions", International Conference on Mathematics and Mathematics Education, ICMME-2018, Ordu University, Ordu, 27-29 June 2018.

1.2.4. İmdat İşcan, Selahattin Maden and Huriye Kadakal, "New Type Integral Inequalities for Fourth Times Differentiable Prequasiinvex Functions", International Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA2018), May 11-13 Yıldız Technical University, Turkey.

1.2.5. İmdat İşcan, Selahattin Maden and Huriye Kadakal, "Some New Integral Inequalities for n-Times Differentiable Strongly r-Convex Functions", International Conference on Applied and Mathematical Modeling ICAAMM18, June 20-24, 2018, İstanbul-Turkey.

2. PROJELER

2.1. Giresun İl Milli Eğitim Müdürlüğü ile Batonyterenye/HUNGARY arasında "Gender Education for Teachers" projesi. 14-18 April 2014.

2.2. TÜBİTAK Bilim İnsanı Destak Programları, 48. Lise Öğrencileri Araştırma Projeleri Samsun Bölge Yarışması, 2017.

3. VERDİĞİ LİSANS DÜZEYDEKİ DERSLER

2001-2002 GÜZ YARIYILI				
	KODU	**ADI**	**FAKÜLTE**	**BÖLÜM**
1	MAT209	Genel Matematik-I	OMÜ-Eğitim Fakültesi	Fen Bilgisi
2	MAT205	Temel Matematik-I	OMÜ-Eğitim Fakültesi	Sınıf Öğrt.