T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTEGRALLENEBİLİR BULANIK SAYI DEĞERLİ FONKSİYONLARIN AĞIRLIKLI ORTALAMA TOPLANABİLME METODU İÇİN BAZI TAUBER TİPİ TEOREMLER

UĞUR DEMİRCAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2018

T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

İNTEGRALLENEBİLİR BULANIK SAYI DEĞERLİ FONKSİYONLARIN AĞIRLIKLI ORTALAMA TOPLANABİLME METODU İÇİN BAZI TAUBER TİPİ TEOREMLER

UĞUR DEMİRCAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2018

TEZ ONAY

Uğur DEMİRCAN tarafından hazırlanan **"İNTEGRALLENEBİLİR BULANIK SAYI DEĞERLİ FONKSİYONLARIN AĞIRLIKLI ORTALAMA TOPLANABİLME METODU İÇİN BAZI TAUBER TİPİ TEOREMLER"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 10.09.2018 tarihinde yapılmış ve jüri tarafından oy birliği ile Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Cemal BELEN Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Ordu Üniversitesi	………………………………
Üye Doç. Dr. İmdat İŞCAN Matematik Bölümü, Giresun Üniversitesi	………………………………
Üye Doç. Dr. Erhan SET Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	………………………………

16 / 10 / 2018 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 26 / 10 / 2018 tarih ve 2018 / 504 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1923

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

UĞUR DEMİRCAN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

İNTEGRALLENEBİLİR BULANIK SAYI DEĞERLİ FONKSİYONLARIN AĞIRLIKLI ORTALAMA TOPLANABİLME METODU İÇİN BAZI TAUBER TİPİ TEOREMLER

UĞUR DEMİRCAN

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ 32 SAYFA

TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. CEMAL BELEN

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Tezin ilk bölümü giriş bölümü olup burada tez konusunun içeriği ile ilgili kavramların tarihsel gelişimi ve tezin amacı belirtilmiştir.

İkinci bölümde fonksiyonların sonsuzdaki istatistiksel limiti kavramı, bulanık sayılar ve bulanık sayı değerli fonksiyonlarla ilgili tezde kullanılacak temel gösterimler, tanımlar ve sonuçlar sunulmuştur.

Tezin ana bölümü olan üçüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda bulanık sayı değerli fonksiyonların Riemann-Stieltjes integrali düşüncesinden yararlanılarak sürekli bulanık sayı değerli fonksiyonların Riemann integrallerinin ağırlıklı ortalama metodu tanımlanmış ve bu metot için bazı Tauber tipi teoremler ispatlanmıştır. İkinci kısımda ilk olarak sürekli bulanık sayı değerli fonksiyonların sonsuzdaki istatistiksel limiti tanımlanıp bu limitin klasik anlamdaki sonsuz limit ile ilişkisi incelenmiştir. Sonrasında ise sürekli bulanık sayı değerli fonksiyonların Riemann integrallerinin ağırlıklı ortalama metoduna göre istatistiksel toplanabilirliğinden bu integrallerin sonsuzdaki istatistiksel limitinin varlığının elde edildiği bir Tauber koşulu belirlenmiştir.

Tezin son bölümünde ise teze ait sonuçlar ve öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Bulanık sayı, Bulanık sayı değerli fonksiyon, İstatistiksel yakınsaklık, Ağırlıklı ortalama toplanabilme metodu.

ABSTRACT

SOME TAUBERIAN THEOREMS FOR THE WEIGHTED MEAN SUMMABILITY METHOD OF INTEGRABLE FUZZY VALUED FUNCTIONS

UĞUR DEMİRCAN

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 32 PAGES

SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. CEMAL BELEN

This thesis consists of four chapters.

The first chapter of the thesis is introduction chapter and it includes the historical development of concepts related to thesis topic and also the purpose of the thesis study.

In the second chapter we present basic notations, definitions and results related to the concepts of statistical limit of functions at infinity, fuzzy numbers and fuzzy number valued functions

The third chapter is main chapter of the thesis and it is divided into two sections. In the first section, the weighted mean method of Riemann integrals of continuous fuzzy number valued functions is introduced with the help of the notion of Riemann-Stieltjes integrals of fuzzy number valued functions, and also some Tauberian theorems are proved for this method. In the second section, firstly the idea of statistical limit of continuous fuzzy number valued functions at infinity is introduced and then the relation between statistical limit and classical limit is examined. Later, a Tauberian condition under which statistical limit of Riemann integrals of continuous fuzzy number valued functions follows from its statistical summability with respect to weighted mean method is established.

In the final chapter some conclusions and recommendations of the thesis are presented.

Keywords: Fuzzy number, Fuzzy number valued function, Statistical convergence, Weighted mean method of summability.

TEŞEKKÜR

Bu tez calışmasının belirlenmesi ve hazırlanması esnasında ilgisini hiç eksik etmeyen, bilgi ve tecrübesiyle her konuda destek olan ve bir dost gibi davranan değerli hocam Doç. Dr. Cemal BELEN'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca her zaman başarılı olacağıma inanan ve daima yanımda olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$f(x) = O(1)$	$f(x)$ fonskiyonunun yeterince büyük x değerleri için sınırlı olması
$\mathcal{FRS}[a,b]$	$[a,b]$ aralığında Riemann-Stieltjes anlamında integrallenebilir bulanık sayı değerli fonksiyonların sınıfı
$\liminf\limits_{x\to\infty} f(x)$	f fonksiyonunun $x \to \infty$ iken alt limiti
$\limsup\limits_{x\to\infty} f(x)$	f fonksiyonunun $x \to \infty$ iken üst limiti
μ_A	A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu
$(\overline{N}, q)$	Ağırlıklı ortalama metoduna göre toplanabilme
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\overline{\mathbb{R}}$	Genişletilmiş reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$	Tüm bulanık sayıların kümesi
$st\text{-}\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	f fonksiyonunun $x \to \infty$ iken istatistiksel limiti
$st - \liminf\limits_{x\to\infty} \phi(x)$	ϕ fonksiyonunun $x \to \infty$ iken istatistiksel alt limiti
$st - \limsup\limits_{x\to\infty} \phi(x)$	ϕ fonksiyonunun $x \to \infty$ iken istatistiksel üst limiti
$[u]_\alpha$	u bulanık sayısının α-seviye kümesi
u_α^-	u bulanık sayısının α-seviye kümesinin sol uç noktası
u_α^+	u bulanık sayısının α-seviye kümesinin sağ uç noktası
χ_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu

1. GİRİŞ

Küme kavramı matematiğin en temel kavramlarından biridir. Klasik (keskin) kümeler sadece doğru (1) veya yanlış (0) doğruluk değerlerini kullanan bir mantık anlayışı söz konusudur. Evrensel bir X kümesinin bir A alt kümesi kendisine ait karakteristik fonksiyonu ile ifade edilmektedir. Bu karakteristik fonksiyon X kümesinin elemanlarını $\{0,1\}$ kümesine dönüştürmektedir öyleki söz konusu fonksiyonda A kümesine ait elemanlar 1 değerini alırken, A kümesine ait olmayan elemanlar 0 değerini almaktadır.

Bulanık küme teorisi kesin olmayan, sınırları belli olmayan veya belirsiz durumları içeren problemlerin çözümü için geliştirilmiştir. Örneğin, 180 cm uzunluğundaki bir kişi "uzun boylu insanlar" sınıfına dahil edilebilir. Fakat 173 cm uzunluğundaki bir kişinin bu sınıfın içinde mi yoksa dışında mı olacağını söylemek zor olacaktır. Çünkü "uzun boylu" terimi iyi tanımlı bir sınıra sahip değildir. Buna benzer olarak "hızlı araba", "sıfıra yakın reel sayılar", "sıcak hava" vb. birçok günlük hayat durumlarında bulanıklık fikri karşımıza çıkar. Bu örneklerdeki nesneler sınıfı klasik küme teorisi yardımıyla temsil edilemez. Çünkü klasik küme teorisinde bir nesnenin bir kümeye kısmen aitliği söz konusu olamaz. Bu zorluğun üstesinden gelmek için L. A. Zadeh (1965) bulanık küme teorisini ileri sürmüştür. Bir bulanık küme kısmi üyelik derecelerine sahip nesneler sınıfıdır. Her bir bulanık küme bu sınıfa ait her bir nesneye $[0,1]$ aralığında bir üyelik derecesi karşılık getiren bir üyelik (karakteristik) fonksiyonu ile ilişkilendirilir. Üyelik fonksiyonu klasik kümelerdeki karakteristik fonksiyonun bir genelleştirmesidir. Üyelik derecesi, bir nesnenin herhangi bir kümeye 0 ile 1 arasında ne derece üye olduğunu gösterir. 0 üyelik derecesi nesnenin kümeye kesinlikle ait olmadığını, 1 üyelik derecesi nesnenin kümeye kesinlikle ait olduğunu, 0 ile 1 arasındaki diğer üyelik dereceleri ise nesnenin kümeye hangi ölçüde veya derecede ait olduğunu gösterir.

Birçok bilim alanında yaygın olarak çalışılan bulanık mantık, reel eksen üzerindeki bulanık kümelerin özel bir sınıfı olarak tanımlanan bulanık sayılar kullanılarak dizilerin yakınsaklığı, dizi uzayları ve toplanabilme teorisinde de ele alınmıştır. Özellikle, Matloka (1986) ve Nanda (1989) tarafından yapılan çalışmalardan sonra bulanık sayı dizilerinin yakınsaklığı kavramı ilgi görmeye başlamıştır.

Reel veya kompleks terimli bir dizinin klasik anlamdaki yakınsaklığında, dizinin hemen hemen tüm terimleri dizinin limitinin keyfi bir komşuluğuna ait olmalıdır. Steinhaus

(1951) ve Fast (1951) tarafından tanımlanan istatistiksel yakınsaklık fikrinin temel amacı bu koşulu hafifletmektir. İstatististiksel yakınsaklıkta, yakınsaklık koşulu çoğunlukta olan elemanlar ile sağlanır. Literatürde dizilerin istatistiksel yakınsaklık üzerine birçok çalışma mevcuttur. Móricz (2004) ise ölçülebilir fonksiyonların sonsuzdaki istatistiksel limiti kavramını tanımlamıştır.

Abel (1826), $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $|x| < 1$ için yakınsak olan reel katsayılı bir kuvvet serisi olmak üzere, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

olduğunu, diğer bir ifadeyle

$$\text{Klasik yakınsaklık} \Longrightarrow \text{Abel toplanabilme}$$

önermesinin doğruluğunu ispatlamıştır. Genel olarak, bu önermenin tersi doğru değildir. Örneğin, $f(x) = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ iken $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1/2$ olmasına rağmen $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ serisi ıraksaktır.

1897 yılında Alfred Tauber Abel'in teoreminin tersinin $\lim_{n \to \infty} na_n = 0$ ek koşulu altında geçerli olduğunu yani

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

ve ayrıca

$$\lim_{n \to \infty} na_n = 0$$

ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$$

olduğunu ispatlamıştır.

Hardy (1910), Tauber'in sonucundaki (na_n) dizisinin sıfır dizisi olması koşulunun daha zayıf koşul olan sınırlılık koşulu ile değiştirilebileceğini öne sürmüş ve Littlewood (1911) bu öneriyi kullanarak aynı sonucu elde etmiştir. Hardy ve Littlewood elde ettikleri ters teoremi *Tauber tipi teorem* olarak isimlendirmiştir. Böylece herhangi bir metot ile toplanabilir bir dizinin, serinin veya integralin herhangi bir ek koşul aracılığı ile klasik anlamda yakınsaklığının elde edildiği teoremler literatürde "Tauber tipi" teoremler olarak yer bulmuştur.

Bulanık sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ilk kez Nuray ve Savaş (1995) tarafından tanımlanmıştır. Son yıllarda ise bulanık sayı dizilerinin bazı klasik ve istatistiksel anlamdaki toplanabilme metotları için Tauber tipi teoremler çalışılmıştır. Altın ve ark. (2010) bulanık sayı dizilerinin istatistiksel Cesàro toplanabilirliğinden yakınsaklığının elde edildiği bir Tauber tipi teorem, Talo ve Başar (2013) bulanık sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığından ve ayrıca Cesàro toplanabilirliğinden yakınsaklığının elde edildiği Tauber tipi teoremler Çanak (2014), Önder ve ark. (2015) bulanık sayı dizilerinin ağırlıklı ortalama metoduna göre toplanabilirliğinden yakınsaklığının elde edildiği Tauber tipi teoremler ispatlamışlardır. Önder ve Çanak (2017) ve Yavuz ve ark. (2018) ise, sırasıyla sürekli bulanık sayı değerli fonksiyonların integrallerinin ağırlıklı ortalama metoduna göre toplanabilirliğinden ve Cesàro toplanabilirliğinden yakınsaklığının elde edildiği Tauber tipi teoremler ispatlamışlardır.

Hazırlanan bu yüksek lisans tezinde ilk olarak, sürekli bulanık sayı değerli fonksiyonların genelleştirilmiş Riemann integrallerinin ağırlıklı ortalama metodu ile toplanabilirliği (kısaca, $\left(\overline{N}, q\right)$ toplanabilirliği) tanımlanacak ve integrallerin $\left(\overline{N}, q\right)$ toplanabilirliğinden yakınsaklığının elde edildiği Tauber tipi teoremler sunulacaktır. Daha sonra, Móricz'in (2004) ölçülebilir fonskiyonların sonsuzdaki istatistiksel limiti fikrinden yararlanılarak sürekli bulanık sayı değerli fonksiyonların sonsuzdaki istatistiksel limiti tanımlanacaktır. Üstelik bulanık sayı değerli fonksiyonların sonzuzdaki istatistiksel limitinden klasik limitinin elde edildiği bir Tauber tipi teorem ispatlanacaktır. Son olarak, klasik çalışması Fekete (2006) tarafından ispatlanan ve integrallenebilir fonksiyonların istatistiksel $\left(\overline{N}, q\right)$ toplanabilmesinden istatistiksel limitinin varlığının elde edildiği Tauber tipi teoremlerin sürekli bulanık sayı değerli fonksiyonlar için benzerleri ispatlanacaktır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Fonksiyonların sonsuzda alt/üst ve istatistiksel limiti

Bu kısımda ilk olarak reel değerli fonksiyonların sonsuzdaki alt ve üst limit kavramları hatırlatılacak ve sonrasında ölçülebilir fonksiyonların sonsuzdaki istatistiksel limiti, istatistiksel alt ve istatistiksel üst limiti tanımlarına ve bu limitlerin bazı özelliklerine yer verilecektir.

$\mathbb{R}$ ile tüm reel sayılar kümesi ve $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ile genişletilmiş reel sayılar kümesi gösterilsin.

Tanım 2.1.1 $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.
(i) $x_n \in A$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ olan bir (x_n) dizisi için $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$ özelliğindeki $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ sayılarının infimumuna f fonksiyonunun $x \to \infty$ iken alt limiti denir ve $\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x)$ veya $\liminf_{x\to\infty} f(x)$ ile gösterilir.
(ii) $x_n \in A$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ olan bir (x_n) dizisi için $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \beta$ özelliğindeki $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ sayılarının supremumuna f fonksiyonunun $x \to \infty$ iken üst limiti denir ve $\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x)$ veya $\limsup_{x\to\infty} f(x)$ ile gösterilir.
Bu tanıma göre $\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x) \leq \overline{\lim}_{x\to\infty} f(x)$ olduğu açıktır (Musayev ve ark. 2003).

Örnek 2.1.1 $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunu ele alalım. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ olacak şekildeki her (x_n) dizisi için $-1 \leq \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq 1$ olacağından

$$\liminf_{x\to\infty} f(x) = -1 \text{ ve } \limsup_{x\to\infty} f(x) = 1$$

dir.

Not 2.1.1 $x \to \infty$ iken alt ve üst limitler denk olarak sırasıyla

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = \lim_{t\to\infty} \inf \{f(x) : x \geq t\}$$

ve

$$\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = \lim_{t\to\infty} \sup \{f(x) : x \geq t\}$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 2.1.1
$a)$ $\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ sayısı için aşağıdaki iki

koşulun sağlanmasıdır:

(i) $\exists M \in \mathbb{R}$ vardır ki $x > M$ olan her $x \in A$ için $f(x) > \alpha - \varepsilon$ dur.

(ii) $\forall M \in \mathbb{R}$ için $x^* > M$ ve $f(x^*) < \alpha + \varepsilon$ olacak şekilde bir $x^* \in A$ vardır.

$b)$ $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ sayısı için aşağıdaki iki koşulun sağlanmasıdır:

(i) $\exists N \in \mathbb{R}$ vardır ki $x > N$ olan her $x \in A$ için $f(x) < \beta + \varepsilon$ dur.

(ii) $\forall N \in \mathbb{R}$ için $x^* > N$ ve $f(x^*) > \beta - \varepsilon$ olacak şekilde bir $x^* \in A$ vardır (Musayev ve ark. 2003).

Tanım 2.1.2 $f(x)$, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı reel değerli ölçülebilir (Lebesgue anlamında) bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a} \left|\{x \in [0,a) : |f(x) - l| > \varepsilon\}\right| = 0 \tag{2.1.1}$$

olacak şekilde bir $l \in \mathbb{R}$ sayısı varsa o zaman $f(x)$ fonksiyonunun $x \to \infty$ iken istatistiksel limiti l dir denir ve bu durum $st\text{-}\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ biçiminde gösterilir. Burada $|\{.\}|$, $\{.\}$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü göstermektedir (Moricz, 2004).

Uyarı 2.1.1

(i) Ölçülebilir fonksiyonun özelliği dikkate alındığında (2.1.1) eşitliğinde $|f(x) - l| > \varepsilon$ yerine $|f(x) - l| \geq \varepsilon$ alınabilir. Ayrıca (2.1.1) de $[0,a)$ aralığı yerine $[0,a]$ aralığı alınabilir.

(ii) $A \subset \mathbb{R}$ ölçülebilir bir küme olsun. Eğer

$$\lim_{a\to\infty} \frac{|A \cap [0,a)|}{a} = 0$$

ise A kümesi sıfır yoğunluğa sahiptir denir. Buna göre Tanım 2.1.2 şu şekilde karakterize edilebilir:

$st\text{-}\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \Leftrightarrow$ Sıfır yoğunluğa sahip öyle bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesi mevcuttur ki $[0,\infty) \setminus A$ kümesi üzerinde $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ dir (Niculescu ve Popovici, 2012).

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ ise her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki $x \in [0,\infty) \setminus [0,\delta]$ iken $|f(x) - l| < \varepsilon$ olur. $[0,\delta]$ aralığı sıfır yoğunluğa sahip olduğundan $st\text{-}\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ dir. Böylece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ ise $st\text{-}\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ dir. Ancak bunun tersi geçerli değildir. Örneğin,

$$f(x) = \chi_{[2^n, 2^n+1)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [2^n, 2^n+1), \\ \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ölçülebilir f fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda $st\text{-}\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ olmasına rağmen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ limiti mevcut değildir (Fekete, 2006).

Tanım 2.1.3 ϕ, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı reel değerli ölçülebilir (Lebesgue anlamında) bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\left|\{x\in[0,a]:\phi(x)<\alpha\}\right|\neq 0$$

olacak şekildeki $\alpha\in\mathbb{R}$ sayılarının kümesi $A(\phi)$ olsun. Bu durumda ϕ fonksiyonunun $x\to\infty$ iken istatistiksel alt limiti $st\text{-}\liminf_{x\to\infty}\phi(x)$ ile gösterilir ve

$$st-\liminf_{x\to\infty}\phi(x)=\begin{cases}\inf A(\phi), & A(\phi)\neq\varnothing \text{ ise}\\ \infty, & A(\phi)=\varnothing \text{ ise}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\left|\{x\in[0,a]:\phi(x)>\beta\}\right|\neq 0$$

olacak şekildeki $\beta\in\mathbb{R}$ sayılarının kümesi $B(\phi)$ olmak üzere ϕ fonksiyonunun $x\to\infty$ iken istatistiksel üst limiti $st\text{-}\limsup_{x\to\infty}\phi(x)$ ile gösterilir ve

$$st-\limsup_{x\to\infty}\phi(x)=\begin{cases}\sup B(\phi), & B(\phi)\neq\varnothing \text{ ise}\\ -\infty, & B(\phi)=\varnothing \text{ ise}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. (Moricz, 2004).

Not 2.1.2

(i) $st\text{-}\limsup_{x\to\infty}\phi(x)=-st\text{-}\liminf_{x\to\infty}(-\phi(x))$ eşitliği geçerlidir.

(ii) Her $x\geq 0$ için $\phi(x)>0$ ise $st\text{-}\limsup_{x\to\infty}\phi(x)=\left[st-\liminf_{x\to\infty}\frac{1}{\phi(x)}\right]^{-1}$ eşitliği geçerlidir.

(iii)

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\left|\{x\in[0,a]:|\phi(x)|>K\}\right|=0$$

olacak şekilde $K\in\mathbb{R}$ sayısı varsa ϕ fonksiyonuna istatistiksel sınırlıdır denir. Eğer ϕ fonksiyonu istatistiksel sınırlı ise $st\text{-}\lim_{x\to\infty}\phi(x)=l$ olması için gerek ve yeter şart

$$st-\limsup_{x\to\infty}\phi(x)=st-\liminf_{x\to\infty}\phi(x)=l$$

olmasıdır (Fekete, 2006).

2.2 Bulanık Mantık

Klasik küme teorisinde bir eleman ya kümeye aittir ya da ait değildir. İlk kez Zadeh (1965) tarafından ele alınan bulanık küme teorisinde ise elemanlar $[0,1]$ aralığında değerler alan bir üyelik derecesi ile bir kümeye aittir. Tüm üyelik dereceleri üyelik fonksiyonunu oluşturur. Klasik küme teorisinde kümeler bulanıklığın aksine keskin kümeler olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.1 X boş olmayan bir küme olsun. X' deki bir bulanık A kümesi $x \in X$ olmak üzere $(x, \mu_A(x))$ sıralı ikililerinin sınıfıdır. X kümesine söylem evreni veya evrensel küme, $\mu_A : X \to [0,1]$ fonksiyonuna üyelik fonksiyonu, $\mu_A(x)$ değerine ise x elemanının A bulanık kümesindeki üyelik derecesi denir (Zadeh, 1965).

Örneğin, $A = \{\text{sıfıra yakın reel sayılar}\}$ kümesi bir bulanık kümedir ve bu kümeye ait bir üyelik fonksiyonu $\mu_A(x) = 1/(1+x^2)$ fonksiyonudur. Buna göre 1 sayısının üyelik derecesi $\mu_A(1) = 0.5$ iken 2 sayısının üyelik derecesi $\mu_A(2) = 0.2$ dir.

Not 2.2.1
(i) $[0,1]$ aralığı yerine $\{0,1\}$ kümesi alındığında A bulanık kümesi bir klasik (keskin) küme olur. Bu durumda üyelik fonksiyonu bilinen karakteristik fonksiyon olacaktır.
(ii) Bulanık kümeler klasik kümelerin aksine sonsuz sayıda üyelik fonksiyonu ile temsil edilebilir.
(iii) Bulanık kümeler üyelik fonksiyonları ile temsil edildiğinden bir A bulanık kümesi ile onun μ_A üyelik fonksiyonu birbirinin yerine kullanılabilir ve bu nedenle $\mu_A(x)$ yerine $A(x)$ yazılabilir.

Bulanık sayı terimi "sıfıra yakın", "birkaç", "10 civarında" gibi kesin olmayan sayısal niceliklerin oluşturduğu belirsizliklerin üstesinden gelmek için kullanılmıştır. Pratik ve teorik amaçlar için $\mathbb{R}$ nin bulanık alt kümelerine bazı kısıtlamalar getirilerek elde edilen bulanık sayı kavramı şu şekilde ifade edilir.

Tanım 2.2.2 Bir bulanık sayı $\mathbb{R}$ den $[0,1]$ aralığına tanımlı aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir u fonksiyonudur.
(i) u normaldir, yani $u(x_0) = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ vardır.
(ii) u fuzzy konvekstir, yani herhangi $x, y \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $u(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$ dir.
(iii) u üstten yarı süreklidir. Yani her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha\}$ kümesi kapalıdır.
(iv) $[u]_0 = \overline{\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}}$ kümesi kompakttır (Diamond ve Kloeden, 1994).

$\mathbb{R}$ üzerindeki tüm bulanık sayıların kümesi $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ile gösterilir ve buna bulanık sayılar uzayı denir. Bir $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sayısının α-seviye kümesi olarak ifade edilen $[u]_\alpha$ kümesi

$$[u]_\alpha = \begin{cases} \{t \in \mathbb{R} : u(t) \geq \alpha\}, & 0 < \alpha \leq 1 \\ \overline{\{t \in \mathbb{R} : u(t) > \alpha\}}, & \alpha = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. $[u]_0$ kümesine $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sayısının dayanak kümesi denir ve

$$[u]_0 = \overline{\bigcap_{\alpha \in (0,1]} [u]_\alpha}.$$

eşitliği geçerlidir. Buradan her $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ için

$$[u]_\beta \subset [u]_\alpha \subset [u]_0 \tag{2.2.1}$$

bağıntısı elde edilir. (i) özelliği $[u]_1 \neq \varnothing$ olmasını gerektirir ve buna göre (2.2.1) den her $\alpha \in [0,1]$ için $[u]_\alpha \neq \varnothing$ olur. Ayrıca (ii) özelliği $[u]_\alpha$ kümesinin $\alpha \in (0,1]$ için konveks küme olduğu anlamındadır. Bunun yanı sıra (iii)-(iv) özelliklerinden ve (2.2.1) içermesinden $[u]_\alpha$ kümesinin $\mathbb{R}$ nin $[u]_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$ şeklinde tanımlı boş olmayan kapalı ve sınırlı bir alt kümesi olduğu söylenebilir. Dolayısıyla u normal ve $[u]_\alpha$, $\mathbb{R}$ nin kompakt ve konveks boş olmayan bir alt kümesi ise u bir bulanık sayıdır.

$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla $+ : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$,

$$(u+v)(x) = \sup_{x=s+t} \min\{u(s), v(t)\},$$

ve $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$,

$$(\lambda u)(x) = \begin{cases} u\left(\dfrac{x}{\lambda}\right), & \lambda \neq 0 \\ \overline{0}, & \lambda = 0 \end{cases}$$

ile tanımlanır. Burada herhangi $a \in \mathbb{R}$ için $\overline{a} = \chi_{\{a\}}$ dır. Yani

$$\overline{a}(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$$

dır. (Dubois ve Prade, 1987).

Eğer $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, $0 \leq \alpha \leq 1$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$, ise

$$[u+v]_\alpha = [u]_\alpha + [v]_\alpha = \left[u_\alpha^- + v_\alpha^-, u_\alpha^+ + v_\alpha^+\right]$$

ve

$$[\lambda u]_\alpha = \lambda [u]_\alpha = \left[\lambda u_\alpha^-, \lambda u_\alpha^+\right] \;\; (\lambda \geq 0) \;\text{ veya }\; \left[\lambda u_\alpha^+, \lambda u_\alpha^-\right] \;\; (\lambda < 0)$$

dır. Diğer taraftan $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ üzerinde

$$u \preceq v \Leftrightarrow [u]_{\alpha} \preceq [v]_{\alpha} \Leftrightarrow u_{\alpha}^{-} \leq v_{\alpha}^{-} \text{ ve } u_{\alpha}^{+} \leq v_{\alpha}^{+}, \text{ (her } \alpha \in [0,1] \text{ için)}$$

ile tanımlı "$\preceq$" bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Lemma 2.2.1 $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ ise

(i) $1u = u1 = u$

(ii) $\overline{0}$, $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ deki birim eleman olmak üzere $u + \overline{0} = u$

(iii) $u + v = v + u$

(iv) $u\lambda = \lambda u$

(v) $\lambda (u + v) = \lambda u + \lambda v$ (Bede, 2013).

d bilinen Hausdorff metriği olmak üzere, $D : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to [0, +\infty)$ fonksiyonunu

$$D(u, v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d\left([u]_{\alpha}, [v]_{\alpha}\right) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\left\{\left|u_{\alpha}^{-} - v_{\alpha}^{-}\right|, \left|u_{\alpha}^{+} - v_{\alpha}^{+}\right|\right\},$$

şeklinde tanımlarsak D, $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ üzerinde bir metriktir ve ayrıca aşağıdaki özellikler vardır.

Lemma 2.2.2 $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D)$ bir tam metrik uzaydır ve aşağıdaki özellikler geçerlidir:

(i) Her $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $D(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| D(u, v)$ dir.

(ii) Her $u, v, w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ için $D(u + w, v + w) = D(u, v)$ dir.

(iii) Her $u, v, w, z \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ için $D(u + v, w + z) \leq D(u, w) + D(v, z)$ dir (Ming, 1993).

Tanım 2.2.3

(i) Eğer $\widetilde{f} : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ biçiminde bir fonksiyon ise $\widetilde{f}(x)$ bir bulanık sayı değerli fonksiyondur denir.

(ii) $\widetilde{f}(x)$ bir bulanık sayı değerli fonksiyon olmak üzere her $x \in [a, b]$ için $D\left(\widetilde{f}(x), \overline{0}\right) \leq M$ olacak biçimde bir $M \in \mathbb{R}$ varsa $\widetilde{f}(x)$ fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde sınırlıdır denir (Goetschel ve Voxman, 1986).

Tanım 2.2.4 $\widetilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ve $x_0 \in [a, b]$ olsun. Eğer herhangi $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $|x - x_0| < \delta$ olacak şekildeki her $x \in [a, b]$ için

$$D\left(\widetilde{f}(x), \widetilde{f}(x_0)\right) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\left\{\left|\widetilde{f}_{\alpha}^{-}(x) - \widetilde{f}_{\alpha}^{-}(x_0)\right|, \left|\widetilde{f}_{\alpha}^{+}(x) - \widetilde{f}_{\alpha}^{+}(x_0)\right|\right\} < \varepsilon$$

sağlanacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $\widetilde{f}(x)$ fonksiyonu x_0 da süreklidir denir. Eğer $\widetilde{f}(x)$, $[a, b]$ deki her noktada sürekli ise o zaman $\widetilde{f}(x)$, $[a, b]$ üzerinde süreklidir denir (Gal, 2000).

Tanım 2.2.5 $\widetilde{f}:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ bir bulanık sayı değerli fonksiyon ve $I\in\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ olsun. Eğer herhangi $\varepsilon>0$ sayısına karşılık $[a,b]$ aralığının $|P|<\delta$ olan bir $P:a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ bölüntüsü ve her $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$, $i=\overline{0,n-1}$, için

$$D\left(\sum_{i=0}^{n-1}\widetilde{f}(\xi_i)(x_{i+1}-x_i),I\right)<\varepsilon$$

sağlanacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı varsa o zaman $\widetilde{f}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilirdir denir ve bu durumda $\widetilde{f}$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki Riemann integrali $I=\displaystyle\int_a^b\widetilde{f}(x)\,dx$ biçiminde yazılır (Gal, 2000).

Uyarı 2.2.1 $\widetilde{f}:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sürekli ise $\widetilde{f}$, $[a,b]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilirdir (Gal, 2000).

Lemma 2.2.3 $\widetilde{f},\widetilde{g}:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sürekli fonksiyonlar ise $F(x)=D\left(\widetilde{f}(x),\widetilde{g}(x)\right)$ ile tanımlı $F:[a,b]\rightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında süreklidir ve

$$D\left(\int_a^b\widetilde{f}(x)\,dx,\int_a^b\widetilde{g}(x)\,dx\right)\leq\int_a^b D\left(\widetilde{f}(x),\widetilde{g}(x)\right)dx$$

eşitsizliği geçerlidir (Anastassiou, 2002).

Lemma 2.2.4 $\widetilde{f}:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sürekli ise

$$\widetilde{s}(x)=\int_a^x\widetilde{f}(t)\,dt$$

$[a,b]$ de sürekli bir bulanık sayı değerli fonksiyondur (Anastassiou, 2002).

Tanım 2.2.6 $\widetilde{f}:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ her $t\geq a$ için $\displaystyle\int_a^t\widetilde{f}(x)\,dx$ integrali mevcut ise bu durumda D-metriğine göre $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ de limit mevcut olmak koşuluyla

$$\int_a^\infty\widetilde{f}(x)\,dx=\lim_{t\rightarrow+\infty}\int_a^t\widetilde{f}(x)\,dx$$

biçiminde tanımlanır. Eğer bu limit mevcut ve sonlu ise $\displaystyle\int_a^\infty\widetilde{f}(x)\,dx$ genelleştirilmiş integrali yakınsak, aksi halde ıraksaktır denir (Anastassiou, 2004).

Bulanık sayı değerli fonksiyonların Riemann-Stieltjes integralinin tanımından önce reel değerli fonksiyonların Riemann-Stieltjes integralinin tanımını verelim.

Tanım 2.2.7 $f,g:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. $[a,b]$ aralığının herhangi bir $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ bölüntüsünü alalım. $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$, $k=0,1,...,n-1$, olmak üzere

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_k)\left[g(x_{k+1})-g(x_k)\right]$$

toplamını oluşturalım. $|P| = \max_{0\leq k\leq n-1}(x_{k+1} - x_k) \to 0$ koşulu altında σ toplamının $[a, b]$ aralığının bölüntü kuralından ve ξ_k noktalarının seçiminden bağımsız sonlu I limiti varsa bu limite $f(x)$'in $g(x)$'e göre $[a, b]$ aralığındaki Riemann-Stieltjes integrali denir ve $I = \int_a^b f(x)\, dg(x)$ ile gösterilir (Natanson, 1956).

Eğer $f(x)$'in $g(x)$'e göre $[a, b]$ aralığındaki Riemann-Stieltjes integrali mevcut ise bu durum kısaca $(f, g) \in \mathcal{RS}[a, b]$ ile gösterilsin.

Uyarı 2.2.2 $f(x)$, $[a, b]$ aralığında sürekli ve $g(x)$, $[a, b]$ aralığında monoton (artmayan ya da azalmayan) bir fonksiyon ise $(f, g) \in \mathcal{RS}[a, b]$ dir (Natanson, 1956).

Tanım 2.2.8 $\widetilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sınırlı bir fonksiyon, g, $[a, b]$ aralığı üzerinde artan bir fonksiyon ve $w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ olsun. Ayrıca $T : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $[a, b]$ aralığının bir bölüntüsü olsun. Herhangi $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, noktasını seçelim ve

$$\widetilde{s}_T = \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{f}(\xi_i)\,[g(x_i) - g(x_{i-1})]$$

toplamını oluşturalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $|T| = \max_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1}) < \delta(\varepsilon)$ olan her T bölüntüsü ve herhangi ξ_i noktası için $D(w, \widetilde{s}_T) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa o zaman w bulanık sayısına $\widetilde{f}$ fonksiyonunun g fonksiyonuna göre Riemann-Stieltjes integrali denir ve $w = \int_a^b \widetilde{f} dg$ veya $w = \int_a^b \widetilde{f}(x)\, dg(x)$ biçiminde gösterilir. Eğer $\widetilde{f}$ fonksiyonunun g fonksiyonuna göre Riemann-Stieltjes integrali mevcut ise bu durum $\left(\widetilde{f}, g\right) \in \mathcal{FRS}[a, b]$ ile gösterilir (Ren ve Wu, 2013).

Riemann-Stieltjes integralinin bu çalışmada kullanılacak bazı önemli özellikleri aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Lemma 2.2.5
(i) Eğer $\int_a^b \widetilde{f} dg$ mevcut ve c bir pozitif sabit ise $\int_a^b \left(c\widetilde{f}\right) dg$ integralide mevcuttur ve

$$\int_a^b \left(c\widetilde{f}\right) dg = c\int_a^b \widetilde{f} dg$$

dir.
(ii) Her $x \in [a, b]$ için $\widetilde{f}(x) = u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ise o zaman $\left(\widetilde{f}, g\right) \in \mathcal{FRS}[a, b]$ dir ve

$$\int_a^b \widetilde{f} dg = u\,(g(b) - g(a))$$

eşitliği geçerlidir.

(iii) $\widetilde{f}:[a,b]\to\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sürekli ve g, $[a,b]$ aralığında artan reel değerli bir fonksiyon ise $\left(\widetilde{f},g\right)\in\mathcal{FRS}\,[a,b]$ dir.

(iv) $\left(\widetilde{f},g\right)\in\mathcal{FRS}\,[a,b]$, $\left(\widetilde{h},g\right)\in\mathcal{FRS}\,[a,b]$ ve her $t\in[a,b]$ için $\widetilde{f}\,(t)\preceq\widetilde{h}\,(t)$ ise

$$\int_a^b \widetilde{f}dg \preceq \int_a^b \widetilde{h}dg$$

dir.

(v) $\widetilde{f}:[a,b]\to\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sürekli ve g, $[a,b]$ aralığında artan reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\left(\widetilde{f},g\right)\in\mathcal{FRS}\,[a,b]$ olması için gerek ve yeter şart $\left(\widetilde{f}_\alpha^-,g\right)$ ve $\left(\widetilde{f}_\alpha^+,g\right)$ reel ikililerinin $[a,b]$ aralığında $\alpha\in[0,1]$ sayısına göre düzgün RS-integrallenebilir olması ve

$$\left[\int_a^b \widetilde{f}dg\right]_\alpha = \left[\int_a^b \widetilde{f}_\alpha^- dg, \int_a^b \widetilde{f}_\alpha^+ dg\right]$$

olmasıdır.

(vi) $\left(\widetilde{f},g\right)\in\mathcal{FRS}\,[a,b]$ ise herhangi $c\in(a,b)$ için $\left(\widetilde{f},g\right)\in\mathcal{FRS}\,[a,c]$, $\left(\widetilde{f},g\right)\in\mathcal{FRS}\,[c,b]$ ve

$$\int_a^b \widetilde{f}dg = \int_a^c \widetilde{f}dg + \int_c^b \widetilde{f}dg$$

dir (Ren ve Wu, 2013).

$\widetilde{f},\widetilde{h}:[a,b]\to\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sürekli fonksiyonlar ve g, $[a,b]$ aralığında artan reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} D\left(\int_a^b \widetilde{f}dg, \int_a^b \widetilde{h}dg\right) &= \sup_{\alpha\in[0,1]} \max\left\{\left|\int_a^b \left(\widetilde{f}_\alpha^- - \widetilde{h}_\alpha^-\right)dg\right|, \left|\int_a^b \left(\widetilde{f}_\alpha^+ - \widetilde{h}_\alpha^+\right)dg\right|\right\} \\ &\leq \sup_{\alpha\in[0,1]} \max\left\{\int_a^b \left|\widetilde{f}_\alpha^- - \widetilde{h}_\alpha^-\right|dg, \int_a^b \left|\widetilde{f}_\alpha^+ - \widetilde{h}_\alpha^+\right|dg\right\} \\ &= \int_a^b \sup_{\alpha\in[0,1]} \max\left\{\left|\widetilde{f}_\alpha^- - \widetilde{h}_\alpha^-\right|, \left|\widetilde{f}_\alpha^+ - \widetilde{h}_\alpha^+\right|\right\} dg, \end{aligned}$$

yani

$$D\left(\int_a^b \widetilde{f}dg, \int_a^b \widetilde{h}dg\right) \leq \int_a^b D\left(\widetilde{f},\widetilde{h}\right)dg. \tag{2.2.2}$$

geçerlidir. Burada eşitsizliğin sağındaki integral klasik Riemann-Stieltjes anlamında mevcuttur. Çünkü $F(x)=D\left(\widetilde{f}\,(x),\widetilde{h}\,(x)\right)$ fonksiyonu Lemma 2.2.3 e göre $[a,b]$ de sürekli reel bir fonksiyon ve g, $[a,b]$ üzerinde monotondur.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümün birinci kısmında bulanık sayı değerli fonksiyonların Riemann-Stieltjes integrali fikrinden yararlanılarak sürekli bulanık sayı değerli fonksiyonların Riemann integrallerinin ağırlıklı ortalamaya göre toplanabilme metodu tanımlanacak ve bu metot için bazı Tauber tipi teoremler sunulacaktır.

İkinci kısımda sürekli bulanık sayı değerli fonksiyonların sonsuzdaki istatistiksel limiti tanımlanacak ve bu limitin bulanık sayı değerli fonskiyonların bilinen anlamda sonsuzdaki limiti ile ilişkisi incelenecektir. Son olarak bulanık sayı değerli fonksiyonların Riemann integrallerinin ağırlıklı ortalama metoduna göre istatistiksel toplanabilmesinden istatistiksel limitinin elde edilebilmesi için gerekli ve yeterli olan koşullar verilecektir.

3.1 Bulanık sayı değerli fonksiyonların $\left(\overline{N}, q\right)$ toplanabilirliği için Tauber tipi teoremler

Bu kısımda ve bundan sonra Q ile $q(0) = 0$, $q(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$ özelliğindeki artan $0 \neq q : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonlarının sınıfı gösterilecektir.

Tanım 3.1.1 $q \in Q$ fonksiyonu

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{q(\lambda t)}{q(t)} > 1 \ \ (\forall\lambda > 1 \text{ için}) \tag{3.1.1}$$

koşulunu sağlasın. $\widetilde{f} : [0, \infty) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sürekli bulanık sayı değerli bir fonksiyon ve $q(t) > 0$ olmak üzere

$$\widetilde{s}\,(t) = \int_0^t \widetilde{f}\,(u)\,du \ \text{ ve } \ \widetilde{\sigma}\,(t) = \frac{1}{q(t)} \int_0^t \widetilde{s}\,(x)\,dq(x) \tag{3.1.2}$$

integrallerini tanımlayalım. Buradaki ilk integral Riemann anlamında ikinci integral Riemann-Stieltjes anlamında mevcuttur.
$L \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ olmak üzere

$$\lim_{t\to\infty} D\left(\widetilde{\sigma}\,(t)\,, L\right) = 0 \tag{3.1.3}$$

oluyorsa o zaman $\widetilde{s}\,(t)$ bulanık sayı değerli fonksiyonu $L \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ bulanık sayısına q ile belirlenen ağırlıklı ortalama metoduna göre toplanabilirdir veya kısaca $\left(\overline{N}, q\right)$ toplanabilirdir denir (Belen, 2018).

Uyarı 3.1.1 $q(t) = t$ özel durumunda ağırlıklı ortalama metodu bulanık sayı değerli fonksiyonların integrallerinin Cesàro toplanabilme metoduna indirgenir. Bulanık sayı değerli fonksiyonların integrallerinin Cesàro toplanabilme metodu (kısaca $(C, 1)$ toplanabilme metodu) Yavuz ve ark. (2018) tarafından çalışılmıştır.

Tanım 2.2.6 ya göre eğer

$$\lim_{t\to\infty} \widetilde{s}(t) = L$$

limiti D-metriğine göre mevcutsa, yani $\lim_{t\to\infty} D(\widetilde{s}(t), L) = 0$ ise o zaman

$$\int_0^\infty \widetilde{f}(u)\, du$$

genelleştirilmiş (has olmayan) bulanık Riemann integrali mevcut ve L ye eşittir (Yavuz ve ark., 2018). Diğer taraftan aşağıdaki gerektirme de ge çerlidir.

Teorem 3.1.1 $\lim_{t\to\infty} \widetilde{s}(t) = L \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ise $\widetilde{s}(t)$ L bulanık sayısına $\left(\overline{N}, q\right)$ toplanabilirdir (Belen, 2018).

İspat. $\lim_{t\to\infty} \widetilde{s}(t) = L \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $t_1 > 0$ sayısı vardır ki her $t > t_1$ için $D(\widetilde{s}(t), L) < \varepsilon/2$ dir. Ayrıca $D(\widetilde{s}(t), L)$ fonksiyonunun sürekliliği onun $[0, t_1]$ aralığındaki sınırlılığını gerektirir. $M := \max_{0\le t\le t_1} D(\widetilde{s}(t), L)$ olsun. Böylece Lemma 2.2.5 (ii)-(vi), Lemma 2.2.2 (i)-(ii) ve (2.2.2) eşitsizliği dikkate alındığında yeterince büyük t değerleri için

$$\begin{aligned}
D(\widetilde{\sigma}(t), L) &= D\left(\frac{1}{q(t)}\int_0^t \widetilde{s}(x)\, dq(x), L\right) \\
&= D\left(\frac{1}{q(t)}\int_0^t \widetilde{s}(x)\, dq(x), \frac{1}{q(t)}\int_0^t L dq(x)\right) \\
&= \frac{1}{q(t)} D\left(\int_0^t \widetilde{s}(x)\, dq(x), \int_0^t L dq(x)\right) \\
&\le \frac{1}{q(t)}\int_0^t D(\widetilde{s}(x), L)\, dq(x) \\
&= \frac{1}{q(t)}\int_0^{t_1} D(\widetilde{s}(x), L)\, dq(x) + \frac{1}{q(t)}\int_{t_1}^t D(\widetilde{s}(x), L)\, dq(x) \\
&< M\frac{q(t_1)}{q(t)} + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{q(t_1)}{q(t)}\right) < \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\widetilde{s}(t)$, L ye $\left(\overline{N}, q\right)$ toplanabilirdir. $\square$

Buna rağmen $\left(\overline{N},q\right)$ toplanabilir olup genelleştirilmiş Riemann integrali yakınsak olmayan bulanık sayı değerli fonksiyonlar vardır. Bu durum için $q(t)=t$ özel durumunda aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 3.1.1 $\widetilde{f}:[0,\infty)\rightarrow\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$,

$$\left(\widetilde{f}\,(t)\right)(u)=\begin{cases}(u-\cos t)\,(t+1)^2\,, & \cos t\leq u\leq \cos t+\dfrac{1}{(t+1)^2}\\ 2-(u-\cos t)\,(t+1)^2\,, & \cos t+\dfrac{1}{(t+1)^2}\leq u\leq \cos t+\dfrac{2}{(t+1)^2}\\ 0, & \text{diğer yerlerde}\end{cases}$$

biçiminde tanımlı bir bulanık sayı değerli fonksiyon olsun. Buna göre açık olarak $\widetilde{f}$ süreklidir ve her $\alpha\in[0,1]$ için

$$\widetilde{f}_\alpha^-\,(t)=\cos t+\frac{\alpha}{(t+1)^2}\quad \text{ve}\quad \widetilde{f}_\alpha^+\,(t)=\cos t+\frac{(2-\alpha)}{(t+1)^2}$$

dir. Böylece

$$\int_0^t\widetilde{f}_\alpha^-\,(x)\,dx=\sin t+\alpha\left(1-\frac{1}{t+1}\right)\quad \text{ve}\quad \int_0^t\widetilde{f}_\alpha^+\,(x)\,dx=\sin t+(2-\alpha)\left(1-\frac{1}{t+1}\right)$$

olur. Buna göre $\displaystyle\int_0^\infty\widetilde{f}\,(x)\,dx$ integrali ıraksaktır. Diğer taraftan

$$\widetilde{\sigma}_\alpha^-\,(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\widetilde{s}_\alpha^-\,(u)\,du=\frac{1}{t}\int_0^t\left(\int_0^u\widetilde{f}_\alpha^-\,(x)\,dx\right)=-\frac{\cos t}{t}+\frac{1}{t}+\alpha\left(1-\frac{\ln(1+t)}{t}\right)$$

ve

$$\widetilde{\sigma}_\alpha^+\,(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\widetilde{s}_\alpha^+\,(u)\,du=\frac{1}{t}\int_0^t\left(\int_0^u\widetilde{f}_\alpha^+\,(x)\,dx\right)=-\frac{\cos t}{t}+\frac{1}{t}+(2-\alpha)\left(1-\frac{\ln(1+t)}{t}\right)$$

olur. Buna göre

$$\lim_{t\to\infty}\widetilde{\sigma}_\alpha^-\,(t)=\alpha \text{ ve } \lim_{t\to\infty}\widetilde{\sigma}_\alpha^+\,(t)=(2-\alpha)$$

olur. O halde

$$L\,(t)=\begin{cases}t, & 0\leq t\leq 1\\ 2-t, & 1\leq t\leq 2\\ 0, & \text{diğer yerlerde}\end{cases}$$

biçiminde tanımlı $L\in\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sayısı için $[L]_\alpha=[\alpha,2-\alpha]$ olup $\lim_{t\to\infty}D\left(\widetilde{\sigma}\,(t)\,,L\right)=0$ dır. Yani $\displaystyle\int_0^\infty\widetilde{f}\,(x)\,dx$ integrali $L\in\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sayısına $\left(\overline{N},q\right)$ toplanabilirdir (Yavuz ve ark., 2018).

Bu kısmın temel amacı Teorem 3.1.1 deki ters gerektirmenin sağlanacağı koşullar elde etmektir. Bu amaç doğrultusunda öncelikle aşağıdaki yardımcı teoremi ifade ve ispat edelim.

Lemma 3.1.1 Eğer $\widetilde{s}(t)$, $L \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sayısına $(\overline{N}, q)$ toplanabilir ise bu durumda her $\lambda > 1$ sayısı için

$$\lim_{t\to\infty} D\left(\frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x), L\right) = 0 \tag{3.1.4}$$

ve her bir $0 < \lambda < 1$ için

$$\lim_{t\to\infty} D\left(\frac{1}{q(t) - q(\lambda t)} \int_{\lambda t}^{t} \widetilde{s}(x)\, dq(x), L\right) = 0 \tag{3.1.5}$$

dır (Belen, 2018).

İspat. $\lambda > 1$ durumunun ispatlanması yeterlidir. $0 < \lambda < 1$ durumu benzer şekilde ispatlanabilir. Lemma 2.2.2 (ii)-(iii) den

$$\begin{aligned}
&D\left(\frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x), L\right) \\
&= D\left(\frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x) + \widetilde{\sigma}(t), \widetilde{\sigma}(t) + L\right) \\
&\le D\left(\frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x), \widetilde{\sigma}(t)\right) + D\left(\widetilde{\sigma}(t), L\right)
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
&D\left(\frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x), \widetilde{\sigma}(t)\right) \\
&= D\left(\frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x), \frac{1}{q(t)} \int_0^{t} \widetilde{s}(x)\, dq(x)\right) \\
&= D\left(\frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x) + \frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_0^{t} \widetilde{s}(x)\, dq(x),\right. \\
&\left.\frac{1}{q(t)} \int_0^{t} \widetilde{s}(x)\, dq(x) + \frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_0^{t} \widetilde{s}(x)\, dq(x)\right) \\
&= D\left(\frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_0^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x), \frac{q(\lambda t)}{(q(\lambda t) - q(t))\, q(t)} \int_0^{t} \widetilde{s}(x)\, dq(x)\right) \\
&= \frac{q(\lambda t)}{q(\lambda t) - q(t)} D\left(\frac{1}{q(\lambda t)} \int_0^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x), \frac{1}{q(t)} \int_0^{t} \widetilde{s}(x)\, dq(x)\right) \\
&= \frac{q(\lambda t)}{q(\lambda t) - q(t)} D\left(\widetilde{\sigma}(\lambda t), \widetilde{\sigma}(t)\right) \le \frac{q(\lambda t)}{q(\lambda t) - q(t)} \left(D\left(\widetilde{\sigma}(\lambda t), L\right) + D\left(\widetilde{\sigma}(t), L\right)\right)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&D\left(\frac{1}{q(\lambda t)-q(t)}\int_t^{\lambda t}\widetilde{s}\,(x)\,dq(x),L\right)\\
&\leq D\left(\frac{1}{q(\lambda t)-q(t)}\int_t^{\lambda t}\widetilde{s}\,(x)\,dq(x),\widetilde{\sigma}\,(t)\right)+D\left(\widetilde{\sigma}\,(t)\,,L\right) \qquad (3.1.6)\\
&\leq \frac{q(\lambda t)}{q(\lambda t)-q(t)}\left[D\left(\widetilde{\sigma}\,(\lambda t)\,,L\right)+D\left(\widetilde{\sigma}\,(t)\,,L\right)\right]+D\left(\widetilde{\sigma}\,(t)\,,L\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1.1) den

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty}\frac{q(\lambda t)}{q(\lambda t)-q(t)} &= \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{1-\frac{q(t)}{q(\lambda t)}}=\left[\liminf_{t\to\infty}\left(1-\frac{q(t)}{q(\lambda t)}\right)\right]^{-1}\\
&=\left[1-\limsup_{t\to\infty}\frac{q(t)}{q(\lambda t)}\right]^{-1}=\left[1-\frac{1}{\liminf\limits_{t\to\infty}\frac{q(\lambda t)}{q(t)}}\right]^{-1}<\infty
\end{aligned}$$

olduğundan (3.1.6) eşitsizliğinde $t\to\infty$ için üst limite geçilir ve (3.1.3) eşitliği kullanılırsa (3.1.4) elde edilir. $\square$

Teorem 3.1.2 $\widetilde{s}\,(t)\,,\,L\in\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sayısına $\left(\overline{N},q\right)$ toplanabilir olsun. Bu durumda

$$\lim_{t\to\infty}\widetilde{s}\,(t)=L \qquad (3.1.7)$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\inf_{\lambda>1}\limsup_{t\to\infty}D\left(\frac{1}{q(\lambda t)-q(t)}\int_t^{\lambda t}\widetilde{s}\,(x)\,dq(x),\widetilde{s}\,(t)\right)=0 \qquad (3.1.8)$$

veya

$$\inf_{0<\lambda<1}\limsup_{t\to\infty}D\left(\frac{1}{q(t)-q(\lambda t)}\int_{\lambda t}^{t}\widetilde{s}\,(x)\,dq(x),\widetilde{s}\,(t)\right)=0 \qquad (3.1.9)$$

olmasıdır (Belen, 2018).

İspat. *Gereklilik.* (3.1.7) gerçeklensin ve $\widetilde{s}\,(t)\,,\,L\in\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sayısına $\left(\overline{N},q\right)$ toplanabilir olsun. Bu durumda (3.1.8) veya (3.1.9) koşullarının gerekliliği sırasıyla (3.1.4) veya (3.1.5) den elde edilir.

Yeterlilik. (3.1.8) koşulunun gerçeklendiğini kabul edelim. Bu durumda verilen herhangi $\varepsilon>0$ için

$$\limsup_{t\to\infty}D\left(\frac{1}{q(\lambda t)-q(t)}\int_t^{\lambda t}\widetilde{s}\,(x)\,dq(x),\widetilde{s}\,(t)\right)<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\lambda > 1$ sayısı mevcuttur.

$$\begin{aligned} D\left(\widetilde{s}\left(t\right), L\right) &= D\left(\widetilde{s}\left(t\right) + \frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}\left(x\right) dq(x), \right. \\ &\left. \frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}\left(x\right) dq(x) + L\right) \\ &\leq D\left(\widetilde{s}\left(t\right), \frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}\left(x\right) dq(x)\right) \\ &+ D\left(\frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}\left(x\right) dq(x), L\right) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\limsup_{t\to\infty} D\left(\widetilde{s}\left(t\right), L\right) \leq \varepsilon$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.1.9) koşulu sağlandığında, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\limsup_{t\to\infty} D\left(\frac{1}{q(t) - q(\lambda t)} \int_{\lambda t}^{t} \widetilde{s}\left(x\right) dq(x), \widetilde{s}\left(t\right)\right) < \varepsilon$$

olacak şekilde $0 < \lambda < 1$ sayısı mevcuttur.

$$\begin{aligned} &D\left(\widetilde{s}\left(t\right), L\right) \\ &= D\left(\widetilde{s}\left(t\right) + \frac{1}{q(t) - q(\lambda t)} \int_{\lambda t}^{t} \widetilde{s}\left(x\right) dq(x), \frac{1}{q(t) - q(\lambda t)} \int_{\lambda t}^{t} \widetilde{s}\left(x\right) dq(x) + L\right) \\ &\leq D\left(\widetilde{s}\left(t\right), \frac{1}{q(t) - q(\lambda t)} \int_{\lambda t}^{t} \widetilde{s}\left(x\right) dq(x)\right) + D\left(\frac{1}{q(t) - q(\lambda t)} \int_{\lambda t}^{t} \widetilde{s}\left(x\right) dq(x), L\right) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\limsup_{t\to\infty} D\left(\widetilde{s}\left(t\right), L\right) \leq \varepsilon$$

ve böylece $\lim_{t\to\infty} D\left(\widetilde{s}\left(t\right), L\right) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla ispat biter. □

Reel değerli fonksiyonlar için yavaş salınımlılık tanımını (Hardy, 1949) dikkate alarak, $\widetilde{s} : [0, \infty) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ fonksiyonu için

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \limsup_{t\to\infty} \max_{t<x\leq \lambda t} D\left(\widetilde{s}\left(x\right), \widetilde{s}\left(t\right)\right) = 0 \tag{3.1.10}$$

sağlanıyorsa o zaman $\widetilde{s}(t)$ fonksiyonuna yavaş salınımlıdır diyeceğiz.

$$g\left(\lambda\right) := \limsup_{t\to\infty} \max_{t<x\leq \lambda t} D\left(\widetilde{s}\left(x\right), \widetilde{s}\left(t\right)\right)$$

λ nın artan bir fonksiyonu olduğundan (3.1.10) eşitliğinde $\lim_{\lambda\to 1^+}$ yerine $\inf_{\lambda>1}$ yazılabilir. Diğer taraftan üst limitin Teorem 2.1.1 ile belirtilen özelliği ve sağ taraflı limit tanımı dikkate alındığında (3.1.10) eşitliğinin gerçeklenmesi için gerek ve yeter şartın her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $t_0 \leq t < x \leq \lambda t$ olduğunda $D(\widetilde{s}(x), \widetilde{s}(t)) \leq \varepsilon$ sağlanacak şekilde $t_0 = t_0(\varepsilon) \geq 0$ ve $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 1$ sayılarının mevcut olmasıdır diyebiliriz.

Örnek 3.1.2 $\widetilde{f} : [0, \infty) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$,

$$\left(\widetilde{f}(t)\right)(u) = \begin{cases} \dfrac{u(1+t)}{2+\sin t}, & 0 \leq u \leq \dfrac{2+\sin t}{1+t} \\ \dfrac{u(1+t)}{2+\sin t} - 1, & \dfrac{2+\sin t}{1+t} \leq u \leq \dfrac{2(2+\sin t)}{1+t} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı bir bulanık sayı değerli fonksiyon ve $\widetilde{s}(t) = \displaystyle\int_0^t \widetilde{f}(v)\, dv$ olsun. Buna göre $\widetilde{f}$ süreklidir ve her $\alpha \in [0,1]$ için

$$\widetilde{f}_\alpha^-(t) = \frac{2+\sin t}{1+t}\alpha \quad \text{ve} \quad \widetilde{f}_\alpha^+(t) = \frac{2+\sin t}{1+t}(1+\alpha)$$

olur. Bu durumda $\widetilde{s}(t)$ yavaş salınımlıdır. Gerçekten $t < x$ için

$$\widetilde{s}_\alpha^+(x) - \widetilde{s}_\alpha^+(t) = \int_t^x \frac{(1+\alpha)(2+\sin v)}{1+v} dv \leq 3(1+\alpha)\int_t^x \frac{dv}{1+v} = 3(1+\alpha)\ln\left(\frac{1+x}{1+t}\right)$$

ve

$$\widetilde{s}_\alpha^-(x) - \widetilde{s}_\alpha^-(t) = \int_t^x \frac{\alpha(2+\sin v)}{1+v} dv \leq 3\alpha\int_t^x \frac{dv}{1+v} \leq 3(1+\alpha)\ln\left(\frac{1+x}{1+t}\right)$$

dır. Böylece her $\lambda > 1$ ve $t < x \leq \lambda t$ için

$$\begin{aligned} D(\widetilde{s}(x), \widetilde{s}(t)) &= \sup_{\alpha\in[0,1]} \max\left\{\left|\widetilde{s}_\alpha^-(x) - \widetilde{s}_\alpha^-(t)\right|, \left|\widetilde{s}_\alpha^+(x) - \widetilde{s}_\alpha^+(t)\right|\right\} \\ &\leq 6\ln\left(\frac{1+\lambda t}{1+t}\right) < 6\ln\left(\frac{\lambda(1+t)}{1+t}\right) = 6\ln\lambda \end{aligned}$$

olur. Bu ise

$$\lim_{\lambda\to1^+} \limsup_{t\to\infty} \max_{t<x\leq\lambda t} D(\widetilde{s}(x), \widetilde{s}(t)) = 0$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla, $\widetilde{s}(t)$ yavaş salınımlıdır (Belen, 2018).

Sonuç 3.1.1 Eğer $\widetilde{s}(t)$, L bulanık sayısına $\left(\overline{N}, q\right)$ toplanabilir ve yavaş salınımlı ise bu durumda (3.1.7) gerçeklenir (Belen, 2018).

İspat. $\widetilde{s}(t)$ yavaş salınımlı ve L ye $\left(\overline{N}, q\right)$ toplanabilir olsun.

$$\begin{aligned} &D\left(\frac{1}{q(\lambda t) - q(t)}\int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x), \widetilde{s}(t)\right) \\ &= D\left(\frac{1}{q(\lambda t) - q(t)}\int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x), \frac{1}{q(\lambda t) - q(t)}\int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(t)\, dq(x)\right) \\ &\leq \frac{1}{q(\lambda t) - q(t)}\int_t^{\lambda t} D(\widetilde{s}(x), \widetilde{s}(t))\, dq(x) \leq \max_{t<x\leq\lambda t} D(\widetilde{s}(x), \widetilde{s}(t)) \end{aligned}$$

olduğundan (3.1.8) gerçeklenir. Böylece Teorem 3.1.2 den (3.1.7) elde edilir. □

Uyarı 3.1.2 Eğer her $u > 0$ sayısı için $uD\left(\widetilde{f}(u), \overline{0}\right) = O(1)$ yani, en az bir $C \geq 0$ için $uD\left(\widetilde{f}(u), \overline{0}\right) \leq C$ ise bu durumda $\widetilde{s}(t) = \int_0^t \widetilde{f}(u)\, du$ yavaş salınımlıdır. Gerçekten $t < x \leq \lambda t$ için

$$\begin{aligned} D(\widetilde{s}(x), \widetilde{s}(t)) &= D\left(\int_0^x \widetilde{f}(u)\, du, \int_0^t \widetilde{f}(u)\, du\right) \\ &= D\left(\int_0^t \widetilde{f}(u)\, du + \int_t^x \widetilde{f}(u)\, du, \int_0^t \widetilde{f}(u)\, du + \overline{0}\right) \\ &= D\left(\int_t^x \widetilde{f}(u)\, du, \overline{0}\right) \leq \int_t^x D\left(\widetilde{f}(u), \overline{0}\right) du \\ &\leq C \int_t^x \frac{du}{u} = C \log \frac{x}{t} \end{aligned}$$

ve böylece $\max_{t<x\leq\lambda t} D(\widetilde{s}(x), \widetilde{s}(t)) \leq C \log \lambda$ dır. Dolayısıyla

$$\lim_{\lambda\to1^+} \limsup_{t\to\infty} \max_{t<x\leq\lambda t} D(\widetilde{s}(x), \widetilde{s}(t)) = 0$$

olur ki bu da iddiamızı ispatlar (Belen, 2018).

Sonuç 3.1.2 Eğer her $u > 0$ için $uD\left(\widetilde{f}(u), \overline{0}\right) = O(1)$ ve $\widetilde{s}(t) = \int_0^t \widetilde{f}(u)\, du$, L bulanık sayısına $\left(\overline{N}, q\right)$ toplanabilir ise bu durumda (3.1.7) gerçeklenir (Belen, 2018).

Tanım 3.1.2 Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $t_0 \leq t < x \leq \lambda t$ olduğunda $\widetilde{s}(x) \succeq \widetilde{s}(t) - \overline{\varepsilon}$ sağlanacak şekilde $t_0 = t_0(\varepsilon) \geq 0$ ve $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 1$ sayıları varsa bu durumda $\widetilde{s}(t)$ fonksiyonuna yavaş azalandır denir (Yavuz ve ark., 2018).

Teorem 3.1.3 Eğer $\widetilde{s}(t)$, L bulanık sayısına $\left(\overline{N}, q\right)$ toplanabilir ve yavaş azalan ise bu durumda (3.1.7) gerçeklenir (Önder ve Çanak, 2017).

Lemma 3.1.2 (3.1.1) koşuluna ek olarak $q(x)$ fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığı üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olduğunu ve $\lambda > 1$ iken

$$\frac{q(\lambda x)}{q(x)} \leq H \tag{3.1.11}$$

sağlanacak şekilde $H \geq 0$ sayısının mevcut olduğunu kabul edelim. Eğer $[0, \infty)$ üzerinde sürekli bulanık sayı değerli bir $\widetilde{f}$ fonksiyonu için $x > x_0$ olduğunda

$$\frac{q(x)}{q'(x)} \widetilde{f}(x) \succeq \nu \tag{3.1.12}$$

olacak şekilde $v \preceq \overline{0}$ bulanık sayısı ve $x_0 \geq 0$ sayısı varsa o zaman $\widetilde{s}(t)$ yavaş azalandır (Önder ve Çanak, 2017).

Uyarı 3.1.3 Eğer yukarıdaki (3.1.11) koşulu $0 < \lambda < 1$ iken

$$\frac{q(x)}{q(\lambda x)} \leq \widetilde{H}, \quad (\widetilde{H} \geq 0)$$

koşulu ile değiştirilirse Lemma 3.1.2 yine geçerlidir (Önder ve Çanak, 2017).

Teorem 3.1.3 den ve Lemma 3.1.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.3 $\widetilde{s}(t)$, L bulanık sayısına $(\overline{N}, q)$ toplanabilir ve $q(x)$ fonksiyonu (3.1.1) koşuluna ek olarak (3.1.11) koşulunu sağlayan diferansiyellenebilir azalmayan bir fonksiyon olsun. Eğer (3.1.12) sağlanırsa (3.1.7) gerçeklenir (Önder ve Çanak, 2017).

3.2 Bulanık sayı değerli fonksiyonların sonsuzdaki istatistiksel limiti ve istatistiksel $(\overline{N}, q)$ toplanabilirliği için Tauber tipi teoremler

Bu kısımda ilk olarak sürekli bulanık sayı değerli fonksiyonların sonsuzdaki istatistiksel limiti kavramı tanıtılacaktır. Sonsuzdaki istatistiksel limitin, sonsuzdaki limitten daha genel olduğuna dair bir örnek sunulacak ve sonrasında istatistiksel limitten bilinen anlamdaki limitin elde edildiği bir Tauber tipi teorem ispatlanacaktır.

$\widetilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sürekli bulanık sayı değerli bir fonksiyon ve $\mu \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ise $F(x) = D\left(\widetilde{f}(x), \mu\right)$ sürekli reel değerli bir fonksiyondur. Sürekli fonksiyonlar ölçülebilir (Lebesgue anlamında) olduğundan bulanık sayı değerli fonksiyonların sonsuzdaki istatistiksel limiti kavramı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 3.2.1 $\widetilde{f} : [0, \infty) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sürekli bulanık sayı değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\lim_{a \to \infty} \frac{1}{a} \left| \left\{ x \in [0, a] : D\left(\widetilde{f}(x), \mu\right) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir $\mu \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sayısı varsa o zaman $\widetilde{f}(x)$ fonksiyonunun $x \to \infty$ iken istatistiksel limiti μ sayısıdır denir ve bu durum $st\text{-}\lim_{x \to \infty} \widetilde{f}(x) = \mu$ veya $\widetilde{f}(x) \xrightarrow{st} \mu$ ile gösterilir.

Uyarı (2.1.1) de olduğu gibi

$$\widetilde{f}(x) \to \mu \Rightarrow \widetilde{f}(x) \xrightarrow{st} \mu \tag{3.2.1}$$

gerektirmesi doğrudur. Ancak bu gerektirmenin tersinin her zaman doğru olmadığı aşağıdaki örnekte görülmektedir.

Örnek 3.2.1

$$\eta(x)(u) = \begin{cases} u - x + 1, & u \in [x-1, x], \\ -u + x + 1, & u \in (x, x+1] \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

ve

$$\kappa(x)(u) = \begin{cases} u - \frac{1}{x+1} + 1, & u \in \left[\frac{1}{x+1} - 1, \frac{1}{x+1}\right], \\ -u + \frac{1}{x+1} + 1, & u \in \left(\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x+1} + 1\right] \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\widetilde{f}(x)(u) = \begin{cases} \eta(x)(u), & x \in [2^n, 2^n + 1), \\ \kappa(x)(u), & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

sürekli fonksiyonunu ve

$$\mu(u) = \begin{cases} u + 1, & u \in [-1, 0], \\ -u + 1, & u \in (0, 1] \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

sayısını ele alalım. $[2^n, 2^n + 1)$ sıfır yoğunluğa sahip bir küme olup $x \notin [2^n, 2^n + 1)$ için

$$\begin{aligned} D\left(\widetilde{f}(x), \mu\right) &= \sup_{\alpha\in[0,1]} \max\left\{\left|\kappa_\alpha^-(x) - \mu_\alpha^-\right|, \left|\kappa_\alpha^+(x) - \mu_\alpha^+\right|\right\} \\ &= \sup_{\alpha\in[0,1]} \max\left\{\left|\frac{1}{x+1} + \alpha - 1 - (\alpha - 1)\right|, \left|\frac{1}{x+1} + 1 - \alpha - (1 - \alpha)\right|\right\} \\ &= \frac{1}{x+1} \to 0 \qquad (x \to \infty) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $st\text{-}\lim_{x\to\infty} \widetilde{f}(x) = \mu$ olur fakat $\lim_{x\to\infty} \widetilde{f}(x)$ limiti yoktur.

Aşağıdaki teorem, (3.2.1) deki gerektirmenin tersinin (3.2.2) veya (3.2.3) koşulu ile mümkün olduğunu göstermektedir. (3.2.2) veya (3.2.3) koşullarının benzerleri reel veya kompleks değerli fonksiyonların istatistiksel limitinden klasik limitini elde etmek amacıyla Chen ve Chang (2011) tarafından verilmiştir.

Teorem 3.2.1 $\widetilde{f} : [0, \infty) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sürekli bulanık sayı değerli bir fonksiyon ve $st\text{-}\lim_{x\to\infty} \widetilde{f}(x) = \mu$ olsun. Eğer

$$\inf_{\lambda>1}\left\{\limsup_{x\to\infty}\left(\sup_{x<u<\lambda x} D\left(\widetilde{f}(u), \widetilde{f}(x)\right)\right)\right\} = 0 \tag{3.2.2}$$

veya

$$\inf_{\lambda<1}\left\{\limsup_{x\to\infty}\left(\sup_{\lambda x<u<x} D\left(\widetilde{f}(u), \widetilde{f}(x)\right)\right)\right\} = 0 \tag{3.2.3}$$

ise o zaman $\lim_{x\to\infty} \widetilde{f}(x) = \mu$ olur.

İspat. $\lambda > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} < 1$ olduğundan (3.2.2) ile (3.2.3) denktir. Bu nedenle sadece (3.2.2) durumunu ispatlamak yeterlidir. (3.2.2) den her $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $\lambda > 1$ sayısı ve öyle bir $x_1 \geq 0$ sayısı vardır ki

$$x \geq x_1 \Rightarrow \sup_{x<u<\lambda x} D\left(\widetilde{f}(u), \widetilde{f}(x)\right) < \varepsilon \tag{3.2.4}$$

dur. $st\text{-}\lim_{x\to\infty} \widetilde{f}(x) = \mu$ olduğundan öyle bir $x_2 \geq 0$ sayısı vardır ki $a \geq x_2$ iken

$$\frac{1}{a}\left|\left\{u \in [0,a] : D\left(\widetilde{f}(u), \mu\right) \geq \varepsilon\right\}\right| < 1 - \frac{1}{\lambda} \tag{3.2.5}$$

olur. Eğer $x_0 = \max\{x_1, x_2\}$ dersek $x \geq x_0$ için $\lambda x \geq x_2$ olacağından

$$\left|\left\{u \in [0,\lambda x] : D\left(\widetilde{f}(u), \mu\right) \geq \varepsilon\right\}\right| < \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\lambda x = (\lambda x - x)$$

olur. Dolayısıyla öyle bir $u^* \in (x, \lambda x)$ vardır ki $D\left(\widetilde{f}(u^*), \mu\right) < \varepsilon$ olur. Bu (3.2.4) dikkate alınarak

$$D\left(\widetilde{f}(x), \mu\right) = D\left(\widetilde{f}(x) + \widetilde{f}(u^*), \mu + \widetilde{f}(u^*)\right) \leq D\left(\widetilde{f}(u^*), \mu\right) + \sup_{x<u<\lambda x} D\left(\widetilde{f}(u), \widetilde{f}(x)\right) < 2\varepsilon$$

elde edilir. Böylece $\lim_{x\to\infty} \widetilde{f}(x) = \mu$ olur. □

Şimdi de sürekli bulanık sayı değerli fonksiyonların her $\lambda > 1$ için

$$st\text{-}\liminf_{t\to\infty} \frac{q(\lambda t)}{q(t)} > 1 \tag{3.2.6}$$

özelliklerine sahip bir $q \in Q$ fonksiyonu ile belirlenen ağırlıklı ortalama metoduna göre istatistiksel toplanabilirliğini tanımlayalım.

$\widetilde{f} : [0,\infty) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sürekli bulanık sayı değerli bir fonksiyon ve $q(t) > 0$ olmak üzere (3.1.2) ile verilen

$$\widetilde{s}(t) = \int_0^t \widetilde{f}(u)\,du \quad \text{ve} \quad \widetilde{\sigma}(t) = \frac{1}{q(t)} \int_0^t \widetilde{s}(x)\,dq(x)$$

fonksiyonlarını tekrar ele alalım. Eğer

$$st\text{-}\lim_{t\to\infty} \widetilde{\sigma}(t) = L$$

ise o zaman $\widetilde{s}(t)$ fonksiyonu $L \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sayısına q fonksiyonu ile belirlenen ağırlıklı ortalama metoduna göre istatistiksel toplanabilirdir veya kısaca istatistiksel $\left(\overline{N}, q\right)$ toplanabilirdir denir.

Not 3.2.1 f, $0 < t < \infty$ olmak üzere her $(0,t)$ aralığında integrallenebilir reel veya kompleks değerli bir fonksiyon ve $q \in Q$ fonksiyonu (3.2.6) koşuluna sahip bir fonksiyon olsun. Ayrıca $q(t) > 0$ olmak üzere $s(t)$ ve $\sigma(t)$ fonksiyonları

$$s(t) = \int_0^t f(u)\,du \quad \text{ve} \quad \sigma(t) = \frac{1}{q(t)} \int_0^t s(x)\,dq(x)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda Fekete (2006),

$$s(t) \xrightarrow{st} l \Longrightarrow \sigma(t) \xrightarrow{st} l$$

gerektirmesini ispatlamıştır. Diğer taraftan $L \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ olmak üzere $D(\widetilde{s}(t), L)$ ve $D(\widetilde{\sigma}(t), L)$ birer reel değerli fonksiyon olduğundan

$$\widetilde{s}(t) \xrightarrow{st} L \Longrightarrow \widetilde{\sigma}(t) \xrightarrow{st} L \tag{3.2.7}$$

gerektirmesi de geçerlidir.

Bu kısmın son amacı (3.2.7) gerektirmesinin tersinin geçerli olduğu gerekli ve yeterli koşulları sunmak olacaktır.

Not 3.2.2 (3.2.6) koşulu ile $0 < \lambda < 1$ olmak üzere

$$st\text{-}\liminf_{t\to\infty} \frac{q(t)}{q(\lambda t)} > 1$$

koşulu denktir (Fekete, 2006).

Uyarı 3.2.1 Fekete (2006), f reel ya da kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere st-$\lim_{t\to\infty} f(t) = L$ ise her $\lambda > 0$ için st-$\lim_{t\to\infty} f(\lambda t) = L$ olduğunu ispatlamıştır. Buna göre, $\widetilde{f}$ bulanık sayı değerli bir fonksiyon ve $L \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ iken $D\left(\widetilde{f}(t), L\right)$ reel değerli bir fonksiyon olacağından st-$\lim_{t\to\infty} D\left(\widetilde{f}(t), L\right) = 0$ ise her $\lambda > 0$ için st-$\lim_{t\to\infty} D\left(\widetilde{f}(\lambda t), L\right) = 0$ olur.

Lemma 3.2.1 $q \in Q$ fonksiyonu her $\lambda > 1$ için (3.2.6) koşulunu sağlasın ve st-$\lim_{t\to\infty} \widetilde{\sigma}(t) = L$ olsun. Bu durumda her $\lambda > 1$ için

$$st\text{-}\lim_{t\to\infty} D\left(\frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\,dq(x), L\right) = 0 \tag{3.2.8}$$

ve her $0 < \lambda < 1$ için

$$st\text{-}\lim_{t\to\infty} D\left(\frac{1}{q(t) - q(\lambda t)} \int_{\lambda t}^{t} \widetilde{s}(x)\,dq(x), L\right) = 0 \tag{3.2.9}$$

dır.

İspat. $\lambda > 1$ durumunu ele alalım. Lemma 3.1.1'in ispatında elde ettiğimiz (3.1.6) eşitsizliğini

$$D\left(\frac{1}{q(\lambda t)-q(t)}\int_t^{\lambda t}\widetilde{s}(x)\,dq(x),L\right) \leq \frac{q(\lambda t)}{q(\lambda t)-q(t)}\left[D\left(\widetilde{\sigma}(\lambda t),L\right)+D\left(\widetilde{\sigma}(t),L\right)\right]+D\left(\widetilde{\sigma}(t),L\right) \tag{3.2.10}$$

biçiminde tekrar ele alalım. (3.2.6) dan her $\lambda > 1$ için

$$\begin{aligned} st\text{-}\limsup_{t\to\infty}\frac{q(\lambda t)}{q(\lambda t)-q(t)} &= st\text{-}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{1-\frac{q(t)}{q(\lambda t)}} = \left[st\text{-}\liminf_{t\to\infty}\left(1-\frac{q(t)}{q(\lambda t)}\right)\right]^{-1} \\ &= \left[1-st\text{-}\limsup_{t\to\infty}\frac{q(t)}{q(\lambda t)}\right]^{-1} = \left[1-\frac{1}{st\text{-}\liminf_{t\to\infty}\frac{q(\lambda t)}{q(t)}}\right]^{-1} < \infty \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

dur. Böylece (3.2.10) eşitsizliğinin her iki tarafından $t \to \infty$ için istatististiksel limite geçildiğinde eşitsizliğin sağ tarafı kabulden ve Uyarı 3.2.1 den dolayı sıfıra yaklaşır. Dolayısıyla (3.2.8) eşitliği elde edilir. $0 < \lambda < 1$ durumunda (3.2.9) eşitliğinin doğruluğu benzer şekilde gösterilir. □

Teorem 3.2.2 $q \in Q$ fonksiyonu her $\lambda > 1$ için (3.2.6) koşulunu sağlasın, ayrıca $\widetilde{f}$: $[0,\infty) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sürekli bulanık sayı değerli bir fonksiyon ve $st\text{-}\lim_{t\to\infty}\widetilde{\sigma}(t) = L$ olsun. Bu durumda $st\text{-}\lim_{t\to\infty}\widetilde{s}(t) = L$ olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için

$$\inf_{\lambda>1}\limsup_{a\to\infty}\frac{1}{a}\left|\left\{t\in[0,a] : D\left(\frac{1}{q(\lambda t)-q(t)}\int_t^{\lambda t}\widetilde{s}(x)\,dq(x),\widetilde{s}(t)\right)\geq\varepsilon\right\}\right| = 0 \tag{3.2.12}$$

veya

$$\inf_{0<\lambda<1}\limsup_{a\to\infty}\frac{1}{a}\left|\left\{t\in[0,a] : D\left(\frac{1}{q(t)-q(\lambda t)}\int_{\lambda t}^{t}\widetilde{s}(x)\,dq(x),\widetilde{s}(t)\right)\geq\varepsilon\right\}\right| = 0 \tag{3.2.13}$$

olmasıdır.

İspat. *Gereklilik.* $st\text{-}\lim_{t\to\infty}\widetilde{\sigma}(t) = L$ ve $st\text{-}\lim_{t\to\infty}\widetilde{s}(t) = L$ koşullarının gerçeklendiğini kabul edelim. Lemma 3.2.1 den her $\lambda > 1$ için (3.2.8) ve her $0 < \lambda < 1$ için (3.2.9) sağlanır. Buradan her $\lambda > 1$ için

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{q(\lambda t)-q(t)}\int_t^{\lambda t}\widetilde{s}(x)\,dq(x),\widetilde{s}(t)\right) &\leq D\left(\frac{1}{q(\lambda t)-q(t)}\int_t^{\lambda t}\widetilde{s}(x)\,dq(x),L\right)+D\left(\widetilde{s}(t),L\right) \\ &\xrightarrow{st} 0+0=0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla (3.2.12) elde edilir. Ayrıca her $0 < \lambda < 1$ için

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{q(t)-q(\lambda t)}\int_{\lambda t}^{t}\widetilde{s}(x)\,dq(x),\widetilde{s}(t)\right) &\leq D\left(\frac{1}{q(t)-q(\lambda t)}\int_{\lambda t}^{t}\widetilde{s}(x)\,dq(x),L\right)+D\left(\widetilde{s}(t),L\right) \\ &\xrightarrow{st} 0+0=0 \end{aligned}$$

olduğundan (3.2.13) elde edilir.

Yeterlilik. $st\text{-}\lim_{t\to\infty} \widetilde{\sigma}(t) = L$ olsun ve (3.2.12) koşulunun sağlandığını kabul edelim. $st\text{-}\lim_{t\to\infty} \widetilde{s}(t) = L$ olduğunu ispatlayacağız. Bunun için $D(\widetilde{\sigma}(t), \widetilde{s}(t)) \xrightarrow{st} 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\lambda > 1$ durumunda

$$\begin{aligned}
D(\widetilde{\sigma}(t), \widetilde{s}(t)) &= D\left(\widetilde{\sigma}(t) + \frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x), \widetilde{s}(t) + \frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x)\right) \\
&\leq D\left(\frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x), \widetilde{s}(t)\right) \\
&+ D\left(\widetilde{\sigma}(t) + \frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_0^{t} \widetilde{s}(x)\, dq(x), \right. \\
&\left. \frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x) + \frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_0^{t} \widetilde{s}(x)\, dq(x)\right) \\
&= D\left(\frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x), \widetilde{s}(t)\right) + \frac{q(\lambda t)}{q(\lambda t) - q(t)} D(\widetilde{\sigma}(t), \widetilde{\sigma}(\lambda t))
\end{aligned}$$

olduğundan herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\begin{aligned}
&\{t \in [0,a] : D(\widetilde{\sigma}(t), \widetilde{s}(t)) \geq \varepsilon\} \\
&\subset \left\{t \in [0,a] : D\left(\frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x), \widetilde{s}(t)\right) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\
&\cup \left\{t \in [0,a] : \frac{q(\lambda t)}{q(\lambda t) - q(t)} D(\widetilde{\sigma}(t), \widetilde{\sigma}(\lambda t)) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}
\end{aligned}$$

bağıntısı ve böylece

$$\begin{aligned}
&|\{t \in [0,a] : D(\widetilde{\sigma}(t), \widetilde{s}(t)) \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \left|\left\{t \in [0,a] : D\left(\frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x), \widetilde{s}(t)\right) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \\
&+ \left|\left\{t \in [0,a] : \frac{q(\lambda t)}{q(\lambda t) - q(t)} D(\widetilde{\sigma}(t), \widetilde{\sigma}(\lambda t)) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

eşitsizliği geçerlidir. (3.2.12) koşulundan dolayı her $\delta > 0$ sayısı için

$$\limsup_{a\to\infty} \frac{1}{a} \left|\left\{t \in [0,a] : D\left(\frac{1}{q(\lambda t) - q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x), \widetilde{s}(t)\right) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \leq \delta \tag{3.2.15}$$

olacak biçimde bir $\lambda > 1$ sayısı mevcuttur. Diğer taraftan (3.2.11) den ve Uyarı 3.2.1 den

$$\limsup_{a\to\infty} \frac{1}{a} \left|\left\{t \in [0,a] : \frac{q(\lambda t)}{q(\lambda t) - q(t)} D(\widetilde{\sigma}(t), \widetilde{\sigma}(\lambda t)) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| = 0 \tag{3.2.16}$$

olur. Böylece (3.2.14), (3.2.15) ve (3.2.16) birlikte ele alındığında

$$\limsup_{a\to\infty} \frac{1}{a} |\{t \in [0,a] : D(\widetilde{\sigma}(t), \widetilde{s}(t)) \geq \varepsilon\}| \leq \delta$$

elde edilir. $\delta > 0$ sayısı keyfi olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a} \left|\left\{t \in [0,a] : D\left(\widetilde{\sigma}(t), \widetilde{s}(t)\right) \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

olur. Dolayısıyla $st\text{-}\lim_{t\to\infty} \widetilde{s}(t) = L$ dir. $0 < \lambda < 1$ olduğunda aynı yöntemle $st\text{-}\lim_{t\to\infty} \widetilde{s}(t) = L$ olduğu gösterilebilir. $\square$

Fekete'den (2006) yararlanarak, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{a\to\infty} \frac{1}{a} \left|\left\{t \in [0,a] : \max_{t\leq x\leq \lambda t} D\left(\widetilde{s}(x), \widetilde{s}(t)\right) \geq \varepsilon\right\}\right| = 0 \tag{3.2.17}$$

veya denk olarak

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{a\to\infty} \frac{1}{a} \left|\left\{t \in [0,a] : \max_{\lambda t\leq x\leq t} D\left(\widetilde{s}(x), \widetilde{s}(t)\right) \geq \varepsilon\right\}\right| = 0 \tag{3.2.18}$$

koşulu sağlanırsa $\widetilde{s} : [0,\infty) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ fonksiyonuna istatistiksel yavaş salınımlıdır diyeceğiz. (2.2.2) eşitsizliğinden ve Lemma 2.2.2 (i) den

$$\begin{aligned}
& D\left(\frac{1}{q(\lambda t)-q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x), \widetilde{s}(t)\right) \\
&= D\left(\frac{1}{q(\lambda t)-q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(x)\, dq(x), \frac{1}{q(\lambda t)-q(t)} \int_t^{\lambda t} \widetilde{s}(t)\, dq(x)\right) \\
&\leq \frac{1}{q(\lambda t)-q(t)} \int_t^{\lambda t} D\left(\widetilde{s}(x), \widetilde{s}(t)\right) dq(x) \\
&\leq \max_{t\leq x\leq \lambda t} D\left(\widetilde{s}(x), \widetilde{s}(t)\right) \frac{1}{q(\lambda t)-q(t)} \int_t^{\lambda t} dq(x) = \max_{t\leq x\leq \lambda t} D\left(\widetilde{s}(x), \widetilde{s}(t)\right)
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla (3.2.17) koşulu (3.2.12) koşulunu gerektirir. Benzer olarak (3.2.18) koşulunun (3.2.13) koşulunu gerektirdiği gösterilebilir. Böylece Teorem 3.2.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.1 $q \in Q$ fonksiyonu her $\lambda > 1$ için (3.2.6) koşulunu sağlasın, $\widetilde{f} : [0,\infty) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ise $\widetilde{s}(t)$ integral fonksiyonu istatistiksel yavaş salınımlı olan sürekli bulanık sayı değerli bir fonksiyon olsun. Eğer $st\text{-}\lim_{t\to\infty} \widetilde{\sigma}(t) = L$ ise $st\text{-}\lim_{t\to\infty} \widetilde{s}(t) = L$ dir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, ilk olarak sürekli bulanık sayı değerli fonksiyonların genelleştirilmiş integrallerinin ağırlıklı ortalama metoduna göre toplanabilirliği kavramına ilişkin Tauber tipi teoremler incelenmiştir.

Daha sonra, Móricz'in (2004) ölçülebilir fonksiyonların sonsuzdaki istatistiksel limiti fikrinden yararlanılarak sürekli bulanık sayı değerli fonksiyonların sonsuzdaki istatistiksel limiti tanımlanmış ve sonsuzdaki istatistiksel limitin sonsuzdaki limit kavramından daha genel olduğu bir örnekle açıklandıktan sonra klasik anlamda benzeri Chen ve Chang (2011) tarafından verilen bir sonucun ispat yönteminden yararlanılarak sürekli bulanık sayı değerli fonksiyonların sonsuzdaki istatistiksel limitinden bilinen anlamdaki limitinin elde edildiği bir Tauber tipi teorem ispatlanmıştır. Buradaki sonuçlarda özel olarak $q(t) = t$ alındığında istatistiksel $(C, 1)$ toplanabilir bulanık sayı değerli fonksiyonlar için Tauber tipi teoremler elde edilir.

Son olarak, klasik anlamdaki çalışması Fekete (2006) tarafından yapılan ve integrallenebilir fonksiyonların istatistiksel $\left(\overline{N}, q\right)$ toplanabilmesinden istatistiksel limitinin varlığının elde edildiği Tauber tipi teoremlerin sürekli bulanık sayı değerli fonksiyonlar için benzerleri ispatlanmıştır.

Teorem 3.2.1 'deki (3.2.2) koşulu, Tanım 3.1.2 ile verilen $\widetilde{s}\,(t)$ fonksiyonunun yavaş azalanlığı koşulu ile değiştirildiğinde teoremin ispatlanabilir olup olmadığı incelenebilir. Tanım 3.2.1 ile verilen bulanık sayı değerli fonksiyonların sonsuzdaki istatistiksel limiti düşüncesi ile birçok yeni çalışmalar yapılabilir. Bu nedenlerden dolayı hazırlanan bu yüksek lisans tezinin bulanık sayı değerli fonksiyonların çeşitli toplanabilme metotları üzerine çalışmalar yapan araştırmacılar için yararlı bir kaynak olacağı söylenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Abel, N.H. (1826). Recherches sur la serie $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + ...$ *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* 1, 311-339.

[2] Altin, Y., Mursaleen, M., & Altınok, H. (2010). Statistical summability $(C, 1)$ for sequences of fuzzy real numbers and a Tauberian theorem. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 21(6), 379-384.

[3] Anastassiou, G.A. (2002). Rate of convergence of fuzzy neural network operators, univariate case. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 10(3), 755–780.

[4] Anastassiou, G.A. (2004). Univariate fuzzy-random neural network approximation operators, *Computers & Mathematics with Applications*, 48, 1263-1283.

[5] Bede, B. (2013). Fuzzy Set-Theoretic Operations. In Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic (pp. 13-31). Springer, Berlin, Heidelberg.

[6] Belen, C. (2018) Tauberian theorems for weighted mean summability method of improper Riemann integrals of fuzzy number valued functions. *Soft Computing, 22 (12), 3951-3957.*

[7] Çanak, İ. (2014). On the Riesz mean of sequences of fuzzy real numbers, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 26(6), 2685-2688.

[8] Chen, C. P., & Chang, C. T. (2011). Tauberian Theorems for the weighted means of measurable functions of several variables. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 15(1), 181-199.

[9] Diamond, P., & Kloeden, P. E. (1994). Metric spaces of fuzzy sets: theory and applications. World scientific. Singapore, 188pp.

[10] Dubois, D., & Prade, H. (1987). Fuzzy numbers: An overview, in: "Analysis of fuzzy information, vol. 1, Mathematical Logic", pp. 3-39, CRC Press, Boca Raton.

[11] Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum*, 2, 241–244.

[12] Fekete, Á. (2006). Tauberian conditions under which the statistical limit of an integrable function follows from its statistical summability. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 43(1), 115-129.

[13] Gal, S. (2000). Approximation theory in fuzzy setting, Chapter 13, 617–666, in Handbook of Analytic-Computational Methods in Applied Mathematics, editor, G.A. Anastassiou, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

[14] Goetschel, R., & Voxman, W. (1986). Elementary fuzzy calculus. *Fuzzy Sets and Systems*, 18(1), 31-43.

[15] Hardy, G.H. (1910). Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(8), 310-320.

[16] Hardy, G.H. (1949). Divergent series. Clarendon press, Oxford, 1949.

[17] Littlewood, J.E. (1911). The converse of Abel's theorem on power series. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 9(2), 434-448.

[18] Matloka, M. (1986). Sequences of fuzzy numbers. *Busefal*, 28(1), 28-37.

[19] Ming, M. (1993). On embedding problem of fuzzy number space, Part 4. *Fuzzy Sets and Systems*, 58, 185-193.

[20] Móricz, F. (2004). Statistical limits of measurable functions. *Analysis*, 24, 1-18.

[21] Musayev, B., Alp, M., Mustafayev, N.,& Ekincioğlu, İ. (2003). Teori ve çözümlü problemlerle analiz. Tekağaç Eylül Yayıncılık, Kütahya, 579s.

[22] Nanda, S. (1989). On sequences of fuzzy numbers. *Fuzzy sets and systems*, 33(1), 123-126.

[23] Natanson, I. P. (1956). Theory of functions of a real variable. Ungar, New York, 277 pp.

[24] Niculescu, C., & Popovici, F. 2012. The asymptotic behavior of integrable functions at infinity. *Real Analysis Exchange*, 38 (1), 157-168.

[25] Nuray, F., & Savaş, E. (1995). Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers. *Mathematica Slovaca*, 45(3), 269-273.

[26] Önder, Z. Sezer, S.A., & Çanak, İ. (2015), A Tauberian theorem for the weighted mean method of summability of sequences of fuzzy numbers, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 28(3), 1403-1409.

[27] Önder, Z., & Çanak, İ. (2017). A Tauberian theorem for the weighted mean method of improper Riemann integrals. Journal of Intelligent Fuzzy Systems, 33(1), 293-303.

[28] Ren, X., & Wu, C. (2013). The fuzzy Riemann-Stieltjes integral, *International Journal of Theoretical Physics, Group Theory, and Nonlinear Optics*, 52, 2134-2151.

[29] Steinhaus, H. 1951. Sur la convergence ordinate et la convergence asymptotique. *Colloquium Mathematicum*, 2, 73–74.

[30] Tauber, A. (1897). Ein Satz aus der Theorie der unend lichen Reihen. *Monatshefte für Mathematic und Physik*, 8, 273-277.

[31] Talo, Ö., & Başar, F. (2013). On the slowly decreasing sequences of fuzzy numbers, *Abstract and Applied Analysis*, vol., Article ID 891986, 7 pages, doi:10.1155/2013/891986.

[32] Yavuz, E., Talo, Ö., & Çoşkun, H. (2018). Cesàro summability of integrals of fuzzy-number-valued functions. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara-Series A1 Mathematics and Statistics*, 67(2), 38-49.

[33] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	**:**	Uğur DEMİRCAN
Doğum Yeri	**:**	ÇAYCUMA
Doğum Tarihi	**:**	02.12.1988
Medeni Hali	**:**	Bekar
Bildiği Yabancı Dil	**:**	İngilizce
Lisans	**:**	Ordu Üniversitesi, Matematik Bölümü (2009-2013)
Mesleki Deneyim	**:**	Özel Ordu Bilim Dershanesi (2016-)