T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(α,m)-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

SÜMEYRA YILDIRIMER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2019

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Sümeyra YILDIRIMER tarafından hazırlanan ve Prof. Dr. Selahattin MADEN danışmanlığında yürütülen "(α,m)-Konveks Fonksiyonlar için Hermite–Hadamard Tipli Bazı İntegral Eşitsizlikleri Üzerine" adlı bu tez, jürimiz tarafından 05 / 02 / 2019 tarihinde oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman	:	Prof. Dr. Selahattin MADEN	
Başkan	:	Prof. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Sercan TURHAN Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Mehmet KORKMAZ Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

07 / 02 / 2019 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu' nun 08 / 02 / 2019 tarih ve 2019 / 83 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Sümeyra YILDIRIMER

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

(α,m)-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPİ BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

SÜMEYRA YILDIRIMER

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2019
Yüksek Lisans Tezi, 90s.

Danışman: Prof. Dr. Selahattin MADEN

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde eşitsizlikler teorisinin tarihsel gelişimini veren bir giriş yapılmıştır. İkinci bölümde tezde kullanılan bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde (α,m)-konveks fonksiyonlar ve bu fonksiyonlarla ilgili bazı eşitsizlikler ele alınmıştır. Dördüncü bölümde sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Konveks küme, Konveks fonksiyon, (α,m)-konveks fonksiyon, İntegral eşitsizlikleri, İntegral ortalamaları, Hermite-Hadamard eşitsizliği,

ABSTRACT

ON SOME INTEGRAL INEQUALITIES OF THE HERMITE–HADAMARD TYPE FOR (α,m)--CONVEX FUNCTIONS

SÜMEYRA YILDIRIMER

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2019
MSc. Thesis, 90p.

Supervisor: Prof. Dr. Selahattin MADEN

This thesis consists of four chapters. In the first chapter it is given an introduction historical development on inequalities theory. It is given some definitions and theorems which are used in this thesis in the second chapter. In the third chapter, it is given (α,m)- convex functions and some inequalities for (α,m)- convex functions. It is given results and propositions in the fourth chapter.

Key Words: Convex set, Convex function, (α,m)- convex function, Integral inequalities, Integral means, Hermite-Hadamard inequalitiy.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam Prof. Dr. Selahattin MADEN’ e içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Tüm eğitimimde ve hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan babam Ertuğrul ARPAT’ a, kardeşlerim Nursena ARPAT ve Ayşenur GÜNDOĞDU’ ya ve bu araştırmanın her aşamasında desteğini benden esirgemeyen değerli eşim Abdullah Saim YILDIRIMER' e ve öz anne ve babamdan farklı görmediğim kayınpederim Mustafa YILDIRIMER ve kayınvalidem Aliye YILDIRIMER’e en içten duygularımla teşekkür ederim.

Bu çalışmamı eğitim hayatımın mimarı olan ve üzerimde çok büyük emeği bulunan annem merhum Nilgün ARPAT ve bana annelik duygusunu tattıran canım kızım Feyza' ma armağan ediyorum.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER ve KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar Kümesi
$L(I)$	: I üzerinde Log Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$Q(I)$	: I üzerinde Godunova-Levin Fonksiyonlar Sınıfı
$QC(I)$	: I üzerinde Quasi-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$P(I)$	: I üzerinde P- Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathbb{R}^+$	: $(0,\infty)$ Aralığı
$\mathbb{R}_0^+$	: $[0,\infty)$ Aralığı
${}_R D_{a+}^{\alpha}$	: α −Mertebeden Riemann Liouville Kesirli Türev
${}_H D_{a+}^{\alpha}$	: α −Mertebeden Hadamard Kesirli Türev
f'	: f Fonksiyonun Birinci Mertebeden Türevi
f''	: f Fonksiyonun İkinci Mertebeden Türevi
f'''	: f Fonksiyonun Üçüncü Mertebeden Türevi
Γ	: Gamma Fonksiyonu
I	: $\mathbb{R}$'de herhangi bir aralık
I^0	: I'nın içi
$J(I)$	: Jensen-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$JQC(I)$	: Jensen-Quasi-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
${}_R J^{\alpha}$	: α −Mertebeden Riemann Liouville Kesirli İntegral
${}_H J^{\alpha}$	: α −Mertebeden Hadamard Kesirli İntegral
$K_m(I)$	: I üzerinde m-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$K_m^{\alpha}(I)$	: I üzerinde (α,m)- Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
K_s^2	: İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$L[a,b]$	: $[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilir Fonksiyonlar Kümesi
$\beta(x,y)$	: x,y Pozitif Reel Sayılarının Beta Fonksiyonu

1. GİRİŞ

Günümüzde matematiğe ait tanım veya kavramların birçoğu matematik dışında diğer bilim dallarında da sıklıkla kullanılmaktadır. Bunlardan birkaçına örnek verecek olursak; fizikçiler türev kavramından yararlanarak hız ve ivmeyi bulabilmektedirler, hız ivmenin zamana göre integrali olduğundan integralden yararlanarak hızı bulabilmektedirler, diferansiyel denklemler sayesinde ısı iletim problemlerini çözebilmektedirler. Benzer örnekler mühendislikte ve diğer başka bilim alanlarında da karşımıza sıklıkla çıkmaktadır.

Matematiksel bir tanım olan konveksliğin günümüzde oldukça yaygın kullanıldığı alanlar vardır. Ne anlama geldiğini bilsin veya bilmesin, nasıl bir şekil veya cisim olduğunu görsün veya görmesin, insanlar hayatları boyunca konveks (dışbükey) ve konkav (içbükey) şekillerle veya cisimlerle her zaman karşılaşmışlardır ve bunları yaşamları boyunca günlük işlerinde, teknolojide, sanatta, tıpta, müzikte, fizikte, optimizasyonda, matematiksel programlamada, denge probleminde, mühendislikte ve diğer bilimsel alanlarda bir şekilde mutlaka kullanmışlardır. Yani konvekslik bir şekilde hayatımızda yer almıştır ve almaya da devam edecektir.

Kısaca hatırlatmak gerekirse, içerdiği herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası üzerinde bulunan tüm noktaları da içeren kümeler konveks kümelerdir. Bu kısa hatırlatmayı yaptıktan sonra devam etmek daha yararlı olacaktır.

Eğitim öğretim hayatımıza baktığımız zaman konveks, konkav tanımı ve örnekleri ile ilk olarak lise yıllarımızda ve üniversitede okuduğumuz yıllarda Genel Matematik ya da Analiz derslerinde karşılaştığımızı görürüz. Bunu biraz daha açıklamak için o yıllarda türev konusunu öğrendikten sonra grafik çiziminin nasıl yapıldığını tekrar hatırlayalım: Verilen bir fonksiyonun grafiğini çizebilmek için aşağıdaki temel adımlar uygulanır. Şunu belirtelim ki burada bahsedilen adımlar, her türlü fonksiyonun grafiğini el yordamıyla çizmek için genel şartları içerir. Ancak fonksiyonların grafiklerini çizmek için çeşitli bilgisayar programları ve matematik yazılımları da kullanılabilir.

i) Fonksiyonun tanım kümesi bulunur. Bulunan tanım kümesi fonksiyonun grafiği çizilirken dikkate alınır.

ii) Fonksiyon periyodik bir fonksiyon ise periyodu bulunur.

iii) Varsa yatay, düşey, eğik ve eğri asimptotları bulunur.

iv) Eksenleri kestiği noktalar bulunur.

v) Fonksiyonun birinci türevi alınır. Ekstremum noktaları bulunur. Maksimum ve minimum olduğu yerler ile artan ve azalan olduğu aralıklar belirlenir.

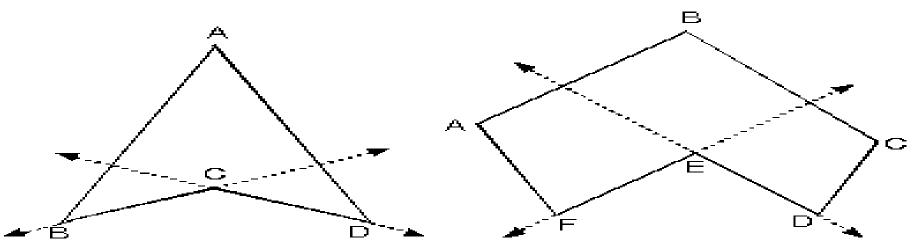
vi) Fonksiyonun ikinci türevi alınarak büküm (dönüm) noktası varsa bulunur.

vii) Fonksiyonun birinci ve ikinci türevine göre işaret tablosu yapılarak grafiğin artan azalan olduğu aralıklar ile dışbükey ve içbükey (konveks ve konkav) aralıklar bulunur.

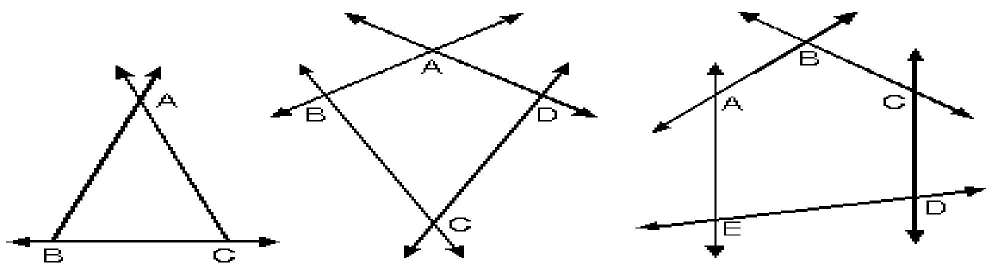
viii) Bütün bu veriler ışığında fonksiyonun grafiği çizilir.

Bu hatırlatma ile konveks ve konkav kavramlarını ilk kez ciddi anlamda grafik çiziminde gördüğümüzü hatırlamış oluyoruz. Grafik çiziminin dışında yine hem lise hem de üniversite yıllarımızda matematik ile ilgili derslerimizde hatta özellikle geometride konveks (dışbükey) ve konkav (içbükey) örnekler ile de karşılaşıyoruz.

Bir düzlemde birbirinden farklı ve herhangi üçü doğrusal olmayan noktayı ikişer ikişer birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu kapalı şekillere çokgen denildiğini biliyoruz. Bir çokgenin bazı kenar doğruları çokgeni kesiyorsa bu tür çokgenlere içbükey (konkav) çokgen, kenar doğrularının hiçbiri, çokgeni kesmiyorsa bu çokgenlere dışbükey (konveks) çokgen denir.



Şekil 1.1. İçbükey (Konkav) Çokgenler



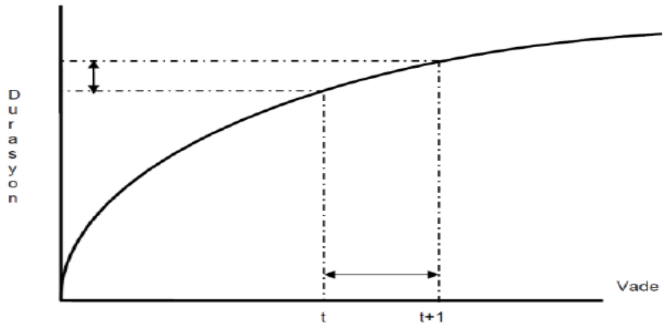
Şekil 1.2. Dışbükey (Konveks) Çokgenler

Konveks ve konkav kavramları günlük hayatımızda matematik dışında başka nerelerde ya da hangi bilim dallarında karşımıza çıkar? Bu soruya cevap vererek aynı zamanda konveksliğin diğer bilim dallarında ne kadar önemli bir yere sahip olduğunu ve insanlığa ne kadar yararlı olduğunu da ortaya koymuş olacağız.

1. Güzel Sanatlarda konvekslik kavramı karşımıza çıkmaktadır: Güzel Sanatlar ile uğraşan öğrenciler veya sanatkârlar konvekslik ve konkavlık ile Öğrenme Kontrolü ve İncelik hakkında çalışmalar yapmaktadırlar. Bu çalışmalarda, öğrencilere, konveks veya konkav formdaki baskın, alt hâkim ve alt elementler arasındaki ince ilişkileri incelemeye yoğunlaşmaları istenir. Dikkatlice eksenel, düzlemsel ve yapılandırma eğrilerini oluşturarak, yüzey gerilimi, hacimsel hareket ve hiyerarşik ilişkilerle uygulama yapmaya başlarlar.

Şekil 1.3. Güzel Sanatlarda Çalışılmış Konkav ve Konveks Cisim Örnekleri

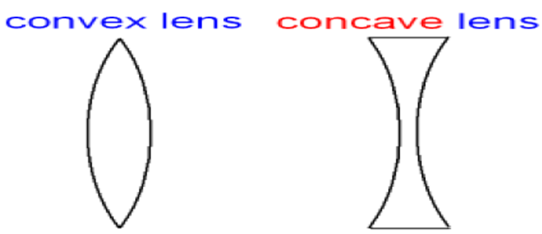
2. Finans matematiğinde karşımıza konvekslik kavramı çıkmaktadır: Fiyat esnekliğinin rakamsal ölçütü olarak kullanılmak üzere modifiye durasyon (düzeltilmiş süre) kavramı geliştirilmiştir. Modifiye durasyon, pozisyonların faiz oranındaki değişim karşısında aldığı yeni değerin bulunması amacıyla kullanılmaktadır. Durasyon bir zaman ölçütü iken, modifiye durasyon bir faiz hassasiyet ölçütü olarak ortaya çıkmaktadır. Modifiye durasyon oldukça yararlı bir risk ölçütü olmasına ve faiz oranlarında meydana gelen küçük değişikler sonucu pozisyon değer değişimlerinde oldukça hassas sonuçlar vermesine karşın, özellikle faiz oranlarında meydana gelen büyük değişikliklerde hata payı yüksektir. Fiyat getiri arasındaki konveks yapıdan kaynaklanan modifiye durasyonun var olan hata payı, faiz şoku miktarı büyüdükçe daha da artmaktadır. Bu olgunun sebebi durasyonun, vadenin konveks bir fonksiyonu olmasından kaynaklanmaktadır. Diğer bir anlatımla, durasyon vade ile birlikte artmakta ancak artış değerleri aynı olmamaktadır.



Şekil 1.4. Konveks Durasyon -Vade Fonksiyonu

Faiz hassasiyetinin ölçümünde modifiye durasyonun hata payının azaltılması amacıyla konveksite yaklaşımı kullanılmaktadır. Konveksite, durasyonun değişim oranını gösteren bir ölçüttür. Diğer bir ifadeyle, durasyon, fiyatın faiz oranına göre birinci türevi iken, konveksite ise ikinci türevdir. Konveksite değeri artı, eksi veya sıfır olabilmektedir.

3. Sağlık alanında karşımıza konvekslik kavramı çıkmaktadır: Şüphesiz günümüzde en önemli yatırımlardan birisi de sağlığa yapılan yatırımdır ve tüm dünyada insan sağlığını daha mükemmel noktalara ulaştırmak için bilim adamları sürekli çalışmalar yapmaktadır ve yapmaya da devam edeceklerdir. Yapılan bu önemli çalışmalardan birisi de gözlerinden rahatsız olan insanların daha iyi görebilmelerini sağlamak için kullanılan lenslerdir.

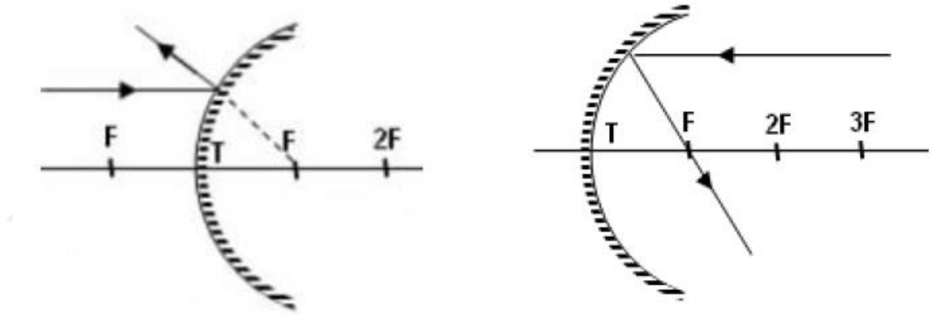


Şekil 1.5. Konveks ve Konkav Lens

Bir lens, ışığı kırmak için kullanılan şeffaf kavisli bir cihazdır ve genellikle camdan yapılır. Lensler için iki farklı şekil vardır. Bunlara konveks ve konkav denir. Bu lensler sayesinde insanların daha iyi görmeleri ve yaşam standartlarını yükseltmeleri sağlanır. Göz doktorları uzağı göremeyen miyop hastalarına daha düşük konkav numaralı camlı okuma gözlüğü, yakını göremeyen hipermetrop hastalarına ise daha güçlü konveks camlı okuma gözlükleri vermektedirler.

4. Fizikte karşımıza konvekslik kavramı çıkmaktadır: Yansıtıcı yüzeyi çukur olan aynalara çukur ayna (konkav ayna = içbükey ayna) denir. Çukur ayna, cisimlerin görüntülerini büyütebilme ve gelen paralel ışınları bir noktada toplayabilme özelliğine sahiptir. Diş hekimleri tarafından kullanılır, Güneş ışınlarının odaklanması (bir noktada toplanması) sağlanır. Bu sayede çok yüksek sıcaklıklar elde edilir. Teleskop yapımında kullanılır. Mikroskopta incelenecek cismin üzerine ışık düşürmek için kullanılır.

Yansıtıcı yüzeyi tümsek olan aynalara tümsek ayna (konveks ayna = dış bükey ayna) denir. Tümsek ayna, cisimlerin görüntülerini küçültebilme ve gelen paralel ışınları dağıtma özelliğine sahiptir. Arabaların yan aynalarında, büyüteçlerde kullanılır.



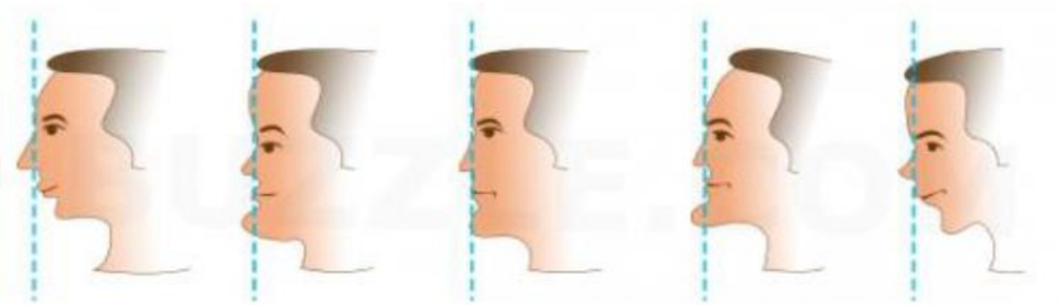
Şekil 1.6. Tümsek (Konveks) Ayna ve Çukur (Konkav) Ayna

5. Endüstri alanında karşımıza konvekslik kavramı çıkmaktadır: Ambalajlar ve kaplamalar çeşitli alanlarda ve çeşitli kombinasyonlu yapılarda düşünülmüştür ve sabit eğrilik alanlarındaki, yani Öklid, küresel ve hiperbolik uzayda dışbükey gövdelerden oluşan paketlemeler ve kaplamalar ile ilgili problemlerle daima ilgilenilmiştir. Küre biçimindeki topların ambalajlanması, çoklu paketleme ve kaplama, uçaklarda dairesel paketleme ve dairesel kaplama vs. gibi konular bunlara örnek gösterilebilir

6. Biyoloji alanında karşımıza konvekslik kavramı çıkmaktadır: Biyologlar çokgenlerin konvekslik ölçümünü kullanarak yaprak sınıflandırması yapmaktadırlar

7. Günlük yaşantımızda karşımıza konvekslik kavramı çıkmaktadır: Günümüzde evlerimizde, iş yerlerimizde ve konser salonlarında daha iyi ses iletimi için akustik tasarımlar uygulanmakta ve bu tasarımlarda sesi en aza indirmek ya da yükseltmek için konvekslikten yararlanılarak tasarımlar yapılmaktadır.

8. İnsan anatomisinde karşımıza konvekslik kavramı çıkmaktadır: Bir kişinin yüzü kim olduğunun bir parçasıdır. İnsanlar birbirlerinin şeklini yüz şekliyle tanırlar. Bunun için insan yüzleri konvekslik ve konkavlık kavramlarından yararlanarak beş temel gruba ayrılmıştır. Bunlar konveks, konkav, düzlem, konveks-konkav ve konkav-konvekstir.



Şekil 1.7. İnsan Yüzünde Konvekslik ve Konkavlık

Yukarıda değişik bilim dallarından vermiş olduğumuz konvekslik ve konkavlık örnekleri veya uygulamaları çoğaltılabilir. Konvekslik ile ilgili değişik uygulamalara, astronomide, mühendislikte, endüstride, sağlıkta, müzikte termodinamikte, coğrafyada ve optimizasyon teorisinde vs. sıklıkla rastlanmaktadır.

Konvekslik, M. Ö. 250 yılında Archimedes' in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Archimedes bir konveks şeklin çevre uzunluğunun onu çevreleyen diğer bir şeklin çevre uzunluğundan daha küçük olduğunu önemle ifade etmiştir.

Gerçekte her zaman ve birçok yolla konvekslik kavramıyla karşılaşıyoruz ve deneyimliyoruz. Çok basit bir örnek olarak dik pozisyonda durduğumuzda ağırlık merkezimizin dik izdüşümü ayağımızın kapladığı konveks alanın içinde kalır. Böylece dengemizi sağlayabilmekteyiz. Bununla beraber günlük hayatımızda konveksiliğin büyük etkileri vardır, örneğin endüstri, iş, sağlık ve sanat alanlarında birçok uygulaması vardır. İşbirliğinin olmadığı oyunların parasal kaynakları ve adaleti en uygun şekilde paylaşımını yapma problemidir.

Konveks fonksiyon teorisi konveksliğin genel konularının bir parçasıdır, çünkü konveks bir fonksiyonun görüntü kümesi konveks bir kümedir. Konveks fonksiyonlar teorisi matematiğin tüm alanlarına dokunan önemli bir teoridir. Konvekslik konusunu gerektiren matematiğin ilk konularından birisi çizgisel analizdir. İkinci türev testi konveksliğin bulunmasında bize sonucu veren güçlü bir araçtır. Optimizasyon ve kontrol teorisinde bazı karışık problemlerden hareketle konveks fonksiyon teorisi, sonsuz boyutlu Banach uzaylarının çalışma alanlarına genişletilmektedir.

Eşitsizlikler matematiğin hemen hemen tüm alanlarında önemli bir rol oynar. Eşitsizlikler ile ilgili ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Polya tarafından yazılan "Inequelities" adlı kitaptır (1952). Bu salt eşitsizlikler konusunu ele alan ve birçok yeni eşitsizlikler ve uygulamaları içeren ilk kaynak kitaptır. E.F. Beckenbach ve R. Bellman (1961) tarafından 1934-1960 döneminde eşitsizlikler üzerine elde edilen bazı ilginç sonuçları içeren "Inequalities" adlı ikinci kitap yazılmıştır. Mitrinoviç' in 1970' te yayınlanan "Analytic Inequalities" adlı kitabı yukarıda bahsedilen iki kitapta da yer almayan yeni konular içerir. Son yıllarda da S. S. Dragomir, V. Lakshmikantham, Ravi P. Agarwal gibi araştırmacılar tarafından eşitsizlikler konusunda pek çok kitap, makale ve monografi yazılmıştır.

Konveks fonksiyonların tarihi çok eskiye dayanmakla birlikte başlangıcı 19. yüzyılın sonları olarak gösterilebilir. 1893' te Hadamard'ın çalışmasında açıkça belirtilmese de bu türden fonksiyonların temellerinden bahsedilmektedir. Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları ima eden sonuçlara rastlanılmasına rağmen konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen tarafından çalışıldığı ve Jensen' in bu öncü çalışmalarından itibaren konveks fonksiyonlar teorisinin hızlı bir gelişme gösterdiği kabul edilmektedir. Beckenbach ve Bellman (1961) ve Mitrinoviç (1970) gibi pek çok araştırmacı, konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler konusunu kitaplarında ele almışlardır. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak Pecaric (1987) tarafından yazılmıştır. Ayrıca Roberts ve Varberg (1973), Niculescu ve Persson (2005, 2006) gibi pek çok kişi konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizliklerle ilgi çok sayıda çalışma yapmışlardır. Bu çalışmaların bir kısmını integral eşitsizlikleri oluşturmaktadır.

"Neden Matematiksel Eşitsizlikler" sorusu için 1978 yılında R. Bellman tarafından şöyle bir cevap verilmiştir: "Eşitsizlik çalışmak için bazı nedenler vardır. Pratik açıdan bakıldığında, birçok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak karşımıza çıkmaktadır. Klasik Eşitsizlikler de bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik açıdan bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturulabilir. Son olarak estetik açıdan bakıldığında genel olarak resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir.”

Matematiksel analiz, uygulamalı matematik, olasılık teorisi ve matematiğin diğer çeşitli alanlarında doğrudan veya dolaylı olarak konveks fonksiyonların birçok uygulaması vardır. Bununla birlikte konveks fonksiyonlar, eşitsizlikler teorisiyle yakından ilişkilidir ve birçok önemli eşitsizlik, konveks fonksiyonların uygulamalarının sonucudur. Örneğin; Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri gibi genel eşitsizlikler, konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğinin sonucudur. Bu bağlamda, konveks fonksiyonlar teorisinde eşitsizliklerin özel bir yere sahip olduğu ifade edilebilir. Aslında konveks fonksiyonun kendi tanımı da bir eşitsizliktir. Benzer şekilde, konveks fonksiyonlar da eşitsizlikler teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. 19. yüzyılın sonlarında ve 20. yüzyılın başlarında pek çok eşitsizlik bulunmuştur. Bu eşitsizliklerin bazıları konveks fonksiyonlar sınıfı için yazılan temel eşitsizlikler haline gelmiştir. 1881 yılında Hermite tarafından ifade edilen ve bugün birçok kaynakta Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılan eşitsizlik bunlardan bir tanesidir. Bu eşitsizlik üzerine günümüze kadar birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların büyük bir bölümü S.S. Dragomir ve C.E.M Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan “Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications” adlı kaynakta toplanmıştır.

Eşitsizlikler ve konveks fonksiyonlar matematiğin tüm alanlarında önemli bir rol oynaması ve aktif bir araştırma alanı olmasından dolayı, özellikle son yıllarda araştırmacıların ilgi odağı haline gelmiş ve bu konuda yapılan çalışmaların sayısında bir hayli artış gözlenmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

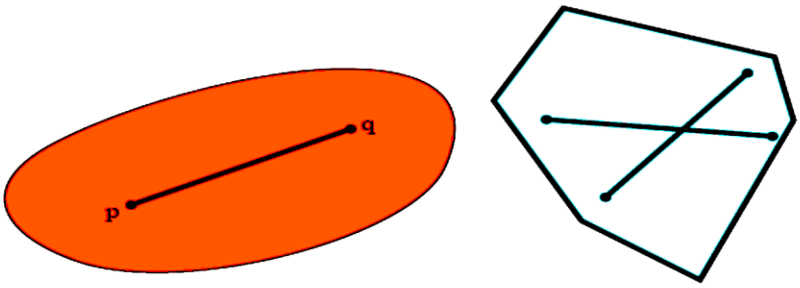
2.1. Konveks Fonksiyonlara Ait Temel Kavramlar

Bu bölümde bu çalışmada kullanılacak bazı temel tanım ve teorem verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Konveks Küme): L bir lineer uzay ve A ⊆ L olmak üzere $\forall x, y \in A$ için

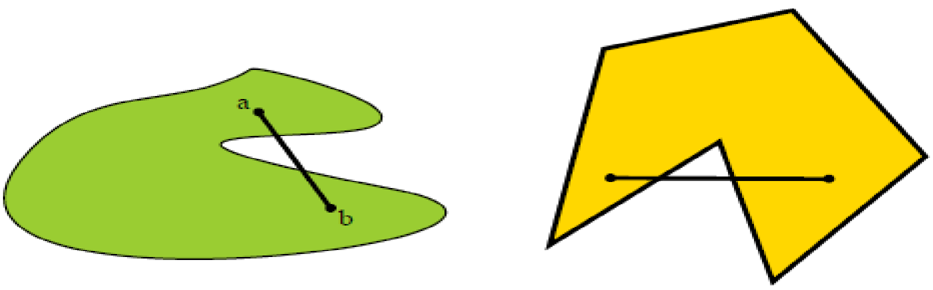
$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1-\alpha)y, 0 \le \alpha \le 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir(bkz. Şekil 2.1). Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki x ve y nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1-\alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir(Bayraktar, 2000).



Şekil 2.1. Konveks Kümeler

Konveks olmayan kümelere ise konkav küme adı verilir(bkz. Şekil 2.2).

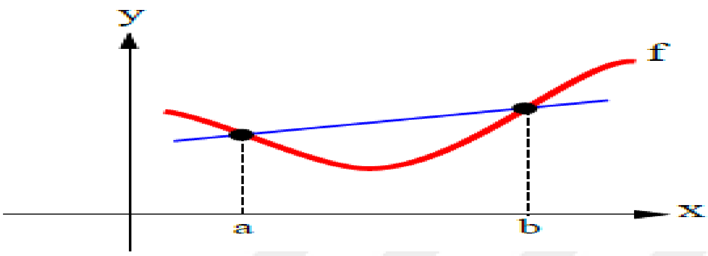


Şekil 2.2. Konkav Kümeler

Tanım 2.1.2 (Konveks Fonksiyon): I, ℝ' de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

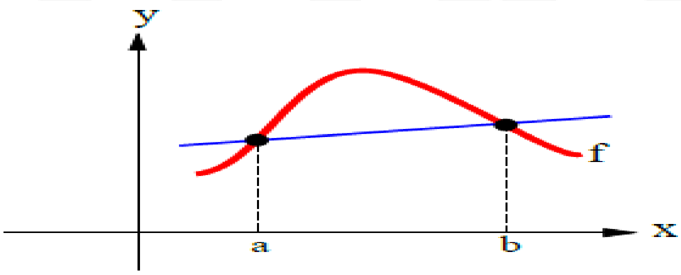
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Bakınız Şekil 2.3).

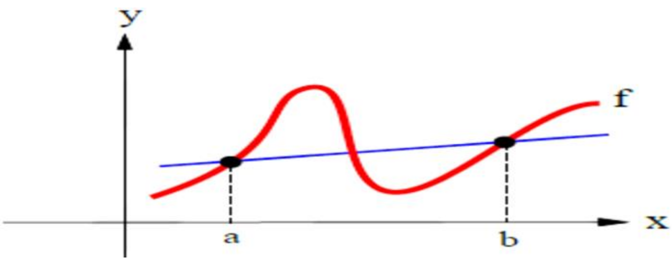


Şekil 2.3. Aralık Üzerinde Konveks Fonksiyon

Örneğin, $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde bir konveks fonksiyondur. Eğer $-f$ fonksiyonu konveks ise f' ye konkavdır denir (Bakınız Şekil 2.4).



Şekil 2.4. Aralık Üzerinde Konkav Fonksiyon



Şekil 2.5. Aralık Üzerinde Konveks ve Konkav Olmayan Fonksiyon

Tanım 2.1.3 (J-Konveks Fonksiyon): I, ℝ' de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan bir f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J-konveks fonksiyon denir (Mitrinovic, 1970).

Tanım 2.1.4 (Kesin J-Konveks Fonksiyon): Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna I üzerinde kesin J-konveks fonksiyon denir (Mitrinovic, 1970).

Sonuç 2.1.1: Her konveks fonksiyon aynı zamanda bir J-konveks fonksiyondur (Mitrinovic, 1970).

Sonuç 2.1.2: $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun I' da konveks olması için gerek ve yeter şart, her $x, y \in I$ için $p + q > 0$ olan $\forall p, q \geq 0$ için

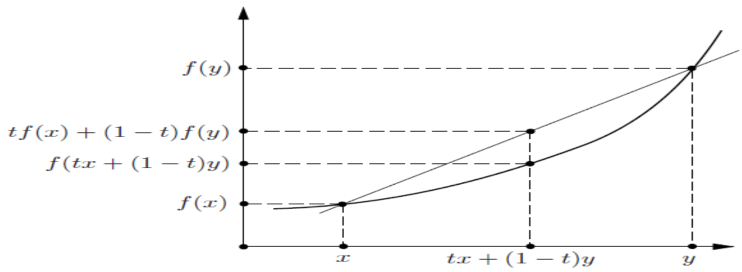
$$f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) \leq \frac{pf(x)+qf(y)}{p+q}$$

olmasıdır (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992). I üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun kesin konveksliğinin geometrik anlamı $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f' nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır. Bunu Şekil 2.6 de görmekteyiz.

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı, $[a, b]$ aralığında konveks (konkav) ve x_0 noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $x \in (a, b)$ için,

$$f(x) - f(x_0) \leq (\geq) f'(x_0)(x - x_0)$$

eşitsizliği yazılır (Roberts ve Varberg, 1973).



Şekil 2.6. Konveks Fonksiyonun İncelenmesi

Tanım 2.1.5: (Eşlenik Konveks Fonksiyonlar): $g: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu artan ve sürekli bir fonksiyon olsun ayrıca $g(0) = 0$ ve $x \to \infty$ iken $g \to \infty$ şartlarını sağlasın. Bu durumda g^{-1} vardır ve g ile aynı şartları sağlar. Eğer f ve f^* fonksiyonları

$$f(x) = \int_0^x g(t)dt \quad ve \quad f^*(y) = \int_0^y g^{-1}(s)ds$$

şeklinde tanımlanırsa bu iki fonksiyon da konveks olup f ve f^* fonksiyonlarına birbirinin konveks eşleniği denir (Roberts ve Varberg, 1973). Aşağıdaki teorem konveks eşlenik çiftlerle ilgili önemli bir sonuçtur.

Teorem 2.1.1 (Young Eşitsizliği): $f, [0, c], (c > 0)$, aralığı üzerinde reel değerli, artan ve sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f(0) = 0, a \in [0, c]$ ve $b \in [0, f(c)]$ ise,

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx \geq ab$$

eşitsizliği sağlanır (Young, 1912).

Tanım 2.1.6 (Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Eğer

$$|x - x_0| < \delta \quad olan \quad \forall x \in S \quad için \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, x_0 da süreklidir denir (Bayraktar, 2010).

Tanım 2.1.7 (Lipschitz Şartı): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f, S de Lipschitz şartını sağlıyor denir (Bayraktar, 2010).

Sonuç 2.1.3 f, S de Lipschitz şartını sağlıyorsa f, S de düzgün süreklidir (Bayraktar, 2010).

Tanım 2.1.8 (Düzgün Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x \in S \; ve \; |x_1 - x_2| < \delta \; şartını \; sağlayan \; \forall x_1, x_2 \in S \; için \; |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, S' de düzgün süreklidir denir (Bayraktar, 2010).

Tanım 2.1.9 (Mutlak Süreklilik): I, $\mathbb{R}$'nin boştan farklı bir alt kümesi ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. I nın $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ ayrık açık alt aralıklarının bir birleşimini göz önüne alalım. Eğer $\forall \epsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| <$

ϵ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu I kümesinde mutlak süreklidir denir (Bayraktar, 2010).

Konvekslik, Lipschitz şartı, süreklilik ve mutlak süreklilik arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem 2.1.2: L lineer uzay, $U \in L$ bir açık küme ve $f: U \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun.

a. f, U açık kümesinde konveks olsun. Eğer f, U' da bir noktanın komşuluğunda üstten sınırlı bir fonksiyon ise f, U' da yerel Lipschitz' dir ve bu nedenle U'nun kompakt alt kümesinde Lipschitz şartını sağlar ve U' da süreklidir.

b. f, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde konveks ise f, U' nun her kompakt altkümesinde Lipschitz şartını sağlar ve U' da süreklidir (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992).

Teorem 2.1.3: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise, bu taktirde

a. f, (a, b) aralığında süreklidir,

b. f, $[a, b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia, 1994).

Tanım 2.1.10 (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $x_1 < x_2$ olan $\forall x_1, x_2 \in I$ için

i. $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,

ii. $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,

iii. $f(x_2) \geq f(x_1)$ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,

iv. $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır,

denir (Adams ve Essex, 2010).

Teorem 2.1.4: I, $\mathbb{R}$' de bir aralık, f, I üzerinde sürekli ve I^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

i. $\forall x \in I^0$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.

ii. $\forall x \in I^0$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.

iii. $\forall x \in I^0$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.

iv. $\forall x \in I^0$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır (Azpeitia, 1994).

Sonuç 2.1.4: f ve g konveks fonksiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu da konvekstir (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992).

Teorem 2.1.5: Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyonlar I^0' de artandır (kesin artandır) (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992).

Teorem 2.1.6: f fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart f' 'nin artan (kesin artan) olmasıdır (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992).

Teorem 2.1.7: f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi mevcutsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in I$ için,

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır (Mitrinovic, Pecaric ve Fink, 1991).

Tanım 2.1.11 (p Normu): X, $\mathbb{R}^n$' de bir küme, μ, X' in alt kümelerinin σ-cebiri üzerinde bir ölçü ve f, X üzerinde tanımlanmış ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\|f\|_p = \begin{cases} \{\int |f|^p d\mu\}^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ sup|f|, & p = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye p-normu denir.

Tanım 2.1.12 (Gamma Fonksiyonu): $n > 0$ için,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanan fonksiyon gamma fonksiyonu olarak tanımlanır (Jeffrey ve Dai, 2008). Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonunun bazı önemli özelliklerini aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz:

- **i.** $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$,
- **ii.** $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,
- **iii.** $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$, $0 < p < 1$,
- **iv.** $2^{2n-1}\Gamma(\mathrm{n})\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2\mathrm{n})$.

Tanım 2.1.13 (Beta Fonksiyonu): $Re(x), Re(y) > 0$ için

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon beta fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu integral $x > 0$ ve $y > 0$ için yakınsaktır (Dragomir ve Pearce, 2000). Beta fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri sağladığı kolayca görülebilir (Jeffrey ve Dai, 2008).

i. $\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y}\beta(x, y),\ x, y \in \mathbb{R}^+$

ii. $\beta(1, y) = \frac{1}{y}$

iii. $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt,\ x, y > 0$

iv. $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\ x, y > 0$

v. $\beta(x, y) = \beta(y, x)$.

Tanım 2.1.14 (Hipergeometrik Fonksiyon): $c > b > 0$, $|z| < 1$ için,

$$ {}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{1}{\beta(b, c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt $$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Hipergeometrik fonksiyon denir (Kilbas, Srivastava ve Trujillo, 2006).

2.2. Konveks Fonksiyonların Sınıflandırılması

Tanım 2.2.1 (Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: S \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \subset \mathbb{R}$ boştan farklı konveks küme olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le max\{f(x), f(y)\} $$

ise f' ye quasi-konveks fonksiyon denir. Eğer,

$$ f(\lambda x + (1-\lambda)y) < max\{f(x), f(y)\} $$

ise f' ye kesin quasi-konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında, eğer

$$ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge max\{f(x), f(y)\} $$

ise f' ye quasi-konkav fonksiyon ve eğer

$$ f(\lambda x + (1-\lambda)y) > max\{f(x), f(y)\} $$

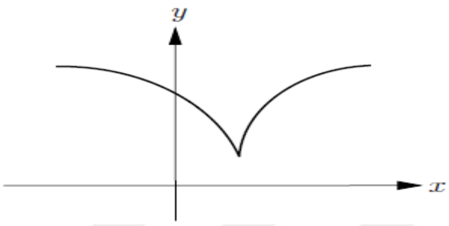
ise f' ye kesin quasi-konkav fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 2.2.2: f hem quasi-konveks hem de quasi-konkav ise f' ye quasi-monotonik fonksiyon denir (Greenberg ve Pierskalla, 1970).

Sonuç 2.2.1: Herhangi bir konveks fonksiyon aynı zamanda bir quasi-konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani quasi-konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar da vardır. Örneğin,

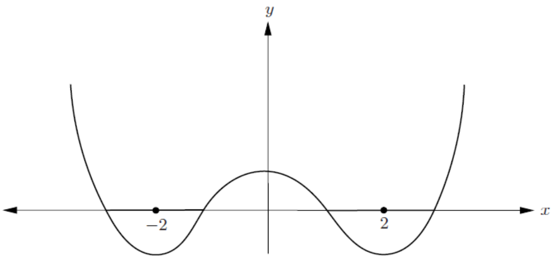
$$g(t) = \begin{cases} t & , \quad t \in [-2,-1] \\ t^2 & , \quad t \in [-1,2] \end{cases}$$

ile tanımlanan $g: [-2,2] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında quasi-konveks fonksiyondur (Ion, 2007).



Şekil 2.7 Quasi Konveks Olup Konveks Olmayan Fonksiyon

Aşağıdaki grafikte, kalın çizgi ile gösterilen aralıklarda fonksiyon quasi-konvekstir. Ama eğrinin tamamı düşünülürse bu fonksiyon quasi-konveks değildir (Ekinci, 2014).



Şekil 2.8: Aralıkta Quasi Konveks Fonksiyon $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

Tanım 2.2.3 (Wright-Konveks Fonksiyon): $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $y > x, \delta > 0$ şartları altında her bir $y + \delta, x \in I$ için

$$f(x + \delta) - f(x) \leq f(y + \delta) - f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye $I \subseteq \mathbb{R}$ de Wright-konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 2.2.4 (Wright-Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $y > x, \delta > 0$ şartları altında $\forall x, y, y + \delta \in I$ ve $\forall t \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2}\left[f(tx+(1-t)y)+f\big((1-t)x+ty\big)\right] \leq max\{f(x), f(y)\}$$

veya

$$\frac{1}{2}[f(y)+f(x+\delta)] \leq max\{f(x), f(y+\delta)\}$$

eşitsizliklerinden biri sağlanıyorsa f ye $I \subseteq \mathbb{R}$ de Wright-quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 2.2.5 (J-Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\forall x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna J-quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 2000).

Tanım 2.2.6 (Log-Konveks Fonksiyon): I, $\mathbb{R}$ de bir aralık $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $\forall x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y) \leq f^{\alpha}(x) f^{1-\alpha}(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Log-konveks fonksiyon denir (Prudnikov, Brychkov ve Marichev, 1981).

Tanım 2.2.7 (Godunova-Levin Fonksiyonu): $f: I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu $\forall x, y \in I, \lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda}+\frac{f(y)}{1-\lambda}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f ye Godunova-Levin fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir. Bu tanıma denk olarak; eğer $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise bu takdirde

$$f(x)(x-y)(x-z)+f(y)(y-x)(y-z)+f(z)(z-x)(z-y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır(Greenberg ve Pierskalla, 1970).

Tanım 2.2.8 (P- fonksiyonu): $f: I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere eğer $\forall x, y \in I, \lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq f(x)+f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna bir P-fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir, Pecaric ve Persson, 1995).

Tanım 2.2.9 (Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon): $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_0^+$ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir (Özdemir ve Yıldız, 2013).

Tanım 2.2.10 (İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon): $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_0^+$ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir (Hwang, 2011).

Tanım 2.2.9 ve Tanım 2.2.10 da $s = 1$ alındığında konveks fonksiyon tanımı elde edilir.

Tanım 2.2.11 ($\boldsymbol{h}$-Konveks Fonksiyon): $h \not\equiv 0$ ve $h: J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I, \alpha \in (0,1)$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y)$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir h-konveks fonksiyon denir. Burada I ve J, $\mathbb{R}$ de iki aralık, $(0,1) \subseteq J$ dir (Wright, 1954). Eğer

- **i.** $h(\alpha) = \alpha$ seçilirse h-konveks fonksiyonu negatif olmayan konveks fonksiyona dönüşür.
- **ii.** $s \in (0,1)$ için $h(\alpha) = \alpha^s$ seçilirse h-konveks fonksiyonu s-konveks fonksiyona dönüşür.

Tanım 2.2.12 (m-Konveks Fonksiyon): $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $m, t \in [0,1]$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna bir m-konveks fonksiyon denir. $f(0) \leq 0$ şartını sağlayan $[0, b]$ aralığında tanımlı olan bütün m-konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir (Tunç, 2011).

Eğer $m = 1$ seçilirse $[0, b]$ aralığında m-konveks fonksiyon bilinen konveks fonksiyona dönüşür.

Tanım 2.2.13 ($(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{m})$-Konveks Fonksiyon): $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $t \in [0,1]$ ve $(\alpha, m) \in [0,1]^2$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^{\alpha} f(x) + m(1 - t^{\alpha}) f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f-fonksiyonuna (α, m)-konveks fonksiyon denir (Mitrinovic, 1970). Burada α ve m' den en az biri sıfırdan farklı olmalıdır.

$(\alpha, m) \in \{(0,0), (1, m), (1,1)\}$ için sırasıyla artan, m-konveks ve konveks fonksiyon sınıflarının elde edildiği kolayca görülebilir.

Tanım 2.2.14 ($(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{m})$-Konveks Fonksiyon): $h: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in [0, b], m \in [0,1]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan f fonksiyonu

$$f(\alpha x + m(1-\alpha)y) \leq h(\alpha) f(x) + m h(1-\alpha) f(y)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna (h, m)-konveks fonksiyon denir (Pecaric, Proschan, ve Tong, 1992).

Tanım 2.2.15 (Geometrik Konveks Fonksiyon): $f: I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir (Hwang, ve Dragomir, 2014).

Tanım 2.2.16 ($\boldsymbol{s}$-Geometrik Konveks Fonksiyon): $f: I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$, $s \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^{t^s} [f(y)]^{(1-t)^s}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna s-geometrik konveks fonksiyon denir (Hwang, ve Dragomir, 2014).

$s = 1$ için, s-geometrik konveks fonksiyon tanımı geometrik konveks fonksiyon tanımına indirgenir.

Tanım 2.2.17 (Quasi Geometrik Konveks Fonksiyonu): $f: I \subseteq \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^{t}y^{1-t}) \leq sup\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna quasi geometrik konveks fonksiyon denir (İşcan, 2015).

Tanım 2.2.18 (Geometrik-Aritmetik Konveks Fonksiyon): $f: I \subseteq \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu $\forall x, y \in I$, $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(x^{\lambda}y^{1-\lambda}\right) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna Geometrik-Aritmetik Konveks (GA-konveks) fonksiyon denir. Burada $x^{\lambda}y^{1-\lambda}$ ifadesi x ve y pozitif sayılarının ağırlıklı geometrik ortalaması ve $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ ifadesi ise $f(x)$ ve $f(y)$ nin ağırlıklı aritmetik ortalamasıdır (Niculescu, 2003).

Tanım 2.2.19 (Birinci anlamda Geometrik-Aritmetik-s Konveks Fonksiyon): $f: I \subseteq \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, $\forall x, y \in I$, $s \in (0,1]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$f\left(x^{\lambda}y^{1-\lambda}\right) \leq (\geq) \lambda^{s} f(x) + (1-\lambda^{s})f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda GA-s-konveks (konkav) fonksiyon denir (İşcan, 2014).

Tanım 2.2.20 (İkinci anlamda Geometrik-Aritmetik-s Konveks Fonksiyon): $f: I \subseteq \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu , $\forall x, y \in I$, $s \in (0,1]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(x^{\lambda}y^{1-\lambda}\right) \leq (\geq) \lambda^{s} f(x) + (1-\lambda)^{s} f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda GA-s-konveks (konkav) fonksiyon denir (İşcan, 2014).

Özel olarak Tanım 2.2.19 ve Tanım 2.2.20' da $s = 1$ alındığında Tanım 2.2.18'deki GA- konveks fonksiyon tanımı elde edilir.

Tanım 2.2.21 (Geometrik Simetrik Fonksiyon): $g: [a, b] \subseteq \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in [a, b]$ için

$$g\left(\frac{ab}{x}\right) = g(x)$$

eşitliğini sağlıyorsa, g fonksiyonuna $\sqrt{ab}$' ye göre geometrik simetrik fonksiyon denir (Latif, Dragomir, ve Momoniat, 2015).

Tanım 2.2.22 (Harmonik Konveks Fonksiyon): $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık olsun. Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) \le tf(y) + (1-t)f(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyondur denir (İşcan ve Wu, 2014).

Tanım 2.2.23 (Harmonik Simetrik Fonksiyon): $g: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in [a, b]$ için

$$g(x) = g\left(\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{x}}\right)$$

eşitliği sağlanıyorsa g fonksiyonuna $\frac{2ab}{a+b}$' ye göre harmonik simetrik fonksiyon denir (İşcan ve Wu, 2014).

Önerme 2.2.1 $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir reel aralık olsun. $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

- **i.** Eğer f fonksiyonu, $I \subset \mathbb{R}^+$ aralığında konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir.
- **ii.** Eğer f fonksiyonu, $I \subset \mathbb{R}^+$ aralığında harmonik konveks ve artmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.
- **iii.** Eğer f fonksiyonu, $I \subset (-\infty, 0)$ aralığında harmonik konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.
- **iv.** Eğer f fonksiyonu, $I \subset (-\infty, 0)$ aralığında konveks ve artmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir (İşcan ve Wu, 2014).

Tanım 2.2.24 (Harmonik s-Konveks Fonksiyon): $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir reel aralık olsun. Eğer $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x, y \in I$, $s \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) \le t^s f(y) + (1-t)^s f(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna bir harmonik-s-konveks fonksiyon denir (İşcan ve Kunt, 2015).

Özel olarak, Tanım 2.2.22' de $s = 1$ alınırsa Tanım 2.2.21 tanımındaki harmonik konveks fonksiyon tanımına indirgenir.

Önerme 2.2.2: $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir reel aralık olsun. $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

- **i.** Eğer f fonksiyonu s-konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonu harmonik-s konveks fonksiyondur.
- **ii.** Eğer f fonksiyonu harmonik s-konveks ve artmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonu s-konveks fonksiyondur (İşcan ve Kunt, 2015).

Örnek 2.2.1: $s \in (0,1]$ ve $f: (0,1] \to (0,1], f(x) = x^s$ olarak tanımlansın. f fonksiyonu s-konveks ve azalmayan fonksiyon ise f harmonik s-konveks fonksiyon olur (İşcan ve Kunt, 2015).

Tanım 2.2.25 (Bazı Özel Ortalamalar): Bu başlık altında a, b gibi iki pozitif reel sayı için bazı ortalamalar verilecektir (Bullen, Mitrinovic ve Vasis, 1988).

1. Aritmetik ortalama: $A = A(a,b) \coloneqq \frac{a+b}{2}$
2. Geometrik ortalama: $G = G(a,b) \coloneqq \sqrt{ab}$
3. Harmonik ortalama: $H = H(a,b) \coloneqq \frac{2ab}{a+b}$
4. Logaritmik ortalama:

$$L = L(a,b) \coloneqq \begin{cases} a & , \quad a = b \\ \frac{b-a}{lnb - lna} & , \quad a \neq b \end{cases}$$

5. Identrik ortalama:

$$I = I(a,b) \coloneqq \begin{cases} a & , \quad a = b \\ \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} & , \quad a \neq b \end{cases}$$

6. p-logaritmik ortalama:

$$L_p = L_p(a,b) \coloneqq \begin{cases} a & , \quad a = b \\ \left[\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}} & , \quad a \neq b \end{cases}$$

7. Seiffert ortalama:

$$S = S(a,b) \coloneqq \frac{a-b}{2arcsin\frac{a-b}{a+b}}$$

8. Bencze ortalama:

$$B = B(a,b) \coloneqq \frac{a-b}{arctg\frac{a-b}{a+b}}$$

ortalamaları vardır. Ayrıca, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere L_p nin monoton artan olduğu bilinir ve $L_0 = I,\ L_{-1} = L$ ile gösterilir. Bu ortalamalar arasındaki $H \leq G \leq L \leq I \leq A$ şeklinde bir ilişki yer almaktadır:

Tanım 2.2.26 (Ağırlıklı Aritmetik Ortalama): $x_i \in [a,b], p_i > 0$ ve $P_n \coloneqq \sum_{i=1}^{n} p_i > 0, (i = 1,2,\dots,n)$ olmak üzere

$$A_n(x,p) \coloneqq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

şeklindeki ifadeye $x_i, (i = 1,2,\dots,n)$ sayılarının $p_i (i = 1,2,\dots,n)$ ağırlıklı aritmetik ortalaması denir (Dragomir ve Pearce, 2000).

Tanım 2.2.27 (r-Ortalama): x, y pozitif sayılarının r-inci kuvvetlerine göre kuvvet ortalaması

$$M_r(x,y;\lambda) = \begin{cases} x^{\lambda} y^{1-\lambda} & ,r = 0 \\ (\lambda x^r + (1-\lambda) y^r)^{\frac{1}{r}} & ,r \neq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Dragomir ve Pearce, 2000).

Tanım 2.2.28 (r-Konveks fonksiyon): f pozitif bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq M_r(f(x), f(y); \lambda)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna [a, b] aralığında bir r-konveks fonksiyon denir (Godunova, ve Levin, 1985).

Bu tanımdan 0-konveks fonksiyonların log-konveks fonksiyonlar ve 1-konveks fonksiyonların bilinen konveks fonksiyonlar olduğu sonucuna kolaylıkla ulaşılabilir. Ayrıca r-konvekslik tanımı,

$$f^r(\lambda x + (1-\lambda)y) = \begin{cases} (\lambda f^r(x) + (1-\lambda) f^r(y))^{\frac{1}{r}} & ,r \neq 0 \\ [f(x)]^{\lambda}[f(y)]^{1-\lambda} & ,r = 0 \end{cases}$$

biçiminde genişletilmiştir (Dragomir ve Pearce, 1998).

3. (α,m)-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI EŞİTSİZLİKLER

3.1. (α, m)-Logaritmik Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu kısımda $m-$ ve $(\alpha, m)-$ logaritmik konveks fonksiyonlar için bazı Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri geliştirilecektir.

Teorem 3.1.1 $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in I, a < b$ olsun. Eğer $q \geq 1$ için $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde konveks ise, bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{1/q}$$

ve

$$\left|\frac{f(a+b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{1/q}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Bai ve Ark. 2013).

Tanım 3.1.1 Eğer her $x, y \in [0, b], t \in [0,1], m \in (0,1]$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir $m-$konveks fonksiyon adı verilir(Bai ve Ark. 2013).

Teorem 3.1.2 $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ bir $m-$konveks fonksiyon ve $m \in (0,1]$ olsun. Bu takdirde eğer $0 \leq a < b < \infty$ için $f \in L([a, b])$ ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq min\left\{\frac{f(a)+mf(b/m)}{2}, \frac{mf(a/m)+f(b)}{2}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır (Bai ve Ark. 2013).

Tanım 3.1.2 Eğer her $x, y \in [0, b], t \in [0,1], (a, m) \in (0,1] \times (0,1]$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^a f(x) + m(1-t^a)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna (α, m) −konveks fonksiyon adı verilir (Bai ve Ark. 2013).

Teorem 3.1.3 $I \supset \mathbb{R}_0^+$ bir açık aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $0 \leq a < b < \infty$ için $f' \in L([a, b])$ olsun. Eğer verilen bir $m \in (0,1]$ ve $q \in [1, \infty)$ için $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde m −konveks fonksiyon ise

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{4} min\left\{\left(\frac{|f'(a)|^q + m|f'(b/m)|^q}{2}\right)^{1/q}, \left(\frac{m|f'(a/m)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{1/q}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır (Bai ve Ark. 2013).

Teorem 3.1.4 $I \supset \mathbb{R}_0^+$ bir açık aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $0 \leq a < b < \infty$ için $f' \in L([a, b])$ olsun. Eğer verilen bir $(\alpha, m) \in (0,1] \times (0,1]$ ve $q \in [1, \infty)$ için $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde (α, m) −konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1/q}$$
$$\times \min\left\{\left[v_1|f'(a)|^q + v_2 m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right]^{1/q}, \left[v_2 m\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right.\right.$$
$$\left.\left. + v_1|f'(b)|^q\right]^{1/q}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır, burada

$$v_1 = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\left(\alpha + \frac{1}{2^\alpha}\right) \quad \text{ve} \quad v_2 = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\left(\frac{\alpha^2+\alpha+2}{2} - \frac{1}{2^\alpha}\right)$$

dir (Bai ve Ark. 2013).

Şimdi $m -$ ve $(\alpha, m) -$ logaritmik konveks fonksiyon kavramlarını tanımlayalım.

Tanım 3.1.3 $f: [0, b] \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olmak üzere, eğer her $x, y \in [0, b], m \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx+m(1-t)y) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{m(1-t)}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $m-$ logaritmik konvekstir denir (Bai ve Ark. 2013).

Kolayca görülebilir ki Tanım 3.1.3 te $m=1$ alınırsa bu durumda f fonksiyonu bilinen anlamda logaritmik konveks olacaktır.

Tanım 3.1.4 $f:[0,b] \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olmak üzere, eğer her $x,y \in [0,b]$, $(a,m) \in (0,1] \times (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx+m(1-t)y) \leq [f(x)]^{t^a} [f(y)]^{m(1-t^a)}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $(\alpha,m)-$ logaritmik konveks fonksiyon denir (Bai ve Ark. 2013).

Açıkça görülebilir ki eğer Tanım 3.1.4 te $\alpha=1$ alınırsa bu durumda f fonksiyonu standart $m-$ logaritmik konveks olacaktır.

Lemma 3.1.1 $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a,b \in I$, $a<b$ olsun. Eğer $f' \in L([a,b])$ ise bu takdirde

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)\, f'(ta+(1-t)b)dt$$

eşitliği sağlanır (Bai ve Ark. 2013).

Lemma 3.1.2 $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a,b \in I$, $a<b$ olsun. Eğer $f' \in L([a,b])$ ise bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$= (b-a)\left[\int_0^{1/2} tf'(ta+(1-t)b)dt + \int_{1/2}^1 (1-t)f'(ta+(1-t)b)dt\right]$$

eşitliği sağlanır (Bai ve Ark. 2013).

Teorem 3.1.5 $I \supset \mathbb{R}_0^+$ bir açık aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $0 \leq a < b < \infty$ için $f' \in L([a,b])$ olsun. Eğer verilen bir $(\alpha,m) \in (0,1] \times (0,1]$ ve $q \in [1,\infty)$ için $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $\left[0,\frac{b}{m}\right]$ üzerinde $(\alpha,m)-$logaritmik konveks fonksiyon ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1/q}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^m [E_1(a,m,q)]^{1/q} \tag{3.1}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada

$$\mu = \frac{|f'(a)|}{|f'(b/m)|^m},$$

$$E_1(a,m,q) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \mu = 1, \\ F_1(\mu, aq), & \mu < 1, \\ \mu^{(1-a)q} F_1(\mu, aq), & \mu > 1, \end{cases}$$

ve $u, v > 0$, $u \neq 1$ için

$$F_1(u,v) = \frac{1}{v^2 \ln^2 u}\left[v(u^v - 1)\ln u - 2\left(u^{v/2} - 1\right)^2\right]$$

dir (Bai ve Ark. 2013).

İspat. $q \in [1, \infty)$ olduğunda Tanım 3.1.4, Lemma 3.1.1 ve Hölder eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| = \frac{b-a}{2}\left|\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt\right|$$

$$\le \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 |1-2t|\,|f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1/q}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^m \left(\int_0^1 |1-2t|\,\mu^{qt^\alpha}dt\right)^{1/q}$$

olduğu görülür. Bu durumda $\mu = 1$ için

$$\int_0^1 |1-2t|\mu^{qt^\alpha}dt = \int_0^1 |1-2t|dt = \frac{1}{2}$$

elde edilir. $\mu < 1$ için $\mu^{qt^\alpha} \le \mu^{\alpha qt}$ olup buradan da

$$\int_0^1 |1-2t|\mu^{qt^\alpha}dt \le \int_0^1 |1-2t|\mu^{\alpha qt}dt = \frac{\alpha q\mu^{\alpha q}\ln\mu - \alpha q\ln\mu - 2\mu^{\alpha q} + 4\mu^{\alpha q/2} - 2}{\alpha^2 q^2 \ln^2 \mu}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\mu > 1$ için $\mu^{qt^\alpha} \le \mu^{q(\alpha t+1-\alpha)}$ olacağından bu durumda da

$$\int_0^1 |1-2t|\mu^{qt^\alpha}dt \le \mu^{q(1-\alpha)} \int_0^1 |1-2t|\mu^{\alpha qt}dt$$

$$= \mu^{q(1-\alpha)}\,\frac{\alpha q\mu^{\alpha q}\ln\mu - \alpha q\ln\mu - 2\mu^{\alpha q} + 4\mu^{\alpha q/2} - 2}{\alpha^2 q^2 \ln^2 \mu}$$

elde edilir. Böylece (3.1) eşitsizliği elde edilir. Öte yandan $q = 1$ olduğunda

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| = \frac{b-a}{2}\left|\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t||f'(a)|^{t^\alpha}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m(1-t^\alpha)} dt$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^m E_1(\alpha,m,q)$$

olduğu görülür. Bu ise Teorem 3.1.5 in ispatını tamamlar.

Sonuç 3.1.1 $I \supset \mathbb{R}_0^+$ bir açık aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $0 \leq a < b < \infty$ için $f' \in L([a,b])$ olsun. Eğer verilen bir $m \in (0,1]$ ve $q \in [1,\infty)$ için $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $\left[0,\frac{b}{m}\right]$ üzerinde m −logaritmik konveks fonksiyon ise bu takdirde $q \geq 1$ için

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1/q}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^m [E_1(1,m,q)]^{1/q} \quad (3.2)$$

eşitsizliği sağlanır, burada E_1 Teorem 3.1.5 te tanımlandığı gibidir (Bai ve Ark. 2013).

Teorem 3.1.6 $I \supset \mathbb{R}_0^+$ bir açık aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $0 \leq a < b < \infty$ için $f' \in L([a,b])$ olsun. Eğer verilen bir $(\alpha,m) \in (0,1] \times (0,1]$ ve $q \in [1,\infty)$ için $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $\left[0,\frac{b}{m}\right]$ üzerinde (α,m) −logaritmik konveks fonksiyon ise bu takdirde $q \geq 1$ için

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-3/q}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^m E_2(\alpha,m,q) \quad (3.3)$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada $u,v > 0$, $u \neq 1$ için

$$F_2(u,v) = \frac{1}{v^2 \ln^2 u}\left(\frac{v}{2}u^{v/2}\ln u - u^{v/2} + 1\right),$$

$$F_3(u,v) = \frac{1}{v^2 \ln^2 u}\left(u^v - \frac{v}{2}u^{v/2}\ln u - u^{v/2}\right)$$

olmak üzere

$$E_2(\alpha,m,q) = \begin{cases} 2\left(\frac{1}{8}\right)^{1/q}, & \mu = 1 \\ [F_2(\mu,\alpha q)]^{1/q} + [F_3(\mu,\alpha q)]^{1/q}, & 0 < \mu < 1 \\ \mu^{1-\alpha}\left\{[F_2(\mu,\alpha q)]^{1/q} + [F_3(\mu,\alpha q)]^{1/q}\right\}, & \mu > 1 \end{cases}$$

şeklindedir (Bai ve Ark. 2013).

İspat. $q > 1$ ise Tanım 3.1.4, Lemma 3.1.1 ve Hölder eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t|f'(ta+(1-t)b)|dt+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)|f'(ta+(1-t)b)|dt\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{3}{q}}\left\{\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t|f'(a)|^{qt^\alpha}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq(1-t^\alpha)}dt\right]^{\frac{1}{q}}+\right.$$

$$\left.+\left[\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)|f'(a)|^{qt^\alpha}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{mq(1-t^\alpha)}dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$=\frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-3/q}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^m\left\{\left(\int_0^{1/2} t\mu^{qt^\alpha}dt\right)^{1/q}+\left[\int_{1/2}^1(1-t)\mu^{qt^\alpha}dt\right]^{1/q}\right\}$$

olduğu görülür. Bu durumda eğer $\mu=1$ ise

$$\left(\int_0^{1/2} t\mu^{qt^\alpha}\right)^{1/q}+\left[\int_{1/2}^1(1-t)\mu^{qt^\alpha}dt\right]^{1/q}=2\left(\frac{1}{8}\right)^{1/q}$$

bulunur. Şayet $\mu<1$ ise

$$\left(\int_0^{1/2} t\mu^{qt^\alpha}dt\right)^{1/q}+\left[\int_{1/2}^1(1-t)\mu^{qt^\alpha}dt\right]^{1/q}$$

$$\leq\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t\mu^{\alpha qt}dt\right)^{1/q}+\left[\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)\mu^{\alpha qt}dt\right]^{1/q}$$

$$=\left[\frac{1}{\alpha^2q^2\ln^2\mu}\left(\frac{\alpha q}{2}\mu^{\alpha q/2}\ln\mu-\mu^{\alpha q/2}+1\right)\right]^{1/q}$$

$$+\left[\frac{1}{\alpha^2q^2\ln^2\mu}\left(\mu^{\alpha q}-\frac{\alpha q}{2}\mu^{\alpha q}\ln\mu-\mu^{\alpha q/2}\right)\right]^{1/q}$$

olacaktır. Benzer şekilde $\mu>1$ ise

$$\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t\mu^{qt^\alpha}dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left[\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)\mu^{qt^\alpha}dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t\mu^{q(\alpha t+1-\alpha)}dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left[\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)\mu^{q(\alpha t+1-\alpha)}dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \mu^{1-\alpha}\left\{\left[\frac{1}{\alpha^2 q^2 \ln^2\mu}\left(\frac{\alpha q}{2}\mu^{\frac{\alpha q}{2}}\ln\mu - \mu^{\frac{\alpha q}{2}} + 1\right)\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{1}{\alpha^2 q^2 \ln^2\mu}\left(\mu^{\alpha q} - \frac{\alpha q}{2}\mu^{\alpha q}\ln\mu - \mu^{\alpha q/2}\right)\right]^{1/q}\right\}$$

olacaktır. Böylece (3.3) eşitsizliği elde edilmiş olur. Özel olarak $q = 1$ olduğunda

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t|f'(ta+(1-t)b)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)|f'(ta+(1-t)b)|dt\right]$$

$$\leq (b-a)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t|f'(a)|^{t^\alpha}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m(1-t^\alpha)}dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)|f'(a)|^{t^\alpha}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{m(1-t^\alpha)}dt\right]$$

$$\leq (b-a)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^m E_2(\alpha, m, 1)$$

elde edilir. Bu ise Teorem 3.1.6 nın ispatını tamamlar.

Sonuç 3.1.2 $I \supset \mathbb{R}_0^+$ bir açık aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $0 \leq a < b < \infty$ için $f' \in L([a,b])$ olsun. Eğer verilen bir $m \in (0,1]$ ve $q \in [1,\infty)$ için $|f'(x)|^q$ fonksiyonu $\left[0, \frac{b}{m}\right]$ üzerinde m −logaritmik konveks fonksiyon ise bu takdirde $q \geq 1$ için

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-3/q}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^m E_2(1, m, q) \qquad (3.4)$$

eşitsizliği sağlanır, burada E_2 Teorem 3.1.6 da tanımlandığı gibidir (Bai ve Ark. 2013).

Teorem 3.1.7 $f, g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonları $0 \leq a < b < \infty$ için $f, g \in L([a,b])$ olacak şekilde verilmiş olsun. Eğer $(\alpha, m_i) \in (0,1] \times (0,1]$ $i = 1,2,$ için $\left[0, \frac{b}{m_i}\right]$ üzerinde $f(x)$ fonksiyonu (α, m_1) −logaritmik konveks ve $g(x)$ fonksiyonu da (α, m_2) − logaritmik konveks ise bu takdirde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq (b-a)\left[f\left(\frac{b}{m_1}\right)\right]^{m_1}\left[g\left(\frac{b}{m_2}\right)\right]^{m_2} E_3(\alpha) \qquad (3.5)$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada

$$\eta = f(a)g(a)\left[f\left(\frac{b}{m_1}\right)\right]^{-m_1}\left[g\left(\frac{b}{m_2}\right)\right]^{-m_2}$$

ve

$$E_3(\alpha) = \begin{cases} 1, \ \eta = 1 \\ \frac{\eta^{\alpha}-1}{\alpha \ln \eta}, \ 0 < \eta < 1 \\ \frac{\eta^{1-\alpha}(\eta^{\alpha}-1)}{\alpha \ln \eta}, \ \eta > 1 \end{cases}$$

dir (Bai ve Ark. 2013).

İspat. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının (α, m) −logaritmik konveksliğinden

$$f\left(ta + m_1(1-t)\left(\frac{b}{m_1}\right)\right) \leq [f(a)]^{t^{\alpha}}\left[f\left(\frac{b}{m_1}\right)\right]^{m_1(1-t^{\alpha})}$$

ve

$$g\left(ta + m_2(1-t)\left(\frac{b}{m_2}\right)\right) \leq [g(a)]^{t^{\alpha}}\left[g\left(\frac{b}{m_2}\right)\right]^{m_2(1-t^{\alpha})}$$

yazılabilir ki buradan da

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = (b-a)\int_0^1 f(ta+1-tb)g(ta+1-tb)dt$$

$$\leq (b-a)\int_0^1 [f(a)]^{t^{\alpha}}[g(a)]^{t^{\alpha}}\left[f\left(\frac{b}{m_1}\right)\right]^{m_1(1-t^{\alpha})}\left[g\left(\frac{b}{m_2}\right)\right]^{m_2(1-t^{\alpha})} dt$$

$$= (b-a)\left[f\left(\frac{b}{m_1}\right)\right]^{m_1}\left[g\left(\frac{b}{m_2}\right)\right]^{m_2}\int_0^1 \left\{f(a)g(a)\left[f\left(\frac{b}{m_1}\right)\right]^{m_1}\left[g\left(\frac{b}{m_2}\right)\right]^{m_2}\right\}^{t^{\alpha}} dt$$

olduğu görülür. Bu durumda $\eta = 1$ ise $\int_0^1 \eta^{t^{\alpha}} dt = 1$ olacaktır. Öte yandan $\eta < 1$ olduğunda

$$\int_0^1 \eta^{t^{\alpha}} dt \leq \int_0^1 \eta^{\alpha t} dt = \frac{\eta^{\alpha}-1}{\alpha \ln \eta}$$

ve benzer şekilde $\eta > 1$ olduğunda ise

$$\int_0^1 \eta^{t^{\alpha}} dt \leq \int_0^1 \eta^{\alpha t + 1 - \alpha} dt = \frac{\eta^{1-\alpha}(\eta^{\alpha}-1)}{\alpha \ln \eta}$$

elde edilir. Bu ise Teorem 3.1.7 nin ispatını tamamlar.

Sonuç 3.1.3 $f, g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonları $0 \leq a < b < \infty$ için $f.g \in L([a,b])$ olacak şekilde verilmiş olsun. Eğer verilen keyfi $m_1, m_2 \in (0,1]$ sayıları için

$\left[0, \frac{b}{m_i}\right]$ üzerinde $f(x)$ fonksiyonu $m_1 -$ konveks ve $g(x)$ fonksiyonu da $m_2 -$ konveks ise bu takdirde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq (b-a)\left[f\left(\frac{b}{m_1}\right)\right]^{m_1}\left[g\left(\frac{b}{m_2}\right)\right]^{m_2} E_3(1) \tag{3.6}$$

eşitsizliği sağlanır, burada E_3 Teorem 3.1.7 de tanımlandığı gibidir (Bai ve Ark. 2013).

Sonuç 3.1.4 $f, g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonları $0 \leq a < b < \infty$ için $f.g \in L([a,b])$ olacak şekilde verilmiş olsun. Eğer $(\alpha, m) \in (0,1] \times (0,1]$ için $\left[0, \frac{b}{m}\right]$ üzerinde $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $(\alpha, m) -$ logaritmik konveks ise bu takdirde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq (b-a)\left[f\left(\frac{b}{m}\right)g\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m} E_3(\alpha) \tag{3.7}$$

eşitsizliği sağlanır, burada E_3 Teorem 3.1.7 de tanımlandığı gibidir (Bai ve Ark. 2013).

Sonuç 3.1.5 $f, g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonları $0 \leq a < b < \infty$ için $f.g \in L([a,b])$ olacak şekilde verilmiş olsun. Eğer $m \in (0,1]$ için $\left[0, \frac{b}{m}\right]$ üzerinde $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $m -$ logaritmik konveks ise bu takdirde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq (b-a)\left[f\left(\frac{b}{m}\right)g\left(\frac{b}{m}\right)\right]^{m} E_3(1) \tag{3.8}$$

eşitsizliği sağlanır, burada E_3 Teorem 3.1.7 de tanımlandığı gibidir (Bai ve Ark. 2013).

3.2. (α, m) - Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski Tipli Eşitsizlikler

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^oüzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $a, b \in I$ $a < b$ için $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'(x)| \leq K$ ise

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq K(b-a)\left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right] \tag{3.9}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Bu sonuç literatürde Ostrowski eşitsizliği olarak bilinir. Ostrowski eşitsizliği ile ilgili genelleştirmeler ve yeni sonuçlar için kaynaklara bakılabilir.

Lemma 3.2.1 $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $a, b \in I$ $a < b$ için $f' \in L[a,b]$ olsun. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$f(x) - \frac{1}{b-a}$

$$= \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 tf'(tx+(1-t)a)dt - \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 tf'(tx+(1-t)b)dt \qquad (3.10)$$

eşitliği gerçeklenir (Latif ve Ark., 2012).

Teorem 3.2.1 $f: I \subseteq \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$fonksiyonu I üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $0 \leq a < b < \infty$ için $f' \in L([a,b])$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde $m \in (0,1]$ olmak üzere m-konveks ve $x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \leq K$ ise bu takdirde

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \min\{M_1(x), M_2(x)\} \qquad (3.11)$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada $x \in [a,b]$ olmak üzere

$$M_1(x) = \frac{K}{3}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right] + \frac{m}{6}\left[\frac{(x-a)^2\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right| + (b-x)^2\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|}{b-a}\right]$$

ve

$$M_2(x) = \left(\frac{K}{6} + \frac{m}{3}\left|f'\left(\frac{x}{m}\right)\right|\right)\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right]$$

dir (Latif ve Ark., 2012).

İspat. Lemma 3.2.1 den

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)a)|dt + \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)b)|dt \qquad (3.12)$$

elde edilir. $|f'|$ fonksiyonu keyfi bir $m \in (0,1]$ için $[a,b]$ aralığında m-konveks olduğundan herhangi bir $t \in [0,1]$ için

$$|f'(tx+(1-t)a)| = \left|f'\left(tx + m(1-t)\frac{a}{m}\right)\right|$$

$$\leq t|f'(x)| + m(1-t)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right| \qquad (3.13)$$

ve

$$|f'(tx+(1-t)b)| = \left|f'\left(tx + m(1-t)\frac{b}{m}\right)\right|$$

$$\leq t|f'(x)| + m(1-t)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right| \tag{3.14}$$

yazılabilir. (3.13) ve (3.14) eşitsizlikleri (3.12) de kullanılırsa her $x \in [a,b]$ için

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{K}{3}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right] + \frac{m}{6}\left[\frac{(x-a)^2\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|+(b-x)^2\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|}{b-a}\right] \tag{3.15}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde her $x \in [a,b]$ için

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \left(\frac{K}{6} + \frac{m}{3}\left|f'\left(\frac{x}{m}\right)\right|\right)\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right] \tag{3.16}$$

olduğu aşikardır.

Teorem 3.2.2 $f: I \subseteq \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $0 \leq a < b < \infty$ için $f' \in L([a,b])$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde keyfi $m \in (0,1]$, p, q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ için m-konveks ve $x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \leq K$ ise bu takdirde

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \min\{N_1(x), N_2(x)\} \tag{3.17}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada $x \in [a,b]$ için

$$N_1(x) = \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\frac{K^q}{2} + \frac{m}{2}\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\frac{K^q}{2} + \frac{m}{2}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

ve

$$N_2(x) = \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{K^q}{2} + \frac{m}{2}\left|f'\left(\frac{x}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right]$$

dir (Latif ve Ark., 2012).

İspat. $p > 1$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde Lemma 3.2.1 ve Hölder eşitsizliğinden

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)a)|dt + \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)b)|dt$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 t^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 t^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|f'(tx+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.18}$$

yazılabilir. Öte yandan $|f'|^q$ fonksiyonu keyfi bir $m\in(0,1]$ için $[a,b]$ aralığında $m-$ konveks ve $x\in[a,b]$ için $|f'(x)|\leq K$ olduğundan

$$\int_0^1|f'(tx+(1-t)a)|^q dt\leq\frac{K^q}{2}+\frac{m}{2}\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q$$

ve

$$\int_0^1|f'(tx+(1-t)b)|^q dt\leq\frac{K^q}{2}+\frac{m}{2}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q$$

elde edilir. Bu nedenle (3.18) eşitsizliği

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq\frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{K^q}{2}+\frac{m}{2}\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\frac{(x-a)^2}{b-a}+\left(\frac{K^q}{2}+\frac{m}{2}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\frac{(b-x)^2}{b-a}\right] \tag{3.19}$$

eşitsizliğine dönüşür. Benzer şekilde

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|\leq\frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{K^q}{2}+\frac{m}{2}\left|f'\left(\frac{x}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right] \tag{3.20}$$

olduğu da gösterilenbilir. (3.19) ve (3.20) den (3.17) elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.3 $f:I\subseteq\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $0\leq a<b<\infty$ için $f'\in L([a,b])$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde keyfi $m\in(0,1]$, p, q, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ için m-konveks ve $x\in[a,b]$ için $|f'(x)|\leq K$ ise bu takdirde

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|\leq\min\{S_1(x),S_2(x)\} \tag{3.21}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada $x\in[a,b]$ olmak üzere

$$S_1(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{K^q}{3}+\frac{m}{6}\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\frac{(x-a)^2}{b-a}+\left(\frac{K^q}{3}+\frac{m}{6}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\frac{(b-x)^2}{b-a}\right]$$

ve

$$S_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{K^q}{6} + \frac{m}{3}\left|f'\left(\frac{x}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right]$$

dir (Latif ve Ark., 2012).

İspat. Farzedelim ki $q \geq 1$ olsun. Bu takdirde Lemma 3.2.1 ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
&\qquad \leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)a)|dt + \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)b)|dt \\
&\qquad \leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 t\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)a)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} + \\
&\qquad + \frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 t\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Öte yandan $|f'|^q$ fonksiyonu keyfi bir $m \in (0,1]$ için $[a,b]$ aralığında $m-$ konveks ve $x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \leq K$ olduğundan

$$\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)a)|^q\,dt \leq \frac{K^q}{3} + \frac{m}{6}\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q$$

ve

$$\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)b)|^q\,dt \leq \frac{K^q}{3} + \frac{m}{6}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q$$

olduğu görülür. Bu nedenle Bu nedenle (3.18) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
&\qquad \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{K^q}{3} + \frac{m}{6}\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\frac{(x-a)^2}{b-a} + \left(\frac{K^q}{3} + \frac{m}{6}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\frac{(b-x)^2}{b-a}\right] \quad (3.23)
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür. Benzer şekilde

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{K^q}{6} + \frac{m}{3}\left|f'\left(\frac{x}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right] \quad (3.24)$$

olduğu da gösterilebilir. (3.23) ve (3.24) eşitsizlikleri bize ((3.20) eşitsizliğini verir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.1 Teorem 3.2.2 ve Teorem 3.2.3 ün varsayımları altında, $m = 1$ alındığında $x \in [a,b]$ olmak üzere

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{K}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right] \tag{3.25}$$

ve

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{K}{2}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right] \tag{3.26}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir (Latif ve Ark., 2012).

Teorem 3.2.4 $f: I \subseteq \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $0 \leq a < b < \infty$ için $f' \in L([a,b])$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde $\alpha, m \in (0,1]$ keyfi sabitleri için (α, m)-konveks ve $x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \leq K$ ise bu takdirde

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \min\{M'_1(x), M'_2(x)\} \tag{3.27}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada $x \in [a,b]$ olmak üzere

$$M_1'(x) = \frac{K}{\alpha+2}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right] + \frac{m\alpha}{2(\alpha+2)}\left[\frac{(x-a)^2\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|+(b-x)^2\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|}{b-a}\right]$$

ve

$$M_2'(x) = \frac{1}{\alpha+2}\left(\frac{\alpha K}{2} + m\left|f'\left(\frac{x}{m}\right)\right|\right)\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right]$$

dir (Latif ve Ark., 2012).

İspat. Lemma 3.2.1 den

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)a)|dt + \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)b)|dt \tag{3.28}$$

eşitsizliği yazılabilir. $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde $\alpha, m \in (0,1]$ keyfi sabitleri için (α, m)-konveks olduğundan her $t \in (0,1]$ için

$$|f'(tx+(1-t)a)| = \left|f'\left(tx+(1-t)\frac{a}{m}\right)\right|$$

$$\leq t^\alpha|f'(x)| + m(1-t^\alpha)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right| \tag{3.29}$$

ve

$$|f'(tx+(1-t)b)| = \left|f'\left(tx+(1-t)\frac{b}{m}\right)\right|$$

$$\leq t^{\alpha}|f'(x)| + m(1-t^{\alpha})\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right| \tag{3.30}$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan (3.29) ve (3.30) eşitsizlikleri (3.28) yerine yazılırsa, $x \in [a,b]$ olmak üzere

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{K}{\alpha+2}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right] + \frac{m\alpha}{2(\alpha+2)}\left[\frac{(x-a)^2\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|+(b-x)^2\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|}{b-a}\right] \tag{3.31}$$

elde edilir. Benzer düşünceyle $x \in [a,b]$ olmak üzere

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{1}{\alpha+2}\left(\frac{\alpha K}{2} + m\left|f'\left(\frac{x}{m}\right)\right|\right)\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right]$$

olduğu gösterilebilir. Bu durumda (3.30) ve (3.31) eşitsizliklerinden (3.27) elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.5 $f: I \subseteq \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $0 \leq a < b < \infty$ için $f' \in L([a,b])$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde keyfi $\alpha, m \in (0,1], p$, q , $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ için (α, m)-konveks ve $x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \leq K$ ise bu takdirde

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \min\{N'_1(x), N'_2(x)\} \tag{3.32}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada $x \in [a,b]$ olmak üzere

$$N'_1(x) = \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{K^q}{\alpha+1} + \frac{m\alpha}{\alpha+1}\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\frac{(x-a)^2}{b-a} + \left(\frac{K^q}{\alpha+1} + \frac{m\alpha}{\alpha+1}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\frac{(b-x)^2}{b-a}\right]$$

ve

$$N'_2(x) = \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\alpha K^q}{\alpha+1} + \frac{m}{\alpha+1}\left|f'\left(\frac{x}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right]$$

dir (Latif ve Ark., 2012).

İspat. Farzedelim ki $q > 1$ olsun. Bu takdirde Lemma 3.2.1 ve Hölder eşitsizliğinden

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)a)|dt+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)b)|dt$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 t^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|f'(tx+(1-t)a)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 t^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|f'(tx+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (3.33)$$

yazılabilir. Öte yandan $|f'|^q$ fonksiyonu keyfi bir $\alpha, m \in (0,1]$ için $[a,b]$ aralığında $(\alpha, m)-$ konveks ve $x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \leq K$ olduğundan

$$\int_0^1|f'(tx+(1-t)a)|^q dt \leq \frac{K^q}{\alpha+1}+\frac{m\alpha}{\alpha+1}\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q$$

ve

$$\int_0^1|f'(tx+(1-t)b)|^q dt \leq \frac{K^q}{\alpha+1}+\frac{m\alpha}{\alpha+1}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q$$

yazılabilir. Bu nedenle (3.33) eşitsizliği

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{K^q}{\alpha+1}+\frac{m\alpha}{\alpha+1}\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\frac{(x-a)^2}{b-a}+\left(\frac{K^q}{\alpha+1}+\frac{m\alpha}{\alpha+1}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\frac{(b-x)^2}{b-a}\right] \qquad (3.34)$$

eşitsizliğine dönüşür. Benzer şekilde

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\alpha K^q}{\alpha+1}+\frac{m}{\alpha+1}\left|f'\left(\frac{x}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right] \qquad (3.35)$$

eşitsizliği gösterilebilir. (3.34) ve (3.35) eşitsizlikleri (3.32) yi verir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.6 $f: I \subseteq \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $0 \leq a < b < \infty$ için $f' \in L([a,b])$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde keyfi $\alpha, m \in (0,1], p$, q , $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ için (α, m)-konveks ve $x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \leq K$ ise bu takdirde

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \min\{S'_1(x), S'_2(x)\} \tag{3.26}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada $x \in [a,b]$ olmak üzere

$$S'_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{K^q}{\alpha+2}+\frac{m\alpha}{2(\alpha+2)}\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\frac{(x-a)^2}{b-a}+\left(\frac{K^q}{\alpha+2}+\frac{m\alpha}{\alpha+2}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\frac{(b-x)^2}{b-a}\right]$$

ve

$$S'_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{\alpha K^q}{2(\alpha+2)}+\frac{m}{\alpha+2}\left|f'\left(\frac{x}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right]$$

dir (Latif ve Ark., 2012).

İspat. Farz edelim ki $q \geq 1$ olsun. Bu takdirde Lemma 3.2.1 ve Power-Mean eşitsizliğinden

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)a)|dt+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)b)|dt$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 t\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)a)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 t\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.37}$$

yazılabilir. Öte yandan $|f'|^q$ fonksiyonu keyfi bir $\alpha, m \in (0,1]$ için $[a,b]$ aralığında $(\alpha,m)-$ konveks ve $x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \leq K$ olduğundan

$$\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)a)|^q dt \leq \frac{K^q}{\alpha+2}+\frac{m\alpha}{2(\alpha+2)}\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q$$

ve

$$\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)b)|^q dt \leq \frac{K^q}{\alpha+2}+\frac{m\alpha}{2(\alpha+2)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu nedenle (3.37) eşitsizliği

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{K^q}{\alpha+2}+\frac{m\alpha}{2(\alpha+2)}\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\frac{(x-a)^2}{b-a}+\left(\frac{K^q}{\alpha+2}+\frac{m\alpha}{\alpha+2}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\frac{(b-x)^2}{b-a}\right] \tag{3.38}$$

eşitsizliğine dönüşür. Benzer şekilde

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{\alpha K^q}{2(\alpha+2)}+\frac{m}{\alpha+2}\left|f'\left(\frac{x}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right] \tag{3.39}$$

olduğu gösterilebilir. (3.38) ve (3.39) eşitsizlikleri (3.36) yı verir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.2 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $(0<a<b)$, $f(x)=x^r$, $r\in\mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu takdirde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)=L_r^r(a,b) \tag{3.40}$$

olacaktır. Dolayısıyla (3.11) eşitsizliğinden $x\in[a,b]$ olmak üzere

$$|x^r-L_r^r(a,b)|\leq\min\{M'_1(x),M'_2(x)\},$$

olduğu görülür, burada

$$\mu_r(a,b)=\begin{cases} rb^{r-1}, & r\geq 1\\ |r|a^{r-1}, & r\in(-\infty,0)\cup(0,1)\backslash\{-1\}\end{cases},$$

$$M'_1(x)=\frac{\mu_r(a,b)}{\alpha+2}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right]+\frac{m\alpha}{2(\alpha+2)}\left[\frac{(x-a)^2\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|+(b-x)^2\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|}{b-a}\right],$$

$$M'_2(x)=\frac{1}{\alpha+2}\left(\frac{\alpha\mu_r(a,b)}{2}+m\left|f'\left(\frac{x}{m}\right)\right|\right)\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}\right], x\in[a,b]$$

dir (Latif ve Ark., 2012).

3.3. (α,m)-HA Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Tanım 3.3.1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ olmak üzere, eğer her $x,y\in[a,b]$, $t\in[0,1]$ ve $c\geq 0$ için

$$f(tx+(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y)-ct(1-t)(x-y)^2$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında bir kuvvetli konveks fonksiyondur denir(He ve Ark. 2017).

Tanım 3.3.2 $f:(0,b]\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $m\in(0,1]$ bir sabit olsun. Eğer her $x,y\in(0,b]$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f\left(\left(\frac{t}{x}+m\frac{1-t}{y}\right)^{-1}\right)\leq tf(x)+m(1-t)f(y) \tag{3.41}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f(x)$ fonksiyonu $(0,b]$ aralığında bir m −Harmonik-Aritmetik konveks veya $m - HA -$ konveks fonksiyondur denir. Eğer (3.41) eşitsizliği ters yönde sağlanıyorsa bu takdirde $f(x)$ fonksiyonu $(0,b]$ aralığında bir m −Harmonik-Aritmetik konkav veya kısaca $m - HA -$ konkavdır denir (He ve Ark. 2017).

Tanım 3.3.3 $f:(0,b^*] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $(\alpha,m) \in (0,1]^2$ olsun. Eğer her $x,y \in (0,b^*]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\left(\frac{t}{x} + m\frac{1-t}{y}\right)^{-1}\right) \leq t^\alpha f(x) + m(1-t^\alpha)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f(x)$ fonksiyonu $(0,b^*]$ aralığında bir (α,m) −Harmonik-Aritmetik konveks fonksiyon veya kısaca $(\alpha,m) - HA -$ konveks fonksiyondur denir (He ve Ark. 2017).

Tanım 3.3.4 $f:(0,b^*] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $c \geq 0$, ve $(\alpha,m) \in (0,1]^2$ olsun. Eğer her $x,y \in (0,b^*]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\left(\frac{t}{x} + m\frac{1-t}{y}\right)^{-1}\right) \leq t^\alpha f(x) + m(1-t^\alpha)f(y) - ct(1-t)(x^{-1} - y^{-1})^2 \qquad (3.42)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f(x)$ fonksiyonu $(0,b^*]$ aralığında bir kuvvetli $(\alpha,m) - HA -$ konveks fonksiyondur denir (He ve Ark. 2017).

Hatırlatma 3.3.1 $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}^+$ ve $m = \alpha = 0.3$, $c = 0.05$ olsun. Bu takdirde her $x,y > 0$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\left(\frac{t}{x} + m\frac{1-t}{y}\right)^{-1}\right) = \frac{[ty+m(1-t)x]^2}{(xy)^2} \leq \frac{ty^2+(1-t)(mx)^2}{(xy)^2}$$

ve buradan da

$$t^\alpha y^2 + m(1-t^\alpha)x^2 - ct(1-t)(y-x)^2 - (ty^2 + (1-t)(mx)^2) \geq 0$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $f(x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde bir kuvvetli $(0.3,0.3) - HA -$ konveks fonksiyondur (He ve Ark. 2017).

Bu kısımda amacımız $(\alpha,m) - HA -$ konveks ve kuvvetli $(\alpha,m) - HA -$ konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizliklerini vermektir. Bunun için öncelikle aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır.

Lemma 3.3.1 $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^o$, $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L_1([a,b])$ ise bu takdirde

$$\frac{f(a) + f\big(\mathrm{H}(a,b)\big) + f(b)}{3} - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx = \frac{b-a}{4ab}$$
$$\times \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - t\right)\{[ta^{-1} + (1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1}]^{-2} f'([ta^{-1} + (1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1}]^{-1})$$
$$-[tb^{-1} + (1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1}]^{-2} f'([tb^{-1} + (1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1}]^{-1})\}dt$$

eşitliği gerçeklenir, burada $\mathrm{H}(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$ dir (He ve Ark. 2017).

İspat: $t \in [0,1]$ için $x = (ta^{-1} + (1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^{-1}$ alalım. Bu durumda

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{3} - t\right)(ta^{-1} + (1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^{-2} f'((ta^{-1} + (1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^{-1})dt$$
$$= \frac{2ab}{b-a}\left(\frac{2}{3}f(a) + \frac{1}{3}f\big(\mathrm{H}(a,b)\big)\right) - \left(\frac{2ab}{b-a}\right)^2 \int_a^{\mathrm{H}(a,b)} \frac{f(x)}{x^2}dx$$

yazılabilir. Benzer şekilde $t \in [0,1]$ için $x = (tb^{-1} + (1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^{-1}$ alınırsa

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{3} - t\right)(tb^{-1} + (1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^{-2} f'((tb^{-1} + (1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^{-1})dt$$
$$= -\frac{2ab}{b-a}\left(\frac{2}{3}f(b) + \frac{1}{3}f\big(\mathrm{H}(a,b)\big)\right) + \left(\frac{2ab}{b-a}\right)^2 \int_{\mathrm{H}(a,b)}^{b} \frac{f(x)}{x^2}dx$$

elde edilir. İki eşitlik taraf tarafa toplanırsa istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 3.3.1 $f: (0, b^*] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon, $a, b \in (0, b^*]$, $a < b$ ve $f' \in L_1([a,b])$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu keyfi sabit bir $c \geq 0$ ve $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ için $(0, b]$ üzerinde kuvvetli $(\alpha, m) - HA$ −konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a) + f\big(\mathrm{H}(a,b)\big) + f(b)}{3} - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right| \tag{3.43}$$
$$\leq \frac{b-a}{4ab}\{S(a,b;\alpha)|f'(a)| + m[S(a,b;0) - S(a,b;\alpha)]\left|f'\left(m\mathrm{H}(a,b)\right)\right|$$
$$- c[S(a,b;1) - S(a,b;2)][a^{-1} - [m\mathrm{H}(a,b)]^{-1}]^2$$
$$+ S(b,a;\alpha)|f'(b)| + m[S(b,a;0) - S(b,a;\alpha)]\left|f'\left(m\mathrm{H}(a,b)\right)\right|$$
$$- c[S(a,b;1) - S(a,b;2)][[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1}]^2\}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada

$$S(a,b;\alpha)=\frac{[\mathrm{H}(a,b)]^2}{\alpha+2}\ {}_2F_1\left(2,\alpha+2;\alpha+3;\frac{a-\mathrm{H}(a,b)}{a}\right)$$
$$+\frac{2[\mathrm{H}(a,b)]^2}{3^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2)}\ {}_2F_1\left(2,\alpha+1;\alpha+3;\frac{a-\mathrm{H}(a,b)}{3a}\right)$$
$$-\frac{[\mathrm{H}(a,b)]^2}{3(\alpha+1)}\ {}_2F_1\left(2,\alpha+1;\alpha+2;\frac{a-\mathrm{H}(a,b)}{a}\right)$$

olup ${}_2F_1(c,d;e;z)$ fonksiyonu $e>d>0$, $|z|<1$ ve $c\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$${}_2F_1(c,d;e;z)=\frac{\Gamma(e)}{\Gamma(d)\Gamma(e-d)}\int_0^1 t^{d-1}(1-t)^{e-d-1}(1-zt)^{-c}dt \tag{3.44}$$

İle tanımlı bir hipergeometrik fonksiyondur (He ve Ark. 2017).

İspat: Lemma 3.3.1 ve $|f'|$ fonksiyonunun kuvvetli $(\alpha,m)-HA$ −konveksliğinden

$$\left|\frac{f(a)+f(\mathrm{H}(a,b))+f(b)}{3}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{4ab}\left[\int_0^1\left|\frac{1}{3}-t\right|(ta^{-1}+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^{-2}\,|f'((ta^{-1}+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^{-1})|dt\right] \tag{3.45}$$
$$+\int_0^1\left|\frac{1}{3}-t\right|(tb^{-1}+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^{-2}|f'((tb^{-1}+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^{-1})|dt$$

$$\leq\frac{b-a}{4ab}\left\{\int_0^1\left|\frac{1}{3}-t\right|(ta^{-1}+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^{-2}\left[t^\alpha|f'(a)|\right.\right.$$
$$\left.+m(1-t^\alpha)\left|f'(m\mathrm{H}(a,b))\right|-ct(1-t)(a^{-1}-[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^2\right]dt$$
$$+\int_0^1\left|\frac{1}{3}-t\right|(tb^{-1}+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^{-2}\left[t^\alpha|f'(b)|\right.$$
$$\left.\left.+m(1-t^\alpha)\left|f'(m\mathrm{H}(a,b))\right|-ct(1-t)(b^{-1}-[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^2\right]dt\right\}$$

eşitsizliği yazılabilir. Öte yandan

$$\int_0^1\left|\frac{1}{3}-t\right|(ta^{-1}+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^{-2}dt=S(a,b;0), \tag{3.46}$$

$$\int_0^1 t(1-t)\left|\frac{1}{3}-t\right|(ta^{-1}+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^{-2}dt=S(a,b;1)-S(a,b;2),$$

$$\int_0^1\left|\frac{1}{3}-t\right|(ta^{-1}+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^{-2}t^\alpha dt=S(a,b;\alpha) \tag{3.47}$$

olduğundan (3.46) ve (3.47) ifadeleri (3.45) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa

$$\left|\frac{f(a)+f\big(\mathrm{H}(a,b)\big)+f(b)}{3}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{4ab}\left\{\int_0^1\left|\frac{1}{3}-t\right|(ta^{-1}+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^{-2}\left[t^\alpha|f'(a)|\right.\right.$$

$$+m(1-t^\alpha)\left|f'\big(m\mathrm{H}(a,b)\big)\right|-ct(1-t)(a^{-1}-[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^2\Big]dt$$

$$+\int_0^1\left|\frac{1}{3}-t\right|(tb^{-1}+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^{-2}\left[t^\alpha|f'(b)|\right.$$

$$\left.\left.+m(1-t^\alpha)\left|f'\big(m\mathrm{H}(a,b)\big)\right|-ct(1-t)(b^{-1}-[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^2\right]dt\right\}$$

$$=\frac{b-a}{4ab}\Big\{S(a,b;\alpha)|f'(a)|+m[S(a,b;0)-S(a,b;\alpha)]\left|f'\big(m\mathrm{H}(a,b)\big)\right|$$

$$-c[S(a,b;1)-S(a,b;2)][a^{-1}-[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1}]^2$$

$$+S(b,a;\alpha)|f'(b)|+m[S(b,a;0)-S(b,a;\alpha)]\left|f'\big(m\mathrm{H}(a,b)\big)\right|$$

$$-c[S(b,a;1)-S(b,a;2)][[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1}-b^{-1}]^2\Big\}$$

elde edilir ve böylece Teorem 3.3.1 ispatlanmış olur.

Teorem 3.3.2 $f:(0,b^*]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon, $a,b\in(0,b^*]$, $a<b$ ve $f'\in L_1([a,b])$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu keyfi sabit bir $c\geq 0$ ve $(\alpha,m)\in(0,1]^2$ için $(0,b]$ üzerinde kuvvetli $(\alpha,m)-HA$ −konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+f\big(\mathrm{H}(a,b)\big)+f(b)}{3}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{4ab}\Big\{Q(a,b;\alpha)|f'(a)|+m\frac{29a^2+16[\mathrm{H}(a,b)]^2-162Q(a,b;\alpha)}{162}\left|f'\big(m\mathrm{H}(a,b)\big)\right|-$$

$$-c\frac{116a^2+69[\mathrm{H}(a,b)]^2}{4860}[a^{-1}-[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1}]^2+Q(b,a;\alpha)|f'(b)|+$$

$$+m\frac{29b^2+16[\mathrm{H}(a,b)]^2-162Q(b,a;\alpha)}{162}\left|f'\big(m\mathrm{H}(a,b)\big)\right|-$$

$$-c\frac{116b^2+69[\mathrm{H}(a,b)]^2}{4860}[b^{-1}-[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1}]^2\Big\}\qquad(3.48)$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada

$$Q(a,b;\alpha)=\frac{(\alpha+1)[2\times 3^{\alpha+2}\alpha+3^{\alpha+3}+2]a^2+2[(3^{\alpha+2}+2)\alpha+8][\mathrm{H}(a,b)]^2}{3^{\alpha+3}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}$$

dir (He ve Ark. 2017).

İspat: Lemma 3.3.1 den

$$\left|\frac{f(a)+f(\mathrm{H}(a,b))+f(b)}{3}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\right|\le$$

$$\frac{b-a}{4ab}\left[\int_0^1\left|\frac{1}{3}-t\right|\left(ta^{-1}+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1}\right)^{-2}\left|f'\left(\left(ta^{-1}+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1}\right)\right)^{-1}\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1\left|\frac{1}{3}-t\right|\left(tb^{-1}+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1}\right)^{-2}\left|f'\left(\left(tb^{-1}+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1}\right)\right)^{-1}\right|dt\right]$$

yazılabilir. Öte yandan GA-eşitsizliğinden $t\in[0,1]$ için

$$\left(ta^{-1}+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1}\right)^{-2}\le ta^2+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^2$$

elde edilir. $|f'|$ fonksiyonunun kuvvetli $(\alpha,m)-HA$ −konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(\mathrm{H}(a,b))+f(b)}{3}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\right|\\
&\le\frac{b-a}{4ab}\left\{\int_0^1\left|\frac{1}{3}-t\right|\left(ta^2+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^2\right)\left[t^\alpha|f'(a)|\right.\right.\\
&\left.+m(1-t^\alpha)\left|f'(m\mathrm{H}(a,b))\right|-ct(1-t)\left(a^{-1}-[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1}\right)^2\right]dt\\
&+\int_0^1\left|\frac{1}{3}-t\right|\left(tb^2+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^2\right)\left[t^\alpha|f'(b)|\right.\\
&\left.\left.+m(1-t^\alpha)\left|f'(m\mathrm{H}(a,b))\right|-ct(1-t)\left(b^{-1}-[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1}\right)^2\right]dt\right\}\\
&=\frac{b-a}{4ab}\left\{Q(a,b;\alpha)|f'(a)|\right.\\
&+m\frac{29a^2+16[\mathrm{H}(a,b)]^2-162Q(a,b;\alpha)}{162}\left|f'(m\mathrm{H}(a,b))\right|\\
&-c\frac{116a^2+69[\mathrm{H}(a,b)]^2}{4860}\left[a^{-1}-[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1}\right]^2\\
&+Q(b,a;\alpha)|f'(b)|\\
&+m\frac{29b^2+16[\mathrm{H}(a,b)]^2-162Q(b,a;\alpha)}{162}\left|f'(m\mathrm{H}(a,b))\right|\\
&\left.-c\frac{116b^2+69[\mathrm{H}(a,b)]^2}{4860}\left[b^{-1}-[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1}\right]^2\right\}
\end{aligned}$$

olduğu görülür ve böylece Teorem 3.3.2 ispatlanmış olur.

Sonuç 3.3.1 Teorem 3.3.2 nin koşulları altında, eğer $\alpha=1$ alınırsa bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+f(\mathrm{H}(a,b))+f(b)}{3}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\right|\leq\frac{b-a}{19440ab}\{5[137a^2+37[\mathrm{H}(a,b)]^2]|f'(a)|+$$
$$5[137b^{\,2}+37[\mathrm{H}(a,b)]^2]|f'(b)|+5m[37(a^2+b^2)+$$
$$118[\mathrm{H}(a,b)]^2]\left|f'\big(m\mathrm{H}(a,b)\big)\right|-c[116a^2+69[\mathrm{H}(a,b)]^2][a^{-1}-$$
$$[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1}]^2-c[116b^2+69[\mathrm{H}(a,b)]^2][b^{-1}-[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1}]^2\} \tag{3.49}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Teorem 3.3.3 $f:(0,b^*]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon, $a,b\in(0,b^*]$, $a<b$ ve $f'\in L_1([a,b])$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu keyfi sabit bir $c\geq 0$, $q>1$ ve $(\alpha,m)\in(0,1]^2$ için $(0,b]$ üzerinde kuvvetli $(\alpha,m)-HA$ −konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+f(\mathrm{H}(a,b))+f(b)}{3}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{4ab}\Bigg\{\Big(S\big(a^{2q/(q-1)},[\mathrm{H}(a,b)]^{2q/(q-1)}\big)\Big)^{1-1/q}\Bigg[\frac{3^\alpha(6\alpha+3)+2}{3^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2)}|f'(a)|^q+$$
$$m\frac{3^\alpha(5\alpha^2+3\alpha+4)-4}{2\times3^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2)}\left|f'\big(m\mathrm{H}(a,b)\big)\right|^q-\frac{37c}{972}(a^{-1}-[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^2\Bigg]^{1/q}+$$
$$\Big(S\big(b^{2q/(q-1)},[\mathrm{H}(a,b)]^{2q/(q-1)}\big)\Big)^{1-1/q}\Bigg[\frac{3^\alpha(6\alpha+3)+2}{3^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2)}|f'(b)|^q+$$
$$m\frac{3^\alpha(5\alpha^2+3\alpha+4)-4}{2\times3^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2)}\left|f'\big(m\mathrm{H}(a,b)\big)\right|^q-\frac{37c}{972}(b^{-1}-[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^2\Bigg]^{1/q}\Bigg\} \tag{3.50}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada $S(u,v)$ fonksiyonu $v\neq u$ için

$$S(u,v)=\frac{2u^{1/3}L(v^{2/3},u^{2/3})-v^{2/3}L(v^{1/3},u^{1/3})+v-2u}{3(\ln v-\ln u)}$$

ve $L(u,v)$ logaritmik ortalaması

$$L(u,v)=\begin{cases}\dfrac{v-u}{\ln v-\ln u}, & u\neq v\\ u, & u=v\end{cases}$$

şeklindedir (He ve Ark. 2017).

İspat: GA-eşitsizliğinden $t\in[0,1]$ için

$$(ta^{-1}+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^{-2q/(q-1)}\leq a^{2tq/(q-1)}[\mathrm{H}(a,b)]^{2(1-t)q/(q-1)}$$

yazılabilir. Lemma 3.3.1 in yanında Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$ fonksiyonunun kuvvetli $(\alpha,m)-HA$ −konveksliği kullanılırsa

$$\left|\frac{f(a)+f(\mathrm{H}(a,b))+f(b)}{3}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{4ab}\left\{\left(\int_0^1\left|\frac{1}{3}-t\right|\left[a^{2tq/(q-1)}[\mathrm{H}(a,b)]^{2(1-t)q/(q-1)}\right]dt\right)^{1-1/q}\right.$$

$$\times\left(\int_0^1\left|\frac{1}{3}-t\right||f'((ta^{-1}+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^{-1})|^q\,dt\right)^{1/q}$$

$$+\left(\int_0^1\left|\frac{1}{3}-t\right|\left[b^{2tq/(q-1)}[\mathrm{H}(a,b)]^{2(1-t)q/(q-1)}\right]dt\right)^{1-1/q}$$

$$\left.\times\left(\int_0^1\left|\frac{1}{3}-t\right||f'((tb^{-1}+(1-t)[\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^{-1})|^q\,dt\right)^{1/q}\right\}$$

$$\leq\frac{b-a}{4ab}\left\{\left(S\left(a^{2q/(q-1)},[\mathrm{H}(a,b)]^{2q/(q-1)}\right)\right)^{1-1/q}\left[\int_0^1\left|\frac{1}{3}-t\right|\left(t^\alpha|f'(a)|^q\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+m(1-t^\alpha)\left|f'(m\mathrm{H}(a,b))\right|^q-ct(1-t)(a^{-1}-[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^2\right)dt\right]^{1/q}$$

$$+\left(S\left(b^{2q/(q-1)},[\mathrm{H}(a,b)]^{2q/(q-1)}\right)\right)^{1-1/q}\left[\int_0^1\left|\frac{1}{3}-t\right|\left(t^\alpha|f'(b)|^q\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+m(1-t^\alpha)\left|f'(m\mathrm{H}(a,b))\right|^q-ct(1-t)(b^{-1}-[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^2\right)dt\right]^{1/q}\right\}$$

$$=\frac{b-a}{4ab}\left\{\left(S\left(a^{2q/(q-1)},[\mathrm{H}(a,b)]^{2q/(q-1)}\right)\right)^{1-1/q}\left[\frac{3^\alpha(6\alpha+3)+2}{3^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2)}|f'(a)|^q\right.\right.$$

$$\left.+m\frac{3^\alpha(5\alpha^2+3\alpha+4)-4}{2\times3^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2)}\left|f'(m\mathrm{H}(a,b))\right|^q-\frac{37c}{972}(a^{-1}-[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^2\right]^{1/q}$$

$$+\left(S\left(b^{2q/(q-1)},[\mathrm{H}(a,b)]^{2q/(q-1)}\right)\right)^{1-1/q}\left[\frac{3^\alpha(6\alpha+3)+2}{3^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2)}|f'(b)|^q\right.$$

$$\left.\left.+m\frac{3^\alpha(5\alpha^2+3\alpha+4)-4}{2\times3^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2)}\left|f'(m\mathrm{H}(a,b))\right|^q-\frac{37c}{972}(b^{-1}-[m\mathrm{H}(a,b)]^{-1})^2\right]^{1/q}\right\}$$

olduğu görülür ve böylece Teorem 3.3.3 ispatlanmış olur.

Teorem 3.3.4 $f:(0,b^*]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon, $a,b\in(0,b^*]$, $a<b$ ve $f'\in L_1([a,b])$ olsun. Eğer f fonksiyonu keyfi sabit bir $c\geq0$ ve $(\alpha,m)\in(0,1]^2$ için $(0,b]$ üzerinde kuvvetli $(\alpha,m)-HA$ −konveks ise bu takdirde

$$f(\mathrm{H}(a,b))\leq\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)+m(2^\alpha-1)f(mx)}{2^\alpha x^2}dx-\frac{c[(1-m)^2(a^2+ab+b^2)+m(b-a)^2]}{12(mab)^2}\quad(3.51)$$

ve

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \le \min\left\{\frac{f(a)+m\alpha f(mb)}{\alpha+1}, \frac{m\alpha f(ma)+f(b)}{\alpha+1}\right\} - \frac{c(mb-a)^2}{6(mab)^2} \tag{3.52}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir (He ve Ark. 2017).

İspat: f fonksiyonunun kuvvetli $(\alpha, m) - HA$ −konveksliğinden

$$f(\mathrm{H}(a,b)) = \int_0^1 f\left(\frac{2}{ta^{-1}+(1-t)b^{-1}+tb^{-1}+(1-t)a^{-1}}\right)dt$$

$$\le \frac{1}{2^\alpha}\int_0^1 [f((ta^{-1}+(1-t)b^{-1})^{-1}) + m(2^\alpha-1)f(m(tb^{-1}+(1-t)a^{-1})^{-1})]dt$$

$$-\frac{c\{[(1-m)^2+m](a^2+b^2)+[(1-m)^2-2m]ab\}}{12(mab)^2} \tag{3.53}$$

yazılabilir. $t \in [0,1]$ için $x = [ta^{-1}+(1-t)b^{-1}]^{-1}$ ve $x = [tb^{-1}+(1-t)a^{-1}]^{-1}$ alınarak

$$\int_0^1 f((ta^{-1}+(1-t)b^{-1})^{-1})\,dt = \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx, \tag{3.54}$$

$$\int_0^1 f(m(tb^{-1}+(1-t)a^{-1})^{-1})dt = \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(mx)}{x^2}dx \tag{3.55}$$

elde edilir. (3.54) ve (3.55) eşitlikleri (3.53) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa (3.51) elde edilir. Benzer şekilde $t \in [0,1]$ için $x = [ta^{-1}+(1-t)b^{-1}]^{-1}$ alınırsa

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx = \int_0^1 f((ta^{-1}+(1-t)b^{-1})^{-1})\,dt$$

$$\le \int_0^1 \left[t^\alpha f(a) + m(1-t^\alpha)f(mb) - ct(1-t)\frac{(mb-a)^2}{(mab)^2}\right]dt$$

$$= \frac{f(a)+m\alpha f(mb)}{\alpha+1} - \frac{c(mb-a)^2}{6(mab)^2}$$

olduğu görülür. Böylece (3.52) eşitsizliği gösterilmiş olur ki bu da Teorem 3.3.4 ün ispatını tamamlar.

Sonuç 3.3.2 Teorem 3.3.4 ün koşulları altında eğer $\alpha = m = 1$ alınırsa bu durumda

$$f(\mathrm{H}(a,b)) + \frac{c(b-a)^2}{12(ab)^2} \le \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{c(b-a)^2}{6(ab)^2}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Teorem 3.3.5 $f: (0, b^*] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon, $a, b \in (0, b^*]$, $a < b$ ve $f' \in L_1([a, b])$ olsun. Eğer f fonksiyonu keyfi sabit bir $c \geq 0$ ve $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ için $(0, b]$ üzerinde kuvvetli $(\alpha, m) - HA$ −konveks ise bu takdirde

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{1}{\alpha+1}\min\{b^2{}_2F_1(2, \alpha+1; \alpha+2; 1-a^{-1}b)f(a) \tag{3.56}$$

$$+m\alpha b^2{}_2F_1(1, \alpha+1; \alpha+2; 1-a^{-1}b)f(mb), a^2{}_2F_1(2, \alpha+1; \alpha$$

$$+2; 1-b^{-1}a)f(b) + m\alpha a^2{}_2F_1(1, \alpha+1; \alpha+2; 1-b^{-1}a)f(ma)\}$$

$$-\frac{c[(a+b)\ln(a^{-1}b) - 2(b-a)](mb-a)^2}{m^2(b-a)^3}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada ${}_2F_1(c,d;e;z)$ fonksiyonu (3.44) ifadesi ile tanımlanan hipergeometrik fonksiyondur. Özel olarak $\alpha = m = 1$ alınırsa

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{a^2b\left[b\ln\left(a^{-1}b\right) - (b-a)\right]}{(b-a)^2} f(a)$$

$$+\frac{ab^2\left[(b-a) - a\ln\left(a^{-1}b\right)\right]}{(b-a)^2} f(b) - \frac{c\left[(a+b)\ln\left(a^{-1}b\right) - 2(b-a)\right]}{b-a}$$

olacaktır (He ve Ark. 2017).

İspat: $t \in [0,1]$ için $x = [ta^{-1} + (1-t)b^{-1}]^{-1}$ alınırsa f fonksiyonunun kuvvetli $(\alpha, m) - HA$ −konveksliğinden

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 [ta^{-1} + (1-t)b^{-1}]^{-2} f((ta^{-1} + (1-t)b^{-1})^{-1})dt$$

$$\leq \int_0^1 [ta^{-1} + (1-t)b^{-1}]^{-2}[t^\alpha f(a) + m(1-t^\alpha)f(mb) - ct(1-t)(a^{-1} - (mb)^{-1})^2]\, dt$$

$$= \frac{b^2}{\alpha+1}\ {}_2F_1\left(2, \alpha+1, \alpha+2, 1-\frac{b}{a}\right) f(a) + \frac{m\alpha b^2}{\alpha+1}\ {}_2F_1\left(1, \alpha+1, \alpha+2, 1-\frac{b}{a}\right) f(mb)$$

$$-c\,\frac{\left[(a+b)\ln\left(a^{-1}b\right) - 2(b-a)\right](mb-a)^2}{m^2(b-a)^3}$$

elde edilir ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.6 $f: (0, b^*] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon, $a, b \in (0, b^*]$, $a < b$ ve $f' \in L_1([a, b])$ olsun. Eğer f fonksiyonu keyfi sabit bir $c \geq 0$ ve $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ için $(0, b]$ üzerinde kuvvetli $(\alpha, m) - HA$ −konveks ise bu takdirde

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{(\alpha+1)a^2+b^2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}f(a)$$

$$+\frac{m\alpha\big((\alpha+1)a^2+(\alpha+3)b^2\big)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}f(mb)-c\frac{(a^2+b^2)(mb-a)^2}{12(mab)^2} \tag{3.57}$$

eşitsizliği gerçeklenir (He ve Ark. 2017).

İspat: $t \in [0,1]$ için $x = [ta^{-1} + (1-t)b^{-1}]^{-1}$ olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun kuvvetli $(\alpha, m) - HA$ –konveksliğinden

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 (ta^{-1} + (1-t)b^{-1})^{-2} f((ta^{-1} + (1-t)b^{-1})^{-1})dt$$

$$\le \int_0^1 [ta^2 + (1-t)b^2][t^\alpha f(a) + m(1-t^\alpha)f(mb) - ct(1-t)(a^{-1} - (mb)^{-1})^2]dt$$

$$= \frac{(\alpha+1)a^2+b^2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}f(a) + \frac{m\alpha\big((\alpha+1)a^2+(\alpha+3)b^2\big)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}f(mb) - c\frac{(a^2+b^2)(mb-a)^2}{12(mab)^2}$$

elde edilir ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 3.3.3 Teorem 3.3.6 nın koşulları altında eğer $\alpha = m = 1$ alınırsa bu takdirde

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{(2a^2+b^2)f(a)+(a^2+2b^2)f(b)}{6} - c\frac{(a^2+b^2)(b-a)^2}{12(ab)^2} \tag{3.58}$$

eşitsizliği gerçeklenir (He ve Ark. 2017).

3.4. (α, m)-GA Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda (α, m)-GA konveks fonksiyon kavramı tanımlanıp bu tipten fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri verilecektir.

Tanım 3.4.1 $f: \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her $x, y \in \mathrm{I}$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \le tf(x) + (1-t)f(y)$$

ise bu fonksiyona GA-konvekstir denir (Shuang ve Ark. 2017).

Tanım 3.4.2 $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $b > 0$ ve $m \in (0,1]$ olmak üzere eğer her $x, y \in [0, b]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \le tf(x) + m(1-t)f(y)$$

eşitsizliği gerçekleşiyorsa bu fonksiyona $[0, b]$ üzerinde $m-$konvekstir denir (Shuang ve Ark. 2017).

Tanım 3.4.3 $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $b > 0$ ve $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ olmak üzere eğer her $x, y \in [0, b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + m(1-\lambda)y) \leq \lambda^{\alpha} f(x) + m(1-\lambda^{\alpha}) f(y) \tag{3.59}$$

eşitsizliği gerçekleşiyorsa $f(x)$ fonksiyonuna $[0, b]$ aralığı üzerinde $(\alpha, m) -$ konveks fonksiyon denir (Shuang ve Ark. 2017).

Şimdi bazı konveks fonksiyon türleri için aşağıdaki teoremleri ispatsız olarak verelim.

Teorem 3.4.1 $f: \mathrm{I}^{\circ} \subseteq \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in \mathrm{I}^{\circ}$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \frac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{8} \tag{3.60}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Shuang ve Ark. 2017).

Teorem 3.4.2: $\mathrm{I}^{\circ} \subseteq \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in \mathrm{I}^{\circ}$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ de konveks ve $q \geq 1$ ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{1/q} \tag{3.61}$$

ve

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{1/q} \tag{3.62}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir (Shuang ve Ark. 2017).

Teorem 3.4.3 $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ $m-$konveks ve $m \in (0,1]$ olsun. Eğer $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ ve $a < b$ için $f \in L_1([a, b])$ ise bu takdirde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \min\left\{\frac{f(a)+mf(b/m)}{2}, \frac{mf(a/m)+f(b)}{2}\right\} \tag{3.63}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Shuang ve Ark. 2017).

Teorem 3.4.4 $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ $m-$konveks ve $m \in (0,1]$ olsun. Eğer $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ ve $a < b$ için $f \in L_1([a, b])$ ise bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)+mf(x/m)}{2}dx \leq \frac{m+1}{4}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + m\frac{f(a/m)+f(b/m)}{2}\right] \quad (3.64)$$

eşitsizliği gerçeklenir (Shuang ve Ark. 2017).

Teorem 3.4.5 $\mathrm{I} \supseteq \mathbb{R}_0^+$ bir reel açık aralık ve $f: \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde diferansiyellenebilir olmak üzere $f' \in L([a,b])$, $0 \leq a < b < \infty$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $m, \alpha \in (0,1]$ ve $q \geq 1$ olmak üzere $[a,b]$ aralığında (α, m) −konveks ise bu takdirde

$$v_1 = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\left(\alpha + \frac{1}{2^\alpha}\right) \text{ ve } v_2 = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\left(\frac{\alpha^2+\alpha+2}{2} - \frac{1}{2^\alpha}\right)$$

olmak üzere

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1/q} \quad (3.65)$$

$$\times \min\left\{\left[v_1|f'(a)|^q + v_2 m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right]^{1/q}, \left[v_2 m\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q + v_1|f'(b)|^q\right]^{1/q}\right\}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Shuang ve Ark. 2017).

Tanım 3.4.4 $f: (0, b^*] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ olmak üzere eğer her $x, y \in (0, b^*]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(x^t y^{m(1-t)}\right) \leq t^\alpha f(x) + m(1-t^\alpha)f(y) \quad (3.66)$$

eşitsizliği gerçeklenirse bu fonksiyona $I = (0, b^*]$ üzerinde (α, m) −GA konvekstir denir(Shuang ve Ark. 2017).

Lemma 3.4.1 $f: \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in \mathrm{I}^\circ$, $0 < a < b$ olsun. Eğer $f' \in L_1([a,b])$ ise bu takdirde

$$\frac{f(a)+4f(\sqrt{ab})+f(b)}{6} - \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \quad (3.67)$$

$$= \frac{\ln b - \ln a}{4}\int_0^1 \left(t - \frac{1}{3}\right)\left[a^{1-t/2}b^{t/2}f'\left(a^{1-t/2}b^{t/2}\right) - a^{t/2}b^{1-t/2}f'\left(a^{t/2}b^{1-t/2}\right)\right]dt$$

eşitliği gerçeklenir (Shuang ve Ark. 2017).

Teorem 3.4.5 $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde diferansiyellenebilir, $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ ve $f' \in L_1([a,b])$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ ve $q \geq 1$ olmak üzere $\left(0, \max\{b, b^{1/m}\}\right]$ üzerinde (α, m) −GA-konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+4f(\sqrt{ab})+f(b)}{6}-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx\right|$$

$$\leq\frac{\ln b-\ln a}{4}\left[\frac{1}{2^{\alpha+2}3^{\alpha+4}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\right]^{1/q}$$

$$\times\left\{M^{(q-1)/q}(a,b)\left[N_1(a,b)|f'(b)|^q+mN_2(a,b)\left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|^q\right]^{1/q}\right.$$

$$\left.+M^{(q-1)/q}(b,a)\left[N_1(b,a)|f'(a)|^q+mN_2(b,a)\left|f'\left(b^{1/m}\right)\right|^q\right]^{1/q}\right\}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada

$$M(u,v)=\frac{2\left[u^{5/6}L\left(u^{1/6},v^{1/6}\right)+u^{1/2}\left(2v^{1/2}-u^{1/2}\right)-2u^{1/2}v^{1/6}L\left(u^{1/3},v^{1/3}\right)\right]}{3(\ln v-\ln u)}$$

$$N_1(u,v)=12(5u+v)\alpha+12(17u+v)+6$$
$$\times 3^{\alpha+2}[(u+v)(2\alpha^2+3)+(9u+5v)\alpha]$$

$$N_2(u,v)=6^{\alpha}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(61u+29v)-6(10u+2v)\alpha$$
$$-12(17u+v)-6\times 3^{\alpha+2}[(u+v)(2\alpha^2+3)+(9u+5v)\alpha]$$

ve

$$L(u,v)=\frac{u-v}{\ln u-\ln v}$$

dir (Shuang ve Ark. 2017).

İspat: Lemma 3.4.1 ve Power-Mean integral eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left|\frac{f(a)+4f(\sqrt{ab})+f(b)}{6}-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx\right|\leq\frac{\ln b-\ln a}{4}$$

$$\times\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|\left[a^{1-t/2}b^{t/2}\left|f'\left(a^{1-t/2}b^{t/2}\right)\right|+a^{t/2}b^{1-t/2}\left|f'\left(a^{t/2}b^{1-t/2}\right)\right|\right]dt$$

$$\leq\frac{\ln b-\ln a}{4} \tag{3.68}$$

$$\times\left\{\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|a^{1-t/2}b^{t/2}dt\right)^{1-1/q}\left[\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|a^{1-t/2}b^{t/2}\left|f'\left(a^{1-t/2}b^{t/2}\right)\right|^q dt\right]^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|a^{t/2}b^{1-t/2}dt\right)^{1-1/q}\left[\int_0^1\left|t-\tfrac{1}{3}\right|a^{t/2}b^{1-t/2}\left|f'\left(a^{t/2}b^{1-t/2}\right)\right|^q dt\right]^{1/q}\right\}$$

olduğu görülür, burada

$$\int_0^1 \left|t-\frac{1}{3}\right| a^{1-t/2} b^{t/2} dt = M(a,b) \ \text{ ve } \ \int_0^1 \left|t-\frac{1}{3}\right| a^{t/2} b^{1-t/2} dt = M(b,a) \qquad (3.69)$$

dir. $|f'|^q$ fonksiyonu $\left(0, \max\{b, b^{1/m}\}\right]$ üzerinde (α, m) $-$GA-konveks olduğundan

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left|t-\frac{1}{3}\right| a^{1-t/2} b^{t/2} \left|f'\left(a^{1-t/2} b^{t/2}\right)\right|^q dt \\ &\le \int_0^1 \left|t-\frac{1}{3}\right| a^{1-t/2} b^{t/2} \left[\frac{t^\alpha}{2^\alpha} |f'(b)|^q + m\left(1-\frac{t^\alpha}{2^\alpha}\right) \left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|^q\right] dt \\ &\le \int_0^1 \left|t-\frac{1}{3}\right| \left[\left(1-\frac{t}{2}\right) a + \frac{t}{2} b\right] \left[\frac{t^\alpha}{2^\alpha} |f'(b)|^q + m\left(1-\frac{t^\alpha}{2^\alpha}\right) \left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|^q\right] dt \\ &= \frac{N_1(a,b)|f'(b)|^q + m N_2(a,b)\left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|^q}{2^{\alpha+2} \times 3^{\alpha+4} (\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} \end{aligned}$$

ve

$$\int_0^1 \left|t-\frac{1}{3}\right| a^{t/2} b^{1-t/2} \left|f'\left(a^{t/2} b^{1-t/2}\right)\right|^q dt = \frac{N_1(b,a)|f'(a)|^q + m N_2(b,a)\left|f'\left(b^{1/m}\right)\right|^q}{2^{\alpha+2} \times 3^{\alpha+4} (\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} \qquad (3.70)$$

olduğu görülür. (3.69) ve (3.70) ifadeleri (3.68) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa iddia sağlanır ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 3.4.1 Teorem 3.4.5 in koşulları altında eğer $q = 1$ alınırsa bu durumda

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(a)+4f(\sqrt{ab})+f(b)}{6} - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx\right| \le \frac{\ln b - \ln a}{6^{4+\alpha}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} \\ &\times \left\{ \begin{array}{c} [N_1(b,a)|f'(a)| + N_1(a,b)|f'(b)|] \\ + m\left[N_2(a,b)\left|f'\left(a^{1/m}\right)\right| + N_2(b,a)\left|f'\left(b^{1/m}\right)\right|\right] \end{array} \right\} \qquad (3.71) \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçeklenir(Shuang ve Ark. 2017).

Sonuç 3.4.2 Teorem 3.4.5 in koşulları altında eğer $\alpha = m = 1$ alınırsa bu durumda

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(a)+4f(\sqrt{ab})+f(b)}{6} - \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx\right| \\ &\le \frac{\ln b - \ln a}{4} \left(\frac{1}{3 \times 6^4}\right)^{1/q} \\ &\times \left\{M^{(q-1)/q}(a,b)[(211a + 137b)|f'(b)|^q \right. \\ &+ (521a + 211b)|f'(a)|^q]^{1/q} \\ &+ M^{(q-1)/q}(b,a)[(137a + 211b)|f'(a)|^q \\ &\left. + (211a + 521b)|f'(b)|^q]^{1/q}\right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçeklenir(Shuang ve Ark. 2017).

Sonuç 3.4.3 Teorem 3.4.5 in koşulları altında eğer $\alpha = m = q = 1$ alınırsa bu durumda

$$\left|\frac{f(a)+4f(\sqrt{ab})+f(b)}{6} - \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx\right|$$

$$\leq \frac{(\ln b - \ln a)[(329a+211b)|f'(a)|+(211a+329b)|f'(b)|]}{6^5} \tag{3.72}$$

eşitsizliği gerçeklenir(Shuang ve Ark. 2017).

Teorem 3.4.6 $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde diferansiyellenebilir, $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ ve $f' \in L_1([a,b])$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ ve $q > 1$ olmak üzere $\left(0, \max\{b, b^{1/m}\}\right]$ üzerinde (α, m) −GA-konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+4f(\sqrt{ab})+f(b)}{6} - \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx\right| \leq \frac{\ln b - \ln a}{4}\left(\frac{(q-1)[2^{(2q-1)/(q-1)}+1]}{(2q-1)3^{(2q-1)/(q-1)}}\right)^{1-1/q} \times$$

$$\left[\frac{1}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2)}\right]^{1/q}\left\{\left[2[(\alpha+3)a^q+(\alpha+1)b^q]|f'(b)|^q + m\{[3\times 2^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)-2(\alpha+3)]a^q+(\alpha+1)[2^\alpha(\alpha+2)-2]b^q\}\left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|^q\right]^{1/q} + \left[2[(\alpha+1)a^q+(\alpha+3)b^q]|f'(a)|^q + m\{(\alpha+1)[2^\alpha(\alpha+2)-2]a^q+[3\times 2^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)-2(\alpha+3)]b^q\}\left|f'\left(b^{1/m}\right)\right|^q\right]^{1/q}\right\} \tag{3.73}$$

eşitsizliği gerçeklenir(Shuang ve Ark. 2017).

İspat: $|f'|^q$ fonksiyonu $\left(0, \max\{b, b^{1/m}\}\right]$ aralığı üzerinde (α, m) −GA-konveks olduğundan Lemma 3.4.1 ve Power-Mean integral eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left|\frac{f(a)+4f(\sqrt{ab})+f(b)}{6} - \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx\right| \leq$$

$$\leq \frac{\ln b - \ln a}{4}\int_0^1 \left|t-\frac{1}{3}\right|\left[a^{1-t/2}b^{t/2}\left|f'\left(a^{1-t/2}b^{t/2}\right)\right| + a^{t/2}b^{1-t/2}\left|f'\left(a^{t/2}b^{1-t/2}\right)\right|\right]dt$$

$$\leq \frac{\ln b - \ln a}{4}\left\{\left(\int_0^1 \left|t-\frac{1}{3}\right|^{q/(q-1)}dt\right)^{1-1/q}\left[\int_0^1 a^{q(1-t/2)}b^{qt/2}\left|f'\left(a^{1-t/2}b^{t/2}\right)\right|^q dt\right]^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1 \left|t-\frac{1}{3}\right|^{q/(q-1)}dt\right)^{1-1/q}\left[\int_0^1 a^{qt/2}b^{q(1-t/2)}\left|f'\left(a^{t/2}b^{1-t/2}\right)\right|^q dt\right]^{1/q}\right\}$$

$$\leq \frac{\ln b-\ln a}{4}\left(\frac{(q-1)\left[2^{(2q-1)/(q-1)}+1\right]}{(2q-1)3^{(2q-1)/(q-1)}}\right)^{1-1/q}$$

$$\times\left\{\left[\int_0^1\left[\left(1-\frac{t}{2}\right)a^q+\frac{t}{2}b^q\right]\left(\frac{t^\alpha}{2^\alpha}|f'(b)|^q+m\left(1-\frac{t^\alpha}{2^\alpha}\right)\left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{1/q}+\right.$$

$$\left.+\left[\int_0^1\left[\frac{t}{2}a^q+\left(1-\frac{t}{2}\right)b^q\right]\left(\frac{t^\alpha}{2^\alpha}|f'(a)|^q+m\left(1-\frac{t^\alpha}{2^\alpha}\right)\left|f'\left(b^{1/m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{1/q}\right\}$$

$$=\frac{\ln b-\ln a}{4}\left(\frac{(q-1)\left[2^{(2q-1)/(q-1)}+1\right]}{(2q-1)3^{(2q-1)/(q-1)}}\right)^{1-1/q}\left(\frac{1}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)^{1/q}$$

$$\times\left\{\left[2[(\alpha+3)a^q+(\alpha+1)b^q]|f'(b)|^q\right.\right.$$

$$+m\{[3\times 2^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)-2(\alpha+3)]a^q$$

$$\left.+(\alpha+1)[2^\alpha(\alpha+2)-2]b^q\}\left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|^q\right]^{1/q}$$

$$+\left[2[(\alpha+1)a^q+(\alpha+3)b^q]|f'(a)|^q\right.$$

$$+m\{(\alpha+1)[2^\alpha(\alpha+2)-2]a^q$$

$$\left.\left.+[3\times 2^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)-2(\alpha+3)]b^q\}\left|f'\left(b^{1/m}\right)\right|^q\right]^{1/q}\right\}$$

olduğu görülür ve böylece Teorem 3.4.6 ispatlanmış olur.

Sonuç 3.4.4 Teorem 3.4.6 nın koşulları altında eğer $\alpha = m = 1$ alınırsa

$$\left|\frac{f(a)+4f\left(\sqrt{ab}\right)+f(b)}{6}-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx\right|$$

$$\leq \frac{\ln b-\ln a}{4}\left(\frac{1}{48}\right)^{1/q}\left(\frac{(q-1)\left[2^{(2q-1)/(q-1)}+1\right]}{(2q-1)3^{(2q-1)/(q-1)}}\right)^{1-1/q}\times\left\{[(8a^q+4b^q)|f'(b)|^q+(28a^q+\right.$$
$$\left.8b^q)|f'(a)|^q]^{1/q}+[(4a^q+48)|f'(a)|^q+(8a^q+28b^q)|f'(b)|^q]^{1/q}\right\} \quad (3.74)$$

olduğu görülür.

Teorem 3.4.7 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde diferansiyellenebilir, $a,b\in\mathbb{R}^+$, $a<b$ ve $f'\in L_1([a,b])$ olsun. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $(\alpha,m)\in(0,1]^2$ ve $q>1$ olmak üzere $\left(0,\max\{b,b^{1/m}\}\right]$ üzerinde (α,m) −GA-konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+4f\left(\sqrt{ab}\right)+f(b)}{6}-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx\right|$$

$$\leq \frac{\ln b-\ln a}{4}\left(\frac{5}{18}\right)^{1-1/q}$$

$$\times\left(\frac{1}{2^{\alpha+2}\times 3^{\alpha+4}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\right)^{1/q}\Big\{\big[\{[12(5\alpha+17)+2\times 3^{\alpha+3}(2\alpha^2+9\alpha+3)]a^q+6\times[2(\alpha+1)+3^{\alpha+2}(2\alpha^2+5\alpha+3)]b^q\}|f'(b)|^q+m\{[61\times 6^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)-12(5\alpha+17)-6\times 3^{\alpha+2}(2\alpha^2+9\alpha+3)]a^q+[29\times 6^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)-12(\alpha+1)-6\times 3^{\alpha+2}(2\alpha^2+5\alpha+3)]b^q\}\left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|^q\big]^{1/q}+\big[\{[12(5\alpha+17)+6\times 3^{\alpha+2}(2\alpha^2+9\alpha+3)]b^q+6\times[2(\alpha+1)+(2\alpha^2+5\alpha+3)3^{\alpha+2}]a^q\}|f'(a)|^q+m\{[61\times 6^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)-12(5\alpha+17)-6\times 3^{\alpha+2}(2\alpha^2+9\alpha+3)]b^q+[29\times 6^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)-12(\alpha+1)-6\times 3^{\alpha+2}(2\alpha^2+5\alpha+3)]a^q\}\left|f'\left(b^{1/m}\right)\right|^q\big]^{1/q}\Big\} \tag{3.75}$$

eşitsizliği gerçeklenir(Shuang ve Ark. 2017).

İspat: $|f'|^q$ fonksiyonu $\left(0,\max\{b,b^{1/m}\}\right]$ aralığı üzerinde (α,m) −GA-konveks olduğundan Lemma 3.4.1 ve Power-Mean integral eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left|\frac{f(a)+4f\left(\sqrt{ab}\right)+f(b)}{6}-\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx\right|$$

$$\leq\frac{\ln b-\ln a}{4}\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|\left[a^{1-t/2}b^{t/2}\left|f'\left(a^{1-t/2}b^{t/2}\right)\right|+a^{t/2}b^{1-t/2}\left|f'\left(a^{t/2}b^{1-t/2}\right)\right|\right]dt$$

$$\leq\frac{\ln b-\ln a}{4}\left\{\left(\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|dt\right)^{1-1/q}\left[\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|a^{q(1-t/2)}b^{qt/2}\left|f'\left(a^{1-t/2}b^{t/2}\right)\right|^q dt\right]^{1/q}+\left(\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|dt\right)^{1-1/q}\left[\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|a^{qt/2}b^{q(1-t/2)}\left|f'\left(a^{t/2}b^{1-t/2}\right)\right|^q dt\right]^{1/q}\right\}$$

$$\leq \frac{\ln b - \ln a}{4}\left(\frac{5}{18}\right)^{1-1/q}\left\{\left[\int_0^1 \left|t-\frac{1}{3}\right|\left[\left(1-\frac{t}{2}\right)a^q+\frac{t}{2}b^q\right]\left(\frac{t^\alpha}{2^\alpha}|f'(b)|^q\right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + m\left(1-\frac{t^\alpha}{2^\alpha}\right)\left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{1/q}$$

$$+\left[\int_0^1 \left|t-\frac{1}{3}\right|\left[\frac{t}{2}a^q+\left(1-\frac{t}{2}\right)b^q\right]\left(\frac{t^\alpha}{2^\alpha}|f'(a)|^q\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + m\left(1-\frac{t^\alpha}{2^\alpha}\right)\left|f'\left(b^{1/m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{1/q}\right\}$$

$$= \frac{\ln b - \ln a}{4}\left(\frac{5}{18}\right)^{1-1/q}\left(\frac{1}{2^{\alpha+2}\times 3^{\alpha+4}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\right)^{1/q}\left\{\left[\{[12(5\alpha+17)\right.\right.$$

$$+ 2\times 3^{\alpha+3}(2\alpha^2+9\alpha+3)]a^q + 6$$

$$\times[2(\alpha+1)+3^{\alpha+2}(2\alpha^2+5\alpha+3)]b^q\}|f'(b)|^q$$

$$+ m\{[61\times 6^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) - 12(5\alpha+17) - 6$$

$$\times 3^{\alpha+2}(2\alpha^2+9\alpha+3)]a^q$$

$$+ [29\times 6^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) - 12(\alpha+1) - 6$$

$$\left.\times 3^{\alpha+2}(2\alpha^2+5\alpha+3)]b^q\}\left|f'\left(a^{1/m}\right)\right|^q\right]^{1/q}$$

$$+ \left[\{[12(5\alpha+17)+6\times 3^{\alpha+2}(2\alpha^2+9\alpha+3)]b^q + 6\right.$$

$$\times[2(\alpha+1)+(2\alpha^2+5\alpha+3)3^{\alpha+2}]a^q\}|f'(a)|^q$$

$$+ m\{[61\times 6^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) - 12(5\alpha+17) - 6$$

$$\times 3^{\alpha+2}(2\alpha^2+9\alpha+3)]b^q$$

$$+ [29\times 6^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) - 12(\alpha+1) - 6$$

$$\left.\left.\times 3^{\alpha+2}(2\alpha^2+5\alpha+3)]a^q\}\left|f'\left(b^{1/m}\right)\right|^q\right]^{1/q}\right\}$$

olduğu görülür ve böylece Teorem 3.4.7 ispatlanmış olur.

3.5. $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{m})$ −Konveks Fonksiyonlar İçin Simpson Tipli İntegral Eşitsizliği

Bu kısımda mutlak değerce birinci ve ikinci türevlerinin kuvvetleri (α, m) −konveks fonksiyonlar için Simpson tipli integral eşitsizlikleri verilecektir. Bununla ilgili olarak öncelikle aşağıdaki Lemmayı ifade edelim.

Lemma 3.5.1 $f: I \subseteq \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $a, b \in I^o$, $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L_1([a,b])$ ise

$$\frac{1}{8}\left[f(a) + 6f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$= \frac{b-a}{4}\int_0^1 \left[\left(\frac{3}{4} - t\right) f'\left(ta + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - t\right) f'\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)b\right)\right] dt \quad (3.76)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Kısmi integrasyon uygulanarak

$$\int_0^1 \left(\frac{3}{4} - t\right) f'\left(ta + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) dt$$

$$= -\frac{2}{b-a}\left[\left(\frac{3}{4} - t\right) f\left(ta + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 f\left(ta + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) dt\right]$$

$$= -\frac{2}{b-a}\left[-\frac{1}{4}f(a) - \frac{3}{4}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \frac{2}{b-a}\int_0^1 f\left(ta + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) dt$$

$$= \frac{2}{b-a}\left[\frac{1}{4}f(a) + \frac{3}{4}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx$$

ve

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{4} - t\right) f'\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)b\right) dt$$

$$= -\frac{2}{b-a}\left[\left(\frac{1}{4} - t\right) f\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)b\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 f\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)b\right) dt\right]$$

$$= -\frac{2}{b-a}\left[-\frac{3}{4}f(\frac{a+b}{2}) - \frac{1}{4}f(b)\right] - \frac{2}{b-a}\int_0^1 f\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)b\right) dt$$

$$= \frac{2}{b-a}\left[\frac{3}{4}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{4}f(b)\right] - \frac{4}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.5.1 $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}_0^+$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, $a < b$ ve $f' \in L_1([a,b])$ olsun. Eğer $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ ve $q \geq 1$ olmak üzere $|f'|^q$ fonksiyonu $\left[0, \frac{b}{m}\right]$ üzerinde (α, m) −konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{1}{8}\left[f(a) + 6f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \quad (3.77)$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{5}{16}\right)^{1-1/q}\left\{\left[\frac{3^{\alpha+2}+2^{2\alpha+1}\alpha-2^{2\alpha+2}}{2^{2\alpha+3}(\alpha+1)(\alpha+2)}|f'(a)|^q\right.\right.$$

$$\left.+m\frac{9\times 2^{2\alpha+1}-2\times 3^{\alpha+2}+11\times 2^{2\alpha}\alpha+5\times 2^{2\alpha}\alpha^2}{2^{2\alpha+4}(\alpha+1)(\alpha+2)}\left|f'\left(\frac{a+b}{2m}\right)\right|^q\right]^{1/q}$$

$$+\left[\frac{3\times 2^{2\alpha+1}\alpha+2^{2\alpha+2}+1}{2^{2\alpha+3}(\alpha+1)(\alpha+2)}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right.$$

$$\left.\left.+m\frac{2^{2\alpha+1}+3\times 2^{2\alpha}\alpha+5\times 2^{2\alpha}\alpha^2-2}{2^{2\alpha+4}(\alpha+1)(\alpha+2)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right]^{1/q}\right\}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: $|f'|^q$ fonksiyonu $\left[0,\frac{b}{m}\right]$ üzerinde (α,m) −konveks olduğundan Lemma 3.5.1 ve Power-Mean integral eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\left|\frac{1}{8}\left[f(a)+6f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 \left|\frac{3}{4}-t\right| \left|f'\left(ta+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right| dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1 \left|\frac{1}{4}-t\right| \left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right| dt\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left\{\left(\int_0^1 \left|\frac{3}{4}-t\right| dt\right)^{1-1/q} \left[\int_0^1 \left|\frac{3}{4}-t\right| \left|f'\left(ta+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right]^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1 \left|\frac{1}{4}-t\right| dt\right)^{1-1/q} \left[\int_0^1 \left|\frac{1}{4}-t\right| \left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|^q dt\right]^{1/q}\right\}$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{5}{16}\right)^{1-1/q} \left\{\left[\int_0^1 \left|\frac{3}{4}-t\right| \left(t^\alpha |f'(a)|^q\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+m(1-t^\alpha)\left|f'\left(\frac{a+b}{2m}\right)\right|^q\right) dt\right]^{1/q}$$

$$\left.+\left[\int_0^1 \left|\frac{1}{4}-t\right| \left(t^\alpha \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + m(1-t^\alpha)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right) dt\right]^{1/q}\right\}$$

$$= \frac{b-a}{4}\left(\frac{5}{16}\right)^{1-1/q} \left\{\left[\frac{3^{\alpha+2}+2^{2\alpha+1}\alpha-2^{2\alpha+2}}{2^{2\alpha+3}(\alpha+1)(\alpha+2)} |f'(a)|^q\right.\right.$$

$$\left.+m\frac{9\times 2^{2\alpha+1}-2\times 3^{\alpha+2}+11\times 2^{2\alpha}\alpha+5\times 2^{2\alpha}\alpha^2}{2^{2\alpha+4}(\alpha+1)(\alpha+2)}\left|f'\left(\frac{a+b}{2m}\right)\right|^q\right]^{1/q}$$

$$+\left[\frac{3\times 2^{2\alpha+1}\alpha+2^{2\alpha+2}+1}{2^{2\alpha+3}(\alpha+1)(\alpha+2)}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right.$$

$$\left.\left.+m\frac{2^{2\alpha+1}+3\times 2^{2\alpha}\alpha+5\times 2^{2\alpha}\alpha^2-2}{2^{2\alpha+4}(\alpha+1)(\alpha+2)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right]^{1/q}\right\}$$

olduğu görülür ve böylece Teorem 3.5.1 in ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 3.5.1 Teorem 3.5.1 in varsayımları altında eğer $q=1$ alınırsa, bu durumda

$$\left|\frac{1}{8}\left[f(a)+6f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \tag{3.78}$$

$$\le \frac{b-a}{4}\left[\frac{3^{\alpha+2}+2^{2\alpha+1}\alpha-2^{2\alpha+2}}{2^{2\alpha+3}(\alpha+1)(\alpha+2)}|f'(a)|\right.$$
$$+m\frac{9\times 2^{2\alpha+1}-2\times 3^{\alpha+2}+11\times 2^{2\alpha}\alpha+5\times 2^{2\alpha}\alpha^2}{2^{2\alpha+4}(\alpha+1)(\alpha+2)}\left|f'\left(\frac{a+b}{2m}\right)\right|$$
$$+\frac{3\times 2^{2\alpha+1}\alpha+2^{2\alpha+2}+1}{2^{2\alpha+3}(\alpha+1)(\alpha+2)}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\left.+m\frac{2^{2\alpha+1}+3\times 2^{2\alpha}\alpha+5\times 2^{2\alpha}\alpha^2-2}{2^{2\alpha+4}(\alpha+1)(\alpha+2)}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right]$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Sonuç 3.5.2 Teorem 3.5.1 in varsayımları altında eğer $\alpha = m = 1$ alınırsa

$$\left|\frac{1}{8}\left[f(a)+6f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\le \frac{5(b-a)}{64}\left\{\left[\frac{19|f'(a)|^q+41\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{60}\right]^{1/q}+\left[\frac{41\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+19|f'(b)|^q+}{60}\right]^{1/q}\right\} \tag{3.79}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Sonuç 3.5.3 Teorem 3.5.1 in varsayımları altında eğer $\alpha = m = q = 1$ alınırsa

$$\left|\frac{1}{8}\left[f(a)+6f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\le \frac{5(b-a)}{32}\left[\frac{19|f'(a)|+82\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+19|f'(b)|}{120}\right] \tag{3.80}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Teorem 3.5.2 $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}_0^+$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b \in \mathbb{R}_0^+$, $a<b$ ve $f' \in L_1([a,b])$ olsun. Eğer $(\alpha,m) \in (0,1]^2$ ve $q \ge 1$ olmak üzere $|f'|^q$ fonksiyonu $\left[0,\frac{b}{m}\right]$ üzerinde (α,m) −konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{1}{8}\left[f(a)+6f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\le \frac{b-a}{4}\left[\frac{(q-1)\left(3^{(2q-1)/(q-1)}+1\right)}{2^{2(2q-1)/(q-1)}(2q-1)}\right]^{1-1/q}\times\left\{\left[\frac{1}{\alpha+1}|f'(a)|^q+\frac{m\alpha}{\alpha+1}\left|f'\left(\frac{a+b}{2m}\right)\right|^q\right]^{1/q}\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1}{\alpha+1}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\frac{m\alpha}{\alpha+1}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right]^{1/q}\right\} \tag{3.81}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: $|f'|^q$ fonksiyonu $\left[0,\frac{b}{m}\right]$ üzerinde (α,m) −konveks olduğundan Lemma 3.5.1 ve Power-Mean integral eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\left|\frac{1}{8}\left[f(a)+6f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1\left|\frac{3}{4}-t\right|\left|f'\left(ta+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|dt+\int_0^1\left|\frac{1}{4}-t\right|\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|dt\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left\{\left(\int_0^1\left|\frac{3}{4}-t\right|^{q/(q-1)}dt\right)^{1-1/q}\left[\int_0^1\left|f'\left(ta+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right]^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1\left|\frac{1}{4}-t\right|^{q/(q-1)}dt\right)^{1-1/q}\left[\int_0^1\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|^q dt\right]^{1/q}\right\}$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left[\frac{(q-1)\left(3^{(2q-1)/(q-1)}+1\right)}{2^{2(2q-1)/(q-1)}(2q-1)}\right]^{1-1/q}$$

$$\times\left\{\left[\int_0^1\left(t^\alpha|f'(a)|^q+m(1-t^\alpha)\left|f'\left(\frac{a+b}{2m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left[\int_0^1\left(t^\alpha\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+m(1-t^\alpha)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{1/q}\right\}$$

$$=\frac{b-a}{4}\left[\frac{(q-1)\left(3^{(2q-1)/(q-1)}+1\right)}{2^{2(2q-1)/(q-1)}(2q-1)}\right]^{1-1/q}$$

$$\times\left\{\left[\frac{1}{\alpha+1}|f'(a)|^q+\frac{m\alpha}{\alpha+1}\left|f'\left(\frac{a+b}{2m}\right)\right|^q\right]^{1/q}+\left[\frac{1}{\alpha+1}\left|f'\left(\frac{a+b}{2m}\right)\right|^q+\frac{m\alpha}{\alpha+1}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right]^{1/q}\right\}$$

olduğu görülür ve böylece Teorem 3.5.2 in ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 3.5.4 Teorem 3.5.2 nin varsayımları altında eğer $\alpha=m=1$ alınırsa

$$\left|\frac{1}{8}\left[f(a)+6f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left[\frac{(q-1)\left(3^{(2q-1)/(q-1)}+1\right)}{2^{2(2q-1)/(q-1)}(2q-1)}\right]^{1-1/q}$$

$$\times\left\{\left[\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2}\right]^{1/q}+\left[\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{2}\right]^{1/q}\right\} \tag{3.82}$$

olduğu görülür.

Şimdi ortalamalar için bazı integral eşitsizliklerin elde edilmesinde (α, m) −konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli bazı eşitsizliklerin uygulamasını verelim. Bu amaçla $b > a > 0$ pozitif sayılar olmak üzere $s \neq 0, -1$ için

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2},\ \ H(a,b) = \frac{2ab}{a+b},\ \ L(a,b) = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}\ \text{ ve }\ L_s(a,b) = \left[\frac{b^{s+1} - a^{s+1}}{(s+1)(b-a)}\right]^{1/s}$$

ortalamalarını tekrar göz önüne alalım.

$x > 0,\ s > 1,\ q \geq 1$ ve $(s-1)q \geq 1$ olmak üzere $f(x) = x^s$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu takdirde $|f'(x)|^q = s^q x^{(s-1)q}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında konvekstir. Bu durumda eğer $|s|^q x^{(s-1)q}$ fonksiyonuna Sonuç 3.5.2 uygulanırsa aşağıdaki teorem verilebilir:

Sonuç 3.5.5 $b > a > 0,\ s > 1,\ q \geq 1$ ve $(s-1)q \geq 1$ olsun. Bu takdirde

$$\left|\frac{A(a^s,b^s) + 3A^s(a,b)}{4} - L_s^s(a,b)\right|$$

$$\leq \frac{5s(b-a)}{64}\left\{\left[\frac{19a^{(s-1)q} + 41[A(a,b)]^{(s-1)q}}{60}\right]^{1/q} + \left[\frac{41[A(a,b)]^{(s-1)q} + 19b^{(s-1)q}}{60}\right]^{1/q}\right\} \quad (3.83)$$

eşitsizliği gerçeklenir. Ayrıca eğer $s \geq 2$ alınırsa

$$\left|\frac{A(a^s,b^s) + 3A^s(a,b)}{4} - L_s^s(a,b)\right| \leq \frac{5s(b-a)}{32}\left[\frac{19a^{s-1} + 82[A(a,b)]^{s-1} + 19b^{s-1}}{120}\right] \quad (3.84)$$

olduğu görülür.

Öte yandan $x > 0,\ s > 1,\ q \geq 1$ ve $(s-1)q \geq 1$ olmak üzere $f(x) = x^s$ alınarak Sonuç 3.5.4 ten aşağıdaki eşitsizlik türetilebilir.

Sonuç 3.5.6 $b > a > 0,\ s > 1,\ q \geq 1$ ve $(s-1)q \geq 1$ olsun. Bu takdirde

$$\left|\frac{A(a^s,b^s) + 3A^s(a,b)}{4} - L_s^s(a,b)\right|$$

$$\leq \frac{s(b-a)}{32}\left[\frac{(q-1)\left(3^{(2q-1)/(q-1)} + 1\right)}{2^{2(2q-1)/(q-1)}(2q-1)}\right]^{1-1/q}$$

$$\times \left\{\left[\frac{a^{(s-1)q} + [A(a,b)]^{(s-1)q}}{2}\right]^{1/q} + \left[\frac{[A(a,b)]^{(s-1)q} + b^{(s-1)q}}{2}\right]^{1/q}\right\} \quad (3.85)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Daha sonraki kısımda mutlak değerce ikinci türevlerinin kuvvetleri $(\alpha, m)-$ konveks fonksiyonlar için Simpson tipli integral eşitsizlikleri verilecektir. bunula ilgili olarak önce aşağıdaki teoremleri ifade edebiliriz.

Teorem 3.5.3 $f: I \subset [0, b^*] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $b^* > 0$ olsun. Eğer $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ ve $q \geq 1$ olmak üzere $|f''|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde $(\alpha, m)-$konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+f(mb)}{2} - \frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(mb-a)^2}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{1-1/q}\{\mu_1|f''(a)|^q + \nu_1 m|f''(b)|^q\}^{1/q} \tag{3.86}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada

$$\mu_1 = \frac{1}{(\alpha+2)(\alpha+3)} \quad \text{ve} \quad \nu_1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{(\alpha+2)(\alpha+3)}$$

dir (Özdemir ve Ark. 2011).

Teorem 3.5.4 $f: I \subset [0, b^*] \to \mathbb{R}$ I^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $b^* > 0$ olsun. Eğer $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ ve $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $|f''|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde $(\alpha, m)-$konveks ise bu takdirde

$$\left|\frac{f(a)+f(mb)}{2} - \frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} f(x)dx\right| \leq \frac{(mb-a)^2}{2}\{\mu_2|f''(a)|^q + \nu_2 m|f''(b)|^q\}^{1/q} \tag{3.87}$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada

$$\mu_2 = \frac{q}{\alpha+q+1}\beta(\alpha+1, q) \quad \text{ve} \quad \nu_2 = \frac{1}{q+1} - \mu_2$$

dir (Özdemir ve Ark. 2011).

Şimdi aşağıdaki Lemmayı verebiliriz.

Lemma 3.5.2 $f: I \subset [0, b^*] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $a, b \in I^o$, $0 \leq a < b < \infty$ olsun. Eğer $f'' \in L_1([a, b])$ ise

$$\frac{f(a)+f(b)}{r(r+1)} + \frac{2}{r+1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{r(b-a)}\int_a^b f(x)dx$$

$$= (b-a)^2\int_0^1 k(t)f''(ta+(1-t)b)dt \tag{3.88}$$

eşitliği sağlanır, burada

$$k(t)=\begin{cases}\frac{t}{r}\left(\frac{1}{r+1}-t\right), & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\(1-t)\left(\frac{t}{r}-\frac{1}{r+1}\right), & t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

dir (Park,2012).

Teorem 3.5.5 $f: I\subset[0,b^*]\to\mathbb{R}$ I^0 üzerinde iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b\in I,\ a<b,\ f''\in L_1([a,b])$ ve $b^*>0$ olsun. Eğer $(\alpha,m)\in(0,1]^2$ olmak üzere $|f''|$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde (α,m) −konveks ise bu takdirde

$$\frac{1}{(b-a)^2}\left|\frac{f(a)+f(b)}{r(r+1)}+\frac{2}{r+1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{2}{r(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$=\{\mu_{11}+\mu_{12}+\mu_{13}+\mu_{14}\}|f''(a)|+\{\nu_{11}+\nu_{12}+\nu_{13}+\nu_{14}\}m\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right| \quad (3.89)$$

eşitliği gerçeklenir, burada

$$\mu_{11}=\frac{1}{r(r+1)^{\alpha+3}(\alpha+2)(\alpha+3)},$$

$$\nu_{11}=\frac{1}{6r(r+1)^3}-\mu_{11},$$

$$\mu_{12}=\frac{2^{\alpha+3}(r+1)^{\alpha+2}\{(\alpha+2)r-(\alpha+4)\}}{2^{\alpha+3}r(r+1)^{\alpha+3}(\alpha+2)(\alpha+3)}$$

$$\nu_{12}=\frac{r^3-3r+2}{24r(r+1)^3}-\mu_{12},$$

$$\mu_{13}=\frac{r^{\alpha+1}\{3+\alpha+2r\}}{(r+1)^{\alpha+3}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}+\frac{4+(1-r)\alpha^2-14r+(5-7r)\alpha}{2^{\alpha+3}r(r+1)(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)},$$

$$\nu_{13}=\frac{r^3-3r+2}{24r(r+1)^3}-\mu_{13},$$

$$\mu_{14}=\frac{(\alpha+1-2r)(r+1)^{\alpha+2}+\{3+\alpha+2r\}(\alpha+1-2r)r^{\alpha+2}}{r(r+1)^{\alpha+3}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)},$$

$$\nu_{14}=\frac{1}{1r(r+1)^3}-\mu_{14}$$

dir (Park, 2012).

İspat: Lemma 3.5.2 ve $|f''|$ fonksiyonunun (α,m) −konveksliği dikkate alınırsa

$$\frac{1}{(b-a)^2}\left|\frac{f(a)+f(b)}{r(r+1)}+\frac{2}{r+1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{2}{r(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq(b-a)^2\int_0^{1/2}\left|\frac{t}{r}\left(\frac{1}{r+1}-t\right)\right||f''(ta+(1-t)b)|dt$$

$$+\int_{1/2}^{1}\left|(1-t)\left(\frac{t}{r}-\frac{1}{r+1}\right)\right||f''(ta+(1-t)b)|dt \quad (3.90)$$

eşitsizliği yazılabilir. Şimdi (3.90) ifadesindeki iki integrali ayrı ayrı hesaplayalım.

$$\int_0^{1/2}\left|\frac{t}{r}\left(\frac{1}{r+1}-t\right)\right||f''(ta+(1-t)b)|dt$$

$$\leq \int_0^{\frac{1}{r+1}}\frac{t}{r}\left(\frac{1}{r+1}-t\right)\left\{t^\alpha|f''(a)|+m(1-t^\alpha)\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right\}dt$$

$$+\int_{\frac{1}{r+1}}^{1/2}\frac{t}{r}\left(t-\frac{1}{r+1}\right)\left\{t^\alpha|f''(a)|+m(1-t^\alpha)\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right\}dt$$

$$=\{\mu_{11}+\mu_{12}\}|f''(a)|+\{\nu_{11}+\nu_{12}\}m\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right| \tag{3.91}$$

ve

$$\int_{1/2}^{1}\left|(1-t)\left(\frac{t}{r}-\frac{1}{r+1}\right)\right||f''(ta+(1-t)b)|dt$$

$$\leq \int_{1/2}^{\frac{r}{r+1}}(1-t)\left(\frac{1}{r+1}-\frac{t}{r}\right)\left\{t^\alpha|f''(a)|+m(1-t^\alpha)\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right\}dt$$

$$+\int_{\frac{r}{r+1}}^{1}(1-t)\left(\frac{t}{r}-\frac{1}{r+1}\right)\left\{t^\alpha|f''(a)|+m(1-t^\alpha)\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right\}dt$$

$$=\{\mu_{13}+\mu_{14}\}|f''(a)|+\{\nu_{13}+\nu_{14}\}m\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right| \tag{3.92}$$

olduğu görülür. (3.91) ve (3.92) deki değerler (3.90) da yerlerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir ve böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.5.6 $f: I \subset [0, b^*] \to \mathbb{R}$ I^0 üzerinde iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$, $f'' \in L_1([a,b])$ ve $b^* > 0$ olsun. Eğer $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ olmak üzere $|f''|^q$, $q > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde (α, m) −konveks ise bu takdirde

$$\frac{1}{(b-a)^2}\left|\frac{f(a)+f(b)}{r(r+1)}+\frac{2}{r+1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{2}{r(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$=\frac{r^3-3r+6}{24r(r+1)^3}\left[\left\{\{\mu_{11}+\mu_{12}\}|f''(a)|^q+\{\nu_{11}+\nu_{12}\}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right\}^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left\{\{\mu_{13}+\mu_{14}\}|f''(a)|^q+\{\nu_{13}+\nu_{14}\}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right\}^{1/q}\right] \tag{3.93}$$

eşitliği gerçeklenir, burada μ_{ij} ve ν_{ij}, $i, j = 1,2,3,4$ ler Teorem 3.5.5 te verildiği gibidir (Park, 2012).

İspat: Farzedelim ki $q > 1$ olsun. Lemma 3.5.2 ve Hölder eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\frac{1}{(b-a)^2}\left|\frac{f(a)+f(b)}{r(r+1)}+\frac{2}{r+1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{2}{r(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)^2 \left\{\int_0^{\frac{1}{2}} \left|\frac{t}{r}\left(\frac{1}{r+1}-t\right)\right|\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left\{\int_0^{1/2} \left|\frac{t}{r}\left(\frac{1}{r+1}-t\right)\right| |f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right\}^{1/q}$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left\{\left|(1-t)\left(\frac{t}{r}-\frac{1}{r+1}\right)\right| dt\right\}^{1/p}$$

$$\times \left\{\int_{1/2}^{1} \left|(1-t)\left(\frac{t}{r}-\frac{1}{r+1}\right)\right| |f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right\}^{1/q}$$

$$= \left\{\frac{r^3-3r+6}{24r(r+1)^3}\right\}^{\frac{1}{p}} \times \left\{\int_0^{1/2} \left|\frac{t}{r}\left(\frac{1}{r+1}-t\right)\right| |f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right\}^{1/q}$$

$$+\left\{\frac{r^3-3r+6}{24r(r+1)^3}\right\}^{\frac{1}{p}} \times \left\{\int_{1/2}^{1} \left|(1-t)\left(\frac{t}{r}-\frac{1}{r+1}\right)\right| |f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right\}^{1/q} \quad (3.94)$$

olduğu görülür. $|f''|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde (α,m) −konveks olduğundan

$$\int_0^{1/2} \left|\frac{t}{r}\left(\frac{1}{r+1}-t\right)\right| |f''(ta+(1-t)b)|^q dt$$
$$\leq \{\mu_{11}+\mu_{12}\}|f''(a)|^q + \{\nu_{11}+\nu_{12}\}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q \quad (3.95)$$

ve

$$\int_{1/2}^{1} \left|(1-t)\left(\frac{t}{r}-\frac{1}{r+1}\right)\right| |f''(ta+(1-t)b)|^q dt$$
$$\leq \{\mu_{13}+\mu_{14}\}|f''(a)|^q + \{\nu_{13}+\nu_{14}\}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q \quad (3.96)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Şimdi (3.94), (3.95) ve (3.96) eşitsizliklerinden

$$\frac{1}{(b-a)^2}\left|\frac{f(a)+f(b)}{r(r+1)} + \frac{2}{r+1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{r(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$= \frac{r^3-3r+6}{24r(r+1)^3}\left[\left\{\{\mu_{11}+\mu_{12}\}|f''(a)|^q + \{\nu_{11}+\nu_{12}\}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right\}^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left\{\{\mu_{13}+\mu_{14}\}|f''(a)|^q + \{\nu_{13}+\nu_{14}\}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right\}^{1/q}\right]$$

elde edilir ve böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 3.5.7 Teorem 3.5.5 te

a) Eğer $r=\alpha=1$ seçilirse bu durumda

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)^2}{48}\left\{|f''(a)| + m\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right\}$$

b) Eğer $r = 2,\ m = \alpha = 1$ seçilirse bu durumda

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{6} + \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)^2}{162}\{|f''(a)| + |f''(b)|\}$$

eşitsizlikleri elde edilir (Park, 2012).

Sonuç 3.5.8 Teorem 3.5.6 da

a) Eğer $q > 1$ seçilirse bu durumda

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{r(r+1)} + \frac{2}{r+1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{r(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le \frac{r^3-3r+6}{24r(r+1)^3}(b-a)^2\left[\left\{\{\mu_{11}+\mu_{12}\}|f''(a)|^q + \{\nu_{11}+\nu_{12}\}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left\{\{\mu_{13}+\mu_{14}\}|f''(a)|^q + \{\nu_{13}+\nu_{14}\}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right\}^{1/q}\right]$$

b) Eğer $q > 1$ ve $r = \alpha = 1$ seçilirse bu durumda

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{r(r+1)} + \frac{2}{r+1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{r(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le \frac{1}{(3.2^4)^{1/p}}(b-a)^2\left[\left\{\frac{1}{192}|f''(a)|^q + \frac{1}{64}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left\{\frac{1}{64}|f''(a)|^q + \frac{1}{192}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right\}^{1/q}\right]$$

eşitsizlikleri elde edilir(Park, 2012).

Teorem 3.5.7 $f: I \subset [0, b^*] \to \mathbb{R}$ I^0 üzerinde iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I,\ a < b,\ f'' \in L_1([a,b])$ ve $b^* > 0$ olsun. Eğer $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ olmak üzere $|f''|^q,\ q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde (α, m) −konveks ise bu takdirde

$$\frac{1}{(b-a)^2}\left|\frac{f(a)+f(b)}{r(r+1)} + \frac{2}{r+1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{r(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le M_1^{\frac{1}{p}}(r)\left[\left\{\mu_{21}|f''(a)|^q + \nu_{21}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right\}^{1/q}\right.$$

$$+M_2^{\frac{1}{p}}(r)\left[\left\{\mu_{22}|f''(a)|^q+\nu_{22}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right\}^{1/q}\right.$$

$$+M_3^{\frac{1}{p}}(r)\left[\left\{\mu_{23}|f''(a)|^q+\nu_{23}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right\}^{1/q}\right.$$

$$+M_4^{\frac{1}{p}}(r)\left[\left\{\mu_{24}|f''(a)|^q+\nu_{24}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right\}^{1/q}\right. \tag{3.97}$$

eşitliği gerçeklenir, burada

$$\beta(x,a,b)=\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt,\ \ a,b>0$$

$$M_1(r)=\frac{\beta(1,\ \frac{1}{2},\ p+1)}{2^{2p+1}r^p(r+1)^{2p+1}},$$

$$M_2(r)=\frac{\beta\left(1,\ -\frac{1}{2}-p,\ \ p+1\right)-4^p\beta\left(\frac{2}{r+1},\ \ -1-2p,\ \ p+1\right)}{4^{p+1}r^p(r+1)^{2p+1}},$$

$$M_3(r)=\frac{(-1)^{p+1}\beta(\frac{1-r}{2},\ p+1,\ p+1)}{r^p(r+1)^{2p+1}},$$

$$M_4(r)=\frac{\beta(1,\ p+1,\ p+1)}{r^p(r+1)^{2p+1}},$$

ve

$$\mu_{21}=\frac{1}{(r+1)^{\alpha+1}(\alpha+1)(\alpha+3)},\qquad \nu_{21}=\frac{1}{(r+1)}-\mu_{21},$$

$$\mu_{22}=\frac{(r+1)^{\alpha+1}-2^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(r+1)^{\alpha+1}(\alpha+1)},\qquad \nu_{22}=\frac{r-1}{2(r+1)}-\mu_{22},$$

$$\mu_{23}=\frac{2^{\alpha+1}r^{\alpha+1}-(r+1)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(r+1)^{\alpha+1}(\alpha+1)},\qquad \nu_{23}=\frac{r-1}{2(r+1)}-\mu_{23},$$

$$\mu_{24}=\frac{(r+1)^{\alpha+1}-r^{\alpha+1}}{(r+1)^{\alpha+1}(\alpha+1)},\qquad \nu_{24}=\frac{1}{(r+1)}-\mu_{24},$$

dir (Park, 2012).

İspat: Lemma 3.5.2 ve Hölder integral eşitsizliği dikkate alınırsa (3.90) dan

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{r(r+1)}+\frac{2}{r+1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{2}{r(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq(b-a)^2\left[\left\{\int_0^{\frac{1}{r+1}}\left\{\frac{t}{r}\left(\frac{1}{r+1}-t\right)\right\}^p dt\right\}^{1/p}\left\{\int_0^{\frac{1}{r+1}}|f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right\}^{1/q}\right.$$

$$+\left\{\int_{\frac{1}{r+1}}^{1/2}\left\{\frac{t}{r}\left(t-\frac{1}{r+1}\right)\right\}^p dt\right\}^{1/p}\left\{\int_{\frac{1}{r+1}}^{1/2}|f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right\}^{1/q}$$

$$+\left\{\int_{1/2}^{\frac{r}{r+1}}\left\{(1-t)\left(\frac{1}{r+1}-\frac{t}{r}\right)\right\}^p dt\right\}^{1/p}\left\{\int_{1/2}^{\frac{r}{r+1}}|f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right\}$$

$$+\left\{\int_{\frac{1}{r+1}}^{\frac{1}{r}}\left\{(1-t)\left(\frac{1}{r+1}-\frac{t}{r}\right)\right\}^{p}dt\right\}^{1/p}\left\{\int_{\frac{1}{r+1}}^{\frac{1}{r}}|f''(ta+(1-t)b)|^{q}dt\right\}^{1/q}\Bigg] \quad (3.98)$$

eşitsizliği yazılabilir. $|f''|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde (α,m) −konveks olduğundan

$$\int_{0}^{\frac{1}{r+1}}|f''(ta+(1-t)b)|^{q}dt \le \mu_{21}|f''(a)|^{q}+\nu_{21}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{q}, \quad (3.99)$$

$$\int_{\frac{1}{r+1}}^{1/2}|f''(ta+(1-t)b)|^{q}dt \le \mu_{22}|f''(a)|^{q}+\nu_{22}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{q}, \quad (3.100)$$

$$\int_{1/2}^{\frac{r}{r+1}}|f''(ta+(1-t)b)|^{q}dt \le \mu_{23}|f''(a)|^{q}+\nu_{23}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{q}, \quad (3.101)$$

$$\int_{\frac{1}{r+1}}^{\frac{1}{r}}|f''(ta+(1-t)b)|^{q}dt \le \mu_{24}|f''(a)|^{q}+\nu_{24}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^{q} \quad (3.102)$$

olduğu görülür. (3.98)-(3.102) eşitsizliklerinden istenilen sonuç elde edilir ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 3.5.9 Teorem 3.5.7 de

a) Eğer $r=\alpha=m=1$ seçilirse bu durumda

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{2}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le (b-a)^2\left[\left\{\frac{\beta(1,\ \frac{1}{2},\ p+1)}{4^{2p+1}}\right\}^{1/p}\left\{\frac{1}{8}|f''(a)|^q+\frac{3}{8}|f'(b)|^q\right\}^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left\{\frac{\beta(1,\ p+1,\ p+1)}{2^{2p+1}}\right\}^{1/p}\left\{\frac{3}{8}|f''(a)|^q+\frac{1}{8}|f'(b)|^q\right\}^{1/q}\right] \quad (3.103)$$

b) Eğer $r=2$ ve $\alpha=m=1$ seçilirse bu durumda

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{6}+\frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le (b-a)^2\left[\left\{\frac{\beta(1,\ \frac{1}{2},\ p+1)}{2^{3p+1}3^{2p+1}}\right\}^{1/p}\left\{\frac{1}{18}|f''(a)|^q+\frac{5}{18}|f'(b)|^q\right\}^{1/q}\right.$$

$$+\left\{\frac{2^{-2p-21}\beta\left(1,\ -\frac{1}{2}-p,\ p+1\right)-\beta\left(\frac{2}{3},\ 1-2p,\ p+1\right)}{2^{p}3^{2p+1}}\right\}^{1/p}\left\{\frac{5}{72}|f''(a)|^q+\frac{7}{72}|f'(b)|^q\right\}^{1/q}$$

$$+\left\{\frac{{}_2F_1\left(p+1,\ -p,\ p+2,\ \frac{1}{2}\right)}{6^{2p+1}(p+1)}\right\}^{1/p}\left\{\frac{7}{72}|f''(a)|^q+\frac{5}{72}|f'(b)|^q\right\}^{1/q}$$

$$+\left\{\frac{\beta(1,\ 1+p,\ p+1)-\beta\left(\frac{2}{3},\ 1-2p,\ p+1\right)}{2^p 3^{2p+1}}\right\}^{1/p}\left\{\frac{5}{18}|f''(a)|^q+\frac{1}{18}|f'(b)|^q\right\}^{1/q}\Bigg] \qquad (3.104)$$

eşitsizliği gerçeklenir, burada

$$2^{F_1}(a,b,c,\ x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n x^n}{(c)_n\, n!},\ 0<x<1$$

dir (Park, 2012).

Teorem 3.5.8 $f\colon I\subset[0,b^*]\to\mathbb{R}$ I^0 üzerinde iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a,b\in I,\ a<b,\ f''\in L_1([a,b])$ ve $b^*>0$ olsun. Eğer $(\alpha,m)\in(0,1]^2$ olmak üzere $|f''|^q,\ q>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde $(\alpha,m)-$konveks ise bu takdirde

$$\frac{1}{(b-a)^2}\left|\frac{f(a)+f(b)}{r(r+1)}+\frac{2}{r+1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{2}{r(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\left\{\frac{1}{(r+1)^{p+1}(p+1)}\right\}^{1/p}\left\{\mu_{31}|f''(a)|^q+\nu_{31}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right\}^{1/q}$$

$$+\left\{\frac{(r-1)^p}{2^{p+1}(r+1)^{p+1}(p+1)}\right\}^{1/p}\left\{\mu_{32}|f''(a)|^q+\nu_{32}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right\}^{1/q}$$

$$+\left\{\frac{(r-1)^p}{2^p(p+1)r^{p+1}(r+1)^{p+1}}\right\}^{1/p}\left\{\mu_{33}|f''(a)|^q+\nu_{33}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right\}^{1/q}$$

$$+\left\{\frac{1}{(p+1)r^p(r+1)^{p+1}}\right\}^{1/p}\left\{\mu_{34}|f''(a)|^q+\nu_{34}m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right\}^{1/q} \qquad (3.105)$$

eşitliği gerçeklenir, burada

$$\mu_{31}=\frac{1}{r^q(r+1)^{\alpha+q+1}(\alpha+q+1)},$$

$$\nu_{31}=\frac{1}{r^q(r+1)^{q+1}(q+1)}-\mu_{31},$$

$$\mu_{32}=\frac{(r+1)^{\alpha+q+1}-2^{\alpha+q+1}}{2^{\alpha+q+1}(r+1)^{\alpha+q+1}r^q(\alpha+q+1)},$$

$$\nu_{32}=\frac{(r+1)^{q+1}-2^{q+1}}{2^{q+1}(r+1)^{q+1}r^q(q+1)}-\mu_{32},$$

$$\mu_{33}=\beta\left(\frac{r}{1+r},\ \alpha+1,\ q+1\right)-\frac{2^{F_1}(\alpha+1,\alpha+q+1,\alpha+2,-1)}{\alpha+1},$$

$$\nu_{23}=\frac{(r+1)^{q+1}-2^{q+1}}{2^{q+1}(r+1)^{q+1}(q+1)}-\mu_{33},$$

$$\mu_{34}=\beta(1,\ \alpha+1,\ p+1)-\beta\left(\frac{r}{1+r},\ \alpha+1,\ q+1\right),$$

$$\nu_{34} = \frac{1}{(r+1)^{q+1}(q+1)} - \mu_{34}$$

dir (Park, 2012).

İspat: Lemma 3.5.2 ve Hölder integral eşitsizliği dikkate alınırsa (3.90) dan

$$\frac{1}{(b-a)^2}\left|\frac{f(a)+f(b)}{r(r+1)} + \frac{2}{r+1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{r(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \left\{\int_0^{\frac{1}{r+1}}\left\{\left(\frac{1}{r+1} - t\right)\right\}^p dt\right\}^{1/p}\left\{\int_0^{\frac{1}{r+1}}\left(\frac{t}{r}\right)^q |f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right\}^{1/q}$$

$$+\left\{\int_{\frac{1}{r+1}}^{1/2}\left\{\left(t - \frac{1}{r+1}\right)\right\}^p dt\right\}^{1/p}\left\{\int_{\frac{1}{r+1}}^{1/2}\left(\frac{t}{r}\right)^q |f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right\}^{1/q}$$

$$+\left\{\int_{1/2}^{\frac{r}{r+1}}\left\{\left(\frac{1}{r+1} - \frac{t}{r}\right)\right\}^p dt\right\}^{1/p}\left\{\int_{1/2}^{\frac{r}{r+1}}(1-t)^q |f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right\}^{1/q}$$

$$+\left\{\int_{\frac{1}{r+1}}^{\frac{1}{r}}\left\{\left(\frac{t}{r} - \frac{1}{r+1}\right)\right\}^p dt\right\}^{1/p}\left\{\int_{\frac{1}{r+1}}^{\frac{1}{r}}(1-t)^q |f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right\}^{1/q}\Bigg]$$

$$= \left\{\frac{1}{(p+1)(r+1)^{p+1}}\right\}^{1/p}\left\{\int_0^{\frac{1}{r+1}}\left(\frac{t}{r}\right)^q |f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right\}^{1/q}$$

$$+\left\{\frac{(r-1)^p}{(p+1)2^{p+1}(r+1)^{p+1}}\right\}^{1/p}\left\{\int_{\frac{1}{r+1}}^{1/2}\left(\frac{t}{r}\right)^q |f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right\}^{1/q}$$

$$+\left\{\frac{(r-1)^p}{2^p(p+1)r^{p+1}(r+1)^{p+1}}\right\}^{1/p}\left\{\int_{1/2}^{\frac{r}{r+1}}(1-t)^q |f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right\}^{1/q}$$

$$+\left\{\frac{1}{(p+1)r^p(r+1)^{p+1}}\right\}^{1/p}\left\{\int_{\frac{1}{r+1}}^{\frac{1}{r}}(1-t)^q |f''(ta+(1-t)b)|^q dt\right\}^{1/q}\Bigg] \tag{3.106}$$

eşitsizliği yazılabilir, burada $\frac{1}{2} < \left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p} < 1$ olduğu gerçeği kullanılmıştır. $|f''|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde (α, m) $-$konveks olduğundan

$$\int_0^{\frac{1}{r+1}}\left(\frac{t}{r}\right)^q |f''(ta+(1-t)b)|^q dt \leq \mu_{31}|f''(a)|^q + \nu_{31} m\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q, \tag{3.107}$$

$$\int_{\frac{1}{r+1}}^{1/2}\left(\frac{t}{r}\right)^q |f''(ta+(1-t)b)|^q dt \leq \mu_{32}|f''(a)|^q + \nu_{32} m\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q, \tag{3.108}$$

$$\int_{1/2}^{\frac{r}{r+1}}\left(\frac{t}{r}\right)^q |f''(ta+(1-t)b)|^q dt \leq \mu_{33}|f''(a)|^q + \nu_{33} m\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q, \tag{3.109}$$

$$\int_{\frac{1}{r+1}}^{\frac{1}{r}}\left(\frac{t}{r}\right)^q |f''(ta+(1-t)b)|^q dt \leq \mu_{34}|f''(a)|^q + \nu_{34} m\left|f''\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q \tag{3.110}$$

olduğu görülür. (3.106)-(3.110) eşitsizliklerinden istenilen sonuç elde edilir ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 3.5.10 Teorem 3.5.8 de

a) Eğer $r = \alpha = m = 1$ seçilirse bu durumda

$$\frac{2^{1+\frac{1}{p}}}{(b-a)^2}\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \left\{\frac{1}{2^{q+2}(q+2)}|f''(a)|^q + \frac{q+3}{2^{q+1}(q+1)(q+2)}|f'(b)|^q\right\}^{1/q}$$

$$+\left\{\frac{q+3}{2^{q+2}(q+1)(q+2)}|f''(a)|^q + \frac{1}{2^{q+2}(q+2)}|f'(b)|^q\right\}^{1/q}$$

b) Eğer $r = 2$ ve $\alpha = m = 1$ seçilirse bu durumda

$$\frac{1}{(b-a)^2}\left|\frac{f(a)+f(b)}{6} + \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \left\{\frac{1}{3^{p+1}}\right\}^{1/p}\{\mu_{41}|f''(a)|^q + \nu_{41}|f''(b)|^q\}^{1/q}$$

$$+\left\{\frac{1}{6^{p+1}}\right\}^{1/p}\{\mu_{42}|f''(a)|^q + \nu_{42}|f''(b)|^q\}^{1/q}$$

$$+\left\{\frac{1}{2^p 6^{p+1}}\right\}^{1/p}\{\mu_{43}|f''(a)|^q + \nu_{43}|f''(b)|^q\}^{1/q}$$

$$+\left\{\frac{1}{3.6^{p+1}}\right\}^{1/p}\{\mu_{44}|f''(a)|^q + \nu_{44}|f''(b)|^q\}^{1/q}$$

eşitliği gerçeklenir, burada

$$\mu_{41} = \frac{1}{2^q 3^{q+2}(q+2)}, \qquad \nu_{41} = \frac{1}{2^q 3^{q+1}(q+1)} - \mu_{41},$$

$$\mu_{42} = \frac{3^{q+2}-2^{q+2}}{2^{q+3}3^{q+2}(q+2)}, \qquad \nu_{42} = \frac{3^{q+1}-2^{q+1}}{2^q 6^{q+1}(q+1)} - \mu_{42},$$

$$\mu_{43} = \frac{3^{q+2}(q+3)-2^{q+2}(2q+5)}{6^{q+2}(q+1)(q+2)}, \qquad \nu_{43} = \frac{(3)^{q+1}-2^{q+1}}{6^{q+1}(q+1)} - \mu_{43},$$

$$\mu_{44} = \frac{(2q+5)}{3^{q+2}(q+1)(q+2)}, \qquad \nu_{44} = \frac{1}{3^{q+1}(q+1)} - \mu_{44}$$

dir (Park, 2012).

Şimdi $b > a > 0$ pozitif sayılar olmak üzere $s \neq 0, -1$ için

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}, \quad H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}, \quad L(a,b) = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$$

$$L_s(a,b) = \left[\frac{b^{s+1}-a^{s+1}}{(s+1)(b-a)}\right]^{1/s}, \text{ ve } \quad I(a,b) = \begin{cases} a, & a = b \\ \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} & a \neq b \end{cases},$$

ortalamalarını tekrar göz önüne alalım.

Önerme 3.5.1 $n \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \setminus \{-1\}$, $[a, b] \subset [0, b^*]$, $q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$|A(a^n, b^n) + A^n(a, b) - 2L_n^n(a, b)|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{48} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}} |n(n-1)| \times \left\{A^{1/q}\left(a^{(n-2)q}, 3b^{(n-2q)}\right) + A^{1/q}\left(3a^{(n-2)q}, b^{(n-2q)}\right)\right\}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: Sonuç 3.5.9 (a) ve Sonuç 3.5.10 (a) da n yukarıdaki gibi olmak üzere $m = 1$ ve $f(x) = x^n$ alındığında istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 3.5.2 $n \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \setminus \{-1\}$, $[a, b] \subset [0, b^*]$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$|A(a^n, b^n) + A^n(a, b) - 2L_n^n(a, b)|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{24} \frac{1+3^{\frac{1}{q}}}{4^{\frac{1}{q}}} |n(n-1)| \times A\left(a^{(n-2)}, b^{(n-2)}\right)$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: Sonuç 3.5.10 (a) da $x \in [a, b] \subset [0, b^*]$ ve n yukarıdaki gibi olmak üzere $m = 1$ ve $f(x) = x^n$ alındığında istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 3.5.3 $n \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \setminus \{-1\}$, $[a, b] \subset [0, b^*]$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\left|\frac{1}{3} A(a^n, b^n) + \frac{2}{3} A^n(a, b) - 2L_n^n(a, b)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{3.2^4} |n(n-1)|$$

$$\times \left[\left\{\frac{59}{192} a^{(n-2)q} + \frac{133}{192} b^{(n-2)q}\right\}^{1/q} + \left\{\frac{133}{192} a^{(n-2)q} + \frac{59}{192} b^{(n-2)q}\right\}^{1/q}\right]$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: Sonuç 3.5.10 (b) de $x \in [a, b] \subset [0, b^*]$ ve n yukarıdaki gibi olmak üzere $m = 1$ ve $f(x) = x^n$ alındığında istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 3.5.4 $n \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \setminus \{-1\}$, $[a, b] \subset [0, b^*]$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$|A(a^n, b^n) + A^n(a, b) - 2L_n^n(a, b)| \leq \frac{(b-a)^2}{1+3^{\frac{1}{q}}} 2^{1-\frac{1}{p}} |n(n-1)| \times A\left(a^{(n-2)}, b^{(n-2)}\right)$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: Sonuç 3.5.10 (b) de $x \in [a,b] \subset [0,b^*]$ ve n yukarıdaki gibi olmak üzere $m = 1$ ve $f(x) = x^n$ alındığında istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 3.5.5 $[a,b] \subset [0,b^*]$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise bu takdirde

$$\left|lnI(a,b) - \frac{1}{3} lnG(a,b) - \frac{2}{3} lnA(a,b)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{3.2^4} \times \left[\left\{\left(\frac{59}{192}\right)^{1/q} + \left(\frac{133}{192}\right)^{1/q}\right\}\frac{2}{a^2} + \left\{\left(\frac{133}{192}\right)^{1/q} + \left(\frac{59}{192}\right)^{1/q}\right\}\frac{2}{b^2}\right]$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: Sonuç 3.5.10 (b) de $f(x) = ln\left(\frac{1}{x}\right)$ alındığında istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 3.5.6 $n \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \setminus \{-1\}$, $[a,b] \subset [0,b^*]$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $m = 1$ ise bu takdirde

$$\left|\frac{1}{3} A(a^n, b^n) + \frac{2}{3} A^n(a,b) - 2L_n^n(a,b)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{3.2^4} |n(n-1)|$$

$$\times \left[\left\{\left(\frac{59}{192}\right)^{1/q} + \left(\frac{133}{192}\right)^{1/q}\right\} a^{(n-2)} + \left\{\left(\frac{133}{192}\right)^{1/q} + \left(\frac{59}{192}\right)^{1/q}\right\} a^{(n-2)}\right]$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: Sonuç 3.5.10 (a) de $x \in [a,b] \subset [0,b^*]$ ve n yukarıdaki gibi olmak üzere $m = 1$ ve $f(x) = x^n$ alındığında istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 3.5.7 $[a,b] \subset [0,b^*]$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise bu takdirde

$$|H^{-1}(a,b) + A^{-1}(a,b) - 2L^{-1}(a,b)| \leq (b-a)^2 \left\{\frac{\sqrt{\pi} p \Gamma(p)}{\Gamma\left(p + \frac{3}{2}\right)}\right\}^{1/p} \left\{\frac{1 + 3^{\frac{1}{q}}}{2^{4+\frac{1}{q}}}\right\} A(a^{-3}, b^{-3})$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: Sonuç 3.5.9 (a) da $x \in [a,b] \subset [0,b^*]$ için $f(x) = \frac{1}{x}$ alındığında istenilen sonuç elde edilir.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Son yıllarda eşitsizlikler ve konvekslik üzerine çok sayıda çalışmalar yapılmaktadır. Hem eşitsizlikler hem de konvekslik sadece matematiğin değil diğer birçok bilim dalının ilgisini çeken konular olmuştur ve çekmeye de devam edecektir. Tezimizin Giriş kısmında da belirttiğimiz gibi konvekslik fizik, biyoloji, tıp, güzel sanatlar, müzik, endüstri, finans matematiği, coğrafya, mühendislik, matematiksel istatistik, oyun teorisi, termodinamik, insan anatomisi ve günlük hayatımızda karşımıza çıkmaktadır.

Bu çalışmada $m-$ ve $(\alpha,m)-\text{Logaritmik}$ konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard ve Ostrowski tipli bazı integral eşitsizlikleri verilmiştir. Bir fonksiyonun türevinin mutlak değerinin $(\alpha,m)-$HA-konveks (kuvvetli HA-konveks) ve yine fonksiyonun türevinin mutlak değerinin herhangi bir kuvvetinin $(\alpha,m)-$HA-konveks (kuvvetli HA-konveks) olması durumlarında ele almış olduğumuz integral eşitlikleri Hölder ve Power-Mean integral eşitsizliklerinden yararlanarak elde edilmiştir. Daha sonra bir fonksiyonun türevinin mutlak değerinin herhangi bir kuvvetinin $(\alpha,m)-\text{GA}$ konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli bazı integral eşitsizlikleri verilmiştir. Son olarak $(\alpha,m)-$ konveks fonksiyonlar için Simpson tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Bu tezde konveks fonksiyonlar için verilen eşitsizliklerden yola çıkarak aynı eşitsizliklerin koordinatlarda konveks, $(h_1,h_2,m)-$ konveks ve benzeri tipten konveks fonsksiyonlar ve özel olarak stokastik süreçler için de sağlanıp sağlanmadığı araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

Azpeitia, A.G. 1994. Convex functions and the Hadamard inequality, Rev. Colombiana Mat., 28: 7-12.

Bagdasar, O. 2006. Inequalities and Applications, Bachelor's Degree Thesis, Babeş Bolyai University, Cluj Napoca.

Bai, R.F., Qi, F., Xi, B.Y. 2013. Hermite-Hadamard type inequalities for the m- and (α,m)-Logaritmically convex fonctions, Filomat 27(1), 1-7.

Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN: 975-442-035-1.

Bayraktar, M., 2010. Analiz, ISBN 978-605-395-412-5.

Beckenbach, E.F., Bellman, R. 1961. Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

Dragomir, S.S. 1992. Two functions in connection to Hadamard's inequalities, J. Math. Anal. Appl., 167: 49–56.

Dragomir, S.S. 1994. Some remarks on Hadamard's inequalities for convex functions, Extracta Math. 9 (2): 88–94.

Dragomir, S.S. 2000. Refinements of the Hermite–Hadamard integral inequality for log convex functions, RGMIA Res. Rep. Collect, 3 (4): 527–533.

Dragomir, S.S., Fitzpatrick, S. 1998. The Hadamard's inequality for s −convex functions in the first sense, Demonstratio Math., 31 (3): 633-642.

Dragomir, S.S., Fitzpatrick, S. 1999. The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense, Demonstratio Math., 32 (4): 687-696.

Dragomir, S.S., Mond, B. 1998. Integral inequalities of Hadamard's type for log-convex functions, Demonstratio Math., 31 (2): 354-364.

Dragomir, S.S., Pearce, C.E.M. 1998. Pearce, Quasi-convex functions and Hadamard's inequality, Bull. Austral. Math. Soc., 57 (1998), 377-385.

Dragomir, S.S., Pearce, C.E.M. 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications, RGMIA, Monographs, Victoria University.

Dragomir, S.S., Pecaric, J.E., Sandor, J. 1990. A note on the Jensen–Hadamard inequality, Anal. Num. Theor. Approx., 19: 29–34.

Dragomir, S. S., Pecaric, J., Persson, L. E. 1995. Some inequalities of Hadamard type, Soochow Journal of Mathematics, 21: 335-341.

Ekinci, A. 2014. Klasik Eşitsizlikler Yoluyla Konveks Fonksiyonlar İçin Integral Eşitsizlikler, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Greenberg, H. J., Pierskalla, W. P., 1970. A review of quasi convex functions, Reprinted from Operations Research, 19, 7.

Hardy, G., Littlewood, J.E., Polya, G. 1952. Inequalities, 2nd Ed., Cambridge University Press.

He, C.Y., Wang, Y., Xi, B.Y., Qi, F. 2017. Hermite-Hadamard type inequalities for (α,m)-HA and strongly (α,m)-convex fonctions, J. of Nonlinear Sci. Appl, 10: 205-2014.

Hudzik, H., Maligranda, L. 1994. Some remarks on s-convex functions, Aequationes Math., 48: 100-111.

Hwang, D.Y., Dragomir, S.S. 2014. Comparing two integral means for absolutely continuous functions whose absolute value of the derivative are convex and applications, Applied Mathematics and Computation, 230, 259-266.

Ion, D. A. 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions, Annals of University of CraiovaMath. Comp. Sci. Ser., vol. 34, 82-87.

İşcan, İ. 2014. Hermite-Hadamard type inequaities for harmonically convex functions Hacettepe Journal of Mathematics and Statistic 43, 6, 935-942.

İşcan, İ., 2015. Hermite-Hadamard-Fej´er Type Inequalities for convex Functions via Fractional Integrals, Stud. Univ. Babe¸s-Bolyai Math., 60, No. 3, 355-366.

İşcan, İ., Wu, S. 2014. Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions via fractional integrals, Applied Mathematics and Computation, 238: 237-244.

Jeffrey, A., Dai, H.H. 2008. Handbook of Mathematical Formulas and Integrals, Elsevier Inc. 4. Edition, 589, UK.

Kadakal, H. 2018. Yeni Tip İntegral Ortalamaları İçin Bazı Eşitsizlikler, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu Üniversitesi, Ordu.

Kadıoğlu, E., Kamali, M. 2013. Genel Matematik, ISBN: 978-975-8151-57-8.

Kırmacı, U.S., Özdemir, M.E. 2004. Some inequalities for mappings whose derivatives are bounded and applications to specials means of real numbers, Applied Math. Letters, 17: 641–645.

Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo J. J. 2006. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, Amsterdam.

Klaricic, M. B., Ozdemir, M. E., Pecaric, J. 2008. Hadamard type inequalities for m- convex and (α,m)-convex functions, J. Inequal. Pure Appl. Math. 9 no. 4, Art. 96, 12 pages.

Latif, M.A., Alomari, W., Hussain, S. 2012. On ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are m- and (α,m)-convex fonctions with applications, Tamking journal of Mathematics 43(4), 521-532.

Maden, S., Turhan, S., İşcan, İ. 2016. New Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for $GA-$convex functions, AIP conference proceedings 1726, 020043.1- 020043.5.

Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., Delgado, R. V. 2009. Inequalities: a mathematical olympiad approach. Springer Science & Business Media.

Merentes, N., Nikodem, K. 2010. Remarks on strongly convex functions, Aequat. Math., 80: 193-199.

Mitrinoviç, D.S. 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

Mitrinoviç, D.S., Pecaric, J.E., Fink, A.M. 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Niculescu, C. P. 2003. Convexity according to means, Math. Inequal. Appl. 6 (4), 571–579.

Niculescu, C.P., Persson, L.E. 2005. Convex Functions and Their Applications, Springer, Berlin.

Niculescu, C.P., Persson, L.E. 2006. Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach, Springer Science Business Media Inc.

Özdemir, M.E. 2000. A theorem on mappings with bounded derivatives with applications to quadrature rules and means, Appl. Math. Lett., 13: 19–25.

Özdemir, M.E., Avcı, M., Kavurmacı, H. 2011. Hermite-Hadamard type inequalities via (α,m)- convexity, Comput. and Math. with Appl., 61: 2614-2620.

Özdemir, M. E., Yıldız, C. 2013. The Hadamard's inequality for quasiconvex functions via fractional integrals, Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series Volume 40(2): 167-173.

Pachpatte, B.G. 2004. A note on integral inequalities involving two log-convex functions, Math. Ineq. Appl., 7 (4): 511–515.

Pales, Zs. 2000. Nonconvex functions and separation by power means, Math. Inequel. Appl., 3: 169-176.

Park, J. 2012. On the Simpson-Like Type Inequalities For Twice Differentiable (α,m)-convex Mappings, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 78 (5), 617-634.

Pecaric, L., Proschan, F., Tong, Y.L. 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc.

Roberts, A.W., Varberg, D.E. 1973. Convex Functions, Academic Press, New York.

Shuang, Y., Qi, F. 2017. Integral inequalities of the Hermite-Hadamard type for (α,m)-GA-convex fonctions, J. of Nonlinear Sci. Appl, 10(4): 1854-1860.

Shuang, Y., Wang, Y., Qi, F. 2016.Integral inequalities of Simpson's type for (α,m)-convex functions, J. of Nonlinear Sci. Appl, 9(5): 6364-6370.

Tunç, M. 2011. Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadaamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Tunç, M. 2013. Some integral inequalities for logarithmically convex functions, Journal of the Egyptian Mathematical Society, 22: 177-181.

Wright, E. M. 1954. An inequality for convex functions, Amer. Math. Monthly 61: 620-622.

Young, W. H. 1912. On Classes of Summable Functions and Their Fourier Series, Proc. Roy. Soc. London A 87, 225-229.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	**:**	Sümeyra YILDIRIMER
Doğum Yeri	**:**	Fatih/İSTANBUL
Doğum Tarihi	**:**	05.03.1989
Yabancı Dili	**:**	İngilizce
E-mail	**:**	sumeyraarpat@gmail.com
İletişim Bilgileri	**:**	Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/ Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik	İstanbul Üniversitesi	2015
Y. Lisans			

İş Deneyimi:

Görev	**Görev Yeri**	**Yıl**

Yayınlar:

1.

2.