

**T.C.  
ORDU ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ESNEK KAFES YAPILARI**

**SEVGİ DEMİR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ORDU 2019**

## TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Sevgi DEMİR tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Yıldray ÇELİK danışmanlığında yürütülen “Esnek Kafes Yapıları” adlı bu tez, jürimiz tarafından 08 / 11 / 2019 tarihinde oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Yıldray ÇELİK

Başkan : Prof. Dr. Selahattin MADEN  
Matematik, Ordu Üniversitesi

İmza :

Üye : Doç. Dr. Yıldray ÇELİK  
Matematik, Ordu Üniversitesi

İmza :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Sercan TURHAN  
Matematik, Giresun Üniversitesi

İmza :

ONAY:

04 / 12 / 2019 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 06 / 12 / 2019 tarih ve 2019 / 750 sayılı kararı ile onaylanmıştır.



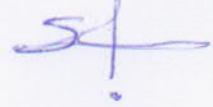
Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Selahattin MADEN

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Sevgi DEMİR



**Bu çalışma Ordu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğünün B-1810 numaralı projesi ile desteklenmiştir.**

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## ÖZET

### ESNEK KAFES YAPILARI

Sevgi DEMİR

Ordu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı, 2019  
Yüksek Lisans Tezi, 40s.

Danışman: Doç. Dr. Yıldırım ÇELİK

Bu tezin amacı, bazı esnek kafes yapılarını vermek, bu yapılara ait temel özellikleri araştırmak ve elde edilen sonuçları ortaya koymaktır.

Bu çalışma iki ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde çalışmamızda temel olan kafesler ve esnek kümeler hakkında bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir. İkinci bölümde esnek kafes, esnek alt kafes, esnek kafes homomorfisi, esnek dağılımlı kafes ve esnek modüler kafes kavramları verilerek bunlara ait özellikler araştırılmıştır ve elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Kafes, Esnek kafes, Esnek dağılımlı kafes, Esnek modüler kafes.

## **ABSTRACT**

### **SOFT LATTICE STRUCTURES**

**Sevgi DEMİR**

University of Ordu  
Institute for Graduate Studies in Natural and Technology  
Department of Mathematics, 2019  
MSc. Thesis, 40p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yıldray ÇELİK

The aim of the present thesis is to give the some soft lattice structures, to investigate the basic properties of these structures, and is to present the obtained results.

This study consists of two main chapters. In first chapter, some definitions and theorems which are crucial for our study such as lattice and soft set are stated. In second chapter, by giving the concepts of soft lattice, soft sublattice, soft lattice homomorphism, soft distributive lattice and soft modular lattice, the algebraic properties belonging to these are examined and obtained results are evaluated.

**Key Words:** Lattice, Soft lattice, Soft distributive lattice, Soft modular lattice.

## TEŞEKKÜR

Tez konunun belirlenmesi, çalıőmanın yűrűtűlmesi ve yazımı sűresince yardımlarını esirgemeyen baőta danıőman hocam Sayın Doç. Dr. Yıldırđay ÇELİK olmak űzere Ordu Ŭniversitesi Fen Edebiyat Fakűltesi Matematik Bűlűmű Őđretim Ŭyelerine teőekkűr ederim. Ayrıca Ordu Ŭniversitesi BAP Koordinatűrlűđine B-1810 numaralı proje ile vermiő oldukları destek için teőekkűr ederim.

Aynı zamanda, her zaman yanımda olan, hiçbir yardımı esirgemeyen, manevi desteklerini her zaman űzerimde hissettiđim aileme de sonsuz teőekkűr ederim.



## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
<b>TEZ BİLDİRİMİ</b> .....	I
<b>ÖZET</b> .....	II
<b>ABSTRACT</b> .....	III
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	IV
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	V
<b>ŞEKİLLER LİSTESİ</b> .....	VI
<b>SİMGELER ve KISALTMALAR</b> .....	VII
<b>1. GİRİŞ</b> .....	1
<b>2. TEMEL KAVRAMLAR</b> .....	3
2.1. Kafesler.....	3
2.2. Esnek Kümeler.....	5
<b>3. ESNEK KAFES YAPILARI</b> .....	10
3.1. Esnek Kafesler .....	10
3.2. Esnek Kafes Homomorfisi.....	18
3.3. Esnek Dağılımlı Kafesler.....	21
3.4. Esnek Modüler Kafesler .....	23
<b>4. SONUÇ ve ÖNERİLER</b> .....	28
<b>5. KAYNAKLAR</b> .....	29
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	31

## ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Sekil No</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1. $L=\{0,p,q,r,s,t,v,1\}$ kafesi.....	10
Şekil 3.2. $L=\{0,p,q,r,s,t,v,1\}$ kafesi .....	11
Şekil 3.3. $L=\{0,p,q,r,s,1\}$ kafesi .....	11
Şekil 3.4. $L=\{0,p,q,r,s,1\}$ kafesi .....	12
Şekil 3.5. $L=\{0,p,q,r,1\}$ kafesi .....	15
Şekil 3.6. $L=\{0,p,q,r,1\}$ kafesi .....	16
Şekil 3.7. $L=\{0,p,q,r,1\}$ kafesi .....	16
Şekil 3.8. $L=\{0,p,q,r,s,1\}$ kafesi .....	17
Şekil 3.9. $L=\{0,p,q,1\}$ kafesi .....	19
Şekil 3.10. $L=\{0,1\}$ kafesi .....	19
Şekil 3.11. $L=\{0,p,q,r,1\}$ kafesi .....	21
Şekil 3.12. $L=\{0,p,q,r,s,1\}$ kafesi .....	22
Şekil 3.13. $L=\{0,p,q,r,s,t,v,1\}$ kafesi .....	24
Şekil 3.14. $L=\{0,p,q,r,s,1\}$ kafesi .....	25
Şekil 3.15. $L=\{0,p,q,r,s,t,v,1\}$ kafesi .....	26



## SİMGELER VE KISALTMALAR

$\wp(U)$	: U kümesinin güç kümesi
$\sqsubseteq$	: Esnek alt küme
$\text{Des}(F,A)$	: $(F,A)$ esnek kümesinin desteği
$S(U)$	: U kümesi üzerindeki bütün esnek kümelerin ailesi
$\text{Ek}(L)$	: L üzerindeki tüm esnek kafesler
$\cup$	: Esnek kümelerin birleşimi
$\sqcup$	: Esnek kümelerin daraltılmış birleşimi
$\cap$	: Esnek kümelerin arakesiti
$\sqcap$	: Esnek kümelerin genişletilmiş arakesiti
$\wedge$	: Esnek kümelerin $\wedge$ -arakesiti
$\vee$	: Esnek kümelerin $\vee$ -birleşimi
$\sim$	: Esnek kafes homomorfisi
$\approx$	: Esnek kafes izomorfisi

# 1. GİRİŞ

Belirsizlik problemleri ve bu problemlerin çözümüne yönelik yaklaşımlar birçok bilim adamı tarafından uzun zamandır ele alınmaktadır. Belirsizliği anlamak ve buna uygun çözümler bulmak için birçok yaklaşım metotları geliştirilmiştir. Bu yaklaşımlardan en önemlileri bulanık kümeler (Zadeh, 1965), yaklaşımlı kümeler (Pawlak, 1982) ve esnek kümeler (Molodtsov, 1999) dir. Esnek küme teorisi, belirsizlik içeren problemlerin mevcut metotlar ile çözümü noktasında karşılaşılan zorlukların üstesinden gelebilmek ve bu problemlere uygun çözümler geliştirebilmek için ilk olarak Molodtsov (1999) tarafından ortaya konuldu. Molodtsov (1999, 2004) birçok alana esnek küme teorisini uyguladı. Esnek kümeler, hem teori hem de pratiğin dengeli bir kapsamını vurgular. Günümüzde esnek küme teorisi, mühendislik, bilgisayar bilimleri, ekonomi, sosyal bilimler, doğa bilimleri ve tıp bilimi başta olmak üzere akıllı sistemlerden karar verme sistemlerine kadar bir çok alanda geniş bir uygulama imkanı buldu. Maji ve ark. (2002, 2003) bir karar verme probleminde esnek kümelerin bir uygulamasını yaptılar ve esnek kümelerde bazı işlemleri tanımladılar. Esnek küme teorisi, özellikle esnek karar verme gibi birçok alanda geniş kapsamlı uygulamalarla ilerleme göstermiştir (Maji ve ark., 2003; Ali ve ark., 2009; Çağman ve Enginoğlu, 2010; Feng ve ark., 2010; Feng ve ark., 2011; Feng ve ark., 2013). Daha sonrasında esnek kümelerin cebirsel yapılar üzerindeki uygulamalarında birçok araştırmacı tarafından ele alındı ve bu yapılar üzerindeki etkisi incelendi. İlk olarak Aktaş ve Çağman (2007) esnek grup kavramını verdiler ve bu kavramın temel özelliklerini incelediler. Jun (2008) esnek kümeleri BCK/BCI-cebirlerine uygulayarak, BCK/BCI-cebirlerinde esnek kümelerin cebirsel özelliklerini araştırdı. Feng ve ark. (2008) esnek küme teorisini kullanarak esnek yarı halka kavramını verdiler ve bu kavrama ait bazı özellikleri incelediler. Sun ve ark. (2008) esnek modülleri tanımlayarak, esnek modüllere ait bazı temel özellikleri elde ettiler. Shabir ve Ali (2009) yarıgruplarda esnek ideal kavramını verdiler. Majumdar ve Samanta (2010) esnek dönüşüm kavramını verdiler ve onların bazı özellikleri üzerinde çalıştılar. Acar ve ark. (2010) esnek halkaları tanımladılar ve esnek halkaların bazı temel özelliklerini incelediler. Qin ve Hong (2010) esnek kümelerin kafes yapısını inşaa ettiler, esnek eşitlik kavramını incelediler ve bunlarla ilgili bazı özellikler elde ettiler. Yamak ve ark. (2011) esnek hypergroupoid kavramını verdiler ve bu kavrama ait bazı yeni özellikler elde ettiler. Çelik ve ark. (2011) esnek kümeler üzerinde yeni ikili

işlemler verdiler ve esnek halkalarla ilgili yeni özellikler elde ettiler. Karaaslan ve ark. (2012) esnek kümelerdeki bazı işlemleri kullanarak, esnek kümeler üzerinde esnek kafesleri tanımladılar ve bazı esnek kafes yapılarını incelediler. Nagaraajan ve Geetha (2014) bir esnek kafesin esnek ideali kavramını verdiler ve ilgili özellikleri araştırdılar. Bera ve ark. (2017) bir kafes üzerinde esnek kongrüans bağıntısını tanımladılar ve tam esnek kongrüans bağıntısı kavramını verdiler.

Biz bu çalışmada bazı esnek kafes yapılarını ele alacağız, temel özelliklerini inceleyeceğiz ve elde edilen sonuçları değerlendireceğiz. Bu çalışma iki ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde çalışmamızda temel olan kafesler ve esnek kümeler hakkında bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir. İkinci bölümde esnek kafes, esnek alt kafes, esnek kafes homomorfisi, esnek dağılımlı kafes ve esnek modüler kafes kavramları verilerek bunlara ait özellikler araştırılmıştır.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

### 2.1 Kafesler

**Tanım 2.1.1** (Birkhoff, 1967)  $L \neq \emptyset$  bir küme ve " $\leq$ "  $L$  üzerinde bir bağıntı olsun.  $L$ 'ye sıralı küme denir.  $\Leftrightarrow$

- (i) Her  $a \in L$  için  $a \leq a$
- (ii) Her  $a, b \in L$  için  $a \leq b$  ve  $b \leq a$  ise  $a=b$
- (iii) Her  $a, b, c \in L$  için  $a \leq b$  ve  $b \leq c$  ise  $a \leq c$  dir.

Bir  $L$  sıralı kümesi  $(L, \leq)$  notasyonu ile gösterilir.

**Tanım 2.1.2** (Birkhoff, 1967)  $(L, \leq)$  bir sıralı küme,  $B \subseteq L$  ve  $a \in L$  olsun.

- (i) Eğer her  $b \in B$  için  $a \leq b$  ise  $a \in L$  elemanına  $B$  nin bir alt sınırı denir.
- (ii) Eğer her  $b \in B$  için  $b \leq a$  ise  $a \in L$  elemanına  $B$  nin bir üst sınırı denir.
- (iii) Eğer  $a, B$  kümesinin bir alt sınırı ve  $a \in B$  ise  $a$  ya  $B$  kümesinin en küçük elemanı denir.
- (iv) Eğer  $a, B$  kümesinin bir üst sınırı ve  $a \in B$  ise  $a$  ya  $B$  kümesinin en büyük elemanı denir.

**Tanım 2.1.3** (Birkhoff, 1967)  $(L, \leq)$  sıralı küme ve  $B \subseteq L$  olsun.  $\bar{B}$ ,  $B$  nin tüm üst sınırlarından;  $\underline{B}$ ,  $B$  tüm alt sınırlarından oluşan bir küme olsun.

- $\underline{B} \neq \emptyset$  ve  $\underline{B}$  nin en büyük elemanı varsa bu elemana  $B$  nin en büyük alt sınırı (infimumu) denir ve  $\inf B = \wedge B = \wedge_{b \in B} b$  notasyonlarından biri ile gösterilir.
- $\bar{B} \neq \emptyset$  ve  $\bar{B}$  nin en küçük elemanı varsa bu elemana  $B$  nin en küçük üst sınırı (supremumu) denir ve  $\sup B = \vee B = \vee_{b \in B} b$  notasyonlarından biri ile gösterilir.

**Tanım 2.1.4** (Birkhoff, 1967)  $(L, \leq)$  bir sıralı küme olsun.  $L$  kümesine kafes denir  $\Leftrightarrow$  Her  $a, b \in L$  için  $\sup\{a, b\} = a \vee b$  ve  $\inf\{a, b\} = a \wedge b$  mevcuttur.

**Tanım 2.1.5** (Birkhoff, 1967)  $(L, \leq)$  bir kafes olsun.

- (i)  $L$  ye tam kafes denir.  $\Leftrightarrow$  Her  $\emptyset \neq T \subseteq L$  için  $\sup T$  ve  $\inf T$  mevcuttur.
- (ii)  $L$  ye modüler kafes denir.  $\Leftrightarrow$  Her  $a, b, c \in L$  ve  $a \leq b$  için  $a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$  dir.
- (iii)  $L$  ye dağılımlı kafes denir.  $\Leftrightarrow$  Her bir  $a, b, c \in L$  için  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$  ve  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ .

Bir  $L$  kafesi genel olarak  $(L, \leq, \vee, \wedge)$  şeklinde gösterilir. Ayrıca,  $L$  kafesinin en küçük elemanı ve en büyük elemanı varsa, bu elemanlar sırasıyla “0” ve “1” ile gösterilir.

**Tanım 2.1.6** (Birkhoff, 1967)  $L$  bir kafes  $0 \in L$  ve her  $x \in L$  için  $0 \leq x$  ise  $L$  ye alttan sınırlı kafes denir ve  $(L, \leq, 0)$  ile gösterilir.  $1 \in L$  ve her  $x \in L$  için  $x \leq 1$  ise  $L$  ye üstten sınırlı kafes denir ve  $(L, \leq, 1)$  ile gösterilir.  $L$  kafesi üstten ve alttan sınırlı ise  $L$  ye sınırlı kafes denir ve  $(L, \leq, 0, 1)$  ile gösterilir.

Aksi söylenmedikçe bütün kafesler sınırlı kafes olarak ele alınacaktır.

**Tanım 2.1.7** (Birkhoff, 1967)  $(L, \leq)$  bir tam kafes olsun.  $L$  ye sonsuz  $\vee$ -dağılımlı kafes denir.  $\Leftrightarrow$  Her  $a, b_i \in L, i \in \Lambda$  için  $a \wedge (\bigvee_{i \in \Lambda} b_i) = \bigvee_{i \in \Lambda} (a \wedge b_i)$  dir.

**Tanım 2.1.8** (Birkhoff, 1967)  $(L, \leq)$  bir kafes ve  $\emptyset \neq T \subseteq L$  olsun.  $T$  ye alt kafes denir.  $\Leftrightarrow$  Her  $a, b \in T$  için  $a \vee b, a \wedge b \in T$  dir.

**Teorem 2.1.1** (Birkhoff, 1967)  $(L, \leq)$  bir kafes olsun. Eğer  $L$  dağılımlı (modüler) kafes ise  $L$  nin her alt kafesi de dağılımlı (modüler) dır.

**Tanım 2.1.9** (Birkhoff, 1967)  $(L_1, \leq)$  ve  $(L_2, \leq)$  sıralı kümeler ve  $f : L_1 \rightarrow L_2$  bir fonksiyon olsun.  $f$  ye sıra korur fonksiyon denir.  $\Leftrightarrow$  Her  $a, b \in L_1$  için  $a \leq b$  ise  $f(a) \leq f(b)$  dir.

**Tanım 2.1.10** (Birkhoff, 1967)  $(L_1, \leq)$  ve  $(L_2, \leq)$  kafesler ve  $f : L_1 \rightarrow L_2$  bir fonksiyon olsun.  $f$  ye kafes homomorfisi denir.  $\Leftrightarrow$  Her  $a, b \in L_1$  için  $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$  ve  $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$  dir.

**Örnek 2.1.1** (i)  $A \neq \emptyset$  bir küme ve  $L = \wp(A)$  olsun.  $T, S \in L$  için  $T \leq S \Leftrightarrow T \subseteq S$  ile verilen “ $\leq$ ” bağıntısı ile  $(L, \leq)$  sonsuz  $\vee$ -dağılımlı kafestir.

(ii)  $L$  sonlu bir küme ve  $(L, \leq)$  dağılımlı kafes ise  $(L, \leq)$  sonsuz  $\vee$ -dağılımlı kafestir.

(iii)  $(L_1, \leq)$  ve  $(L_2, \leq)$  sonsuz  $\vee$ -dağılımlı kafesler olsun.  $L_1 \times L_2$  üzerinde “ $\leq$ ” sıralama bağıntısı  $(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a \leq c$  ve  $b \leq d$  şeklinde verilsin. Bu taktirde  $(L_1 \times L_2, \leq)$  sonsuz  $\vee$ -dağılımlı kafestir.

## 2.2 Esnek Kümeler

**Tanım 2.2.1** (Molodtsov, 1999; Feng ve ark., 2008)  $U$  ve  $E$  boştan farklı kümeler,  $\wp(U)$   $U$ 'nun güç kümesi,  $E$  parametreler kümesi ve  $A \subseteq E$  olsun.  $\eta : A \rightarrow \wp(U)$  dönüşümü ile verilen  $(\eta, A)$  ikilisine  $U$  üzerinde bir esnek küme denir. Burada  $R \subseteq A \times U$  olmak üzere her  $x \in A$  için  $\eta(x) = \{y \in U \mid (x, y) \in R\}$  şeklinde tanımlanır.  $Des(\eta, A) = \{x \in A : |\eta(x) \neq \emptyset\}$  kümesine  $(\eta, A)$  esnek kümesinin desteği denir. Her  $x \in A$  için  $\eta(x) = \emptyset$  ise  $(\eta, A)$  ya boş esnek küme denir. Eğer  $Des(\eta, A) \neq \emptyset$  ise  $(\eta, A)$  ya boştan farklı esnek küme denir.  $U$  üzerinde tanımlı bütün esnek kümelerin ailesi  $S(U)$  ile gösterilecektir.

**Örnek 2.2.1**  $f : A \rightarrow U$  bir fonksiyon ve  $\eta : A \rightarrow \wp(U)$  bir dönüşüm olmak üzere her  $x \in A$  için  $\eta(x) = \{f(x)\}$  şeklinde tanımlanan  $(\eta, A)$  ikilisi  $U$  üzerinde bir esnek kümedir.

**Örnek 2.2.2**  $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$  bir fonksiyon ve  $(\eta, A)$ ,  $(\mu, B)$  sırasıyla  $U_1$  ve  $U_2$  üzerinde esnek kümeler olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) : A &\rightarrow \wp(U_2) & \varphi(\eta)(x) &= \varphi(\eta(x)) \\ \varphi^{-1}(\mu) : B &\rightarrow \wp(U_1) & \varphi^{-1}(\mu)(y) &= \varphi^{-1}(\mu(y)) \end{aligned}$$

ile tanımlanan  $(\varphi(\eta), A)$  ve  $(\varphi^{-1}(\mu), B)$  ikilileri sırasıyla  $U_2$  ve  $U_1$  üzerinde esnek kümelerdir.

**Tanım 2.2.2** (Molodtsov, 1999)  $(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$   $U$  üzerinde iki esnek küme ve  $A \subseteq B$  olsun. Eğer her  $x \in A$  için  $\eta(x) \subseteq \mu(x)$  ise  $(\eta, A)$  ya  $(\mu, B)$  nin esnek alt kümesi denir. Bu durum  $(\eta, A) \sqsubseteq (\mu, B)$  notasyonu ile gösterilir.

**Önerme 2.2.1**  $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$  bir fonksiyon olmak üzere  $(\eta_1, A_1)$  ve  $(\eta_2, A_2)$   $U_1$  üzerinde,  $(\mu_1, B_1)$  ve  $(\mu_2, B_2)$   $U_2$  üzerinde tanımlı esnek kümeler olsun. Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır.

- (i)  $(\eta_1, A_1) \subseteq (\eta_2, A_2)$  ise  $(\varphi(\eta_1), A_1) \subseteq (\varphi(\eta_2), A_2)$

(ii)  $(\mu_1, B_1) \subseteq (\mu_2, B_2)$  ise  $(\varphi^{-1}(\mu_1), B_1) \subseteq (\varphi^{-1}(\mu_2), B_2)$

**Tanım 2.2.3** (Ali ve ark., 2009; Feng ve ark., 2008)  $\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$   $U$  üzerinde esnek kümelerin bir ailesi olsun.

- (i)  $A = \cup_{i \in \Lambda} A_i$  ve her  $a \in A$  için  $\wedge(a) = \{i \mid a \in A_i\}$  olmak üzere  $\eta(a) = \cup_{i \in \wedge(a)} \eta_i(a)$  şeklinde tanımlanan  $(\eta, A)$  esnek kümesine  $\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$  esnek kümeler ailesinin birleşimi denir. Bu durum  $\bigcup_{i \in \Lambda} (\eta_i, A_i)$  notasyonu ile gösterilir.
- (ii)  $A = \cap_{i \in \Lambda} A_i$  ve her  $a \in A$  için  $\eta(a) = \cap_{i \in \Lambda} \eta_i(a)$  şeklinde tanımlanan  $(\eta, A)$  esnek kümesine  $\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$  esnek kümeler ailesinin arakesiti denir. Bu durum  $\bigcap_{i \in \Lambda} (\eta_i, A_i)$  notasyonu ile gösterilir.
- (iii)  $A = \cap_{i \in \Lambda} A_i$  ve her  $a \in A$  için  $\eta(a) = \cup_{i \in \Lambda} \eta_i(a)$  şeklinde tanımlanan  $(\eta, A)$  esnek kümesine  $\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$  esnek kümeler ailesinin daraltılmış birleşimi denir. Bu durum  $\bigsqcup_{i \in \Lambda} (\eta_i, A_i)$  notasyonu ile gösterilir.
- (iv)  $A = \cup_{i \in \Lambda} A_i$  ve her  $a \in A$  için  $\wedge(a) = \{i \mid a \in A_i\}$  olmak üzere  $\eta(a) = \cap_{i \in \wedge(a)} \eta_i(a)$  şeklinde tanımlanan  $(\eta, A)$  esnek kümesine  $\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$  esnek kümeler ailesinin genişletilmiş arakesiti denir. Bu durum  $\prod_{i \in \Lambda} (\eta_i, A_i)$  notasyonu ile gösterilir.
- (v)  $A = \prod_{i \in \Lambda} A_i$  ve her  $(a_i) \in A$  için  $\eta(a_i) = \cup_{i \in \Lambda} \eta_i(a_i)$  şeklinde tanımlanan  $(\eta, A)$  esnek kümesine  $\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$  esnek kümeler ailesinin  $\vee$ -birleşimi denir. Bu durum  $\bigvee_{i \in \Lambda} (\eta_i, A_i)$  notasyonu ile gösterilir.
- (vi)  $A = \prod_{i \in \Lambda} A_i$  ve her  $(a_i) \in A$  için  $\eta(a_i) = \cap_{i \in \Lambda} \eta_i(a_i)$  şeklinde tanımlanan  $(\eta, A)$  esnek kümesine  $\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$  esnek kümeler ailesinin  $\wedge$ -arakesiti denir. Bu durum  $\bigwedge_{i \in \Lambda} (\eta_i, A_i)$  notasyonu ile gösterilir.

$U$  üzerinde tanımlı  $(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$  gibi iki esnek küme için yukarıda verilen tanımlar sırasıyla aşağıdaki şekillerde gösterilir.

$(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$  esnek kümelerinin birleşimi:  $(\eta, A) \cup (\mu, B)$

$(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$  esnek kümelerinin arakesiti :  $(\eta, A) \cap (\mu, B)$

$(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$  esnek kümelerinin daraltılmış birleşimi:  $(\eta, A) \sqcup (\mu, B)$

$(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$  esnek kümelerinin genişletilmiş arakesiti:  $(\eta, A) \sqcap (\mu, B)$

$(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$  esnek kümelerinin  $\vee$ -birleşimi:  $(\eta, A) \vee (\mu, B)$

$(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$  esnek kümelerinin  $\wedge$ -arakesiti:  $(\eta, A) \wedge (\mu, B)$

**Önerme 2.2.2**  $\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \Lambda\} \subseteq Es(U)$  ve  $(\eta, B) \in Es(U)$  olsun. Bu taktirde;

$$(i) (\eta, B) \cap \left( \bigcup_{i \in \Lambda} (\eta_i, A_i) \right) = \bigcup_{i \in \Lambda} ((\eta, B) \cap (\eta_i, A_i))$$

$$(ii) (\eta, B) \cup \left( \bigcap_{i \in \Lambda} (\eta_i, A_i) \right) = \bigcap_{i \in \Lambda} ((\eta, B) \cup (\eta_i, A_i))$$

$$(iii) (\eta, B) \sqcap \left( \bigsqcup_{i \in \Lambda} (\eta_i, A_i) \right) = \bigsqcup_{i \in \Lambda} ((\eta, B) \sqcap (\eta_i, A_i))$$

$$(iv) (\eta, B) \sqcup \left( \bigcap_{i \in \Lambda} (\eta_i, A_i) \right) = \bigcap_{i \in \Lambda} ((\eta, B) \sqcup (\eta_i, A_i))$$

**İspat:**

(i)  $(\eta, B) \cap \left( \bigcup_{i \in \Lambda} (\eta_i, A_i) \right) = \left( \mu, B \cap \left( \bigcup_{i \in \Lambda} A_i \right) \right)$  ve  $\bigcup_{i \in \Lambda} ((\eta, B) \cap (\eta_i, A_i)) = \left( \delta, \bigcup_{i \in \Lambda} (B \cap A_i) \right)$  olsun.  $\wedge(x) = \{i \mid x \in A_i\}$ ,  $\wedge^l(x) = \{i \mid x \in B \cap A_i\}$  olmak üzere  $x \in B \cap \left( \bigcup_{i \in \Lambda} A_i \right) = \bigcup_{i \in \Lambda} (B \cap A_i)$  ise  $\mu(x) = \eta(x) \cap \left( \bigcup_{i \in \Lambda(x)} \eta_i(x) \right) = \bigcup_{i \in \wedge(x)} (\eta(x) \cap \eta_i(x)) = \bigcup_{i \in \wedge^l(x)} (\eta(x) \cap \eta_i(x)) = \delta(x)$  dir. Buradan  $(\eta, B) \cap \left( \bigcup_{i \in \Lambda} (\eta_i, A_i) \right) = \bigcup_{i \in \Lambda} ((\eta, B) \cap (\eta_i, A_i))$  dir.

(ii)  $(\eta, B) \cup \left( \bigcap_{i \in \Lambda} (\eta_i, A_i) \right) = \left( \mu, B \cup \left( \bigcap_{i \in \Lambda} A_i \right) \right)$  ve  $\bigcap_{i \in \Lambda} ((\eta, B) \cup (\eta_i, A_i)) = \left( \delta, \bigcap_{i \in \Lambda} (B \cup A_i) \right)$  olsun.  $x \in B \cup \left( \bigcap_{i \in \Lambda} A_i \right) = \bigcap_{i \in \Lambda} (B \cup A_i)$  olmak üzere;

Eğer  $x \in B \setminus \bigcap_{i \in \Lambda} A_i$  ise  $\mu(x) = \eta(x)$  dir. Ayrıca  $x \notin \bigcap_{i \in \Lambda} A_i$  olduğundan  $\exists i \in \Lambda, x \notin A_i$  ve  $\wedge^l = \{j \mid x \in A_j\}$  olmak üzere  $\delta(x) = \left[ \bigcap_{i \in \wedge^l} (\eta(x) \cup \eta_i(x)) \right] \wedge \eta(x) = \eta(x)$  dir. Yani  $\mu(x) = \delta(x)$  olur.

Eğer  $x \in \bigcap_{i \in \Lambda} A_i \setminus B$  ise  $\mu(x) = \bigcap_{i \in \Lambda} \eta_i(x)$  dir. Ayrıca her  $i \in \Lambda$  için  $x \in A_i \setminus B$  olduğundan  $\delta(x) = \bigcap_{i \in \Lambda} \eta_i(x)$  dir. Yani  $\mu(x) = \delta(x)$  olur.

Eğer  $x \in B \cap \left( \bigcap_{i \in \Lambda} A_i \right)$  ise  $\mu(x) = \eta(x) \cap \left( \bigcap_{i \in \Lambda} \eta_i(x) \right) = \bigcap_{i \in \Lambda} (\eta(x) \cap \eta_i(x)) = \delta(x)$  olur. Buradan  $(\eta, B) \cup \left( \bigcap_{i \in \Lambda} (\eta_i, A_i) \right) = \bigcap_{i \in \Lambda} ((\eta, B) \cup (\eta_i, A_i))$  dir.

(iii) (i) nin ispatına benzer şekilde yapılır.

(iv) (ii) nin ispatına benzer şekilde yapılır.

**Teorem 2.2.1**  $\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$   $U$  üzerinde esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır.



(i)  $(Es(U), \sqsubseteq)$  sıralı kümedir.

(ii)  $(Es(U), \sqsubseteq)$  tam kafestir ve  $\text{Sup}\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \wedge\} = \bigcup_{i \in \wedge} (\eta_i, A_i)$ ,  $\text{Inf}\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \wedge\} = \bigcap_{i \in \wedge} (\eta_i, A_i)$ .

(iii)  $(Es(U), \sqsubseteq)$  sonsuz  $\vee$ -dağılımlı kafestir.

### İspat:

(i)  $(\eta_1, A_1)$ ,  $(\eta_2, A_2)$  ve  $(\eta_3, A_3)$   $U$  üzerinde esnek kümeler olsun.  $(\eta_1, A_1) \sqsubseteq (\eta_2, A_2)$  olduğu açıktır.  $(\eta_1, A_1) \sqsubseteq (\eta_2, A_2)$  ve  $(\eta_2, A_2) \sqsubseteq (\eta_1, A_1)$  olsun. Bu takdirde buradan  $A_1 \subseteq A_2$  ve her  $x \in A_1$  için  $\eta_1(x) \subseteq \eta_2(x)$  dir. Benzer şekilde  $A_2 \subseteq A_1$  için ve her  $x \in A_2$  için  $\eta_2(x) \subseteq \eta_1(x)$  dir. Dolayısıyla  $A_1 = A_2$  ve  $\eta_1(x) = \eta_2(x)$  olur. Buradan  $(\eta_1, A_1) = (\eta_2, A_2)$  dir.  $(\eta_1, A_1) \sqsubseteq (\eta_2, A_2)$  ve  $(\eta_2, A_2) \sqsubseteq (\eta_3, A_3)$  olsun. Buradan  $A_1 \subseteq A_2$  ve her  $x \in A_1$  için  $\eta_1(x) \subseteq \eta_2(x)$  dir. Benzer şekilde  $A_2 \subseteq A_3$  ve her  $x \in A_2$  için  $\eta_2(x) \subseteq \eta_3(x)$  dir. Dolayısıyla  $A_1 \subseteq A_3$  ve  $\eta_1(x) \subseteq \eta_3(x)$  olur. Yani  $(\eta_1, A_1) \sqsubseteq (\eta_3, A_3)$  dir. Sonuç olarak  $(S(U), \sqsubseteq)$  bir sıralı kümedir.

(ii) Açık olarak her  $j \in \wedge$  için  $(\eta_j, A_j) \subseteq \bigcup_{i \in \wedge} (\eta_i, A_i)$  dir. Diğer yandan,  $(\mu, A) \in S(U)$  ve her  $i \in \wedge$  için  $(\eta_i, A_i) \subseteq (\mu, A)$  olsun. Buradan  $A_i \subseteq A$  ve her  $x \in A$  için  $\eta_i(x) \subseteq \mu(x)$  dir. Böylece  $\bigcup_{i \in \wedge} A_i \subseteq A$  ve  $x \in \bigcup_{i \in \wedge} A_i$  için  $\bigcup_{i \in \wedge} \eta_i(x) \subseteq \mu(x)$  yani  $\bigcup_{i \in \wedge} (\eta_i, A_i) \subseteq (\mu, A)$  olur. Buradan  $\text{Sup}\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \wedge\} = \bigcup_{i \in \wedge} (\eta_i, A_i)$  dir.

Açık olarak her  $j \in \wedge$  için  $\bigcap_{i \in \wedge} (\eta_i, A_i) \subseteq (\eta_j, A_j)$  dir. Diğer yandan,  $(\mu, A) \in S(U)$  ve her  $i \in \wedge$  için  $(\mu, A) \subseteq (\eta_i, A_i)$  ise her  $i \in \wedge$  ve her  $x \in A$  için  $A \subseteq A_i$  ve  $\mu(x) \subseteq \eta_i(x)$  dir. Böylece  $A \subseteq \bigcap_{i \in \wedge} A_i$  ve  $x \in A$  için  $\mu(x) \subseteq \bigcap_{i \in \wedge} \eta_i(x)$  yani  $(\mu, A) \subseteq \bigcap_{i \in \wedge} (\eta_i, A_i)$  olur. Buradan  $\text{Inf}\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \wedge\} = \bigcap_{i \in \wedge} (\eta_i, A_i)$  dir.

(iii) Önerme 2.2.2 ile açıktır.

**Tanım 2.2.4** (Yamak ve ark., 2011)  $(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$  sırasıyla  $U_1$  ve  $U_2$  üzerinde esnek kümeler ve  $f : U_1 \rightarrow U_2$  ve  $g : A \rightarrow B$  iki fonksiyon olsun. Eğer her  $x \in A$  için  $f(\eta(x)) = \mu(g(x))$  ise  $(f, g) : (\eta, A) \rightarrow (\mu, B)$  ye bir esnek fonksiyon denir.

Bu tanımda, eğer  $f$  ve  $g$  bire-bir (örten) bir dönüşüm ise  $(f, g)$  ye bire-bir (örten) esnek fonksiyon denir.  $(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$  arasındaki bire-bir ve örten esnek fonksiyona esnek tam eşleme denir. Bu durum  $(\eta, A) \simeq (\mu, B)$  notasyonu ile gösterilir.

**Önerme 2.2.3** (Yamak ve ark., 2011)  $(\eta, A)$ ,  $(\mu, B)$ ,  $(\delta, C)$  sırasıyla  $U_1$ ,  $U_2$  ve  $U_3$  üzerinde esnek kümeler ve  $(\phi, \psi) : (\eta, A) \longrightarrow (\mu, B)$ ,  $(\varphi, \gamma) : (\mu, B) \longrightarrow (\delta, C)$  olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i)  $(\varphi \circ \phi, \gamma \circ \psi) : (\eta, A) \longrightarrow (\delta, C)$ ,

(ii)  $(\phi, \psi)$  esnek tam eşleme ise  $(\phi^{-1}, \psi^{-1}) : (\mu, B) \longrightarrow (\eta, A)$  esnek tam eşlemedir.

**Tanım 2.2.5** (Yamak ve ark., 2011)  $(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$  sırasıyla  $U_1$  ve  $U_2$  üzerinde esnek kümeler ve  $(f, g) : (\eta, A) \longrightarrow (\mu, B)$  olsun.

(i)  $(\eta, A)$  esnek kümesinin  $(f, g)$  esnek fonksiyonu altında görüntüsü  $U_2$  üzerinde bir esnek kümedir. Bu durum  $(f, g)(\eta, A) = (f(\eta), B)$  şeklinde gösterilir ve her  $y \in B$  için

$$f(\eta)(y) = \begin{cases} \bigcup_{g(x)=y} f(\eta(x)) & \text{eğer } y \in \text{Resg} \\ \emptyset & \text{eğer } y \notin \text{Resg} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

(ii)  $(\mu, B)$  esnek kümesinin  $(f, g)$  esnek fonksiyonu altındaki ters görüntüsü  $U_1$  üzerinde bir esnek kümedir. Bu durum  $(f, g)^{-1}(\mu, B) = (f^{-1}(\mu), A)$  şeklinde gösterilir ve her  $x \in A$  için  $f^{-1}(\mu)(x) = f^{-1}(\mu(g(x)))$  şeklinde tanımlanır.

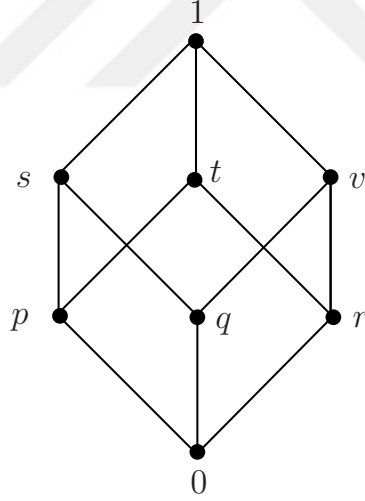
### 3. ESNEK KAFES YAPILARI

#### 3.1 Esnek Kafesler

Bu bölümde, esnek kafes kavramını ele alacağız ve bu kavrama ait bazı özellikleri araştıracağız. Bu bölüm boyunca,  $L$  bir tam kafes ve bütün esnek kümeler boştan farklı olarak ele alınacaktır.  $R$  bağıntısı  $R \subseteq A \times L$  olmak üzere  $\eta : A \rightarrow \wp(L)$  küme değerli fonksiyonu  $\eta(x) = \{y \in L \mid xRy\}$  şeklinde tanımlansın. Açıkça  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde bir esnek kümedir.

**Tanım 3.1.1**  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer her  $x \in A$  için  $\eta(x)$   $L$  nin alt kafesi ise  $(\eta, A)$  ya  $L$  üzerinde bir esnek kafes denir.  $L$  üzerindeki bütün esnek kafeslerin kümesi  $Ek(L)$  ile gösterilecektir.

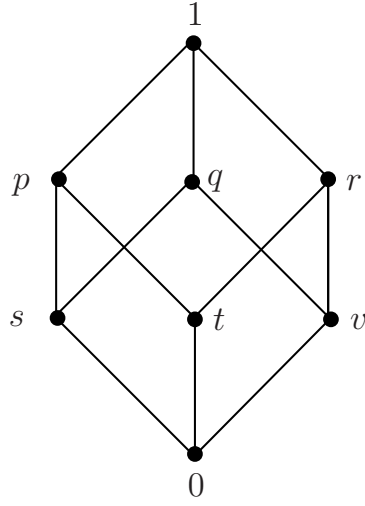
**Örnek 3.1.1**  $L = \{0, p, q, r, s, t, v, 1\}$  kafesi Şekil 3.1. deki gibi verilsin.



Şekil 3.1:  $L = \{0, p, q, r, s, t, v, 1\}$  kafesi

$A = \{r, q, v\}$  olmak üzere  $\eta : A \rightarrow \wp(L)$  küme değerli fonksiyonu  $\eta(x) = \{y \in L \mid xRy \Leftrightarrow x \vee y = 1\}$  şeklinde tanımlansın. Buna göre  $\eta(r) = \{1, s\}$ ,  $\eta(q) = \{1, t\}$ ,  $\eta(v) = \{1, p, t, s\}$  dir. Açıkça her  $x \in A$  için  $\eta(x)$   $L$  nin bir alt kafesidir. Buradan  $(\eta, A) \in Ek(L)$  dir.

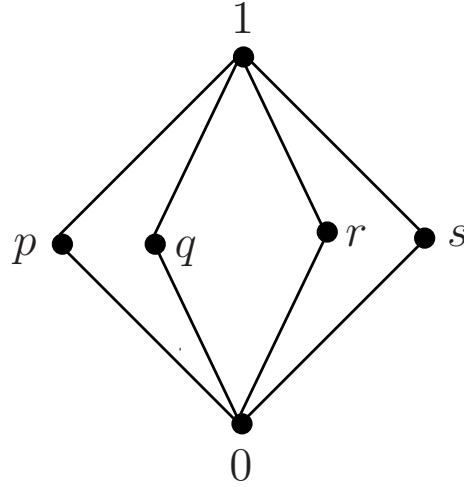
**Örnek 3.1.2**  $L = \{0, p, q, r, s, t, v, 1\}$  kafesi şekil 3.2 deki gibi verilsin.



Şekil 3.2:  $L = \{0, p, q, r, s, t, v, 1\}$  kafesi

$A = \{1, 2, 3\}$  olmak üzere  $\eta : A \rightarrow \wp(L)$  küme değerli fonksiyonu  $\eta(1) = \{p, r, t, 1\}$ ,  $\eta(2) = \{0\}$  ve  $\eta(3) = \{1, s\}$  şeklinde tanımlansın. Açıkça her  $x \in A$  için  $\eta(x)$   $L$  nin alt kafesidir. Buradan  $(\eta, A) \in Ek(L)$  dir.

**Örnek 3.1.3**  $L = \{0, p, q, r, s, 1\}$  kafesi Şekil 3.3. deki gibi verilsin.



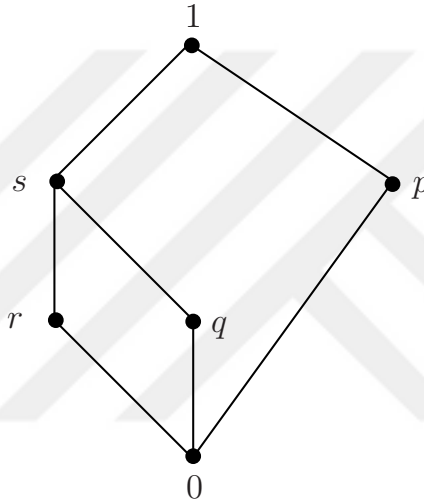
Şekil 3.3:  $L = \{0, p, q, r, s, 1\}$  kafesi

$A = \{0, p, q, r, s, 1\}$  olmak üzere  $\eta : A \rightarrow \wp(L)$  küme değerli fonksiyonu  $\eta(x) = \{y \in L \mid xRy \Leftrightarrow x \vee y = 1\}$  şeklinde tanımlansın. Buna göre  $\eta(0) = \{1\}$ ,  $\eta(p) = \{1, q, r, s\}$ ,

$\eta(q) = \{1, p, r, s\}$ ,  $\eta(r) = \{1, p, q, s\}$ ,  $\eta(s) = \{1, p, q, r\}$ ,  $\eta(1) = \{0, p, q, r, s, 1\}$  dir. Açıkça  $q, r \in \eta(p)$  dir. Fakat  $q \wedge r = 0 \notin \eta(p)$ . Buradan  $\eta(p)$   $L$  nin alt kafesi değildir. Benzer şekilde  $\eta(q)$ ,  $\eta(r)$  ve  $\eta(s)$   $L$  nin alt kafesi değildirler. Üstelik  $(\eta, A) \notin Ek(L)$  dir.

Eğer  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde bir esnek kafes değilse boştan farklı bir  $B \subseteq A$  alt kümesi yardımıyla  $(\eta, B)$   $L$  üzerinde bir esnek kafes yapılabilir.

**Örnek 3.1.4**  $L = \{0, p, q, r, s, 1\}$  kafesi şekil 3.4. deki gibi verilsin.



Şekil 3.4:  $L = \{0, p, q, r, s, 1\}$  kafesi

$A = \{0, p, q, r, s, 1\}$  olmak üzere  $\eta : A \rightarrow \wp(L)$  küme değerli fonksiyonu  $\eta(x) = \{y \in L \mid xRy \Leftrightarrow x \wedge y = 0\}$  şeklinde tanımlansın. Buna göre  $\eta(0) = \{0, p, q, r, s, 1\}$ ,  $\eta(p) = \{0, q, r, s\}$ ,  $\eta(q) = \{0, p, r\}$ ,  $\eta(r) = \{0, p, q\}$ ,  $\eta(s) = \{0, p\}$ ,  $\eta(1) = \{0\}$  dir. Açıkça,  $\eta(q)$  ve  $\eta(r)$   $L$ 'nin alt kafesi değillerdir. Açıkça her  $x \in B$  için  $\eta_B(x)$   $L$  nin alt kafesidir. Üstelik  $(\eta, A) \notin Ek(L)$  dir.

Şimdi  $B = \{0, p, s, 1\} \subseteq A$  alalım. Buradan  $\eta_B(0) = \{0, p, q, r, s, 1\}$ ,  $\eta_B(p) = \{0, q, r, s\}$ ,  $\eta_B(s) = \{0, p\}$ ,  $\eta_B(1) = \{0\}$  dir. Üstelik  $(\eta, B) \in Ek(L)$  dir.

**Sonuç 3.1.1** Her kafes bir esnek kafes olarak ele alınabilir.

**Teorem 3.1.1**  $L$  bir kafes ve  $\{(\eta_i, A_i \mid i \in \lambda)\}$   $L$  üzerinde esnek kafeslerin bir ailesi olsun. Bu taktirde;

- (i)  $\bigcap_{i \in \lambda} (\eta_i, A_i)$  bir esnek kafestir.
- (ii)  $\prod_{i \in \lambda} (\eta_i, A_i)$  bir esnek kafestir.
- (iii) Her  $i, j \in \lambda$  ve  $i \neq j$  için  $A_i \cap A_j = \emptyset$  ise  $\bigcup_{i \in \lambda} (\eta_i, A_i)$  bir esnek kafestir.
- (iv) Her  $i, j \in \lambda$ ,  $x \in \bigcup_{i \in \lambda} A_i$  için  $\eta_i(x) \subseteq \eta_j(x)$  veya  $\eta_j(x) \subseteq \eta_i(x)$  ise  $\bigcup_{i \in \lambda} (\eta_i, A_i)$  bir esnek kafestir.
- (v) Her  $i, j \in \lambda$ ,  $x \in \bigcap_{i \in \lambda} A_i$  için  $\eta_i(x) \subseteq \eta_j(x)$  veya  $\eta_j(x) \subseteq \eta_i(x)$  ise  $\bigsqcup_{i \in \lambda} (\eta_i, A_i)$  bir esnek kafestir.
- (vi)  $\bigwedge_{i \in \lambda} (\eta_i, A_i)$  bir esnek kafestir.
- (vii) Her  $i, j \in \lambda$ ,  $a_i \in A_i$  için  $\eta_i(a_i) \subseteq \eta_j(a_j)$  veya  $\eta_j(a_j) \subseteq \eta_i(a_i)$  ise  $\bigvee_{i \in \lambda} (\eta_i, A_i)$  bir esnek kafestir.

**İspat:**

- (i)  $\bigcap_{i \in \lambda} (\eta_i, A_i) = (\mu, C)$  olsun. Burada  $C = \bigcap_{i \in \lambda} A_i$  ve her  $x \in C$  için  $\mu(x) = \bigcap_{i \in \lambda} \eta_i(x)$  dir. Açıkça her  $i \in \lambda$  için  $\eta_i(x)$   $L$  nin bir alt kafesidir. Buradan  $\mu(x)$   $L$  nin bir alt kafesidir. Üstelik  $\bigcap_{i \in \lambda} (\eta_i, A_i)$   $L$  üzerinde bir esnek kafestir.
- (ii)  $\prod_{i \in \lambda} (\eta_i, A_i) = (\mu, C)$  olsun. Burada  $C = \bigcup_{i \in \lambda} A_i$  ve her  $x \in C$  için  $\mu(x) = \bigcap_{i \in \lambda(x)} \eta_i(x)$  dir.  $Des(\mu, C) = \bigcup_{i \in \lambda} Des(\eta_i, A_i) \neq \emptyset$  olduğundan  $(\mu, C)$  boştan farklıdır. Buradan  $x \in Des(\mu, C)$  için  $\mu(x) = \bigcap_{i \in \lambda(x)} (\eta_i)(x) \neq \emptyset$  dir. Dolayısıyla her  $i \in \lambda(x)$  için  $\eta_i(x) \neq \emptyset$  dir. Açıkça her  $i \in \lambda(x)$  ve  $x \in \bigcup_{i \in \lambda} A_i$  için  $\eta_i(x)$   $L$  nin bir alt kafesidir. Üstelik  $\bigcap_{i \in \lambda(x)} \eta_i(x)$   $L$  nin bir alt kafesidir. Buradan  $\prod_{i \in \lambda} (\eta_i, A_i)$   $L$  üzerinde bir esnek kafestir.
- (iii) Tanım 2.3.5 (i) ile açıktır.
- (iv)  $\bigcup_{i \in \lambda} (\eta_i, A_i) = (\mu, C)$  olsun. Buradan  $C = \bigcup_{i \in \lambda} A_i$  ve her  $c \in C$  için  $\mu(x) = \bigcup_{i \in \lambda(x)} \eta_i(x)$  dir.  $Des(\mu, C) = \bigcup_{i \in \lambda} Des(\eta_i, A_i) \neq \emptyset$  olduğundan  $(\mu, C)$  boştan farklıdır.  $x \in Des(\mu, C)$  olsun. Buradan  $\mu(x) = \bigcup_{i \in \lambda(x)} \eta_i(x) \neq \emptyset$  dir ve  $\exists i_0 \in \lambda(x)$  öyleki  $\eta_{i_0}(x) \neq \emptyset$  dir.  $x \in \bigcup_{i \in \lambda} A_i$  için  $\eta_i(x) \subseteq \eta_j(x)$  veya  $\eta_j(x) \subseteq \eta_i(x)$  olduğundan  $\bigcup_{i \in \lambda} \eta_i(x)$   $L$  nin bir alt kafesidir. Üstelik  $\bigcup_{i \in \lambda} (\eta_i, A_i)$   $L$  üzerinde bir esnek kafestir.

(v) (iv) nin ispatına benzer şekilde yapılır.

(vi)  $\bigwedge_{i \in \lambda} (\eta_i, A_i) = (\mu, C)$  olsun.  $(x_i)_{i \in \lambda} \in Des(\mu, C)$  alalım.

Buradan  $\mu((x_i)_{i \in \lambda}) = \bigcap_{i \in \lambda} \eta_i(x_i) \neq \emptyset$  dır. Her  $i \in \lambda$  için  $\eta_i(x_i)$   $L$  nin bir alt kafesi olduğundan  $\bigcap_{i \in \lambda} \eta_i(x_i)$   $L$  nin bir alt kafesidir. Buradan  $\bigwedge_{i \in \lambda} (\eta_i, A_i)$   $L$  üzerinde bir esnek kafestir.

(vii)  $\bigvee_{i \in \lambda} (\eta_i, A_i) = (\mu, C)$  olsun.  $(x_i)_{i \in \lambda} \in Des(\mu, C)$  alalım. Buradan  $\mu((x_i)_{i \in \lambda}) = \bigcup_{i \in \lambda} \eta_i(x_i) \neq \emptyset$  dır ve  $\exists i_0 \in \lambda(x)$  öyleki  $\eta_{i_0}(x_{i_0}) \neq \emptyset$  dır. Her  $i, j \in \lambda$   $x_i \in A_i$  için  $\eta_i(x) \subseteq \eta_j(x)$  veya  $\eta_j(x) \subseteq \eta_i(x)$  olduğundan  $\eta_i(x_i)$   $L$  nin bir alt kafesidir. Böylece  $\bigcup_{i \in \lambda} \eta_i(x_i)$   $L$  nin bir alt kafesidir. Buradan  $\bigvee_{i \in \lambda} (\eta_i, A_i)$   $L$  üzerinde bir esnek kafestir.

**Sonuç 3.1.2**  $(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$   $L$  üzerinde iki esnek kafes olsun. Bu taktirde,

(i)  $(\eta, A) \cap (\mu, B) \in Ek(L)$

(ii)  $(\eta, A) \sqcap (\mu, B) \in Ek(L)$

(iii)  $A \cap B = \emptyset$  ise  $(\eta, A) \cup (\mu, B) \in Ek(L)$

(iv) Her  $x \in A \cap B$  için  $\eta(x) \subseteq \mu(x)$  veya  $\mu(x) \subseteq \eta(x)$  ise  $(\eta, A) \cup (\mu, B) \in Ek(L)$

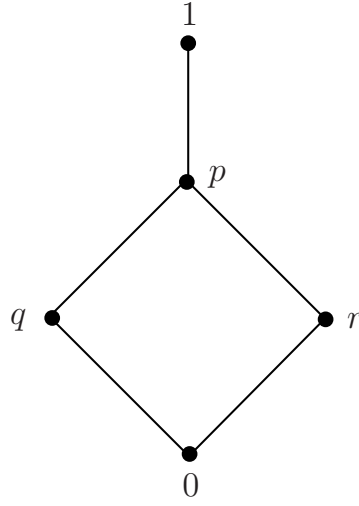
(v) Her  $x \in A \cap B$  için  $\eta(x) \subseteq \mu(x)$  veya  $\mu(x) \subseteq \eta(x)$  ise  $(\eta, A) \sqcup (\mu, B) \in Ek(L)$

(vi)  $(\eta, A) \wedge (\mu, B) \in Ek(L)$

(vii) Her  $(x, y) \in A \times B$  için  $\eta(x) \subseteq \mu(y)$  veya  $\mu(y) \subseteq \eta(x)$  ise  $(\eta, A) \vee (\mu, B) \in Ek(L)$

**Örnek 3.1.5**  $L = \{1, p, q, r, 0\}$  kafesi şekil 3.5 deki gibi verilsin.

$A = \{1, 2, 3\}$  parametreler kümesi olmak üzere  $\eta : A \rightarrow \wp(L)$  küme değerli fonksiyonu her  $x \in A$  için  $\eta(1) = \{0, p, 1\}$ ,  $\eta(2) = \{0, p\}$  ve  $\eta(3) = \{p, q\}$  şeklinde tanımlansın. Açıkça her  $x \in A$  için  $\eta(x)$   $L$  nin alt kafesidir. Buradan  $(\eta, A)$  ikilisi  $L$  üzerinde esnek kafestir.  $B = \{1, 3, 4\}$  olmak üzere  $\mu : B \rightarrow \wp(L)$  küme değerli fonksiyonu her  $x \in B$  için  $\mu(1) = \{p, q, r, 0\}$ ,  $\mu(3) = \{r\}$  ve  $\mu(4) = \{p, r\}$   $L$  şeklinde tanımlansın. Açıkça her  $x \in B$  için  $\mu(x)$   $L$  nin alt kafesidir. Buradan  $(\mu, B)$   $L$  üzerinde esnek kafestir.



Şekil 3.5:  $L = \{1, p, q, r, 0\}$  kafesi

Üstelik  $(\delta, C) = (\eta, A) \cap (\mu, B)$  ve  $(\delta, C) = (\eta, A) \wedge (\mu, B)$   $L$  üzerinde esnek kafestir. Fakat  $(\delta, C) = (\eta, A) \cup (\mu, B)$  ve  $(\delta, C) = (\eta, A) \vee (\mu, B)$   $L$  üzerinde esnek kafes değildir. Çünkü  $\delta(3) = \eta(3) \cup \mu(3) = \{p, q, r\}$  ve  $\delta(1, 3) = \eta(1) \vee \mu(3) = \{0, p, r, 1\}$   $L$  nin alt kafesi değildir.

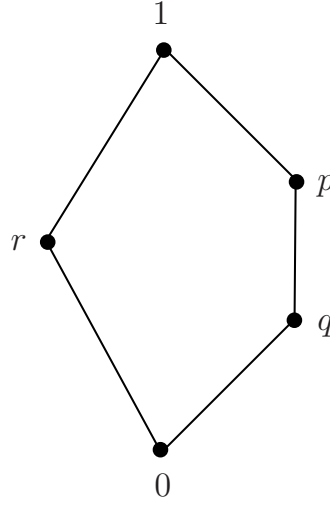
**Tanım 3.1.2**  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde bir esnek kafes olsun.

- (i) Eğer her  $x \in A$  için  $\eta(x) = 0_L$  ise  $(\eta, A)$  ya  $L$  üzerinde sıfır esnek kafes denir.
- (ii) Eğer her  $x \in A$  için  $\eta(x) = L$  ise  $(\eta, A)$  ya  $L$  üzerinde tam esnek kafes denir.

**Örnek 3.1.6**  $L = \{0, p, q, r, 1\}$  kafesi şekil 3.6 daki gibi verilsin.

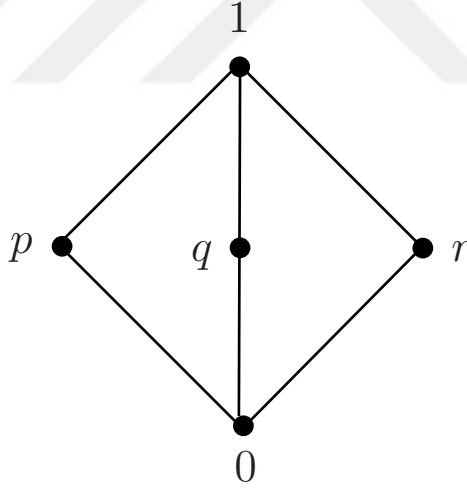
$A = \{p, q\}$  olmak üzere  $F : A \rightarrow \wp(L)$  küme değerli fonksiyonu her  $x \in A$  için  $\eta(x) = \{y \in L \mid x \wedge y = 0\}$  şeklinde tanımlansın. Buradan  $\eta(p) = \eta(q) = \{0\}$  olur. Açıkça  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde sıfır esnek kafestir.





Şekil 3.6:  $L = \{0, p, q, r, 1\}$  kafesi

**Örnek 3.1.7**  $L = \{0, p, q, r, 1\}$  kafesi şekil 3.7 deki gibi verilsin.

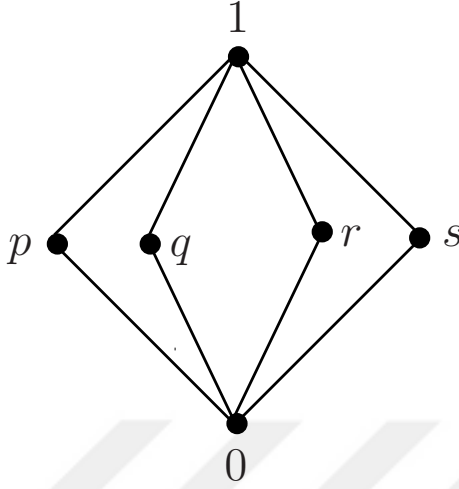


Şekil 3.7:  $L = \{0, p, q, r, 1\}$  kafesi

$A = \{r, 0\}$  olmak üzere  $F : A \rightarrow \wp(L)$  küme değerli fonksiyonu her  $x \in A$  için  $\eta(x) = \{y \in L \mid x \wedge y \in \{0, r\}\}$  şeklinde tanımlansın. Buradan  $\eta(r) = \eta(0) = L$  olur. Açıkça  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde tam esnek kafestir.

**Tanım 3.1.3**  $(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$   $L$  üzerinde iki esnek kafes ve  $(\eta, A) \subseteq (\mu, B)$  olsun. Eğer her  $x \in A$  için  $\eta(x), \mu(x)$  in alt kafesi ise  $(\eta, A)$  ya  $(\mu, B)$  nin esnek alt kafesi denir.

**Örnek 3.1.8**  $L = \{0, p, q, r, s, 1\}$  kafesi aşağıdaki gibi verilsin.



Şekil 3.8:  $L = \{0, p, q, r, s, 1\}$  kafesi

$A = \{0, p, q, r, s, 1\}$  olmak üzere  $\eta : A \rightarrow \wp(L)$  küme değerli fonksiyonu  $\eta(x) = \{y \in L \mid xRy \Leftrightarrow x \vee y = x\}$  ve  $B = \{0, q, r, s\}$  olmak üzere  $\mu : B \rightarrow \wp(L)$  küme değerli fonksiyonu  $\mu(x) = \{y \in L \mid xRy \Leftrightarrow x \vee y = x\}$  şeklinde tanımlansın. Buradan  $\eta(0) = \{0\}$ ,  $\eta(p) = \{0, p\}$ ,  $\eta(q) = \{p, q\}$ ,  $\eta(r) = \{0, r\}$ ,  $\eta(s) = \{0, q, r, s\}$ ,  $\eta(1) = \{0, p, q, r, s, 1\}$ ,  $\mu(0) = \{0\}$ ,  $\mu(q) = \{0, q\}$ ,  $\mu(r) = \{0, r\}$ ,  $\mu(s) = \{0, q, r, s\}$  şeklindedir. Açıkça  $(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$   $L$  üzerinde esnek kafeslerdir. Üstelik  $B \subseteq A$  ve her  $x \in B$  için  $\mu(x)$   $\eta(x)$  in alt kafesidir. Sonuç olarak  $(\mu, B)$   $(\eta, A)$  nin esnek alt kafesidir.

**Önerme 3.1.1** Her esnek kafes kendisinin bir esnek alt kafesidir.

**İspat:** Tanım 3.1.3 ile ispatı açıktır.

**Tanım 3.1.4**  $(\eta, A)$   $L_1$  üzerinde bir esnek kafes ve  $f : L_1 \rightarrow L_2$  bir kafes homomorfisi olsun. Bu taktirde  $(f(\eta))(x) = f(\eta(x))$  dir.

**Önerme 3.1.2**  $(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$   $L_1$  üzerinde esnek kafesler ve  $(\eta, A)$   $(\mu, B)$  nin esnek alt kafesi olsun. Eğer  $f : L_1 \rightarrow L_2$  kafes homomorfisi ise  $(f(\eta), A)$ ,  $(f(\mu), B)$  nin bir esnek alt kafesidir.

**İspat:**  $(\eta, A)$ ,  $(\mu, B)$  nin esnek alt kafesi olsun. O halde  $A \subseteq B$  ve her  $x \in A$  için  $\eta(x)$ ,  $\mu(x)$  in alt kafesidir.  $f : L_1 \rightarrow L_2$  homomorfisi olduğundan her  $x \in A$ ,  $y \in B$  için  $f(\eta(x))$

ve  $f(\mu(y))$   $L_2$  nin alt kafesi olur. Ayrıca her  $x \in A$  için  $f(\eta(x))$   $f(\mu(y))$  nin alt kafesidir. Buradan  $(f(\eta), A)$ ,  $(f(\mu), B)$  nin esnek alt kafesidir.

### 3.2 Esnek Kafes Homomorfisi

**Tanım 3.2.1**  $(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$  sırasıyla  $L_1$  ve  $L_2$  üzerinde esnek kafesler ve  $(f, g) : (\eta, A) \longrightarrow (\mu, B)$  ye bir esnek fonksiyon olsun. Eğer  $f : L_1 \longrightarrow L_2$  ye bir kafes homomorfisi ise  $(f, g)$  ye esnek kafes homomorfisi denir. Bu durumda  $(\eta, A)$ ,  $(\mu, B)$  ye esnek homomorftur denir ve  $(\eta, A) \sim (\mu, B)$  ile gösterilir.

Eğer  $f : L_1 \longrightarrow L_2$  ye bir kafes izomorfisi ve  $g : A \rightarrow B$  birebir ve örten fonksiyon ise  $(f, g)$  ye esnek kafes izomorfisi denir. Bu durumda  $(\eta, A)$ ,  $(\mu, B)$  ye esnek izomorftur denir. Bu durum  $(\eta, A) \approx (\mu, B)$  şeklinde gösterilir.

**Önerme 3.2.1** ” $\approx$ ” bağıntısı esnek kafesler üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

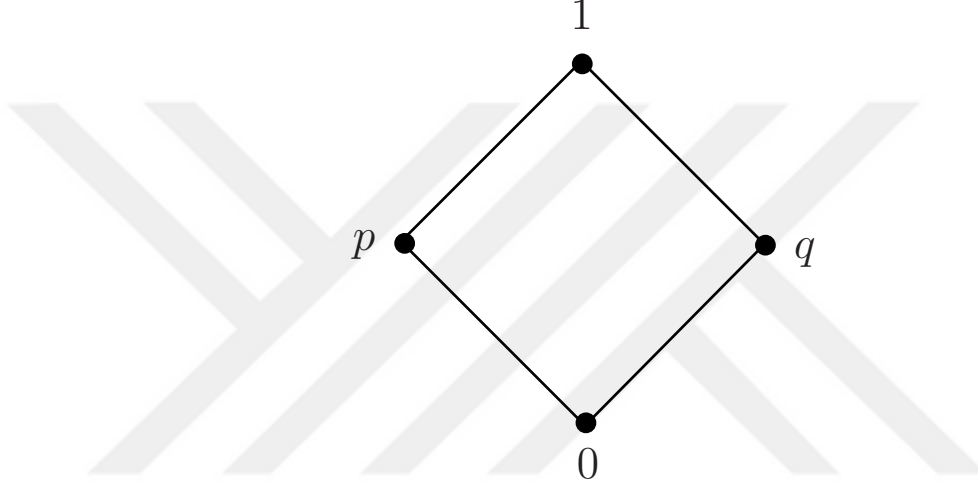
**İspat:**  $(\mu, A)$ ,  $(\eta, B)$  ve  $(\delta, C)$  sırasıyla  $L_1$ ,  $L_2$  ve  $L_3$  üzerinde esnek kafesler olsun.

- (i)  $(\mu, A) \approx (\mu, A)$  olduğu açıktır.
- (ii)  $(\mu, A) \approx (\eta, B)$  olsun. Bu taktirde,  $\exists f : L_1 \longrightarrow L_2$  ye izomorfi ve  $\exists g : A \longrightarrow B$  birebir ve örten dönüşümü öyleki, her  $x \in A$  için  $f(\mu(x)) = \eta(g(x))$  dir. Buradan  $f^{-1} : L_2 \longrightarrow L_1$  izomorfisi,  $g^{-1} : B \longrightarrow A$  dönüşümü mevcuttur ve her  $y \in B$  için  $f^{-1}(\eta(y)) = \mu(g^{-1}(y))$  dir. Böylece  $(\eta, B) \approx (\mu, A)$  olur.
- (iii)  $(\mu, A) \approx (\eta, B)$  ve  $(\eta, B) \approx (\delta, C)$  olsun. Bu taktirde,  $f : L_1 \longrightarrow L_2$ ,  $\phi : L_2 \longrightarrow L_3$  izomorfileri ve  $g : A \longrightarrow B$ ,  $h : B \longrightarrow C$  birebir, örten dönüşümleri mevcuttur öyleki her  $x \in A$ ,  $y \in B$  için  $f(\mu(x)) = \eta(g(x))$  ve  $\phi(\eta(y)) = \delta(h(y))$  dir. Buradan  $\phi(\eta(g(x))) = \phi(f(\mu(x))) = \delta(h(g(x)))$  olur. Yani,  $\phi \circ f(\mu(x)) = \delta(h \circ g(x))$  dir. Böylece  $(\mu, A) \approx (\delta, C)$  elde edilir.

**Önerme 3.2.2**  $(\eta, A)$ ,  $(\mu, B)$  ve  $(\delta, C)$  sırasıyla  $L_1$ ,  $L_2$  ve  $L_3$  kafesleri üzerinde esnek kafesler olsun. Eğer  $(f, g) : (\eta, A) \longrightarrow (\mu, B)$  ve  $(f', g') : (\mu, B) \longrightarrow (\delta, C)$  esnek kafes homomorfileri ise  $(f' \circ f, g' \circ g) : (\eta, A) \longrightarrow (\delta, C)$  esnek kafes homomorfisidir.

**İspat:** Önerme 2.2.3 ile açıkça  $(f' \circ f, g' \circ g) : (\eta, A) \longrightarrow (\delta, C)$  bir esnek fonksiyondur. Diğer taraftan,  $f : L_1 \longrightarrow L_2$  ve  $f' : L_2 \longrightarrow L_3$  kafes homomorfileri olduğundan  $f' \circ f : L_1 \longrightarrow L_3$  kafes homomorfisidir. Böylece  $(f' \circ f, g' \circ g) : (\eta, A) \longrightarrow (\delta, C)$  bir esnek kafes homomorfisidir.

**Örnek 3.2.1**  $L_1 = \{0, p, q, 1\}$  ve  $L_2 = \{0', 1'\}$  kafesleri sırasıyla şekil 3.9 ve şekil 3.10 deki gibi verilsin.



Şekil 3.9:  $L_1 = \{0, p, q, 1\}$  kafesi



Şekil 3.10:  $L_2 = \{0', 1'\}$  kafesi

$A = \{0, p, q, 1\}$  ve  $B = \{0', 1'\}$  olmak üzere  $\eta : A \rightarrow \wp(L_1)$  küme değerli fonksiyonu  $\eta(x) = \{y \in L_1 : xRy \Leftrightarrow x \vee y = x, x \in A\}$  şeklinde tanımlansın. O halde,  $(\eta, A) \in Ek(L_1)$  dir.  $\mu : B \rightarrow \wp(L_2)$  küme değerli fonksiyonu  $\mu(x) = \{y \in L_2 : xRy \Leftrightarrow x \vee y = x, x \in B\}$  şeklinde tanımlansın. O halde,  $(\mu, B) \in Ek(L_2)$  dir.  $f : L_1 \rightarrow L_2$  ve  $g : A \rightarrow B$  dönüşümleri  $f(0) = 0', f(p) = 0', f(q) = 1', f(1) = 1', g(0) = 0', g(p) = 0', g(q) = 1', \mu(1) = 1'$  şeklinde tanımlansın. Bu durumda  $f : L_1 \rightarrow L_2$  bir kafes homomorfisidir. Ayrıca her  $x \in A$  için  $f(\eta(x)) = \mu(g(x))$  eşitliği sağlanır. Buradan  $(\eta, A) \sim (\mu, B)$  dir.

**Teorem 3.2.1**  $(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$  sırasıyla  $L_1$  ve  $L_2$  üzerinde iki esnek kafes ve  $(f, g) : (\eta, A) \rightarrow (\mu, B)$  esnek kafes homomorfisi olsun.

- (i) Eğer  $f$  örten,  $g$  birebir ve örten ise  $(f(\eta), B)$   $L_2$  de bir esnek kafestir.
- (ii)  $(f^{-1}(\mu), A)$   $L_1$  üzerinde bir esnek kafestir.

**İspat:**

- (i)  $y \in B$  olsun.  $g$  örten olduğundan  $g(x) = y$  olacak şekilde bir  $x \in A$  mevcuttur.  $\eta(x)$   $L_1$  in alt kafesi ve  $f$  kafes homomorfisi olduğundan  $f(\eta(x))$   $L_2$  nin alt kafesidir. Ayrıca  $g$  birebir olduğundan her  $y \in B$  için  $f(\eta)(y) = f(\eta(x))$   $L_2$  nin alt kafesidir. Buradan  $(f(\eta), B)$   $L_2$  de bir esnek kafestir.
- (ii) Her  $x \in A$  için  $g(x) \in B$  ve  $(\mu, B)$   $L_2$  üzerinde esnek kafes olduğundan  $\mu(g(x))$   $L_2$  nin alt kafesidir. Ayrıca her  $x \in A$  için  $f^{-1}(\mu(g(x)))$   $L_1$  in alt kafesidir. Buradan  $(f^{-1}(\mu), A)$   $L_1$  üzerinde bir esnek kafestir.

**Teorem 3.2.2**  $(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$  sırasıyla  $L_1$  ve  $L_2$  üzerinde iki esnek kafes ve  $(f, g) : (\eta, A) \rightarrow (\mu, B)$  esnek kafes homomorfisi olsun.

- (i) Eğer  $(\eta, A)$   $L_1$  üzerinde tam esnek kafes ise  $(f(\eta), B)$   $L_2$  üzerinde tam esnek kafestir.
- (ii) Eğer  $f$  birebir ve  $(\mu, B)$  sıfır esnek kafes ise  $(f^{-1}(\mu), A)$   $L_1$  üzerinde sıfır esnek kafestir.

**İspat:** Tanım 2.2.5 ve Tanım 3.1.2 yardımıyla ispatı kolaylıkla gösterilebilir.

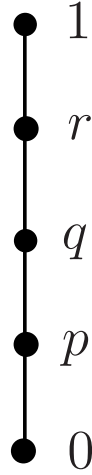
**Teorem 3.2.3**  $(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$  sırasıyla  $L_1$  ve  $L_2$  üzerinde esnek kümeler olsun. Eğer  $(\eta, A)$   $L_1$  üzerinde esnek kafes ve  $(\eta, A) \approx (\mu, B)$  ise  $(\mu, B)$  de  $L_2$  üzerinde esnek kafestir.

**İspat:**  $(\eta, A) \approx (\mu, B)$  olduğundan  $(f, g) : (\eta, A) \longrightarrow (\mu, B)$  esnek kafes izomorfisi mevcuttur.  $g : A \longrightarrow B$  birebir ve örten bir dönüşüm olduğundan her  $y \in B$  için  $g(x) = y$  ve  $f(\eta(x)) = \mu(g(x)) = \mu(y)$  olacak şekilde bir  $x \in A$  mevcuttur. Açıkça  $f(\eta(x))$   $L_2$  nin alt kafesidir ve bundan dolayı  $\mu(y)$   $L_2$  nin alt kafesidir. Buradan  $(\mu, B)$   $L_2$  üzerinde esnek kafestir.

### 3.3 Esnek Dağılımlı Kafesler

**Tanım 3.3.1**  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer her  $x \in A$  için  $\eta(x)$   $L$  nin dağılımlı alt kafesi ise  $(\eta, A)$  ya  $L$  üzerinde bir esnek dağılımlı kafes denir.

**Örnek 3.3.1**  $L = \{0, p, q, r, 1\}$  kafesi şekil 3.11 daki gibi verilsin.



Şekil 3.11:  $L = \{0, p, q, r, 1\}$  kafesi

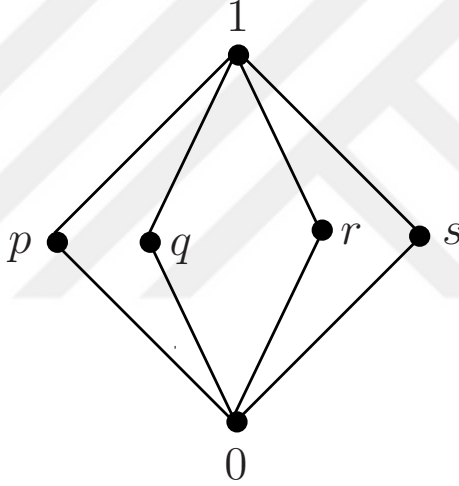
$A = \{p, q, r\}$  olmak üzere  $\eta : A \longrightarrow \wp(L)$  küme değerli fonksiyonu  $\eta(x) = \{y \in L : xRy \Leftrightarrow x \vee y = x\}$  şeklinde tanımlansın. Buna göre  $\eta(p) = \{0, p\}$ ,  $\eta(q) = \{0, p, q\}$ ,  $\eta(r) = \{0, p, q, r\}$  dir. Açıkça her  $x \in A$  için  $\eta(x)$ ,  $L$  nin dağılımlı alt kafesidir. Buradan  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde bir esnek dağılımlı kafestir.

**Önerme 3.3.1**  $L$  bir dağılımlı kafes ve  $(\eta, A) \in Ek(L)$  olsun. Bu taktirde  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde esnek dağılımlı kafestir.

**İspat:**  $(\eta, A) \in Ek(L)$  olduğundan her  $x \in A$  için  $\eta(x)$   $L$  nin alt kafesidir.  $L$  dağılımlı ve her dağılımlı kafesin alt kafesi dağılımlı olduğundan her  $x \in A$  için  $\eta(x)$   $L$  nin bir dağılımlı alt kafesidir. Buradan  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde bir esnek dağılımlı kafestir.

**Uyarı:** Yukarıdaki teoremin tersi doğru değildir. Yani, eğer  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde esnek dağılımlı kafes ise  $L$  nin dağılımlı kafes olması gerekli değildir.

**Örnek 3.3.2**  $L = \{0, p, q, r, s, 1\}$  kafesi Şekil 3.12 deki gibi verilsin.



Şekil 3.12:  $L = \{0, p, q, r, s, 1\}$  kafesi

$A = \{p, q, r, s\}$  olmak üzere  $\eta : A \rightarrow \wp(L)$  küme değerli fonksiyonu  $\eta(x) = \{y \in L : xRy \Leftrightarrow x \wedge y = y\}$  şeklinde tanımlansın. Buna göre  $\eta(p) = \{0, p\}$ ,  $\eta(q) = \{p, q\}$ ,  $\eta(r) = \{0, r\}$ ,  $\eta(s) = \{0, s\}$  dir. Açıkça her  $x \in A$  için  $\eta(x)$ ,  $L$  nin dağılımlı alt kafesidir. Buradan  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde bir esnek dağılımlı kafestir. Fakat  $L$  dağılımlı kafes değildir.

**Teorem 3.3.1**  $(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$  sırasıyla  $L_1$  ve  $L_2$  üzerinde esnek kafesler ve  $(f, g) : (\eta, A) \rightarrow (\mu, B)$  bir esnek kafes homomorfisi olsun. Bu taktirde,

- (i) Eğer  $(\eta, A)$  esnek dağılımlı kafes ise  $(f(\eta), A)$   $L_2$  üzerinde esnek dağılımlı kafestir.

(ii)  $(\mu, B)$   $L_2$  üzerinde esnek dağılımlı kafes ise  $(f^{-1}(\mu), B)$   $L_1$  üzerinde esnek dağılımlı kafestir.

**İspat:** Tanım 2.2.5 ve Tanım 3.3.1 yardımıyla ispatı kolaylıkla gösterilebilir.

**Teorem 3.3.2**  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde bir esnek dağılımlı kafes ve  $(\mu, B)$ ,  $(\eta, A)$  nin esnek alt kafesi olsun. O halde  $(\mu, B)$  de esnek dağılımlı kafestir.

**İspat:**  $(\mu, B)$   $(\eta, A)$  nin esnek alt kafesi olsun. O halde  $B \subseteq A$  ve her  $x \in B$  için  $\mu(x)$   $\eta(x)$  in alt kafesidir.  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde esnek dağılımlı kafes olduğundan her  $x \in A$  için  $\eta(x)$   $L$  nin dağılımlı alt kafesidir. Her  $x \in A$  için  $\mu(x)$   $\eta(x)$  in alt kafesi olduğundan  $\mu(x)$  de  $L$  nin dağılımlı alt kafesidir. Buradan  $(\mu, B)$   $L$  üzerinde esnek dağılımlı kafestir.

**Teorem 3.3.3**  $(\eta, A)$   $L_1$  üzerinde ve  $(\mu, B)$   $L_2$  üzerinde esnek kafesler olsun. Eğer  $(\eta, A)$   $L_1$  üzerinde esnek dağılımlı kafes ve  $(\eta, A) \approx (\mu, B)$  ise  $(\mu, B)$  de  $L_2$  üzerinde esnek dağılımlı kafestir.

**İspat:**  $(\eta, A) \approx (\mu, B)$  ise  $(f, g) : (\eta, A) \longrightarrow (\mu, B)$  olacak şekilde  $f : L_1 \longrightarrow L_2$  ve  $g : A \longrightarrow B$  dönüşümleri vardır ve her  $x \in A$  için  $f(\eta(x)) = \mu(g(x))$  dir.  $(\eta, A)$   $L_1$  üzerinde esnek dağılımlı kafes ise her  $x \in A$  için  $\eta(x)$   $L_1$  in dağılımlı alt kafesidir. Üstelik  $f(\eta(x))$   $L_2$  nin dağılımlı alt kafesidir. Yani  $\mu(g(x))$   $L_2$  nin dağılımlı alt kafesidir.  $g : A \longrightarrow B$  örten olduğundan her  $y \in B$  için  $\exists x \in A$  öyleki  $g(x) = y$  dir. Buradan  $\mu(y)$   $L_2$  nin dağılımlı alt kafesidir. Sonuç olarak  $(\mu, B)$   $L_2$  üzerinde esnek dağılımlı kafestir.

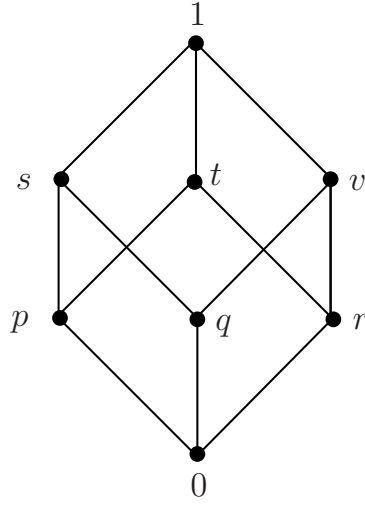
### 3.4 Esnek Modüler Kafesler

**Tanım 3.4.1**  $(\eta, A)$ ,  $L$  üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer her  $x \in A$  için  $\eta(x)$   $L$  nin modüler alt kafesi ise  $(\eta, A)$  ya  $L$  üzerinde esnek modüler kafes denir.

**Örnek 3.4.1**  $L = \{0, p, q, r, s, t, v, 1\}$  kafesi Şekil 3.13 deki gibi verilsin.

$A = \{0, p, q, r, 1\}$  olmak üzere  $\eta : A \longrightarrow \wp(L)$  küme değerli fonksiyonu  $\eta(x) = \{y \in L : xRy \Leftrightarrow x \wedge y = 0\}$  şeklinde tanımlansın. Buna göre  $\eta(p) = \{p, q, r, v, t\}$ ,  $\eta(q) = \{0, p, r, t\}$ ,  $\eta(r) = \{0, p, q, s\}$ ,  $\eta(1) = \{0\}$  dir. Açıkça her  $x \in A$  için  $\eta(x)$   $L$  nin modüler alt kafesidir. Buradan  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde esnek modüler kafestir.





Şekil 3.13:  $L = \{0, p, q, r, s, t, v, 1\}$  kafesi

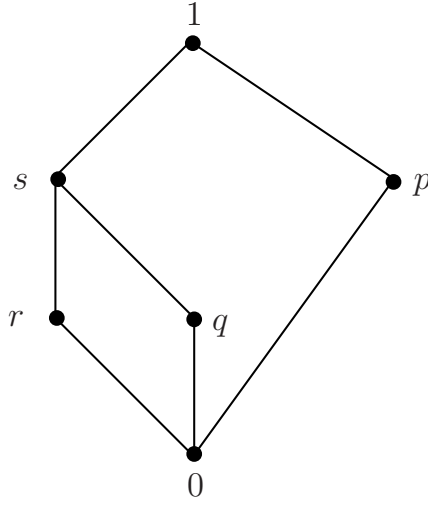
**Önerme 3.4.1**  $L$  bir modüler kafes ve  $(\eta, A) \in Ek(L)$  olsun. Bu taktirde  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde esnek modüler kafestir.

**İspat:**  $(\eta, A) \in Ek(L)$  olduğundan her  $x \in A$  için  $\eta(x)$   $L$  nin alt kafesidir. Burada  $L$  modüler kafes ve her modüler kafesin alt kafesi modüler kafes olduğundan her  $x \in A$  için  $\eta(x)$   $L$  nin modüler alt kafesidir. Buradan  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde esnek modüler kafestir.

**Uyarı:** Yukarıdaki teoremin tersi doğru değildir. Yani eğer  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde bir esnek modüler kafes ise  $L$  nin modüler kafes olması gerekli değildir. Aşağıdaki örnekle bu durumu açıklayalım.

**Örnek 3.4.2**  $L = \{0, p, q, r, s, 1\}$  kafesi şekil 3.14. deki gibi verilsin.

$A = \{p, q, r, s\}$  olmak üzere  $\eta : A \rightarrow \wp(A)$  küme değerli fonksiyonu  $\eta(x) = \{y \in L : xRy \Leftrightarrow x \wedge y = y\}$  şeklinde tanımlansın. Buradan  $\eta(p) = \{0, p\}$ ,  $\eta(q) = \{p, q\}$ ,  $\eta(r) = \{0, r\}$ ,  $\eta(s) = \{0, q, r, s\}$  dir. Açıkça her  $x \in A$  için  $\eta(x)$ ,  $L$  nin modüler alt kafesidir. O halde  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde bir esnek modüler kafestir. Fakat  $L$  modüler kafes değildir.



Şekil 3.14:  $L = \{0, p, q, r, s, 1\}$  kafesi

**Teorem 3.4.1**  $(\eta, A)$  ve  $(\mu, B)$  sırasıyla  $L_1$  ve  $L_2$  üzerinde esnek kafesler ve  $(f, g) : (\eta, A) \rightarrow (\mu, B)$  esnek kafes homomorfisi olsun. Bu taktirde

- (i) Eğer  $(\eta, A)$  esnek modüler kafes ise  $(f(\eta), B)$   $L_2$  üzerinde esnek modüler kafestir.
- (ii)  $(\mu, B)$   $L_2$  üzerinde esnek modüler kafes ise  $(f^{-1}(\mu), A)$   $L_1$  üzerinde esnek modüler kafestir.

**İspat:** Tanım 2.2.5 ve Tanım 3.4.1 yardımıyla ispatı kolaylıkla gösterilebilir.

**Teorem 3.4.2**  $(\eta, A)$ ,  $L$  üzerinde bir esnek modüler kafes ve  $(\mu, B)$ ,  $(\eta, A)$  nin esnek alt kafesi olsun. O halde  $(\mu, B)$  de  $L$  üzerinde esnek modüler kafestir.

**İspat:**  $(\mu, B)$   $(\eta, A)$  nin esnek alt kafesi olsun. O halde  $B \subseteq A$  ve her  $x \in B$  için  $\mu(x)$   $\eta(x)$  in alt kafesidir. Ayrıca  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde esnek modüler kafes olduğundan her  $x \in A$  için  $\eta(x)$   $L$  nin modüler alt kafesidir.  $\mu(x)$  de  $\eta(x)$  in alt kafesi olduğundan her  $x \in B$  için  $\mu(x)$   $L$  nin modüler alt kafesidir. Buradan  $(\mu, B)$   $L$  üzerinde bir esnek modüler kafestir.

**Teorem 3.4.3**  $(\eta, A)$   $L_1$  üzerinde ve  $(\mu, B)$   $L_2$  üzerinde esnek kafesler olsun. Eğer  $(\eta, A)$   $L_1$  üzerinde esnek modüler kafes ve  $(\eta, A) \approx (\mu, B)$  ise  $(\mu, B)$  de  $L_2$  üzerinde esnek modüler kafestir.

**İspat:**  $(\eta, A) \approx (\mu, B)$  ise  $(f, g) : (\eta, A) \longrightarrow (\mu, B)$  olacak şekilde  $f : L_1 \longrightarrow L_2$  ve  $g : A \longrightarrow B$  dönüşümleri vardır ve her  $x \in A$  için  $f(\eta(x)) = \mu(g(x))$  dir.  $(\eta, A)$   $L_1$  üzerinde esnek modüler kafes ise her  $x \in A$  için  $\eta(x)$   $L_1$  in modüler alt kafesidir. Üstelik  $f(\eta(x))$   $L_2$  nin modüler alt kafesidir. Yani  $\mu(g(x))$   $L_2$  nin modüler alt kafesidir.  $g : A \longrightarrow B$  örten olduğundan her  $y \in B$  için  $\exists x \in A$  öyleki  $g(x) = y$  dir. Buradan  $\mu(y)$   $L_2$  nin modüler alt kafesidir. Sonuç olarak  $(\mu, B)$   $L_2$  üzerinde esnek modüler kafestir.

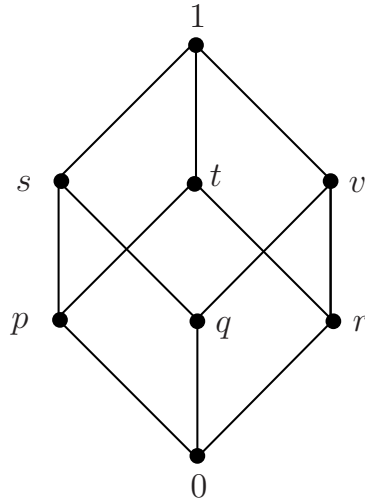
**Teorem 3.4.4** Bir esnek dağılımlı kafes esnek modüler kafestir.

**İspat:**  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde esnek dağılımlı kafes olsun. Buradan her  $x \in A$  için  $\eta(x)$   $L$  nin dağılımlı alt kafesidir. Yani  $x, y, z \in A$  için  $\eta(x) \wedge (\eta(y) \vee \eta(z)) = (\eta(x) \wedge \eta(y)) \vee (\eta(x) \wedge \eta(z))$  dir.

Eğer  $\eta(y) \leq \eta(x)$  ise ;  $\eta(x) \wedge (\eta(y) \vee \eta(z)) = \eta(y) \vee (\eta(x) \wedge \eta(z))$  elde edilir. Buradan her  $x \in A$  için  $\eta(x)$   $L$  nin modüler alt kafesidir. Yani  $(\eta, A)$   $L$  üzerinde esnek modüler kafestir.

Yukarıdaki teoremin tersi doğru değildir. Yani bir esnek modüler kafes esnek dağılımlı kafes olmayabilir.

**Örnek 3.4.3** Şekil 3.15 deki  $L = \{0, p, q, r, s, t, v, 1\}$  kafesini dikkate alalım.



Şekil 3.15:  $L = \{0, p, q, r, s, t, v, 1\}$  kafesi

$A = \{0, p, q, r, 1\}$  olmak üzere  $\eta : A \longrightarrow \wp(L)$  küme değerli fonksiyonu  $\eta(x) = \{y \in L : xRy \Leftrightarrow x \wedge y = 0\}$  şeklinde tanımlansın. Buna göre  $\eta(p) = \{p, q, r, v, t\}$ ,  $\eta(q) = \{0, p, r, t\}$ ,  $\eta(r) = \{0, p, q, s\}$ ,  $\eta(1) = \{0\}$  dir. Açıkça her  $x \in A$  için  $\eta(x)$ ,  $L$  nin modüler alt kafesidir. Buradan  $(\eta, A)$ ,  $L$  üzerinde esnek modüler kafestir. Fakat  $(\eta, A)$  esnek dağılımlı kafes değildir.



## 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında öncelikle bir  $U$  kümesi üzerinde tanımlı bütün esnek kümelerin ailesinin “ $\sqsubseteq$ ” bağıntısı ile tam kafes ve sonsuz  $\vee$ -dağılımlı kafes yapısına sahip olduğu gösterilmiştir. Esnek kümeler üzerinde ikili işlemler verilerek esnek kafesler için ikili işlemlerin buradaki etkileri incelenmiştir. Kafes teorisine ait bazı sonuçların esnek kafesler içinde geçerli olduğu gösterilmiştir. Esnek fonksiyon yardımıyla esnek kafeslerin homomorfik görüntüsü ve homomorfik ters görüntüsüne ait bazı özellikler verilmiştir.

Bu sonuçlara dayanarak, esnek kafes yapısı yardımıyla klasik kafes yapısına ait özellikler incelenebilir.  $L$  kafesi üzerinde bir  $t$ -norm alınarak esnek kümelerin yapısı incelenebilir. Kafeslerin karakterize edilmesinde de faydalı olabilecek diğer esnek kafes yapılarının özellikleri üzerine bazı çalışmalar yapılabilir.

## 5.KAYNAKLAR

- Acar, U., Koyuncu, F., Tanay, B. (2010). Soft sets and soft rings. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(11), 3458-3463.
- Aktaş, H., Çağman, N. (2007). Soft sets and soft groups. *Information sciences*, 177, 2726-2735.
- Ali, M.I., Feng, F., Liu, X., Min, W.K., Shabir, M. (2009). On some new operations in soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 57(9), 1547-1553.
- Bera, S., Roy, S., K., Karaaslan, F., Çağman, N. (2017). Soft congruence relation over lattice. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 46(6), 1035-1042.
- Birkhoff, G. (1967). Lattice Theory. American Mathematical society, Providence, Rhode, Island, 420pp.
- Çağman, N., Enginoğlu, S. (2010). Soft set theory and uni-int decision making. *European Journal of Operational Research*, 207, 848-855.
- Çağman, N., Çıtak, F., Aktaş, H. (2012). Soft int-group and its applications to group theory. *Neural Computing and Applications*, 21(1), 2621-2628.
- Çelik., Y., Ekiz., C., Yamak., S. (2011). A new view on soft rings. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 40(2), 273-286.
- Feng, F., Jun, Y.B. Zhao., X. (2008). Soft semirings. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(10), 2621-2628.
- Feng, F., Jun, Y.B., Liu., X., Li, L. (2010). An adjustable approach to fuzzy soft set based decision making. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234, 10-20.
- Feng, F., Li, C., Davvaz, B., Ali, M.I. (2010). Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative approach. *Soft Computing*, 14(6), 899-911.
- Feng, F., Liu, X., Leoreanu-Fotea, V., Jun, Y.B. (2011). Soft sets and soft rough sets. *Information Sciences*, 181(6), 1125-1137.
- Feng, F., Ali, M.I., Shabir, M. (2013). Soft relations applied to semigroups. *Filomat*, 27(7), 1183-1196.
- Jun, Y.B. (2008). Soft bck/bci-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(5), 1408-1413.
- Karaaslan, F., Çağman, N., Enginoğlu, S. (2012). Soft Lattices. *Journal of New Results in Science*, 1, 5-17.
- Maji, P.K., Biswas, R., Roy, A.R. (2003). Soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45(4-5), 555-562.

- Maji, P.K., Roy, A.R., Biswas, R. (2002). An application of soft sets in a decision making problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 44(8-9), 1077-1083.
- Majumdar, P., Samanta, S.K. (2010). On soft mappings. *Computers and Mathematics with Applications*, 60, 2666-2672.
- Molodtsov, D. (1999). Soft set theory-first results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19-31.
- Molodtsov, D. (2004). *The Theory of Soft Sets*. URSS Publishers, Moscow.
- Nagarajan, E.K.R., Meenambigai, G. (2011). An application of soft sets to lattices. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 35(1), 75-87.
- Nagarajan, E.K.R., Geetha, P. (2014). Soft Ideals of a Soft Lattice. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 8(2), 112-119.
- Pawlak, Z. (1982). Rough sets. *International Journal of Information and Computer Sciences*, 11(1), 341-356.
- Qin, K., Hong, Z. (2010). On soft equality. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234, 1347-1355.
- Shabir, M., Ali, M.I. (2009). Soft Ideals and Generalized Fuzzy Ideals in Semigroups. *New Mathematics and Natural Computation*, 5(3), 599-615.
- Sun, Q-M., Zhang, Z-L., Liu, J. (2008). *Soft Sets and Soft Modules*. Rough Sets and Knowledge Tecnology, Springer, China, 403-409.
- Yamak, S., Kazancı, O., Davvaz, B. (2011). Soft hyperstructure. *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 797-803.
- Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8, 338-353.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Sevgi DEMİR  
**Doğum Yeri** : Ordu  
**Doğum Tarihi** : 18/09/1994  
**Yabancı Dili** : İngilizce  
**E-mail** : svgidmr6@gmail.com  
**İletişim Bilgileri** : Ordu Üniv. Fen Edebiyat Fak. Matematik Böl. ORDU

### Öğrenim Durumu :

Derece	Bölüm/ Program	Üniversite	Yıl
Lisans	Matematik Böl.	Ordu Üniversitesi	2016