T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAYGIN OLARAK KULLANILAN BÜYÜME MODELLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

ELİF ÖZKURT BAŞUSTAOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2019

T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YAYGIN OLARAK KULLANILAN BÜYÜME MODELLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

ELİF ÖZKURT BAŞUSTAOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2019

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi **Elif ÖZKURT BAŞUSTAOĞLU** tarafından hazırlanan ve **Dr. Öğr. Üyesi Mehmet KORKMAZ** danışmanlığında yürütülen **"YAYGIN OLARAK KULLANILAN BÜYÜME MODELLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 07.02.2019 tarihinde yapılmış ve jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet KORKMAZ

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Mehmet KORKMAZ Matematik, Ordu Üniversitesi	....
Üye Prof. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Murat GÜL İstatistik, Giresun Üniversitesi	....

04 / 03 / 2019 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 07 / 03 / 2019 tarih ve 2019 / 125 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ 1923

Enstitü Müdürü
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Elif ÖZKURT BAŞUSTAOĞLU

Bu çalışma Ordu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğünün B-1812 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖZET

YAYGIN OLARAK KULLANILAN BÜYÜME MODELLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Elif ÖZKURT BAŞUSTAOĞLU

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi, 60 s.

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet KORKMAZ

Bu tezde yaygın olarak kullanılan büyüme modellerinin genelleştirilmesi sunulmuştur. $f'(t) = r_t f(t)$ hız-durum adi diferansiyel denkleminin daha genel bir çözümü olarak Koya-Goshu biyolojik büyüme modeli tanıtılmaktadır. Koya-Goshu modeli, biri büyüme durumunu ve diğeri asimptotik davranışları etkileyen iki parametreden oluşur. Burada, Koya-Goshu modeli ile Brody, Von Bertalanffy, Richards, Weibull, Monomoleküler, Mitscherlich, Gompertz, Klasik Lojistik, Genelleştirilmiş Lojistik ve Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonunun Özel Durumu gibi yaygın olarak kullanılan büyüme modellerinin arasındaki matematiksel ilişkiler ayrıntılı olarak incelenerek, bir akış şemasında gösterilmiştir. Bu büyüme modeli öyle esnektir ki, şimdiye kadar hiç kullanılmamış yeni yararlı modeller üretme kapasitesine de sahiptir. Bunun yanında yukarıda adı geçen büyüme modelleri ele alınarak her birinin biyolojik büyümeleri tanımlayan hız-durum diferansiyel denkleminin bir çözümünün olduğu açıkça belirtilmektedir. Hız-durum denkleminin çözümleri olarak nispi büyüme oran fonksiyonları ve büyümeleri incelenmiştir. Yukarıda belirtilen fonksiyonlar için nispi büyüme fonksiyonu r_t, İntegral Sabiti $\log C$ ve B parametresi oluşturuldu. Modellerin türevleri, bu türevlerin literatürde bulunamaması ve biyoloji bilimleri alanlarında çalışan matematik dışı çalışmacılar da düşünülerek ayrıntılı olarak sunulmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Büyüme modelleri, Koya–Goshu fonksiyonu, Hız-durum adi diferansiyel denklemi

ABSTRACT

A STUDY ON THE GENERALIZATION OF THE COMMONLY USED GROWTH MODELS

Elif ÖZKURT BAŞUSTAOĞLU

Ordu University Institute of Natural and Applied Sciences

Mathematics

Msc. Thesis, 60 p.

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Mehmet KORKMAZ

In this thesis, generalization of widely used growth models is presented. The Koya-Goshu biological growth models is introduced as a more general solution of the speed-state ordinary differential equation $f'(t) = r_t f(t)$. The Koya-Goshu model consists of two parameters, one affecting the growth state and the other asymptotic behavior. Here, the mathematical relationships between the Koya-Goshu model and the widely used growth models such as Brody, Von Bertalanffy, Richards, Weibull, Monomolecular, Mitscherlich, Gompertz, Classical Logistic, Generalized Logistic Function and the special situation of the Logistic Function are examined in detail and shown in a flowchart. This growth model is so flexible that it has the capacity to produce new useful models that have never been used. In addition, the mentioned growth models above are considered and it is clearly stated that each one has a solution of the speed-state differential equation describing the biological growth. Relative growth rate functions and their growth are examined as solutions of the velocity-state equation. The relative growth function r_t, the Integral Constant log$C$ and the parameter B were created for the functions described above. Derivatives of the models are presented in detail considering non-mathematics researchers working in the fields of biology and unavailability of these derivatives in literature.

Anahtar Kelimeler: Growth models, Koya–Goshu function, Speed-state ordinary differential equation

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan, desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mehmet KORKMAZ'a ve Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve öğretim elemanlarına sonsuz teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Tezin düzeltilmesi ve kontrolünü yapan sayın Öğr. Gör. Volkan ODA'ya engin sabırlarından dolayı teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca gösterdikleri maddi, manevi destekleri ve fedakarlıkları ile her zaman benim yanımda olan annem, babam, ablam ve eşim Uğur BAŞUSTAOĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca Ordu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğüne **B-1812** numarası ile yüksek lisans tez proje desteği verdiğinden dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

A :	$\lim_{t \to \infty} f(t) = f_\infty$, A $f(t)$'nin üst asimtotudur.
A_L :	$f(t)$'nin alt asimtotu
$A_\mu = f(\mu)$	Büyüme hızı parametresi
μ :	Zaman kayması, sabit
δ :	Zaman ölçeği, sabit
v,m :	Büyüme fonksiyonunun şekil parametreleri $m \neq 0, v \neq 0$

1.GİRİŞ

Biyolojik büyümenin ölçülmesi birçok alanda önemlidir. Birçok araştırmacı, ilgili modellerin geliştirilmesine katkıda bulunmuştur: Brody fonksiyonu için Brody (1945); Von Bertalanffy fonksiyonu için Von Bertalanffy (1957); Richards fonksiyonu için Richards (1959), France ve Thornley (1984); Gompertz fonksiyonu için Winsor (1932); Lojistik fonksiyonu için Nelder (1961), Brown ve ark. (1976), Robertson (1906); Genelleştirilmiş Lojistik fonksiyonu için Eberhardt ve Breiwick (2012), Fekedulegn ve ark. (1999), Ayala ve ark. (1973) ve Nelder (1961); Weibull fonksiyonu için Rawlings ve Cure (1985), Rawlings ve ark. (1998); Monomoleküler fonksiyonu için Spillman ve Lang (1924) ve Brody (1945). Nisbi büyümenin matematiksel gösterimi adi diferansiyel denklem (ODE) veya hız-durum denklemi,

$$\frac{df(t)}{dt} = r_t f(t) \tag{1.1}$$

ile açıklanmaktadır. Burada $f(t)$ büyüme fonksiyonunu, r_t, t zamanındaki nispi oran fonksiyonunu temsil ediyor. Bu adi diferansiyel denklem bu çalışma da incelenen birçok çözüme sahiptir. Büyüme modelleri, aşağıdakileri de içeren birçok biyolojik büyüme probleminde yaygın şekilde kullanılmaktadır: hayvan bilimlerinde (Brody, 1945; France ve ark., 1996; Brown ve ark., 1976; Robertson, 1906; Winsor, 1932; Ersoy ve ark., 2007) ve ormancılıkta (Lie ve Zhang, 2004; Zeide, 1993). Goshu (2008) tarafından yapılan benzetim çalışmaları, böyle büyüme fonksiyonlarının verilen veri kümesine yanlışlıkla uyabilecek kadar esnek olduğunu ve model seçilirken daha fazla dikkat edilmesi gerektiğini gösterir. Büyüme modellerini genelleştirmek için bir dizi denemeler yapılmıştır. Örneğin, Lei ve Zhang (2004), aşağıdaki gibi bir γ parametresi ekleyerek ODE (1.1)'i ODE (1.2) olarak değiştirdi.

$$\frac{d(y^{\gamma})}{dt} = k(\alpha^{\gamma} - y^{\gamma}) \tag{1.2}$$

Bazı büyüme modelleri denklem (1.2)’den elde edilir. Dahası, $\gamma > 1$ olduğu zaman modelin üst limiti olduğunu ancak dönüm noktasına sahip olmadığını, ancak $\gamma < 1$ için hem üst sınır hem de dönüm noktasının olduğunu gösteriyor.

Zeide (1993),

$$y' = K_1 y^{P_1} t^{q_1} + K_2 y^{P_2} t^{q_2 t} + K_3 y^{P_3} t^{q_3 y} \tag{1.3}$$

şeklinde 9 parametreli modeli tanımlamıştır. İlk iki terim, Weibull hariç yaygın olarak bilinen büyüme fonksiyonlarını içerir ve bunu hesaba katmak için üçüncü terim ilave edilir. Genelleştirilmiş lojistik fonksiyon bazı araştırmacılar tarafından incelenmiştir (Nelder, 1961; Eberhardt ve Breiwick, 2012; Fekedulegn ve ark., 1999; Ayala ve ark., 1973). Bu modelleri, Eberhardt ve Breiwick (2012), kuş ve memeli popülasyonlarının büyümesine yönelik modellere uygulamışlardır. Mevcut çalışmada, sekiz parametreli ODE (1.1)’in çözümü olarak yeni bir genelleştirilmiş büyüme modeli verilmiştir. Aynı zamanda model seçimi için de kullanılabilir. Bu çalışmada modeller arasındaki matematiksel ilişkiler incelenmiş ve modellerin dönüm noktaları araştırılmıştır. Bu çalışmanın amacı, yaygın olarak kullanılan büyüme modellerinin, $f(t)$ ve r_t’yi oluşturarak hız-durum denkleminin çözümleri olduğunu açıkça göstermektir. Bu çalışmada, $f(t)$ ve r_t 'nin ayrıntılı türevleri, biyoloji bilimleri alanlarında çalışan matematik dışı çalışmacıları ve bu türevlerin literatürde bulunmamasını göz önüne alarak sunulmaktadır. Burada ele alınan tüm büyüme fonksiyonları, ilgili nispi büyüme oranı fonksiyonları, B parametresi, integral sabiti ve dönüm noktası ile birlikte Çizelge 3.1'de gösterilecekdir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1 Büyüme Fonksiyonlarının Genelleştirilmesi Olarak Koya-Goshu Büyüme Fonksiyonu

Bu bölümde, Koya-Goshu büyüme fonksiyonu olarak adlandırılan yeni genelleştirilmiş büyüme fonksiyonunu tanıtıyoruz ve yaygın olarak bilinen Lojistik, Genelleştirilmiş Lojistik, Gompertz, Brody, Monomoleküler, Mitscherlich, Von Bertalanffy, Richards, Genelleştirilmiş Weibull ve Weibull büyüme modellerini nasıl barındırdığını gösteriyoruz.

Yeni genelleştirilmiş büyüme fonksiyonu olarak Koya-Goshu Büyüme Modeli, aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Koya ve Goshu, 2013a).

$$f(t) = A_L + (A - A_L)\left[1 - Be^{-k([t-\mu]/\delta)^v}\right]^m \tag{2.1}$$

Burada parametreler:

$$B = 1 - \left(\frac{A_\mu - A_L}{A - A_L}\right)^{1/m}, \ \left(A, A_L, A_\mu, m\right) \text{'den türetilir.} \tag{2.2}$$

A :	$\lim_{t\to\infty} f(t) = f_\infty$, A $f(t)$'nin üst asimtotudur.
A_L :	$f(t)$'nin alt asimtotu
$A_\mu = f(\mu)$	Büyüme hızı parametresi
μ :	Zaman kayması, sabit
δ :	Zaman ölçeği, sabit
v,m :	Büyüme fonksiyonunun şekil parametreleri $m \neq 0, v \neq 0$

2.1.1 Koya-Goshu Büyüme Modelinin Tanımı

Koya-Goshu büyüme modeli 8-parametreli bir fonksiyondur (Koya ve Goshu, 2013a).

$$(A, A_L, A_\mu, k, \mu, \delta, v, m)$$

Model, ODE (1.1)'in daha genel bir çözümüdür.

$A_{\mu} \geq A_0$ ve μ=0 dır.

Parametre B ile ilgili olarak,

$m \to \infty$ iken $B \to 0^+$

$m \to 0^+$ iken $B \to 1^-$

$m \to 0^-$ iken $B \to -\infty$

olduğunu söyleyebiliriz.

Parametre B, Richards Fonksiyonu için açık aralık (-∞,1)'de ve hem Von Bertalanffy Fonksiyonu hem de Brody Fonksiyonu için (0,1) değerinde herhangi bir değer alabilir.

Hem Lojistik Fonksiyonu hem de Gompertz Fonksiyonu için, B pozitif herhangi bir reel sayı değeri alabilir. Weibull B = 1 iken Genelleştirilmiş Weibull durumunda, $0 < B \leq 1$ dir.

Koya-Goshu Fonksiyonu, $t \geq 0$ zamanında büyümelerin modellenmesi için iyi tanımlanmıştır.

Fonksiyon, m<0 için ve v pozitif herhangi bir tek sayı olduğundan sigmoidal eğriyi gösterir. Ancak, eğer m> 0 veya (m<0 ve v, pozitif tek tamsayıdan farklı herhangi bir reel sayı) ise fonksiyon, $t \geq t_L$ için iyi tanımlanmış büyüme modelidir.

Burada,

$$t_L = \mu + \delta(\frac{1}{k}\log(B))^{\frac{1}{v}} \text{ 'dir.}$$

Bu, bazı durumlarda fonksiyonun alt asimptotunu yok saydığına işaret eder.

Asimptotun hesaba katılması için, $\infty < t < t_L$ için $f(t) = A_L$ 'yi alarak modifikasyon yapılabilir veya şu şekilde yazılabilir:

$$f(t) = \begin{cases} A_L + (A - A_L)\left[1 - Be^{-k\left(\frac{[t-\mu]}{\delta}\right)^v}\right]^m & ,t \geq t_L \\ A_L & ,t < t_L \end{cases}$$

Böylece, (2.1) 'deki Koya-Goshu fonksiyonu genel olarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$f(t) = A_L + U(t - t_L) * (A - A_L) * \left[1 - Be^{-k\left(\left[t-\mu\right]/\delta\right)^{v}}\right]^{m}$$

Ayrıca burada,

$$U(t - t_L) = \begin{cases} 0, & t < t_L \\ 1, & t \geq t_L \end{cases}$$

bir birim basamak fonksiyonudur ki burada eğer m<0 ve v tek pozitif tamsayı ise t_L, zaman için bir alt sınırı göstermek üzere $t_L = -\infty$ dur veya

m>0 veya (m<0 ve v pozitif olmayan tek sayı) ise $t_L = \mu + \delta\left(\frac{1}{k}\log(B)\right)^{\frac{1}{V}}$ dir.

Burada $f(-\infty)$ ile A_L 'nin $t \to -\infty$ iken, $f(t)$'nin limiti ile tanımlandığı unutulmamalıdır.

Bu, $f(t)$'nin bir alt asimptotu olarak tanımlanır.

Koya-Goshu fonksiyonunun mv-düzlemindeki tüm noktalarda (m,v) ile tanımlandığı unutulmamalıdır.

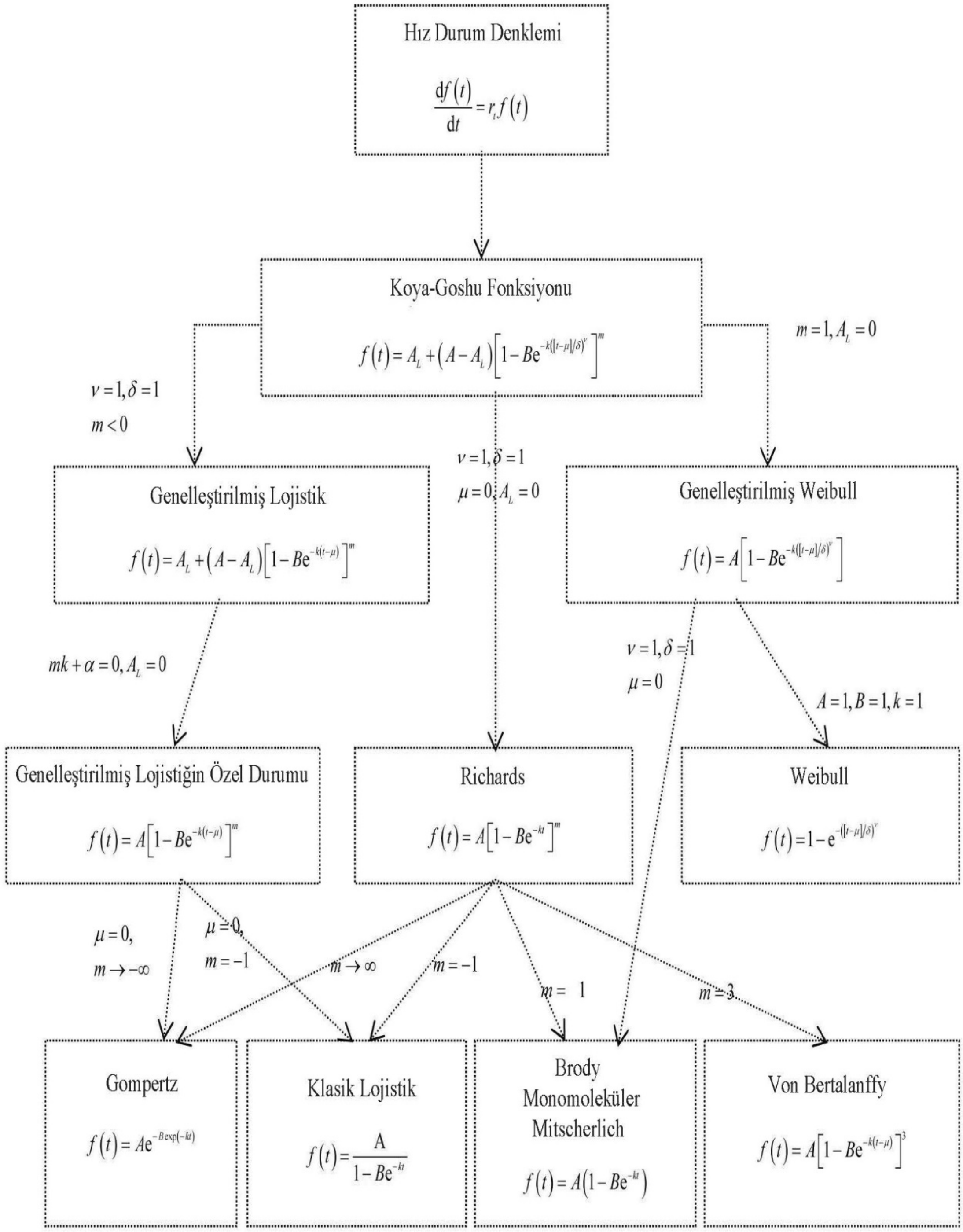
Bilinen tüm büyüme eğrileri, yalnızca v=1 veya m=1 doğrusu boyunca uzanır. Bu fonksiyon, bu noktalardan düzlemdeki diğer noktaları da kapsar.

Bunun anlamı şudur ki, fonksiyon o kadar esnektir ki, yaygın olarak kullanılanlardan farklı eğriler seçilebilir (Koya ve Goshu, 2013a).

Koya-Goshu modeli yaygın şekilde bilinen büyüme fonksiyonlarını içerir. Bu çalışmada, büyüme modelleri ve bunların birbirleriyle nasıl ilişkili oldukları hakkında ayrıntılı analizler yapıldı.

Richards Fonksiyonu Brody, Von Bertalanffy, Klasik Lojistik ve Gompertz'in genel bir formudur. Brody, Monomolekuler ve Mitscherlich fonksiyonlarına benzerdir. Brody, Weibull fonksiyonunun özel bir halidir.

Tüm ilişkiler Şekil 2.1'deki akış çizelgesi ile gösterilmektedir.



Şekil 2.1 Genelleştirilmiş ve Özelleştirilmiş Büyüme Fonksiyonları Arasındaki İlişkileri Gösteren Akış Şeması (Koya ve Goshu, 2013a)

2.1.2 Koya-Goshu Fonksiyonunun Özellikleri

Fonksiyon, hem artan hem de azalan büyümeleri gösterir (bakınız Şekiller 2.2, 2.3, 2.4).

v> 0 için artmakta ve v<0 için azalmaktadır.

Bu, büyümenin artması veya azalması, *m*'nin değerlerinden bağımsız olarak, *v*'nin işaretinden (pozitif veya negatif) etkilenir anlamına gelir.

Fonksiyon, üst asimptot ile artan büyümeleri gösterir, ancak alt asimtotu yoktur.

1) *m* ve *v*'nin her ikisinde tüm pozitif kombinasyon değerleri için (bakınız Şekil 2.2 (a))

2) *m*'nin tüm küçük negatif değerleri ve *v*'nin büyük pozitif değerleri için (bakınız Şekil 2.3 (a))

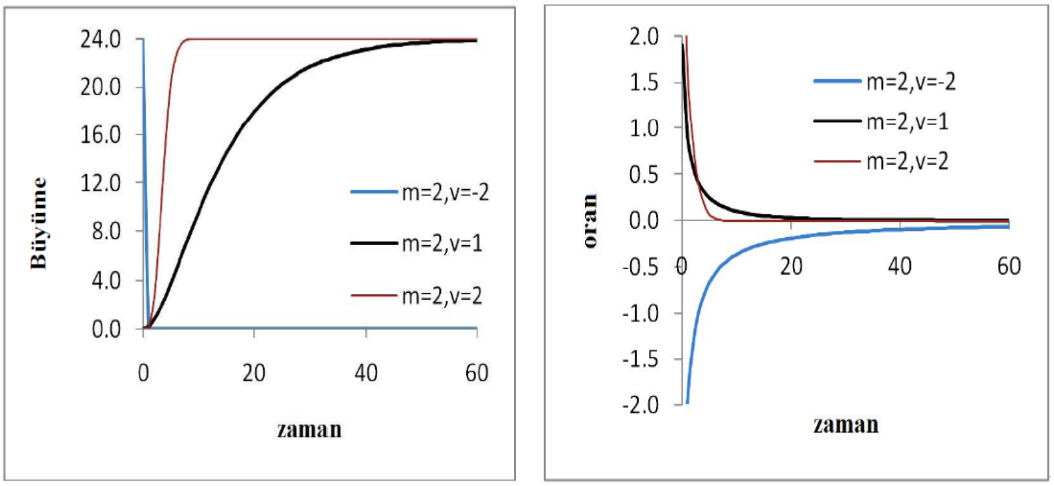
Fonksiyon, hem üst hem de alt asimptotlarla artan büyümeleri gösterir.

1) *m*'nin tüm negatif değerleri ve *v*'nin pozitif herhangi bir değeri (küçük veya büyük) için (bakınız Şekil 2.4 (a))

2) *m*'nin tüm küçük negatif değerleri ve *v*'nin küçük pozitif değerlerinin tümü için (bakınız Şekil 2.3 (a))

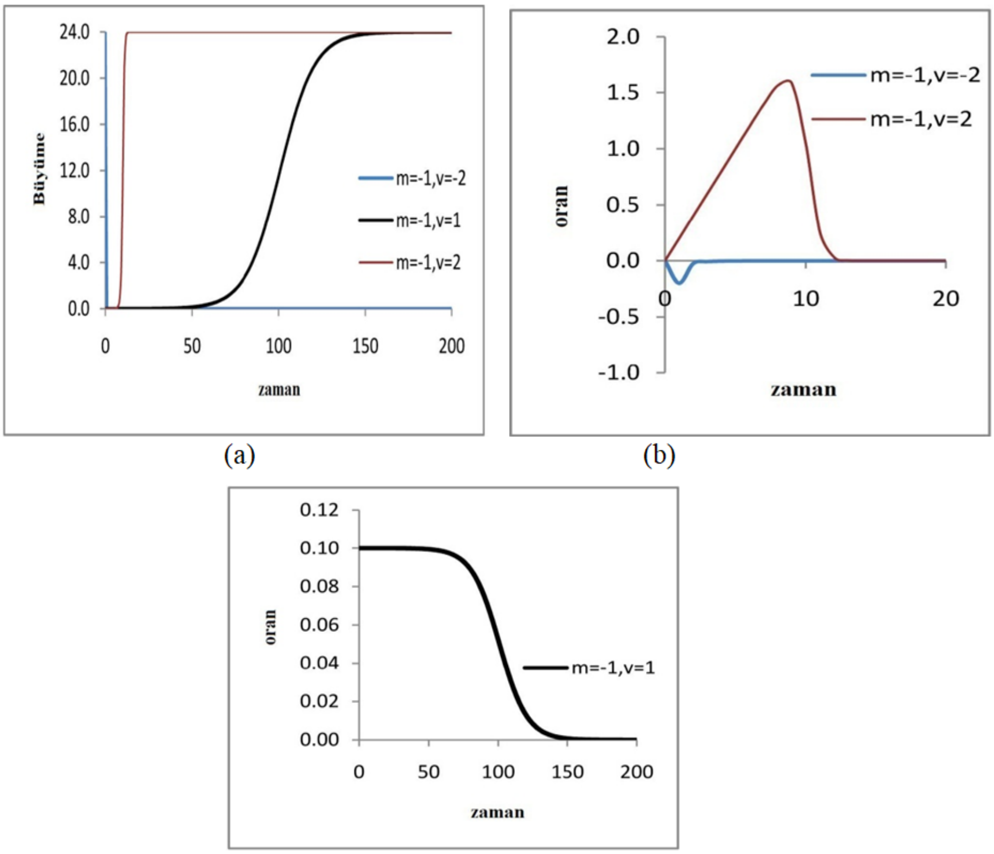
Ya alt ve üst asimptotların veya sadece üst asimptotlarının ortaya çıkışı, yalnızca *m*'den etkilenip *v*'den etkilenmez.

Genellikle, *m* parametresi, fonksiyonun asimptotik davranışını etkilerken, *v* parametresi büyüme davranışını etkiler (Koya ve Goshu, 2013a).



(a) (b)

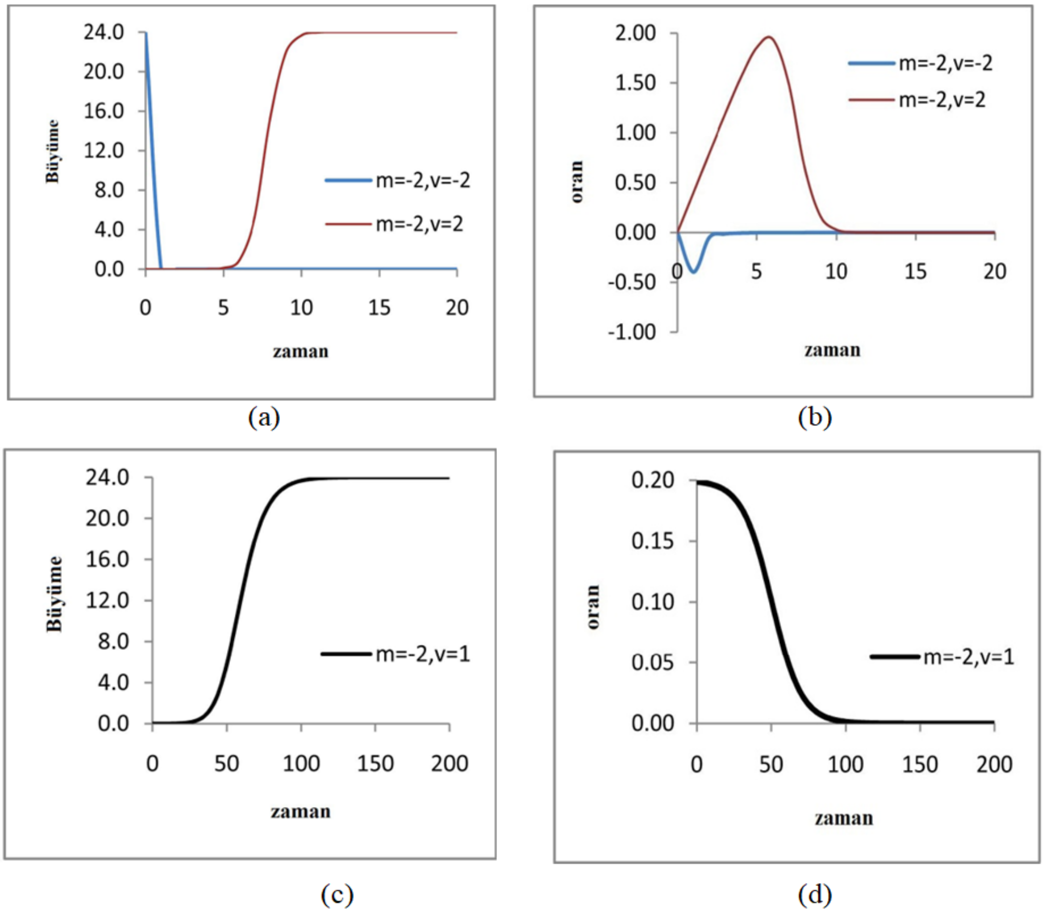
Şekil 2.2 *m*=2, *v* ϵ {-2,1,2} ile (a) Büyüme Fonksiyonları ve (b) Oran Fonksiyonlarının Grafiği (Koya ve Goshu, 2013a)



(a) (b)

(c)

Şekil 2.3 *m*=-1, *v* ϵ {-2,1,2} ile (a) Büyüme Fonksiyonları ve (b) (c) Oran Fonksiyonlarının Grafiği (Koya ve Goshu 2013a)



Şekil 2.4 *m*=-2, *v* ϵ {-2,1,2} ile (a) (c) Büyüme Fonksiyonları ve (b) (d) Oran Fonksiyonlarının Grafiği (Koya ve Goshu, 2013a)

2.1.3 Koya-Goshu Fonksiyonunun Dönüm Noktası

Bu çalışmada büyüme fonksiyonlarının dönüm noktalarını bulmak için bir yöntem sunulacaktır. $f(t)$ fonksiyonunun, a noktası içeren açık bir aralık üzerinde sürekli olduğunu varsayalım. a'nın bir tarafında $f''(t) < 0$ ve diğer tarafında $f''(t) > 0$ olduğunda, a noktasına $f(t)$'nin dönüm noktası denir. a dönüm noktasında $f''(t) = 0$ dır veya $f''(t)$ yoktur (Edwards ve Penney, 1994).

$$f'(t) = \left(\frac{mkv}{\delta}\right)\left[f(t) - A_L\right]^{1-\frac{1}{m}} . \left\{\left[A - A_L\right]^{\frac{1}{m}} - \left[f(t) - A_L\right]^{\frac{1}{m}}\right\}\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v-1} \tag{2.3}$$

$$f''(t) = \left(\frac{v}{\delta}\right)\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{-1}\left\{\left[(m-1)\left(\frac{A-A_L}{f(t)-A_L}\right)^{\frac{1}{m}} - m\right].\left[k\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}\right] + \left(1 - \frac{1}{v}\right)\right\} f'(t) \tag{2.4}$$

Burada, $f''(t) = 0$ olduğu zaman,

$$\Leftrightarrow \left\{ \left[(m-1)\left(\frac{A-A_L}{f(t)-A_L} \right)^{\frac{1}{m}} - m \right] . \left[k\left(\frac{t-\mu}{\delta} \right)^{v} \right] + \left(1-\frac{1}{v} \right) \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{(m-1)}{1-Be^{-k\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}}} - m \right] \left[k\left(\frac{t-\mu}{\delta} \right)^{v} \right] + \left(1-\frac{1}{v} \right) = 0 \qquad (2.5)$$

Açıkçası, dönüm noktasında $f''(t)=0$ ve ayrıca o noktanın artan ve azalan tarafında $f''(t)<0$ ve $f''(t)>0$ olduğundan dolayı, (2.5) denkleminin sağladığı durumda Koya-Goshu Fonksiyonunun dönüm noktası vardır.

Burada Koya-Goshu fonksiyonunun dönüm noktalarının, sırasıyla,

1) v= 1, δ = 1 ve 2) m = 1 parametreleri ile sabitlendiğinde Genelleştirilmiş Lojistik fonksiyonu ve Genelleştirilmiş Weibull modelinin dönüm noktaları ile mükemmel şekilde eşleştiği gözlemlenebilir.

Diğer durumlarda, $m\neq 1$, $v\neq 1$ olduğunda, Koya-Goshu fonksiyonunun dönüm noktası yaklaşık değerlerle elde edilebilir.

Örneğin, birinci dereceden terime kadar Taylor serisi genişlemesi kullanılarak, dönüm zamanı şu şekilde hesaplanır:

$$t \approx \mu + \delta \left[\frac{1-B}{2(m-1)Bk} \right]^{\frac{1}{v}} \left[(1-mB) \pm \sqrt{(mB-1)^2 - 4B(m-1)\left(1-\frac{1}{v}\right)} \right]^{1/v} \qquad (2.6)$$

2.2 Biyolojik Büyüme Modelleri ve Parametrik İlişkiler

Bu bölümde, bu çalışmada ele alınan tüm biyolojik büyüme modelleri, Koya-Goshu biyolojik büyüme modeli, Genelleştirilmiş Lojistik, Genelleştirilmiş Lojistiğin özel durumu, Richards, Von Bertalanffy, Brody, Lojistik, Gompertz, Genelleştirilmiş Weibull, Weibull, Monomoleküler ve Mitscherlich fonksiyonlarının arasındaki parametrik ilişkiler incelenmiştir (Koya ve Goshu, 2013a).

Tanımlanan ilişkiler Şekil 2.1 deki akış çizelgesi aracılığıyla sunulmuştur.

2.2.1 Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonu

Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyon

$$Y(t) = \mathcal{A} + \frac{\mathcal{K} - A}{\left[1 + Qe^{-\mathcal{B}(t-M)}\right]^{\frac{1}{\omega}}}$$

olarak orijinal notasyonlarıyla ifade edilmiştir (Anonim, 2012), şimdi bu çalışmada,

$$Y(t) = f\left(t\right),\ \mathcal{A} = A_L, \mathcal{K} = A, \mathcal{B} = k,\ M = \mu\ ,\ \ \omega = -\frac{1}{m}\ \text{ve}\ (-Q) = 1 - \left(\frac{A_\mu - A_L}{A - A_L}\right)^{\frac{1}{m}}$$

notasyonları ile yer değiştirerek, bu Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyon,

$$f(t) = A_L + (A - A_L)\left[1 - Be^{-k(t-\mu)}\right]^m \tag{2.7}$$

şeklinde yazılmıştır.

Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonu (2.7), Koya-Goshu Fonksiyonunun v = 1, δ= 1 ve m<0 olduğundaki özel bir durumudur.

B parametresi, (B=-Q olduğundan)

$$B = 1 - \left(\frac{A_\mu - A_L}{A - A_L}\right)^{\frac{1}{m}}$$

biçimini alır ki bu üçüncü bölümde ayrıntılı gösterilecektir.

Nispi büyüme oran fonksiyonu,

$$r_t = mk\left[\left(\frac{A - A_L}{f(t) - A_L}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right]\left[\frac{f(t) - A_L}{f(t)}\right]$$

olarak hesaplanabilir ki bu üçüncü bölümde ayrıntılı verilecektir.

Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonu, nispi oran fonksiyonu r_t ile ODE (1.1) 'den elde edilebilir.

Benzer şekilde, $f\,'(t)$ ve $f\,''(t)$ ifadeleri sırasıyla,

$$f\,'(t) = mk\left[f(t) - A_L\right]^{1-\frac{1}{m}}\left\{\left[A - A_L\right]^{\frac{1}{m}} - \left[f(t) - A_L\right]^{\frac{1}{m}}\right\}$$

ve

$$f''(t) = mk\left\{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left[\frac{A-A_L}{f(t)-A_L}\right]^{\frac{1}{m}}-1\right\}f'(t)$$

verilir.

Tek dönüm noktası, organizma,

$$t_i = \mu + \frac{1}{k}\log\left\{m\left[1-\left(\frac{A_\mu - A_L}{A-A_L}\right)^{\frac{1}{m}}\right]\right\} \qquad m \in \mathbb{R}-[0,1)$$

zamanında,

$$f(t_i) = A_L + \left(A-A_L\right)\left[1-\frac{1}{m}\right]^m$$

büyümesine eriştiğinde gerçekleşir.

$0 \leq m < 1$ için, dönüm noktası mevcut değildir.

2.2.2 Genelleşirilmiş Lojistik Fonksiyonunun Özel Durumu

Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonunun Özel Durumu,

$$Y(t) = \frac{\mathcal{K}}{\left[1+Qe^{-\alpha v(t-t_0)}\right]^{\frac{1}{\omega}}}$$

olarak tanımlanır (Anonim, 2012). Şimdi bu çalışmada kullanılan aynı

$Y(t) = f(t),\ \mathcal{K} = A,\ k = \alpha v,\ t_0 = \mu,\ \omega = -\dfrac{1}{m}$ ve $-Q = 1-\left(\dfrac{A_\mu}{A}\right)^{\frac{1}{m}}$ notasyonları ile yer

değiştirerek, Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonunun Özel Durumu,

$$f(t) = A\left[1-Be^{-k(t-\mu)}\right]^m \tag{2.8}$$

şeklinde yazılmıştır ki burada B parametresi, B=-Q olduğundan

$$B = 1-\left(\frac{A_\mu}{A}\right)^{\frac{1}{m}}$$

dır ki bu üçüncü bölüm de ayrıntılı gösterilecektir.

(2.8) denklemi, $A_L = 0,\ mk + \alpha = 0$ ile (2.7)'nin özel bir durumu olduğu görülmektedir.

Nispi büyüme oran fonksiyonu r_t,

$$r_t = mk\left[\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right]\left[\frac{f(t) - A_L}{f(t)}\right]$$

olarak hesaplanabilir ki bu üçüncü bölümde ayrıntılı verilecektir.

Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonunun Özel Durumu, nispi oran fonksiyonu r_t ile ODE (1.1) 'den elde edilebilir.

Benzer şekilde, $f'(t)$ ve $f''(t)$ ifadeleri sırasıyla,

$$f'(t) = mkf^{1-\frac{1}{m}}(t)\left\{A^{\frac{1}{m}} - f^{\frac{1}{m}}(t)\right\}$$

ve

$$f''(t) = mk\left\{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left[\frac{A}{f(t)}\right]^{\frac{1}{m}} - 1\right\} f'(t)$$

verilir.

Tek dönüm noktası, organizma,

$$t_i = \mu + \frac{1}{k}\log\left\{m\left[1 - \left(\frac{A_\mu}{A}\right)^{\frac{1}{m}}\right]\right\},\ m \in \mathbb{R} - [0,1)$$

zamanında,

$$f(t_i) = A\left[1 - \frac{1}{m}\right]^m$$

büyümesine eriştiğinde gerçekleşir.

$0 \le m < 1$ için, dönüm noktası mevcut değildir.

2.2.3 Richards Fonsiyonu

Richards fonksiyonu,

$$f(t) = A\left(1 - Be^{-kt}\right)^m \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlanır (Richards, 1959).

Buradaki, B parametresi

$$B = 1 - \left(\frac{A_0}{A}\right)^{\frac{1}{m}}$$

dir ki bu üçüncü bölümde ayrıntılı gösterilecektir.

Nispi büyüme oran fonksiyonu r_t,

$$r_t = mk\left[\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{1/m} - 1\right]$$

olarak hesaplanabilir ki bu üçüncü bölümde ayrıntılı verilecektir.

Richards fonksiyonu, nispi oran fonksiyonu r_t ile ODE (1.1) 'den elde edilebilir.

Richards fonksiyonu, $v = 1, \delta = 1, \mu = 0, A_L = 0$ eşitlikleri ile Koya-Goshu Büyüme Modeli'nin özel durumu haline gelir.

Burada m parametresi sıfır olmayan herhangi bir gerçek sayı olarak düşünülebilir.

$f'(t)$ ve $f''(t)$ ifadeleri sırasıyla,

$$f'(t) = mkf^{1-\frac{1}{m}}(t)\left[A^{\frac{1}{m}} - f^{\frac{1}{m}}(t)\right]$$

ve

$$f''(t) = kf'(t)\,f^{-\frac{1}{m}}(t)\left[(m-1)\,A^{\frac{1}{m}} - mf^{\frac{1}{m}}(t)\right]$$

verilir.

Tek dönüm noktası, nispi büyümenin $\left(\frac{m-1}{m}\right)^m$ 'ye ulaştığı zaman meydana gelir.

Yani tek dönüm noktası,

$$t_i = \left(\frac{1}{k}\right)\log\left\{m\left[1-\left(\frac{A_0}{A}\right)^{\frac{1}{m}}\right]\right\},\ m \neq 1$$

zamanında,

$$f(t_i) = \left(\frac{m-1}{m}\right)^m A$$

olur.

2.2.4 Von Bertalanffy Fonksiyonu

Von Bertalanffy,

$$f(t) = A\left(1 - Be^{-kt}\right)^3 \tag{2.10}$$

olarak adlandırılmıştır (Bertalanffy, 1957).

Bu fonksiyon, m=3 ile Richards fonksiyonunun (2.9) ve

$$v = 1,\ \delta = 1,\ \mu = 0,\ A_L = 0,\ m = 3$$

eşitlikleri ile Koya-Goshu Büyüme Modeli'nin özel bir durumudur.

Burada,

$$B = 1 - \left(\frac{A_0}{A}\right)^{\frac{1}{3}}$$

dir ki bu üçüncü bölümde ayrıntılı gösterilecektir.

Nispi büyüme oran fonksiyonu r_t,

$$r_t = 3k\left[\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{1/3} - 1\right]$$

olarak hesaplanabilir ki bu üçüncü bölümde ayrıntılı verilecektir.

Von Bertalanffy fonksiyonu, nispi büyüme oran fonksiyonu r_t ile ODE (1.1) 'den elde edilebilir.

Von Bertalanffy fonksiyonu için $f'(t)$ ve $f''(t)$ ifadeleri sırasıyla,

$$f'(t) = 3kf^{\frac{2}{3}}(t)\left[A^{\frac{1}{3}} - f^{\frac{1}{3}}(t)\right]$$

ve

$$f''(t) = 3k^2 f^{\frac{1}{3}}(t)\left[A^{\frac{1}{3}} - f^{\frac{1}{3}}(t)\right]\left[2A^{\frac{1}{3}} - 3f^{\frac{1}{3}}(t)\right]$$

verilir.

Burada tek dönüm noktası, nispi büyümenin 8/27'ye ulaştığında ortaya çıkar.

Yani tek dönüm noktası,

$$t_i = \left(\frac{1}{k}\right)\log\left\{3\left[1-\left(\frac{A_0}{A}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\right\}$$

zamanında,

$$f(t_i) = \left(8/27\right)A$$

elde edilir.

2.2.5 Brody Fonksiyonu

Brody Fonksiyonu,

$$f(t) = A\left(1 - Be^{-kt}\right) \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Brody, 1945).

Burada, m=1 için Richards fonksiyonunun (2.9) ve

$v=1,\ \delta=1,\ \mu=0,\ A_L=0,\ m=1,\ B=1-\dfrac{A_0}{A}$ ile Koya-Goshu büyüme modelinin özel bir durumudur.

Aynı zamanda, nispi büyüme oran fonksiyonu,

$$r_t = k\left[\left(\frac{A}{f(t)}\right)-1\right]$$

olarak hesaplanabilir ki bu üçüncü bölümde ayrıntılı verilecektir.

Brody Fonksiyonu, nispi büyüme oran fonksiyonu r_t ile ODE (1.1) 'den elde edilebilir.

Burada, $f'(t)$ ve $f''(t)$ ifadeleri sırasıyla,

$$f'(t) = k\left[A - f(t)\right]$$

ve

$$f''(t) = k^2\left[A - f(t)\right]$$

ile verilir.

Brody büyüme fonksiyonu, t'nin herhangi bir değeri için $f''(t)$ =0 sağlanamadığından, bir dönüm noktasına sahip değildir.

2.2.6 Lojistik Fonksiyonu

Klasik Lojistik fonksiyonu şu şekilde tanımlanır (Nelder, 1961):

$$f(t) = \frac{A}{1 - Be^{-kt}} \tag{2.12}$$

Burada,

$$B = \left(1 - \frac{A}{A_0}\right)$$

dır ki bu üçüncü bölümde ayrıntılı gösterilecektir.

Lojistik Fonksiyonun özel durumları:

1) m=-1 ile Richards Fonksiyonu (2.9)
2) $\mu = 0, m = -1$ ile Genelleştirilmiş Lojistik fonksiyonunun özel durumu (2.8)
3) $\mu = 0, A_L = 0, m = -1, \alpha = k$ ile Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonu (2.7)
4) $v = 1, \delta = 1, \mu = 0, A_L = 0, m = -1$ ile Koya-Goshu Fonksiyonu (2.1)

Nispi büyüme oran fonksiyonu r_t,

$$r_t = k\left(\frac{A - f(t)}{A}\right)$$

olarak hesaplanabilir ki bu üçüncü bölümde ayrıntılı verilecektir.

Lojistik fonksiyonu, nispi oran fonksiyonu r_t ile ODE (1.1)'den elde edilebilir.

Burada, $f'(t)$ ve $f''(t)$ ifadeleri sırasıyla,

$$f'(t) = kf(t)\left[1 - \frac{f(t)}{A}\right]$$

ve

$$f''(t) = kf'(t)\left[1 - \frac{2f(t)}{A}\right]$$

verilir.

Tek dönüm noktası,

$$t_i = \left(\frac{1}{k}\right)\log\left(\frac{A}{A_0} - 1\right)$$

zamanında, son büyüme yarıya ulaştığında, yani

$$f(t_i) = \frac{A}{2}$$

olduğunda elde edilir.

2.2.7 Gompertz Fonksiyonu

Gompertz fonksiyonu,

$$f(t) = Ae^{-B\exp(-kt)} \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Winsor, 1932). Burada,

$$B = \log\left(\tfrac{A}{A_0}\right)$$

dir ki bu üçüncü bölümde ayrıntılı gösterilecektir.

Gompertz Fonksiyonunun özel durumları,

1) $m \to \infty$ iken Richards Fonksiyonu (2.9)

2) $m \to -\infty$ ve $\mu = 0$ ile Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonun Özel Bir Durumu (2.8)

3) $\mu = 0, A_L = 0,\ m \to -\infty,\ \alpha \to \infty$ ile Genelleştirilmiş Lojistik fonksiyonu (2.7)

4) $v = 1,\ \delta = 1,\ \mu = 0,\ A_L = 0,\ m \to \infty$ ile Koya-Goshu fonksiyonu (2.1)

Nispi büyüme oran fonksiyonu r_t,

$$r_t = k \log\left(\frac{A}{f(t)}\right)$$

dir ki bu üçüncü bölümde ayrıntılı verilecektir.

Gompertz fonksiyonu, nispi oran fonksiyonu r_t ile ODE (1.1)'den türetilebilir.

Burada, $f'(t)$ ve $f''(t)$ ifadeleri sırasıyla,

$$f'(t) = kf(t)\log\left(\frac{A}{f(t)}\right)$$

ve

$$f''(t) = kf'(t)\left[\log\left(\frac{A}{f(t)}\right) - 1\right] \text{dir.}$$

Tek dönüm noktası, nispi büyümesinin $1/e$'ye ulaştığında ortaya çıkar.

Yani, tek dönüm noktası

$$t_i = \left(\frac{1}{k}\right)\log\left\{\log\left(\frac{A}{A_0}\right)\right\}$$

zamanında,

$$f(t_i) = \left(1/e\right)A$$

dır.

2.2.8 Genelleştirilmiş Weibull Fonksiyonu

Genelleştirilmiş Weibull fonksiyonu,

$$f(t) = A\left[1 - Be^{-k\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}}\right] \tag{2.14}$$

şeklinde dir.

Burada, *B* parametresi,

$$B = 1 - \frac{A_{\mu}}{A}$$

dir ki üçüncü bölümde ayrıntılı gösterilecektir

Genelleştirilmiş Weibull, m = 1, A_L=0 ile Koya-Goshu büyüme fonksiyonu (2.1)'in özel bir durumudur.

Nispi büyüme oran fonksiyonu r_t,

$$r_t = \left(\frac{k}{\delta}\right)\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{-1}\left[\frac{A}{f(t)} - 1\right]$$

ki bu üçüncü bölümde ayrıntılı verilecektir.

Genelleştirilmiş Weibull fonksiyonu, nispi oran fonksiyonu r_t ile ODE (1.1)'den elde edilebilir.

Genelleştirilmiş Weibull için, $f\,'(t)$ ve $f\,''(t)$ ifadeleri sırasıyla,

$$f\,'(t) = k\left(\frac{v}{\delta}\right)\left[A - f(t)\right]\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}$$

ve

$$f\,''(t) = \left(\frac{1}{\delta}\right)\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{-1}\left[(v-1) - kv\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}\right] f\,'(t)$$

verilir.

Tek dönüm noktası, organizma

$$t_i = \mu + \delta\left(\frac{v-1}{kv}\right)^{\frac{1}{v}}$$

zamanında

$$f(t_i) = A\left[1 - Be^{-\left(1-\frac{1}{v}\right)}\right]$$

büyümesine ulaştığında gerçekleşir.

2.2.9 Weibull Fonksiyonu

Weibull büyüme fonksiyonu,

$$f(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}} \tag{2.15}$$

olarak verilmiştir (Rawlings ve ark., 1998).

Nispi büyüme oran fonksiyonu r_t,

$$r_t = \left(\frac{k}{\delta}\right)\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{-1}\left[\frac{A}{f(t)} - 1\right]$$

ki üçüncü bölümde ayrıntılı verilecektir

Weibull fonksiyonu, nispi büyüme oran fonksiyonu r_t ile ODE (1.1)'den elde edilebilir.

Weibull Fonksiyonu, $m = 1,\ A_L = 0,\ A = 1,\ B = 1,\ k = 1$ ile Koya-Goshu büyüme fonksiyonu (2.1)'in ve A=1, B=1, k=1 ile Genelleştirilmiş Weibull Fonksiyonu (2.14)'ün özel bir durumudur.

Weibull için $f\,'(t)$ ve $f\,''(t)$ ifadeleri sırasıyla,

$$f\,'(t) = \left(\frac{v}{\delta}\right)[1 - f(t)]\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}$$

ve

$$f\,''(t) = \left(\frac{1}{\delta}\right)\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{-1}\left[(v-1) - v\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}\right]f\,'(t)$$

verilir.

Weibull için, tek dönüm noktası, organizma,

$$t_i = \mu + \delta\left(\frac{v-1}{v}\right)^{\frac{1}{v}}$$

zamanında,

$$f(t_i) = \left[1 - e^{-\left(1-\frac{1}{v}\right)}\right]$$

büyümesine ulaştığında gerçekleşir.

Bu gerçek, Genelleştirilmiş Weibull da, $A=1, B=1, k=1$ yerine yazılarak gözlemlenebilir.

2.2.10 Monomoleküler ve Mitscherlich Fonksiyonları

Burada, Brody, Monomoleküler ve Mitscherlich büyüme fonksiyonlarının aynı olduğu, ancak kullanılan isimler ve gösterimlerinin farklı olduğu bilinmelidir.

Dolayısıyla, bu üç fonksiyonun tümü aynı özellikleri ve davranışları sergilemekte ve aynı büyüme modellerini temsil etmektedir.

Monomoleküler büyüme fonksiyonu orijinal gösterimlerinde,

$$w(t) = w_f - \left(w_f - w_0\right)e^{-\lambda t} = w_f\left[1 - \left(1 - \frac{w_0}{w_f}\right)e^{-\lambda t}\right]$$

olarak tanımlanır, ki burada $w(t)$, t zamanındaki büyüme fonksiyonudur, w_f son (olgun) değerdir, $t = 0$ anında $w=w_0$ başlangıç değeridir ve λ büyüme hızı olarak tanımlanmıştır (France ve ark., 1996) .

Bu fonksiyonda, $w = f(t),\ w_f = A,\ w_0 = A_0,\ B = 1 - \frac{w_0}{w},\ \lambda = k$ eşitlikleri yerine yazılarak, Brody fonksiyonu (2.11)

$$f(t) = A(1 - Be^{-kt})$$

elde edilir.

Monomoleküler büyüme fonksiyonu,

$$r_t = \lambda\left({}^{w_f}\!\big/_{w-1} \right)$$

veya

$$r_t = k\left(\frac{A}{f(t)} - 1 \right)$$

nispi büyüme oran fonksiyonu ile ODE (1.1) 'den elde edilebilir.

Böylece, Brody büyüme fonksiyonu ile aynı olan Monomoleküler büyüme fonksiyonu, t'nin herhangi bir değeri için $f''(t)=0$ elde edilemediğinden dolayı bir dönüm noktasına sahip değildir.

Mitscherlich büyüme fonksiyonu orijinal gösterimi,

$$y = \alpha\left[1 - e^{-\beta(t+\varrho)}\right]$$

olarak tanımlanmıştır ki,

y, t zamanındaki büyüme fonksiyonu,

α, nihai (olgun) büyüme,

ϱ, sabit,

β, büyüme oranı, dır (Mombiela ve Nelson, 1981).

Mitscherlich fonksiyonu,

$y = f(t), \alpha = A, \beta = k, B = e^{-k\varrho}$ notasyonları ile (2.11) de verilen Brody fonksiyonu

$$f(t) = A(1 - Be^{-kt})$$

olarak ifade edilir.

Bu fonksiyon, nispi büyüme oran fonksiyonu,

$$r_t = \beta\left(\frac{\alpha - y}{y} \right)$$

veya

$$r_t = k\left(\frac{A}{f(t)} - 1\right)$$

ile ODE (1.1)'den elde edilebilir.

Böylece, Brody büyüme fonksiyonu ile aynı olan Mitscherlich büyüme fonksiyonu, t'nin herhangi bir değeri için $f''(t)=0$ elde edilemediğinden dolayı, bir dönüm noktasına sahip değildir.

3. BULGULAR ve TARTIŞMA

3.1 İncelenen Büyüme Fonksiyonlarının Nispi Büyüme Oran Fonksiyonları, İntegral Sabitleri ve *B* Parametrelerinin Elde Edilişi

Bu bölümde, kullanılan büyüme fonksiyonları incelenerek, onların r_t nispi büyüme oran fonksiyonları, log*C* integral sabitleri ve *B* parametrelerinin elde edilişi gösterilmektedir (Koya ve Goshu, 2013b).

3.1.1 Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonu

Önceki bölüm (2.2.1)'de Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyon (2.7)'de aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$f(t) = A_L + (A - A_L)[1 - Be^{-k(t-\mu)}]^m$$

Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonu, Koya-Goshu fonksiyonunda $v = 1, \delta = 1, m < 0$ olduğundaki özel bir durumudur (bakınız Şekil 2.1).

Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonu için *B* parametresinin bulunuşu, r_t nispi büyüme oran fonksiyonu ve log*C* integral sabitinin elde edilişi aşağıda verilmektedir.

$t = \mu$ için, $f(\mu) = A_\mu$ 'dir.

Buradan, *B* parametresi aşağıdaki gibi bulunur.

$$A_\mu = A_L + (A - A_L)[1 - B]^m$$
$$A_\mu - A_L = (A - A_L)[1 - B]^m$$

$$B = 1 - \left(\frac{A_\mu - A_L}{A - A_L}\right)^{\frac{1}{m}} \tag{3.1}$$

dır.

$$f(t) = A_L + (A - A_L)[1 - Be^{-k(t-\mu)}]^m$$

denklemi düzenlenirse,

$$\left(\frac{f(t) - A_L}{A - A_L}\right)^{1/m} = 1 - Be^{-k(t-\mu)}$$

veya

$$1-\left(\frac{f(t)-A_L}{A-A_L}\right)^{1/m}=Be^{-k(t-\mu)}$$

olarak yeniden yazılabilir.

Ayrıca $f(t)$'nin türevi alınırsa,

$$f'(t)=m(A-A_L)[1-Be^{-k(t-\mu)}]^{m-1}(-Be^{-k(t-\mu)})(-k)$$

$$f'(t)=mk(A-A_L)\left(\frac{f(t)-A_L}{A-A_L}\right)^{1-\frac{1}{m}}\left(1-\left(\frac{f(t)-A_L}{A-A_L}\right)^{1/m}\right)$$

$$f'(t)=mk(f(t)-A_L)\left(\left(\frac{A-A_L}{f(t)-A_L}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right)$$

$$f'(t)=mk\left(\left(\frac{A-A_L}{f(t)-A_L}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right)\left(\frac{f(t)-A_L}{f(t)}\right)f(t)$$

elde edilir.

Bu $f'(t)$ ile $f'(t)=r_t f(t)$ karşılaştırıldığında,

$$r_t=mk\left(\left(\frac{A-A_L}{f(t)-A_L}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right)\left(\frac{f(t)-A_L}{f(t)}\right) \tag{3.2}$$

elde edilir.

Buda Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonu için nispi büyüme oran fonksiyonudur.

$r_t=mk\left(\left(\frac{A-A_L}{f(t)-A_L}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right)\left(\frac{f(t)-A_L}{f(t)}\right)$'yi $f'(t)=r_t f(t)$'de yerine koyalım.

Sonra,

$$f'(t)=mk\left(\left(\frac{A-A_L}{f(t)-A_L}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right)\left(\frac{f(t)-A_L}{f(t)}\right)f(t)$$

$$f'(t) = mk\left(\left(\frac{A-A_L}{f(t)-A_L}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right)(f(t)-A_L)$$

$$f'(t) = mk\left[(A-A_L)^{\frac{1}{m}} - (f(t)-A_L)^{\frac{1}{m}}\right](f(t)-A_L)^{1-\frac{1}{m}}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\left(-\frac{1}{m}\right)(f(t)-A_L)^{\frac{1}{m}-1}}{(A-A_L)^{\frac{1}{m}} - (f(t)-A_L)^{\frac{1}{m}}}\right] df(t) \quad = -kdt$$

$$\Rightarrow \log((A-A_L)^{\frac{1}{m}} - (f(t)-A_L)^{\frac{1}{m}}) = -kt + \log(C)$$

$$\Rightarrow (A-A_L)^{\frac{1}{m}} - (f(t)-A_L)^{\frac{1}{m}} = Ce^{-kt}$$

$$\Rightarrow (f(t)-A_L)^{\frac{1}{m}} = (A-A_L)^{\frac{1}{m}} - Ce^{-kt}$$

$$\Rightarrow (f(t)-A_L)^{\frac{1}{m}} = (A-A_L)^{\frac{1}{m}}\left(1 - \frac{Ce^{-kt}}{(A-A_L)^{\frac{1}{m}}}\right)$$

$$\Rightarrow (f(t)-A_L) = (A-A_L)\left(1 - \frac{Ce^{-kt}}{(A-A_L)^{\frac{1}{m}}}\right)^m$$

eşitliği elde edilir.

Bulduğumuz bu eşitlikte $f(t)$'nin değeri yerine yazılırsa,

$$(A_L + (A-A_L)[1-Be^{-k(t-\mu)}]^m - A_L) = (A-A_L)\left(1 - \frac{Ce^{-kt}}{(A-A_L)^{\frac{1}{m}}}\right)^m$$

$$Be^{-k(t-\mu)} = \frac{Ce^{-kt}}{(A-A_L)^{\frac{1}{m}}}$$

$$\Rightarrow C = (A-A_L)^{\frac{1}{m}} Be^{k\mu}$$

elde edilir.

Böylece, Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonunun integral sabiti,

$$\log C = \log((A - A_L)^{\frac{1}{m}} Be^{k\mu}) \tag{3.3}$$

dır.

3.1.2 Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonunun Özel Durumu

Önceki bölüm (2.2.2)'de Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonunun Özel Durumu (2.8)'de aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$f(t) = A[1 - Be^{-k(t-\mu)}]^m$$

Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonunun Özel Durumu, Genelleştirilmiş Lojistik fonksiyonunda $mk + \alpha = 0,\ A_L = 0$ olduğundaki özel bir halidir (bakınız Şekil 2.1).

Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonunun Özel Durumu için *B* parametresinin bulunuşu, r_t nispi büyüme oran fonksiyonu ve log*C* integral sabitinin elde edilişi aşağıda verilmektedir.

$t = \mu$ için $f(\mu) = A_\mu$ 'dir.

Buradan, *B* parametresi aşağıdaki gibi bulunur.

$$A_\mu = A[1 - B]^m$$

$$B = 1 - \left(\frac{A_\mu}{A}\right)^{\frac{1}{m}} \tag{3.4}$$

dır.

$f(t) = A[1 - Be^{-k(t-\mu)}]^m$ fonksiyonu düzenlenirse,

$$\left(\frac{f(t)}{A}\right)^{1/m} = 1 - Be^{-k(t-\mu)}$$

veya eşdeğer

$$1 - \left(\frac{f(t)}{A}\right)^{1/m} = Be^{-k(t-\mu)}$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Ayrıca, $f(t)$'nin türevi alınırsa,

$$f'(t) = mA[1 - Be^{-k(t-\mu)}]^{m-1}(-Be^{-k(t-\mu)})(-k)$$

$$f'(t) = mkA\left(\frac{f(t)}{A}\right)^{1-\frac{1}{m}}\left(1-\left(\frac{f(t)}{A}\right)^{1/m}\right)$$

$$f'(t) = mk\left(\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right) f(t)$$

elde edilir.

$f'(t) = r_t f(t)$ ile bu $f'(t)$ karşılaştırmasında,

$$r_t = mk\left(\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right) \tag{3.5}$$

olarak alınır.

Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonunun Özel Durumunun nispi büyüme oran fonksiyonudur.

$r_t = mk\left(\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right)$'yi $f'(t) = r_t f(t)$'de yerine koyalım.

$$f'(t) = mk\left(\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right) f(t)$$

$$f'(t) = mk\left[(A)^{\frac{1}{m}} - (f(t))^{\frac{1}{m}}\right](f(t))^{1-\frac{1}{m}}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\left(-\frac{1}{m}\right)(f(t))^{\frac{1}{m}-1}}{(A)^{\frac{1}{m}} - (f(t))^{\frac{1}{m}}}\right] df(t) \quad = -kdt$$

$$\Rightarrow \log((A)^{\frac{1}{m}} - (f(t))^{\frac{1}{m}}) = -kt + \log(C)$$

$$\Rightarrow (A)^{\frac{1}{m}} - (f(t))^{\frac{1}{m}} = Ce^{-kt}$$
$$\Rightarrow (f(t))^{\frac{1}{m}} = (A)^{\frac{1}{m}} - Ce^{-kt}$$

eşitliği elde edilir.

Bulduğumuz bu eşitlikte $f(t)$ ’nin değeri yerine yazılırsa,

$$Be^{-k(t-\mu)} = \frac{Ce^{-kt}}{A^{\frac{1}{m}}}$$
$$\Rightarrow C = A^{\frac{1}{m}} Be^{k\mu}$$

elde edilir.

Böylece, Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonunun Özel Durumunun İntegral Sabiti;

$$\log(A^{\frac{1}{m}} Be^{k\mu}) \qquad (3.6)$$

dir.

3.1.3 Richards Fonksiyonu

Önceki bölüm (2.2.3)’te Richard Foksiyonu (2.9)’da aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$f(t) = A(1 - Be^{-kt})^m$$

Genelleştirilmiş Lojistik fonksiyonu, Koya-Goshu fonksiyonunda $v = 1,\ \delta = 1,\ m < 0,\ \mu = 0,\ A_L = 0$ olduğundaki özel bir halidir (bakınız şekil 2.1).

Richards fonksiyonu için B parametresinin bulunuşu, r_t nispi büyüme oran fonksiyonu ve log$C$ integral sabitinin elde edilişi aşağıda verilmektedir.

$t = 0$ için, A_0 'ın başlangıç değeri olan $f(0) = A_0$ ’dır.

Bundan sonra B parametresini bulabiliriz.

$$A_0 = A[1 - B]^m$$

$$B = 1 - \left(\frac{A_0}{A}\right)^{\frac{1}{m}} \qquad (3.7)$$

dır.

$$f(t) = A(1 - Be^{-kt})^m$$

düzenlenirse,

$$\left(\frac{f(t)}{A}\right)^{1/m} = 1 - Be^{-kt}$$

veya

$$1 - \left(\frac{f(t)}{A}\right)^{1/m} = Be^{-kt}$$

şeklinde yeniden yazabiliriz.

Ayrıca, $f(t)$'nin türevi alınırsa,

$$f'(t) = mA[1 - Be^{-kt}]^{m-1}(-Be^{-kt})(-k)$$
$$f'(t) = mkABe^{-kt}[1 - Be^{-kt}]^{m-1}$$
$$f'(t) = mkABe^{-kt}\frac{[1 - Be^{-kt}]^m}{1 - Be^{-kt}}$$
$$f'(t) = mkBe^{-kt}\frac{f(t)}{1 - Be^{-kt}}$$

elde edilir.

$f'(t) = r_t f(t)$ olduğundan,

$$r_t = \frac{mBke^{-kt}}{1 - Be^{-kt}} = mk\left(\frac{Be^{-kt}}{1 - Be^{-kt}}\right) = mk\left(\frac{1 - \left(\frac{f(t)}{A}\right)^{1/m}}{\left(\frac{f(t)}{A}\right)^{1/m}}\right)$$

$$r_t = mk\left(\frac{A^{1/m} - (f(t))^{1/m}}{(f(t))^{1/m}}\right)$$

$$r_t = mk\left(\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right) \qquad (3.8)$$

elde edilir.

r_t, Richards modelinin nispi büyüme oran fonksiyonudur.

$r_t = mk\left(\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right)$'yi $f'(t) = r_t f(t)'$ de yerine yazalım.

Buradan,

$$f'(t) = mk\left(\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right) f(t)$$

$$f'(t) = mk\left[A^{\frac{1}{m}} - (f(t))^{\frac{1}{m}}\right](f(t))^{1-\frac{1}{m}}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\left(-\frac{1}{m}\right)(f(t))^{\frac{1}{m}-1}}{A^{\frac{1}{m}} - (f(t))^{\frac{1}{m}}}\right] df(t) \quad = -kdt$$

$$\Rightarrow \log(A^{\frac{1}{m}} - (f(t))^{\frac{1}{m}}) = -kt + \log(C)$$

$$\Rightarrow A^{\frac{1}{m}} - (f(t))^{\frac{1}{m}} = Ce^{-kt}$$

$$\Rightarrow (f(t))^{\frac{1}{m}} = (A)^{\frac{1}{m}} - Ce^{-kt}$$

$$\Rightarrow (f(t))^{\frac{1}{m}} = A^{\frac{1}{m}}\left(1 - \frac{Ce^{-kt}}{A^{\frac{1}{m}}}\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = A\left(1 - \frac{Ce^{-kt}}{A^{\frac{1}{m}}}\right)^m$$

elde edilir.

$f(t)$'nin değeri yerine yazılırsa,

$$A[1 - Be^{-kt}]^m = A\left(1 - \frac{Ce^{-kt}}{A^{\frac{1}{m}}}\right)^m$$

$$B = \frac{C}{A^{\frac{1}{m}}}$$

$$\Rightarrow C = A^{\frac{1}{m}} B$$

şeklinde alabiliriz.

Böylece Richards Fonksiyonunun İntegral Sabiti,

$$\log(A^{\frac{1}{m}}B) \tag{3.9}$$

dir.

3.1.4 Von Bertalanffy Fonksiyonu

Önceki bölüm (2.2.4)'te Von Bertalanffy Foksiyonu (2.10)'da aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$f(t) = A(1 - Be^{-kt})^3$$

Von Bertalanffy fonksiyonu, Richards fonksiyonununda m = 3 olduğundaki özel bir halidir (bakınız Şekil 2.1).

Von Bertalanffy Fonksiyonu için B parametresinin bulunuşu, r_t nispi büyüme oran fonksiyonu ve log$C$ integral sabitinin elde edilişi aşağıda verilmektedir.

t=0 için, A_0'nın başlangıç değeri olan $f(0) = A_0$ dır.

Bundan sonra B parametresini bulabiliriz:

$$A_0 = A[1 - B]^3$$

$$B = 1 - \left(\frac{A_0}{A}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{3.10}$$

dır.

$f(t) = A(1 - Be^{-kt})^3$ fonksiyonu düzenlenirse,

$$\left(\frac{f(t)}{A}\right)^{1/3} = 1 - Be^{-kt}$$

ve

$$1 - \left(\frac{f(t)}{A}\right)^{1/3} = Be^{-kt}$$

olarak yeniden yazılabilir.

Ayrıca, $f(t)$'nin türevi alınırsa,

$$f'(t) = 3A[1 - Be^{-kt}]^2(-Be^{-kt})(-k)$$
$$f'(t) = 3kABe^{-kt}[1 - Be^{-kt}]^2$$
$$f'(t) = 3kABe^{-kt}\frac{[1 - Be^{-kt}]^3}{1 - Be^{-kt}}$$
$$f'(t) = 3kB\,e^{-kt}\frac{f(t)}{1 - Be^{-kt}}$$

dir.

$f'(t) = r_t f(t)$ olduğundan,

$$r_t = \frac{3Bke^{-kt}}{1 - Be^{-kt}} = 3k\left(\frac{Be^{-kt}}{1 - Be^{-kt}}\right) = 3k\left(\frac{1 - \left(\frac{f(t)}{A}\right)^{1/3}}{\left(\frac{f(t)}{A}\right)^{1/3}}\right)$$

$$r_t = 3k\left(\frac{A^{1/3} - \left(f(t)\right)^{1/3}}{\left(f(t)\right)^{1/3}}\right)$$

$$r_t = 3k\left(\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right) \qquad (3.11)$$

elde edilir.

r_t, Von Bertalanffy Modelinin nispi büyüme oran fonksiyonudur.

$r_t = 3k\left(\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right)$ 'yi $f'(t) = r_t f(t)$ ' de yerine yazarsak,

$$f'(t) = 3k\left(\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right)f(t)$$
$$f'(t) = 3k\left[A^{\frac{1}{3}} - (f(t))^{\frac{1}{3}}\right](f(t))^{1-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)(f(t))^{-2/3}}{A^{\frac{1}{3}}-(f(t))^{\frac{1}{3}}}\right] df(t) \quad = -kdt$$

$$\Rightarrow \log(A^{\frac{1}{3}}-(f(t))^{\frac{1}{3}}) = -kt + \log(C)$$

$$\Rightarrow A^{\frac{1}{3}}-(f(t))^{\frac{1}{3}} = Ce^{-kt}$$

$$\Rightarrow (f(t))^{\frac{1}{3}} = (A)^{\frac{1}{3}} - Ce^{-kt}$$

$$\Rightarrow (f(t))^{\frac{1}{3}} = A^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{Ce^{-kt}}{A^{\frac{1}{3}}}\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = A\left(1-\frac{Ce^{-kt}}{A^{\frac{1}{3}}}\right)^{3}$$

olur.

$f(t)$'nin değeri yerine yazılırsa,

$$A[1-Be^{-kt}]^{3} = A\left(1-\frac{Ce^{-kt}}{A^{\frac{1}{3}}}\right)^{3}$$

$$B = \frac{C}{A^{\frac{1}{3}}}$$

$$\Rightarrow C = A^{\frac{1}{3}}B$$

şeklinde elde edilir.

Von Bertalanffy büyüme modelinin integral sabiti :

$$\log(A^{\frac{1}{3}}B) \tag{3.12}$$

dir.

3.1.5 Brody Fonsiyonu

Önceki bölüm (2.2.5)’te Brody Fonksiyonu Foksiyonu (2.11)’de aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$f(t) = A(1-Be^{-kt})$$

Brody fonksiyonu, Richards fonksiyonununda m=-1 olduğunda ki özel bir halidir (bakınız Şekil 2.1).

Brody Fonksiyonu için B parametresinin bulunuşu, r_t nispi büyüme oran fonksiyonu ve log$C$ integral sabitinin elde edilişi aşağıda verilmektedir.

$t = 0$ için, A_0'ın başlangıç değeri $f(0) = A_0$ dır.

Bundan sonra B parametresini bulabiliriz.

$$A_0 = A[1 - B]$$

$$B = 1 - \left(\frac{A_0}{A}\right) \tag{3.13}$$

dır.

$f(t) = A(1 - Be^{-kt})$ düzenlenirse,

$$\left(\frac{f(t)}{A}\right) = 1 - Be^{-kt}$$

veya

$1 - \left(\frac{f(t)}{A}\right) = Be^{-kt}$ olarak yeniden yazılabilir.

Ayrıca, $f(t)$'nin türevi alınırsa,

$$f'(t) = A(-Be^{-kt})(-k)$$

$$f'(t) = Ak\left(1 - \frac{f(t)}{A}\right)$$

$$f'(t) = Ak\left(\frac{A - f(t)}{A}\right)$$

$$f'(t) = k\left(A - f(t)\right)$$

$$f'(t) = k\left(\frac{A}{f(t)} - 1\right) f(t)$$

elde edilir. $f'(t) = r_t f(t)$ olduğundan,

$$r_t = k\left(\left(\frac{A}{f(t)}\right)-1\right) \tag{3.14}$$

dir.

r_t, Brody modelinin nispi büyüme oran fonksiyonudur.

$r_t = k\left(\left(\frac{A}{f(t)}\right)-1\right)$’yi $f'(t) = r_t f(t)$’de yerine koyarsak,

$$f'(t) = k\left(\left(\frac{A}{f(t)}\right)-1\right) f(t)$$

$$f'(t) = k\left[A - f(t)\right]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{-1}{A - f(t)}\right] df(t) \quad = -kdt$$

$$\Rightarrow \log(A - f(t)) = -kt + \log(C)$$

$$\Rightarrow A - f(t) = Ce^{-kt}$$

$$\Rightarrow f(t) = A - Ce^{-kt}$$

$f(t)$'nin değeri yerine yazılırsa,

$$A(1 - Be^{-kt}) = A - Ce^{-kt}$$

$$A(1 - Be^{-kt}) = A\left(1 - \frac{C}{A}e^{-kt}\right)$$

$$B = \frac{C}{A}$$

$$\Rightarrow C = AB$$

elde edilir.

Brody Büyüme Fonksiyonu'nun İntegral Sabiti:

$$\log AB \tag{3.15}$$

dir.

3.1.6 Lojistik Fonksiyonu

Önceki bölüm (2.2.6)’da Klasik Lojistik Fonksiyonu (2.12)’de aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$f(t)=\frac{A}{1-Be^{-kt}}$$

Klasik Lojistik fonksiyonu, Richards fonksiyonunda *m*=-1 olduğunda ve Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonunun Özel Durumundaki modelde μ= 0, *m* =-1 olduğunda ki özel bir halidir (bakınız Şekil 2.1'de verilmiştir).

Lojistik Fonksiyonu için *B* parametresinin bulunuşu, r_t nispi büyüme oran fonksiyonu ve log*C* integral sabitinin elde edilişi aşağıda verilmektedir.

t = 0 için, A_0'ın başlangıç değeri $f(0)=A_0$ dır.

Bundan dolayı *B* parametresini bulabiliriz.

$$A_0=\left(\frac{A}{1-B}\right)$$

$$1-B=\frac{A}{A_0}$$

$$B=1-\frac{A}{A_0} \tag{3.16}$$

dir.

$f(t)=\frac{A}{1-Be^{-kt}}$ düzenlenirse,

$$\left(\frac{A}{f(t)}\right)=1-Be^{-kt}$$

veya

$$1-\frac{A}{f(t)}=Be^{-kt}$$

olarak yeniden yazılabilir.

Ayrıca, $f(t)$'nin türevi alınırsa,

$$f'(t)=-A(1-Be^{-kt})^{-2}(kBe^{-kt})$$

elde edilir.

$f'(t) = r_t f(t)$ olduğundan

$$r_t = \frac{-ABke^{-kt}}{(1-Be^{-kt})^2}\frac{(1-Be^{-kt})}{A} = k\left(\frac{-Be^{-kt}}{1-Be^{-kt}}\right) = k\left(\frac{\left(\frac{A}{f(t)}\right)-1}{\left(\frac{A}{f(t)}\right)}\right)$$

$$r_t = k\left(\frac{A-f(t)}{A}\right) = k\left(1-\left(\frac{f(t)}{A}\right)\right)$$

$$r_t = k\left(1-\frac{f(t)}{A}\right) \tag{3.17}$$

dir.

Bu r_t, Klasik Lojistik Fonksiyonunun nispi büyüme oran fonksiyonudur.

$r_t = k\left(1-\frac{f(t)}{A}\right)$'yi $f'(t) = r_t f(t)$

ifadesinde yerine yazalım.

$$f'(t) = k\left(1-\frac{f(t)}{A}\right)f(t)$$

$$f'(t) = k\left(\frac{A-f(t)}{A}\right)f(t)$$

Kısmi integrasyon kullanılırsa,

$$\Rightarrow \left[\frac{-A}{(A-f(t))f(t)}\right] df(t) \quad = -kdt$$

$$\Rightarrow \left[\frac{-1}{A-f(t)} - \frac{1}{f(t)}\right] df(t) \quad = -kdt$$

$$\Rightarrow \log\left[\frac{A-f(t)}{f(t)}\right] = -kt + \log(C)$$

$$\Rightarrow \frac{A-f(t)}{f(t)} = Ce^{-kt}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{A}{Ce^{-kt}+1}$$

ifadesi elde edilir.

$f(t)$ değeri yerine yazılırsa,

$$\frac{A}{1-Be^{-kt}}=\frac{A}{Ce^{-kt}+1}$$ olduğundan,

C=-B elde edilir.

Böylece, Klasik Lojistik Fonksiyonun İntegral Sabiti:

$$\log(-B) \tag{3.18}$$

dir.

3.1.7 Gompertz Fonksiyonu

Önceki bölüm (2.2.7)'de Gompertz fonksiyonu (2.13)'te aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$f(t)=Ae^{-Be^{-kt}}$$

Gompertz Modeli, Richards fonksiyonunun $m\to\infty$ olduğundaki ve Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonun Özel Durumunun $\mu=0,\ m\to-\infty$ olduğundaki özel bir halidir (bakınız Şekil 2.1).

Gompertz Fonksiyonu için B parametresinin bulunuşu, r_t nispi büyüme oran fonksiyonu ve log$C$ integral sabitinin elde edilişi aşağıda verilmektedir.

t=0 olduğunda, A_0 'ın başlangıç değeri $f(0)=A_0$ dır.

Bundan dolayı B parametresini bulabiliriz.

$$A_0=Ae^{-B}$$

$$B=\log\left(\frac{A}{A_0}\right) \tag{3.19}$$

dir.

$f(t)=Ae^{-Be^{-kt}}$ düzenlenirse,

$$\log A-\log f(t)=Be^{-kt}$$

yada

$$\log\left(\frac{A}{f(t)}\right) = Be^{-kt}$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Ayrıca, *f (t)* 'nin türevi alınırsa,

$$f'(t) = ABk\exp(-kt)e^{-B\exp(-kt)}$$

ifadesi elde edilir.

$f'(t) = r_t f(t)$ olduğundan,

$$[Bk\exp(-kt)e^{-B\exp(-kt)}] = [r_t e^{-B\exp(-kt)}]$$

$$\Rightarrow r_t = [Bk\exp(-kt)] = [k(B\exp(-kt))] = [k\log\left(\frac{A}{f(t)}\right)]$$

Böylece,

$$r_t = k\log\left(\frac{A}{f(t)}\right) \tag{3.20}$$

elde edilir.

Bu r_t, Gompertz Fonksiyonunun nispi büyüme oran fonksiyonudur.

$r_t = k\log\left(\frac{A}{f(t)}\right)$'yi $f'(t) = r_t f(t)$ ifadesinde yerine yazalım.

O zaman,

$$f'(t) = k\log\left(\frac{A}{f(t)}\right) f(t)$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{f(t)\log\left(\frac{A}{f(t)}\right)}\right] df(t) \quad = -kdt$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\left(\frac{-A}{(f(t))^2}\right)}{\left(\frac{A}{f(t)}\right)\log\left(\frac{A}{f(t)}\right)}\right] df(t) \quad = -kdt$$

$$\Rightarrow \log\left(\log\left(\frac{A}{f(t)}\right)\right) = -kt + \log C$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{A}{f(t)}\right) = Ce^{-kt}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{f(t)} = e^{Ce^{-kt}}$$

elde edilir.

Eğer $f(t)$'nin değeri yerine yazılırsa,

$$\frac{A}{Ae^{-Be^{-kt}}} = e^{Ce^{-kt}}$$

$$\Rightarrow C = B$$

elde edilir.

Böylece, Gompertz Fonksiyonunun İntegral sabiti:

$$\log B \qquad (3.21)$$

olur.

3.1.8 Genelleştirilmiş Weibull Fonksiyonu

Önceki bölüm (2.2.8)'de Genelleştirilmiş Weibull Fonksiyonu (2.14)'te aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$f(t) = A\left[1 - Be^{-k\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}}\right]$$

Genelleştirilmiş Weibull Fonksiyonu, Koya-Goshu fonksiyonunun $m = 1,\ A_L = 0$ olduğundaki özel bir halidir (bakınız Şekil 2.1).

Genelleştirilmiş Weibull Fonksiyonu için B parametresinin bulunuşu, r_t nispi büyüme oran fonksiyonu ve log$C$ integral sabitinin elde edilişi aşağıda verilmektedir.

$t = \mu$ için $f(\mu) = A_\mu$'dir.

Buradan, B parametresi aşağıdaki gibi bulunur.

$$A(1-B) = A_\mu$$

$$B = 1 - \frac{A_\mu}{A} \tag{3.22}$$

dır.

$f(t) = A\left[1 - Be^{-k\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^v}\right]$ fonksiyonu düzenlenirse,

$$1 - \frac{f(t)}{A} = Be^{-k\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^v}$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Ayrıca, $f(t)$ 'nin türevi alınırsa,

$$f'(t) = -A\left(Be^{-k\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^v}\right)\left(-kv\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v-1}\right)\left(\frac{1}{\delta}\right)$$

$$f'(t) = \left(\frac{Akv}{\delta}\right)\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v-1}\left(1 - \frac{f(t)}{A}\right)$$

$$f'(t) = \left(\frac{kv}{\delta}\right)\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v-1}\left(\frac{A}{f(t)} - 1\right)f(t)$$

elde edilir.

$$f'(t) = r_t f(t)$$

olduğundan,

$$r_t = \left(\frac{kv}{\delta}\right)\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v-1}\left(\frac{A}{f(t)} - 1\right) \tag{3.23}$$

dir.

r_t , Genelleştirilmiş Weibull Fonksiyonunun nispi büyüme oran fonksiyonudur.

$r_t = \left(\frac{kv}{\delta}\right)\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v-1}\left(\frac{A}{f(t)} - 1\right)$ ifadesini $f'(t) = r_t f(t)$ eşitliğinde yerine yazalım,

$$\frac{df(t)}{dt} = \left(\frac{kv}{\delta}\right)\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v-1}\left(A - f(t)\right)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{-1}{A-f(t)}\right] df(t) \quad = \left(\frac{-kv}{\delta}\right)\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v-1} dt$$

$$\Rightarrow \log(A-f(t)) = -k\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v} + \log C$$

$$\Rightarrow \frac{A-f(t)}{C} = e^{-k\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}}$$

olur.

$f(t)$ yerine yazılırsa,

$$\Rightarrow \frac{A-A\left(1-Be^{-k\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}}\right)}{C} = e^{-k\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}}$$

$$\Rightarrow C = AB$$

elde edilir.

Genelleştirilmiş Weibull Fonksiyonunun İntegral Sabiti,

$\log AB$ (3.24)

olur.

3.1.9 Weibull Fonksiyonu

Önceki bölüm (2.2.9)'da Weibull fonksiyonu (2.15)'te aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$f(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}}$$

Weibull Fonksiyonu, Genelleştirilmiş Weibull Fonksiyonunda A=1, B=1, k=1 olduğundaki özel bir durumudur (bakınız Şekil 2.1).

Weibull Fonksiyonu için B parametresinin bulunuşu, r_t nispi büyüme oran fonksiyonu ve log$C$ integral sabitinin elde edilişi aşağıda verilmektedir.

Weibull Fonksiyonu, Genelleştirilmiş Weibull Fonksiyonunda A=1, B=1, k=1 olduğundaki özel bir durumu olduğundan,

B=1 (3.25)

dir.

$f(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}}$ düzenlenirse,

$$[1 - f(t)] = \left(e^{-\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}} \right)$$

olarak yeniden yazılabilir.

Ayrıca, *f (t)*'nin türevi alınırsa,

$f'(t) = r_t f(t)$ olduğundan,

$$f'(t) = -\left(e^{-\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}} \right)(-v)\left(\left(\frac{t-\mu}{\delta} \right)^{v-1} \right)\left(\frac{1}{\delta} \right)$$

$$f'(t) = \left[\left(\frac{v}{\delta} \right)\left(\frac{t-\mu}{\delta} \right)^{v-1} e^{-(\frac{t-\mu}{\delta})^{v}} \right]$$

$$f'(t) = \left\{ \frac{v}{\delta}\left(\frac{t-\mu}{\delta} \right)^{v-1} [1 - f(t)] \right\}$$

$$f'(t) = \left\{ \frac{v}{\delta}\left(\frac{t-\mu}{\delta} \right)^{v-1} \left[\frac{1 - f(t)}{f(t)} \right] f(t) \right\}$$

elde edilir.

$$r_t = \left(\frac{v}{\delta} \right)\left(\frac{t-\mu}{\delta} \right)^{v-1} \left(\frac{1}{f(t)} - 1 \right) \tag{3.26}$$

dir.

Bu r_t, Weibull Fonksiyonu için nispi büyüme oran fonksiyonudur.

$r_t = \left(\frac{v}{\delta} \right)\left(\frac{t-\mu}{\delta} \right)^{v-1} \left(\frac{1}{f(t)} - 1 \right)$ ifadesini $f'(t) = r_t f(t)$ eşitliğinde yerine koyarsak,

$$\frac{df(t)}{dt} = \left(\frac{v}{\delta} \right)\left(\frac{t-\mu}{\delta} \right)^{v-1} \left[\frac{1 - f(t)}{f(t)} \right] \left(f(t) \right)$$

ya da

$$\frac{df(t)}{dt}=\left(\frac{v}{\delta}\right)\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v-1}\left[1-f(t)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{df(t)}{1-f(t)}=\left(\frac{v}{\delta}\right)\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v-1}dt$$

$$\Rightarrow \frac{(-1)df(t)}{1-f(t)}=-\left[\frac{v}{\delta}\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v-1}\right]dt$$

$$\Rightarrow \log\left[1-f(t)\right]=-\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}$$

$$\Rightarrow 1-f(t)=e^{-\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}}$$

$$\Rightarrow f(t)=1-e^{-\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}}$$

Bu Weibull Fonksiyonu elde edilir. Bu durumda, İntegral Sabiti 0 alınır.

Yukarıda incelenen büyüme fonksiyonları, ilgili nispi büyüme oran fonksiyonları, *B* parametreleri, integral sabitleri ve dönüm noktaları ile birlikte Çizelge 3.1’de gösterilmiştir.

Çizelge 3.1 Büyüme Fonksiyonlarının Nispi Büyüme Oran Fonksiyonları, *B* Parametreleri, İntegral Sabitleri ve Dönüm Noktalarının Gösterildiği Liste

Model Adı	Büyüme Fonksiyonu $f(t)$	Nispi Büyüme Oran Fonksiyonu (r_t)	B Parametresi	İntegral Sabiti ($\log C$)	Dönüm Noktası (t_i)
Koya-Goshu	$A_L+(A-A_L)\left[1-Be^{-k([t-\mu]/\delta)^{v}}\right]^{m}$	$\frac{mkv}{\delta}\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v-1}\left[\left(\frac{A-A_L}{f(t)-A_L}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right]\left[1-\frac{A_L}{f(t)}\right]$	$1-\left(\frac{A_\mu-A_L}{A-A_L}\right)^{1/m}$	$\log\left[(A-A_L)^{\frac{1}{m}}B\right]$	$\approx\mu+\delta\left[\frac{1-B}{2(m-1)Bk}\right]^{\frac{1}{v}}\left[(1-mB)\pm\sqrt{(mB-1)^{2}-4B(m-1)\left(1-\frac{1}{v}\right)}\right]^{1/v}$
Genelleştirilmiş Lojistik	$A_L+(A-A_L)\left[1-Be^{-k(t-\mu)}\right]^{m}$	$mk\left[\left(\frac{A_\mu-A_L}{A-A_L}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right]\left[\frac{f(t)-A_L}{f(t)}\right]$	$1-\left(\frac{A_\mu-A_L}{A-A_L}\right)^{\frac{1}{m}}$	$\log((A-A_L)^{\frac{1}{m}}Be^{k\mu})$	$\mu+\frac{1}{k}\log\left\{m\left[1-\left(\frac{A_\mu-A_L}{A-A_L}\right)^{\frac{1}{m}}\right]\right\}$
Genelleştirilmiş Lojistiğin Özel Durumu	$A\left[1-Be^{-k(t-\mu)}\right]^{m}$	$mk\left[\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right]\left[\frac{f(t)-A_L}{f(t)}\right]$	$1-\left(\frac{A_\mu}{A}\right)^{\frac{1}{m}}$	$\log(A^{\frac{1}{m}}Be^{k\mu})$	$\mu+\frac{1}{k}\log\left\{m\left[1-\left(\frac{A_\mu}{A}\right)^{\frac{1}{m}}\right]\right\}$
Richards	$A\left(1-Be^{-kt}\right)^{m}$	$mk\left[\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{1/m}-1\right]$	$1-\left(\frac{A_0}{A}\right)^{\frac{1}{m}}$	$\log\left(A^{\frac{1}{m}}B\right)$	$\left(\frac{1}{k}\right)\log\left\{m\left[1-\left(\frac{A_0}{A}\right)^{\frac{1}{m}}\right]\right\}$
Von Bertalanffy	$A\left(1-Be^{-kt}\right)^{3}$	$3k\left[\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{1/3}-1\right]$	$1-\left(\frac{A_0}{A}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\log\left(A^{\frac{1}{3}}B\right)$	$\left(\frac{1}{k}\right)\log\left\{3\left[1-\left(\frac{A_0}{A}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\right\}$
Brody	$A\left(1-Be^{-kt}\right)$	$k\left[\left(\frac{A}{f(t)}\right)-1\right]$	$1-\frac{A_0}{A}$	$\log(AB)$	-
Lojistik	$\frac{A}{1-Be^{-kt}}$	$k\left(\frac{A-f(t)}{A}\right)$	$\left(1-\frac{A}{A_0}\right)$	$\log(-B)$	$\left(\frac{1}{k}\right)\log\left(\frac{A}{A_0}-1\right)$
Gompertz	$Ae^{-B\exp(-kt)}$	$k\log\left(\frac{A}{f(t)}\right)$	$\log\left(\frac{A}{A_0}\right)$	$\log B$	$\left(\frac{1}{k}\right)\log\left\{\log\left(\frac{A}{A_0}\right)\right\}$
Genelleştirilmiş Weibull	$A\left[1-Be^{-k\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}}\right]$	$\left(\frac{k}{\delta}\right)\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{-1}\left[\frac{A}{f(t)}-1\right]$	$1-\frac{A_\mu}{A}$	$\log(AB)$	$\mu+\delta\left(\frac{v-1}{kv}\right)^{\frac{1}{v}}$
Weibull	$1-e^{-\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{v}}$	$\left(\frac{k}{\delta}\right)\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)^{-1}\left[\frac{1}{f(t)}-1\right]$	1	0	$\mu+\delta\left(\frac{v-1}{v}\right)^{\frac{1}{v}}$

3.2 Diğer İlişkiler

Bu bölümde, Bölüm 3.1'de belirtilen modeller arasındaki ilişkilerin dışında, bazı modeller arasındaki daha fazla ilişki gösterilir.

3.2.1 Richards ve Lojistik Büyüme Fonksiyonları Arasındaki İlişki

Şimdi, Richards ve Lojistik Büyüme Fonksiyonlarının nasıl bir ilişki içinde olduğunu gösterelim. Richards Büyüme fonksiyonunu (2.9) kullanarak, Lojistik Büyüme fonksiyonunu (2.12) aşağıdaki gibi türetebiliriz (Koya ve Goshu, 2013a):

$\left[Richards\ f(t)\right] = \left[A\left(1-Be^{-kt}\right)^{m}\right],\ B = 1-\left(\frac{A_0}{A}\right)^{\frac{1}{m}}$ ve m=-1 olmak üzere,

$$= A\left[1-\left(1-\left(\frac{A_0}{A}\right)^{\frac{1}{m}}\right)e^{-kt}\right]^{m} \tag{3.27}$$

$$= A\left[1-\left(1-\left(\frac{A_0}{A}\right)^{-1}\right)e^{-kt}\right]^{-1}$$

$$= A\left[1-\left(1-\left(\frac{A}{A_0}\right)\right)e^{-kt}\right]^{-1} \tag{3.28}$$

$$= A\left[1-Be^{-kt}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{A}{1-Be^{-kt}}\right]$$

ki burada $B = 1-\frac{A}{A_0}$ dır.

Bu nedenle, Richards büyüme fonksiyonunda m=-1 ile Lojistik Fonksiyonu elde edilir.

3.2.2 Richards ve Gompertz Büyüme Fonksiyonları Arasındaki İlişki

Şimdi, Gompertz Büyüme Fonksiyonu'nun Richards Büyüme Fonksiyonu ile nasıl ilişkili olduğunu gösterelim. Diğer bir deyişle, $m \to \infty$ iken Richards Büyüme Fonksiyonu'nun nispi büyüme oran fonksiyonu, Gompertz Büyüme Fonksiyonunun nispi büyüme oran fonksiyonuna götürür (Koya ve Goshu, 2013a).

Gompertz ve Richards'ın Büyüme Fonksiyonlarının nispi büyüme oran fonksiyonu sırasıyla,

$$r_t = k\log\left(\frac{A}{f(t)}\right)$$

ve

$$r_t = mk\left[\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right]$$

ile verilir.

Richards Fonsiyonunun nispi büyüme oran fonksiyonu r_t'de, $m \to \infty$ iken limit uygulayarak, şunlar elde edilir.

$$\lim_{m\to\infty}\left[Richardsr_t\right]$$
$$= \lim_{m\to\infty}\left\{mk\left[\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right]\right\} \tag{3.29}$$
$$= \lim_{m\to\infty}\left\{k\left[\frac{\exp\left(\frac{1}{m}\log\frac{A}{f(t)}\right) - 1}{\left(\frac{1}{m}\right)}\right]\right\}$$

Burada son ifade, basit bir cebirsel düzenleme ile elde edilir.

Bu ifadede, limitin değerlendirilmesi $\left(\frac{0}{0}\right)$'a yol açar ve bunun önüne geçmek için L-Hospital kuralı uygulayarak,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\left[Richards\, r_t\right] \\
&= \lim_{m\to\infty} k \left[\frac{\exp\left(\frac{1}{m}\log\frac{A}{f(t)}\right).\left(-\frac{1}{m^2}\right).\log\frac{A}{f(t)}}{\left(-\frac{1}{m^2}\right)} \right] \\
&= \lim_{m\to\infty} k \left[\exp\left(\frac{1}{m}\log\frac{A}{f(t)}\right)\log\frac{A}{f(t)} \right] \\
&= k\log\left(\frac{A}{f(t)}\right) \\
&= \left[Gompertz\, r_t\right]
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

şeklinde elde edilir.

Böylece, $m \to \infty$ iken Richards nispi büyüme oran fonksiyonunun limit değeri, Gompertz nispi büyüme oran fonksiyonuna indirgenir ve dolayısıyla bu iki fonksiyon ilişkilidir.

3.2.3 Gompertz ve Genelleştirilmiş Lojistik Büyüme Fonksiyonunun Özel Durumu Arasındaki İlişki

Şimdi, Gompertz'in Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonunun Özel Durumu ile nasıl ilişkili olduğunu, yani Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonunun Özel Durumu'nun nispi büyüme oran fonksiyonunun, yukarıda gösterildiği gibi Gompertz'in nispi büyüme oran fonksiyonuna yol açtığını gösterelim (Koya ve Goshu, 2013a).

Gompertz ve Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonunun Özel Durumunun nispi büyüme oran fonksiyonları sırasıyla,

$$r_t = k\log\left(\frac{A}{f(t)}\right)$$

ve

$$r_t = mk\left[\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right]$$

ile verilir. Burada $m<0$'dır.

Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonunun özel durumunun nispi büyüme oran fonksiyonu r_t üzerinde $m \to -\infty$ iken limit uygulayarak aşağıdakiler elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{m\to-\infty}\left[Gen\,Log\,Özel\,Durumu\,r_t\right]\\
&=\lim_{m\to-\infty}\left\{mk\left[\left(\frac{A}{f(\mathrm{t})}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right]\right\}\\
&=\lim_{m\to\infty}\left\{k\left[\frac{\exp\left(\frac{1}{m}\log\frac{A}{f(t)}\right)-1}{\left(\frac{1}{m}\right)}\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Burada son ifade, ters fonksiyonlar yani Logaritmik ve Üstel fonksiyonlar kullanıldıktan sonra basit cebirsel düzenlemeler ile elde edilir. Bu ifadede, limitin değerlendirilmesi $\left(\frac{0}{0}\right)$'a yol açar ve bunun önüne geçmek için L-Hospital kuralı uygulayarak,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{m\to-\infty}\left[Gen\,Log\,Özel\,Durumu\,r_t\right]\\
&=\lim_{m\to-\infty}k\left[\frac{\exp\left\{\frac{1}{m}\log\frac{A}{f(t)}\right\}\left(-\frac{1}{m^2}\right)\log\frac{A}{f(t)}}{\left(-\frac{1}{m^2}\right)}\right]\\
&=\lim_{m\to-\infty}k\left[\exp\left(\frac{1}{m}\log\frac{A}{f(t)}\right)\log\frac{A}{f(t)}\right]\\
&=k\log\left(\frac{A}{f(t)}\right)\\
&=\left[Gompertz\,r_t\right]
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

elde edilir.

Böylece, $m\to-\infty$ iken Genelleştirilmiş Lojistik Fonksiyonunun Özel Durumu'nun nispi büyüme oran fonksiyonu, Gompertz Fonksiyonu'nun nispi büyüme oran fonksiyonuna indirgenir ve dolayısıyla bu iki fonksiyon birbiriyle ilişkilidir.

3.2.4 Brody ve Gompertz Fonksiyonları Arasındaki İlişki

Akış şemasında parametreleri uygun bir şekilde ayarlayarak büyüme fonksiyonları arasındaki ilişkileri gösterdik.

Ancak, Gompertz ve Brody fonksiyonları, zaman koordinatının bir dönüşümü ile ilişkilendirilebilir ve bu aşağıdaki gibi gerçekleşir (Koya ve Goshu, 2013a).

Brody Büyüme Fonksiyonu ve Gompertz Büyüme Fonksiyonu'nun zaman değişkenlerini sırasıyla t ve τ ile gösterelim.

Brody Fonksiyonu,

$$f(t) = A\left[1 - Be^{-kt}\right] = A\left[1 - \left(1 - \frac{A_0}{A}\right)e^{-kt}\right] \tag{3.33}$$

Gompertz fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f(\tau) &= A\exp\left[-B\exp(-k\tau)\right] \\ f(\tau) &= A\exp\left\{-\log\left(A/A_0\right)\exp(-k\tau)\right\} \\ f(\tau) &= A\exp\left[\log\left(A_0/A\right)\exp(-k\tau)\right] \\ f(\tau) &= A\left(A_0/A\right)\exp\left[\exp(-k\tau)\right] \\ f(\tau) &= A_0\exp\left[\exp(-k\tau)\right] \end{aligned} \tag{3.34}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi (3.33) ve (3.34)'ten $f(t)$ ve $f(\tau)$'yu eşitleyerek,

$$A\left[1 - \left(1 - \frac{A_0}{A}\right)e^{-kt}\right] = A_0\exp\left[\exp(-k\tau)\right] \tag{3.35}$$

elde edilir.

Buradan, Brody ve Gompertz fonksiyonlarının zaman değişkenleri arasındaki koordinat dönüşüm denklemi olan t,

$$t = \left(\frac{1}{k}\right)\log\left\{\frac{A - A_0}{A - A_0\left[\exp\left(\exp\left(-k\tau\right)\right)\right]}\right\} \tag{3.36}$$

olarak ifade edilir.

3.3 Nispi Büyüme Oran Fonksiyonunun Nasıl Davranacağını Gösteren Richards Örneği

Nispi büyüme oran fonksiyonu r_t, modelin erken evrelerinde önemli ölçüde farklıdır ve geç evrelerde sıfıra yakınsar.

Ancak, Nispi büyüme oranı r_t, t zamanı ile azalırken, m'nin artan bir fonksiyonudur.

Ancak, r_t, m parametresinin önemli bir rol oynamasına izin veren erken evrelerde, m ile birlikte büyür.

Daha sonra, r_t, m'den bağımsız olarak daha geç evrelerde ölür.

Bunu göstermek için Richards Fonksiyonunun bir örneğini düşünelim (Koya ve Goshu, 2013a).

Richards Fonksiyonunun nispi büyüme oran fonksiyonu r_t (3.8):

$$r_t = mk\left(\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right)$$

t zamanı göstermek üzere, m parametreli bir fonksiyondur ve limit aşağıdakileri verir:

$$\lim_{t\to 0} r_t = mk \lim_{t\to 0}\left(\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right) = mk\left(\left(\frac{A}{A_0}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right) \tag{3.37}$$

eşitlik (3.37)'de erken evrelerde r_t, m ile artar.

Ayrıca, (3.8)'deki r_t'nin limitini $t \to \infty$ iken almamız halinde, tüm m değerleri için büyüme olgunlaştığı zaman, r_t'nin sıfıra gittiğini gösterir. Yani,

$$\lim_{t\to\infty} r_t = mk \lim_{t\to\infty}\left(\left(\frac{A}{f(t)}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right) = 0$$

elde edilir.

3.4 Kiraz Ağaçlarının Ortalama Boy Büyüme Verileri İçin Büyüme Modellerinin Uyumu

Mahanta ve Borah (2014)'ün çalışmalarında yararlandıkları kiraz ağaçlarının ortalama boy büyüme verileri, bu tezde üzerinde çalışılan Lojistik, Bertalanffy, Gompertz, Richards ve Koya-Goshu modellerinin tahmini değerleri, parametre tahminleri, integral sabitleri, dönüm noktası zamanı, dönüm noktası zamanındaki büyüme miktarı ve nispi büyüme oran değerlerini hesaplamada kullanılmış ve Çizelge 3.2 de verilmiştir. Böylece Koya-Goshu modeliyle diğer modellerin veri uydurma ve tahmin etmede bir kıyaslaması sunulmuştur.

Genel olarak fazla parametre içeren modellerin R^2 leri büyük çıkmaktadır. Bu nedenle genellikle bu modeler verilere daha iyi uymaktadır. Ayrıca Koya-Goshu modelindeki bazı değerlerin kompleks bulunmasının sebebi B'nin 1'den büyük çıkmasıdır. Ayrıca $t \to \infty$ iken Koya-Goshu modelinin A değeri gerçek değere en yakındır. R^2 leri aynı olan birden fazla model olduğunda A değeri uygun model belirlemede etkili olabilir. Koya-Goshu modelinde ilk iki değerinin çıkmamasının sebebi veri setinden kaynaklanabilir. Ancak bu durum ayrıntılı olarak incelenebilir. Modellere ait R^2 ler birbirine yakın çıkmıştır. Özellikle Koya-Goshu ve Richards modellerinin R^2 leri aynı çıkmıştır. R^2 lerin eşit çıkması veri sayısının azlığından kaynaklanabilir.

Çizelge 3.2 Kiraz Ağaçlarının Ortalama Boy Büyüme Verileri İçin Büyüme Modellerinin Uyumu

Yıl	Boy	Lojistik		Bertalanffy		Gompertz		Richards		Koya Goshu	
1	6,0	6,48		6,03		6,14		5,94		-	
2	9,5	9,39		9,65		9,56		9,74		-	
3	13,0	12,38		12,67		12,59		12,73		12,02	
4	15,0	14,93		14,96		14,96		14,95		14,95	
5	16,5	16,78		16,60		16,66		16,55		16,48	
6	17,5	17,99		17,74		17,81		17,68		17,62	
7	18,5	18,70		18,52		18,58		18,47		18,44	
8	19,0	19,11		19,04		19,07		19,02		19,02	
9	19,5	19,34		19,39		19,38		19,40		19,41	
10	19,7	19,47		19,62		19,58		19,66		19,68	
11	19,8	19,53		19,78		19,71		19,84		19,86	
A		19,612		20,070		19,916		20,239		19,761	
B		-3,776		0,503		1,883		0,782		1,2	
k		0,622		0,421		0,471		0,378		5,090	
m		-		-		-		1,597		3,947	
$\boldsymbol{A_L}$		-		-		-		-		18,458	
$\boldsymbol{\mu}$		-		-		-		-		4,947	
$\boldsymbol{\delta}$		-		-		-		-		5,028	
v		-		-		-		-		2,128	
R²		0,995		0,999		0,998		0,999		0,999	
***İntegral Sabiti* (log*C*)**		$\log(-B)$	1,328	$\log\left(A^{\frac{1}{3}}B\right)$	0,311	$\log B$	0,632	$\log\left(A^{\frac{1}{m}}B\right)$	1,636	$\log\left[(A-A_L)^{\frac{1}{m}}B\right]$	0,249
t_i ***(Dönüm Noktası)***		$\left(\frac{1}{k}\right)\log\left(\frac{A}{A_0}-1\right)$	2,134	$\left(\frac{1}{k}\right)\log\left\{3\left[1-\left(\frac{A_0}{A}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\right\}$	0,976	$\left(\frac{1}{k}\right)\log\left\{\log\left(\frac{A}{A_0}\right)\right\}$	1,341	$\left(\frac{1}{k}\right)\log\left\{m\left[1-\left(\frac{A_0}{A}\right)^{\frac{1}{m}}\right]\right\}$	0,595	$\approx\mu+\delta\left[\frac{1-B}{2(m-1)Bk}\right]^{\frac{1}{v}}\cdot\left[(1-mB)\pm\sqrt{(mB-1)^2-4B(m-1)\left(1-\frac{1}{v}\right)}\right]^{1/v}$	Kompleks
r_{t_i} ***(Nispi Büyüme Oran Fonksiyonu)***		$k\left(\frac{A-f(t_i)}{A}\right)$	0,311	$3k\left[\left(\frac{A}{f(t_i)}\right)^{1/3}-1\right]$	0,630	$k\log\left(\frac{A}{f(t_i)}\right)$	0,471	$mk\left[\left(\frac{A}{f(t_i)}\right)^{1/m}-1\right]$	1,003	$\frac{mkv}{\delta}\left(\frac{t_i-\mu}{\delta}\right)^{v-1}\cdot\left[\left(\frac{A-A_L}{f(t_i)-A_L}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right]\left[1-\frac{A_L}{f(t_i)}\right]$	Komp.
$f(t_i)$		$\frac{A}{1-Be^{-kt_i}}$	9,806	$A\left(1-Be^{-kt_i}\right)^3$	5,940	$Ae^{-B\exp(-kt_i)}$	7,309	$A\left(1-Be^{-kt_i}\right)^m$	4,229	$A_L+(A-A_L).\left[1-Be^{-k([t_i-\mu]/\delta)^v}\right]^m$	Komp.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma, Koya-Goshu büyüme modeli olarak adlandırılan, biyolojik ve diğer büyümeler için yeni bir genelleştirilmiş matematiksel modeli tanıtmaktadır. Brody, Von Bertalanffy, Richards, Weibull, Monomoleküler, Mitscherlich, Gompertz, Lojistik ve Genelleştirilmiş Lojistik fonksiyonlar gibi yaygın olarak kullanılan büyüme fonksiyonlarının bir genellemesidir. Koya-Goshu modeli, adi diferansiyel veya hız-durum denkleminin bir çözümü olarak inşaa edilmiştir.

Fonksiyon, biri büyüme modelini, diğeri asimptotik davranışı etkileyen iki parametre içerir. Model o kadar esnektirki model seçimlerinde yararlı olabilir. Dahası yeni ve kullanışlı büyüme fonksiyonları üretebilir.

Çalışma kapsamında ele alınan tüm büyüme modelleri, akış çizelgesi Şekil 2.1'de gösterildiği gibi birbiriyle ilişkilidir. Daha ileri ki çalışmalarda, Koya-Goshu modelinin veri uydurma ve tahmini için daha fazla uygulamalar ele alınabilir.

Bu yazıda, yaygın olarak kullanılan biyolojik büyüme modelleri düşünülmekte ve her birinin, oran-durum adi diferansiyel denklem $f'(t) = r_t f(t)$'nin bir çözümü olduğu açıkça görülmektedir. r_t ve $f(t)$ formülü, büyümeyi açıklayan hız-durum denkleminin çözümleri olarak yapılandırılmıştır. Fonksiyonların her biri için modeller şunlardır: Genelleştirilmiş Lojistik, Genelleştirilmiş Lojistiğin Özel Durumu, Richards, Von Bertalanffy, Brody, Klasik Lojistik, Gompertz, Weibull, Genelleştirilmiş Weibull, Monomoleküler ve Mitscherlich. Modellerin türevleri, bu türevlerin literatürde bulunamaması ve biyoloji bilimleri alanlarında çalışan matematik dışı çalışmacılar da düşünülerek ayrıntılı olarak sunulmuştur. Tartışılan tüm büyüme fonksiyonları, ilgili nispi büyüme oranı fonksiyonları, parametre B ve integral sabiti için ifade ile birlikte Çizelge 3.1'de gösterilmektedir. Modellerin her birinde kabul edilebilir değerlerin üzerinde bir sınırlama olduğu unutulmamalıdır. Hız-durum denklemi daha genel ve faydalı çözümler üretebilir. Bu modellerin oluşturulması, modeller arasındaki ilişkiler ve bunların dönüm noktaları daha detaylı araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

Anonim, (2012). Generalized logistic function. http://en.wikipedia.org/w/ index.php?oldid =472125857- (Erişim tarihi: 01.12.2018).

Ayala, F. J., Gilpin, M. E. & Ehrenfeld, J. G. (1973). Competition between Species: Theoretical Models and Experimental Tests. *Theoretical Population Biology*, 4(3), 331-356, http://dx.doi.org/10.1016/0040-5809(73)90014-2.

Bertalanffy, von L. (1957). Quantitative Laws in Metabolism and Growth. *The Quarterly Review of Biology*, 3(2), 218.

Brody, S. (1945). Bioenergetics and Growth. *Reinhold Publishing Corporation*.

Brown, J. E., Fitzhugh Jr., H. A. & Cartwright, T. C. (1976). A Comparison of Nonlinear Models for Describing Weight-Age Relationship in Cattle. *Journal of Animal Science*, 42(4), 810-818.

Eberhardt, L. L. & Breiwick, M. P. (2012). Models for Population Growth Curves. *ISRN Ecology*, 2012, http://dx.doi.org/10.5402/2012/815016.

Edwards Jr., C. H. & Penney, D. E. (1994). Calculus with Analytic Geometry. Printice Hall International, New Jersey.

Ersoy, I. E., Mendeş, M. & Keskin, S. (2007). Estimation of Parameters of Linear and Nonlinear Growth Curve Models at Early Growth Stage in California Turkeys. *Archivfür Geflügelkunde*, 71(4), 175-180.

Fekedulegn, D., Mac Siurtain, M. P. & Colbert, J. J. (1999). Parameter Estimation of Nonlinear Growth Models in Forestry. *Silva Fennica*, 33(4), 327-336.

France, J., Dijkstra, J. & MDhanoa, M. S. (1996). Growth Functions and Their Application in Animal Science. *Annales De Zootechnie* 45(1), 165-174, http://dx.doi.org/10.1051/animres:19960637.

France J., & Thornley, J. H. M. (1984). Mathematical Models in Agriculture. Butterworths, London, 335 pp.

Goshu, A. T. (2008). Simulation Study of the Commonly Used Mathematical Growth Models. *Journal of the Ethiopian Statistical Association*, 17, 44-53.

Koya, P. R., & Goshu, A. T., (2013a). Generalized Mathematical Model for Biological Growths, *Open Journal of Modelling and Simulation*, 1, 42-53.

Koya, P. R., & Goshu, A. T., (2013b). Solutions of Rate-state Equation Describing Biological Growths, *American Journal of Mathematics and Statistics*, 3(6): 305-311.

Lei, Y. C. & Zhang, S. Y. (2004). Features and Partial Derivatives of Bertalanffy-Richards Growth Model in Forestry. *Nonlinear Analysis*: *Modelling and Control*, 9(1), 65-73.

Mahanta, D. J. & Borah, M. (2014). Parameter Estimation of Weibull Growth Models in Forestry, *International Journal of Matematics Trends and Technology*, 8(3), 157-163.

Mombiela, R. A. & Nelson, L. A. (1981). Relation ships among Some Biological and Empirical Fertilizer Response Models and Use of the Power Family of

Transformations to Identify an Appropriate Model. *Agronomy Journal*, 73(2), 353-356, http://dx.doi.org/10.2134/agronj1981.00021962007300020025x.

Nelder, J. A. (1961). The Fitting of a Generalization of the Logistic Curve. *Biometrics*, 17(7), 89-110, http://dx.doi.org/10.2307/2527498.

Rawlings, J. O. & Cure, W. W. (1985). The Weibull Function as a Dose Response Model for Air Pollution Effects on Crop Yields. *Crop Science*, 25, 807-814, http://dx.doi.org/10.2135/cropsci1985.0011183X002500050020x.

Rawlings, J. O., Pantula, S. G. & Dickey, D. A. (1998). Applied Regression Analysis: A Research Tool. Springer, New York.

Richards, F. J. (1959). A Flexible Growth Function for Empirical Use. *Journal of Experimental Botany*,10, 290-300, http://dx.doi.org/10.1093/jxb/10.2.290.

Robertson, T. B. (1906). On the Normal Rate of Growth of an Individual and Its Biochemical Significance. *Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen*, 25(4), 581-614, http://dx.doi.org/10.1007/BF02163864.

Spillman, W. J. & Lang, E. (1924). The Law of Diminishing Increment. World, Yonkers.

Winsor, C. P. (1932). The Gompertz Curve as a Growth Curve. *Proceedings of National Academy of Science*, 18(1), 1-8,

http://dx.doi.org/10.1073/pnas.18.1.1.

Zeide, B. (1993). Analysis of Growth Equations. *Forest Science*, 39(3), 594-616.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Elif ÖZKURT BAŞUSTAOĞLU
Doğum Yeri	Samsun
Doğum Tarihi	28.02.1982
Uyruğu	❒T.C.
Telefon	05385481678
E-Posta Adresi	elif_ozkurtt@hotmail.com_

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	17.06.2005
Yüksek Lisans	
Üniversite	Karadeniz Teknik Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi
Program Adı	Matematik Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisans
Mezuniyet Tarihi	07.07.2007

Yayınlar

Oda, V., Korkmaz, M., Özkurt, E., “Büyüme eğrilerinin tahmininde kullanılan bazı sigmoidal modeller ve elde edilen biyolojik parametreler: Bertalanfyy modeli örneği”, Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi, 6 (1) 54-66, (2016).

Uluslararası Bildiriler

Mehmet Korkmaz, Volkan Oda, Elif Özkurt, “General Derivation of the Value of Oxygen Saturation at the Point of Inflexion of Hemoglobin-Oxygen Dissociation Curve”, Xth International Statistics Day Symposium, 774-783, 2016 (Giresun Üniversitesi)

Mehmet Korkmaz, Elif Özkurt Başustaoğlu, “Derivations of Relative Growth Rates, B Parameters and Integral Constants of Some Growth Models”, International Conference on Mathematical and Related Sciences, 2018 p.108. Antalya.

Volkan Oda, Mehmet Korkmaz, Elif Özkurt Başustaoğlu, “A study over the effect of mean curvature and arc lengh values in selecting the appropriate growth model”, International Conference on Mathematics and Mathematics Education, p.757, 2018 (Ordu Üniversitesi)

Mehmet Korkmaz, Elif Özkurt Başustaoğlu, “A look at the Generalized Mathematical Model named as Koya-Goshu Model for Biological Growths”, International Conference on Mathematics and Mathematics Education, p.749, 2018 (Ordu Üniversitesi)

Mehmet Korkmaz, Volkan Oda, Elif Özkurt, 2018. “A study over determination of

asymptotic deceleration and absolute acceleration points in logistic growth model", International Conference on Mathematics and Mathematics Education, p.755, 2018 (Ordu Üniversitesi)
Ulusal Bildiriler
Elif Özkurt, Mehmet Korkmaz, Volkan Oda, "Büyüme Eğrilerinin Tahmininde Kullanılan Bazı Sigmoidal Modeller ve Bu Modellerden Elde Edilen Biyolojik Parametreler: Bertalanffy Modeli Örneği", Matematik-İstatistik Mini Sempozyumu, 2015 (Ordu Üniversitesi)